

FA 7 A 222-I

OPERUM NEWTONI

TOMUS PRIMUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

LONDINI:

EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXIX.

AD

REGEM.

QUOD eorum, REX AUGUSTISSIME, perpaucis contigit, quorum animos ſtudium inceſſerat, in magno aliquo opere, TE Patronum compellandi, ut Principem ii ſuum cum muneribus non indignis videantur adiiſſe; id mihi eveniſſe, imperare mihi nequeo quin palam glorier. Nec vereor ut ea ſit hominis leviculi, et nimium ſibi arrogantis gloriatio. Haud enim noſtra ſunt hæc Opera, quæ Tibi dona fero, ſed NEWTONI. Ejus utique viri, cujus ſingularis ac divina quædam excellentia ingenii pulcherrimum illud præconium apud exteros etiam eſt conſecuta, " hunc hominem unum fuiſſe, poſt natos homines, " qui minùs gentis ſuæ quâ oriundus fuit, et ætatis quâ vixit, " quàm generis humani ornamento natus eſſe videretur." Qui primùm reconditam illam Mathematicorum ſcientiam ad illud perduxit faſtigium, quod vel principes illi viri Conon et Archimedes, ſi reviviſcere poſſent, mirarentur. Ita quæ illis difficillima erant, hic facillima reddidit; quæ verò illi nullâ arte ſuperari poſſe ſperaverant, hic, quantum vel uſus Mechanicês poſtulet, vel ad rerum naturalium inquiſitionem ſatis ſit, ſuperavit.

ſuperavit. Tum verò Phyſicam ingreſſus, Geometriâ illâ ſuâ facem præferente, quantas ibi tenebras diſcuſſit, quæ opinionum commenta delevit! Soli ſuam in centro Mundi ſedem vindicavit. Non ut ante eum Copernicus, et Veterum nonnulli à Philolao profecti, conjecturâ tantùm et probabili ratione fretus, ſed certiſſimis rationum concluſionibus, quas ex iis ipſis deduxit, quæ Aſtronomi in cælis fieri quotidie cernunt. Importuno Vorticum onere cælos liberavit; quippe Orbes Solidos jam olim diſturbaverant machinæ Tychonis. Fibras etiam ſuſtulit, quas, magneticâ virtute præditas, in corpore ſolari aliiſque cæleſtibus Keplerus poſuerat. Planetas vi proprii ponderis in orbe quemque ſuo retineri oſtendit. Eâdem vi Cometas circa Solem in orbem agi. Vagum et multiplicem Lunæ curſum calculis etiam ſubjicere docuit; ponderis ejus tam in Solem quàm in Terram ratione habitâ. Feliciſſimam Kepleri conjecturam de cauſâ Æſtus Marini, invictiſſimis rationibus, calculis etiam ſuffragantibus, firmavit. Figuræ corporis Terræ quænam ratio ſit, oſtendit; ut, ob propriam ejus circa axem ſuum vertiginem, ſub polis planior fiat, mediis partibus turgeſcat. Ut inde oriri neceſſe ſit, quod in Horologiis oſcillatoriis uſuvenit, inclinato magis axe lentiùs, erecto incitatiùs incedentibus. Ut etiam à figurâ Terræ inæqualiter globoſâ cauſa arceſſenda ſit, quæ puncta æquinoctialia per ſæcula retrorſum impulit. Spatium vacuum quod Scholæ tantopere reformidârunt, illud quidem rerum Naturam non modò pati, verùm etiam poſtulare oſtendit. Nec ratione tantùm id perſuaſit, ſed rem à ſenſu remotiſſimam ſenſibus quodammodo hominum et oculis ſubjecit; ipſâ quidem experientiâ in corporibus, tum pendulis, tum cadentibus, doctrinam ejus mirè comprobante. Luminis Naturam, quæ et ipſa olim abditiſſima fuerat, in clarâ luce poſuit. Ita ut occultas omnes,

quæ

quæ vocabantur, qualitates corporibus abjudicârit, & à rerum Naturâ prorſus exulare juſſerit. Nullam enim virtutem, nullam vim, ullius corporis propriam et innatam agnovit, præter unam illam quæ ſenſibus noſtris maximè patet, quam Inertiæ nuncupavit, quamque corporibus omnibus, pro materiæ cujuſque modo, communem ſtatuit. Hâc vi, accedente mutuâ quâdam corpuſculorum omnium nunc appetentiâ nunc fugâ, omnia voluit pro notiſſimis legibus mechanicis *magnum per Inane geri.* Appetentiam illam et fugam non corporibus ipſis naturalem ſtatuit; non cum Epicuro æternam, eandem tamen fortuitam; non à Veterum quorundam Amore et Odio, Juniorum Sympathiâ et Antipathiâ profectam; ſed à cauſâ quâdam incorporeâ, quæ, ut ſenſus noſtros maximè lateat, intellectum tamen et mentis aciem haud fugit. A Deo utique hæc omnia proficiſci palam vociferatus eſt. Hujus arbitrio omnia fuiſſe procreata, hujus Imperio ſubeſſe, hujus conſilio et ſapientiâ regi. Hunc rerum omnium Opificem, Conditorem, Dominum; Unum, Potentiſſimum, Æternum, Immenſum; ſine quo non pulcherrimus hic rerum ordo, non Res ulla, non Locus rerum ullus, non Tempora et Ætates, non Spatium ipſum vacuum, non Tempus individuum Æternitatis eſſet. Hunc ex aſſiduâ Naturæ contemplatione nôſſe plurimarum ſuarum vigiliarum maximum jucundiſſimumque fructum habuit. Nec ſatis tamen habuit ex Naturâ eum nôſſe, niſi uberior ejus ſolaque ſalutaris cognitio accederet, ex Filii ejus Evangelio unicè haurienda. Igitur in libris Sacri Codicis, non legendis modò, verùm etiam illuſtrandis, plurimum temporis et ſtudii poſuit. Neque inclinatâ ſolum id ætate, quod nonnulli perſuadere volunt, et ſenio jam hebetatâ mentis acie, ſed integris adhuc et cum maximè vigentibus corporis animique viribus. Neque alio conſilio Temporum emendationem ſuſcepiſſe videtur, niſi ut

 antiquiſſimis

antiquiſſimis Hiſtoricis Sacris ſua conſtaret fides; tum hominum monumentis, tum cæli converſionibus comprobata. Quippe cùm indiciis rerum vetuſtiſſimarum undique conquiſitis, temporum diſtributionibus ad calculos revocatis, motuum etiam cæleſtium ratione exquiſitè habitâ, eam omninò ſe obtinuiſſe confideret humani generis novitatem, quæ cum Telluris noſtræ Archæologiâ Sacrâ optimè conſifteret. Sed in excutiendis tam perantiquis illis Danielis quàm recentioribus Divi Joannis vaticiniis diligentiâ haud minore uſus eſt. Haud eâ mente, quòd temporis futuri exitum, à ſapientiſſimo rerum Conditore altâ nocte merſum, improbo conatu in lucem poſſe protrahi ſperaret: quippe inſipientis id fuiſſet, ultra hominem voluiſſe ſapere. Sed ut vaticinia multis retro ſæculis edita cum hominum memoriâ conferendo, oſtenderet Naturæ de Deo judicium (quod et ipſum quidem certiſſimum et reverâ divinum eſt) alio et apertiore longè Dei ipſius de ſe teſtimonio confirmari; unde docti æquè indoctique intelligerent Dei nutu et providentiâ omnia geri. Simul ut hominibus perſuaderet, ſanctos illos viros, qui ea prædixerant futura, quæ ſæcula pòſt nata fieri viderunt, Dei numine afflatos: nec vana ideo eos ceciniſſe, quæcunque de interitu hujus Mundi cecinere, de Improborum apud Inferos ſupplicio, de ævo beato, quod Boni et Fideles, Chriſti ſanguine redempti, cum Deo ſempiternum agent. Hanc tantam tamque variam ſummi viri doctrinam, eximias hujus animi præcellentis dotes commendabat ſingularis innocentia vitæ, raraque vel priſcis etiam temporibus morum ſanctimonia. Hujus Viri ſcripta (quæ eſt hominum incuria) ſparſa hunc uſque diem et disjecta, quanquam tertius à quinquageſimo nunc vertatur annus à quo è vivis exceſſit, nunc primùm in unum corpus collecta, Tuis, Rex Optume, auſpiciis in lucem prodire incipiunt. Metuendum eſſet, ne iniquis admodum temporibus,

temporibus, niſi Te Patronum haberent. Quis enim inter ſtrepitus armorum civilium Philoſophiæ locus? Fuiſſe tamen, in hâc atrocitate temporum, qui Te Fautore et Auctore optimis Scientiis haud ſegniter operam navârint, ut ipſis non inhoneſtum, Tibi certè apud poſteros etiam glorioſum erit. Nec vana auguror, O Rex. Etenim hanc Tui veriſſimam laudem non Malorum obtrectatio, non ævi longinquitas abolere poterit: Te regnante, Scientiam tum naturalem tum divinam tanta incrementa cepiſſe, quantâ ſub Uno eorum nemine, qui Reges antè Te fuerunt, rebus etiam pacatiſſimis. Namque Newtonus longiſſimum ſuæ vitæ gloriæque curriculum quinque Principum temporibus æquavit. Nondum bis decem Anni ſunt cùm Tu regnare orſus es, jamque vidimus remotiſſimos marium tractus Navibus Tuis plus ſemel exploratos; Vidimus conſtitutam, certiſſimis obſervationibus Aſtronomicis, Solis à Tellure noſtrâ diſtantiam; definitam ideo ſpatii omnis cis Saturnum ſtellam amplitudinem. Quod repertum etſi ipſa rerum Natura noſtris temporibus deſtinaverit, quippe quæ ſiderum motus eis legibus aſtrinxerat, ut expectatiſſimi illi ſtellæ Veneris per diſcum ſolarem tranſcurſus in aliam hominum ætatem haud inciderent; quòd pleniſſimus tamen ejus ſpectaculi fructus in Philoſophiam redundârit, Tuæ, Rex Inclyte, Munificentiæ nemo non acceptum refert. Gravitatis Doctrinam novis obſervationibus, Te annuente, in ultimâ Caledoniâ inſtitutis confirmatam vidimus. Perſcrutatam ſubtiliſſimis experimentis Aëris naturam. Vidimus, à Te ſuſtentatas, in Britanniâ Tuâ adoleſcere inſolitas hoc cœlo artes: Urbem novâ extructionum magnificentiâ ſuperbire: Celſa ſurgere Procerum palatia: Intùs etiam ea ſpectandis, non ut olim exterorum, ſed civium operibus condecorari. Quod verò hiſce omnibus majus eſt et divinius, præcipua religionis noſtræ dogmata, praviſſimis ſtudiis, proh dolor! impugnata, animoſè tamen ac naviter defenſa

fenſa vidimus. Vidimus ſcriptos codices ſacri textûs Hebraici undique conquiſitos, penitùs excuſſos; magno certè perennique literarum ſacrarum emolumento. Quod Opus ut labore conſtitit! ut ſumptibus! quibus populorum omnium Reges Procereſque ut impenſè ſe præbuerunt! Ita Tu ſcilicet propriæ largitatis exemplo omnium ſtudia accenderas. Videmus Prophetam diſertiſſimum Iſaiam, ejus Viri curis quem Tu Eccleſiæ Tuæ Londinenſi præfeciſti, modò non reviviſcere, & ſermone populari luculentè converſum myſteria Dei clarè et apertè loqui. Hæc Te regnante Ætas Noſtra vidit. Plura, credo, majoraque videbit. Ita omnes bonis literis, quarum Te nôrunt amantiſſimum, impigri et alacres incumbunt. Faxit DEUS O. M. creſcat indies in hoc populo ſcientiæ amor. Te, Pater, tantum Doctrinarum Artiumque omnium Patronum, diu nobis ſoſpitet, tueatur, cuſtodiat. Tibi verò gratum precor ſit Munus, quod reverentiæ et officii cauſâ Tibi dicat, qui in ſubditorum Tuorum fideliſſimorum numero nomen ſuum profiteri geſtit, unus idem ex humillimis

SAMUEL HORSLEY.

LECTORI S.

SOLENT ii, qui in aliquâ re magnam ſui expectationem concitaverint, primùm omnibus modis oſtendere, officio ſe non defuiſſe; deinde apud æquos judices ſuffragia eorum bonâ cum ſpe opperiri. Quod etiamſi non artis eſſet, et conſuetudinis, tamen à nobis commodè faciendum eſt, qui Newtoni Opera cum inſigniore quodam apparatu in lucem edere decrevimus. Etenim, ſi illud verum ſit, quo gravior doctrinæ locus aliquis et ſplendidior, tanto magis cognitione atque induſtriâ egere, qui eum tradituri ſint; omnino nos neque exile munus, neque otioſum ſumus adepti.—Tum verò Auctorem ſequimur, ſuper graviſſimis rebus preſſè ſæpiùs et anguſtè locutum, præ ingenii amplitudine aſperum aliquando et perdifficilem; ita ut magnum Interpreti negotium faceſſerit, qui non tam omnia demonſtraviſſe, quàm velut ex oraculo edidiſſe, quæ mente animoque rata ſibi penitus habuerat, arbitrandus eſt. Igitur omnibus conſiliis, et quâcunque demum ratione enitendum eſt, quo plenior fiat et illuſtrior tanti hujus Viri explicatio. Ita cùm in decurſu operis ubique ea attulimus, quæ diſcentium induſtriæ ſuppetias eant, ſparſa tamen atque uſu et genere diverſa, anteire debet totius rei, et ordinis quem ſecuti ſumus tractatio. Quod et Tironibus magno certè adjumento futurum eſt, ſi quis manum porrigat, et iter ingreſſuris etiam viæ ſubſidia palam oſtendat.

Ex quo itaque publici juris fuit hujuſce Operis proſpectus, ita rem univerſam partiri ſtatuimus, ut primum è quinque Tomis abſolverent Newtoni tractatus omnes ad puram, quæ dicitur, Matheſin quodammodo pertinentes. Quorum etiam initio poſuimus Arithmeticam Univerſalem; poſt eam, cætera quæ ad Series et Fluxionum Doctrinam ſpectant Opuſcula. De ſingulis ſingulatim dicendum.

ARITHMETICAM UNIVERSALEM *perfecti Operis formâ caruiſſe nemo omnium eſt, qui non intelligat; cùm vix aliud præ ſe ferat, quàm Præ-*

Prælectionum Capita, quas Newtonus Cantabrigiæ jam olim è Cathedrâ tradebat. Ita monita et præcepta, quæ ibi deprehendas, Aphorismis ferè omnino conclusa sunt, neque ratiociniis firmata, neque demonstrationibus legitimis absoluta—Quin et de Algebræ inventoribus, aliisve qui, ante Newtonum, rem quadantenus promoverant, altum ubique silentium. Quæ omnia et in secundâ istius libri editione pariter desideramus; magno posteris infortunio, quòd, annis jam ingravescentibus, præterita repetere, et ultimam illis manum imponere Newtonus ipse non tulerit.

Igitur nusquam aliás ab Interprete magis elaborandum erat; ubi indaganda omnia: quæ nimis anguste tradita sunt, fusiùs efferenda: et subtilis artificii Regulæ ferè ab integro ad examen revocandæ. Neque simplicem profectò super his impendimus laborem—Quæ levioris erant operæ, subjectis ubique annotationibus pro re natâ effecimus, explendo ea quæ breviùs apud Newtonum scripta sunt, et inventa, quæ aliunde originem traxerant, suis Auctoribus adjudicando. Graviora alia, et majoris momenti in Appendicem contulimus undeviginti capitibus expositam, quam in animo erat ad calcem statuisse, ni mole suâ ultra justam hujusce Tomi magnitudinem accreverat. Olim fortasse et seorsim ab hoc opere proditura est. Tantùm hìc loci subjecto Indice innuimus, quænam ibi præcipuè tractare visum est.

ELENCHUS CAPITUM
Appendicis in Arithmeticam Universalem.

I.

Traditur Methodus inveniendi numeros primos per cribrum Eratosthenis.

II.

Inventio divisorum simplicium ex mente Newtoni, demonstratione munitur.

III.

Agitur de inventione divisorum compositorum. Recensentur Cl. Virorum Carteſii, De Beaume, Bartholini, Van Hudde, et Wassanaeri

sanaeri in hâc re progressus. Ostenditur quantùm cæteros omnes Newtonus antecelluit.

IV, V, VI, VII.

In se habent demonstrationes Newtoni regularum, quæ divisoribus compositis inveniendis inserviant. Quas et fatemur è Gravesandi Specimine Commentarii in Arithmeticam Universalem *petitas esse; exili libello, cui tamen omne illud retulisse debuerant, quicquid in hoc opere Maclaurinus, Bernouillius et Clairaultius uspiam profecerint.*

VIII.

Instituitur demonstratio Newtoni Regulæ, quam ex Bombellio et aliis expresserat, de extrahendâ Radice quadraticâ Multinomii è quantitatibus integris et radicalibus compositi—Subjicitur et alterius regulæ, quam in eandem rem ex Stevino attulerat, explicatio—Harum ultimam ostenditur in irritum plerumque cadere, nisi priùs adhibitâ quâdam multinomii tractatione, quæ et sæpiùs operosior, quàm ut quis libenter ad eam confugiat.

IX.

Regula Newtoniana extrahendi altiores Radices ex quantitatibus numeralibus demonstratione confirmatur, quam etiam Gravesandi libellus sufficere potuisset. Subjicitur hujusce artificii origo; quantùm in illo, præ aliis Wassanaerus profecerat; et quàm longè in eodem opere cæteros omnes post se reliquit Newtonus.

X.

Traditur methodus generalis quantitatem incognitam, ubi binæ pluresve sint, exterminandi; quæ nusquam non sufficiet, ubi ad alias omnes frustra confugeris: modò satis artificiosè sit adhibita.

XI.

Exponitur methodus Fermatiana quantitates quotcunque surdas ex æquationibus tolli, ubi Clima˜ctismi ope Asymmetriâ eas liberare non datur.

XII.

Demonſtratur Carteſii Regula, cujus ope cognoſcitur quot ſint Radices negativæ, ubi æquationis radices nullæ ſint impoſſibiles. Cujus rei cùm Principia poſuerat Kæſtnerus è Gottingiæ Profeſſoribus, tamen Marte proprio eam proveximus, et omnino Geometricè abſolvimus.

XIII.

Ad mentem Cl. Viri Campbelli, apua Acta Regiæ Societatis, demonſtratione confirmatur Newtoni Regula, per quam ferè cognoſci poteſt, quot ſunt Radices impoſſibiles: ubi aliunde deprompta pleniùs tamen et perfectiùs ipſi abſolvimus.

XIV.

Newtoni Regula de colligendo ſummam poteſtatum Radicis incognitæ luculentè exponitur. Oſtenditur illam ipſam Albertum Girardum jam antea tradidiſſe, magni nominis virum, et in Analyſeos ſpecioſæ inventis modò non Vietæ æqualem, utcunque incuriâ hominum ferè in deſuetudinem abierit.

XV.

Adducitur Limitum demonſtratio, intra quos radices æquationum cenſendæ ſunt conſiſtere.

XVI.

Additamentum D^ni D^ris B. Taylori de Æquationum proprietatibus, Commentarii loco, ſubjicitur iis, quæ Newtonus in hâc re ſtatuerat.

XVII.

A principiis ſuis excutitur Regula de Æquationum Reductione per diviſores ſurdos. Quem locum ubi Caſtillioneus attigerat, nuſquam tamen expoſuit, quod apud Newtonum tam ſubtile atque elegans,

gans, quomodo inveniantur quantitates Græcis Litteris deſignatæ. Idem neque alius quiſquam, ut opinor, ante nos perfecit.

XVIII.

Breviter abſolvuntur ea, quæ à Vietâ et Alberto Girardo tradita ſunt, de proferendis Radicibus Æquationis Cubicæ $x^3-qx\mp r=0$ per anguli triſectionem, ubi Cardani Regulæ defecerint; ita ut impeditam rem Geometriæ ope pulcherrimè aliquis promoveat.

XIX.

Quæritur cauſa, unde Cardani Regulæ unquam deficiant, vel, ut aliter dicam, unde quantitates quæ reverâ et actu ſunt, unicè deſignari poſſint Algebraico ſermone, ut quæ exiſtentiam non habeant.

Et hæc quidem de Appendice noſtrâ dicta ſunto—Quam ſi flagitent homines Mathematici, abſoluto hoc Opere, et negotiis vacuus, ut et alia fortaſſe ad Newtonum ſpectantia, in lucem edere non gravabor.

TRANSEO *ad alteram hujuſce Tomi partem; quæ ut ſuprà dictum eſt, congeſta habet Newtoni de Seriebus et Fluxionum Doctrinâ Opuſcula. Quarum rerum, ſiqua apud nos ſit intelligentia, illam in univerſum omnem ex ipſius Newtoni ſcriptis conquiſitam eſſe edicimus; aliis relicturi*—erroremque hoſtibus illum—*velle minimo ſudore rem agere, Interpretum genus omne aſſectari, et aliunde potiùs quàm ab ipſo Auctore veram illius doctrinam exquirere. Quod ſi in aliis rebus inſcitiæ eſt, in iſtiuſmodi diſciplinâ graviùs vituperandum eſt, ubi ſubtilia omnia, et in acie novaculæ, quod aiunt, vera terminorum poſita ſit æſtimatio.*

Nihil itaque deſuturum arbitramur, modò penitus perſpecta et plenè cognita ſint ea, quæ Newtonus ipſe in arte ſuâ tradiderit. Neque aliò ſpectant, quæ ipſi adjicimus, quàm ut hæc ſtudia difficultate rei non tantopere homines abſterreant. Nimirum tam gravis argumenti tractationem univerſam in ordinem redegimus; etiam diſcendi ſubſidia ubique comparavimus; prætermiſſa exprimendo; explicando ea quæ anguſtè ponebantur, et ubique commonendo lectorem.

rem, quò intuens, a verâ Newtoni ſententiâ minùs aberret — Eo denique conſilio omnia concinnavimus, ut in poſterum nuſquam aliàs confugiant, qui ſublimioris Geometriæ Elementa penitus complecti ſecum ſtatuerint.

Jam verò brevi Monito *primùm oſtendimus, quali ordine Tirones ad legendum accedant. Quod ut ritè fiat, initio poſuimus Divini illius* PRINCIPIORUM *Operis Sectionem primam, quaſi anteſignanum aliquod, et ipſum cardinem in quo univerſa Doctrinæ Fluxionalis demonſtratio verſatur. Porrò illi Annotationes ſubjecimus, quæ probandi media ubique ſuppleant; Propoſitiones etiam Corollariis aliquot adauximus. Quæ et denuò apud ipſum in Principiis locum deprehenderis—Annotationes ſemel protuliſſe ſatis eſto.*

Hæc excipit Analyſis per Æquationes numero terminorum infinitas; *ad quam, inter alia, prima illius Regula demonſtratione Geometricâ è Fermatio munita eſt, et oſtenſum inſuper, quomodo Quadratura ad pag.* 7. *Edit. Joneſii det longitudinem Arcûs Ellipſeos.*

Tertium habent Locum Excerpta ex Epiſtolis Newtoni, *eadem ſanè, quæ ad calcem hujuſce tractatûs protulit Joneſius, tantùm ordine paululum imminutato, quo Tironibus fiat accommodatior. Quod ſi minùs legitimè factum eſſe quis exiſtimet, Epiſtolas etiamnum integras ſuo loco invenerit. Apud nos Excerpta ita ordinamus, ut primum ſit*

Ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ, *de formulis Algebraicis in Series infinitas reſolvendis, ab initio ſcilicet ad verba* " aliam excogitare adactus ſum" *(p.* 25, *Edit. Joneſ.)*

Secundum et tertium quæ et Joneſio ibidem poſita, alterum ſcilicet ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum poſteriore, *de ſeriebus condendis et invertendis—Alterum ex* Epiſtolâ Newtoni ad Walliſium *de radicibus æquationum fluxionalium extrahendis.*

Quartum denique ex parte aliquâ primi apud Joneſium conſtare volumus, ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ, *de Problematis per ſeries infinitas reſolvendis.*

Ita, ni fallor, accuratiùs et magis dilucidè ſe exceptura ſunt hæc fragmenta. Quænam opis noſtræ ſint, ad ſingula proferendum eſt.

Ad

Ad primum igitur, Theorematis Binomii demonſtrationem adhibuimus—Ad ſecundum, Newtoniana duo Theoremata tertio, neque minùs utili, Moivræano adduximus, de Infinitæ Æquationis radice extrahendâ, ſive, ut aliter dicam, de duabus ſeriebus ad unam redigendis. Quorum omnium demonſtrationem qui elicere velit, ad locum adeat Maclaurinum de Seriebus convergentibus, ubi et perſpicuè traditur, quidnam Parallelogrammum Newtonianum ad Series inveniendas conferat, et Regularum etiam, in Excerpto tertio, ſatis luculenta ad manus ſit explicatio.

Excerptorum ultimum plura comitantur, quæ noſtræ ſunt indaginis. Inter alia, recondita Jacobi Gregorii inventa Geometricè demonſtravimus; qui Tangentem et Secantem Logarithmicam definire novit ex Arcu, et Arcum viciſſim ex illis, nullâ Naturalium numerorum ratione habitâ. Omnino enim viſum eſt tam ſubtilis artificii Series, in hujus argumenti tractatione, non prætermittendas eſſe, præſertim etiam quòd in Commercio Epiſtolico inveniendæ ſint earum formulæ. Seriem Newtonianam pro arcu circulari in datâ ratione multiplicando ſive dividendo, mutatis tantùm ſignis, idem poſſe apud hyperbolicos ſectores oſtendimus; et in Circuli cum Hyperbolâ ſimilitudine, per hanc Seriem patefactâ, poni ea quæ Coleſius in Harmoniâ Menſurarum tam ſcienter inſtituit.

Ad locum expoſita eſt methodus arcum Ellipſeos *æſtimandi, in hoc Excerpto tradita, quam* ad Parabolam etiam et Hyperbolam *accommodavimus—ubi et ad manum fuit illam Ellipſeos et Hyperbolæ cognationem explicare, quam Algebraici innuunt, Hyperbolam alio nomine Ellipſin appellantes, cui axis ſit negativus; unde factum eſt, ut formulæ generales ad quamlibet è Sectionibus Conicis, nullo ferè negotio ad alias transferantur. Adhæc Arcûs Parabolici æſtimationi Coteſianæ in tantum immorati ſumus, ut Geometrica illius ratiocinia dilucidè ponerentur.*

Itaque omnia ſingulatim eruendo, ad Seriem Newtoni, quâ Sphæroidis ſegmenta ſecunda exponi poſſint, jam deventum eſt. Cujus profectò rationem univerſam, quos ortus habuit, et quænam artificia, parvo molimine indaganda eſſe nemo æquior ſtatuerit. Utcunque hoc ſit, per omnes hujus Excerpti ſeries, ſedulò fecimus, ne lateret uſpiam earum conformatio, ex ipſius Curvæ, quæ æſtimanda erat, affectibus aſſequenda.

Finem

Finem ex hâc parte fecimus, explicatis apertissimè Problematum Constructionibus, quæ veris saltem proximæ ex Infinitis æquationibus derivari possint: cujus rei nuda tantummodò exempla in Epistolis suprà memoratis extiterint.

Proximè collocatus est de Quadraturâ Curvarum *Libellus, præ cæteris quidem scientiæ ubertate insignis, idem tamen rerum compressione et amplitudine præ cæteris obscurus et gravis. Ita contentionem animi, et studium poscere acerrimum, et ingenii quasi formâ quâdam lucere, quæ prensantes tamen miserè effugeret. Quæ cùm ita sint, plusquam mediocri studio locum tam difficilem exercere visum est. Primò itaque Problema illud* Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones, *prorsus aliâ loquendi ratione explicuimus; eo sermone usi, qui in Methodi Indivisibilium suspicionem omnino cadere non poterit, quam et è Geometriâ exulare penitus, et sub umbras ire jam pridem oportebat.*

Demonstrationem Propositionis Quartæ, ut et omnium quæ in Quintæ præceptis paulo magis spinosa, et sextæ quoque luculentè absolvimus. Quarum ultimam jam ante nos Stewartus concinnaverat.

Explicuimus ea alioqui parùm intellecta, quæ monuit Newtonus in Propositionis septimæ Casu primo de coefficientibus θ, $\theta+\lambda\eta$, &c. *ubi aliquis eorum defecerit. E Maclaurino Casum secundum aliter demonstravimus, et universam hujus loci doctrinam Æquationibus Canonicis exposuimus ad usum Computandi, ni fallor, quàm maximè accommodatis.*

Propositionem octavam duplici probatione confirmavimus; et Nonæ Corollaria demonstrationibus partim è Stewarto partim nostris singulatim adauximus.

Undecimæ, coronidis loco, subjecimus Robinesii demonstrationem Latinè redditam.

Librum de Quadraturis excipiet Opus Posthumum de Fluxionibus; *modico tamen, si ad cætera species, Annotationum apparatu, ubi neque necesse erat fusiùs rem agere.*

Denique Tomum hunc claudent Methodus Differentialis *et* Enumeratio Linearum Tertii Ordinis. *Neque dubitavimus binos de proprio subjicere Libellos, alterum* de Geometriâ Fluxionum,

sive

sive Additamentum tractatûs Newtoniani de rationibus primis et ultimis; *alterum, quem* Logisticam Infinitorum *appellare libeat. Primo utique Elementa Doctrinæ Fluxionum ita absolvimus, ut integris et intaminatis Geometriæ ratiociniis omnia eluceant, eâtenus re provectâ, ut exponatur fluxio quantitatis* $x^{\frac{m}{n}}.y^{\frac{p}{q}}$.

Logistica Infinitorum *formulas habet, quas in computandi subsidium excogitavimus, ubi in series numero terminorum infinitas operationes Arithmeticæ instituendæ sint. Inter alia, Theorema Infinitomium Cl. Viri Moivræi aliter à nobis declaratum est, omnino etiam in majorem computandi utilitatem, quàm ex formâ auctoris, vel immutatione ipsius Cheynii.*

Quod reliquum est, omnia exposui, quæ ad insequentem Tomum, qualiacunque demum Matheseos incrementa, protulero. Quæ si graviter satis, et subtiliter à nobis disputata sunt, mitto quàm ornatè, et ad vulgi aucupium. Etenim is ego sum, qui in Philosophiæ tractatione, succum et sanguinem, non coloratam quandam speciem requiro. Omnino neque eos salutatum prodeo, qui absque labore ullo et industriæ periculo, in Epicuri hortulis, quod aiunt, omne scientiæ genus, et edita sapientum templa *somniant. Alacres, et exercitatos, et hisce studiis ardentes volo, qui cum Newtono philosophari cupiunt. Iidem etiam, ut æquum de me statuant judicium, nullus vereor; quanquam quæ hoc Libro conclusa sunt, neque numero neque pondere æquiparanda sunt iis, quæ posthac edituri sumus. Quod faustum felixque sit, absolutis hisce, Divinum* PRINCIPIORUM *Opus jampridem ingressi sumus, brevi sub eâdem formâ in lucem proditurum, modò Deus O. M. vitam nobis et vires integras in tantum indulserit.*

IN HOC TOMO CONTINENTUR

IPSIUS NEWTONI

I. *Arithmetica Universalis.* Pag. 1
II. *Tractatus de Rationibus Primis Ultimisque* p. 237
III. *Analysis per Æquationes numero terminorum Infinitas.* p. 257
IV. *Excerpta quædam ex Epistolis ad Series Fluxionesque pertinentia.* p. 287
V. *Tractatus de Quadraturâ Curvarum.* p. 333
VI. *Geometria Analytica sive specimina Artis Analyticæ.* p. 391
VII. *Methodus Differentialis.* p. 521
VIII. *Enumeratio Linearum tertii Ordinis.* p. 531

EDITORIS.

1. *Logistica Infinitorum.* p. 565
2. *Geometria Fluxionum sive Additamentum tractatûs Newtoniani de Rationibus Primis Ultimisque.* p. 573

ARITHMETICA UNIVERSALIS

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE ARITHMETICA

LIBER.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

Proœmium. Pag. 1

CAP. I. *De Vocum quarundam et Notarum ſignificatione.* p. 2

CAP. II. *De Additione.* p. 13

CAP. III. *De Subductione.* p. 16

CAP. IV. *De Multiplicatione.* p. 19

CAP. V. *De Diviſione.* p. 23

CAP. VI. *De Extractione Radicum.* p. 30

CAP. VII. *De Reductione Fractionum et Radicalium.* Sect. I. *De Reductione Fractionum ad minimos terminos,* p. 39. Sect. II. *De Inventione Diviſorum,* p. 40.—Sect. III. *De Reductione Fractionum ad Communem Denominatorem,* p. 48.—Sect. IV. *De Reductione Radicalium ad minimos terminos,* p. 49.—Sect. V. *De Reductione Radicalium ad eandem denominationem,* p. 51.—Sect. VI. *De Reductione Radicalium ad ſimpliciores terminos per extractionem radicum.* ibid.

CAP. VIII. *De formâ Æquationis.* p. 54

CAP. IX. *De concinnandâ Æquatione ſolitariâ.* p. 55

CAP. X. *De duabus pluribuſve Æquationibus in unam transformandis, ut incognitæ quantitates exterminentur,* p. 60.—Sect. II. *Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus,* ibid.—Sect. III. *Exterminatio quantitatis incognitæ ſubſtituendo pro eâ valorem ſuum,* p. 61.—Sect. IV. *Exterminatio quantitatis incognitæ*

cognitæ quæ plurium in utráque æquatione dimenſionum exiſtit, p. 62.—Sect. V. *De modo tollendi quantitates quotcunque ſurdas ex æquationibus.* p. 65

CAP. XI. *Quomodo Quæſtio aliqua ad æquationem redigatur.* p. 65

CAP. XII. *Quæſtiones Arithmeticæ.* p. 68

CAP. XIII. *Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad æquationem redigantur.* p. 81

CAP. XIV. *Problemata Geometrica.* p. 95

CAP. XV. *Quomodo Æquationes reſolvendæ ſunt.* p. 165

CAP. XVI. *De naturá Radicum Æquationis.* ibid.

CAP. XVII. *De Tranſmutationibus Æquationum.* p. 176

CAP. XVIII. *De Limitibus Æquationum.* p. 179

CAP. XIX. *Æquationum reductio per diviſores ſurdos.* p. 187

Appendix, Æquationum Conſtructio Linearis. p. 200

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE

ARITHMETICA LIBER.

PROŒMIUM.

COMPUTATIO vel fit per *numeros*, ut in vulgari Arithmeticâ, vel per *ſpecies*, ut Analyſtis mos eſt. Utraque iiſdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinitè & univerſaliter: ita ut enuntiata fere omnia quæ in hâc computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verùm Algebra maximè præcellit, quòd cum in Arithmeticâ Quæſtiones tantùm reſolvantur progrediendo a datis ad quæſitas quantitates, hæc a quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur; ut ad concluſionem aliquam, ſeu Æquationem, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata, quorum reſolutiones ex Arithmeticâ ſolâ fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

CAPUT PRIMUM.

Quiſquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum ſignificationes intelligat, & fundamentales addiſcat operationes, Additionem nempe, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures ſunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & reſolutionem æquationum contempletur.

CAP. I.

DE VOCUM QUARUNDAM ET NOTARUM SIGNIFICATIONE.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum, quàm abſtractam quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem, quæ pro unitate habetur, rationem intelligimus. Eſtque triplex; integer, fractus, & ſurdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars ſubmultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas eſt incommenſurabilis [a].

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter ſe nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri, in primo loco ante unitatem, ſive ad ſiniſtram ſcripti, denotant denas unitates, in ſecundo

[a] Hominibus ſcilicet, qui fictas ſuas rerum imagines ac notas magis quam res ipſas contemplari conſueverunt, paulatim mos obrepſit, quantitates eas omnes numeros dicendi, quæ per notas numerales ſignificari ſolent. Hinc locutiones abſonæ, doctiſſimorum etiam ſcriptorum uſu frequentatæ, *numerus unitate minor*, et *numerus ſurdus*: cum ea quidem *numeri* ſit natura ut unitate major ſit, utpote ex unitatum multitudine conflatus; cum *ſurdi* natura in eo ipſo poſita ſit, ut numerus non ſit, vel tanquam numerus intelligi nequeat. Melius eſſet dicere *quantitates fractas ſurdaſve*; vel ſi per neutra loquentes, *ſurda*, *fracta*, diceremus. Quorſum enim ſermo rerum naturæ repugnans?

[b] Apud veteres Arithmeticos frequens eſt hujuſmodi ſcriptura 064 ③, 732569 ③, 572083 ④. Interpretatio ſatis obvia. Numeri cujuſlibet propoſiti tot poſtremæ, dextram verſus, notæ pro decimarum notis ſunt habendæ, quot nota circulo incluſa indicat. Hæc autem decimarum notatio propter ambiguitatem merito rejecta eſt: nimirum cum ante Vietam quantitatis incognitæ et poteſtatum ejus, in operationibus algebraicis, uſitatiſſima eſſet deſignatio per notas numerales circulis incluſas; nempe hoc modo, ⓪, ①, ②, ③, &c. pro 1, x, x^2, x^3, &c. Junioribus notæ decimarum ab integrorum notis, commate vel puncto interpoſito, diſcriminari ſolent: 732,569 vel 732.569. Comma autem ſuperne poſitum notarum decimalium uſque iterationem indicat. 732,569' vel 732,5694'94'. Mihi ſolemne eſt, in numeris uti loquuntur naturalibus comma adhibere, puncto ad

ſecundo centenas, in tertio millenas, &c. ſic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, &c. Hos autem dicimus Fractos *Decimales*, quòd in ratione decimali perpetuò decreſcant. Et ad diſtinguendum integros a decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569, denotat ſeptingentas triginta duas unitates, unà cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732,|569, vel ſic 732·569, vel etiam ſic 732ı569, nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus 57104'2083, denotat quinquaginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates; unà cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes [b]. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur. Notatio.

Cum rei alicujus quantitas ignota eſt vel indeterminatè ſpectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, ſolemus per ſpeciem *aliquam ſeu literam deſignare.* Et ſi quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas ſpectemus, diſcriminis cauſâ, deſignamus initialibus Alphabetæ literis *a*, *b*, *c*, *d*, & incognitas finalibus *z*, *y*, *x*, &c. Aliqui pro cognitis ſubſtituunt conſonantes, vel majuſculas literas, & vocales, vel minuſculas, pro incognitis.

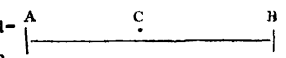
Quantitates vel Affirmativæ *ſunt ſeu majores nihilo*; *vel* Negativæ *ſeu nihilo minores* [c]. Sic in rebus humanis poſſeſſiones dici poſſunt

ad ſeparationem indicis Logarithmici a notis reliquis reſervato: eum ſcilicet in finem, ut in operationibus arithmeticis numeri naturales et logarithmi certâ aliquâ diſtinctione, oculis manifeſtâ, ſemper internoſcantur.

[c] Omnem nimirum quantitatem Arithmeticus tanquam ex aliis compoſitam conſiderare ſolet. Duplex autem compoſitionis modus, additionis alter, alter ſubductionis, hic illi contrarius. Auget enim additio, ſubductio minuit. Quantitates igitur, quæ novæ alicui procreandæ per additionem inſerviunt, affirmativæ dicuntur; negativæ quæ ſubductæ acervum minuunt: quas ob vim illam minuendi in compoſitione arithmeticâ, quaſi naturam veræ quantitatis contrariam induerent, Albertus Girardus, ni fallor, omnium primus (quem ſummum interea mathematicum agnoſco) durâ quâdam verborum figurâ, Diophanto et Vietæ prorſus ignotâ, quam vellem Carteſius et noſtrates minus avide arripuiſſent, *nihilo minores* dixit. Hinc novam, neſcio quam, nonnulli ſomniârunt quantitatis ſpeciem, cujus naturam in eo ponunt quod quantitatis notioni quam maxime repugnat. Hiſce Newtonus ſuffragrari nolens, de quantitatibus numero multitudinis locutus eſt. Neque enim dicit *quantitatem* vel affirmativam eſſe, ſeu majorem nihilo, vel negativam ſeu nihilo minorem; uti omnino ei loquendum fuiſſet, ſi de partitione aliquâ univerſi generis τῶ ποσῶ cogitâſſet, qualem illi cogitare exiſtimandi ſunt; ſed cum *quantitates* pluraliter

CAPUT PRIMUM.

poſſunt bona affirmativa, debita verò bona negativa. Inque motu locali progreſſus dici poteſt motus affirmativus, & regreſſus motus negativus, quia prior auget & poſterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometriâ, ſi linea verſus plagam quamvis ducta pro affirmativâ habeatur, negativa erit quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Veluti ſi AB dextrorſum ducatur, & BC ſiniſtrorſum; ac AB ſtatuatur affirmativa, tunc BC pro negativâ habebitur, eò quòd inter ducendum diminuit AB; redigitque vel ad breviorem AC; vel ad nullam, ſi forte C inciderit in ipſum A; vel ad minorem nullâ, [d] ſi BC longior fuerit quam AB de quâ auferatur. *Negativæ* quantitati deſignandæ ſignum −, *Affirmativæ* ſignum + præfigi ſolet. Signum ± incertum eſt, & ſignum ∓ etiam incertum, ſed priori contrarium.



In aggregato quantitatum nota + *ſignificat quantitatem ſuffixam eſſe cæteris* addendam, & *nota* − *eſſe* ſubducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere ſolemus. Sic 2+3, ſive 2 plus 3, valet ſummam numerorum 2 & 3, hoc eſt 5. Et 5−3, ſive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur ſubducendo 3 à 5, hoc eſt 2. Et −5+3 valet differentiam quæ oritur ſubducendo 5 à 3, hoc eſt −2. Et 6−1+3 valet 8. Item $a+b$ valet ſummam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur ſubducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet ſummam iſtius differentiæ & quantitatis c. Puta ſi a ſit 5; b, 2; & c, 8; tum $a+b$ valebit 7; & $a-b$, 3; & $a-b+c$, 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum eſt $2b+a$. Et ſic in aliis. Hæ autem notæ + & − dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur ſignum + ſubintelligi debet.

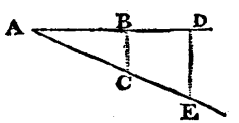
dicat, ſatis utique ſignificat, quas concretas dialectici vocarent, quales Arithmetici tractare ſolent, eas animo ſibi obverſari, et technicas earum Arithmeticorum compoſitiones. In Arithmeticâ igitur contrariis compoſitionum modis voces contrariæ, affirmatio et negatio, reſpondent. In aliis autem omnibus quibus phraſis algebraica accommodari ſolet, affirmatio et negatio, neutiquam diverſa rerum genera indicant, ſed relationes rerum in eodem genere contrarias.

[d] Hoc eſt, vel magis quam ad nullam redigit: novam ſcilicet apponit, a puncto A ſiniſtrorſum exporrectam, ſi BC longior fuerit quam AB.

MULTI-

NOTATIO.

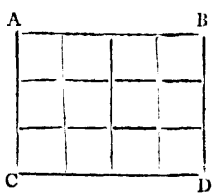
MULTIPLICATIO propriè dicitur, quæ ſit per numeros integros; utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicandâ, quoties numerus multiplicans ſit major unitate. Sed, aptioris vocabuli defectu, Multiplicatio etiam dici ſolet, quæ ſit per fractos aut ſurdos numeros; quærendo novam quantitatem in eâ quâcunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm ſit per abſtractos numeros ſed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, ſuperficies, motum localem, pondera, &c. quatenus hæ ad aliquam ſui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere poſſunt, & vices ſupplere. Quemadmodum ſi quantitas A multiplicanda ſit per lineam duodecim pedum, poſito quod linea bipedalis ſit unitas, producentur per iſtam multiplicationem 6 A, ſive ſexies A, perinde ac ſi A multiplicaretur per abſtractum numerum 6; ſiquidem 6 A ſit in eâ ratione ad A, quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem [e]. Atque ita ſi duas quaſvis lineas AC & AD per ſe multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod ſit ad AD ut AC ad unitatem AB. Quinetiam mos obtinuit, ut geneſis ſeu deſcriptio ſuperficiei, per lineam ſuper aliâ lineâ ad rectos angulos moventem, dicatur multiplicatio iſtarum linearum. Nam quàmvis linea utcunque multiplicata non poſſit evadere ſuperficies, adeoque hæc ſuperficiei e lineis generatio longè alia ſit a multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quòd numerus unitatum in alterutrâ lineâ multiplicatus per numerum unitatum in alterâ producat abſtractum numerum unitatum in ſuperficie lineis iſtis comprehensâ, ſi modò Unitas ſuperficialis definiatur, ut ſolet, Quadratum cujus latera ſunt



[e] Sic pecuniæ pecunias nonnunquam multiplicare dicuntur, ut in quæſtione illâ quæ tironibus proponi ſolet, quanta ſit pecuniæ ſumma quam ſumma quælibet data, puta 4*l.* 19*s.* 11¾*d.* ſemet ipſa multiplicans effecerit? Hujuſmodi quæſtioni generaliter reſpondere licet, eam fore ſummam multiplicatione effectam, quæ ad ſummam propoſitam rationem habeat quam propoſita ad unitatem nummariam. Unitatem autem nummariam in quânam nummorum ſpecie conſtitutam velit, dicendum eſt ei qui quæſtionem ponit. Poteſt enim ea in alio atque alio genere ad arbitrium ſumi, & prout varie ſumpta fuerit, aliæ atque aliæ pecuniarum ſummæ e multiplicatione provenient.

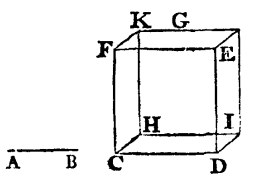
CAPUT PRIMUM.

ſunt unitates lineares [f]. Quemadmodum ſi recta AB conſtet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD conſtabit quater tribus ſeu duodecim unitatibus quadratis, ut inſpicienti Schema patebit. Eſtque ſimilis analogia ſolidi & ejus quod continuâ trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc viciſſim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimenſio*, *latus*, & ſimilia quæ ad Geometriam ſpectant, Arithmeticis tribuantur operationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimenſionum* non ſemper intelligimus ſuperficiem, ſed ut plurimum quantitatem alterius cujuſcunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & ſæpiſſime lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque



venient. Etenim ſi unam libram Anglicanam (*one pound ſterling*) unitatem ſtatueris, ſumma propoſita, 4*l.* 19*s.* 11¾*d.* ſemet ipſa multiplicans faciet 24*l.* 19*s.* 9½*d.* cum parte $\frac{1}{3\,6\,0}$ unius ſemioboli. Atqui ſi nummum argenteum (Anglice 1 *ſhilling*) pro unitate ſumas, conſimilis pecuniæ propoſitæ multiplicatio ſummam longè majorem procreabit; nempe 499*l.* 15*s.* 10*d.* cum parte $\frac{1}{48}$ unius ſemioboli: majorem adhuc, ſi denarium (Anglice *a penny*) pro unitate haberi velis; provenient enim 5997*l.* 10*s.* cum parte $\frac{1}{4}$ unius ſemioboli: tum vero maximam, ſi unitatem nummariam, in infimâ nummorum ſpecie conſtitutam, uni tantum ſemiobolo (*a farthing*) æquaveris. Ita enim ſummæ propoſitæ in ſeipſam multiplicatio libras Anglicanas 23990 cum uno ſemiobolo fecerit: 23990*l.* 0*s.* 0½*d.*

[f] Parallelogramma ſcilicet, vel parallelepipeda æquiangularia inter ſe rationem habent e laterum rationibus compoſitam. Numeri quoque, e duobus tribuſve numeris mutuâ multiplicatione facti, inter ſe rationem habent e rationibus numerorum, quorum multiplicationibus facti ſunt, compoſitam. Sit igitur recta AB ad rectam CD ut unitas ad numerum quemlibet *m*. Eadem vero recta AB ad aliam rectam DE proportionem habeat quam unitas ad alium aliquem numerum *n*. Numeri autem *n*, *m*, inter ſe multiplicati numerum *p* faciant. Rectis autem, CD, DE, ad perpendiculum compoſitis rectangulum DF compleatur. Quadratum ex AB ad rectangulum DF proportionem habet ex proportionibus rectæ AB ad CD, ejuſdemque AB ad DE compoſitam: compoſitam igitur e rationibus unitatis ad numerum *m*, et unitatis ad numerum *n*. Habet autem unitas ad numerum *p* rationem e rationibus unitatis ad numeros *m* et *n* compoſitam. Quadratum igitur ex AB ad rectangulum DF proportionem habet quam unitas ad numerum *p*. Unitas autem metitur numerum *p*. Quadratum igitur ex AB rectangulum DF toties metietur. Atque eadem erit argumentatio, quæcunque ſint longitudines rectarum CD, DE, modò ſingulæ ad rectam AB proportionem habeant numeri alicujus ad unitatem. Quadratum utique ex AB rectangula omnia, ejuſmodi rectis comprehenſa, metietur, toties unumquodque, quoties unitas numerum *p* metiatur, e numeris illis, *m*, *n* factum, qui ad unitatem rationes habeant quam rectæ CD, DE, ad rectam AB. Planum rectanguli DF, in



1 *m* *n*
p
q
r

Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimenſionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & ſic in aliis. NOTATIO.

Numerus ſpeciei alicui immediatè præfixus denotat ſpeciem illam toties ſumendam eſſe. Sic 2 *a* denotat duo *a*, 3 *b* tria *b*, 15 *x* quindecim *x*. &.

Duæ vel plures ſpecies immediatè connexæ deſignant factum, *ſeu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in ſe invicem.* Sic *a b* denotat quantitatem quæ fit multiplicando *a* per *b*. Et *a b x*, denotat quantitatem quæ fit multiplicando *a* per *b*, & factum illud per *x*. Puta ſi *a* ſit 2, & *b* ſit 3, & *x* ſit 5, tum *a b* erit 6, & *a b x*, 30.

Inter quantitates ſeſe multiplicantes, nota ×, vel vocabulum *in*, ad factum deſignandum nonnunquam interſcribitur. Sic 3 × 5, vel 3 in 5, denotat 15. Sed uſus harum notarum præ-

in puncto D ad perpendiculum inſiſtat recta DI, quæ ſit ad AB ut numerus quidam *q* ad unitatem. Numeri autem *p*, *q* inter ſe multiplicati numerum *r* faciant, et parallelepipedon DK compleatur. Cubus ex AB ad parallelepipedon DK proportionem habet ex proportionibus quadrati ex AB ad rectangulum DF, et rectæ AB ad rectam DI compoſitam: Compoſitam igitur e rationibus unitatis ad numerum *p*, et unitatis ad numerum *q*. Habet autem unitas ad numerum *r* rationem e rationibus unitatis ad numeros *p* et *q* compoſitam. Cubus igitur ex AB ad parallelepipedon DK proportionem habet quam unitas ad numerum *r*. Unitas autem metitur numerum *r*. Cubus igitur ex AB parallelepipedon DK toties metietur. Atque ſimilis erit argumentatio, quæcunque demum rectæ DI longitudo ſit, modo talis ea ſit quæ ad rectam AB proportionem habeat numeri alicujus ad unitatem. Cubus ſcilicet ex AB parallelepipeda omnia rectangulo DF et rectâ DI comprehenſa metietur, toties unumquodque, quoties unitas numerum illum *r* metiatur, e numeris *m*, *n*, *q* factum, qui ad unitatem rationes habeant rectarum CD, DE, DI ad rectam AB.

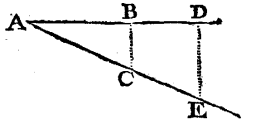
Hinc ſi ſcala quædam longitudinum a rectâ AB originem et initium trahat, quæ proinde illius ſcalæ unitas linearis dicenda eſt, e longitudinibus hujus ſcalæ ad perpendiculum compoſitis aliam quandam *ſuperficierum* ſcalam formare licebit, quæ a quadrato rectæ AB initium ſumet. Item e rectis ſcalæ primæ, cum rectangulis ſcalæ ſuperficiariæ ad perpendiculum compoſitis, formari poteſt *ſolidorum* ſcala, quæ ab ejuſdem AB cubo originem trahet. Hanc ſcilicet ob cauſam quadratum ex AB unitatis ſuperficiariæ nomen ſortietur, et cubus ex AB unitas ſolida quodam modo dici merebitur. Atque hâc analogiâ moti Veteres voces Geometriæ proprias *planum*, *ſolidum*, *quadratum*, *cubum*, malo exemplo in Arithmeticam tranſtulerunt, et Juniores viciſſim verba Arithmeticès, *multiplicare*, *dividere*, in Geometriam. Quæ tamen non ita ſunt accipienda, ac ſi figuræ planæ et ſolidæ multiplicatione aliquâ, quæ ne intelligi quidem poteſt, e lineis procreatæ eſſent; ſed quòd ſpatii ſuperficiarii ſolidive ex datâ menſurâ aliquâ lineari æſtimatio numeralis homini Arithmetico per multiplicationem ineunda ſit. E contrario linearum longitudines vel ſuperficierum planitiæ, ex datis menſuris ſuperficiariis ſolidiſve, per diviſionem numeris definiendæ ſunt.

[g] Antiqui moris erat coefficientem numeralem literæ ſuffigere (x 3 pro $3x$). Præpoſitus eſt, confuſionis evitandæ gratiâ, ex quo Carteſius inſtituit notis numeralibus literæ radicali ſuperne ſuffixis, (ad hunc modum x^2. x^3. x^4.) quantitatum poteſtates deſignare, quas ante vel notâ numerali circulo incluſâ deſignabant. (Vide not. *b*) vel vocibus curtatis, vel iteratâ quoties opus eſſet literâ radicali. A quad. A. cub. A. biquad. vel *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. pro a^2, a^3, a^4, &c.

Caput Primum.

cipuus eſt, ubi compoſitæ quantitates ſeſe multiplicant. Veluti ſi $y-2b$ multiplicet $y+b$, terminos utriúſque multiplicatoris lineolâ ſuperimpoſitâ connectimus, & ſcribimus $\overline{y-2b}$ in $\overline{y+b}$, vel $\overline{y-2b} \times \overline{y+b}$.

Divisio propriè eſt quæ fit per numeros integros, quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividendâ quoties unitas ſit minor Diviſore. Sed ob analogiam vox etiam uſurpari ſolet, cum nova quantitas in ratione quâcunque ad quantitatem dividendam quæritur, quam habet unitas ad diviſorem; ſive diviſor ille ſit fractus, aut ſurdus numerus, aut alia cujuſvis generis Quantitatis. Sic ad dividendum lineam AE per lineam AC, exiſtente AB unitate; agenda eſt ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imo & Diviſio, propter ſimilitudinem quandam, dicitur, cum rectangulum ad datam lineam tanquam Baſem applicatur, ut inde noſcatur altitudo.



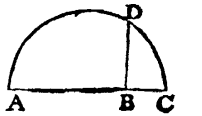
Quantitas infra quantitatem cum lineolâ interjectâ denotat quotum, *ſeu quantitatem quæ oritur ex diviſione ſuperioris quantitatis per inferiorem.* Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc eſt 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc eſt octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta ſi a ſit 15, & b, 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et ſic $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab-bb$ per $a+x$. Atque ita in aliis. Hujuſmodi autem quantitates *fractiones* dicuntur, parſque ſuperior *Numerator*, ac inferior *Denominator*.

Aliquando Diviſor quantitati diviſæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad deſignandum quantitatem quæ oritur ex diviſione $\frac{axx}{a+b}$ per $a-b$, ſcribi poteſt $\overline{a-b)}\frac{axx}{a+b}$.

Etſi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari ſolet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat ſummam utriuſque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum ſemiſſe.

Si quantitas ſeipſam multiplicet, numerus factorum, compendii gratiâ, ſuffigi ſolet. Sic pro *aaa* ſcribimus a^3, pro *aaaa* ſcribimus a^4, pro *aaaaa* ſcribimus a^5, & pro *aaabb* ſcribimus a^3bb vel a^3b^2. Puta ſi a ſit 5, & b ſit 2, tum a^3 erit $5\times5\times5$, ſive 125; & a^4 erit $5\times5\times5\times5$, ſive 625; atque a^3b^2 erit $5\times5\times5\times2\times2$, ſive 500. Ubi nota, quòd numerus inter duas ſpecies immediatè ſcriptus, ad priorem ſemper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat bb ter capiendum eſſe, ſed a in ſe bis ducendum. Nota etiam, quòd hæ quantitates tot *dimenſionum* vel *poteſtatum* vel *dignitatum* eſſe dicuntur, quot factoribus ſeu quantitatibus ſe multiplicantibus conſtant; & numerus ſuffixus vocatur *Index* poteſtatum vel dimenſionum. Sic aa eſt duarum dimenſionum vel poteſtatum, & a^3 trium, ut indicat ſuffixus numerus 3. Dicitur etiam aa quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & ſic porro. Et quantitas a, ex cujus in ſe multiplicatione hæ poteſtates generantur, dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati aa, cubica cubi a^3, &c. Notatio.

Cùm autem radix per ſeipſam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, &c. erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, &c. Adeoque quantitatis cujuſcunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum è duobus mediè proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum è tribus, & ſic præterea. Duplici igitur affectione radices innoteſcunt, tum quòd ſeipſas multiplicando producant ſuperiores poteſtates, tum quòd ſint è mediis proportionalibus inter iſtas poteſtates & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam eſſe 8, & cubicam 4, vel ex eo patet, quòd 8×8, & $4\times4\times4$ valeant 64; vel quòd ſit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16, & 16 ad 64. Et hinc ſi lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda eſt, produc eam ad C, ut ſit BC unitas; dein ſuper AC deſcribe ſemicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis eſt inter AB & unitatem BC.



CAPUT PRIMUM.

Ad designandam radicem *alicujus quantitatis præfigi solet nota*, $\surd$, *si radix sit quadratica*, & $\surd 3$: *si sit cubica*, & $\surd 4$: *si quadrato-quadratica*, &c. Sic $\surd 64$ denotat 8; & $\surd 3 : 64$ denotat 4; & $\surd aa$ denotat a; & $\surd ax$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\surd 3 : 4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut si a sit 3, & x, 12; tum $\surd ax$ erit $\surd 36$, seu 6; & $\surd 3 : 4axx$ erit $\surd 3 : 1728$, seu 12. Et hæ radices, ubi non licet extrahere, dicuntur *surdæ quantitates*, ut $\surd ax$; vel *surdi numeri*, ut $\surd 12$.

Nonnulli pro designandâ quadraticâ potestate usurpant q, pro cubicâ c, pro quadrato-quadraticâ qq, pro quadrato-cubicâ, qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipsius A, scribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubicâ ex $abb - x^3$ scribitur $\surd c : abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, sed quæ jam ferè exoleverunt [h].

Nota

[h] Commodissimè autem radices designantur adhibitis indicibus fractis, Alberti Gerardi more, plerisque etiam hodie usitato. Nempe pro radice quadraticâ quantitatis ab scribere solemus $\overline{ab}|^{\frac{1}{2}}$, pro radice cubicâ quantitatis a^2b, $\overline{a^2b}^{\frac{1}{3}}$: pro radice quadraticâ cubi quantitatis a, $a^{\frac{3}{2}}$: pro radice cubicâ quadrati quantitatis a, $a^{\frac{2}{3}}$: et similiter pro superiorum potestatum radicibus. Cujus quidem notationis ea est vis, ut cujusque sive potestatis sive radicis index locum ejus significet in perpetuâ quâdam, quæ ab unitate initium sumat, proportione convenientium serie. Sic quantitatis a^3 index ternarius significat quantitatem illam proportione convenientium tertiam post unitatem esse, quarum quantitas simplex a post unitatem prima est. Quantitatis a^5 index quinarius significat quantitatem illam quintam post unitatem esse, in eâdem proportione convenientium ulterius exporrectâ serie. Quantitatis autem $a^{\frac{1}{3}}$ index $\frac{1}{3}$ significat quantitatem illam unitati proximam, in perpetuâ quâdam proportione convenientium serie, cujus quantitas simplex a post unitatem tertia est. Quantitatis $a^{\frac{2}{3}}$ index $\frac{2}{3}$ significat quantitatem illam unitati proximam esse, in perpetuâ proportione convenientium serie, cujus tertium post unitatem locum quantitatis a potestas quadratica occupat. Denique quatitatis $a^{\frac{3}{2}}$ index $\frac{3}{2}$ significat quantitatem illam unitati proximam esse, in continuâ proportione convenientium serie, cujus secundum post unitatem locum quantitatis a potestas cubica occupat. In summâ, index radicalis $\frac{m}{n}$ significat radicem à numero n denominatam, ex potestate à numero m denominatâ, extrahendam. — Indices autem illi, sive potestatum sive radicum, Logarithmorum quodammodo sortiti sunt naturam. Etenim si pro Logarithmo rationis unitatis ad quantitatem aliquam sumatur 1, Logarithmus rationis unitatis ad potestatem illius quantitatis quadraticam binarius erit; ad cubicam ternarius; ad biquadraticam quaternarius; ad ulteriorem denique omnem potestatem numerus potestatis illius indici æqualis. Logarithmus autem rationis unitatis ad radicem ejusdem quantitatis quadraticam erit, $\frac{1}{2}$; ad radicem cubicam $\frac{1}{3}$; ad radicem biquadraticam; $\frac{1}{4}$ ad radicem $\frac{1}{n}$, erit $\frac{1}{n}$; ad radicem $\frac{2}{3}$, erit $\frac{2}{3}$; ad radicem $\frac{1}{n}$, erit; $\frac{1}{n}$ ad radicem $\frac{m}{n}$, erit $\frac{m}{n}$. Hinc haud inepta indicis definitio erit, eum esse quantitatem illam, quæ eam ad unitatem proportionem habeat, quam Logarithmus rationis inter unitatem & quantitatem potestati vel radici indicatæ æqualem ad Logarithmum rationis inter unitatem & quantitatem simplicem, unde potestas vel radix indicata ortum duxit. Hinc indicum eadem quæ Logarithmorum erit Logistica. Hinc etiam quantitates

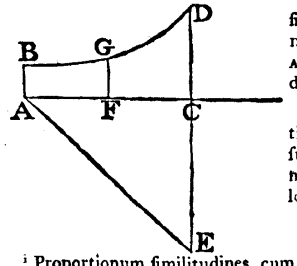
Nota $=$ *designat quantitates hinc inde* æquales *esse*. Sic $x = b$ designat x æqualem esse b. NOTAT. 0.

Nota : : *significat quantitates hinc inde* proportionales *esse*. Sic $a. b : : c. d$, significat esse a ad b ut c ad d. Et $a. b. e : : c. d. f$ esse a, b & e inter se, ut sunt c, d & f inter se respectivè; vel esse a ad c, b ad d & e ad f in eâdem ratione [i].

Denique notarum, quæ ex his componuntur, interpretatio per Analogiam facilè innotescit. Sic enim $\frac{3}{4} a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb; & $3\frac{a}{c}$, ter $\frac{a}{c}$; & $7\surd ax$, septies $\surd ax$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$; & $\frac{5ee}{4a+9e} Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$; hoc

tates $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ quæ, ipsâ quidem unitate ad initium scalæ Logarithmicæ constitutâ, Logarithmis negativis gaudent, indicibus etiam negativis haud incommodè exprimantur; hoc modo: $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{3}}$. Indices autem illi negativi positivis ita scilicet respondent, ut in perpetuâ quantitatum analogiâ, æqualia quasi ab unitate locorum intervalla indices æquales, positivi negativique, significent, sed a partibus contrariis. Ut si quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ unitate major sit, quantitas $a^{-\frac{m}{n}}$ unitate secundam eandem rationem erit minor. E diverso si quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ unitate minor sit, erit $a^{-\frac{m}{n}}$ unitate secundum eandem rationem major. Duarum vero $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$, in utroque casu, unitas ipsa proportione media erit. Generaliter igitur, indicum æqualium affirmatio et negatio analogiæ continuationem significat, gradibus iisdem, in partes contrarias.

Ex hâc denique notatione novum quoddam irrationalium genus in notitiam venit, quæ irrationaliter irrationalia haud immeritò dicantur, indicibus nimirum surdis designata. Hujusmodi sunt $\overline{ab}|^{\frac{2}{\surd 3}}$, $\overline{a^3b + 9a^2xx}^{\surd 3}$, modo quantitates simplices a, b, x, rationales sint.



Exponatur curva Logarithmica BGD, cujus ordinata AB fit unitas, ordinata autem CD quantitati ab æquetur. In DC productâ capiatur CE $=$ 2AC, junctâque AE, secetur AC in puncto F, ut fit AF ad AC ut CE ad AE. Per F ducatur ordinata; quæ curvæ in G occurrat. Recta FG quantitas erit notis $\overline{ab}|^{\frac{2}{\surd 3}}$ significata, quæ haud aliter, ut opinor, sub phantasiam cadit, nisi tanquam ordinata curvæ logarithmicæ, vel tanquam area hyperbolica, vel per aliquam saltem logarithmorum lineationem.

[i] Proportionum similitudines, cum exteris, sic designare soleo $a : b = c : d$ rationibus conferendis interpositâ scilicet æqualitatis, tanquam τοιοῦτος notâ.

CAPUT PRIMUM.

eſt per Quotum exortum diviſione $5ee$ per $4a + 9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum diviſione $7ax$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum diviſione $8a\sqrt{cx}$ per ſummam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et ſic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum diviſione differentiæ $3axx-x^3$ per ſummam $a+x$; & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti; & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per ſummam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb; & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et ſic in aliis.

Cæterùm nota, quòd in hujuſmodi complexis quantitatibus, non opus eſt ad ſignificationem ſingularum literarum ſemper attendere; ſed ſufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quòd $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ ſignificat radicem aggregati $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}$; quodcunq; tandem prodeat illud aggregatum, cùm numeri vel lineæ pro literis ſubſtituuntur. Atque ita quòd $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a\times\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ ſignificat quotum exortum diviſione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a\times\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}}$ per quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac ſi quantitates illæ ſimplices eſſent & cognitæ, etſi quænam ſint impræſentiarum prorſus ignoretur, & ad ſingularum partium conſtitutionem aut ſignificationem neutiquàm attendatur. Id quod monendum eſſe duxi, ne complexione terminorum Tirones quaſi conterriti in limine hæreant.

CAP.

CAPUT SECUNDUM.

ADDITIO.

DE ADDITIONE.

NUmerorum, ubi *non ſunt admodum compoſiti*, Additio per ſe manifeſta eſt. Sic quòd 7 & 9, ſeu 7 + 9, faciunt 16, & quòd 11 + 15 faciunt 26 primâ fronte patet. At in *magis compoſitis* opus peragitur *ſcribendo numeros ſerie deſcendente, & ſummas columnarum ſigillatim colligendo.* Quemadmodum ſi numeri 1357 & 172 addendi ſunt, ſcribe alterutrum 172 infra alterum 1357, ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 ſubjiciantur, cæterique numeri numeris correſpondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9; quem ſcribe infrà. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus poſteriorem numerum 2 ſcribe infrà, priorem vero 1 aſſerva proximis numeris, 1 & 3, adjiciendum. Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5; & ſcribe 5 infrà; & manebit tantùm 1 prima figura ſuperioris numeri, quæ etiam infrà ſcribenda eſt, & ſic habebitur ſumma 1529.

1357
172
1529

Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam ſummam redigantur, ſcribe in ſerie deſcendente, ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam conſtituant, & ſic præterea. Deinde dic 5 + 3 valent 8; & 8 + 9 valent 17; ſcribeque 7 infrà, & 1 adjice proximis numeris, dicendo 1 + 8 valent 9; 9 + 2 valent 11; ac 11 + 9 valent 20: Subſcriptoque 0, dic iterum ut antè, 2 + 8 valent 10; 10 + 9 valent 19; 19 + 4 valent 23; & 23 + 8 valent 31; adeoque aſſervato 3, ſubſcribe 1 ut antè; & iterum dic 3 + 1 valent 4; 4 + 3 valent 7; & 7 + 7 valent 14. Quare ſubſcribe 4, denuoque dic 1 + 1 valent 2; & 2 + 8 valent

87899
13403
1920
885
104107

CAPUT SECUNDUM.

lent 10; quem ultimò ſubſcribe, & omnium ſummam habebis 104107.

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre eſt.

630'953
51'0807
305'27
987'3037

In terminis Algebraicis Additio *fit connectendo quantitates addendas cum ſignis propriis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri.* Sic a & b faciunt $a+b$; a & $-b$ faciunt $a-b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a-b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a+9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$, vel $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$, nam perinde eſt quo ordine ſcribantur.

Quantitates affirmativæ, quæ ex parte ſpecierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos, quibus ſpecies multiplicantur. Sic $7a+9a$ faciunt $16a$. Et $11bc+15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c}+5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$; & $2\sqrt{ac}+7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$; & $6\sqrt{ab-xx}+7\sqrt{ab-xx}$ faciunt $13\sqrt{ab-xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinetiam $a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a+b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam ſi eſſent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et ſic $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}+3a\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ faciunt $\overline{5a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$, eo quòd $2a+3c$ & $3a$ faciant $5a+3c$.

Fractiones affirmativæ quarum idem eſt denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$; & $\frac{2ax}{b}+\frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; & $\frac{aa}{c}+\frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa+bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ. Sic

ADDITIO.

Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $-a-b\sqrt{ax}$.

Ubi verò *negativa quantitas affirmativæ adjicienda eſt* oportet affirmativam negativâ diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota, quòd ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$; ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compoſitarum quantitatum, convenit obſervare formam operationis ſuprà in additione numerorum expoſitam. Quemadmodum ſi $17ax-14a+3$, & $4a+2-8ax$, & $7a-9ax$ addendæ ſunt, diſpono eas in ſerie deſcendente, ita ſcilicet ut termini maximè affines ſtent in iiſdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in unâ columnâ, ſpecies $-14a$ & $4a$ & $7a$ in aliâ columnâ, atque ſpecies $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertiâ. Dein terminos cujuſque columnæ ſigillatim addo; dicendo 2 & 3 faciunt 5; quod ſubſcribo: dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$; & inſuper $-14a$ facit $-3a$; quod iterum ſubſcribo: denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$, & inſuper $17ax$ facit 0. Adeoque prodit ſumma $-3a+5$.

$17ax-14a+3$
$-8ax+4a+2$
$-9ax+7a$
$*\ -3a+5$

Eâdem methodo res in ſequentibus exemplis abſolvitur.

$12x+7a$	$11bc+7\sqrt{ac}$	$-\frac{4ax}{b}+6\sqrt{3+\frac{1}{5}}$
$7x+9a$	$15bc+2\sqrt{ac}$	$+\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3+\frac{2}{5}}$
$19x+16a$	$26bc-5\sqrt{ac}$	$\frac{7ax}{b}-\sqrt{3+\frac{3}{5}}$

$-6xx$

CAPUT SECUNDUM.

$$\begin{array}{r} -6xx+\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3 \quad +\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array} \qquad \begin{array}{r} aay+2a^3-\frac{a^4}{2y} \\ \hline -2ayy-4aay+\ a^3 \\ y^3+2ayy-\frac{1}{2}aay \\ \hline y^3 \quad *-3\frac{1}{2}aay+3a^3-\frac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^4+2ax^3 \\ -3x^4-2ax^3+\ 8\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ -2x^4+5bx^3-20\ a^3\sqrt{aa-xx} \\ \hline -4bx^3-\ 7\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ \hline *\ +\ bx^3+\ a^3\sqrt{aa+xx} \\ -\ 20a^3\sqrt{aa-xx}. \end{array}$$

CAPUT TERTIUM.

DE SUBDUCTIONE.

NUMERORUM *non nimis compoſitorum* inventio etiam Differentiæ per ſe patet. Quemadmodum quòd 9 de 17 relinquat 8. At in *magis compoſitis* Subductio fieri ſolet *ſubſcribendo numerum ablativum, & ſigillatim auferendo figuras inferiores de ſuperioribus.* Sic ad auferendum 63543 de 782579, ſubſcripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod ſcribe infrà:

Dein 4 de 7 relinquit 3, quod pariter ſcribe infrà:
Tum 5 de 5 relinquit 0, quod itidem ſubſcribe:
Poſtea 3 de 2 auferendum eſt: ſed cùm 3 ſit majus, figura 1 à proximâ figurâ 8 mutuò ſumi debet, quæ unà cum 2 faciat 12; à quo auferri poteſt 3, & reſtat 9; quod inſuper ſubſcribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum ſit, adde 1 ad 6, & ſumma 7 de 8 relinquet 1; quod etiam ſubſcribe. Denique cùm in inferiori numero nihil reſtet auferendum de ſuperiori 7, ſubſcribe etiam 7, & ſic tandem habes differentiam 719036.

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

Cæterùm

SUBDUCTIO.

Cæterùm omnino cavendum eſt, ut figuræ numeri ablativi ſubſcribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, &c. Sicut in Additione dictum eſt. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non diſpones numeros hoc modo $^{5}_{0},^{47}_{63}$; ſed ſic $^{547}_{0},_{63}$; ita nempe ut circulus, qui locum unitatum in decimali occupat, ſubjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis ſuperioris numeri ſubintellectis, dic 3 de 0 auferendum eſſe; ſed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuò ſumi, ut 0 evadat 10; à quo 3 auferri poteſt, & dabit 7, quod infrà ſcribe. Dein illud 1 quod mutuò ſumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de ſuperiore 0 auferendum eſt; ſed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori ſumi, ut 0 evadat 10; & 7 de 10 relinquet 3, quod ſimiliter infrà ſcribendum eſt. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6; quod itidem ſubſcribe. Denique figuras etiam 54, ſiquidem de illis nihil amplius auferendum reſtat, ſubſcribe, & habebis reſiduum 546'37.

$$\begin{array}{r} 547 \\ 0'63 \\ \hline 546'37 \end{array}$$

Exercitationis gratiâ plura, tum in integris tum in decimalibus numeris, exempla ſubjecimus.

$$\begin{array}{cccccc} 1673 & 1673 & 458074 & 35'72 & 46,5003 & 308,7 \\ \underline{1541} & \underline{1580} & \underline{9205} & \underline{14'32} & \underline{3,078} & \underline{25,74} \\ 132 & 93 & 448869 & 21'4 & 43,4223 & 282,96 \end{array}$$

Siquando major numerus de minori auferendus eſt, oportet minorem de majore auferre, & reſiduo præfigere negativum ſignum. Veluti ſi auferendum ſit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & reſiduo 132 præfigo ſignum −.

In terminis Algebraicis Subductio *fit connectendo quantitates, cum ſignis omnibus quantitatis ſubducendæ mutatis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri*, perinde ut in Additione factum eſt. Sic + 7 *a* de + 9 *a* relinquit + 9 *a* − 7 *a*, ſive 2 *a*; − 7 *a* de + 9 *a* relinquit + 9 *a* + 7 *a*, ſive 16 *a*; + 7 *a* de − 9 *a* relinquit − 9 *a* − 7 *a*, ſive − 16 *a*; & − 7 *a* de − 9 *a* relinquit − 9 *a* + 7 *a*, ſive − 2 *a*. Sic $3\frac{a}{c}$ de

CAPUT TERTIUM.

$5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$ relinquit $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ ſive $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ ſive $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ ſive $\frac{-aa+2ab}{c}$: Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$ ſive $2x\sqrt{ax}$. Et ſic in aliis.

Cæterùm ubi quantitates pluribus terminis conſtant, operatio perinde ac in numeris inſtitui poteſt. Id quod in ſequentibus exemplis videre eſt.

$$\frac{12x+7a}{7x+9a}\cdot\frac{15bc+2\sqrt{ac}}{-11bc+7\sqrt{ac}}:\frac{5x^3+\frac{5}{7}x}{6xx-\frac{3}{7}x}$$
$$\frac{5x-2a}{26bc-5\sqrt{ac}}\qquad\frac{5x^3-6xx+\frac{8}{7}x}{}$$

$$\frac{\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5}}{\frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5}}\cdot\qquad\frac{\frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5}}{}$$

CAPUT QUARTUM.

MULTIPLICATIO.

DE MULTIPLICATIONE.

NUMERI qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiſcendi ſunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35; quòdque 8 in 9 facit 72, &c. Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam inſtituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet, ſubſcribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus poſteriorem figuram 0, ſcribe infrà 4, priorem vero 2 reſerva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2, & fit 38; cujus poſteriorem figuram 8 ut antè ſubſcribe, & priorem 3 reſerva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter ſubſcripto, habebitur 3180, numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

```
 795
   4
3180
```

Porrò ſi 9043 multiplicandus eſt per 2305, ſcribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut antè, & multiplica ſuperiorem 9043, primò per 5 pro more oſtenſo; & emerget 45215: dein per 0, & emerget 0000: tertio per 3, & emerget 27129: denique per 2, & emerget 18086. Hoſque ſic emergentes numeros in ſerie deſcendente ita ſcribe, ut cujuſque inferioris ultima figura ſit uno loco proprior ſiniſtræ, quàm ultima ſuperioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per 2305.

```
 9043
 2305
45215
0000
27129
18086
20844115
```

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

CAPUT QUARTUM.

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
2099,6	10036	39025
	137,9950	0,05151300

Sed nota, quòd *in prodeunte numero tot ſemper figuræ ad dextram pro decimalibus abſcindi debent, quot ſunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et ſi fortè non ſint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi ſunt, ut hîc ſit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros, & ſpecies in ſpecies, ac ſtatuendo factum Affirmativum, *ſi ambo factores ſint affirmativi aut ambo negativi, &* Negativum *ſi ſecus.*

Sic $2a$ in $3b$, vel $-2a$ in $-3b$, facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$, vel $-2a$ in $3b$, facit $-6ab$. Et ſic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$, ſive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12, & -3 in -4 facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores.

Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6\times\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ ſeu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit $\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$; ut pateat, ſi 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$, adhibendo unitatem pro Denominatore. Et ſic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota, quòd $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$, & $\frac{a}{c}bx$; nec non $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & ſic in aliis.

* Quantitates potentiales et radicales diverſarum denominationum ab eadem quantitate ſimplici, adhibitis indicibus fractis, multiplicantur indicum additione: ſiquidem logarithmi ſunt

MULTIPLICATIO.

Quantitates radicales ejuſdem denominationis (hoc eſt, ſi ſint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, &c.) multiplicantur ducendo terminos in ſe invicem ſub eodem ſigno radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$; & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt[3]{5ayy}$ in $\sqrt[3]{7ayz}$ facit $\sqrt[3]{35aay^3z}$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$, hoc eſt * $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$, hoc eſt $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$, hoc eſt $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ k.

* Vide Cap. *De Notatione.*

Quantitates pluribus partibus conſtantes multiplicantur ducendo ſingulas unius partes in ſingulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum oſtenſum eſt. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit $a^3+2aac-abc$, quorum ſumma eſt $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$. Hujus multiplicationis ſpecimen, unà cum aliis conſimilibus exemplis, ſubjectum habes.

k Quantitates potentiales et radicales diverſarum denominationum ab eadem quantitate ſimplici, adhibitis indicibus fractis, multiplicantur indicum additione: ſiquidem logarithmi ſunt indices (vide cap. 1. not. b). Sic $a^2\times a^3=a^5$, et $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$, et $a^2\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{3}}$, et $a^{\frac{4}{3}}\times a^{\frac{7}{2}}=a^{\frac{29}{6}}$, et $a^5\times a^{-3}=a^2$, et $a^3\times a^{-5}=a^{-2}$, et $a^{\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}$, & $a^{-\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{4}{3}}=a^{-2\frac{2}{3}}$. et $a^3\times a^2\times a^{-5}=a^0=1$, et $a^{\frac{2}{5}}\times a^{-\frac{2}{5}}=a^0=1$.

$$\begin{array}{r} aa+2ac-bc \\ a-b \\ \hline -aab-2abc+bbc \\ a^3+2aac-abc \\ \hline a^3+2aac-aab-3abc+bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa \quad *-bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} yy+2ay-\frac{1}{2}aa \\ yy-2ay+aa \\ \hline aayy+2a^3y-\frac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3-4aayy+a^3y \\ y^4+2ay^3-\frac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad *-3\frac{1}{2}aayy+3a^3y-\frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2ax}{c}-\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ 3a+\sqrt{\frac{abb}{c}} \\ \hline \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}}-\frac{aab}{c} \\ \frac{6aax}{c}-3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ \hline \frac{6aax}{c}-3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}+\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}}-\frac{aab}{c}. \end{array}$$

CAPUT

CAPUT QUINTUM.

DE DIVISIONE.

Divisio.

DIVISIO in numeris inſtituitur, quærendo quot vicibus Diviſor in Dividendo continetur, totieſque auferendo, & ſcribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò ſi opus eſt, quamdiu diviſor auferri poteſt.

Sic ac dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63, & emergent 9 pro quoto præcisè; adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Inſuper ad dividendum 371 per 7, præfige diviſorem 7, & imprimis opus inſtituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Diviſore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Reſp. 5. Tum, ſcripto 5 in Quoto, aufer 5×7, ſeu 35, de 37, & reſtabit 2; cui adnecte ultimam figuram Dividendi, nempe 1, & fit 21, reliqua pars Dividendi, in quâ proximum opus inſtituendum eſt. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Reſp. 3. Quare ſcripto 3 in Quoto, aufer 3×7, ſeu 21, de 21, & reſtabit 0. Unde conſtat 53 eſſe numerum præcisè, qui oritur ex diviſione 371 per 7.

7)371(53	
35	
—	
21	
21	
—	
0	

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò inſtituens in initialibus figuris 47, dic quoties 23 continetur in 47? Reſp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto; & de 47 ſubduc 2×23, ſeu 46, reſtatque 1; cui ſubjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in ſubſequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in Quoto; & de 19, ſubduc 0×23, ſeu 0, & reſtat 19; cui ſubjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris,

CAPUT QUINTUM.

2 & 19, conjici poteſt, animadvertendo quoties 2 continetur in 19)? Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in Quoto; & de 198 ſubduc 8 × 23, ſeu 184; reſtabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod ſi hujuſmodi fractio minùs placeat, poſſis Diviſionem in Fractionibus decimalibus ultrà ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 ſubduc 6 × 23, ſeu 138, & reſtabit 2; cui adnecte 0 ut ante. Et ſic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

```
23)4798(208,6086, &c.
 46
 --
  19
  00
  --
  198
  184
  ---
   140
   138
   ---
    20
    00
    --
    200
    184
    ---
     160
```

Ad eundum modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46, 1 dividitur, & prodit 0, 07639, &c. *Ubi nota, quòd in Quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt, quot ſunt in ultimo dividuo plures quàm in diviſore:* Ut in hoc exemplo quinque, quia ſex ſunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Diviſore 46,1.

```
46,1)3,5218(0,07639
    322,7
    -----
     2948
     2766
     ----
      1820
      1383
      ----
       4370
```

Exempla plura lucis gratiâ ſubjunximus.

```
9043)20844115(2305.
  18086
  -----
   27581
   27129
   -----
    45215
    45215
    -----
        0
```

```
72,4)2099,6(29
   1448
   ----
    6516
    6516
    ----
       0
```

```
50,18)137,995(2,75.
  10036
  -----
   37635
   35126
   -----
    25090
    25090
    -----
        0
```

```
0,0132)0,051513(3,9025
   396
   ---
   1191
   1188
   ----
    330
    264
    ---
     660
     660
     ---
       0
```


DIVISIO.

In terminis Algebraicis Diviſio fit reſolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab divif. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ div. per 3 dat $\frac{2}{5}$; & viciſſim $\frac{6}{5}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{1}$, ſeu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & viciſſim divif. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$, ſeu a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ div. per $\sqrt[3]{5ayy}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$, ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujuſmodi reſolutionibus omninò cavendum eſt, ut

CAPUT QUINTUM.

quantitates ſint ejuſdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, numeratores Fractionum ad Numeratores, ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujuſque generis ad quantitates homogeneas.

Quòd ſi quantitas dividenda nequeat ſic per diviſorem reſolvi, ſufficit, ubi ambæ quantitates ſunt integræ, ſubſcribere Diviſorem cum lineolâ interjectâ. Sic ad dividendum ab per c, ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a, ſcribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$, vel $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et ſic $\sqrt{ax-xx}$ diviſ. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$, ſive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\ \sqrt{aa-2xx}$ diviſ. per $\overline{a-b}\ \sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi verò fractæ ſunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Diviſoris, ac Denominatorem in Numeratorem; & *factus prior* erit Numerator, ac *poſterior* Denominator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ ſcribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato ſcilicet a per d, & b per c. Parique ratione $\frac{3}{7}$ diviſ. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$: & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ diviſ. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; diviſ. autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^2x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ diviſ. per c (ſive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (ſive $\frac{c}{1}$) diviſ. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ div.

DIVISIO.

div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ diviſ. per $3\sqrt{cd}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ diviſ. per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Et ſic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis compoſita dividitur applicando ſingulos ejus terminos ad Diviſorem. Sic $aa+3ax-xx$ diviſum per a dat $a+3x-\frac{xx}{a}$. At ubi Diviſor etiam ex pluribus terminis conſtat, diviſio perinde ac in Numeris inſtitui debet. Sic ad dividendum $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$ per $a-b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Diviſoris in primo Dividendi? Reſp. aa. Quare ſcribe aa in Quoto, & ablato $a-b$ in aa, ſive a^3-aab, de Dividendo, reſtabit $2aac-3abc+bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rurſus quoties a continetur in $2aac$? Reſp. $2ac$. Quare ſcribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a-b$ in $2ac$, ſive $2aac-2abc$, de præfato Reſiduo, reſtabit etiamnum $-abc+bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Reſp. $-bc$. Et proinde ſcribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $a-b$ in $-bc$, ſive $-abc+bbc$, de noviſſimo Reſiduo, reſtabit nihil. Quod indicat Diviſionem peractam eſſe, prodeunte Quoto $aa+2ac-bc$

Cæterùm ut hujuſmodi operationes ad formam, quâ in Diviſione numerorum uſi ſumus, debitè reducantur, *termini tum dividendæ quantitatis tum Diviſoris juxta dimenſiones literæ alicujus, quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine diſponendi ſunt*, ita nempe ut illi primum locum occupent, in quibus litera iſta eſt plurimarum dimenſionum, iique ſecundum in quibus dimenſiones ejus ad maximas proximæ ſunt; Et ſic deinceps uſque ad terminos qui per literam iſtam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo ſi termini ordinentur juxta dimenſiones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum Diagramma.

Caput Quintum.

$$a-b)a^3 \overset{+2aac}{-aab} - 3abc + bbc (aa + 2ac - bc$$

$$a^3 - aab$$

$$0 + 2aac - 3abc$$
$$2aac - 2abc$$

$$0 - abc + bbc$$
$$- abc + bbc$$

$$0 \quad 0$$

Ubi videre eſt quòd terminus a^3, ſive a trium dimenſionum, occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique $\overset{2aac}{-aab}$, in quibus a eſt duarum dimenſionum, ſecundum occupant, & ſic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas ſic ſcribi; $a^3 \overset{+2c}{-b} aa - 3bca + bbc$: ubi termini ſecundum locum occupantes uniuntur, aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo ſi termini juxta dimenſiones literæ b diſponerentur, opus ſicut in proximo Diagrammate inſtitui deberet: Cujus explicationem adnectere viſum eſt.

$$-b+a)cbb \overset{-3ac}{-aa}\overset{+a^3}{b+2aac} (-cb \overset{+2ac}{+aa}$$

$$cbb - acb$$

$$0 \overset{-2ac}{-aa}\overset{+a^3}{b+2aac}$$
$$-2ac\,b + 2aac$$
$$-aa\,b + a^3$$

$$0 \quad 0$$

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Reſp. $-cb$. Quare ſcripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$, ſeu $bbc-acb$, & reſtabit in ſecundo loco $\overset{-2ac}{-aa}b$. Reſiduo huic adnecte, ſi placet, quantitates

Divisio.

tes in ultimo loco, nempe $\overset{a^3}{+2aac}$; & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\overset{-2ac}{-aa}b$? Reſp. $\overset{+2ac}{+aa}$. Quare his in Quoto ſcriptis, aufer $-b+a$ in $\overset{+2ac}{+aa}$, ſeu $\overset{-2ac}{-aa}b \overset{+2aac}{+a^3}$ & reſtabit nihil. Unde conſtat diviſionem peractam eſſe, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita ſi dividere oportet $aay^4 - aac^4 + yyc^4 + y^6 - 2y^4cc - a^6 - 2a^4cc - a^4yy$ per $yy - aa - cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy \overset{-aa}{-cc} \Big) y^6 \overset{+aa}{-2cc}y^4 \overset{-a^4}{+c^4}yy \overset{-a^6}{-2a^4cc} \overset{-aac^4}{}$. Dein Diviſionem ut in ſubjecto Diagrammate inſtituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus inſuper obſervandum eſt, quod ubi dimenſiones literæ, ad quam ordinatio fit, non in eâdem ubique progreſſione Arithmeticâ, ſed per ſaltum alicubi procedunt, locis vacuis ſubſtituitur nota *

$$yy \overset{-aa}{-cc} \Big) y^6 \overset{+aa}{-2cc}y^4 \overset{-a^4}{+c^4}yy \overset{-a^6}{-2a^4cc} \overset{-aac^4}{}$$

$$y^6 \overset{-aa}{-cc}y^4 \qquad \Big(y^4 \overset{+2aa}{-cc}yy \overset{+a^4}{+aacc}$$

$$0 \overset{+2aa}{-cc}y^4$$
$$+2aa\,y^4 - 2a^4$$
$$-cc\,y^4 - aaccyy$$
$$+c^4$$

$$0 \overset{+a^4}{+aacc}yy$$
$$+a^4 \overset{-a^6}{+aacc}yy \overset{-2a^4cc}{-aac^4}$$

$$0 \quad 0$$

$$a+b)aa* - bb(a-b$$

$$aa + ab$$

$$0 - ab$$
$$-ab - bb$$

$$0 \quad 0$$

$yy -$

CAPUT SEXTUM.

$$yy - 2ay + aa) \quad (yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa.$$
$$y^4 \;*\; -3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4$$
$$y^4 - 2ay^3 + aayy$$
$$0 + 2ay^3 - 4\tfrac{1}{2}aayy$$
$$+ 2ay^3 - 4\ aayy + 2a^3y$$
$$0 - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y$$
$$- \tfrac{1}{2}aayy + a^3y - \tfrac{1}{2}a^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$aa + ab\sqrt{2} + bb) \quad (aa - ab\sqrt{2} + bb$$
$$a^4 \quad * \quad * \quad * \quad + b^4$$
$$a^4 + a^3b\sqrt{2} + aabb$$
$$- a^3b\sqrt{2} - aabb$$
$$- a^3b\sqrt{2} - 2aabb - ab^3\sqrt{2}$$
$$+ aabb + ab^3\sqrt{2}$$
$$+ aabb + ab^3\sqrt{2} + b^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

Aliqui Diviſionem incipiunt ab ultimis terminis; ſed eodem recidit, ſi, inverſo terminorum ordine, incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi, ſed facillimam & commodiſſimam nôſſe ſufficit.

CAPUT SEXTUM.

DE EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus eſt*; *Dein figura*

[1] Neſcio an vulgò notum ſit, quod tamen eſte Theone refero, radicis quadraticæ inquiſitionem eodem prorſus modo Veteres inſtituiſſe. Petenda eſt operationis ratio à Theoremate formationis quadrati à radice binominali: $\overline{A+B}$quad. $=$ A quad. $+$ 2AB $+$ B quad. Conſimilem radicis cubicæ extractionem à Theoremate formationis cubi derivatam Arithmetici paſſim tradunt. Nam eâdem quidem viâ Nicolaus Tartaglia, et Tartagliæ diſcipulus Raphael Bombelli extractionum opus in gradibus etiam elatiſſimis abſolvebant, operationem utique pro radice quâque peculiarem

EXTRACTIO RADICUM.

figura in Quoto, ſeu Radice, ſcribenda, cujus quadratum figuræ vel figuris, ante primum punctum, aut æquale ſit, aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ ſigillatim invenientur, dividendo reſiduum per duplum radicis eatenus extractæ, & ſingulis vicibus auferendo è reſiduo illo factum à figurâ noviſſimè prodeunte & decuplo prædicti Diviſoris figurâ illâ aucti [1].

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9·98·56. Dein quære numerum, cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; ſcribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3 × 3 ſeu 9, reſtabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98, pro ſequente opere. Tum neglectâ ultimâ figurâ 8, dic quoties duplum 3, ſeu 6, continetur in priori 9? Reſp. 1. Quare ſcripto 1 in Quoto, aufer factum 1 × 61, ſeu 61, de 98: reſtabit 37; cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo inſtitui debet. Quare & hujus ultimâ figurâ, 6, neglectâ, dic quoties duplum 31, ſeu 62, continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici poteſt, animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Reſp. 6. Et ſcripto 6 in Quoto, aufer factum 6 × 626, ſeu 3756, & reſtabit nihil. Unde conſtat opus peractum eſſe; prodeunte Radice 316.

```
9·98·56(316
9
---
098
 61
---
3756
3756
---
   0
```

Atque ita ſi radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis factâ punctatione, quære numerum cujus quadratum (ſiquidem id nequeat æquari) ſit proximè minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies eſſe 4. Nam 5 × 5, ſive 25, major eſt quam 22, & 4 × 4, ſive 16, minor. Quare 4 erit pri-

liarem ordinando ſecundum theorema, quod vocant, ſyntheticum poteſtatis homologæ. Atque horum veſtigiis inſiſtens Franciſcus Vieta poteſtatum utcunque affectarum reſolutiones ſimilibus operationibus expediebat. Praxin Tartaglianam miro quodam acumine inventam, ordine luculento eximiâ præceptorum perſpicuitate et elegantiâ à Vietâ traditam, Harriotto et Oughtredo ſummopere excultam, licet ob immenſum in gradibus ultra-cubicis computationum laborem, evulgatis Newtoni inventis, brevi exoleverit, nihilominus ſedulo velim ediſcat ſiquis in hiſce diſciplinis perfectus eſſe velit. Siquidem in omni ſcientiarum genere, nôſſe quibus gradatim incrementis adoleverint, per ſe ſcitu jucundiſſimum eſt, et ad rerum ipſarum intelligentiam plurimum confert.

Caput Sextum.

ma figura radicis. Et hâc itaque in Quoto ſcriptâ, de 22 aufer quadratum 4 × 4, ſeu 16; reſiduoque 6 adjunge deſuper proximas figuras 17, & habebitur 617; cujus diviſione per duplum 4 elicienda eſt ſecunda figura radicis. Nempe, neglectâ ultimâ figurâ 7, dic quoties 8 continetur in 61? Reſp. 7. Quare ſcribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87, ſeu 609; & reſtabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887; cujus diviſione per duplum 47, ſeu 94, elicienda eſt tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791, cujus diviſione per duplum 470, ſeu 940, elicienda eſt ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879? Reſp. 9. Quare ſcribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

```
22'17'87'91(4709,43637 &c.
16
---
617
609
---
 88791
 84681
 -----
  4110.00
  3767 36
  -------
   3426400
   2825649
   -------
    60079100
    56513196
    --------
     356190400
     282566169
     ---------
      73624231
```

Cæterùm cùm factus 9 × 9409, ſeu 84681, ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio eſt numerum 4709 non eſſe radicem numeri 22178791 præciſè, ſed eâ paulo minorem exiſtere. Et in hoc caſu, aliiſque ſimilibus, ſi veram radicem magis appropinquare placeat, proſequenda eſt operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad reſiduum circulos duos in ſingulis operationibus. Sic reſiduum 4110, adnexis circulis, evadit 411000; cujus diviſione per duplum 4709, ſeu 9418, elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein ſcripto 4 in Quoto, aufer 4 × 94184, ſeu 376736, de 411000, & reſtabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari poteſt, prodeunte tandem radice 4709,43637, &c.

Ubi

Extractio Radicum.

Ubi vero radix ad medietatem, aut ultra, extracta eſt, cæteræ figuræ per diviſionem ſolam obtineri poſſunt. Ut in hoc exemplo, ſi radicem ad uſque novem figuras extrahere animus eſſet, poſtquam quinque priores 4709,4 extractæ ſunt, quatuor poſteriores 3637 elici poſſent dividendo reſiduum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum ſi radix ex 32976 ad uſque quinque figuras extrahi debet; poſtquam figuræ punctis notantur, ſcribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1 × 1, ſeu 1, maximum eſt quod in 3, figurâ primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, reſtabit 2. Dein huic, 2, annexis proximis figuris, 29, quære quoties duplum 1, ſeu 2, continetur in 22, & invenies quidem pluſquam 10: ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu, quia factus 9 × 29, ſive 261, major eſt quàm 229, unde deberet auferri. Quare pone tantùm 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8 × 28, ſive 224, reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18, ſeu 36, continetur in 57, & invenies 1; adeoque ſcribe 1 in Quoto; ac de 576 ablato 1 × 361, ſeu 361, reſtabit 215. Denique, ad cæteras figuras eliciendas, divide hunc 215 per duplum 181, ſeu 362, & exibunt figuræ 59; quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

```
3'29'76(181,59
1
---
229
224
---
 576
 361
 ---
362)215(59
```

Eâdem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4247. Et ex 32,976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, &c. Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

32·97;6(57,4247, &c.	0;99·85·6(0,999279, &c.
25	81
797	1885
749	1701
4860	18460
4576	17901
1148) 284(247	1998) 559 (279

Extractionem radicis cubicæ, & aliarum omnium, regulâ generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ conſuſens, ne moram in eâ quod rarò uſu veniet, diſcentibus inferam. *Nimirum* tertia *quæque figura, incipiendo ab unitate, primò punctis notanda eſt, ſi radix ſit* cubica ; *aut unaquæque* quinta *ſi ſit* quadrato-cubica, &c. *Dein figura in Quoto ſcribenda eſt, cujus maxima poteſtas* (*hoc eſt* cubica *ſi radix ſit* cubica, *aut* quadrato-cubica *ſi radix ſit* quadrato-cubica, &c.) *aut æquetur figuræ vel figuris ante primum punctum, aut proximè minor ſit. Et ablatâ illâ poteſtate, figura proxima elicietur, dividendo reſiduum, proximâ numeri reſolvendi figurâ auctum, per poteſtatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis, hoc eſt, per* triplum Quadratum *Quoti ſi radix ſit* cubica, *aut per* quintuplum quadrato-quadratum *ſi radix ſit* quadrato-cubica, &c. *Rurſuſque à numero reſolvendo ablatâ maximâ Quoti poteſtate, figura tertia invenietur, dividendo reſiduum illud, proximâ numeri reſolvendi figurâ auctum, per poteſtatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis.* Et ſic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13·312·053 notandus eſt. Deinde in Quoto ſcribenda eſt illa figura 2, cujus cubus 8, ſiquidem

dem æquari nequeat, proximè minor ſit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo reſtabit 5; quod proximâ numeri reſolvendi figurâ 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 diviſum (quærendo nempe quoties 3 × 4, ſeu 12, continetur in 53) dat 4 pro ſecundâ figurâ Quoti. Sed cùm Quoti, 24, prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri poſſet de figuris 13312 antecedentibus ſecundum punctum, ſcribi debet tantùm 3 in Quoto. Tum Quotus 23, in chartâ aliquâ ſeorſim per 23 multiplicatus, dat quadratum 529; quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167; & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proximâ reſolvendi numeri figurâ 0 auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 diviſum (quærendo nempe quoties 3 × 529, ſeu 1587, continetur in 11450) dat 7 pro tertiâ figurâ Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169; quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053; & hic de reſolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæſitam eſſe 237.

13·312·053 (237	Extractio Radicum.
aufer cub. 8	
12) reſtat 53 (4. aut 3.	
aufer c. 12167	
1587) reſtat 11450(7.	
aufer c. 13312053	
reſtat 0	

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364·30820, punctum ponitur ad quintam figuram; & figura 3, cujusquadrato-cubus, 243, proximè minor eſt figuris 364 antecedentibus punctum iſtud, ſcribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, reſtat 121; quod proximâ reſolvendi numeri figurâ 3 auctum, & per quinquies quadrato-quadratum Quoti diviſum (quærendo nempe quoties 5 × 81, ſeu 405, continetur in 1213) dat 2 pro ſecundâ figurâ. Quotus ille, 32, in ſe ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero reſolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32

364·30820 (32,5	
243	
405) 1213 (2	
33554432	
5242880) 2876388,0 (5	

CAPUT SEXTUM.

eſt integra pars radicis, ſed non juſta radix; & proinde ſi opus ſit decimalibus numeris proſequi animus eſt, reſiduum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5×1048576 ſeu 5242880 continetur in $2876388{,}0$; & prodibit tertia figura, ſive prima decimalis, 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti $32{,}5$ de numero reſolvendo, ac dividendo reſiduum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui poteſt quarta figura. Et ſic in infinitum.

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda eſt, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\surd^4$ *valeat* $\surd^{2\times2}$. *Et cum radix cubo-cubica extrahenda eſt, oportet extrahere radicem cubicam, & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod* $\surd^6$ *valeat* $\surd^{2\times3}$: *unde aliqui radices haſce non cubo-cubicas ſed quadrato-cubicas dixêre.* Et idem in aliis radicibus, quarum indices non ſunt numeri primi, obſervandum eſt.

E ſimplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipsâ Notatione patet. Quemadmodum quòd $\surd aa$ fit a, & quòd $\surd aacc$ fit ac, & quòd $\surd 9aacc$ fit $3ac$, & quòd $\surd 49a^4xx$ fit $7aax$. Atque ita quòd $\surd\frac{a^4}{cc}$, ſeu $\frac{\surd a^4}{\surd cc}$, fit $\frac{aa}{c}$; & quòd $\surd\frac{a^4bb}{cc}$ fit $\frac{aab}{c}$; & quòd $\surd\frac{9aazz}{25bb}$ fit $\frac{3az}{5b}$; & quòd $\surd\frac{4}{9}$ fit $\frac{2}{3}$. Et quòd $\surd^3\frac{8b^6}{27a^3}$ fit $\frac{2bb}{3a}$. Et quòd $\surd^4aabb$ fit $\surd ab$. Quinetiam quòd $b\surd aacc$, ſeu b in $\surd aacc$, valeat b in ac, ſive abc. Et quòd $3c\surd\frac{9aazz}{25bb}$ valeat $3c\times\frac{3az}{5b}$ ſive $\frac{9acz}{5b}$. Et quòd $\frac{a+3x}{c}\surd\frac{4bbx^4}{81aa}$ valeat $\frac{a+3x}{c}\times\frac{2bxx}{9a}$ ſive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent, ſiquidem propoſitas quantitates è radicibus in ſe ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) primâ fronte conſtare poteſt. Ubi verò quantitates pluribus terminis conſtant, opus perinde ac in numeris abſolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam

ex $aa+2ab+bb$, imprimis radicem primi termini aa, nempe a, ſcribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a\times a$, reſtabit $2ab+bb$ pro eliciendâ reliquâ parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti, ſeu $2a$, continetur in primo reſidui termino $2ab$? Reſp. b. Adeoque ſcribe b in Quoto, & ablato facto b in $\overline{2a+b}$, ſeu $2ab+bb$, reſtabit nihil. Quod indicat opus peractum eſſe, prodeunte radice $a+b$.

EXTRACTIO RADICUM.

$$\begin{array}{l|l} aa+2ab+bb & a+b \\ \hline aa & \\ \hline 0 & \\ \hline 2ab+bb & \\ \hline 0\quad 0 & \end{array}$$

Et ſic ad extrahendam radicem ex $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$, imprimis pone in Quoto radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa\times aa$, ſeu a^4, reſtabit $6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$ pro reliquâ radice eliciendâ. Dic itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Reſp. $3ab$. Quare ſcribe $3ab$ in Quoto: & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa+3ab}$, ſeu $6a^3b+9aabb$, reſtabit etiamnum $-4aabb-12ab^3+4b^4$ pro opere proſequendo.

$$\begin{array}{l|l} a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4 & aa+3ab-2bb \\ \hline a^4 & \\ \hline 0 & \\ \hline 6a^3b+9aabb & \\ \hline 0\quad -4aabb & \\ \hline -4aabb-12ab^3+4b^4 & \\ \hline 0\quad 0\quad 0 & \end{array}$$

Adeoque dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa+6ab$ continetur in $-4aabb-12ab^3$; ſive, quod perinde eſt, dic quoties duplum primi termini Quoti, ſeu $2aa$, continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa+6ab-2bb$, ſeu $-4aabb-12ab^3+4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa+3ab-2bb$.

Atque ita quantitatis $xx-ax+\frac{1}{4}aa$ radix eſt $x-\frac{1}{2}a$; & quantitatis y^4+4y^3-8y+4 radix $yy+2y-2$; & quantitatis $16a^4-24aaxx+9x^4+12bbxx-16aabb+4b^4$ radix $3xx-4aa+2bb$, ut è ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

CAPUT SEXTUM.

$$xx - ax + \tfrac{1}{4}aa \left(x - \tfrac{1}{2}a. \right.$$

xx

0

$-ax + \frac{1}{4}aa$

$0 \quad 0$

$$9x^4 \begin{matrix} -24aa \\ +12bb \end{matrix} xx \begin{matrix} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{matrix} \left(3xx \begin{matrix} -4aa \\ +2bb \end{matrix} \right.$$

$9x^4$

0

$$\begin{matrix} -24aa \\ +12bb \end{matrix} xx \begin{matrix} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{matrix}$$

$0 \qquad 0$

$$y^4 + 4y^3 * - 8y + 4 \left(yy + 2y - 2 \right.$$

y^4

0

$4y^3 + 4yy$

$0 - 4yy$

$- 4yy - 8y + 4$

$0 \quad 0 \quad 0$

Si radicem cubicam ex $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ oportet extrahere, operatio eſt hujuſmodi. Extrahe radicem cubicam primi

$a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \left(a + b. \right.$

a^3

$3aa) 0 + 3aab \left(b \right.$

$a^3 + 3aab + 3abb + b^3$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

termini a^3 nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3, dic quoties triplum quadratum ejus, ſeu $3aa$, continetur in proximo reſidui termino $3aab$; & prodit b. Quare ſcribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a + b$ ablato reſtabit nihil. Radix itaque eſt $a + b$.

Eodem modo radix cubica, ſi extrahatur ex $z^6 + 6z^5 - 40z^3 + 96z - 64$, prodit $zz + 2z - 4$. Atque ita in altioribus radicibus.

CAPUT SEPTIMUM.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM ET RADICALIUM.

PRæcedentibus operationibus inſervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

SECT. I.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.* DEDUCTIO FRACTIONUM.

FRactiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviſorem. Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad ſimpliciorem, $\frac{aa}{b}$, dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad ſimpliciorem, $\frac{7}{23}$, dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3 - 9acc}{6aa + 3aa}$ evadit $\frac{2aa - 3cc}{2a + c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ evadit $\frac{aa + bb}{a}$ dividendo per $a - b$.

Et hâc Methodo termini poſt Multiplicationem vel Diviſionem plerumque abbreviari poſſunt. Quemadmodum ſi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per $\frac{9acc}{bdd}$, vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$, prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujuſmodi caſibus præſtat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem diviſorem, quos poſtea dividere oporteret. Sic in allato exemplo, ſi dividam $2ab^3$ & bdd per communem diviſorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem diviſorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{da}$, vel dividenda per $\frac{dd}{3a^2}$, prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut ſupra. Atque ita $\frac{aa}{c}$ in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$, ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ diviſ. per $\frac{b}{c}$ evadit aa diviſ. per b, ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3 - axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa + ax}$ evadit $\frac{a - x}{x}$ in $\frac{c}{1}$, ſeu $\frac{ac}{x} - c$. Et 28 diviſ. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 diviſ. per $\frac{1}{3}$, ſeu 12.

SECT.

SECT. II.

DE INVENTIONE DIVISORUM.

HUC ſpectat inventio diviſorum, per quos quantitas aliqua dividi poſſit. *Si quantitas ſimplex eſt, divide eam per minimum ejus diviſorem, & quotum per minimum diviſorem ejus, donec quotus reſtet indiviſibilis, & omnes quantitatis diviſores primos habebis. Dein horum diviſorum ſingulos binos, ternos, quaternos*, &c. *duc in ſe, & habebis etiam omnes diviſores compoſitos.* Ut ſi numeri 60 diviſores omnes deſiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3, & reſtabit quotus indiviſibilis 5. Ergo diviſores primi ſunt 1,2,2,3,5 : ex binis compoſiti 4,6,10,15 : ex ternis 12,20,30; ex omnibus 60. Rurſus ſi quantitatis $21abb$ diviſores omnes deſiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & reſtabit quotus primus b. Ergo diviſores primi ſunt $1,3,7,a,b,b$; ex binis compoſiti $21\ 3a,\ 3b,\ 7a,\ 7b,\ ab,\ bb$; ex ternis $21a,\ 21b,\ 3ab,\ 3bb,\ 7ab,\ 7bb,\ abb$; ex quaternis $21ab,\ 21bb,\ 3abb,\ 7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipſius $2abb-6aac$ diviſores omnes ſunt $1, 2, a, bb-3ac, 2a, 2bb-6ac, abb-3aac, 2abb-6aac$.

Si quantitas poſtquam diviſa eſt per omnes ſimplices diviſores manet compoſita, & ſuſpicio eſt eam compoſitum aliquem diviſorem habere, diſpone eam ſecundum dimenſiones literæ alicujus quæ in eâ eſt; & pro literâ illâ ſubſtitue ſigillatim tres vel plures terminos hujus progreſſionis Arithmeticæ; 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, *ac terminos totidem reſultantes, unà cum omnibus eorum diviſoribus, ſtatue è regione correſpondentium terminorum progreſſionis, poſitis diviſorum ſignis tàm affirmativis quàm negativis. Dein è regione etiam ſtatue progreſſiones arithmeticas, quæ per omnium numerorum diviſores percurrunt, pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progreſſionis* 3, 2, 1, 0, − 1, − 2 *pergunt, & quarum termini differunt vel unitate, vel numero aliquo, qui dividit altiſſimum terminum propoſitæ quantitatis. Siqua occurrit ejuſmodi progreſſio, iſte terminus ejus qui ſtat è regione termini* 0 *progreſſionis primæ, diviſus per differentiam terminorum, & cum ſigno ſuo annexus literæ præfatæ, componet quantitatem per quam diviſio tentanda eſt.*

Ut ſi quantitas ſit $x^3-xx-10x+6$, pro x ſubſtituendo ſigillatim terminos progreſſionis 1, 0, − 1, orientur numeri − 4, 6, + 14 quos, cum omnibus eorum diviſoribus, colloco è regione terminorum progreſſionis 1, 0, − 1 hoc modo. Dein quoniam altiſſimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem diviſibilis eſt; quæro in diviſoribus progreſſionem, cujus termini differunt unitate, &, à ſuperioribus ad inferiora pergendo, decreſcunt, perinde ac termini progreſſionis lateralis 1, 0, − 1. Et hujuſmodi progreſſionem unicam tantùm invenio, nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum + 3 ſeligo, qui ſtat è regione termini 0 progreſſionis primæ 1, 0, − 1, tentoque diviſionem per $x+3$: et res ſuccedit, prodeunte $xx-4x+2$.

1	4	1.2.4.	+ 4.
0	6	1.2.3.6	+ 3.
− 1	14	1.2.7.14	+ 2.

Rurſus ſi quantitas ſit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$, pro y ſubſtituo ſigillatim 2, 1, 0, − 1, − 2; & numeros reſultantes 30,7,20,3,34, cum omnibus eorum diviſoribus, è regione colloco, ut ſequitur: et in diviſoribus hanc ſolam eſſe animadverto decreſcentem progreſſionem arithmeticam, + 10, + 7, + 4, + 1, − 2. Hujus terminorum differentia, 3, dividit altiſſimum quantitatis terminum, $6y^4$. Quare terminum + 4, qui ſtat è regione termini 0, diviſum per differentiam terminorum, 3, adjungo literæ y, tentoque diviſionem per $y+\frac{4}{3}$, vel, quod perinde eſt, per $3y+4$; & res ſuccedit prodeunte $2y^3-3yy-3y+5$.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+ 10.
1	7	1.7	+ 7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+ 4.
− 1	3	1.3	+ 1.
− 2	34	1.2.17.34	− 2.

Atque ita ſi quantitas ſit $24a^5-50a^4+49a^3-140aa+64a+30$; operatio erit ut ſequitur. Tres occurrunt hîc progreſſiones, quarum termini, − 1. − 5. − 5, diviſi per differentias terminorum 2, 4, 6, dant tres diviſores tentandos,

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1.23.	+ 1. − 1. + 1.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	− 1. − 5. − 5.
− 1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	− 3. − 9. − 11.

 $a-\frac{1}{3}$,

CAPUT SEPTIMUM.

$a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{3}{4}$ & $a-\frac{5}{6}$. Et divisio per ultimum divisorem, $a-\frac{5}{6}$, seu $6a-5$, succedit, prodeunte $4a^4-5a^3+4aa-20a-6$.

Si nullus occurrit hâc methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium [m] sit quàm trium dimensionum, divisorem admittere duarum. Et si ita, divisor ille investigabitur hâc methodo. *In quantitate illâ pro literâ substitue, ut antè, quatuor vel plures terminos progressionis hujus*, 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, − 3. *Divisores omnes numerorum resultantium sigillatim adde & subduc quadratis correspondentium terminorum progressionis illius ductis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini quantitatis propositæ, & summas differentiasque è regione progressionis colloca. Dein progressiones omnes collaterales nota, quæ per istas summas differentiasque percurrunt. Sit* ± C *terminus istiusmodi progressionis, qui stat è regione termini* 0 *progressionis primæ*; ± B *differentia quæ oritur subducendo* ± C *de termino proximè superiori, qui stat è regione termini* 1 *progressionis primæ*; A *prædictus termini altissimi divisor numeralis, &* 1 *litera quæ in quantitate propositâ est*; *& erit* A 1 ± B 1 ± C *divisor tentandus.*

Ut si quantitas proposita sit $x^4-x^3-5xx+12x-6$, pro x scribo successivè 3, 2, 1, 0, − 1, − 2; & prodeuntes numeros, 39, 6, 1, − 6, − 21, − 26, unà cum eorum divisoribus, è regione dispono; addoque & subduco divisores terminis progressionis illius quadratis ductisque in divisorem numeralem termini x^4 qui unitas est, *viz.* terminis 9,4,1,0,1,4; & summas differentiasque è latere pariter dispono. Dein progressiones, quæ in iisdem obveniunt, è latere etiam scribo, ut sequitur. Harum progressionum terminos, 2 & − 3, qui stant è regione termini 0 progressionis illius quæ in columnâ primâ est, usurpo successive pro ± *C*. Differentias, quæ oriuntur subducendo hos terminos de terminis superioribus, 0 & 0, nempe − 2 & + 3, usurpo respectivè

3	39	1.3.13.39.	9	− 30. − 4.6.8.10.12.22.48.	− 4. 6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	− 2.1.2.3.5. 6. 7. 10.	− 2. 3.
1	1	1.	1	0. 2.	0. 0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	− 6. − 3. − 2. − 1.1.2.3.6.	2. − 3.
− 1	21	1.3. 7.21.	1	− 20. − 6. − 2.0.2.4. 8.22.	4. − 6.
− 2	26	1.2.13.26.	4	− 22. − 9.2.3.5.6.17.30.	6. − 9.

[m] Rectè quidem *plurium*. Nam si quantitas trium dimensionum divisorem aliquem duarum dimensionum admitteret, omninò unius admitteret. Quotus enim, qui oritur ex divisione quantitatis trium dimensionum per quantitatem duarum, unius est dimensionis, et quantitatem divisam dividit.

tivè pro ± *B*. Unitatem item pro *A*; & x pro *l*. Et sic pro *All* ± *Bl* ± *C* habeo divisores duos tentandos, $xx+2x-2$, & $xx-3x+3$; per quorum utrumque res succedit. INVENTIO DIVISORUM.

Rursus si proponatur quantitas $3y^5-6y^4+y^3-8yy-14y+14$, operatio erit ut sequitur. Primò rem tento addendo & subducendo divisores quadratis terminorum progressionis 2, 1, 0, 1 usurpato 1 pro *A*; sed res non succedit. Quare pro *A* usurpo 3, alterum nempe termini altissimi $3y^5$ divisorem numeralem, &

3	170		27		− 7. 17
2	38	1.2.19.38.	12	− 26. − 7.10.11.13.14.31.50.	− 7. 11
1	10	1.2. 5.10.	3	− 7. − 2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	− 7. 5
0	14	1.2. 7.14.	0	− 14. − 7. − 2. − 1.1.2.7.14.	− 7. − 1
− 1	10	1.2. 5.10.	3	− 7. − 2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	− 7. − 7
− 2	190		12		− 7. − 13

quadratis istis multiplicatis per 3, hoc est numeris 12, 3, 0, 3, addo subducoque divisores; & progressiones in terminis resultantibus hasce duas invenio, − 7, − 7, − 7, − 7; & 11, 5, − 1, − 7. Expeditionis gratiâ neglexeram divisores extimorum numerorum, 170 & 190. Quare, continuatis progressionibus, sumo proximos earum hinc inde terminos, *viz.* − 7 & 17 superiùs, & − 7, & − 13 inferiùs; ac tento, si subductis his de numeris 27 ac 12, qui stant è regione in quartâ columnâ, differentiæ dividunt istos 170 & 190, qui stant è regione in columnâ secundâ. Et quidem differentia inter 27 & − 7, id est 34, dividit 170; & differentia 12 & − 7, id est 19, dividit 190. Item differentia inter 27 & 17, id est 10, dividit 170; sed differentia inter 12 & − 13, id est 25, non dividit 190. Quare posteriorem progressionem rejicio. Juxta priorem ± *C* est − 7, & ± *B* nihil; terminis progressionis nullam habentibus differentiam. Quare divisor tentandus *All* ± *Bl* ± *C*, erit $3yy+7$. Et divisio succedit, prodeunte $y^3-2yy-2y+2$.

Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concludendum est quantitatem propositam non admittere divisorem duarum dimensionum. Posset eadem methodus extendi ad inventionem divisorum dimensionum plurium; quærendo in prædictis summis differentiisque progressiones, non arithmeticas qui-

CAPUT SEPTIMUM.

dem, ſed alias quaſdem; quarum terminorum differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. ſunt in arithmeticâ progreſſione: at in his Tiro non eſt detinendus.

Ubi in quantitate propoſitâ duæ ſunt literæ, & omnes ejus termini ad dimenſiones æquè altas aſcendunt; pro unâ iſtarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære diviſorem, ac diviſoris hujus comple deficientes dimenſiones, reſtituendo literam illam pro unitate.

Ut ſi quantitas ſit $6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^3y + 20c^4$, ubi termini omnes ſunt quatuor dimenſionum; pro c pono 1: quantitas evadit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, cujus diviſor, ut ſuprà, eſt $3y + 4$; & completâ deficiente dimenſione poſterioris termini per dimenſionem c, fit $3y + 4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit $x^4 - bx^3 - 5bbxx + 12b^3x - 6b^4$; poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis, $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, invento diviſore $xx + 2x - 2$, compleo ejus deficientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum $xx + 2bx - 2bb$.

Ubi in quantitate propoſitâ tres vel plures ſunt literæ, & ejus termini omnes ad eaſdem dimenſiones aſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes regulas inveniri; ſed expeditiùs hoc modo: *Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eſt; item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eſt; pariter & omnium in quibus tertia litera, quartaque, & quinta, non eſt, ſi tot ſunt literæ. Et ſic percurre omnes literas: et è regione literarum colloca diviſores reſpectivè. Dein vide, ſi in ſerie aliquâ diviſorum per omnes literas pergente, partes omnes, unicam tantùm literam involventes, tot vicibus reperiantur, quot ſunt literæ, unâ demptâ, in quantitate propoſitâ: et partes duas literas involventes tot vicibus quot ſunt literæ, demptis duabus, in eâdem quantitate. Si ita eſt, partes iſtæ omnes, ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ, erunt diviſor quæſitus.*

Ut ſi proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; terminorum $8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$, in quibus non eſt x, diviſores unius dimenſionis, per præcedentes regulas inventi, erunt $2b - 3c$, & $4b - 6c$; terminorum, $12x^3 + 9cxx + 8ccx$

$+ 8ccx + 6c^3$, in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x + 3c$; ac terminorum, $12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$, in quibus non eſt c, diviſores $2x - b$, & $4x - 2b$. Hos diviſores è regione literarum x, b, c diſpono, ut hîc vides. Cùm tres ſint literæ, & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas literas involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At diviſorum $4b - 6c$, & $2x - b$, partes $4b$, $6c$, $2x$, b non niſi ſemel occurrunt: extra diviſorem illum, cujus ſunt partes, non reperiuntur. Quare diviſores illos negligo. Reſtant tantùm tres diviſores, $2b - 3c$, $4x + 3c$, & $4x - 2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente; & eorum partes ſingulæ, $2b$, $3c$, $4x$, bis reperiuntur in ipſis, ut oportuit; idque cum ſignis iiſdem, ſi modò ſigna diviſoris $2b - 3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b + 3c$: nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$, $3c$, $4x$ ſemel ſub ſignis ſuis, & aggregatum, $-2b + 3c + 4x$, diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam, prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

INVENTIO DIVISORUM.

$x \mid 2b - 3c, 4b - 6c.$
$b \mid 4x + 3c.$
$c \mid 2x - b, 4x - 2b.$

Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26aax^3 + 12abx^3 + 6bbx^3 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx + 6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32aab^3 - 12b^5$; diviſores terminorum, in quibus x non eſt, colloco è regione x; illos terminorum, in quibus a non eſt, è regione a; & illos terminorum quibus b non eſt, è regione b, ut hîc vides. Dein illos omnes qui ſunt unius dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio; quia ſimplices b, $2b$, $4b$, x, $2x$, & partes compoſitorum $3x - 4a$, $6x - 8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiantur; tres autem ſunt literæ in quantitate propoſitâ, & partes illæ unicam tantùm involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum dimenſionum, $aa + 3bb$, $2aa + 6bb$, $4aa + 12bb$, $bb - 3aa$, & $4bb - 12aa$, rejicio; quia partes eorum, aa, $2aa$, $4aa$, bb & $4bb$, unicam tantùm literam, a vel b, involventes non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb - 6aa$, qui ſolus reſtat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$, quæ ſimiliter unicam tantùm literam involvunt, iterum reperiuntur; nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx - 3bx + 2bb$, & pars

$x \mid b, 2b, 4b, aa + 3bb, 2aa + 6bb, 4aa + 12bb, bb - 3aa, 2bb - 6aa, 4bb - 12aa.$
$a \mid 4xx - 3bx + 2bb, 12xx - 9bx + 6bb.$
$b \mid x, 2x, 3x - 4a, 6x - 8a, 3xx - 4ax, 6xx - 8ax, 2xx + ax - 3aa, 4xx + 2ax - 6aa.$

$6aa$

CAPUT SEPTIMUM.

$6aa$ in divisore $4xx+2ax-6aa$. Quin etiam hi tres divisores in serie sunt, stantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes, $2bb$, $6aa$, $4xx$, quæ unicam tantùm literam involvunt, bis reperiuntur in ipsis, idque sub propriis signis; partes verò $3bx$, $2ax$, quæ duas literas involvunt, non nisi semel occurrunt in ipsis. Quare horum trium divisorum partes omnes diversæ $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ sub signis suis connexæ, divisorem desideratum $2bb-6aa+4xx-3bx+2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propositam, & oritur $3x^3-4axx-2aab-6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complendæ sunt dimensiones deficientes per dimensiones literæ cujusvis assumptæ; dein per præcedentes regulas invento divisore, litera assumpta delenda est. Ut si quantitas sit $12x^3-14bxx+9xx-12bbx-6bx+8x+8b^3-12bb-4b+6$; assume literam quamvis c, & per dimensiones ejus comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum: $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$. Dein hujus divisore, $4x-2b+3c$, invento dele c; & habebitur divisor desideratus $4x-2b+3$.

Aliquando divisores faciliùs quàm per has regulas inveniri possunt. Ut si litera aliqua in quantitate propositâ sit unius tantùm dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum, in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum, in quibus non reperitur; nam divisor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nullus erit divisor totius. Exempli gratiâ, si proponatur quantitas $x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x+cx^3-acxx-8aacx+6a^3c-8a^4$; quæratur communis divisor terminorum, $+cx^3-acxx-8aacx+6a^3c$, in quibus c unius est tantùm dimensionis, & terminorum reliquorum, $x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x-8a^4$; ac divisor ille, nempe $xx+2ax-2aa$, dividet totam quantitatem.

Cæterùm maximus duorum numerorum divisor communis, si primâ fronte non innotescit, invenitur perpetuâ ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæsitus erit divisor, qui tandem nihil relinquit [n]. Sic ad inveniendum maximum communem divisorem

[n] Euclid. Elem. Lib. 7. Prop. 2.

numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667; & reliquum 58 ter de 203; & reliquum 29 bis de 58; restabitque nihil: quod indicat 29 esse divisorem quæsitum. INVENTIO DIVISORUM.

Haud secus in speciebus communis divisor, ubi compositus est, invenitur, subducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus, de alterâ: Si modò & quantitates illæ & residuum juxta literæ alicujus dimensiones, ut Divisione ostensum est, ordinentur, & quâlibet vice concinnentur, dividendo ipsas per suos omnes divisores, qui aut simplices sunt, aut singulos terminos instar simplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem divisorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus, $\frac{x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x-8a^4}{x^3-axx-8aax+6a^3}$, multiplica Denominatorem per x, ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & restabit $-2ax^3+12a^3x-8a^4$, quod concinnatum, dividendo per $-2a$, evadit $x^3-6aax+4a^3$. Hoc aufer de Denominatore, & restabit $-axx-2aax+2a^3$: quod itidem per $-a$ divisum fit $xx+2ax-2aa$. Hoc autem per x multiplica (ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino noviffimi ablati $x^3-6aax+4a^3$, de quo auferendum est) & restabit $-2axx-4aax+4a^3$; quod, per $-2a$ divisum, fit etiam $xx+2ax-2aa$. Et hoc, cùm idem sit ac superius residuum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæsitus erit divisor per quem fractio proposita, factâ Numeratoris ac Denominatoris divisione, reduci potest ad simpliciorem, nempe ad $\frac{xx-5ax+4aa}{x-3a}$.

Atque ita si habeatur fractio, $\frac{6a^3+15a^2b-4a^2cc-10aabcc}{9a^2b-27aabc-6abcc+18bc^3}$; termini ejus imprimis abbreviandi sunt, dividendo numeratorem per aa, ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3-9aac-2acc+6c^3$ de $6a^3+15aab-4acc-10bcc$, restabit $+\frac{15b}{18c}aa-10bcc-12c^3$. Quod concinnatum, dividendo terminum utrumque per $5b+6c$, perinde ac si $5b+6c$ simplex esset quantitas, evadit $3aa-2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3-9aac-2acc+6c^3$, & secundâ vice restabit $-9aac+6c^3$: quod itidem concinnatum, per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa-2cc$ ut antè. Quare $3aa-2cc$ quæsitus est divisor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propositæ, & obtinebitur $\frac{2a^3+5aab}{3ab-9bc}$.

CAPUT SEPTIMUM.

Quòd si divisor communis hoc pacto non inveniatur, certum est nullum omninò existere; nisi forsan è terminis prodeat, per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut si habeatur fractio $\frac{aadd-cddd-aacc+c^4}{4aad-4acd-2acc+2c^3}$, ac termini ejus juxta dimensiones literæ d disponantur, ita ut Numerator evadat $\frac{aa}{-cc}dd\frac{-aacc}{+c^4}$, ac Denominator $\frac{4aa}{-4ac}d\frac{-2acc}{+2c^3}$: hos imprimis oportet abbreviare, dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa-cc$, & utrumque Denominatoris per $2a-2c$, perinde ac si $aa-cc$, & $2a-2c$, essent simplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget $dd-cc$, & vice Denominatoris $2ad-cc$, ex quibus sic præparatis nullus communis divisor obtineri potest. Sed è terminis $aa-cc$ & $2a-2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a-c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add+cdd-acc-c^3}{4ad-2cc}$ reduci potest. Quòd si neque termini, $aa-cc$, & $2a-2c$, communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores: *Sed plerumque expeditiùs inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram dividant absque residuo.* Sic ad reducendum $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ ad minimos terminos, inveniendi sunt divisores quantitatis $aa-ab$, nempe a, & $a-b$. Dein tentandum est an alteruter, a, vel $a-b$, dividit etiam $a^3-aab+abb-b^3$ absque residuo.

SECT. III.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad communem Denominatorem.*

FRactiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & viciſſim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator

denominator bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$, sive $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$, evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. REDUCTIO FRACTIONUM. Ubi verò Denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad hasce, $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$, reducuntur, multiplicando alternè per Quotientes, c ac d, ortos divisione denominatorum per communem divisorem b.

Hæc autem reductio præcipuè usui est in Additione & Subductione fractionum; quæ, si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt, antequam uniri possunt. Sic $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$, sive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a+\frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc}-\frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$, vel $\frac{d-c}{bcd}a^3$. Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx}-cc-xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$, sive $\frac{14+15}{21}$, hoc est $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$, sive $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12}-\frac{5}{12}$, sive $\frac{4}{12}$, hoc est $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ sive $\frac{3}{1}+\frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7}+\frac{4}{7}$, sive $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones, ubi plures sunt, gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x}-a+\frac{2xx}{3a}-\frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a, & restabit $\frac{aa-ax}{x}$; huic adde $\frac{2xx}{3a}$, & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$; unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$, & restabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$. Atque ita si habeatur $3\frac{4}{7}-\frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum est, nempe $\frac{25}{7}$; dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$, & restabit $\frac{61}{21}$.

SECT. IV.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad minimos terminos.*

RAdicalis, ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem divisoris alicujus.

Sic $\sqrt{aabc}$, extrahendo radicem divisoris aa, fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$, extrahendo radicem divisoris 16, fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$, extrahendo radicem divisoris $16aa$, fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$, extrahendo radicem divisoris $\frac{aa-4ab+4bb}{cc}$, fit $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Et

CAPUT SEPTIMUM.

$\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{aamm}{ppzz}$, fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{25}{49}$, fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, ſive $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$: radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et ſic $a\sqrt{\frac{b}{a^3}}$, ſive $a\sqrt{\frac{ab}{aa^3}}$, extrahendo radicem denominatoris, fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt[3]{:8a^3b+16a^4}$, extrahendo radicem cubicam diviſoris $8a^3$, fit $2a\sqrt[3]{:b+2a}$. Haud ſecus $\sqrt[4]{a^3x}$, extrahendo radicem quadraticam diviſoris aa fit, $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{ax}$; vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam diviſoris a^4, fit $a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$. Atque ita $\sqrt[6]{:a^7x^5}$ convertitur in $a\sqrt[6]{:ax^5}$, vel in $ax\sqrt[6]{:\frac{a}{x}}$, vel in $\sqrt{ax}\times\sqrt[3]{:aax}$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus inſervit, ſed & earum Additioni & Subductioni; ſi modò ex parte radicali conveniant, ubi ad formam ſimpliciſſimam reducuntur. Tunc enim uniri poſſunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$, per reductionem, evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$, hoc eſt $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$, per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$, hoc eſt $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et ſic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$, extrahendo quicquid eſt rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, hoc eſt $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt[3]{:8a^3b+16a^4}-\sqrt[3]{:b^4+2ab^3}$, evadit $2a\sqrt[3]{:b+2a}-b\sqrt[3]{:b+2a}$, hoc eſt $2a-b\sqrt[3]{:b+2a}$.

SECT.

(°) Invento ſcilicet numero quem minimum indices dătarum radicalium dividant, datarum unaquæque in aliam tranſmutanda eſt, quæ minimum illum numerum indicem habeat. Eò igitur res redit, ut quantitas radicalis data in aliam tranſmutetur dato indice. Detur igitur quantitas radicalis $\sqrt[n]{a^m}$, ad aliam reducenda, cujus index dato numero p æqualis ſit. Factum puta: ſit $\sqrt[p]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}$. Extrahendo igitur utrobique radicem à numero m denominatam, $\sqrt[p]{a^x} = \sqrt[n]{a}$: capiendoque utrinque poteſtates à numero n denominatas, $\sqrt[p]{a^x}^n = a$: atque rurſum capiendo utrinque poteſtates à numero p denominatas, $a^{xn} = a^p$. Ergo $xn = p$, & $x = \frac{p}{n}$. Numeri autem p, n, dati. Numerus igitur x datus, qui index eſt poteſtatis illius quantitatis a^m, cujus radix à numero p denominata, quantitatis a^m radici à numero n denominatæ æqualis eſt. Datam igitur radicalem $\sqrt[n]{a^m}$ ita in aliam transformaveris, quæ indicem habeat numero p æqualem, ſi ſigno radicali $\sqrt[p]{}$ quantitatem illam ſuffixeris, quæ provenerit ſi quantitatem ſigno radicali $\sqrt[n]{}$ ſuffixam, nimirum

SECT. V.

REDUCTIO RADICALIUM.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad eandem denominationem.*

CUM in radicalibus diverſæ denominationis inſtituenda eſt multiplicatio vel diviſio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere; idque præfigendo ſignum radicale, cujus index eſt minimus numerus quem earum indices dividunt abſque reſiduo, & ſuffixas quantitates toties, demptâ unâ vice, in ſe ducendo, quoties index ille jam major evaſerit. (°)

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt[3]{:aax}$ evadit $\sqrt[6]{:a^3x^3}$ in $\sqrt[6]{:a^4xx}$, hoc eſt $\sqrt[6]{:a^7x^5}$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{:ax}$ evadit $\sqrt[4]{:aa}$ in $\sqrt[4]{:ax}$, hoc eſt $\sqrt[4]{:a^3x}$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt[4]{:\frac{5}{6}}$ evadit $\sqrt[4]{:36}$ in $\sqrt[4]{:\frac{5}{6}}$, hoc eſt $\sqrt[4]{:30}$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$, hoc eſt $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$, hoc eſt $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt[3]{:b+2a}$ evadit $\sqrt[3]{:8a^3}$ in $\sqrt[3]{:b+2a}$, hoc eſt $\sqrt[3]{:8a^3b+16a^4}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$, ſive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$, ſive $\sqrt{2ab}$. Et ſic in aliis.

SECT. VI.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad ſimpliciores radicales per extractionem radicum.*

RAdices quantitatum, quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur, ſic extrahe.

nimirum ſi ipſam a^m, toties demptâ unâ vice in ſe ipſam duxeris, quoties multiplicandus eſt numerus n, ut numerum numero p æqualem faciat. Atque ita tandem verum ni fallor ſenſum præcepti Newtoniani aſſecuti ſumus, quod verborum ambiguitate incautos facilè deciperet: cùm ita intelligi poſſet, ac ſi quantitas ſigno radicali ſubjecta toties in ſe ducenda eſſet, quot, unâ ſaltem demptâ, unitates fuerint in numero quo novus index p datum n exuperaverit.

Cæterùm radicalium, necnon potentialium, reductiones adhibitis indicibus fractis facillimè peragendæ ſunt, cum nihil aliud requiritur niſi ut dati indices ad denominatorem revocentur communem. Exempli gratiâ, $\overline{ax}^{\frac{1}{2}} \times \overline{a^2x}^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} \times \overline{a}^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}} \times x^{\frac{5}{6}} = \overline{a^7 \times x^5}^{\frac{1}{6}}$. Rurſum $a^{\frac{1}{2}} \times \overline{ax}^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} \times x^{\frac{1}{4}} = \overline{a^3x}^{\frac{1}{4}}$. Sic etiam $a^5 \times x^2 \times \overline{ab}^{\frac{2}{11}} = a^5 \times a^{\frac{2}{11}} \times b^{\frac{2}{11}} \times x^2 = a^{\frac{57}{11}} \times b^{\frac{2}{11}} \times x^{\frac{22}{11}} = \overline{a^{57}b^2x^{22}}^{\frac{1}{11}}$. Rurſum $\overline{ax}^{\frac{1}{2}} \times \overline{a^2x}^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{6}} = \overline{\frac{x}{a}}^{\frac{1}{6}}$.

Designet A *quantitatis alicujus partem majorem,* B *partem minorem: Et erit* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum majoris partis radicis;* & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius* B.

Ut si quantitas sit $3+\sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA-BB} = 1$; indeque quadratum majoris partis radicis, $\frac{3+1}{2}$, id est 2; & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$, id est 1. Ergo radix est $1+\sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A, & $\sqrt{24}$ pro B, erit $\sqrt{AA-BB} = \sqrt{8}$; & inde $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$, & $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$, hoc est $3\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}$, quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt{18}-\sqrt{2}$. Eodem modo; si de $aa+2x\sqrt{aa-xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa; & pro B, $2x\sqrt{aa-xx}$, & erit $AA-BB = a^4-4aaxx+4x^4$. Cujus radix est $aa-2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa-xx$, illud alterius xx; adeoque radix, $x+\sqrt{aa-xx}$. Rursus si habeatur $aa+5ax-2a\sqrt{ax+4xx}$, scribendo $aa+5ax$ pro A, & $2a\sqrt{ax+4xx}$ pro B, fiet $AA-BB = a^4+6a^3x+9aaxx$; cujus radix est $aa+3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa+4ax$, illud minoris ax; & radix, $\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, ponendo $6+\sqrt{8} = A$, & $-\sqrt{12}-\sqrt{24} = B$, fiet $AA-BB = 8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3+\sqrt{8}}$; hoc est (ut suprà) $1+\sqrt{2}$; & pars minor $\sqrt{3}$; atque adeo radix ipsa $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Cæterùm ubi plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citiùs inveniri, dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem, quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam dupli quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ. Ut in exemplo noviſſimo $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$, $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, $\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$. Ergo partes radicis sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut suprà.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentiâ commensurabilium partium.

Sit

REDUCTIO RADICALIUM.

Sit quantitas A ± B. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ c. Quære minimum numerum n, cujus potestas* n^{ta} *dividitur per* $AA-BB$ *sine residuo,* & *sit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{A+B\times\sqrt{Q}}$ *in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide* $A\sqrt{Q}$ *per maximum divisorem rationalem: Sit quotus s, sitque* $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et erit* $\frac{ts\pm\sqrt{ttss-n}}{\sqrt[z]{Q}}$ *radix quæsita, si modò radix extrahi potest.*

Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt{968}+25$; erit $AA-BB = 343$; ejus divisores 7, 7, 7; ergo $n = 7$, & $Q = 1$. Porro $A+B\times\sqrt{Q}$, seu $\sqrt{968}+25$, extractâ prioris partis radice, fit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis est 4. Ergo $r = 4$. Insuper $A\sqrt{Q}$, seu $\sqrt{968}$, extrahendo quicquid rationale est, fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$, ejus pars radicalis, est s; & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, seu $\frac{5\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}}$, in numeris integris proximis est 2. Ergo $t = 2$. Denique ts est $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss-n}$ est 1, & $\sqrt[z]{Q}$, seu $\sqrt[6]{1}$, est 1. Ergo $2\sqrt{2}+1$ est radix quæsita, si modò radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem si cubus ipsius $2\sqrt{2}+1$ sit $\sqrt{968}+25$, & res succedit.

Rursus si radix cubica extrahenda sit ex $68-\sqrt{4374}$; erit $AA-BB = 250$, cujus divisores sunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n = 5\times 2 = 10$, & $Q = 4$. Et $\sqrt[c]{A+B\times\sqrt{Q}}$, seu $\sqrt[3]{68+\sqrt{4374}\times 2}$, in numeris proximis integris, est $7 = r$. Insuper $A\sqrt{Q}$, seu $68\sqrt{4}$, extrahendo quicquid rationale est, fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s = 1$, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, seu $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$, in numeris integris proximis est $4 = t$: ergo $ts = 4$, $\sqrt{ttss-n} = \sqrt{6}$, & $\sqrt[z]{Q} = \sqrt[6]{4}$, seu $\sqrt[3]{2}$; atque adeo radix tentanda $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum si radix quadrato-cubica extrahenda sit ex $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$; erit $AA-BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{ttss-n} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[z]{Q} = \sqrt[12]{81}$ seu $\sqrt[3]{9}$; atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}$.

Cæterùm

CAPUT OCTAVUM.

Cæterùm in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit, vel partes ejus communem habent diviſorem; radices denominatoris & factorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242-12\frac{1}{2}}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968-25}}{2}$. Dein, extractâ ſeorſim numeratoris ac denominatoris radice cubicâ, orietur $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. Rurſus ſi ex $\sqrt[3]{3993+\sqrt[6]{17578125}}$ radix aliqua extrahenda ſit; divide partes per communem diviſorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11+\sqrt{125}$. Unde quantitas propoſita valet $\sqrt[3]{3}$ in $11+\sqrt{125}$; cujus radix invenietur, extrahendo ſeorſim radicem factoris utriuſque, $\sqrt[3]{3}$, & $11+\sqrt{125}$.

CAPUT OCTAVUM.

De formâ ÆQUATIONIS.

ÆQuationes, quæ ſunt quantitatum aut ſibi mutuò æqualium, aut ſimul nihilo æquipollentium, congeries, duobus præcipuè modis conſiderandæ veniunt; vel ut ultimæ concluſiones ad quas in Problematis ſolvendis deventum eſt, vel ut media, quorum ope finales æquationes acquirendæ ſunt. Prioris generis æquatio ex unicâ tantum incognitâ quantitate cognitis involutâ conflatur, modò Problema ſit definitum, & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ poſterioris generis involvunt plures quantitates incognitas, quæ ideo debent inter ſe comparari, & ita connecti, ut ex omnibus una tandem emerget æquatio nova, cui ineſt unica, quam quærimus, incognita quantitas admiſta cognitis. Quæ quantitas ut exinde faciliùs eliciatur, æquatio iſta variis plerumque modis transformanda eſt, donec evadat ea ſimpliciſſima quæ poteſt, atque etiam ſimilis alicui ex ſequentibus earum gradibus; in quibus x deſignat quantitatem quæſitam, ad cujus dimenſiones termini, ut vides, ordinantur; & p, q, r, s, alias quaſcunque quantitates, ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, &, per methodos explicandas, inveſtigari poteſt.

$x = p.$
$xx = px + q$
$x^3 = pxx + qx + r.$
$x^4 = px^3 + qxx + rx + s.$
&c.

Vel
$x - p = 0.$
$xx - px - q = 0.$
$x^3 - pxx - qx - r = 0.$
$x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0.$
&c.

Ad

DE FORMA ÆQUATIONIS.

Ad horum normam itaque termini æquationum, ſecundùm dimenſiones incognitæ quantitatis, in ordinem ſemper redigendi ſunt; ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas eſt plurimarum dimenſionum, inſtar x, xx, x^3, x^4; & ſecundum locum, in quibus ea eſt unâ dimenſione minor, inſtar p, px, pxx, px^3, & ſic præterea. Et quod ſigna terminorum attinet, poſſunt ea omnibus modis ſe habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deeſſe. Sic $x^3 \ast -bbx+b^3 = 0$ vel $x^3 = bbx - b^3$, eſt æquatio tertii gradûs; $Z^4 \pm^{a}_{-b} Z^3 \ast \pm^{ab^3}_{-b^4} = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æſtimantur ex maximâ dimenſione quantitatis incognitæ, nullo reſpectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò ſimplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorum quodammodò deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ æquatio ſecundi gradûs cenſenda eſt, ſiquidem ea in duas ſecundi gradûs æquationes reſolvi poteſt. Nam ſuppoſito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illâ perinde ſcripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio ſecundi gradûs; cujus ope, cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$, ſecundi etiam gradûs, dabit x.

Atque hæ ſunt concluſiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum reſolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abſtractè doceam. Æquationis autem ſolitariæ reductionem in ſequentibus regulis complectar.

CAPUT NONUM.

De concinnandâ Æquatione ſolitariâ.

REGULA PRIMA.

SIquæ ſunt quantitates quæ ſe mutuo deſtruere, vel per Additionem aut Subductionem coaleſcere poſſunt, termini perinde minuendi ſunt.

Veluti ſi habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$, aufer utrinque $2x$, & adde $3a$, proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab+bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad

Casus Nonum.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis, quæ fieri ſolet per tranſlationem ad contrarias partes cum ſigno contrario. Ut ſi habitâ æquatione $5b = 8a + x$ deſideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum ſigno mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo ſi habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$, ac deſideretur y, tranſpone $-3ay$, & $ab - bb$, eò ut ex unâ parte conſiſtant termini multiplicati per y, & ex alterâ reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$; unde y elicietur per Reg. 5. ſequentem, dividendo ſcilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$, per debitam tranſpoſitionem & ordinationem, evadit $x^3 = \frac{aa}{-3ab} x \frac{-a^3}{+abb}$, vel $x^3 \frac{-aa}{+3ab} x \frac{+a^3}{-abb} = 0$.

REGULA SECUNDA.

Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel ſi per eandem quantitatem omnes dividantur, debent omnes per illam multiplicari.

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b, & fit $15b = 24a + 3x$: deinde per 3, & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$, multiplica omnes per c, & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

REG.

(p) Hanc quidem operationem Franciſcus Vieta *Symmetricam Climactiſmum* vocavit: eandem Juniores *involutionem* dixerunt. Haud verò in omni caſu ſufficiet ad irrationalium expurgationem, ne quidem ſi omnia ſubquadratica ſint, quod genus eſt ſimpliciſſimum. Puta enim æquationem proponi ex quatuor ſubquadraticis compoſitam, $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d} = 0$. Hujuſce æquationis nomina ſi ita diſtribuas, ut ex utrâque parte bina ſint, veluti hoc modo $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$, partibus quadratis, veniet utrinque nomen unum irrationale; hinc enim orietur $a - 2\sqrt{ab} + b$, illinc $c + 2\sqrt{cd} + d$. Novæ hujus æquationis nomina ſic diſponito, ut ab unâ parte nomina omnia rationalia ſint, ab alterâ irrationalia, nempe $a + b - c - d = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$. Pro nominum rationalium ſummâ ponatur litera g, ut ſit $g = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$. Partibus rurſum quadratis, à binomio irrationali veniet unum tantùm nomen irrationale; è multiplicatione enim quadraticâ fiet $g^2 = 4 \times ab + 2\sqrt{abcd} + cd$: collectiſque nominibus quæ utrinque rationalia ſunt, $g^2 - 4ab - 4cd = 8\sqrt{abcd}$. Pro $\frac{g^2 - 4ab - 4cd}{8}$ ponatur litera b, & ex tertiâ demum multiplicatione quadraticâ veniet æquatio irrationalibus libera, $b^2 = abcd$. Atque idem ſemper fiet, quoties æquationis propoſitæ nomina non plura ſint numero quàm quatuor; tolletur ſanè id omne quod irrationale eſt per ſymmetricam climactiſmum Vietæ, idque etiamſi omnia nomina irrationalia ſint, dummodo ſubquadratici tantùm generis. Pro uno autem nomine irrationali in hoc negotio haberi volo quicquid

De Æquatione Connanda.

REGULA TERTIA.

Siqua ſit fractio irreducibilis, in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, omnes æquationis termini per iſtum denominatorem, aut per aliquem diviſorem ejus, multiplicandi ſunt.

Ut ſi æquatio $\frac{ax}{a - x} + b = x$ ſecundum x ordinanda ſit, multiplicentur omnes ejus termini per $a - x$, denominatorem fractionis $\frac{ax}{a - x}$, ſiquidem x inibi reperiatur; & prodit $ax + ab - bx = ax - xx$, ſeu $ab - bx = -xx$, &, factâ utriuſque partis tranſlatione, $xx = bx - ab$. Atque ita ſi habeatur $\frac{a^3 - abb}{2cy - cc} = y - c$, terminique juxta y ordinandi ſint, multiplicentur per denominatorem $2cy - cc$, vel ſaltem per diviſorem $2y - c$, quo y tollatur è denominatore, & exurget $\frac{a^3 - abb}{c} = 2yy - 3cy + cc$; & ordinando $\frac{a^3 - abb}{c} - cc + 3cy = 2yy$. Ad eundem modum $\frac{aa}{x} - a = x$, multiplicando per x, evadit $aa - ax = xx$; & $\frac{aabb}{cxx} = \frac{xx}{a + b - x}$, multiplicando primò per xx, dein per $a + b - x$, evadit $\frac{a^3bb + aab^3 - aabbx}{c} = x^4$.

REGULA QUARTA.

Sicut ſurdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur, ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum ſignis mutatis transferendi ſunt, & utraque pars æquationis in ſe ſemel *multiplicanda, ſi radix* quadratica *ſit, vel* bis *ſi ſit* cubica, *&c.* p

quicquid ſimul ſigno radicali ſubſit, licet ex pluribus conflatum ſit. Exempli gratiâ, æquationis $\sqrt{a^2 - bx} + \sqrt{cx - gb + d^2} = \sqrt{gd}$, tria ſunt nomina irrationalia, quorum unum eſt $\sqrt{gd}$, alterum $\sqrt{a^2 - bx}$, tertium $\sqrt{cx - gb + d^2}$. At ſi æquationis propoſitæ nominibus quatuor ſubquadraticè irrationalibus nomen quintum accedat, ſive rationale, ſive ſubquadraticè etiam irrationale, nomina quidem irrationalia multiplicatione quadraticâ nunquam ſubduceris. Quum enim quinque nomina aliter diſtribui nequeant, quin vel ex alterâ parte trinomium conſtituat, binomium ex alterâ; vel ex alterâ quidem parte quadrinomium, ex alterâ nomen ſingulare; vel denique ex unâ parte quinquenomium; quadratica verò trinomii multiplicatio tria nomina irrationalia ſemper pariat, binomii nomen irrationale unum, quadrinomii autem ſex, quinquenomii decem, non ex ullâ quidem dati quinquenomii diſtributione obtinebis, quin nomina irrationalia, ex quadraticis partium multiplicationibus facta, vel plura ſint numero quàm quatuor, vel ſaltem non pauciora, accedente etiam nomine rationali. Factâque quovis modo partium tranſlatione, partibuſque iterum quadratis, iterum provenient nomina irrationalia numero haud pauciora quàm quatuor, quibus etiam accedet nomen unum rationale: idque toties fiet quoties multiplicatio quadratica iterata fuerit. Quoties igitur æquationis propoſitæ, ex quinque pluribuſve nominibus conflatæ, quatuor plurave nomina irrationalia ſint, Climactiſmi opera ad irrationalitatem tollendam, licet illa in infinito quidem ſubliſtat ſubquadraticorum gradu, nihil prorſus juvabit: ſed confugiendum erit ad viam generalem Fermatii, Newtono ſub fine hujuſce capitis traditam, quæ ſanè nullam non aſymmetriam exulare cogit.

CAPUT NONUM.

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa-xx}+a=x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa-ax}=x-a$; & quadratis partibus, $aa-ax=xx-2ax+aa$, ſeu $0=xx-ax$; hoc eſt $x=a$. Sic etiam $\sqrt[3]{:aax+2axx-x^3}-a+x=0$, tranſponendo $-a+x$, evadit $\sqrt[3]{:aax+2axx-x^3}=a-x$; & partibus cubicè multiplicatis, $aax+2axx-x^3=a^3-3aax+3axx-x^3$; ſeu $xx=4ax-aa$. Et ſic $y=\sqrt{ay+yy-a\sqrt{ay-yy}}$, quadratis partibus, evadit $yy=ay+yy-a\sqrt{ay-yy}$: &, terminis debitè tranſpoſitis, $ay=a\sqrt{ay-yy}$, ſeu $y=\sqrt{ay-yy}$; & partibus iterum quadratis, $yy=ay-yy$; & tranſponendo denuo, $2yy=ay$, ſive $2y=a$.

REGULA QUINTA.

Terminis ſecundùm Dimenſiones literæ alicujus, ope præcedentium regularum, diſpoſitis, ſi maxima ejuſdem literæ dimenſio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.

Sic $2y=a$, dividendo per 2, evadit $y=\frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a}=a$, dividendo per $\frac{b}{a}$, evadat $x=\frac{aa}{b}$. Et $\overset{2ac}{-cc}\,x\,\overset{+a^3}{+aac}\,xx\,\overset{-2a^3c}{+aacc}\,x-a^3cc=0$, dividendo per $2ac-cc$, evadit $x^3+\frac{\overset{a^3}{aac}\,xx\,\overset{-2a^3c}{+aacc}\,x-a^3cc}{2ac-cc}=0$, ſive $x^3+\frac{a^3+aac}{2ac-cc}xx-aax-\frac{a^3c}{2a-c}=0$.

REGULA SEXTA.

Aliquando reductio inſtitui poteſt dividendo æquationem per compoſitam aliquam quantitatem.

Sic enim $y^3=\overset{-2c}{+b}yy+3bcy-bbc$, ad hanc, $yy=-2cy+bc$, reducitur, transferendo terminos omnes ad eaſdem partes, hoc modo, $y^3\overset{+2c}{-b}yy-3bcy+bbc=0$, & dividendo per $y-b$; ut in capite de diviſione oſtenſum eſt: prodibit enim $yy+2cy-bc=0$. Aſt hujuſmodi diviſorum inventio difficilis eſt, & eam priùs docuimus.

REGULA SEPTIMA.

Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utrâque æquationis parte inſtituitur.

Quemadmodum ſi habeatur $xx=\frac{1}{4}aa-bb$, extractâ utrobique radice, prodit $x=\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. Quòd ſi habeatur $xx+aa=2ax+bb$, transfer

transfer $2ax$, & exurget $xx-2ax+aa=bb$; extractiſque partium radicibus, $x-a=+$ vel $-b$, ſeu $x=a\overset{+}{-}b$. Sic etiam habito $xx=ax-bb$, adde utrinque $-ax+\frac{1}{4}aa$, & prodit $xx-ax+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa-bb$; & extractâ utrobique radice $x-\frac{1}{2}a=\overset{+}{-}\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, ſeu $x=\frac{1}{2}a\overset{+}{-}\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$.

DE ÆQUATIONE CONCINNANDA.

Et ſic univerſaliter: Si ſit $xx=.px.q$, erit $x=.\frac{1}{2}p\overset{+}{-}\sqrt{\frac{1}{4}pp.q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iiſdem ſignis, ac p & q in æquatione priori, afficienda ſunt; ſed $\frac{1}{4}pp$ ſemper affirmativè ponendum. Eſtque hoc exemplum Regula, ad cujus ſimilitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam ſimplicium reduci poſſunt. *E. g.* Propoſitâ æquatione $yy=\frac{2xxy}{a}+xx$, ad extrahendam radicem y, confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q; hoc eſt, ſcribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$, & $\frac{x^4}{aa}+xx$ pro $\frac{1}{4}pp.q$, atque orietur $y=\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, vel $y=\frac{xx}{a}-\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$. Eodem modo æquatio $yy=ay-2cy+aa-cc$, conferendo $a-2c$ cum p, & $aa-cc$ cum q, dabit $y=\frac{1}{2}a-c+\sqrt{\frac{1}{4}aa-ac}$. Quinetiam æquatio quadrato-quadratica $x^4=-aaxx+ab^3$, cujus termini impares deſunt, ope hujus regulæ evadit $xx=-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}$, & extractâ iterum radice, $x=\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}}$. Et ſic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnandâ æquatione ſolitariâ; quarum uſum cùm Analyſta ſatis perſpexerit, ita ut æquationem quamcunque propoſitam ſecundum quamlibet literarum in eâ complexarum diſponere noverit, & ejuſdem literæ, ſi ea unius ſit dimenſionis, aut maximæ poteſtatis ejus ſi plurium, valorem elicere; haud difficilem ſentiet comparationem plurium æquationum inter ſe: quam pergo jam docere.

CAPUT DECIMUM.

CAPUT DECIMUM.

De duabus pluribusve æquationibus in unum transformandis, ut incognitæ quantitates exterminentur.

CUM in alicujus problematis ſolutionem plures habentur æquationes ſtatum quæſtionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes iſtæ (duæ per vices ſi modò ſint plures duabus) ſunt ita connectendæ, ut una ex incognitis quantitatibus per ſingulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x=y+5$, & $x=y+2$, demendo æqualia ex æqualibus, prodibit $x=3$. Et ſciendum eſt, quòd per quamlibet æquationem una quantitas incognita poteſt tolli; atque adeo cùm tot ſunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes poſſunt ad unam denique reduci, in quâ unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ ſint unâ plures quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò reſultante duæ manebunt quantitates incognitæ; & ſi ſint duabus plures quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò reſultante manebunt tres, & ſic præterea.

Poſſunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantùm æquationes fortaſſe tolli. Ut ſi fit $ax-by=ab-az$, & $bx+by=bb+az$: tum, æqualibus ad æqualia additis, prodibit $ax+bx=ab+bb$, exterminatis utriſque y & z. Sed ejuſmodi caſus vel arguunt vitium aliquod in ſtatu quæſtionis latere, vel calculum erroneum eſſe, aut non ſatis artificioſum. Modus autem quo una quantitas incognita per ſingulas æquationes tollatur, ex ſequentibus patebit.

SECT. II.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

CUM quantitas tollenda unius eſt tantùm dimenſionis in utrâque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus eſt, & alter valor ſtatuendus æqualis alteri.

Sic

De Quantitatibus Exterminandis.

Sic poſitis $a+x=b+y$, & $2x+y=3b$; ut exterminetur y, æquatio prima dabit $a+x-b=y$; & ſecunda dabit $3b-2x=y$. Eſt ergo $a+x-b=3b-2x$, ſive ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ dant $2x=5+x$, ſeu $x=5$.

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}$ $(=y)$ $=\frac{bb}{x}$; ſive ordinando, $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$, tollendo x, dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}$ $(=x)$ $=\frac{2aac-ayy}{bc}$: Et reducendo, $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$, & $ay=xz$, tollendo z, dant $x+y$ $(=z)$ $=\frac{ay}{x}$, ſive $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur, ſubducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo reſiduum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo, tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$, & manebit $a+3x-4b=0$, ſive $x=\frac{4b-a}{3}$.

SECT. III.

Exterminatio quantitatis incognitæ ſubſtituendo pro eâ valorem ſuum.

CUM in alterâ ſaltem æquatione, tollenda quantitas unius tantùm dimenſionis exiſtit, valor ejus in eâ quærendus eſt; & pro ſe in æquationem alteram ſubſtituendus. Sic propoſitis $xyy=b^3$, & $xx+yy=by-ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy}=x$: Quare in ſecundam ſubſtituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4}+yy=by-\frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6-by^5+ab^3yy+b^6=0$.

Propoſitis autem $ayy+aay=z^3$; & $yz-ay=az$, ut y tollatur, ſecunda dabit $y=\frac{az}{z-a}$. Quare pro y ſubſtituo $\frac{az}{z-a}$ in primam, proditque $\frac{a^3zz}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$. Et reducendo, $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

Pari modo propoſitis $\frac{xy}{c}=z$, & $cy+zx=cc$, ad z tollendum, pro eo ſubſtituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem ſecundam, & prodit $cy+\frac{xxy}{c}=cc$.

Cæterùm

CAPUT DECIMUM.

Cæterùm qui in hujuſmodi computationibus exercitatus fuerit, ſæpenumero contractiores modos percipiet, quibus incognita quantitas exterminari poſſit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$, & $x = \frac{az}{x-b}$, ſi æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia $axx = abb$, ſive $x = b$. Sed caſus ejuſmodi particulares ſtudioſis proprio marte, cùm res tulerit, inveſtigandos linquo.

SECT. IV.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utrâque æquatione dimenſionum exiſtit.

CUM in neutrâ æquatione tollenda quantitas unius tantùm dimenſionis exiſtit, valor maximæ poteſtatis ejus in utrâque quærendus eſt; deinde, ſi poteſtates iſtæ non ſint eædem, æquatio poteſtatis minoris multiplicanda eſt per tollendam quantitatem, aut per ejus quadratum aut cubum, &c. ut ea evadat ejuſdem poteſtatis cum æquatione alterâ. Tum valores illarum poteſtatum ponendæ ſunt æquales, & æquatio nova prodibit, ubi maxima poteſtas, ſive dimenſio, tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum ſit $xx + 5x = 3yy$, & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = -5x + 3yy$, & ſecunda $xx = \frac{2xy-4}{3}$. Pono itaque $3yy - 5x = \frac{2xy-4}{3}$, & ſic x ad unicam tantùm dimenſionem reducitur, adeoque tolli poteſt per ea quæ paulo ante oſtendi. Scilicet æquationem noviſſimam debitè reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, ſive $x = \frac{9yy+4}{2y+15}$. Hunc itaque valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propoſitis (velut in $xx + 5x = 3yy$) ſubſtituo, & oritur $\frac{81y^4+72yy+16}{4yy+60y+225} + \frac{45yy+20}{2y+15} = 3yy$. Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy + 60y + 225$, & prodit $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$; ſive $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea ſi ſit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur, multiplico poſteriorem æquationem per y, & ſit $y^3 = xxy - xyy - 3y$,

DE QUANTITATIBUS EXTERMINANDIS.

totidem dimenſionum quot prior. Jam ponendo valores ipſius y^3 ſibimet æquales, habeo $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimenſiones. Per hanc itaque, & ſimpliciorem ex æquationibus primo propoſitis, $yy = xx - xy - 3$, quantitas y prorſus tolli poteſt, inſiſtendo veſtigiis prioris exempli.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem abſolvi poſſunt; idque ſæpenumero contractiùs. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utrâque radicem y, ſicut in Reg. 7. oſtenſum eſt; & prodibunt $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & $= x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Jam hos ipſius y valores ponendo æquales, habebitur $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, reſtabit $\frac{xx}{a} = x$, vel $xx = ax$, & $x = a$.

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$, tollatur x; aufer y de partibus æquationis primæ, & reſtabit $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$; & partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$; tollendoque utrinque yy, reſtat $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y$. Quare cum $400 - 40y$ & 140 iiſdem quantitatibus æquentur, erit $400 - 40y = 140$, ſive $y = 6\frac{1}{2}$. Et ſic opus in pleriſque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterùm cùm quantitas exterminanda multarum dimenſionum exiſtit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maximè laborioſus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla ſequentia tanquam regulas adhibita.

REGULA PRIMA.

Ex $axx + bx + c = 0$, & $fxx + gx + b = 0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ab - bg - 2cf} \times ab : + \overline{bb - cg} \times bf : + \overline{agg + cff} \times c = 0.$$

REGULA

CAPUT DECIMUM.

REGULA SECUNDA.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$\overline{ab-bg-2cf} \times abh : + \overline{bh-cg-2df} \times bfh : + \overline{ch-dg} \times \overline{agg+cff} : + \overline{3agh+bgg+dff} \times df = 0.$

REGULA TERTIA.

Ex $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$\overline{ab-bg-2cf} \times ab^3 : + \overline{bh-cg-2df} \times bfhh : + \overline{agg+cff} \times \overline{chh-dgh+egg-2efh} + 3agh+bgg+dff \times dfh : + \overline{2ahh+3bgh-dfg+eff} \times eff : - \overline{bg-2ab} \times efgg = 0.$

REGULA QUARTA.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fx^3 + gxx + hx + k = 0$,

Exterminato x prodit

$\overline{ab-bg-2cf} \times \overline{adhh-achk} : + \overline{ak+bh-cg-2df} \times bdfh : - \overline{ak+bh+2cg+3df} \times aakk : + \overline{cdh-ddg-cck+2bdk} \times \overline{agg+cff} : + \overline{3agh+bgg+dff-3afk} \times ddf : - \overline{3ak-bh+cg+df} \times bcfk : + \overline{bk-2dg} \times bbfk - \overline{bbk-3adh-cdf} \times agk = 0.$

Verbi gratiâ, ut ex æquationibus $xx + 5x - 3yy = 0$, & $3xx - 2xy + 4 = 0$, exterminetur x : in regulam primam pro a, b, c ; f, g, & h respectivè substituo 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4. Et signis + & − probè observatis, oritur $\overline{4+10y+18yy} \times 4 : + \overline{20-6y^3} \times 15 : + \overline{4yy-27yy} \times -3yy = 0$. Sive $16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

Simili ratione, ut y deleatur ex æquationibus $y^3 - xyy - 3x = 0$ & $yy + xy - xx + 3 = 0$, in regulam secundam pro a, b, c, d; f, g, h, & x substituo, 1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx+3$, & y, respectivè ; proditque $\overline{3-xx+xx} \times \overline{9-6xx+x^4} : - \overline{3x+x^3+6x} \times -3x+x^3 : + 3xx \times xx : + 9x - 3x^3 - x^3 - 3x \times -3x = 0$. Tum delendo superflua & multiplicando, fit $27 - 18xx + 3x^4, -9xx + x^6, + 3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$. Et ordinando, $x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0$.

Hactenus

Hactenus de unicâ incognitâ quantitate è duabus æquationibus tollendâ. Quòd si plures è pluribus tollendæ sunt, opus per gradus peragetur. Ex æquationibus $ax = yz$, $x + y = z$, & $5x = y + 3z$, si quantitas y elicienda sit, imprimis tolle alteram quantitatem x, aut z, puta x; substituendo pro eâ valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem secundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a} + y = z$, & $\frac{5yz}{a} = y + 3z$: è quibus deinde tolle z ut suprà.

DE QUANTITATUM EXTERMINANDIS.

SECT. IV.

De modo tollendi quantitates quotcunque surdas ex æquationibus.

HUC referre licet quantitatum surdarum exterminationem, fingendo eas literis quibuslibet æquales [q]. Quemadmodum si sit $\sqrt{ay} - \sqrt{aa-ay} = 2a + \sqrt[3]{:ayy}$, scribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa-ay}$, & x pro $\sqrt[3]{:ayy}$, habebuntur æquationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, & $x^3 = ayy$: ex quibus tollendo gradatim t, v, & x, resultabit tandem æquatio libera ab omni Asymmetriâ.

CAPUT UNDECIMUM.

Quomodo Quæstio aliqua ad æquationem redigatur.

POstquam Tiro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæstionibus ad æquationem redigendis tentet. Propositâ autem aliquâ Quæstione, Artificis ingenium in eo præsertim requiritur, ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus designet. Ad quod faciendum perpendet imprimis, an propositiones sive sententiæ, quibus enunciatur, sint omnes aptæ quæ terminis algebraicis designari possint, haud secùs quàm conceptus nostri characteribus græcis vel latinis. Et si ita (ut solet in quæstionibus quæ circa numeros vel abstractas quantitates ver-

[q] Vide Fermatii dissertationem de Novo secundarum, et ulterioris ordinis, radicum in analyticis usu, inter opera ejus mathematica, p. 58.

 fantur),

CAPUT XI. ſantur), tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, ſi opus fuerit, imponat; & ſenſum quæſtionis ſermone, ut ita loquar, analytico deſignet. Et conditiones ejus, ad algebraicos terminos ſic tranſlatæ, tot dabunt æquationes, quot ei ſolvendæ ſufficiunt.

Quemadmodum ſi quærantur tres numeri continuè proportionales, quorum ſumma ſit 20, & quadratorum ſumma 140; poſitis $x, y,$ & z nominibus numerorum trium quæſitorum, quæſtio è latinis literis in algebraicas vertetur, ut ſequitur.

Quæſtio Latinè enunciata.	Eadem Algebraicè.
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x.y.z$?
Ut ſint continue proportionales,	$x.y::y.z.$ ſive $xz=yy$
Ut omnium ſumma ſit 20,	$x+y+z=20.$
Et ut quadratorum ſumma ſit 140.	$xx+yy+zz=140.$

Atque ita quæſtio deducitur ad æquationes $xz=yy$; $x+y+z=20$; & $xx+yy+zz=140$; quarum ope x, y & z per regulas ſuprà traditas inveſtigandi ſunt.

Cæterùm notandum eſt ſolutiones quæſtionum eo magis expeditas & artificioſas ut plurimùm evadere, quo pauciores incognitæ quantitates ſub initio ponuntur. Sic in hâc quæſtione poſito x pro primo numero & y pro ſecundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continuè proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæſtionem ad æquationes ſic reduco.

Quæſtio Latinè enunciata.	Eadem Algebraicè.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x.y.\frac{yy}{x}$?
Quorum ſumma ſit 20,	$x+y+\frac{yy}{x}=20.$
Et quadratorum ſumma 140.	$xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140.$

Habentur itaque æquationes $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$; quarum reductione x & y determinandi ſunt.

DE QUÆST. AD AQUAT. REDUCEND.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotannis adauget, demptis 100 lb. quas annuatim impendit in familiam; & poſt tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi.

Ad hoc autem reſolvendum ſciendum eſt, quòd plures latent propoſitiones, quæ omnes ſic eruuntur & enunciantur.

Latinè.	Algebraicè.
Mercator habet nummos quoſdam.	$x.$
Ex quibus anno primo expendit 100 lb.	$x-100.$
Et reliquum adauget triente.	$x-100+\frac{x-100}{3}$, ſive $\frac{4x-400}{3}$.
Annoque ſecundo expendit 100 lb.	$\frac{4x-400}{3}-100$, ſive $\frac{4x-700}{3}$.
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$, ſive $\frac{16x-2800}{9}$.
Et ſic anno tertio expendit 100 lb.	$\frac{16x-2800}{9}-100$, ſive $\frac{16x-3700}{9}$.
Et reliquo trientem ſimiliter lucratus eſt.	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$, ſive $\frac{64x-14800}{27}$.
Fitque duplo ditior quam ſub initio.	$\frac{64x-14800}{27}=2x.$

Quæſtio itaque ad æquationem $\frac{64x-14800}{27}=2x$ redigitur; cujus reductione eruendus eſt x. Nempe duc eam in 27, & fit $64x-14800=54x$: ſubduc $54x$, & reſtat $10x-14800=0$, ſeu $10x=14800$, & dividendo per 10 fit $x=1480$. Quare 1480 lb. ſunt nummi ſub initio, ut & lucrum.

Vides itaque quòd ad ſolutiones quæſtionum, quæ circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, nihil aliud fere requiritur, quàm ut è ſermone Latino, vel alio quovis in quo Problema proponitur, tranſlatio fiat in ſermonem (ſi ita loquar) Algebraicum; hoc eſt, in Characteres qui apti ſunt ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Nonnunquam verò poteſt accidere, quòd ſermo, quocum ſtatus quæſtionis exprimitur, ineptus videatur qui in Algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis, & ad ſenſum potiùs quàm verborum ſonos attendendo, verſio reddetur facilis. Sic

CAPUT XII. enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata : Quæ ubi obvenerint, tranſlatio ex unis in alias non verbo tenus inſtituenda eſt, ſed ex ſenſu determinanda. Cæterùm ut hujuſmodi problemata hâc methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illuſtrem, & cùm Artes exemplis faciliùs quàm præceptis addiſcantur, placuit ſequentium problematum ſolutiones adjungere.

CAPUT DUODECIMUM.

PROB. I.

Datâ duorum numerorum ſummâ a, & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x, & erit alter $a-x$, eorumque quadrata xx & $aa-2ax+xx$: Quorum differentia $aa-2ax$ ſupponitur b. Eſt itaque $aa-2ax=b$, indeque per reductionem $aa-b=2ax$ ſeu $\frac{aa-b}{2a}\ (=\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a})=x$.

EXEMPLI GR. Si ſumma numerorum, ſeu a, ſit 8, & quadratorum differentia ſeu b 16 ; erit $\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}\ (=4-1)=3=x$ & $a-x=5$. Quare numeri ſunt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates, x, y & z, quarum paris cujuſque ſumma datur.

Si ſumma paris x & y ſit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c : Pro determinandis tribus quæſitis x, y & z, tres habebuntur æquationes, $x+y=a$; $x+z=b$; & $y+z=c$. Jam ut incognitarum duæ, puta y & z, exterminentur, aufer x utrinque in primâ & ſecundâ æquatione, & emergent $y=a-x$, & $z=b-x$; quos valores pro y & z ſubſtitue in tertiâ, & orietur $a-x+b-x=c$; & per reductionem $x=\frac{a+b-c}{2}$. Invento x, æquationes ſuperiores, $y=a-x$, & $z=b-x$, dabunt y & z.

EXEMP. Si ſumma paris x & y ſit 9; paris x & z, 10; & paris y & z, 13; tùm in valoribus x, y & z ſcribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a+b-c=6$, adeoque $x\ (=\frac{a+b-c}{2})=3$, $y\ (=a-x)=6$, & $z\ (=b-x)=7$. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

PROB. III.

Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere, ut majores partes ſuperent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejuſmodi partes dividenda; ejuſque prima atque minima pars, x; & ſuper hanc exceſſus ſecundæ partis, b; tertia partis, c; & quartæ partis, d; & erit $x+b$ ſecunda pars, $x+c$ tertia pars, & $x+d$ quarta pars ; quarum omnium aggregatum, $4x+b+c+d$, æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b+c+d$, & reſtat $4x=a-b-c-d$, ſive $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

EXEMP. Proponatur linea 20 pedum, ſic in 4 partes diſtribuenda, ut ſuper primam partem exceſſus ſecundæ ſit 2 pedum, tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt $x\ (=\frac{a-b-c-d}{4}$ ſive $\frac{20-2-3-7}{4})=2$, $x+b=4$, $x+c=5$, & $x+d=9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iiſdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

Viro cuidam nummos inter mendicantes diſtribuere volenti, deſunt octo denarii quo minùs det ſingulis tres denarios. Dat itaque ſingulis duos denarios, & tres denarii ſuperſunt. Quæritur numerus mendicantium.

Eſto numerus mendicantium x, & deerunt 8 denarii quo minùs det omnibus $3x$ denarios ; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ ſunt tres. Hoc eſt $x-8=3$, ſeu $x=11$.

PROB.

CAPUT XII.

PROB. V.

Si Tabellarii duo, A & B, 59 milliaribus distantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B unâ horâ seriùs iter instituit quàm A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59-x$ longitudo itineris B: Et cùm A pertranseat 7 mill. in 2 hor. pertransibit spatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quòd sit 7 mill. x mill. : : 2 hor. . $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cùm B pertranseat 8 mill. in 3 hor. pertransibit spatium suum $59-x$ in $\frac{177-3x}{8}$ horis. Jam cùm horum temporum differentia sit 1 hor.; ut evadant æqualia, adde differentiam illam breviori tempori, nempe tempori $\frac{177-3x}{8}$, & emerget $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35=x$. Nam, multiplicando per 8, fit $185-3x=\frac{16x}{7}$. Dein, multiplicando etiam per 7, fit $1295-21x=16x$, seu $1295=37x$. Et, dividendo denique per 37, exoritur $25=x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generaliùs.

Datis duorum mobilium A & B eodem cursu pergentium celeritatibus, unà cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: Determinare metam in quâ convenient.

Pone mobilis A eam esse celeritatem quâ spatium c pertransire possit in tempore f, & mobilis B eam esse quâ spacium d pertransire possit in tempore g; & locorum intervallum esse e; ac h, temporum in quibus moveri incipiunt.

CASUS I.

Deinde si ambo ad easdem plagas tendant, & A sit mobile quod sub initio motûs longius distat à metâ: Pone distantiam illam esse x, indeque aufer intervallum e, & restabit $x-e$ pro distantiâ B à metâ. Et cùm A pertranseat spatium c in tempore f, tempus in quo pertransibit spatium x erit $\frac{fx}{c}$, eo quòd sit spatium c ad spatium

tium x, ut tempus f ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cùm B pertranseat spatium d in g, tempus, in quo pertransibit spatium $x-e$, erit $\frac{gx-ge}{d}$. Jam cùm horum temporum differentia supponatur h, ut ea evadant æqualia, adde h breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ (si modò B priùs incipiat moveri) & evadet $\frac{fx}{c}+h=\frac{gx-ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{ge+cdh}{cg-df}$, vel $\frac{ge+dh}{g-\frac{cf}{d}}$, $=x$. Sin A priùs moveri incipiat, adde h tempori $\frac{gx-ge}{d}$, & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{gx-ge}{d}$, & per reductionem $\frac{ge-cdh}{cg-df}=x$.

QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

CASUS II.

Quòd si mobilia obviam eant, & x ut antè ponatur initialis distantia mobilis A à metâ, tum $e-x$ erit initialis distantia ipsius B ab eâdem metâ; & $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet distantiam x, atque $\frac{ge-gx}{d}$ tempus in quo B conficiet distantiam suam $e-x$. Quorum temporum minori, ut suprà, adde differentiam h, nempe tempori $\frac{fx}{c}$, si B priùs incipiat moveri, & sic habebitur $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{ge-cdh}{cg+df}=x$. Sin A priùs incipiat moveri, adde h tempori $\frac{ge-gx}{d}$, & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{ge+cdh}{cg+df}=x$.

EXEMPL. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit, & Luna tredecim; & ad tempus aliquod, Sol sit in principio Cancri, atque post tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proximè futuræ. Resp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cùm ambo ad easdem plagas eant, & serior sit Epocha motûs Lunæ, quæ longius distat à metâ: erit A Luna, B Sol, & $\frac{ge+cdh}{cg-df}$ longitudo itineris lunaris; quæ, si scribatur 13 pro c, 1 pro f, d, ac g, 90 pro e, & 3 pro h, evadet $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}$; hoc est $\frac{1209}{12}$, sive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice principio Arietis, & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

EXEMPL.

CAPUT XII. EXEMPL. II. Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus distantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B, 8 milliaria in 3 horis, & B unâ horâ seriùs iter instituit quàm A: Quæritur iter quod A conficiet antequam conveniat B. Resp. 35 mill. Nam cùm obviam eant, & A primò instituat iter, erit $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ iter quæsitum. Et hoc, si scribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro h, evadet $\frac{7\times3\times59+7\times8\times1}{7\times3+8\times2}$; hoc est $\frac{1295}{37}$, sive 35.

PROB. VI.

Datâ agentis alicujus potestate, invenire quot ejusmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Sit ea agentis potestas quâ effectum c producere potest in tempore d; & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c, quem agens iste producere potest in tempore d, ad effectum quem potest producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus, $\frac{bc}{d}$, ad omnium effectum, a, ita agens iste unicus ad omnes agentes: adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

EXEMPL. Si scriba in 8 diebus 15 folia describere potest, quot ejusmodi scribæ requiruntur ad describendum 405 folia in 9 diebus? Resp. 24. Nam si substituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a, & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405\times8}{9\times15}$, hoc est $\frac{3240}{135}$, sive 24.

PROB. VII.

Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producent.

Agentium A, B, C, vires ponantur, quæ in temporibus e, f, g, producant effectus a, b, c respectivè; & hæ in tempore x producent effectus $\frac{ax}{e}$, $\frac{bx}{f}$, $\frac{cx}{g}$. Quare est $\frac{ax}{e}+\frac{bx}{f}+\frac{cx}{g}=d$, & per reductionem $x=\frac{d}{\frac{a}{e}+\frac{b}{f}+\frac{c}{g}}$.

EXEMPL.

EXEMPL. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, *viz.* A semel in tribus septimanis, B ter in octo septimanis, & C quinquies in duodecim septimanis. Quæritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C, vires, quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 respective: et quæritur tempus quo absolvent effectum 1. Quare pro a, b, c; d; e, f, g; scribe 1, 3, 5; 1; 3, 8, 12, & proveniet $x=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$, sive $\frac{8}{9}$ sept. hoc est 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo simul absolvent. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

PROB. VIII.

Dissimiles duarum pluriumve rerum misturas ita componere, ut res illæ commistæ datam inter se rationem acquirant.

Sit unius misturæ data quantitas dA + eB + fC, alterius eadem quantitas gA + hB + kC, & eadem tertiæ lA + mB + nC ubi A, B, & C denotent res mistas, & d, e, f, g, h, &c. Proportiones earundem in misturis. Et sit pA + qB + rC mistura, quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros esse, per quos si tres datæ misturæ respective multiplicentur, earum summa evadet pA + qB + rC.

$$\text{Est itaque } \left.\begin{array}{rrr} dx\text{A} & + ex\text{B} & + fx\text{C} \\ + gy\text{A} & + hy\text{B} & + ky\text{C} \\ + lz\text{A} & + mz\text{B} & + nz\text{C} \end{array}\right\} = p\text{A} + q\text{B} + r\text{C},$$

Adeoque, collatis terminis, $dx+gy+lz=p$; $ex+hy+mz=q$; & $fx+ky+nz=r$; & per reductionem $x=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$. Et rursus æquationes $\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{q-hy-mz}{e}$, & $\frac{q-hy-mz}{e}=\frac{r-ky-nz}{f}$ per reductionem dant $\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh}\ (=y)=\frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$: Quæ, si abbrevietur scribendo α pro $ep-dq$, β pro $dm-el$, γ pro $eg-dh$, δ pro $fq-er$, ζ pro $en-fm$, & θ pro $fh-ek$, evadet $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{\delta+\zeta z}{\theta}$; & per reductionem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=z$. Invento z, pone $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=y$, & $\frac{p-gy-lz}{d}=x$.

CAPUT XII.

EXEMPL. Si tres ſint metallorum colliquefactorum miſturæ, quarum primæ pondo continet argenti $\frac{2}{3}$ 12, æris $\frac{2}{3}$ 1, & ſtanni $\frac{2}{3}$ 3, ſecundæ pondo continet argenti $\frac{2}{3}$ 1, æris $\frac{2}{3}$ 12, & ſtanni $\frac{2}{3}$ 3, & tertiæ pondo continet æris $\frac{2}{3}$ 14, ſtanni $\frac{2}{3}$ 2, & argenti nihil; ſintque hæ miſturæ ita componendæ, ut pondo compoſitionis contineat argenti $\frac{2}{3}$ 4, æris $\frac{2}{3}$ 9, & ſtanni $\frac{2}{3}$ 3: pro d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r ſcribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 reſpectivè, & erit α $(= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$, & β $(= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, & ſic $\gamma = -143$, $\delta = 24$, $\zeta = -40$, & $\theta = 33$. Adeoque z $(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}) = 0$, y $(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}) = \frac{8}{11}$, & x $(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12}) = \frac{3}{11}$. Quare ſi miſceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo miſturæ ſecundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ, & nihil tertiæ, aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres ſtanni.

PROB. IX.

Datis plurium ex iiſdem rebus miſturarum pretiis, & proportionibus miſtorum inter ſe, pretium cujuſvis è miſtis determinare.

Cujuſvis rerum A, B, C, miſturæ, $dA + gB + lC$, pretium eſto p; miſturæ $eA + hB + mC$ pretium q; & miſturæ $fA + kB + nC$ pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C ſubſtitue earum pretia x, y & z, & exurgent æquationes $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$; $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$; & $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

EXEMPL. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ ſimul 15 libris 12 ſolidis; Deinde conſimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ ſimul 16 libris: ac tertiò conſimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei, & 100 modios avenæ ſimul 34 lib. Quæritur quanti æſtimandus ſit modius cujuſque grani? Reſp. Modius tritici 5 ſolidis, hordei 3 ſolidis, & avenæ 2 ſolidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r ſcribendo reſpectivè 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit

prodit α $(= ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16) = -234\frac{2}{5}$; & β $(= dm - el$ $= 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480$. Atque ita $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, & $\theta = -2400$. Adeoque z $(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-576000 + 288000}{-806400 + 576000}$ $= \frac{274560}{2745600}) = \frac{1}{10}$, y $(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576}) = \frac{1}{20}$. Et x $(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{1}{2} - 2}{40}) = \frac{1}{4}$. Conſtitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ lb ſeu 5 ſolidis, modius hordei $\frac{1}{20}$ lb ſeu 3 ſolidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ lb ſeu 2 ſolidis.

PROB. X.

Datis & miſturæ & miſtorum gravitatibus ſpecificis invenire proportionem miſtorum inter ſe.

Sit e gravitas ſpecifica miſturæ A+B, cujus A gravitas ſpecifica eſt a, & B gravitas b; & cùm gravitas abſoluta, ſeu pondus, componatur ex mole corporis & gravitate ſpecificâ, erit a A pondus ipſius A, b B pondus ipſius B, & e A + e B pondus aggregati A + B; adeoque aA + bB = eA + eB, indeque aA − eA = eB − bB, ſeu $e - b$. $a - e$ :: A. B.

EXEMPL. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{2}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque 10. 3 (:: $e - b$. $a - e$ :: A. B) :: moles auri in coronâ, ad molem argenti: vel 190. 31 (:: 19 × 10. $10\frac{1}{2} \times 3$ :: $a \times e - b$. $b \times a - e$) :: pondus auri in coronâ, ad pondus argenti: & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB. XI.

Si boves a depaſcant pratum b in tempore c; & boves d depaſcant pratum æquè bonum e in tempore f, & gramen uniformiter creſcat: Quæritur quot boves depaſcent pratum ſimile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depaſcant pratum b; tum, per analogiam, boves $\frac{c}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{cc}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{cc}{bh}a$ in tempore h, depaſcent pratum e: puta ſi

CAPUT XII.

gramen poſt tempus c non creſceret. Sed cùm propter graminis incrementum boves d in tempore f, depaſcant ſolummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f-c$ tantum erit, quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus $d-\frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc eſt, quantum ſufficit paſcendis bobus $\frac{df}{b}-\frac{eca}{bb}$ per tempus b. Et in tempore $b-c$, per analogiam, tantum erit incrementum, quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus $\frac{b-c}{f-c}$ in $\frac{df}{b}-\frac{eca}{bb}$, ſive $\frac{bdfb-ecab-bdcf+acec}{bfb-bcb}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bb}$, & prodibit $\frac{bdfb-ecab-bdcf+ecfa}{bfb-bcb}$ numerus boum quibus paſcendis ſufficit pratum e per tempus b. Adeoque per analogiam pratum g bobus $\frac{bdfgb-ecagb-bdcgf+ecfga}{befb-bceb}$ per idem tempus b paſcendis ſufficiet.

EXEMPL. Si 12 boves depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 ſeptimanis; & 21 boves depaſcant 10 jugera conſimilis prati in 9 ſeptimanis; quæritur quot boves depaſcant 24 jugera in 18 ſeptimanis? Reſp. 36. Iſte enim numerus invenietur ſubſtituendo in $\frac{bdfgb-ecagb-bdcgf+ecfga}{befb-bceb}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & b reſpectivè. Sed ſolutio fortè haud minùs expedita erit, ſi è primis principiis ad formam ſolutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote ſi 12 boves in 4 ſeptimanis depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum, per analogiam, 36 boves in 4 ſeptimanis, vel 16 boves in 9 ſeptimanis, vel 8 boves in 18 ſeptimanis depaſcent 10 jugera: puta ſi gramen non creſceret. Sed cùm propter graminis incrementum 21 boves in 9 ſeptimanis depaſcant ſolummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per poſteriores 5 ſeptimanas incrementum tantum erit, quantum per ſe ſufficit exceſſui boum 21 ſupra 16, hoc eſt 5 bobus per 9 ſeptimanas, vel quod perinde eſt $\frac{5}{2}$ bobus per 18 ſeptimanas paſcendis. Et in 14 ſeptimanis (exceſſu 18 ſupra 4 primas) incrementum illud graminis, per analogiam, tantum erit quantum ſufficiat 7 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis; eſt enim 5 ſept. 14 ſept. $\frac{5}{2}$ boves 7 boves. Quare 8 bobus, quos 10 jugera ſine incremento graminis paſcere poſſunt per 18 ſeptimanas,

timanas, adde hoſce 7 boves, quibus paſcendis ſolum incrementum graminis ſufficit, & ſumma erit 15 boves. Ac denique ſi 10 jugera 15 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis ſufficiant, tum, per analogiam, 24 jugera per idem tempus ſufficient 36 bobus.

PROB. XII.

Datis ſphæricorum corporum in eâdem rectâ motorum, ſibique occurrentium, magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem poſt reflexionem.

Hujus reſolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eâdem celeritate poſt reflexionem recedant ab invicem, quâ ante accedebant. His poſitis ſint corporum A & B celeritates a & b reſpectivè; & motus (ſiquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt a A & b B. Et ſi corpora ad eaſdem plagas tendant, & A celerius movens inſequatur B, pone x decrementum motûs a A, & incrementum motûs b B, percuſſione exortum; & poſt reflectionem motus erunt a A $-x$, & b B $+x$; & celeritates $\frac{aA-x}{A}$ ac $\frac{bB+x}{B}$; quarum differentia æquatur $a-b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio $\frac{bB+x}{B}-\frac{aA-x}{A}=a-b$, & inde per reductionem fit $x=\frac{2aAB-2bAB}{A+B}$; quo pro x in celeritatibus, $\frac{aA-x}{A}$, & $\frac{bB+x}{B}$, ſubſtituto, prodeunt $\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ celeritas ipſius A, & $\frac{2aA-bA+bB}{A+B}$ celeritas ipſius B, poſt reflexionem.

Quòd ſi corpora obviam eant, tum ſigno ipſius b ubique mutato, celeritates poſt reflectionem erunt $\frac{aA-aB-2bB}{A+B}$ & $\frac{2aA+bA-bB}{A+B}$: Quarum alterutra ſi fortè negativa obvenerit, id arguit motum illum poſt reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam, ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipſius A in caſu priori intelligendum eſt.

EXEMPL.

CAPUT XII. EXEMPL. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad eaſdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b ſcribe 3, 8, 9 & 2; & $(\frac{aA-aB+2bB}{A+B})$ evadit -1, ac $(\frac{2aA-bA+bB}{A+B})$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis poſt reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII.

Invenire tres numeros continuè proportionales quorum ſumma ſit 20, *& quadratorum ſumma* 140.

Pone numerorum primum x, & ſecundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$. Et per reductionem $xx \overset{+y}{_{-20}} x+yy=0$, & $x^4 \overset{+yy}{_{-140}} xx+y^4=0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h, in Reg. 3. ſubſtitue reſpectivè 1, 0, $yy-140$, 0, y^4; 1, $y-20$, & yy; et emerget $-yy+280\times y^6 : +2yy-40y+260 \times 260y^4-40y^5 : +3y^4\times y^4 : -2yy\times y^6-40y^5+400y^4 : =0$. Et, per multiplicationem, $1600y^6+20800y^5-67600y^4=0$. Ac reducendo, $4yy-52y+169=0$. Sive (radice extractâ) $2y-13=0$, ſeu $y=6\frac{1}{2}$. Id quod etiam breviùs aliâ methodo ſed minùs obviâ ſuprà inventum eſt. Porro, ut inveniatur x, ſubſtitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx \overset{+y}{_{-20}} x+yy=0$. Et exurget $xx-13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}=0$, ſeu $xx=13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}$. Et, extractâ radice, $x=6\frac{3}{4}+\text{vel}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ eſt maximus quæſitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambiguè deſignat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter poteſt eſſe x, exiſtente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Poſitis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$, ut antè, erit $x+y+\frac{yy}{x}=20$, ſeu $xx=\overset{20}{_{-y}} x-yy$; & extractâ radice, $x=10-\frac{1}{2}y+\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20, & reſtat $\frac{yy}{x}=10-\frac{1}{2}y-\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}yy}$ tertius numerus. Eſtque ſumma quadratorum a tribus hiſce numeris $400-40y$, adeoque $400-40y$

$=140$, ſive $y=6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, ſubſtitue cum pro y in primo ac tertio numero ſuprà invento; & evadet primus $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$, ac tertius $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$, ut antè. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

PROB. XIV.

Invenire quatuor numeros continuè proportionales quorum duo medii ſimul conſtituant 12, *& duo extremi* 20.

Sit x ſecundus numerus; & erit $12-x$ tertius; $\frac{xx}{12-x}$ primus; & $\frac{144-24x+xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12-x}+\frac{144-24x+xx}{x}=20$. Et, per reductionem, $xx=12x-30\frac{6}{7}$, ſeu $x=6+\sqrt{5\frac{1}{7}}$. Quo invento cæteri numeri è ſuperioribus dantur.

PROB. XV.

Invenire quatuor numeros continuè proportionales, quorum datur ſumma a, & ſumma quadratorum b.

Etſi deſideratas quantitates ut plurimùm immediatè quærere ſolemus, ſiquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc eſt, quæ conditionibus omnino ſimilibus præditæ ſunt, (ut hîc duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præſtat alias quantitates non ambiguas quærere, per quas hæ determinantur: quemadmodum harum ſummam, vel differentiam, vel rectangulum. Ponamus ergo ſummam duorum mediorum numerorum eſſe s, & rectangulum r; & erit ſumma extremorum $a-s$, & rectangulum etiam r, propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y ſecundum; eritque $s-y$ tertius; & $a-s-x$ quartus; & rectangulum ſub mediis $sy-yy=r$; indeque medii, $y=\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$, & $s-y=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-r}$. Item rectangulum ſub extremis $ax-sx-xx=r$; indeq; extremi, $x=\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$, & $a-s-x=\frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4}-r}$.

Summa

CAPUT XII. Summa quadratorum ex hiſce quatuor numeris eſt $2ss - 2as + aa - 4r$, quæ eſt $= b$. Ergo $r = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$, quo ſubſtituto pro r prodeunt quatuor numeri ut ſequitur.

Duo medii $\begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa.} \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa.} \end{cases}$

Duo extremi $\begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss.} \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss.} \end{cases}$

Reſtat tamen etiamnum inquirendus valor ipſius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hiſce ſubſtitue.

$\frac{1}{2}s + p.$ & $\frac{a-s}{2} + q.$

$\frac{1}{2}s - p.$ & $\frac{a-s}{2} - q.$

Et pone rectangulum ſub ſecundo & quarto æquale quadrato tertii, ſiquidem hæc problematis conditio nondum impleatur; eritque $\frac{as-ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa-ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. Pone etiam rectangulum ſub primo & tertio æquale quadrato ſecundi; & erit $\frac{as-ss}{4} + \frac{1}{2}qs \frac{-pa+ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum æquationum priorem aufer è poſteriori, & reſtabit $qs - pa + ps = 2ps$, ſeu $qs = pa + ps$. Reſtitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = a + s \times \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, ſeu $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$; quo invento, dantur quatuor numeri quæſiti è ſuperioribus.

PROB. XVI.

Si penſio annua librarum a per quinque annos proximè ſequentes ſolvenda, ematur paratâ pecuniâ c, quæritur quanti æſtimanda ſit uſura uſuræ centum librarum per annum.

Pone $1 - x$ uſuram uſuræ pecuniæ x in anno, hoc eſt quod pecunia 1 poſt annum ſolvenda valeat x paratæ pecuniæ; &, per analogiam, pecunia a poſt annum ſolvenda valebit ax paratæ pecuniæ,

niæ, poſt duos annos, axx; poſt tres, ax^3; poſt quatuor, ax^4; & poſt quinque, ax^5. Adde jam hos quinque terminos, & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, ſeu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimenſionum; cu*jus ope cùm x, per regulas poſt docendas, inventum fuerit *, pone $x.1 :: 100.y$. Et erit $y - 100$ uſura uſuræ centum librarum per annum.

QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

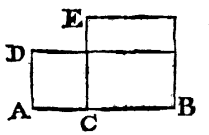
*Nempe inveniendo figuras primas radicis per conſtructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.

Atque has, in quæſtionibus ubi ſolæ quantitatum proportiones abſque poſitionibus linearum conſiderandæ veniunt, inſtantias dediſſe ſufficiat: Perganrus jam ad Problematum Geometricorum ſolutiones.

CAPUT DECIMUM TERTIUM.

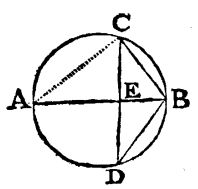
Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

QUæſtiones *Geometricæ* eâdem facilitate iiſdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi poſſunt, ac quæ de abſtractis quantitatibus proponuntur. Ut ſi recta AB in extremâ & mediâ proportione ſecanda ſit in C, hoc eſt, ita ut BE, quadratum maximæ partis, ſit æquale rectangulo, BD, ſub totâ & minore parte contento: poſito $AB = a$, & $BC = x$, erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; æquatio quæ per reductionem dat $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa}$.



Sed in rebus Geometricis quæ frequentiùs occurrunt, à variis linearum poſitionibus & relationibus complexis ita dependere ſolent, ut egeant ulteriori inventione & artificio, quo ad Algebraicos terminos deduci poſſint. Et licet in hujuſmodi caſibus difficile ſit aliquid præſcribere, & cujuſque ingenium ſibi debeat eſſe operandi norma: conabor tamen diſcentibus viam præſternere. Sciendum eſt itaque, quòd quæſtiones circa eaſdem lineas, definito quolibet modo ſibi invicem relatas, poſſint variè proponi, ponendo alias atque alias quærendas eſſe ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuſcunque tamen datis vel quæſitis inſtituitur quæſtio, ſolutio ejus eâdem planè methodo ex Analyſeos ſerie perficietur, nullâ omninò circumſtantiâ variatâ præter fictas linearum ſpecies,

CAPUT XIII. five nomina, quibus datas à quæſitis ſolemus diſtinguere. Quemadmodum ſi quæſtio ſit de Iſoſcele CBD in circulum inſcripto,



cujus latera BC, BD, & baſis CD cum diametro circuli AB conferenda ſunt: ea vel proponi poteſt de inveſtigatione *diametri* ex datis lateribus & baſi, vel de inveſtigatione *baſis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de inveſtigatione *laterum* ex datis baſi & diametro: Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem ſeriem Analyſeos. Nempe ſi quæratur *Diameter* pono AB = x, CD = a, & BC vel BD = b. Tum, ductâ AC, propter ſimilia triangula ABC & CBE, eſt AB. BC :: BC. BE, ſive $x.b::b.$ BE. Quare BE = $\frac{bb}{x}$. Eſt & CE = $\frac{1}{2}$CD, ſive $\frac{1}{2}a$: et, propter angulum CEB rectum, CEq + BEq = BCq; hoc eſt, $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio, per reductionem, dabit quæſitum x.

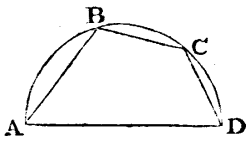
Sin quæratur *Baſis*, pono AB = c, CD = x, & BC vel BD = b. Tum (ductâ AC) propter ſimilia triangula ABC & CBE, eſt AB. BC :: BC. BE, ſive $c.b::b.$BE. Quare BE = $\frac{bb}{c}$. Eſt & CE = $\frac{1}{2}$CD, ſive $\frac{1}{2}x$: &, propter angulum CEB rectum, CEq + BEq = BCq; hoc eſt, $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæſitum x.

Atque ita ſi *Latus* BC vel BD quæratur, pono AB = c, CD = a, & BC vel BD = x. Et (AC ut antè ductâ) propter ſimilia triangula ABC & CBE, eſt AB. BC : : BC. BE; ſive $c.x::x.$ BE. Quare BE = $\frac{xx}{c}$. Eſt & CE = $\frac{1}{2}$ CD, ſive $\frac{1}{2}a$; &, propter angulum CEB rectum, eſt CEq + BEq = BCq; hoc eſt, $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæſitum x.

Vides itaque quòd in unoquoque caſu calculus, quo pervenitur ad æquationem, per omnia ſimilis ſit, & eandem æquationem pariat, excepto tantùm quòd lineas aliis atque aliis literis deſignavi, prout datæ vel quæſitæ ponuntur. Ex diverſis quidem datis & quæſitis oritur diverſitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis, $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$, alia eſt reductio, ut obtineatur $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb-aa}}$, valor de AB; & æquationis, $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$, alia reductio,

ductio, ut obtineatur $x = \frac{2b}{c}\sqrt{cc-bb}$, valor de CD; & æquationis, $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$, reductio longè alia, ut obtineatur $x = \sqrt{\frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc-aa}}$, valor de BC vel BD: perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c, a, vel b diverſis modis reduci debet: ſed in harum æquationum inventione nulla fuit diverſitas. Et hinc eſt quod jubent, ut nullum inter datas & quæſitas quantitates habeatur diſcrimen. Nam cùm eadem computatio cuique caſui datorum & quæſitorum competat, convenit, ut ſine diſcrimine concipiantur & conferantur, quo rectiùs judicetur de modis computandi: vel potiùs convenit, ut fingas quæſtionem de ejuſmodi datis & quæſitis propoſitam eſſe, per quas arbitreris te poſſe ad æquationem facillimè pervenire. De Quæst. Geometr.

Propoſito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæſitas habito diſcrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant, ut cognoſcas, quanam, ſi aſſumantur, ſyntheticè gradiendo dabunt cæteras. Ad quod faciendum, non opus eſt, ut primâ fronte de modo cogites, quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci poſſint; ſed ſufficit animadverſio generalis, quòd poſſint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratiâ; ſi quæſtio ſit de circuli diametro AD, tribuſque lineis AB, BC, & CD in ſemicirculo inſcriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifeſtum eſt diametrum AD determinare ſemicirculum; dein lineas AB & CD per inſcriptionem determinare puncta B & C, atque adeo quæſitum BC, idque nexu maximè directo; & quo pacto tamen BC ex his datis



per Analyſin eruatur, non ita manifeſtum eſt. Hoc idem quoque de AB vel CD, ſi ex reliquis datis quærerentur, intelligendum eſt. Quòd ſi AD ex datis AB, BC & CD quæreretur, æquè patet id non fieri poſſe Syntheticè; ſiquidem punctorum A ac D diſtantia dependet ex angulis B & C; & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ ſunt inſcribendæ; & ille circulus non datur, ignotâ AD diametro. Rei igitur natura poſtulat, ut AD non Syntheticè, ſed ex ejus aſſumptione, quæratur, ut ad data fiat regreſſus.

CAPUT XIII. Cùm varios ordines, quibus termini quæſtionis ſic evolvi poſſint, perſpexeris, *E ſyntheticis quoſlibet adhibe, aſſumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progreſſus, & ad ipſas viciſſim difficillimus.* Nam computatio, ut per varia media poſſit incedere, tamen ab iſtis lineis initium ſumet; ac promptiùs perficietur, fingendo quæſtionem ejuſmodi eſſe, ac ſi de iſtis datis & quæſito aliquo, ab iſtis facillimè proditurо, inſtitueretur, quàm de quæſtione, prout reverâ, proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato, ſi ex reliquis datis quæritur AD; cùm id ſyntheticè fieri non poſſe percipiam, ſed ab ipſo tamen, ſi modò daretur, diſcurſum ad alia directo nexu incedere, aſſumo AD tanquam datum; & abinde computationem non ſecùs incipio, quàm ſi reverâ daretur, & aliqua ex datis, AB, BC & CD, quæreretur. Atque hâc methodo, computationem ab aſſumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejuſdem alicujus quantitatis valores ſemper obtinebitur; ſive ex valoribus unus ſit litera, ſub initio operis, quantitati pro nomine impoſita, & alter per computationem inventus; ſive uterque per computationem diverſimodè inſtitutam inveniatur.

Cæterùm ubi terminos quæſtionis ſic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur, ut advertas particulares iſtos nexus, ſive linearum relationes, quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxiùs perpendenti videantur immediatè & relatione proximâ connecti, cùm illam relationem algebraicè deſignare volumus, circuitum plerumque, quoad conſtructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam, exigunt: Quemadmodum de BC ex AD, AB & CD colligendo conſtare poteſt. Per ejuſmodi enim propoſitiones vel enunciationes ſolummodò gradiendum eſt, quæ aptæ ſunt ut terminis algebraicis deſignentur, quales præſertim ab Axiom. 19, Prop. 4, lib. 6, & Prop. 47, lib. 1. Elem. proveniunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel ſubductionem linearum, eò ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundò promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim,

enim, ut ſuprà, factum à mediis terminis diviſum per alterutrum extremorum eſſe valorem alterius. Vel quod perinde eſt, ſi valores omnium quatuor proportionalium priùs habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum verò proportionalitas ex triangulorum ſimilitudine maximè ſe prodit; quæ cùm ex æqualitate angulorum dignoſcatur, in iis comparandis Analyſta debet eſſe perſpicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 32. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8, lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31, lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri poteſt Prop. 3, lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas, & contrà. Atque idem aliquandò præſtant Prop. 35 & 36, lib. 3. DE QUÆST. GEOMETR.

Tertiò promovetur per additionem vel ſubductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum, ut obtineatur quadratum maximi; vel à quadrato maximi lateris ſubducimus quadratum unius è minoribus, ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (ſi adnumeretur Prop. 1, lib. 6, Elem. cùm de ſuperficiebus agitur, ut & aliquæ propoſitiones ex lib. 11 & 12, deſumptæ cùm agitur de ſolidis) tota Ars Analytica, quoad Geometriam rectilineam, innititur. Quin etiam ad ſolas linearum ex partibus compoſitiones & ſimilitudines triangulorum poſſunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus ſit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo reſolvi poſſunt, & proinde ſolutiones etiam quæ ex iſtis depromuntur. Inque hujus rei inſtantiam ſubjunxi Problema de perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demittendo ſine adjumento Prop. 47. lib. 1. ſolutum. Etſi verò juvet ſimpliciſſima principia à quibus problematum ſolutiones dependet non ignoraſſe, & iſtis ſolis adhibitis poſſe quælibet ſolvere; expeditionis tamen gratiâ convenit, ut non ſolùm Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus uſus eſt frequentiſſimus; ſed & alia etiam *Theoremata* nonnunquam adhibeantur.

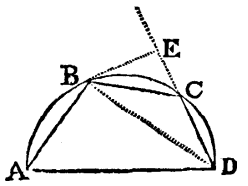
Quemadmodum ſi, perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demiſſo, de ſegmentis baſis ad calculum promovendum agatur; ex uſu erit ſcire, quòd Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo ſub baſi & diſtantiâ perpendiculi à medio baſis.

CAPUT XIII. Si trianguli alicujus verticalis angulus bifecetur, computationi non ſolum inſerviet, quòd baſis ſecetur in ratione laterum, ſed etiam quòd differentia factorum à lateribus & à ſegmentis baſis æquetur quadrato lineæ biſecantis angulum.

Si de figuris in circulo inſcriptis res eſt, Theorema non rarò ſubveniet, quòd Inſcripti cujuſlibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur ſummæ factorum à lateribus oppoſitis.

Et hujuſmodi plura inter exercendum obſervet Analyſta, & in penum fortè reſervet; ſed parciùs utatur, ſi pari facilitate, aut non multo difficiliùs, poſſit ſolutionem è ſimplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primò propoſita tanquam notiora, ſimpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen ſufficientia animum præſertim advertat, & omnes difficultates ad ea præ cæteris reducere conetur.

Sed ut hujuſmodi Theoremata ad ſolvenda Problemata accommodari poſſint, *Schemata* plerumquè ſunt ultrà *conſtruenda*, idque ſæpiſſimè producendo aliquas ex lineis donec ſecent alias, aut ſint aſſignatæ longitudinis; vel ab inſigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel inſigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam conſtruendo, prout exigunt ſtatus Problematis, & Theoremata quæ ad ejus ſolutionem adhibentur. Quemadmodum ſi duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertiâ quâdam efficiant, producimus fortè, ut concurrentes conſtituant triangulum, cujus anguli, & proinde laterum rationes, dantur. Vel ſi quilibet angulus detur, aut ſit alicui æqualis, in triangulum ſæpè complemus ſpecie datum, aut alicui ſimile, idque vel producendo aliquas ex lineis in ſchemate, vel ſubtenſam aliter ducendo. Si triangulum ſit obliquangulum, in duo rectangula ſæpè reſolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, reſolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: et ſic in cæteris; ad hanc metam ſemper collimando, *ut ſchema in triangula vel data, vel ſimilia, vel rectangula, reſolvatur*. Sic in exemplo propoſito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum, reſolvatur. Deinde reſolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula, demittendo perpendiculum à quolibet ejus



ejus angulo, B, C, vel D, in latus oppoſitum: quemadmodum à B in CD, productam ad E, ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea verò cùm anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perindè ac BCE & BCD conſtituant; percipio angulos BAD & BCE æquales eſſe, adeoque triangula BCE ac DAB ſimilia. Atque ita video computationem, aſſumendo AD, AB & BC tanquam ſi CD quæreretur, ad hunc modum inſtitui poſſe; viz. AD & AB (propter tri. ABD rect.) dant BD. AD, AB, BD & BC, propter ſim. tri. ABD & CEB, dant BE & CE. BD & BE, propter triang. BED rect. dant ED; & ED − EC dat CD. Unde continebitur æquatio inter valorem de CD ſic inventum & literam pro eâ ſuffectam. Poſſumus etiam (& maximam partem ſatiùs eſt quàm opus in ſerie continuatâ nimis proſequi,) à diverſis principiis computationem incipere, aut ſaltem diverſis modis ad eandem quamlibet concluſionem promovere; ut duo tandem obtineantur ejuſdem cujuſvis quantitatis valores, qui æquales ponantur. Sic AD, AB & BC dant BD, BE & CE, ut priùs; deinde CD + CE dat ED; ac denique BD & ED, propter triang. rect. BED, dant BE. Poteſt etiam computatio hâc lege optimè inſtitui, ut valores quantitatum inveſtigentur, quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cùm relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12, lib. 2, Elem. conſtet; nempe quòd ſit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: Quæro BDq ex aſſumptis AD & AB; ac CE ex aſſumptis AD, AB & BC. Et, aſſumendo denique CD, facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad hos modos & hujuſmodi conſiliis ductus, de ſerie Analyſeos, deque ſchemate propter eam conſtruendo, ſemper debes unà proſpicere.

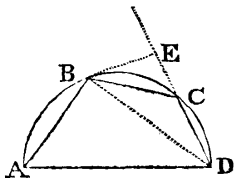
DE QUÆST. GEOMETR.

Ex his, credo, manifeſtum eſt, quid ſibi velint Geometræ, cùm jubent, putes factum eſſe quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito diſcrimine, quaſlibet ad ineundum calculum aſſumere potes, quaſi omnes ex præviâ ſolutione fuiſſent notæ, & non ampliùs de ſolutione Problematis, ſed de probatione ſolutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam deſcriptis computandi modis, etſi fortè AD reverâ quæratur, fingo tamen CD quærendum eſſe, quaſi vellem probare an valor ejus ab-

AD

CAPUT XIII. AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognitâ. Sic etiam in duobus posterioribus modis, pro metâ non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem è relationibus linearum utcunque eruendam: et in ejus rei gratiam assumo omnes, AD, AB, BC & CD, tanquam notas; perinde ac si, quæstione priùs solutâ, de tentamine jam ageretur, an conditionibus ejus hæ probè satisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hâc ratione & consiliis primâ fronte aggressus sum; sed, cùm ad æquationem deventum est, sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas sæpenumerò assumimus, quàm in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55° sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema, prout proponitur, nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet, quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: hoc solum cavendo, ut ex illis tot æquationes obtineri possint, quot assumptæ sunt quantitates reverâ incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat, & ornatur schema, quantitatibus, quæ computationem ingredientur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone; delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & conclusionem, quantum possis conjicere, simpliciorem reddent, sed non plures tamen quàm proposito sufficiunt. Itaque pro quantitatibus, quæ ex aliarum vocabulis facilè deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex totâ lineâ & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus, unum aliquod minimùm sine nomine permittere solemus; eo quòd valor ejus è reliquorum nominibus facilè derivari possit. Quemadmodum in exemplo jam allato, si dicam AD = x & AB = a, ipsum BD nullâ literâ designo; quòd sit tertium latus trianguli rectanguli ABD, & proinde valeat $\sqrt{xx-aa}$. Dein si dicam BC = b, cùm triangula DAB & BCE sint similia, & inde lineæ AD, AB, BC, CE proportionales, quarum tribus, AD, AB,



AB, & BC, imposita sunt nomina; ea propter quartam CE sine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$, ex hâc proportionalitate detectum, usurpo. Atque ita si DC vocetur c, ipsi DE nomen non affigno; quòd ex partibus ejus DC & CE, sive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat. DE QUÆST. GEOMETR.

Cæterùm dum de his moneo, Problema ad æquationem penè redactum est. Nam postquam literæ pro speciebus principalium linearum præscriptæ sunt, nihil aliud agendum restat, quàm ut ex istis speciebus valores aliarum linearum, juxta methodum præconceptam, eruantur, donec modo quovis provisо in æquationem coeant. Et in hoc casu nihil restare video, nisi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe est $BCq - CEq$ (sive $bb - \frac{aabb}{xx}$) = BEq, ut & $BDq - DEq$) sive $xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}$) = BEq. Et hinc, utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$, æquationem habebo $bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}$: quæ reducta fit

$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc.$$

Cùm verò de solutione Problematis hujus plures modos, etsi non multum diffimiles, in præcedentibus recensuerim, quorum iste, de Prop. 12, Lib. 2, Elem. desumptus, sit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam subjungere. Sit itaque AD = x, AB = a, BC = b, & CD = c, eritque $BDq = xx - aa$, & CE = $\frac{ab}{x}$, ut priùs. Hisce dein speciebus in Theorema $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$ substitutis, orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & facta reductione, $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc$; ut antè.

Sed ut pateat quanta sit in solutionum inventione varietas, & proinde quòd in eas incidere prudenti Geometræ non sit admodum difficile: visum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem, ducto diagonio BD, si, vice perpendiculi BE à puncto B in latus DC suprà demissi, demittatur per-

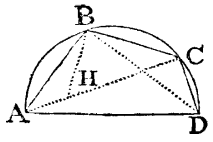
CAPUT XIII.

pendiculum à puncto D in latus BC, vel à puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque resolvatur, iisdem fermè, quas jam descripsi, methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes.

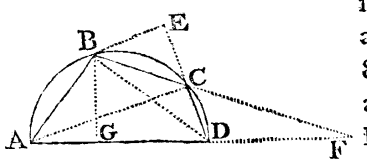
Quemadmodum si diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex assumptis AD & AB; ut & AC ex assumptis AD & CD; deinde, per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe quòd sit AD × BC + AB × CD = AC × BD obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit BD = $\sqrt{xx-aa}$, & AC = $\sqrt{xx-cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in Theorema jam recensitum substitutis, exibit $xb+ac=\sqrt{xx-cc}\times\sqrt{xx-aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis, obtinebitur

$$+aa$$
iterum $x^3 = +bbx + 2abc.$
$$+cc$$

Cæterùm ut pateat etiam quo pacto solutiones, ex isto Theoremate petitæ, possint inde ad solas triangulorum similitudines redigi; erigatur BH ipsi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula BCD, BHA similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque, quòd ex proportionalitate, BD. AD :: BC. HC, detur HC; ut & AH ex proportionalitate BD. CD :: AB. AH. Unde cùm sit AH + AC = AC, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipsarum AC & BD valoribus, $\sqrt{xx-cc}$, & $\sqrt{xx-aa}$; prima proportionalitas dabit HC = $\frac{bx}{\sqrt{xx-aa}}$; & secunda dabit AH = $\frac{ac}{\sqrt{xx-aa}}$. Unde propter AA + HC = AC erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}} = \sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ, multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$, & quadrando, reducetur ad formam in præcedentibus sæpiùs descriptam.



Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F, & fient triangula ABF & CDF similia,



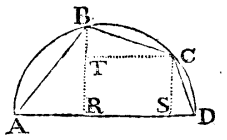
similia, quippe quorum angulus ad F communis est, & anguli ABF & CDF (dum complent ang. CDA ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem, si præter quatuor terminos de quibus instituitur quæstio, daretur AF, proportio, AB. AF :: CD. CF, daret CF. Item AF − AD daret DF; & proportio, CD. DF :: AB. BF, daret BF; unde, cùm sit BF − CF = BC, emergeret æquatio. Sed cùm duæ quantitates incognitæ, AD ac DF, tanquam datæ assumantur, restat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio, AD. AB :: AB. AG, dabit AG; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quòd sit BFq + 2FAG = ABq + AFq, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut priùs, & dicto AF = y: erit, insistendo vestigiis Theoriæ jam excogitatæ, $\frac{cy}{a}$ = CF. $y-x$ = DF. $\frac{\overline{y-x}\times a}{c}$ = BF. Indeque $\frac{\overline{y-x}\times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x}$ = AG, adeoque $\frac{aayy-2aaxy+aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa+yy$, æquatio secunda. Quæ duæ, per reductionem, dabunt æquationem desideratam. Nempe valor ipsius y, per æquationem priorem, inventus est $\frac{abc+aax}{aa-cc}$; qui in secundam substitutus, dabit æquationem ex quâ rectè dispositâ fiet

$$+aa$$
$x^3 = +bbx + 2abc,$ ut antè.
$$+cc$$

Atque ita si AB ac DC producantur donec sibi mutuò occurrant, solutio haud aliter se habebit, nisi fortè futura sit paulò facilior. Quare aliud hujus rei specimen, è fonte multum dissimili petitum, potiùs subjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propositi, idque dupliciter. Duco igitur diagonium BD, ut in duo triangula quadrilaterum resolvatur. Dein, usurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut antè, invenio BD = $\sqrt{xx-aa}$; indeque $\frac{1}{2}a\sqrt{xx-aa}$ (= $\frac{1}{2}$AB × BD) aream trianguli ABD. Porro, demisso BE perpendiculariter in CD, erit (propter similia triangula ABD, BCE) AD. BD :: BC. BE, & proinde BE = $\frac{b}{x}\sqrt{xx-aa}$. Quare

CAPUT XIII. etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ ($=\frac{1}{2}$CD × BE) erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo, orietur $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ area totius quadrilateri. Non secùs, ducendo diagonium AC, & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Quare, ponendo hasce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba}\times\sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ, quadrando ac dividendo per $+aa$
$aax-ccx$, redigetur ad formam sæpiùs inventam $x^3 = +bb\,x + 2abc$.
$+cc$

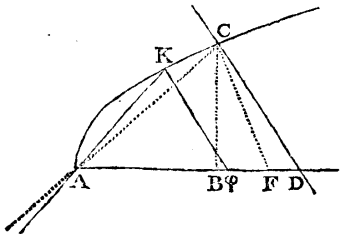
Ex his constare potest quanta sit solvendi copia; & obiter quòd alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi malè accommodatus inciderit, relationes linearum iterùm evolvendæ sunt, donec modum quàm poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ se offerunt laborem satis molestum plerumque parient, si ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur, nil difficilius foret in sequentem modum quàm in aliquem è præcedentibus incidere. Demissis nempe BR & CS ad AD normalibus, ut & CT ad BR, figura resolvetur in triangula rectangula. Et videre est, quòd AD & AB dant AR; AD & CD dant SD; AD − AR − SD dat RS, vel TC. Item AB & AR dant BR; CD & SD dant CS, vel TR; & BR − TR dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur æquatio. Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores, quàm sunt ulli præcedentium, incidet, & ad finalem æquationem ægriùs reducibiles.



Et hæc de solutione problematum in rectilineâ Geometriâ; nisi fortè operæ pretium fuerit annotâsse præterea, quòd cùm anguli, sive positiones linearum per angulos expressæ, statum quæstionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones; tales nempe quæ ab angulis datis possunt, per calculum Trigonometricum, derivari; aut à quibus inventis anguli quæsiti, per eundem calculum, prodeunt; hoc est, quæ se mutuò

mutuò determinant: cujus rei plures instantias videre est in sequentibus. DE QUÆST. GEOMETR.

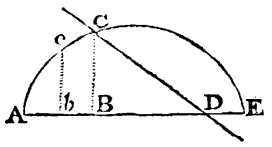
Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ designari solent vel describendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinitè exprimentes relationem rectarum certâ aliquâ lege dispositarum, & ad curvas definientium. Idem fecerunt Veteres per sectiones Solidorum, sed minùs commodè. Computationes verò, quæ curvas primo modo descriptas respiciunt, haud secùs quàm in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum si AKC sit curva linea descripta per K, verticale punctum normæ AKφ, cujus unum crus, AK, per punctum A, positione datum, liberè dilabitur, dum alterum, Kφ, datæ longitudinis, super rectam AD positione datam promovetur; & quæratur punctum C, in quo recta quævis CD, positione data, hanc curvam secabit: duco



rectas ACF, quæ normam in positione quæsitâ referant, & relatione linearum (sine aliquo dati & quæsiti discrimine aut respectu ad curvam) consideratâ, percipio dependentiam cæterarum à CF, et quâlibet harum quatuor BC, BF, AF & AC, Syntheticam esse; quarum duas itaque, ut CF = a & CB = x, assumo; & inde computum ordiendo statim lucratus sum BF = $\sqrt{aa-xx}$, & AB = $\frac{xx}{\sqrt{aa-xx}}$; propter ang. rectum CBF, lineasque BF, BC, BC, AB continuè proportionales. Porro ex datâ positione CD, datur AD; quam itaque dico b; datur etiam ratio BC ad BD, quam pono d ad e; & fit BD = $\frac{ex}{d}$, & AB = $b-\frac{ex}{d}$. Erit ergo $b-\frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{xx-aa}}$; æquatio quæ, quadrando partes & multiplicando per $aa-xx$ &c. reducetur ad hanc formam $x^4 = \frac{2bdex^3 - bbdd\,xx - 2aadexx + aabbdd}{+aaee \quad dd+ee}$; unde demum, è datis a, b, d & e, erui debet x, per regulas post tradendas; & intervallo isto x, sive BC, acta ipsi AD parallela recta secabit CD in quæsito puncto C.

Quòd si non descriptiones Geometricæ, sed æquationes, pro curvis lineis designandis adhibeantur, computationes eo pactò faciliores & breviores evadent, in quantum ejusmodi æquationes ipsis lucro

Caput XIII. lucro cedunt. Quemadmodum ſi datæ Ellipſeos, ACE, interſectio c cum rectâ CD poſitione datâ quæratur; pro Ellipſi deſignandâ ſumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$, ubi x indefinitè ponitur pro quâlibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc, vel BC, ad curvam terminato; r vero & q dantur ex datâ ſpecie Ellipſis. Cùm itaque CD poſitione detur, dabitur & AD, quam dic a, & erit BD $a - x$; dabitur etiam angulus ADC, & inde ratio BD ad BC, quam dic 1 ad e; & erit BC $(y) = ea - ex$; cujus quadratum $eeaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque, per reductionem, orietur $xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}$, ſeu $x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}$.



Quinetiam etſi Curva per deſcriptionem Geometricam, vel per ſectionem ſolidi, deſignetur, poteſt tamen inde æquatio obtineri, quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum, quæ circa eam proponuntur, difficultates reduci.

Sic in exemplo priori, ſi AB dicatur x, & BC, y, tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$; cujus quadratum unà cum quadrato BC æquatur CF q, hoc eſt $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; ſive $y^4 + xxyy = aaxx$. Eſtque hæc æquatio, quâ Curvæ AKC unumquodque punctum c unicuique baſis longitudini AB congruens, adeoque ipſa Curva, definitur; & è quâ proinde ſolutiones Problematum, quæ de hâc curvâ proponuntur, petere liceat.

Ad eundem ferè modum, cùm curva non datur ſpecie, ſed determinanda proponitur, poſſis pro arbitrio æquationem fingere, quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro eâ deſignandâ, tanquam ſi daretur, aſſumere; ut ex ejus aſſumptione quomodocunque preveniatur ad æquationes, ex quibus aſſumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis ſequentium problematum, quæ, in pleniorem illuſtrationem hujus doctrinæ & exercitium diſcentium, congeſſi, quæque jam pergo tradere.

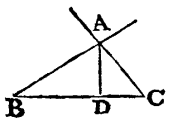
CAPUT

De Quæst. Geometr.

CAPUT DECIMUM QUARTUM.

PROB. I.

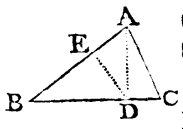
Datâ rectâ terminatâ, BC, *a cujus extremitatibus duæ rectæ,* BA, CA, *ducuntur in datis angulis,* ABC, ACB: *Invenire* AD *altitudinem concurſûs* A *ſupra datam* BC.



SIT BC $= a$, & AD $= y$; & cùm angulus ABD detur, dabitur, ex tabulâ ſinuum vel tangentium, ratio inter lineas AD & BD, quam pone ut d ad e. Eſt ergo $d.e::$AD (y) BD. Quare BD $= \frac{ey}{d}$. Similiter, propter datum angulum ACD, dabitur ratio inter AD ac DC, quam pone ut d ad f, & erit DC $= \frac{fy}{d}$. At BD+DC = BC, hoc eſt $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta, multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e + f$, evadit $y = \frac{ad}{e+f}$.

PROB. II.

Cujuſlibet Trianguli, ABC, *datis lateribus,* AB, AC, *& Baſi,* BC, *quam perpendiculum,* AD, *ab angulo verticali, ſecat in* D: *Invenire ſegmenta* BD *ac* DC.



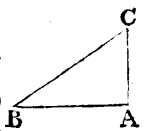
SIT AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, & BD $= x$, eritque DC $= c - x$. Jam cùm ABq − BDq $(aa - xx)$ = ADq; & ACq − DCq $(bb - cc + 2cx - xx)$ = ADq: Erit $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa - bb + cc}{2c} = x$.

Cæterùm ut pateat omnes omnium Problematum difficultates, per ſolam linearum proportionalitatem, ſine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non abſque circuitu, enodari poſſe; placuit ſequentem hujus ſolutionem, ex abundanti, ſubjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, &, ſtantibus jam poſitis

CAPUT XIV. positis linearum nominibus, erit AB. BD :: BD. BE. $a. x :: x. \frac{xx}{a}$. Et BA − BE $(a - \frac{xx}{a})$ = EA. Nec non EA. AD :: AD. AB, adeoque EA × AB $(aa - xx)$ = ADq. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD, invenietur iterùm AD$q = bb - cc + 2cx - xx$. Unde obtinebitur, ut antè, $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

PROB. III.

Trianguli rectanguli, ABC, *perimetro & aream datis, invenire hypotenusam* BC.



ESTO perimeter a, area bb, BC = x, & AC = y; eritque AB = $\sqrt{xx - yy}$; unde rursus perimeter (BC + AC + AB) est $x + y + \sqrt{xx - yy}$, & area $(\frac{1}{2}$AC × AB) est $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy}$. Adeoque $x + y + \sqrt{xx - yy} = a$, & $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy} = bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx - yy} = \frac{2bb}{y}$; quare scribo $\sqrt{\frac{2bb}{y}}$ pro $\sqrt{xx - yy}$ in æquatione priori, ut affymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$; sive multiplicando per y, & ordinando, $\frac{y}{yy} = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x + y$, & restat $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, cujus partes quadrando, ut affymmetria rursus tollatur, prodit $xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, quæ in ordinem redacta & per 2 divisa fit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipsius yy, habeo $ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

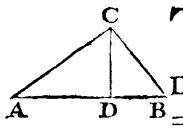
Idem aliter.

Esto $\frac{1}{2}$ perimeter = a, area = bb, & BC = x, eritque AC + AB = $2a - x$. Jam cùm sit xx (BCq) = ACq + ABq, & $4bb$ = 2AC × AB, erit $xx + 4bb$ = ACq + ABq + 2AC × AB = quadrato ex AC + AB = quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. Hoc est $xx + 4bb = 4aa - 4ax + xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$.

PROB. IV.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.



TRianguli ABC sit c rectus angulus, & CD perpendiculum inde ad basem AB demissum. Detur AB + BC + AC = a, & CD = b. Pone basem AB = x, & erit laterum summa $a - x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus AC = $\frac{a - x + y}{2}$; minus BC = $\frac{a - x - y}{2}$. Jam ex naturâ trianguli rectanguli est ACq + BCq = ABq, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Est & AB. AC :: BC. DC, adeoque AB × DC = AC × BC, hoc est $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem est $yy = xx + 2ax - aa$. Per posteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, sive $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geometricè sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem.

Aufer $2x$ de a, & restabit $\frac{ab}{a + b}$ excessus laterum super basem. Unde rursus, Ut in omni triangulo rectangulo summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad excessum laterum super basem.

PROB. V.

Datis trianguli rectanguli basi, AB, *& summâ perpendiculi & laterum,* CA + CB + CD, *invenire triangulum.*

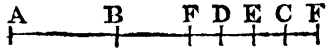
ESTO CA + CB + CD = a, AB = b, CD = x, & erit AC + CB = $a - x$. Pone AC − CB = y, & erit AC = $\frac{a - x + y}{2}$, & CB = $\frac{a - x - y}{2}$. Est autem ACq + CBq = ABq, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Est & AC × CB = AB × CD, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx - yy}{4} = bx$. Quibus comparatis, fit $2bb - aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx - 4bx$. Et, per reductionem, $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, & $x = a + b - \sqrt{2ab + 2bb}$.

CAPUT XIV. *Geometricè ſic.* In omni triangulo rectangulo de ſummâ perimetri & perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem ſummam & duplum baſis, & reſtabit perpendiculum.

Idem aliter.

Sit CA+CB+CD=a, AB=b, & AC=x, & erit BC=$\sqrt{bb-xx}$; CD=$\frac{x\sqrt{bb-xx}}{b}$. Et x + CB + CD = a, ſive CB + CD = $a-x$, atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{bb-xx} = a-x$. Et, quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4-2bx^3+2b^3x+b^4 = aabb-2abbx+bbxx$. Quâ æquatione per tranſpoſitionem partium ad hunc modum ordinatâ, $x^4+2bx^3\ {}^{+3bb}_{+2ab}\ xx\ {}^{+2abb}_{+2b^3}\ x\ {}^{+b^4}_{+2ab^3}_{+aabb} = {}^{+2ab}_{2bb}\ xx\ {}^{+4abb}_{+4b^3}\ x\ {}^{+2ab^3}_{+2b^4}$, & extractâ utrobique radice, orietur $xx+bx+bb+ab=\overline{x+b\sqrt{2ab+2bb}}$. Et extractâ iterum radice $x=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}+\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}bb-\frac{1}{2}ab}$.

Conſtructio Geometrica.



Cape igitur AB = $\frac{1}{2}b$, BC = $\frac{1}{2}a$, CD = $\frac{1}{2}$AB, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

PROB. VI.

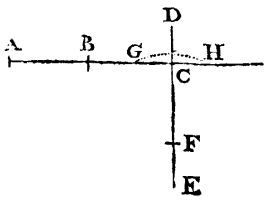
Datis in triangulo rectangulo, ABC, *ſummâ laterum,* AC+BC, *& perpendiculo* CD, *invenire triangulum. (Vide fig.* Prob. VII.)

SIT AC + BC = a, CD = b, AC = x, & erit BC = $a-x$, AB = $\sqrt{aa-2ax+2xx}$. Eſt & CD.AC::BC.AB. Ergo rurſus AB = $\frac{ax-xx}{b}$. Quare $ax-xx = b\sqrt{aa-2ax+2xx}$; & partibus quadratis & ordinatis, $x^4-2ax^3\ {}^{+aa}_{-2bb}\ xx+2abbx-aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb+b^4$, & fiet $x^4-2ax^3\ {}^{+aa}_{-2bb}\ xx+2abbx+b^4 = aabb+b^4$. Et, extractâ utrobique radice, $xx-ax-bb=-b\times\sqrt{aa+bb}$; &, radice iterum extractâ, $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb-b\sqrt{aa+bb}}$.

Conſtructio

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Conſtructio Geometrica.



Cape AB = BC = $\frac{1}{2}a$. Ad c erige perpendiculum CD = b. Produc DC ad E ut ſit DE = DA. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC deſcriptus circulus GH ſecet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem aliter.

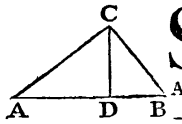
Sit AC+BC=a, AC − BC = y, AB = x, ac DC = b, & erit $\frac{a+y}{2}$ = AC; $\frac{a-y}{2}$ = BC; $\frac{aa+yy}{2}$ = ACq + BCq = ABq = xx. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{\text{AC}\times\text{BC}}{\text{DC}} = \text{AB} = x$. Ergo $2xx-aa=yy=aa-4bx$, & $xx=aa-2bx$; &, extracta radice, $x=-b+\sqrt{bb+aa}$. Unde in ſuperiori conſtructione eſt CE Hypotenuſa trianguli quæſiti. Datâ autem



baſi & perpendiculo, tam in hoc quàm in ſuperiore Problemate, triangulum ſic expeditè conſtruitur. Fac parallelogrammum, CG, cujus latus, CE, erit baſis trianguli, latus alterum, CF, perpendiculum Et ſuper CE deſcribe ſemicirculum ſecantem latus oppoſitum, FG, in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæſitum.

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis ſummâ laterum, & ſummâ perpendiculi & baſis, invenire triangulum.



SIT laterum AC & BC ſumma a; baſis AB & perpendiculi CD ſumma b; latus AC = x; baſis AB = y; & erit BC = $a-x$; CD = $b-y$; $aa-2ax+2xx$ = ACq + BCq = ABq = yy; $ax-xx$ = AC × BC = AB × CD = $by-yy = by-aa+2ax-2xx$; & $by = aa-ax+xx$. Hujus quadratum $a^4-2a^3x+3aaxx-2ax^3+x^4$, pone æquale yy in bb, hoc eſt æquale $aabb-2abbx+2bbxx$. Et, ordinatâ æquatione, fiet $x^4-2ax^3\ {}^{+3aa}_{-2bb}\ xx\ {}^{-2a^3}_{+2abb}\ x\ {}^{+a^4}_{-aabb} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde b^4-aabb, & fiet $x^4-2ax^3\ {}^{+3aa}_{-2bb}\ xx\ {}^{-2a^3}_{+2abb}\ x\ {}^{+a^4}_{-2aabb}_{+b^4} = b^4-$

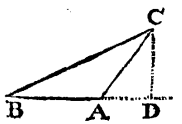
CAPUT XIV. $b^4 - aabb$. Et, extractâ utrobique radice, $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$; & radice iterum extractâ, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$.

Conſtructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$; & S mediam proportionalem inter R & $b - R$; & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + S$ & $\frac{1}{2}a - S$; & erunt $\frac{1}{2}a + T$ & $\frac{1}{2}a - T$, latera trianguli.

PROB. VIII.

Trianguli cujuſcunque, ABC, *datis aream, perimetro, & uno angulorum,* A, *cætera determinare.*



ESTO perimeter = a, & area = bb, & ab ignotorum angulorum alterutro, C, ad latus oppoſitum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum, erit AC ad CD in datâ ratione, puta d ad e. Dic ergo AC = x, & erit CD = $\frac{ex}{d}$; per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex}$ = AB. Adde AD (nempe $\sqrt{ACq - CDq}$, ſive $\frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$) & emerget BD = $\frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$; cujus quadrato adde CD$q$, & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee} = BCq$. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & reſtabit $a - x - \frac{2bbd}{ex}$ = BC; cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, aſſumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, ſive $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiiſſet etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC ſimiliter ſe habent ad omnes conditiones problematis. Quare ſi AC ponatur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, erit AB = $f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, & viciſſim; atque horum ſumma $2f$ ſubducta de perimetro relinquit tertium latus BC = $a - 2f$.

PROB.

PROB. IX.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

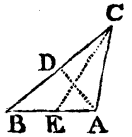
Datis altitudine, baſi, & ſummâ laterum invenire triangulum.

SIT altitudo CD = a, baſis AB dimidium = b, laterum ſemiſumma = c, & ſemidifferentia = z; eritque majus latus, puta BC = $c + z$, & minus AC = $c - z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc BD = $\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, & inde AD = $\sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subduc etiam AB de BD, & exibit iterum AD = $\sqrt{cc + 2cz + zz - aa - 2b}$. Quadratis jam valoribus AD, & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Rurſuſque quadrando & redigendo in ordinem, obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$. Unde dantur latera.

PROB. X.

Datis baſi, AB, *ſummâ laterum,* AC + BC, *& angulo verticali* C, *determinare latera.*

SIT baſis = a, ſemiſumma laterum = b, & ſemidifferentia = x, eritque majus latus BC = $b + x$, & minus AC = $b - x$.



AB alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppoſitum BC demitte perpendiculum AD; &, propter angulum C datum, dabitur ratio AC ad CD, puta d ad e, & proinde erit CD = $\frac{cb - cx}{d}$. Eſt etiam, per 13. II. Elementorum, $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$, hoc eſt $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x}$, = CD; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{daa + 2cbb - 2dbb}{2d + 2e}}$. Unde dantur latera.

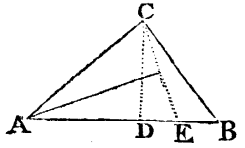
Si anguli ad baſin quærerentur, concluſio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum biſecans & baſi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (:: AE. AC) :: ſin. ang. ACE. ſin. ang. AEC. Et ab angulo AEC, ejuſque complemento BEC, ſi ſubducatur dimidium anguli C, relinquentur anguli ABC, & BAC.

PROB.

CAPUT XIV.

PROB. XI.

Datis Trianguli lateribus invenire angulos.



DEntur latera AB = a, AC = b, BC = c, quæratur angulus A. Demiſſo ad AB perpendiculo CD, quod angulo iſti opponitur, erit imprimis $bb-cc$ = ACq − BCq = ADq − BDq = $\overline{\text{AD}+\text{BD}} \times \overline{\text{AD}-\text{BD}}$ = AB × 2AD − AB = 2AD × $a-aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a + \frac{bb-cc}{2a}$ = AD. Unde prodit hocce *primum Theorema.*

I. Ut AB, ad AC + BC, ita AC − BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{\text{AB}+\text{N}}{2}$ = AD. Ut AC ad AD, ia radius ad Coſinum anguli A.

Adhæc DCq = ACq − ADq = $\frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa}$ = $\frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}{4aa}$. Unde, multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce *Theorema ſecundum.*

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}$, & $\overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}$, ita radius ad ſinum anguli A.

Inſuper in AB cape AE = AC, & age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & reſtabit DE = $b - \frac{1}{2}a - \frac{bb-cc}{2a} = \frac{cc-aa+2ab-bb}{2a} = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}}{2a}$. Unde DE$q$ = $\frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} \times \overline{c-a+b}}{4aa}$. Et hinc conſit *Theorema tertium quartumque*, viz.

III. Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad ſinum verſum anguli A

IV. Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea eſt CEq = CDq + DEq = $\frac{2abb+bcc-baa-b^3}{a} = \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$. Unde *Theorema quintum & ſextum.*

V. Ut

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE vel CE ad DE) ita radius ad ſinum dimidii anguli A. PROBLEMATA GEOMETRICA.

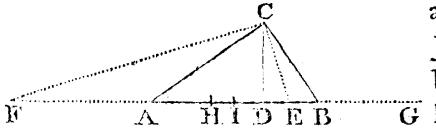
VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad coſinum dimidii anguli A.

Si præter angulos deſideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}$ABq, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæſita.

PROB. XII.

Trianguli cujuſvis rectilinei datis lateribus & baſi, invenire ſegmenta baſis, perpendiculum, aream & angulos.

TRianguli ABC dentur latera AC, BC & baſis AB. Biſeca AB in 1, & in eâ utrinque productâ cape AF & AE æquales AC, atque BG & BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad baſem demitte perpendiculum CD. Et erit ACq − BCq = ADq + CDq − CDq − BDq = ADq − BDq = $\overline{\text{AD}+\text{BD}} \times \overline{\text{AD}-\text{BD}}$ = AB × 2DI. Ergo $\frac{\text{AC}q-\text{BC}q}{2\text{AB}}$ = DI. Et 2AB. AC + BC :: AC − BC. DI. Quod eſt Theorema pro determinandis ſegmentis baſis.



De IE, hoc eſt de AC − $\frac{1}{2}$AB, aufer DI, & reſtabit DE = $\frac{\text{BC}q-\text{AC}q+2\text{AC}\times\text{AB}-\text{AB}q}{2\text{AB}}$, hoc eſt = $\frac{\overline{\text{BC}+\text{AC}-\text{AB}} \times \overline{\text{BC}-\text{AC}+\text{AB}}}{2\text{AB}}$, ſive = $\frac{\text{HE}\times\text{EG}}{2\text{AB}}$. Aufer DE de FE ſive 2AC, & reſtabit FD = $\frac{\text{AC}q+2\text{AC}\times\text{AB}+\text{AB}q-\text{BC}q}{2\text{AB}}$, hoc eſt = $\frac{\overline{\text{AC}+\text{AB}+\text{BC}} \times \overline{\text{AC}+\text{AB}-\text{BC}}}{2\text{AB}}$, ſive = $\frac{\text{FG}\times\text{FH}}{2\text{AB}}$. Et cùm ſit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE et EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit CD = $\frac{\sqrt{\text{FG}\times\text{FH}\times\text{HE}\times\text{EG}}}{2\text{AB}}$, CE = $\sqrt{\frac{\text{AC}\times\text{HE}\times\text{FG}}{\text{AB}}}$, & CF = $\sqrt{\frac{\text{AC}\times\text{FG}\times\text{FH}}{\text{AB}}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}$ AB, & habebitur area =

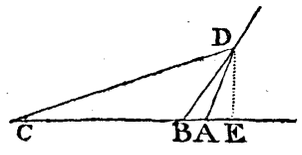
$\frac{1}{2}\sqrt{}$

CAPUT XIV. $\frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo verò A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ (:: AC. DE) :: radius ad ſinum verſum anguli A.
2. $2AB \times AC$. $FG \times FG$ (:: AC. FD) :: radius ad coſin verſ. A.
3. $2AB \times AC$. $\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (:: AC. CD) :: rad. ad ſin. A.
4. $\sqrt{FG \times FH}$. $\sqrt{HE \times EG}$ (:: CF. CE) :: rad. ad tang. $\frac{1}{2}$A.
5. $\sqrt{HE \times EG}$. $\sqrt{FG \times FH}$ (:: CE. FC) :: rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$A.
6. $2\sqrt{AB \times AC}$. $\sqrt{HE \times EG}$ (:: FE. CE) :: rad. ad ſin. $\frac{1}{2}$A.
7. $2\sqrt{AB \times AC}$. $\sqrt{FG \times FH}$ (:: FE. FC) :: rad. ad coſin. $\frac{1}{2}$A.

PROB. XIII.

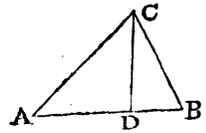
Datum angulum, CBD, *rectâ datâ*, CD, *ſubtendere*; *ita ut ſi à termino iſtius rectæ*, D, *ad punctum* A *in rectâ* CB *productâ datum agatur* AD, *fuerit angulus* ADC *æqualis angulo* ABD.



Dicatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit BD. BA :: CD. DA $= \frac{ab}{x}$. Demitte perpendiculum DE, erit $BE = \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA} = \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA, pone BD. BE :: *b*. *e*, & habebitur iterum $BE = \frac{ex}{b}$: ergo $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. Et $x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0$.

PROB. XIV.

Invenire Triangulum, ABC, *cujus tria latera*, AB, AC, BC, *& perpendiculum* DC, *ſunt in Arithmeticâ progreſſione.*



Dic $AC = a$, $BC = x$; & erunt $DC = 2x - a$, & $AB = 2a - x$. Erunt etiam AD $(= \sqrt{ACq - DCq}) = \sqrt{4ax - 4xx}$, & BD $(= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Atque adeo rurſus $AB = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Quare $2a - x = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$, ſive

ſive $2a - x - \sqrt{4ax - 4xx} = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Et partibus quadratis $4aa - 3xx - 4a + 2x \times \sqrt{4ax - 4xx} = 4ax - 3xx - aa$; ſive $5aa - 4ax = 4a - 2x\sqrt{4ax - 4xx}$. Et, partibus iterum quadratis, ac terminis rite diſpoſitis, $16x^4 - 80ax^3 + 144aaxx - 104a^3x + 25a^4 = 0$. Hanc æquationem divide per $2x - a$, & orietur $8x^3 - 36axx + 54aax - 25a^3 = 0$, æquatio cujus reſolutione dabitur x ex aſſumpto utcunque a. Habitis a & x, conſtitue triangulum, cujus latera erunt $2a - x$, a, & x; & perpendiculum, in latus $2a - x$ demiſſum, erit $2x - a$.

Si poſuiſſem differentiam laterum trianguli eſſe d, & perpendiculum eſſe x; opus evaſiſſet aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3 = 24ddx + 48d^3$.

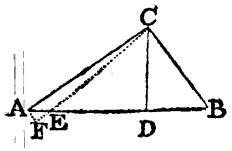
PROB. XV.

Invenire Triangulum, ABC, *cujus tria latera*, AB, AC, BC, *& perpendiculum*, CD, *ſunt in Geometricâ progreſſione.*

Dic $AC = x$, & $BC = a$; & erit $AB = \frac{xx}{a}$; et $CD = \frac{aa}{x}$. Eſt & AD $(= \sqrt{ACq - CDq}) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; & BD $(= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$; adeoque $\frac{xx}{a}$ $(= AB) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$; ſive $\frac{xx}{a} - \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$. Et, partibus æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} \times \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}$; hoc eſt, $x^4 - aaxx + a^4 = 2aax\sqrt{xx - aa}$. Et, partibus iterum quadratis, $x^8 - 2aax^6 + 3a^4x^4 - 2a^6xx + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx$. Hoc eſt $x^8 - 2aax^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0$. Divide hanc æquationem per $x^4 - aaxx - a^4$, & orietur $x^4 - aaxx - a^4$. Quare eſt $x^4 = aaxx + a^4$. Et, extractâ radice, $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, ſive $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo a, ſive BC, cujuſvis longitudinis; & fac BC. AC :: AC. AB :: 1. $\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$; & trianguli ABC, ex his lateribus conſtituti, perpendiculum DC erit ad latus BC in eâdem ratione.

CAPUT XIV.

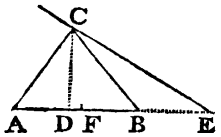
Idem aliter.



Cùm ſit AB. AC :: BC. DC dico angulum ACB rectum eſſe. Nam ſi negas, age CE conſtituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC ſimilia, per 8. VI. Elem. adeoque EB. EC :: BC. DC. hoc eſt EB. EC :: AB. AC. Age AF perpendicularem CE, & propter parallelas AF, BC, erit EB. EC :: AE. FE :: AB. BC. Ergo, per 9. V. Elem. eſt AC=FC, hoc eſt Hypotenuſa trianguli rectanguli æqualis lateri, contra 19. I. Elem. Non eſt ergo angulus ECB rectus, & proinde ipſum ACB rectum eſſe oportet. Eſt itaque $ACq+BCq=ABq$. Sed eſt $ACq=AB\times BC$, ergo $AB\times BC+BCq=ABq$; &, extractâ radice, $AB=\frac{1}{2}BC+\sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC. AB :: 1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus conſtituto, erunt AB, AC, BC, DC continuè proportionales.

PROB. XVI.

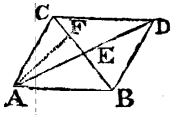
Super datâ baſi, AB, *triangulum,* ABC, *conſtituere, cujus vertex* C *erit ad rectam,* EC, *poſitione datam, baſis autem medium exiſtet Arithmeticum inter latera.*



BAſis AB biſecetur in F, & producatur donec rectæ EC poſitione datæ occurrat in E, & ad ipſam demittatur perpendicularis CD; dictiſque $AB=a$, $FE=b$, & $BC-AB=x$, erit $BC=a+x$, $AC=a-x$. Et per 13. II. Elem. BD $(=\frac{BCq-ACq+ABq}{2AB})=2x+\frac{1}{2}a$. Adeoque $FD=2x$, $DE=b+2x$, & CD $(=\sqrt{CBq-BDq})=\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Sed, propter datas poſitiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ ſi ponatur d ad e dabit analogiam $d.e::b+2x.\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in ſe, oritur æquatio $eb+2ex=d\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$; cujus partibus quadratis & ritè diſpoſitis, fit $xx=\frac{\frac{3}{4}ddaa-eebb-4eebx}{4ee+3dd}$. Et, radice extractâ, $x=\frac{-2eeb+d\sqrt{3eeaa-3eebb+\frac{3}{4}ddaa}}{4ee+3dd}$. Dato autem x, datur $BC=a+x$, & $AC=a-x$.

PROB. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuſcunque lateribus, AB, BD, DC, & AC, & *unâ lineâ diagonali,* BC, *invenire alteram diagonalem,* AD.

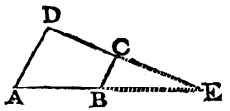


SIT E concurſus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, &, per 13. II. Elementorum, erit $\frac{ACq-ABq+BCq}{2BC}=CF$; atque etiam $\frac{ACq-AEq+ECq}{2EC}=CF$. Quare cùm ſit $EC=\frac{1}{2}BC$, & $AE=\frac{1}{2}AD$, erit $\frac{ACq-ABq+BCq}{2BC}=\frac{ACq-\frac{1}{4}ADq+1BCq}{BC}$; &, factâ reductione, $AD=\sqrt{2ACq+2ABq-BCq}$.

Unde obiter, in quolibet parallelogrammo ſumma quadratorum laterum æquatur ſummæ quadratorum diagonalium.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii, ABCD, *angulis, perimetro, & areâ, determinare latera.*



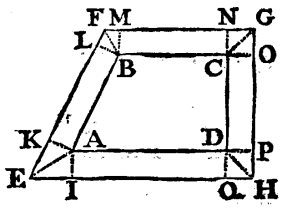
LAtera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, ſitque $AB=x$, & $BC=y$; &, propter angulos omnes datos, dantur rationes BC ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit $CE=\frac{ey}{d}$; & $BE=\frac{fy}{d}$; adeoque $AE=x+\frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit $AD=\frac{dx+fy}{g}$; & $ED=\frac{dx+fy}{h}$; adeoque $CD=\frac{dx+fy}{h}-\frac{ey}{d}$; & ſumma omnium laterum $x+y+\frac{dx+fy}{g}+\frac{dx+fy}{h}-\frac{ey}{d}$; quæ, cùm detur, eſto a; & abbrevientur etiam termini ſcribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1+\frac{d}{g}+\frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1+\frac{f}{g}+\frac{f}{h}-\frac{e}{d}$, & habebitur æquatio $\frac{px+qy}{r}=a$.

Adhæc, propter datos omnes angulos, datur ratio BCq ad triangulum BCE; quam pone m ad n, & erit triang. $BCE=\frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d,

CAPUT XIV. & erit triang. ADE = $\frac{ddxx+2dfxy+ffyy}{dm}$. Quare cùm area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb, & erit $\frac{ddxx+2dfxy+ffyy-dnyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes, ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra-qy}{p} = x$; ſcribendo $\frac{ra-qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa-2drqay+dqqyy}{ppm} + \frac{2afry-2fqyy}{pm} + \frac{ffyy-dnyy}{dm} = bb$. Et, abbreviatis terminis ſcribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} - \frac{ff}{d} - n$, & st pro dato $+\frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{q}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty + tv$, ſeu $y = t + \sqrt{tt+tv}$.

PROB. XIX.

Piſcinam, ABCD, *perambulatorio*, ABCD EFGH, *datæ areæ*, & *ejuſdem ubique latitudinis circundare.*



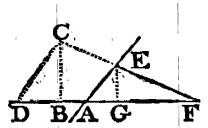
ESTO perambulatorii latitudo x, & ejus area aa. Et à punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demiſſis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia, IK, LM, NO, PQ, & in quatuor parallelogramma, AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejuſdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo ſumma laterum (AB+BC+CD+DA)=b, & erit ſumma parallelogrammorum = bx.

Porro ductis AE, BF, CG, DH, cùm ſit AI = AK, erit ang. AEI = ang. AEK=$\frac{1}{2}$IEK, ſive $\frac{1}{2}$DAB. Datur ergo ang. AEI, & proinde ratio ipſius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit IE = $\frac{ex}{d}$. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AI, ſive $\frac{1}{2}x$, & fiet area trianguli AEI = $\frac{exx}{2d}$. Sed, propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK ſunt æqualia; adeoque trapezium IK (= 2 triang. AEI) = $\frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo BL. LF :: $d.f$, & CN. NG :: $d.g$, & DP. PH :: $d.h$, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium LM = $\frac{fxx}{d}$; NO = $\frac{gxx}{d}$; & PQ = $\frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d} + \frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{hxx}{d}$, ſive $\frac{pxx}{d}$, ſcribendo p pro $e+f+g+h$, erit æquale trapeziis quatuor IK + LM + NO + PQ; & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio, dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db+\sqrt{bbdd+4aapd}}{2p}$. Latitudine Perambulatorii ſic inventâ, facile eſt ipſum deſcribere.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XX.

A dato puncto, C, *rectam lineam*, CF, *ducere, quæ cum aliis duabus poſitione datis rectis*, AE & AF, *triangulum datæ magnitudinis*, AEF, *comprehendet.*

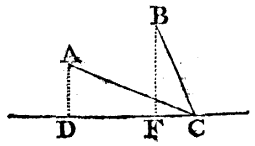


AGE CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, ſitque AD = a, CB = b, AF = x, & trianguli AEF area cc; &, propter proportionales DF. AF (:: DC. AE) :: CB. EG, hoc eſt $a+x.x$ :: $b.\frac{bx}{a+x}$, erit $\frac{bx}{a+x}$ = EG. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AF, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF, quæ proinde æquatur cc. Atque adeo, æquatione ordinatâ, eſt $xx = \frac{2ccx+2cca}{b}$, ſeu $x = \frac{cc+\sqrt{c^4+2ccab}}{b}$.

Nihil ſecus recta per datum punctum ducitur, quæ triangulum, vel trapezium quodvis, in datâ ratione ſecabit.

PROB. XXI.

Punctum C *in datâ rectâ lineâ*, DF, *determinare, à quo ad alia duo poſitione data puncta*, A & B, *ductæ rectæ*, AC & BC, Vide Prop. 45. *datam habeant differentiam.*



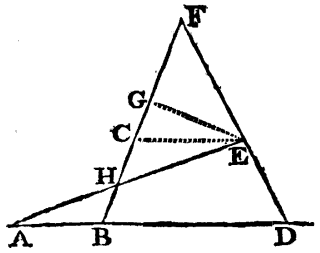
A Datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic AD=a, BF=b, DF=c, DC=x; & erit AC = $\sqrt{aa+xx}$; FC=$x-c$; & BC=$\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Sit jam data harum differentia d, exiſtente AC majori quàm BC; erit $\sqrt{aa+xx}-d=\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Et, quadratis partibus, $aa+xx+dd-2d\sqrt{aa+xx} = bb+xx-2cx+cc$. Factâque reductione, & abbreviandi cauſâ pro datis $aa+dd-bb-cc$ ſcripto

CAPUT XIV. ſcripto $2ee$, emerget $ee+cx=d\sqrt{aa+xx}$. Iterumque quadratis partibus, $e^4+2ceex+cexx=ddaa+ddxx$. Et, æquatione reductâ, $xx=\frac{2ceex+e^4-aadd}{dd-cc}$, ſeu $x=\frac{cee+\sqrt{c^2dd-aad^4+aaddcc}}{dd-cc}$.

Haud ſecùs problema reſolvitur, ſi linearum, AC & BC, ſumma vel quadratorum ſumma aut differentia, vel proportio, vel rectangulum, vel angulus ab ipſis comprehenſus detur; vel etiam ſi vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modò calculus, in hoc ultimo præſertim caſu, referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB. XXII.

Datis poſitione tribus rectis, AD, AE, BF, *quartam* DF *ducere, cujus partes,* DE, EF, *prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum.*



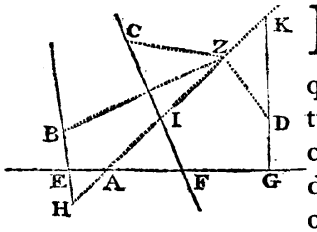
AD BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus poſitione datis concurrentibus in A, B, & H, dic AB $=a$, BH $=b$, AH $=c$, ED $=d$, EF $=e$, & HE $=x$. Jam propter ſimilia triangula ABH, ECH, eſt AH. AB :: HE. EC $=\frac{ax}{c}$; & AH. HB :: HE. CH $=\frac{bx}{c}$. Adde HB, & ſit CB $=\frac{bx+bc}{c}$. Inſuper, propter ſimilia triangula FEC, FDB, eſt ED.CB::EF.FC $=\frac{ebx+ebc}{dc}$. Denique (per 12 & 13 .II. Elem.) eſt $\frac{EC^q-EF^q}{2FC}+\frac{1}{2}FC\,(=CG)=\frac{HE^q-EC^q}{2CH}-\frac{1}{2}CH$; hoc eſt, $\frac{\frac{aaxx}{cc}-ee}{\frac{2bx+2ebc}{dc}}+\frac{ebx+ebc}{2dc}=\frac{xx-\frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}}-\frac{bx}{2c}$. Sive $\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebx}{d}+\frac{ebc}{d}=\frac{ccx-aax-bbx}{b}$. Hic, abbreviandi cauſâ, pro $\frac{cc-aa-bb}{b}-\frac{eb}{d}$, ſcribe m; & erit $\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebc}{d}=mx$; ac terminis omnibus multiplicatis per $x+c$, fiet $\frac{aadxx-eedcc}{eb}+\frac{ebcx}{d}+\frac{ebcc}{d}=mxx+mcx$. Iterum pro

c d

$\frac{aad}{eb}-m$ ſcribe p; pro $mc-\frac{ebc}{d}$ ſcribe $2pq$; & pro $-\frac{ebcc}{d}+\frac{eedcc}{eb}$ ſcribe prr; & evadet $xx=2qx+rr$, & $x=q\pm\sqrt{qq+rr}$. Invento x, ſive HE, age EC parallelam AB, & cape FC. BC :: $e.d$, & acta FED conditionibus quæſtionis ſatisfaciet. PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXIII.

Punctum Z *determinare, à quo ad quatuor poſitione datas rectas lineas,* FA, EB, FC, GD, *ſi aliæ quatuor lineæ,* ZA, ZB, ZC, & ZD, *in datis angulis ducantur, duarum è ductis,* ZA & ZB, *rectangulum, & aliarum duarum,* ZC & ZD, *ſumma detur.*



EX lineis elige aliquam poſitione datam, FA; ut & poſitione non datam, ZA, quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur; & cæteras poſitione datas lineas produc donec his, ſi opus eſt etiam productis, occurrant, ut vides. Dictiſque EA $=x$, & AZ $=y$, propter angulos trianguli AEH datos, dabitur ratio AE ad AH, quam pone p ad q, & erit AH $=\frac{qx}{p}$. Adde AZ, fitque ZH $=y+\frac{qx}{p}$. Et inde cùm propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ, ſi ea ponatur n ad p, habebitur ZB $=\frac{py+qx}{n}$.

Præterea ſi data EF dicatur a, erit AF $=a-x$; indeque, ſi propter datos angulos trianguli AFI, ſtatuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet AI $=\frac{ra-rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ, & reſtabit IZ $=y-\frac{ra-rx}{p}$. Et, propter datos angulos trianguli ICZ, ſi ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet ZC $=\frac{py-ra+rx}{m}$.

Ad eundem modum, ſi ponatur EG $=b$. AG.AK :: $l.s$, & ZK.ZD :: $p.l$. obtinebitur ZD $=\frac{sb-sx-ly}{p}$.

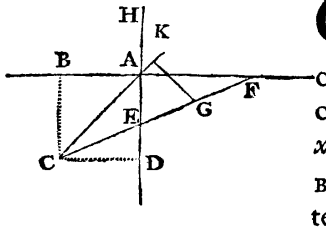
Jam ex ſtatu quæſtionis ſi duarum ZC & ZD ſumma, $\frac{py-ra+rx}{m}+\frac{sb-sx-ly}{p}$, ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum, $\frac{ppyy+qxy}{n}$, æquale gg; habebuntur duæ æquationes

CAPUT XIV. tiones pro determinandis x & y. Per posteriorem fit $x = \frac{ngg-fpy}{qy}$; & hunc ipsius x valorem scribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py-ra}{m} + \frac{rngg-rpyy}{mqy} + \frac{sb-by}{p} - \frac{sngg-spyy}{pqy} = f$. Et reducendo, $yy = \frac{apqry-bmqsy+fmpqy+ggmns-ggnpr}{ppq-ppr-mlq+mps}$. Et abbrevi. causâ scripto $2b$ pro $\frac{apqr-bmqs+fmpq}{ppq-ppr-mlq+mps}$, & kk pro $\frac{ggmns-ggpnr}{ppq-ppr-mlq+mps}$, fiet $yy = 2by + kk$, sive $y = b \pm \sqrt{bb+kk}$. Cujus æquationis ope cùm y innotescit, æquatio $\frac{ngg-fyy}{qy} = x$ dabit x: quod sufficit ad determinandum punctum x.

Ad eundem ferè modum punctum determinatur, à quo ad plures vel pauciores positione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur, eâl ege ut aliquarum summa, vel differentia, vel contentum detur; aut æquetur cæterarum summæ, vel differentiæ, vel contento, vel ut alias quaslibet habeant assignatas conditiones.

PROB. XXIV.

Angulum rectum, EAF, *datâ rectâ,* EF, *subtendere, quæ transibit per datum punctum,* C, *a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidistans.*



QUadratum ABCD compleatur, & linea EF biscetur in G. Tum dic CB vel CD esse a, EG vel FG esse b, & CG esse x; eritque CE $= x-b$, & CF $= x+b$. Dein cùm $CFq - BCq = BFq$, erit BF $= \sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Denique propter similia triangula CDE, FBC, est CE. CD :: CF. BF, sive $x-b.a :: x+b.\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Unde $ax+ab = \overline{x-b} \times \sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Cujus æquationis utrâque parte quadratâ, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = {}^{2aa}_{+2bb}\,xx \pm {}^{2aabb}_{b^4}$. Et, extractâ radice, sicut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx = aa+bb+\sqrt{a^4+4aabb}$. Adeoque $x = \sqrt{aa+bb+\sqrt{a^4+4aabb}}$. CG sic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati satisfacit.

Idem

Idem aliter.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Sit CE $= x$, CD $= a$, & EF $= b$, eritque CF $= x+b$, & BF $= \sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Et proinde, cùm sit CE. CD :: CF. BF, sive $x.a :: x+b.\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$, erit $ax+ab = x\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis, prodibit $x^4+2bx^3 \pm {}^{bb}_{2aa}\,xx - 2aabx - aabb = 0$, æquatio biquadratica, cujus radicis investigatio difficilior est quàm in priori casu. Sic autem investigari potest. Pone $x^4+2bx^3 \pm {}^{bb}_{2aa}\,xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4$; & extractâ utrobique radice, $xx+bx-aa = \pm a\sqrt{aa+bb}$.

Ex his occasionem nactus sum tradendi *Regulam de electione terminorum* ad ineundum calculum.

Scilicet cùm duorum terminorum talis obvenit affinitas, sive similitudo relationis, ad cæteros terminos quæstionis, ut oporteret æquationes per omnia similes ex utrovis adhibito produci; aut ambos, si simul adhiberentur, easdem in æquatione finali dimensiones, & eandem omninò formam, signis fortè + & − exceptis, habituros esse; (id quod facile prospicitur) tunc neutrum adhibere convenit; sed eorum vice tertium quemvis eligere, qui similem utrique relationem gerit; puta semisummam vel semidifferentiam, vel medium proportionale forsan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & sine compare relatam.

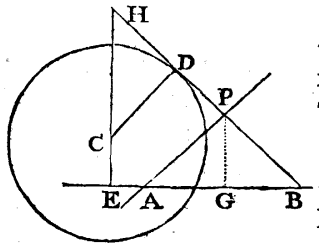
Sic in præcedente problemate, cùm viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri (quod patebit si ducas itidem EF in angulo BAH) atque adeo nullâ ratione suaderi possem, cur ED potiùs quàm BF, vel AE potiùs quàm AF, vel CE potiùs quàm CF, pro quærendâ quantitate adhiberentur; vice punctuorum E & F undè hæc ambiguitas proficiscitur, sumpsi, in solutione priori, intermedium G, quod parem relationem ad utramque linearum AB & AD observat. Deinde ab hoc G non demisi perpendiculum ad AF, pro quærendâ quantitate, quia potui eâdem ratione demisisse ad AD. Et eapropter in neutrum, CB vel CD, demisi, sed instituì CG quærendum esse, quod nullum admittit compar; & sic æquationem biquadraticam obtinui sine terminis imparibus.

CAPUT XIV. Potui etiam, animadverſo quod punctum G jaceat in peripheriâ circuli centro A radio EG deſcripti, demiſiſſe GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæſiviſſe AK vel CK, quippe quæ ſimilem etiam utrique, AB & AD, relationem gerunt; atque ita in æquationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidiſſem, poſito AK = y, AC = e, & EG = b. Et AK ſic invento, erigendum fuiſſet perpendiculum KG præfato circulo occurrens in G, per quod CF tranſiret.

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9 & 10. ubi trianguli latera germana, BC & AC, determinanda erant, quæſivi potiùs ſemidifferentiam quàm alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas ex vigeſimo octavo Problemate magis eluceſcet.

PROB. XXV.

Ad Circulum, centro C *radio* CD *deſcriptum, ducere Tangentem* DB, *cujus pars,* PB, *inter rectas poſitione datas,* AP, AB, *ſita, ſit datæ longitudinis.*



A Centro C ad alterutram rectarum poſitione datarum, puta AB, demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG, & dictis EA = a, EC = b, CD = c, BP = d, & PG = x, propter ſimilia triangula PGB, CDH, erit GB $(\sqrt{dd-xx})$. PB :: CD. CH = $\frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Adde EC; & fiet EH = $b + \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Porro eſt PG. GB :: EH. EB = $\frac{b}{x}\sqrt{dd-xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc, propter angulum PAG datum, datur ratio PG ad AG; quâ poſitâ e ad f, erit AG = $\frac{fx}{e}$. Adde EA & BG, & habebitur denuò EB = $a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd-xx}$. Eſt itaque $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{dd-xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd-xx}$: & per tranſpoſitionem terminorum $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b-x}{x}\sqrt{dd-xx}$. Et partibus æquationis quadratis, $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx$. Et, per debitam reductionem,

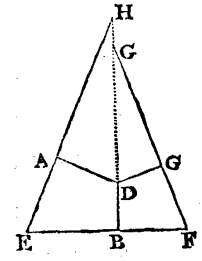
$$x^4 + \overset{+2aef}{-2bee}\,x^3 + \overset{+aace}{\underset{-ddee}{+bbee}}\,xx + \overset{+2bddee}{-2acdee}\,x + \overset{+ccddee}{-bbddee} \overset{-2cdef}{\overset{}{}} = 0.$$
$$ee+ff$$

PROB.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXVI.

Invenire punctum D, *à quo tres rectæ,* DA, DB, DC, *ad totidem alias poſitione datas rectas,* AE, BF, CF, *perpendiculariter demiſſæ, datam inter ſe rationem obtineant.*



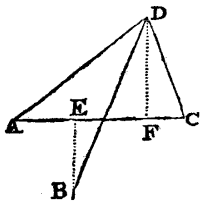
E Rectis poſitione datis producatur una, puta BF, ut & ejus perpendicularis, BD, donec reliquis, AE & CF, occurrant, BF quidem in E & F, BD autem in H & G. Jam ſit EB = x & EF = a; eritque BF = $a - x$. Cùm autem propter datam poſitionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & FBG dentur; ſit EB ad BH ut d ad e; & erit BH = $\frac{ex}{d}$, & EH $(= \sqrt{EBq + BHq}) = \sqrt{xx + \frac{eexx}{dd}}$, hoc eſt = $\frac{x}{d}\sqrt{dd+ee}$. Sit etiam BF ad BG ut d ad f; & erit BG = $\frac{fa-fx}{d}$, & FG $(= \sqrt{BFq + BGq})$ $= \sqrt{aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffxx}{dd}}$, hoc eſt = $\frac{a-x}{d}\sqrt{dd+ff}$. Præterea dicatur BD = y, & erit HD = $\frac{ex}{d} - y$, & GD = $\frac{fa-fx}{d} - y$; adeoque, cùm ſit AD. HD (:: EB. EH) :: d. $\sqrt{dd+ee}$, & DC. GD (:: BF. FG) :: d. $\sqrt{dd+ff}$, erit AD = $\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & DC = $\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Denique, ob datas rationes linearum BD, AD, DC, ſit BD. AD :: $\sqrt{dd+ee}$. $b-d$; & erit $\frac{by-dy}{\sqrt{dd+ee}}$ (= AD) = $\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, ſive $by = ex$. Sit etiam BD. DC :: $\sqrt{dd+ff}$. $k-d$; & erit $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}}$ (= DC =) $\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$, ſive $ky = fa - fx$. Eſt itaque $\frac{ex}{b}$ $(= y) = \frac{fa-fx}{k}$; &, per reductionem, $\frac{fba}{ek+fb} = x$. Quare cape EB. EF :: b. $\frac{ek}{f} + b$; dein BD. EB :: e. b; & habebitur punctum quæſitum D.

PROB. XXVII.

Invenire punctum D, *à quo tres rectæ,* DA, DB, DC, *ad data tria puncta* A, B, C, *ductæ, datam inter ſe rationem obtineant.*

E Datis tribus punctis junge duo quævis, puta A & C; & à tertio, B, ad lineam conjungentem, AC, demitte perpendiculum

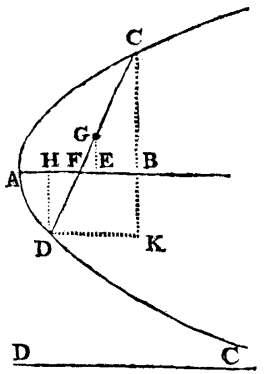
Caput XIV. BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæsito D; dictisque AE=a, AC=b, EB=c, AF=x, & FD=y, erit ADq=$xx+yy$; FC=$b-x$; CDq (=FCq+FDq)=$bb-2bx+xx+yy$; EF=$x-a$, ac BDq (=EFq+EB+FD quad.)=$xx-2ax+aa+cc+2cy+yy$. Jam cùm sit AD ad CD in datâ ratione, sit ista ratio d ad e; & erit CD=$\frac{e}{d}\sqrt{xx+yy}$. Cùm etiam sit AD ad BD in datâ ratione, sit ista ratio d ad f, & erit BD=$\frac{f}{d}\sqrt{xx+yy}$. Adeoque est $\frac{eexx+eeyy}{dd}$ (=CDq)=$bb-2bx+xx+yy$; & $\frac{ffxx+ffyy}{dd}$ (=BDq)=$xx-2ax+aa+cc+2cy+yy$. In quibus si, abbreviandi causâ, pro $\frac{dd-ee}{d}$ scribatur p, & q pro $\frac{dd-ff}{d}$, emerget $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{p}{d}yy=0$, & $aa+cc-2ax+2cy+\frac{q}{d}xx+\frac{q}{d}yy=0$. Per priorem est $\frac{2bqx-bbq}{p}=\frac{q}{d}xx+\frac{q}{d}yy$. Quare in posteriori pro $\frac{q}{d}xx+\frac{q}{d}yy$ scribe $\frac{2bqx-bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx-bbq}{p}+aa+cc-2ax+2cy=0$. Iterum, abbreviandi causâ, scribe m pro $a-\frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p}-aa-cc$; & erit $2mx+2cn=2cy$; terminisque per $2c$ divisis, $\frac{mx}{c}+n=y$. Quamobrem in æquatione $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{p}{d}yy=0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c}+n$, & habebitur $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{ppmm}{dcc}xx+\frac{2pmn}{dc}x+\frac{pnn}{d}=0$. Ubi denuò si, abbreviandi causâ, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d}+\frac{ppmm}{dcc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b-\frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb+\frac{pnn}{d}$, habebitur $xx=2sx-tb$. Et, extractâ radice, $x=s\pm\sqrt{ss-tb}$. Invento x, æquatio $\frac{mx}{c}+n=y$ dabit y; & ex datis x & y, hoc est AF & FD, determinatur punctum quæsitum D.



PROB. XXVIII.

Rectam, DC, *datæ longitudinis in datam Conicam sectionem,* DAC, *sic inscribere, ut ea per punctum,* G, *positione datum transeat.*

SIT AF axis Curvæ, & à punctis, D, G & C, ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam ad determinandam positionem



tionem rectæ DC, puncti D, aut C, inventio proponi potest; sed cùm hæc sint germana & adeo paria, ut ad alterutrum determinandum operatio similis evasura esset, sive quærerem CG, CB, aut AB; sive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto prospicio, quod utrumque D & C similiter respectet, & unà determinet: et hujusmodi video esse punctum F. Problematica Geometrica.

Jam sit AE=a, EG=b, DC=c, EF=z; & præterea cùm relatio inter AB & BC habeatur in æquatione, quam suppono pro Conicâ sectione determinandâ datam esse, sit AB=x, & BC=y; & erit FB=$x-a+z$. Et propter GE. EF :: CB. FB erit iterùm FB=$\frac{yz}{b}$. Ergo $x-a+z=\frac{yz}{b}$.

His ita præparatis, tolle x per æquationem quæ curvam designat. Quemadmodum si Curva sit Parabola, per æquationem $rx=yy$ designata, scribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r}-a+x=\frac{yz}{b}$. Et, extractâ radice, $y=\frac{rz}{2b}+\sqrt{\frac{rrzz}{4bb}+ar-rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb}+4ar-4rz}$ esse differentiam gemini valoris y, id est linearum + BC & − DH, adeoque (demisso DK in CB normali) valere CK. Est autem FG. GE :: DC. CK, hoc est $\sqrt{bb+zz}.b::c.\sqrt{\frac{rrzz}{bb}+4ar-4rz}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando, orietur $z^4=\frac{4bbrz^3-4abbrzz+4b^4rz-4ab^4r+b^4cc}{rr}$, æquatio quatuor tantùm dimensionum, quæ ad octo dimensiones ascendisset, si quæsivissem CG vel CB aut AB.

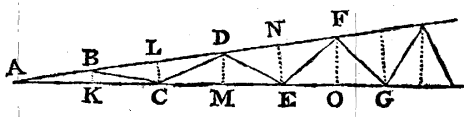
PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

IN angulo quovis FAG inscribe lineas AB, BC, CD, DE, &c. ejusdem cujusvis longitudinis; & erunt triangula, ABC, BCD, CDE, DEF, &c. Isoscelia; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang.

CAPUT XIV.

ang. A+ACB=2 ang. A. Et ang. DCE=ang. A+ADC=3 ang. A. Et ang. EDF=A+AED=4 ang. A. Et ang. FEG=5 ang. A, & ſic deinceps. Poſitis jam AB, BC, CD, &c. radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, &c. demiſſa in AC, BD, CE, &c. erunt ſinus iſtorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, &c. ſinus complementorum ad rectum. Vel poſitâ AB diametro, illæ AK, BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo AB = $2r$, & AK = x: dein ſic operare.



AB . AK :: AC . AL.

$2r \,.\, x :: 2x \,.\, \frac{xx}{r}$.

Et $\left.\begin{matrix} \text{AL} - \text{AB} \\ \frac{xx}{r} - 2r \end{matrix}\right\}$ = BL, Duplicatio.

AB . AK :: AD (2AL − AB). AM.

$2r \,.\, x :: \frac{2xx}{r} - 2r \,.\, \frac{x^3}{rr} - x$.

Et $\left.\begin{matrix} \text{AM} - \text{AC} \\ \frac{x^3}{rr} - 3x \end{matrix}\right\}$ = CM, Triplicatio.

AB . AK :: AE (2AM − AC). AN.

$2r \,.\, x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x \,.\, \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}$.

Et $\left.\begin{matrix} \text{AN} - \text{AD} \\ \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{matrix}\right\}$ = DN, Quadruplicatio.

AB . AK :: AF (2AN − AD). AO.

$2r \,.\, x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r} + 2r \,.\, \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x$.

Et $\left.\begin{matrix} \text{AO} - \text{AE} \\ \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x \end{matrix}\right\}$ = EO, Quintuplicatio.

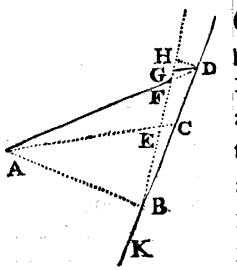
Et ſic deinceps. Quòd ſi velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx - 2rr = qr$ ad biſectionem: $x^3 - 3rrx = qrr$ ad triſectionem: $x^4 - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ ad quadriſectionem: $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquiſectionem, &c.

PROB.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXX.

Cometæ in lineâ rectâ, BD, *uniformiter progredientis poſitionem curſûs ex tribus obſervationibus determinare.*



SIT A oculus ſpectatoris, B locus Cometæ in primâ obſervatione, C in ſecundâ, ac D in tertiâ; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex obſervationibus itaque dantur anguli BAC, BAD; adeoque, ſi BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & AD in E & F, ex aſſumpto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum reſpectu radii AB. Sit ergo AB = r, BE = b, & BF = c. Porrò ex datis obſervationum intervallis dabitur ratio BC ad BD, quæ ſi ponatur b ad e, & agatur DG parallela AC, cùm ſit BE ad BG in eâdem ratione, & BE dicta fuerit b, erit BG = e; adeoque GF = $e - c$. Adhæc, ſi demittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF ſimilia & ſimiliter ſecta lineis AE ac DG, erit FE.AB::FG.HD, hoc eſt $c - b \,.\, a :: e - c \,.\, \frac{ae - ac}{c - b}$ = HD. Erit etiam FE.FB :: FG. FH, hoc eſt $c - b \,.\, c :: e - c \,.\, \frac{ce - cc}{c - b}$ = FH; cui adde BF, ſive c, & fit BH = $\frac{ce - cb}{c - b}$. Quare eſt $\frac{ce - cb}{c - b}$ ad $\frac{ae - ac}{c - b}$, (ſive $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc eſt, ut tangens anguli HDB, ſive ABK, ad radium. Quare, cùm a ſupponatur eſſe radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK: adeoque factâ reſolutione, erit ut $e - c$ ad $e - b$ (ſive GF ad GE) ita c (ſive tangens anguli BAF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque, ut tempus inter primam & ſecundam obſervationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam proportionalem. Dein, ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

PROB.

CAPUT XIV.

PROB. XXXI.

Radiis à punctо lucido ad ſphæricam ſuperficiem refringentem divergentibus, invenire concurſus ſingulorum refractorum cum axe ſphæræ per punctum illud lucidum tranſeunte.

SIT A punctum illud lucidum, & BV ſphæra, cujus axis AD, centrum C, & vertex V; ſitque AB radius incidens, & BD refractus ejus, ac demiſſis ad radios iſtos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actâque BC, dic AC=a, VC, vel BC, =r, CG=x, & CD=z: eritque AG=$a-x$, BG=$\sqrt{rr-xx}$, AB=$\sqrt{aa-2ax+rr}$; &, propter ſim. tri. ABG & ACE, CE=$\frac{a\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{aa-2ax+rr}}$. Item GD=$z+x$, BD=$\sqrt{zz+2zx+rr}$: & propter ſim. tri. DBG ac DCF, CF=$\frac{z\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{zz+2zx+rr}}$. Præterea cùm ratio ſinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem eſſe a ad f; & erit $\frac{fa\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{aa-2ax+rr}}=\frac{az\sqrt{rr-xx}}{\sqrt{zz+2zx+rr}}$; ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr-xx}$, erit $f\sqrt{zz+2zx+rr}=z\sqrt{aa-2ax+rr}$: & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz=\frac{2ffxz+ffrr}{aa-2ax+rr-ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ ſcribe p, & q pro dato $a+\frac{rr}{a}-p$, & erit $zz=\frac{2pxz+prr}{q-2x}$, ac $z=\frac{px+\sqrt{ppxx-2prrx+pqrr}}{q-2x}$. Inventum eſt itaque z; hoc eſt longitudo CD, adeoque punctum quæſitum D, quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

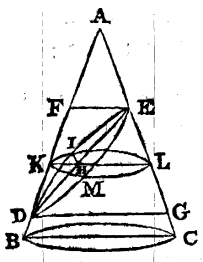
Poſui hic incidentes radios divergentes eſſe, & in Medium denſius incidere; ſed mutatis mutandis Problema perinde reſolvitur ubi convergunt, vel incidunt è denſiori Medio in rarius.

PROB.

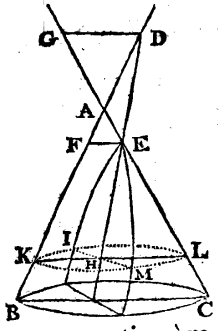
PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet ſecetur, invenire figuram ſectionis.



SIT ABC conus circulari baſi BC inſiſtens; IEM ejus ſectio quæſita; KILM alia quælibet ſectio parallela baſi, & occurrens priori ſectioni in HI; & ABC tertia ſectio, perpendiculariter biſecans priores duas, in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipſi AK in D, actiſque EF ac DG parallelis KL, & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic EF=a, DG=b, ED=c, EH=x, & HI=y; & propter ſim. tri. EHL, EDG, erit ED. DG :: EH. HL=$\frac{bx}{c}$. Dein propter ſim. tri. DEF, DHK, erit DE. EF :: DH. ($c-x$ in Fig. 1, & $c+x$ in Fig. 2.) HK=$\frac{ac\mp ax}{c}$. Deinque cùm ſectio KIL ſit parallela baſi, adeoque circularis; erit HK×HL=HIq; hoc eſt $\frac{ab}{c}x\mp\frac{ab}{cc}xx=yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc eſt inter axem & ordinatim applicatam ſectionis EIM; quæ æquatio cùm ſit ad Ellipſin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2, patet ſectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam eſſe.



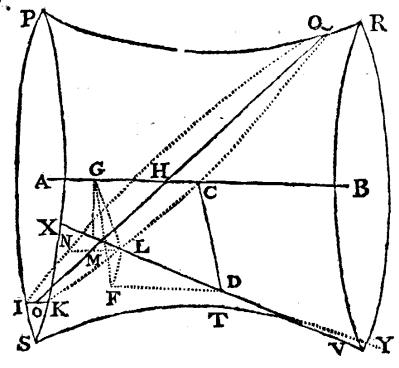
Quòd ſi ED nullibi occurrat AK, ipſi parallela exiſtens, tunc erit HK=EF (a), & inde $\frac{ab}{c}x$ (HK×HL)=yy, æquatio ad Parabolam.

PROB. XXXIII.

Si rectа, XY, *circa axem* AB, *ad diſtantiam* CD, *in datâ inclinatione ad planum* DCB, *convolvatur, & ſolidum,* PQRVTS, *iſtâ convolutione generatum, ſecetur plano quolibet* INQLK; *invenire figuram Sectionis.*

ESTO BHQ, vel GHO, inclinatio axis, AB, ad planum ſectionis; & L quilibet concurſus rectæ XY cum plano illo. Age

CAPUT XIV.

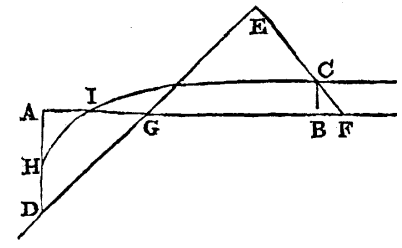


DF parallelam AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictisque CD = a, CH = b, HM = x, & ML = y; &, propter datum angulum GHO, posito MH. HG :: $d.e$: erit $\frac{ex}{d}$ = GH, & $b+\frac{ex}{d}$ = GC vel FD. Adhæc, propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) posito FD.FL :: $g.b$, erit $\frac{bb}{g}+\frac{bex}{dg}$ = FL; cujus quadrato adde FGq, (DCq seu aa) & emerget GLq = $aa+\frac{bbbb}{gg}+\frac{2bbbex}{dgg}+\frac{bbeexx}{ddgg}$. Hinc aufer MG$q$ (HMq − HGq seu $xx-\frac{ee}{dd}xx$) & restabit $\frac{aagg+bbbb}{gg}+\frac{2bbbe}{dgg}x+\frac{bbee-ddgg+cegg}{ddgg}xx$ (= MLq) = yy: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc est inter HM axem sectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde, cùm in hâc æquatione x & y ad duas tantùm dimensiones ascendant, patet figuram INQLK esse conicam sectionem. Utpote si angulus MHG major fit angulo LDF, Ellipsis erit hæc figura; si minor, Hyperbola; si æqualis vel Parabola, vel, coincidentibus insuper punctis C & H, parallelogrammum.

PROB. XXXIV.

Si ad AF *erigatur perpendiculum*, AD, *datæ longitudinis*, & *normæ*, DEF, *crus unum*, ED, *continuò transeat per punctum* D, *dum alterum crus* EF, *æquale* AD, *dilabatur super* AF; *invenire curvam* HIC, *quam crus*, EF, *medio ejus puncto*, C, *describit.*

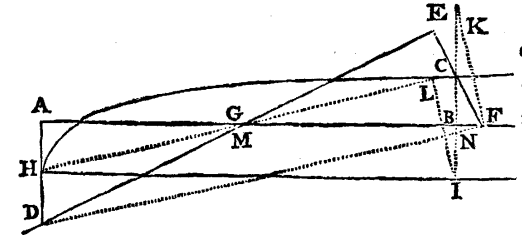
SIT EC vel CF = a, perpendiculum CB = y, AB = x: & propter similia triangula FBC, FEG, erit BF ($\sqrt{aa-yy}$). BC + CF ($y+a$) :: EF



EF ($2a$.). EG+GF (AG+GF) seu AF. Quare $\frac{2ay+2aa}{\sqrt{aa-yy}}$ (= AF = AB + BF) = $x+\sqrt{aa-yy}$. Jam, multiplicando per $\sqrt{aa-yy}$, fit $2ay+2aa = aa-yy+x\sqrt{aa-yy}$, seu $2ay+aa+yy=x\sqrt{aa-yy}$: & quadrando partes divisas per $\sqrt{a+y}$, ac ordinando, prodit $y^3+3ayy+\frac{3aa}{+xx}y+\frac{a^3}{-axx}=0$.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

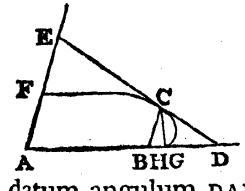
Idem aliter.



In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF; & age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N: & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus K = ½BCF = ½EGF = GFD = AMH = MHI = CIL; adeoque triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC similia. Dic ergo FC = a, HI = x, & IC = y; & erit BN ($2a-y$.). BK (y) :: LC. LH :: Ciq(yy.) HIq (xx.) adeoque $2axx-yxx=y^3$. Ex quâ æquatione facilè colligitur hanc curvam esse Cissoidem Veterum, ad circulum cujus centrum sit A ac radius AH, pertinentem.

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED, *angulum datum*, EAD, *subtendens, ita moveatur, ut termini ejus*, D & E, *anguli istius latera*, AD & AE, *perpetim contingant*; *proponatur Curvam* FCG *determinare, quam punctum quodvis* C, *in rectâ istâ*, ED, *datum, describit.*



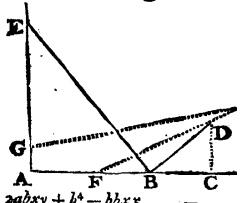
A Dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB = x, BC = y, CE = a, & CD = b: & propter similia triangula DCB, DEA, erit EC. AB :: CD. BD. hoc est $a.x$ :: b. BD = $\frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum

CAPUT XIV. trianguli rectanguli BCH sit $a. e :: BH. BH$, & erit $BH = \frac{ey}{a}$. Aufer hanc de BD, & restabit $HD = \frac{bx-ey}{a}$. Jam in triangulo BCH, propter angulum rectum BHC, est $BCq - BHq = CHq$; hoc est, $yy - \frac{eeyy}{aa} = CHq$. Similiter in triangulo CDH, propter angulum CHD rectum, est $CDq - CHq = DHq$, hoc est $bb - yy + \frac{eeyy}{aa}$ ($= HDq = \frac{bx-ey}{a}$ quadrato) $= \frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et, per reductionem, $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$: ubi cùm incognitæ quantitates sint duarum tantùm dimensionum, patet curvam esse Conicam sectionem. Præterea, extractâ radice, fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipsius xx est $ee - aa$. Atqui erat $a. e :: BC. BH$; & BC necessariò major est linea quàm BH, nempe Hypotenusa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quàm e, & $ee - aa$ negativa est quantitas; atque adeo curva erit Ellipsis.

PROB. XXXVI.

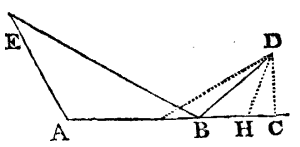
Si norma, EBD, *ita moveatur, ut ejus crus unum,* EB, *continuò subtendat angulum rectum* EAB, *dum terminus alterius cruris,* BD, *describat curvam aliquam lineam* FDG; *invenire lineam istam,* FDG, *quam punctum* D *describit.*

A Puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis $AC = x$, & $DC = y$, atque $EB = a$, & $BD = b$; in triangulo BDC, propter angulum rectum ad C, est $BCq = BDq - DCq = bb - yy$.



Ergo $BC = \sqrt{bb-yy}$, & $AB = x - \sqrt{bb-yy}$. Præterea propter similia triangula BEA. DBC, est BD. DC :: EB. AB, hoc est $b. y :: a. x - \sqrt{bb-yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb-yy} = ay$, sive $bx - ay = b\sqrt{bb-yy}$. Et partibus quadratis ac debitè reductis, $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa+bb}$. Et extractâ radice, $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa+bb-xx}}{aa+bb}$. Unde patet iterum Curvam esse Ellipsin.

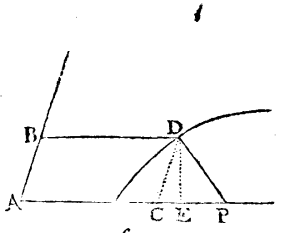
Hæc ita se habent, ubi anguli EBD & EAB recti sunt: sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales,



quales, sic procedendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut antè, & agatur DH constituens angulum DHA æqualem angulo HAE, puta obtusum: dictisque $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$, & $HD = y$, propter similia triangula EAB, BHD, erit BD. DH :: EB. AB; hoc est $b. y :: a. AB = \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & restabit $BH = x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC, propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, assume DH ad HC in ratione quâvis datâ, puta b ad e; & cùm DH sit y, erit $HC = \frac{ey}{b}$, & $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{eyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD, est $BDq = BHq + DHq + 2BH \times HC$, hoc est $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cùm b sit major e, hoc est $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam esse Ellipsin.

PROB. XXXVII.

In dato angulo, PAB, *actis utcunque rectis,* BD, PD, *in datâ ratione, hâc semper lege, ut* BD *sit parallela* AP, *&* PD *terminetur ad punctum,* P, *in rectâ* AP *datum*; *invenire locum puncti* D.



AGE CD parallelam AB, & DE perpendicularem AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$; sitque BD ad PD in ratione d ad e; & erit AC, vel BD, $= a - x$, & $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Sit insuper, propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f; & erit $CE = \frac{fy}{d}$, & $EP = x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos, est $CDq - CEq$ ($= EDq$) $= PDq - EPq$, hoc est, $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobique $-\frac{ffyy}{dd}$, terminisque rite dispositis, $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et, extractâ radice, $y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{+ee\ uaa - 2eax - ddxx} + ff}{d}$. Ubi cùm x & y in æquatione penultimâ non

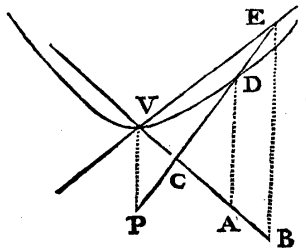
nisi

CAPUT XIV. nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit Conica sectio; eaque Hyperbola, Parabola, vel Ellipsis, prout $ee - dd + ff$, (coefficiens ipsius xx in æquatione posteriori), sit majus, æquale, vel minus nihilo.

PROB. XXXVIII.

Rectis duabus, VE & VC, *positione datis, & ab aliâ rectâ,* PE, *circa polum positione datum,* P, *vertente, sectis utcunque in* C & E; *si recta intercepta,* CE, *dividatur in partes,* CD, DE, *rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti* D.

AGE VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic VP = a, VA = x, & AD = y: & cùm detur ratio CD ad DE, vel conversè ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit EB = $\frac{ey}{d}$. Præterea, cùm detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, sit ista ratio e ad f; & erit VB = $\frac{fy}{d}$. Denique, propter similia triangula



CEB, CDA, CPV, est EB.CB::DA.CA::VP.VC; & componendo, EB + VP. CB + VC :: DA + VP.CA + VC. Hoc est, $\frac{ey}{d} + a . \frac{fy}{d} :: y + a . x$. Ductisque extremis & mediis in se, $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cùm indefinitæ quantitates, x & y, non nisi ad duas dimensiones ascendant, sequitur curvam VD, in quâ punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x est unius tantùm dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

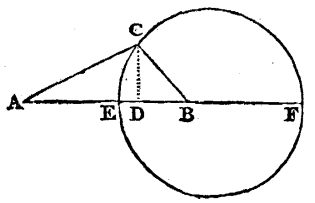
PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ, AC, BC, *à duobus positione datis punctis,* A & B, *in datâ quâvis ratione ad tertium quodvis punctum,* C, *ducantur; invenire locum puncti concursûs* C.

JUnge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque AB = a, AD = x, DC = y: erit AC = $\sqrt{xx+yy}$; BD = $a-x$; & BC ($=\sqrt{BDq+DCq}$) $=\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$.

Jam cùm detur ratio AC ad BC, sit ista d ad e; &, extremis & mediis in se ductis, erit $e\sqrt{xx+yy} = d\sqrt{xx-2ax+aa+yy}$. Et, per reductionem, $\sqrt{\frac{ddaa-2ddax}{ee-dd} - xx} = y$. Ubi cùm xx sit negativum, & solâ unitate affectum, atque etiam angulus ADC rectus; patet curvam, in quâ punctum C locatur, esse circulum. Nempe in rectâ AB cape puncta E & F, ita ut sint $d . e$: : AE. BE : : AF. BF, & erit EF circuli hujus diameter.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

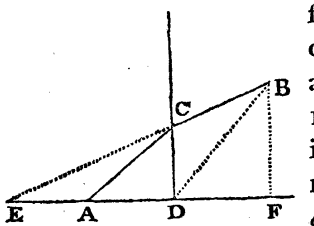


Et hinc è conversò patet hoc Theorema: Quòd in circuli cujusvis diametro EF, infinitè productâ, datis utcunque duobus punctis, A & B, hâc lege, ut sit AE. AF : : BE. BF, & à punctis hisce actis duabus rectis, AC, BC, concurrentibus ad circulum in puncto quovis C; erit AC ad BC in datâ ratione AE ad BE.

PROB. XL.

Si punctum lucidum, A, *radios versus refringentem superficiem planam,* CD, *ejiciat; invenire radium,* AC, *cujus refractus,* CB, *impinget in datum punctum* B.

APuncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo, utrinque producto, concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demissum, in F, & agatur BD; dictisque AD = a, DB = b, BF = c, DC = x, statue rationem sinuum incidentiæ & refractionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED, esse d ad e: & cùm EC & AC (ut notum est) sint in eâdem ratione, & AC sit $\sqrt{aa+xx}$, erit EC = $\frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$.

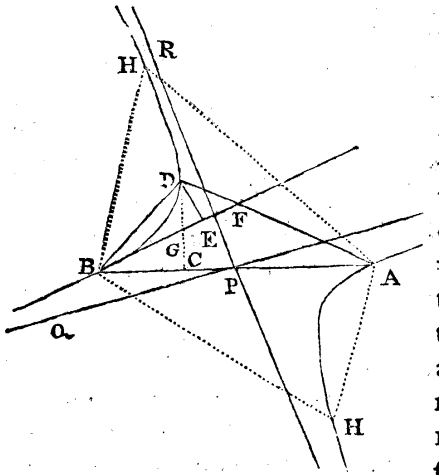


Præterea est ED ($=\sqrt{ECq - CDq}$) = $\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$; & DF = $\sqrt{bb-cc}$; atque EF = $\sqrt{bb-cc} + \sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx}$. Denique, propter similia triangula ECD, EBF, est ED. DC : : EF. FB; &, ductis extremorum

CAPUT XIV. extremorum & mediorum valoribus in ſe, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx} = x\sqrt{bb-cc}+x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, ſive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx} = x\sqrt{bb-cc}$. Et, partibus æquationis quadratis & ritè diſpoſitis, $x^4 - 2ex^3 + \frac{ddcc+ddaaxx-2ddaacx+ddaacc-eebb}{dd-ee} = 0$.

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli, D, *cujus baſis,* AB, *datur, & anguli ad baſem,* DAB, DBA, *datam habent differentiam.*



UBI angulus ad Verticem, ſive, quod perinde eſt, ubi ſumma angulorum ad baſem datur, docuit Euclides locum ver- III. 29. Euclid. ticis eſſe circumferentiam circuli; propoſuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad baſem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, ſitque ABF eorum data differentia, rectâ BF occurrente AD in F. Inſuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictiſque AB = a, AC = x, & CD = y, erit BC = $a-x$. Jam in triangulo BCG, cùm dentur omnes anguli, dabitur ratio laterum, BC & GC; ſit iſta d ad a, & erit CG = $\frac{aa-ax}{d}$. Aufer hanc de DC, ſive y, & reſtabit DG = $\frac{dy-aa+ax}{d}$. Præterea, propter ſimilia triangula BGC, DGE, eſt BG. BC :: DG. DE. Eſt autem in triangulo BGC, $a.d$::CG. BC. Adeoque $aa.dd$:: CGq. BCq; & componendo, $aa+dd.dd$:: BGq. BCq. Et, extractis radicibus, $\sqrt{aa+dd}.d$ (:: BG. BC) :: DG. DE. Ergo DE = $\frac{dy-aa+ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Adhæc, cùm angulus ABF ſit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, ſimilia erunt triangula

triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia DA. DC :: DB. DE. Sed eſt DC = y; DA (= $\sqrt{ACq+DCq}$) = $\sqrt{xx+yy}$; DB (= $\sqrt{BCq+DCq}$) = $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; & ſuprà erat DE = $\frac{dy-aa+ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Quare eſt $\sqrt{xx+yy}.y$ :: $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}.\frac{dy-aa+ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Et extremorum & mediorum quadratis in ſe ductis, $aayy-2axyy+xxyy+y^4 = \frac{ddxxyy+ddy^4-2aaddxxy-2aady^3+2adyx^3+2adxy^3+a^4xx+a^4yy-2a^3x^3-2a^3xyy+aax^4+aaxxyy}{aa+dd}$. Duc omnes terminos in $aa+dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur $x^4 + \frac{-2a+\frac{2d}{a}y}{}x^3 + \frac{-2dy+aa+\frac{2dy^2}{a}}{}xx + \frac{+ddyy-2dy^3+\frac{2ddy}{a}yy}{}x - y^4 = 0$. Divide hanc æquationem per $xx-ax+yy$, & orietur $xx + \frac{-a+\frac{2d}{a}y}{}x - dy = 0$.

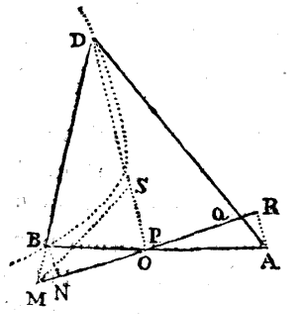
Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hujus Problematis. Prior, $xx-ax+yy = 0$, eſt ad circulum, locum nempe puncti D, ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quàm in figurâ deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſummâ angulorum DAB, DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior, $xx + \frac{-a+\frac{2d}{a}y}{}x - dy = 0$ eſt, ad Hyperbolam, locum puncti D, ubi angulus FBD ſitum obtinet à rectâ BF quem in Figurâ deſcripſimus: hoc eſt, ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Aſſymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola tranſibit.

Et hinc prodit tale Theorema. *Hyperbolæ rectangulæ diametro quávis* AB *ductâ, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis,* D *&* H, *ductis rectis* AD, BD, AH, BH; *hæ rectæ angulos,* DAH, DBH, *ad terminos diametri conſtituent æquales.*

Idem breviùs.

Ad PROB. XXIV. *Regulam* de commodâ terminorum, ad ineundum calculum, electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hîc differentia angulorum ad baſem eodem modo ſe

CAPUT XIV. habet ad utrumque angulum; &, in conſtructione Schematis, æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipſi BF parallelam, ac ſubtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec ſubtraho; ſed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri ſubtraho. Deinde, cùm etiam ambiguum ſit utrum AC vel BC pro termino indefinito, cui ordinatim applicata DC inſiſtit, adhibeatur, neutrum adhibeo; ſed biſeco AB in P, & adhibeo PC: vel potiùs actâ MPQ conſtituente hinc inde angulos, APQ, BPM, æquales dimidio differentiæ angulorum ad baſem, ita ut ea cum rectis AD, BD conſtituat angulos, DQP, DMP, æquales; ad MQ demitto normales, AR, BN, DO, & adhibeo DO pro ordinatim applicatâ, ac PO pro indefinitâ lineâ cui inſiſtit. Voco itaque PO=x, DO=y, AR, vel BN, =b, & PR, vel PN, =c. Et propter ſimilia triangula BNM, DOM, erit BN. DO:: MN. MO. Et dividendo, DO−BN($y-b$). DO(y):: MO−MN (ON ſive $c-x$). MO. Quare MO=$\frac{cy-xy}{y-b}$. Similiter, ex alterâ parte, propter ſimilia triangula ARQ, DOQ, erit AR. DO:: RQ. QO: & componendo, DO + AR ($y+b$). DO (y):: QO+RQ (OR ſive $c+x$). QO. Quare QO=$\frac{cy+xy}{y+b}$. Denique, propter æquales angulos DMQ, DQM, æquantur MO & QO; hoc eſt, $\frac{cy-xy}{y-b}=\frac{cy+xy}{y+b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy+cb-xy-xb=cy-cb+xy-xb$, ſive $cb=xy$, notiſſima æquatio ad Hyperbolam.



Quin etiam locus puncti D ſine calculo Algebraico prodire potuit. Eſt enim ex ſuperioribus DO−BN. ON::DO. MO(QO)::DO+AR. OR. Hoc eſt DO − BN. DO + BN :: ON. OR; & mixtim, DO. BN :: $\frac{ON+OR}{2}$ (NP). $\frac{OR-ON}{2}$ (OP). Adeoque DO × OP = BN × NP.

PROB. XLII.

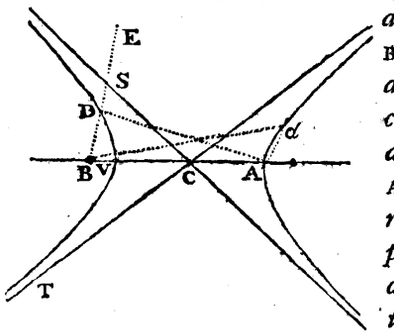
Locum verticis trianguli invenire cujus baſis datur, & angulorum ad baſem unus dato angulo differt à duplo alterius.

IN Schemate noviſſimo ſuperioris Problematis ſit ABD triangulum iſtud, AB baſis biſecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati,

dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. Ad MQ demitte perpendicula, AR, BN, DO; & angulum DMQ biſeca rectâ MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM ſimilia; adeoque OQ. OM:: OD. OS; & dividendo, OQ − OM. OM:: SD. OS:: (per 3. VI. Elem.) DM. OM. Quare (per 9. V. Elem.) OQ − OM = DM. Dictis jam PO=x, OD=y, AR, vel BN, =b, & PR, vel PN, =c, erit, ut in ſuperiori Problemate, OM = $\frac{cy-xy}{y-b}$, et OQ = $\frac{cy+xy}{y+b}$; adeoque OQ − OM = $\frac{-2bcy+2xyy}{yy-bb}$. Ponè jam DOq + OMq = DMq; hoc eſt, $yy+\frac{cc-2cx+xx}{yy-2by+bb}yy=\frac{4bbcc-8bcxy+4xxyy}{y^4-2bbyy+b^4}yy$. Et, per debitam reductionem, orietur tandem $y^4 * \begin{matrix} +cc & +2bxx & +b^4 \\ -2bb & +4bcx & -3bbcc \\ -2cxyy & +2bcc & -2bbcx \\ -3xx & & +bbxx \end{matrix} y \begin{matrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{matrix} = 0$.

Divide omnia per $y-b$, & evadet $y^3 + byy \begin{matrix} -bb & -b^3 \\ +cc & +3bcc \\ -2cxy & +2bcx \\ -3xx & -bxx \end{matrix} = 0$. Quare punctum D eſt ad curvam trium dimenſionum; quæ tamen evadit Hyperbola, ubi angulus BPM ſtatuitur nullus, ſive angulorum ad baſem unus, DBA, duplus alterius, DAB. Tunc enim, BN ſive b evaneſcente, æquatio fiet $yy=3xx+2cx-cc$.

Ex hujus autem æquationis conſtructione tale elicitur Theorema. *Si centro* C, *Aſymptotis* CS, CT, *angulum* SCT 120 *graduum continentibus, deſcribatur Hyperbola quævis* DV, *cujus ſemiaxis ſint* CV, CA: *produc* CV *ad* B, *ut ſit* VB = VC; *& ab* A *&* B *actis utcunque rectis,* AD, BD, *concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus* BAD *dimidium anguli* ABD *triens vero anguli* ADE, *quem recta* AD *comprehendit cum* BD *productâ. Hoc intelligendum eſt de Hyperbolâ quæ tranſit per punctum* V. *Quòd ſi ab iiſdem punctis,* A *&* B, *actæ rectæ,* Ad, Bd, *conveniant ad conjugatam Hyperbolam, quæ tranſit per* A: *tunc externorum angulorum trianguli ad baſem ille ad* B *erit duplus alterius ad* A.

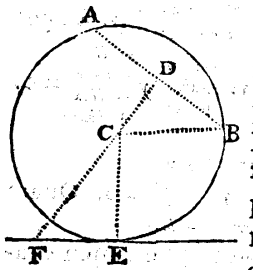


CAPUT XIV.

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta describere, qui rectam positione datam continget.

SUnto A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulum ABE, per ista puncta describere, qui contingat rectam istam FE. Junge AB, & eam biseca in D. Ad D erige normalem, DF, occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc novissimè ductam DF, puta in C. Junge ergo CB, & ad FE demitte CE normalem; eritque E punctum contactûs, ac CB, CE æquales inter se, utpote radii circuli quæsiti. Jam cùm puncta, A, B, D, & F, dentur, esto DB = a, ac DF = b; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB, propter angulum ad D rectum, est $\sqrt{DB q + DC q}$, hoc est $\sqrt{aa+xx}$, = CB. Est & DF − DC, sive $b-x$, = CF. Et in triangulo rectangulo CFE cùm dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; sit ista d ad e; & erit CE = $\frac{e}{d}$ × CF hoc est = $\frac{eb-ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæsiti), æquales inter se; & habebitur æquatio $\sqrt{aa+xx} = \frac{eb-ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{+eebb - 2eebx - aadd}{dd-ee}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd-ee}$. Inventa est ergo longitudo DC, adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B describendus est, ut contingat rectam FE.

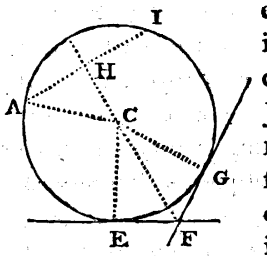


PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum describere, qui rectas duas positione datas continget.

Resolvitur ut Prop. 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.

ESTO datum punctum A, & sint EF, FG rectæ duæ positione datæ, & AEG circulus quæsitus eadem contingens, ac transiens per punctum istud A. Rectâ CF bisecetur angulus EFG, & centrum



centrum circuli in ipsâ reperietur. Sit istud C; & ad EF & FG demissis perpendiculis, CE, CG, erunt E ac G puncta contactûs. Jam in triangulis CEF, CGF, cùm anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE, vel CG. Sit ista d ad e, & si ad determinandum centrum circuli quæsiti C, assumatur CF = x, erit CE vel CG = $\frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH, & cùm punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur istæ a & b, & ab FH, sive b, ablato FC, sive x, restabit CH = $b-x$. Cujus quadrato, $bb-2bx+xx$, adde quadratum ipsius AH, sive aa, & summa $aa+bb-2bx+xx$, erit ACq per 47. I. Elem. siquidem angulus AHC ex Hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli, AC & CG, inter se æquales; hoc est pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum; & habebitur æquatio $aa+bb-2bx+xx = \frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx, & mutatis omnibus signis, erit $-aa-bb+2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd-ee$, & evadet $\frac{-aadd-bbdd+2bddx}{dd-ee} = xx$. Cujus æquationis extracta radix est $x = \frac{bdd-d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$. Inventa est itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum est circuli quæsiti.

Si inventus valor x, sive FC, auferatur de b, sive HF, restabit HC = $\frac{-eeb+d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$, eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

Problemata Geometrica.

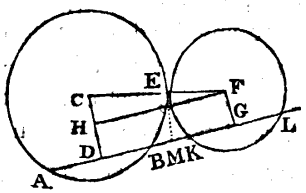
PROB. XLV.

Circulum per data duo puncta describere, qui alium circulum positione datum continget. Vide Prop. 21.

SINT A, B puncta data, EK circulus positione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæsitus per puncta A & B transiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productam demitte perpendicula CD, & FG; & age

CF,

CAPUT XIV. CF, ſecantem circulos in puncto contactûs E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His conſtructis dic AD vel DB=*a*, DG vel HF=*b*, GF=*c*, & EF (radium nempe circuli dati) =*d*, atque DC=*x*: & erit CH (=CD−FG)=*x*−*c*; & CF*q* (=CH*q*+HF*q*)=*xx*−2*cx*+*cc*+*bb*; atque CB*q* (=CD*q*+DB*q*) =*xx*+*aa*; adeoque CB vel CE=$\sqrt{xx+aa}$.



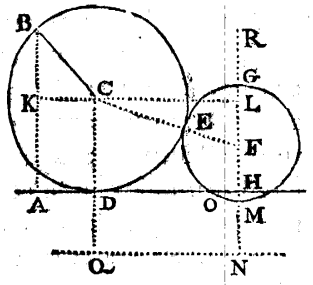
Huic adde EF, & habebitur CF=*d*+$\sqrt{xx+aa}$; cujus quadratum *dd*+*aa*+*xx*+2*d*$\sqrt{xx+aa}$, æquatur valori ejuſdem CF*q* prius invento, nempe *xx*−2*cx*+*cc*+*bb*. Aufer utrobique *xx*, & reſtabit *dd*+*aa*+2*d*$\sqrt{xx+aa}$=*cc*+*bb*−2*cx*. Aufer inſuper *dd*+*aa*, & habebitur 2*d*$\sqrt{xx+aa}$=*cc*+*bb*−*dd*−*aa*−2*cx*. Jam, abbreviandi cauſâ, pro *cc*+*bb*−*dd*−*aa*, ſcribe 2*gg*, & habebitur 2*d*$\sqrt{xx+aa}$=2*gg*−2*cx*, ſive *d*$\sqrt{xx+aa}$=*gg*−*cx*. Et partibus æquationis quadratis, erit *ddxx*+*ddaa*=g^4−2*ggcx*+*ccxx*. Utrinque aufer *ddaa* & *ccxx*, & reſtabit *ddxx*−*ccxx*=g^4−*ddaa*−2*ggcx*. Et partibus æquationis diviſis per *dd*−*cc*, habebitur $xx=\frac{g^4-ddaa-2ggcx}{dd-cc}$. Atque, per extractionem radicis affectæ, $x=\frac{-ggc+\sqrt{g^4dd-d^4aa+ddaacc}}{dd-cc}$.

Inventâ igitur *x*, ſive longitudine DC, biſeca AB in D, & ad D erige perpendiculum DC=$\frac{-ggc+d\sqrt{g^4-aadd+aacc}}{dd-cc}$. Dein centro C, per punctum A vel B, deſcribe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & tranſibit per utrumque punctum A, B. Q. E. F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum deſcribere qui datum circulum, & rectam lineam poſitione datam continget.

SIT circulus iſte deſcribendus BD, ejus centrum C, punctum per quod deſcribi debet B, recta quam continget AD, punctum contactûs D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactûs E. Junge CB, CD, CF; & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF ſecabit circulos in puncto contactûs E. Produc

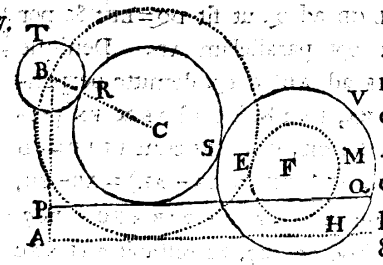


Produc CD ad Q, ut ſit DQ=EF; & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN; & à C ad AB & FN perpendicula CK, CL. Et cùm ſit BC=CD vel AK, erit BK (=AB−AK)=AB−BC, adeoque BK*q*=AB*q*−2AB×BC+BC*q*. Aufer hoc de BC*q*, & reſtabit 2AB×BC−AB*q*, pro quadrato de CK. Eſt itaque AB×2BC−AB=CK*q*; & eodem argumento erit FN×2FC−FN=CL*q*, atque adeo $\frac{CK_q}{AB}$+AB=2BC, & $\frac{CL_q}{FN}$+FN=2FC. Quamobrem, ſi pro AB, CK, FN, KL, & CL, ſcribas *a*, *y*, *b*, *e*, & *c*−*y*, erit $\frac{yy}{2a}+\frac{1}{2}a$=BC, & $\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b$=FC. De FC aufer BC, & reſtabit EF=$\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$. Jam ſi puncta, ubi FN producta ſecat rectam AD & circulum GEM, notentur literis H, G, & M; & in HG productâ capiatur HR=AB; cùm ſit HN (=DQ=EF)=GF, addendo FH utrinque, erit FN=GH; adeoque AB−FN (=HR−GH)=GR; & AB−FN+2EF, hoc eſt *a*−*b*+2EF=RM; & $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+$EF=$\frac{1}{2}$RM. Quare, cùm ſuprà fuerit EF=$\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$, ſi hoc ſcribatur pro EF, habebitur $\frac{1}{2}$RM=$\frac{cc-2cy+yy}{2b}-\frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM *d*, & erit *d*=$\frac{cc-2cy+yy}{b}-\frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in *a* & *b*, & orietur *abd*=*acc*−2*acy*+*ayy*−*byy*. Aufer utrinque *acc*−2*acy*, & reſtabit *abd*−*acc*+2*acy*=*ayy*−*byy*. Divide per *a*−*b*, & orietur $\frac{abd-acc+2acy}{a-b}=yy$. Et, extractâ radice $y=\frac{ac}{a-b}\pm\sqrt{\frac{aabd-abbd+abcc}{aa-2ab+bb}}$. Quæ concluſiones ſic abbreviari poſſunt. Pone *c*. *b* :: *d*. *e*; dein *a*−*b*. *a* :: *c*. *f*; & erit *fe*−*fc*−2*fy*=*yy*, ſive $y=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$. Invento *y*, ſive KC vel AD, cape AD=$f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$; ad D erige perpendiculum DC (=BC)=$\frac{KC_q}{2AB}+\frac{1}{2}$AB; & centro C, intervallo CB vel CD, deſcribe circulum BDE; nam hic tranſiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Hinc circulus etiam deſcribi poteſt, qui duos datos circulos & rectam poſitione datam continget. Sint enim circuli dati RT, SV; eorum centra B, F; & recta poſitione data PQ. Centro F, radio

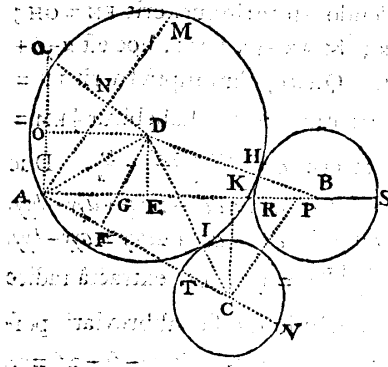
CAPUT XIV.



FS = BR describe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP; & producto eo ad A, ut sit PA = BR, per A age AH parallelam PQ; & circulus describatur qui transeat per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC secantem circulum RT in R; & eodem centro C, radio vero CR, describatur circulus, RS, tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione manifestum est.

PROB. XLVII.

Circulum describere qui per datum punctum transibit, & alios duos positione, & magnitudine datos circulos continget.



ESTO datum punctum A, sintque circuli positione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus describendus AIH, centrum ejus D, & puncta contactûs I & H. Junge AB, AC, AD, DB, secetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC producta circulum TIV in T & V. Et à punctis D & C demissis perpendiculis, DE ad AB, & DF ad AC (occurrente AB in G) atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $AD^q - DB^q + AB^q = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DB^q = AD^q + 2AD \times BR + BR^q$. Aufer hoc de $AD^q + AB^q$, & restabit $AB^q - 2AD \times BR - BR^q$, pro $2AE \times AB$. Est & $AB^q - BR^q = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD$.

Et simili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$. Et $\overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AC} = AF$. Unde, cùm sit AK.AC::AF.AG, erit $AG = \overline{\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}} \times \frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE, sive $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, & restabit $GE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2AK}$. Unde, cùm sit KC.AK::GE.DE, erit $DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP, quæ sit ad AB ut CT ad BR; & erit $\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}$; adeoque $\frac{2PK \times AE}{CT} = \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$: adeoque $DE = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK \times AE}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ = \overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO = \frac{PK \times AE}{KC}$; & erit AO = DE.

Junge DO, DQ, CP; & triangula DOQ, CKP erunt similia, quippe quorum anguli ad O & K sunt recti, & latera (KC.PK:: AE, vel DO.QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales sunt, & proinde QD perpendicularis est ad CP. Quamobrem, si agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK similia; adeoque PC.KC:: AQ.AN. Unde, cùm AQ sit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2KC}$, AN erit $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}} \times \frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M, ut sit NM = AN; & erit AD = DM, adeoque circulus quæsitus transibit per punctum M. Cùm ergo punctum M datum sit, ex his, sine ulteriori Analysi, talis emergit Problematis resolutio.

In AB cape AP, quæ sit ad AB ut CT ad BR; junge CP, eique parallelam age AM, quæ sit ad $\overline{\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M describe circulum, AIHM, qui tangat alterutrum circulorum, TIV, RHS; & idem circulus tanget utrumque. Q.E.F.

Et hinc circulus etiam describi potest, qui tres circulos, positione & magnitudine datos, continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis $B \pm A$, $C \pm A$ describantur duo circuli, & tertius circulus qui hosce tangat, transeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H; & eodem centro H, radio $G \pm A$, describtus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

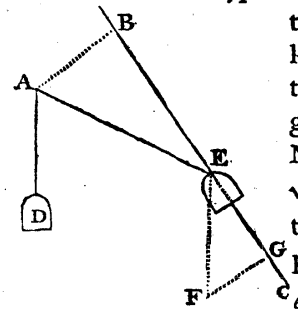
PROBLEMATA GEOMETRICA.

CAPUT XIV.

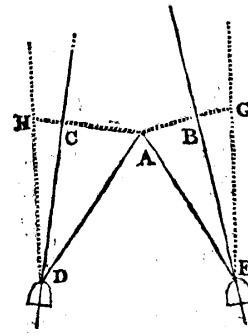
PROB. XLVIII.

Si ad extremitates fili, DAE, *circa paxillum,* A, *labentis, appendantur pondera duo,* D & E, *quorum pondus* E *labitur per lineam obliquam,* BG: *Invenire locum ponderis* E, *ubi pondera hæc in æquilibrio consistunt.*

PUTA factum; & ipsi AD age parallelam EF quæ sit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cùm pondera ex Hypothesi sint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas istas; pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo Corpus E proprii ponderis vi directâ EF tendit versus F; & vi obliquâ EG tendit versus G. Et idem Corpus E ponderis D vi directâ AE trahitur versus A; & vi obliquâ BE trahitur versus B. Cùm itaque pondera se mutuò sustineant in æquilibrio, vis, quâ pondus E trahitur versus B, æqualis esse debet vi contrariæ, quâ tendit versus G; hoc est BE æqualis esse debet ipsi EG. Jam verò datur ratio AE ad EF ex Hypothesi; &, propter datum angulum FEG, datur etiam ratio FE ad EG, cui BE æqualis est. Ergo datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E, facilè dabitur. Nempe dic $AB = a$, $BE = x$, & erit $AE = \sqrt{aa+xx}$. Sit insuper AE ad BE in datâ ratione d ad e; & erit $e\sqrt{aa+xx} = dx$. Et, partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa = ddxx - eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd-ee}} = x$. Inventa est igitur longitudo BE, quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.



Quòd si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, Computum sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ, positione datæ, per quas pondera ista, D & E, descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula, AC, AB; iisque productis occurrant, in punctis G & H, lineæ EG, DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ; & vis quâ pondus E conatur descendere



descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota gravitas ipsius E, erit ad vim quâ pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE, ut GE ad BE; atque vis, quâ conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere, erit ad vim quâ conatur juxta lineam AE descendere, hoc est ad vim quâ filum AE distenditur, ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipsius E erit ad tensionem fili AE ut GE ad AE. Et eâdem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius, DA+AE, longitudo c; sitque pars ejus $AE = x$; & erit altera pars $AD = c-x$. Et quoniam est $AEq - ABq = BEq$; & $ADq - ACq = CDq$; fit insuper $AB = a$, & $AC = b$; & erit $BE = \sqrt{xx-aa}$ & $CD = \sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Adhæc, cùm triangula, BEG, CDH, dentur specie, sit BE.EG::f.E; & CD.DH::f.g; & erit $EG = \frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}$; & $DH = \frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Quamobrem cùm sit GE. AE:: pondus E. tensionem AE; et HD. AD:: pondus D. tensionem AD, & tensiones istæ æquentur inter se, erit $\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}}$ = tensioni AE = tensioni AD = $\frac{Dc-Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit

$gx\sqrt{xx-2cx+cc-bb} = Dc-Dx\sqrt{xx-aa}$; sive $\frac{gg}{DD}x^4 - \frac{2ggc}{2DDc}x^3 \begin{matrix} +ggcc \\ -ggbb \\ -DDcc \\ +DDaa \end{matrix} xx$

$-2DDcaax + DDccaa = 0$.

Si casum desideras quo hoc Problema per Regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$; & evadet $g = D$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc, $\frac{aa}{bb}xx - 2aacx + aacc = 0$; sive $x = \frac{ac}{a+b}$.

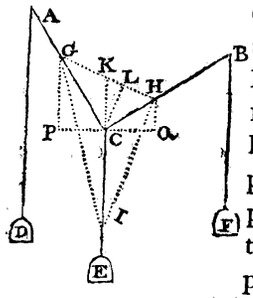
PROBLEMATA GEOMETRICA.

CAPUT XIV.

PROB. XLIX.

Si ad filum, DACBF, *circa paxillos duos,* A, B, *labile, appendantur tria pondera,* D, E, F; D & F *ad extremitates fili,* & E *ad medium ejus punctum,* C, *inter paxillos positum: Ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti* C, *ad quod medium pondus appenditur, ubi pondera consistunt in æquilibrio.*

CUM tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF; tensiones filorum, AC, BC, EC, erunt ut pondera, D, F, E. In eâdem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC, donec ea occurrat GH in K, & erit GK=KH, & CK=½CI, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare, PQ; & huic à punctis G & H perpendicularia, GP, HQ. Et si vis, quâ filum AC vi ponderis D trahit punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis, quâ filum istud trahet idem punctum versus P, exponetur per lineam CP; & vis, quâ trahit illud versus K, exponetur per lineam GP. Et similiter vires, quibus filum BC vi ponderis F trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis, quâ filum CE vi ponderis E trahit punctum illud C versus E, exponetur per lineam CI. Jam cùm punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium, quibus fila AC & BC simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ, quâ filum EC trahit punctum illud versus E; hoc est summa, GP+HQ, æqualis erit ipsi CI: & vis, quâ filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ, quâ filum BC trahit idem punctum C versus Q; hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cùm PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam GK=KH, & CK $(=\frac{GP+HQ}{2})=\frac{1}{2}$CI. Quod erat ostendendum. Restat itaque triangulum GCH determinandum; cujus latera, GC & HC, dantur, unà cum lineâ CK, quæ à vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque à vertice, C, ad basem, GH,

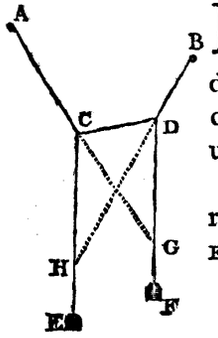


PROBLEMATA GEOMETRICA.

GH, perpendiculum CL; & erit $\frac{GC^q-CH^q}{2GH}=KL=\frac{GC^q-KC^q-GK^q}{2GK}$. Pro 2GK scribe GH, &, rejecto communi divisore GH, & ordinatis terminis, erit $GC^q-2KC^q+CH^q=2GK^q$; sive $\sqrt{\frac{1}{2}GC^q-KC^q+\frac{1}{2}CH^q}=GK$. Invento GK vel KH, dantur simul anguli GCK, KCH, sive DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis istis angulis, DAC, FBC, duc lineas, AC, BC, concurrentes in puncto C: & istud C erit punctum quod quæritur.

Cæterùm quæstiones omnes, quæ sunt ejusdem generis, non semper opus est per Algebram figillatim solvere, sed ex solutione unius plerumque confectatur solutio alterius. Ut si jam proponeretur hæc quæstio.

Filo, ACDB, *in datas partes,* AC, CD, DB, *diviso, & extremitatibus ejus ad paxillos duos,* A, B, *positione datos ligatis, si ad puncta divisionum,* C *ac* D, *appendantur pondera duo,* E & F; *ex dato pondere* F, & *situ punctorum* C *ac* D, *cognoscere pondus* E.



EX præcedentis Problematis solutione satis facilè colligetur hæcce solutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE, in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et hinc obiter patet ratio componendi stateram ex solis filis, quâ pondus corporis cujusvis E, ex unico dato pondere F cognosci potest.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex sono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoscere.

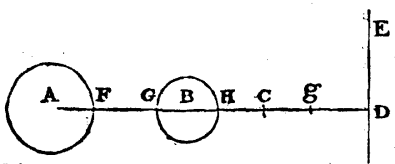
SIT altitudo putei x; & si lapis motu uniformiter accelerato descendat per spatium quodlibet datum a in tempore dato b, & sonus motu uniformi transeat per idem spatium datum a in tempore dato d, lapis descendet per spatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$; sonus autem, qui fit à lapide in fundum putei impingente, ascendet

CAPUT XIV. det per idem ſpatium x, in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim ſunt ſpatia gravibus decidentibus deſcripta, ita ſunt quadrata temporum deſcenſûs. Vel ut radices ſpatiorum, hoc eſt ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita ſunt ipſa tempora. Et ut ſpatia x & a, per quæ ſonus tranſit, ita ſunt tempora tranſitûs. Ex horum temporum, $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$, ſummâ, conflatur tempus à lapide demiſſo ad ſoni reditum. Hoc tempus ex obſervatione cognoſci poteſt. Sit ipſum t; & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{\sqrt{ax}} = t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. Et, per reductionem, $xx = \frac{2adt+abb}{dd}x - \frac{aatt}{dd}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{adt+\frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}\sqrt{bb+4dt}$.

PROB. LI.

Dato globo A, *poſitione parietis* DE, *& centri globi* B; *à pariete diſtantiâ* BD; *invenire molem globi* B, *eâ lege, ut in ſpatiis liberis, & vi gravitatis deſtitutis, ſi globus* A, *cujus centrum in lineâ* BD, *quæ ad parietem perpendicularis eſt, ultra* B *productâ conſiſtit, uniformi cum motu verſus* D *feratur, donec is impingat in alterum quieſcentem globum* B; *globus iſte* B, *poſtquam reflectitur à pariete, denuò occurrat globo* A *in dato puncto* C.

SIT globi A celeritas ante reflectionem a, & erit per PROB. XII. celeritas globi A poſt reflectionem $= \frac{aA-aB}{A+B}$, & celeritas globi B poſt reflexionem $= \frac{2aA}{A+B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B eſt ut A − B ad 2A. In GD cape $gD = GH$ diametro nempe globi B; & celeritates iſtæ erunt ut GC ad $Gg+gC$. Nam ubi Globus A impegit in globum B; punctum G, quod in ſuperficie globi B exiſtens movetur in lineâ AD, perget per ſpatium Gg, antequam globus ille B impinget in parietem, & per ſpatium gC poſtquam à pariete reflectitur (hoc eſt per totum ſpatium $Gg+gC$) in eodem tempore quo globi A punctum F perget per ſpatium GC:



GC: eò ut globus uterque rurſus conveniant, & in ſe mutuò impingant, in puncto dato C. Quamobrem cùm dentur intervalla BC & CD, dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$; & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC - 2gD = GB + BD + DC - 2GH = x + n - 4x$, ſeu $= n - 3x$. Suprà erat A − B ad 2A ut celeritas globi A ad celeritatem globi B; & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg+gC$; adeoque A − B ad 2A ut GC ad $Gg+gC$. Ergo cùm ſit $GC = m+x$, & $Gg + gC = n-3x$, erit A − B ad 2A ſicut $m+x$ ad $n-3x$. Porrò globus A eſt ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB; hoc eſt, ſi ponas radium AF eſſe s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3 - x^3 . 2s^3$ (:: A − B. 2A) :: $m+x . n-3x$. Et, ductis extremis & mediis in ſe, habebitur æquatio $s^3n - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2s^3x$. Et, per reductionem, $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \overset{+s^3n}{-2s^3m} = 0$. Cujus æquationis conſtructione dabitur globi B ſemidiameter x; quo dato, datur etiam Globus ille. Q. E. F.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Nota verò, quòd ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet ſignum quantitatis $2m$ mutari, & ſcribi $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \overset{+s^3n}{+2s^3m} = 0$.

Si datus eſſet Globus B, & quæreretur Globus A, eâ lege, ut globi duo poſt reflexionem convenirent in C, quæſtio foret facilior. Nempe in inventâ æquatione noviſſimâ ſupponendum eſſet x dari & s quæri. Quâ ratione per debitam reductionem illius æquationis, tranſlatis terminis $-5s^3x + s^3n - 2s^3m$ ad æquationis partem contrariam, ac diviſâ utrâque parte per $5x - n + 2m$, emergeret $\frac{3x^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Ubi per ſolam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

Quòd ſi dato Globo utroque quæreretur punctum C, in quo poſt reflexionem ambo in ſe mutuò impingerent: cùm ſuprà fuerit A − b ad 2A ut GC ad $Gg + gC$; ergo, invertendo & componendo, 3A − B erit ad A − B ut $2Gg$ ad diſtantiam quæſitam GC.

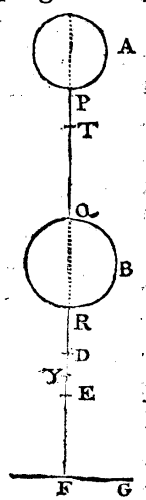
PROB.

CAPUT XIV.

PROB. LII.

Si globi duo, A & B, *tenui jungantur filo,* PQ, & *pendente globo* B *à globo* A, *ſi demittatur globus* A, *ita ut globus uterque ſimul ſolâ gravitatis vi, in eâdem lineâ perpendiculari* PQ *cadere incipiat; dein globus inferior* B, *poſtquam à fundo, ſeu plano horizontali* FG, *ſurſùm reflectitur, ſuperiori decidenti globo* A *occurrat in puncto quodam,* D: *ex datâ fili longitudine* PQ, & *puncti illius,* D, *à fundo diſtantiâ,* DF, *invenire altitudinem,* PF, *à quâ globus ſuperior,* A, *ad hunc effectum demitti debet.*

SIT fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F ſurſùm cape FE æqualem globi inferioris diametro QR; ita ut cùm globi illius punctum infimum, R, incidit in fundum ad F, punctum ejus ſupremum, Q, occupet locum E; ſitque ED diſtantia, per quam globus ille, poſtquam à fundo reflectitur, aſcendendo tranſit, antequam globo ſuperiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo diſtantiam, DF, globique inferioris diametrum, EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $= b$. Sitque altitudo, quam globus ille inferior, antequam impingit in fundum, cadendo deſcribit (RF vel QE) $= x$, ſiquidem ea ignoretur. Et invento x, ſi eidem addantur EF & PQ, habebitur altitudo PF, à quâ globus ſuperior ad effectum deſideratum demitti debet.



Cùm igitur ſit PQ $= a$, & QE $= x$, erit PE $= a + x$. Aufer DE, ſeu b, & reſtabit PD $= a + x - b$. Eſt autem tempus deſcenſûs globi A ut radix ſpatii cadendo deſcripti, ſeu $\sqrt{a + x - b}$; & tempus deſcenſûs globi alterius, B, ut radix ſpatii cadendo deſcripti, ſeu $\sqrt{x}$; & tempus aſcenſûs ejuſdem ut differentia radicis illius & radicis ſpatii, quod cadendo tantùm à Q ad D deſcriberetur. Nam hæc differentia eſt ut tempus deſcenſûs à D ad E; quod æquale eſt tempori aſcenſûs ab E ad D. Eſt autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Unde tempus deſcenſûs & aſcenſûs conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Quamobrem, cùm hoc tempus æquetur tempori deſcenſûs globi ſuperioris, erit $\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{}$

$4\sqrt{xx - bx}$, ſeu $a = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$; &, ordinatâ æquatione, $4x - a = 4\sqrt{xx - bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, ſeu $aa = 8ax - 16bx$. Et, diviſis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a - 16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x, ſeu QE. Q. E. I.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Quòd ſi ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ, ſeu a; eadem æquatio, $aa = 8ax - 16bx$, extrahendo affectam radicem quadraticam, daret $a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$. Id eſt, ſi ſumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit PQ $=$ 4EY. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x \times x - b}$, ſeu $\sqrt{xx - bx}$; quod ſubductum de x, ſeu QE, relinquit EY; cujus quadruplum eſt $4x - 4\sqrt{xx - bx}$.

Sin verò ex datis tum QE, ſeu x, tum fili longitudine PQ, ſeu a, quæreretur punctum D, in quo globus ſuperior in inferiorem incidit: puncti illius à dato puncto E diſtantia DE, ſeu b, è præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur; transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum ſignis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ita a ad b, & habebitur b, ſeu DE.

Hactenus ſuppoſui globos tenui filo connexos ſimul dimitti. Quòd ſi nullo connexi filo diverſis temporibus dimittantur, ita ut globus ſuperior A, verbi gratiâ, priùs dimiſſus, deſcenderit per ſpatium PT, antequam globus alter incipiat cadere; & ex datis diſtantiis, PT, PQ, ac DE quæratur altitudo, PF, à quâ globus ſuperior dimitti debet, eâ lege ut in inferiorem incidat ad punctum D: ſit PQ $= a$, DE $= b$, PT $= c$, & QE $= x$; & erit PD $= a + x - b$ ut ſuprà. Et tempora, quibus globus ſuperior cadendo deſcribat ſpatia PT ac TD, & globus inferior priùs cadendo dein reaſcendendo deſcribat ſummam ſpatiorum QE + ED, erunt ut $\sqrt{}$PT, $\sqrt{}$PD $-$ $\sqrt{}$PT, & $2\sqrt{}$QE $-$ $\sqrt{}$QD; hoc eſt, ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$, & $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. At ultima duo tempora, propterea quòd ſpatia, TD, & QE + ED, ſimul deſcribuntur, æqualia ſunt. Ergo $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Et partibus quadratis, $a + c - 2\sqrt{ca + cx - cb} = 4x - 4\sqrt{xx - bx}$. Pone $a + c = e$, & $a - b = f$; & erit, per debitam reductionem, $4x - e + 2\sqrt{cf + cx} = 4\sqrt{xx - bx}$; &, partibus quadratis, $ee - 8ex + 16xx + 4cf + 4cx$

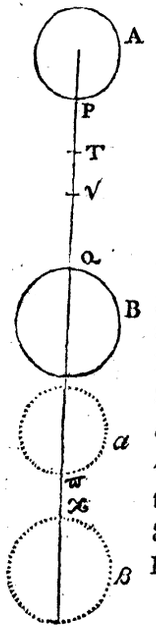
CAPUT XIV. $+4cx+\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$, & pro $ee+4cf$ ſcripto m, nec non pro $8e-16b-4c$ ſcripto n, habebitur, per debitam reductionem, $\overline{16x-4e}\sqrt{cf+cx}=nx-m$. Et partibus quadratis, $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex=nnxx-2mnx+mm$. Et, ordinatâ æquatione,

$$256cx^3-128cexx+\begin{matrix}+256cf\\-nn\end{matrix}\begin{matrix}-128cef\\+2mn\end{matrix}+\begin{matrix}16ceex\\-mm\end{matrix}+16ceef=0.$$

Cujus æquationis conſtructione, dabitur x ſeu QE; cui ſi addas datas diſtantias, PQ, & EF, habebitur altitudo PF, quam oportuit invenire.

PROB. LIII.

Si globi duo quieſcentes, ſuperior A, *& inferior* B, *diverſis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat, ubi ſuperior cadendo jam deſcripſit ſpatium* PT; *invenire loca* α, β, *quæ globi illi cadentes occupabunt, ubi eorum intervallum,* $\varpi\chi$, *dato æquale eſt.*



CUM dentur diſtantiæ, PT, PQ, & $\varpi\chi$, dic primam a, ſecundam b, tertiam c; & pro P. ϖ, ſeu ſpatio quod globus ſuperior, antequam pervenit ad locum quæſitum α, cadendo deſcribit, ponatur x. Jam tempora, quibus globus ſuperior deſcribit ſpatia, PT, Pϖ, Tϖ, & inferior ſpatium Qχ, ſunt ut $\sqrt{\text{PT}}$, $\sqrt{\text{P}\varpi}$, $\sqrt{\text{P}\varpi}-\sqrt{\text{PT}}$, & $\sqrt{\text{Q}\chi}$. Quorum temporum poſteriora duo, eo quòd globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia Tϖ & Qχ, ſunt æqualia. Unde & $\sqrt{\text{P}\varpi}-\sqrt{\text{PT}}$ æquale erit $\sqrt{\text{Q}\chi}$. Erat P$\varpi=x$, & PT$=a$; & ad Pϖ addendo $\varpi\chi$, ſeu c, & à ſummâ auferendo PQ, ſeu b, habebitur Q$\chi=x+c-b$. Quamobrem, his ſubſtitutis, fiet $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt{x+c-b}$. Et æquationis partibus quadratis, orietur $x+a-2\sqrt{ax}=x+c-b$. Ac, deleto utrobique x, & ordinatâ æquatione, habebitur $a+b-c=2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a+b-c$ æquale

quale $4ax$, & quadratum illud diviſum per $4a$ æquale x; ſeu $4a$ ad $a+b-c$ ſicut $a+b-c$ ad x. Ex invento autem x, ſeu Pϖ, datur globi ſuperioris decidentis locus quæſitus α. Et per locorum diſtantiam ſimul datur etiam locus inferioris β. PROBLEMATA GEOMETRICA.

Et hinc ſi punctum quæratur, ubi globus ſuperior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo diſtantiam $\varpi\chi$ nullam eſſe, ſeu delendo c, dic $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, ſeu Pϖ; & punctum ϖ erit quod quæris.

Et viciſſim ſi detur punctum illud ϖ, vel χ, in quo globus ſuperior incidit in inferiorem, & quæratur locus, T, quem ſuperioris globi decidentis punctum imum, P, tunc occupabat, cùm globus inferior incipiebat cadere: quoniam eſt $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, ſeu, ductis extremis & mediis in ſe, $4ax=aa+2ab+bb$; &, per æquationis debitam ordinationem, $aa=4ax-2ab-bb$: extrahe radicem quadraticam, & proveniet $a=2x-b-2\sqrt{xx-bx}$. Cape ergo Vϖ mediam proportionalem inter Pϖ & Qϖ, & verſus V cape VT$=$VQ, & erit T punctum quod quæris. Nam Vϖ erit $=\sqrt{\text{P}\varpi\times\text{Q}\varpi}$; hoc eſt$=\sqrt{x\times x-b}$, ſeu$=\sqrt{xx-bx}$; cujus duplum ſubductum de $2x-b$, ſeu de $2\text{P}\varpi-\text{PQ}$, hoc eſt de $\text{PQ}+2\text{Q}\varpi$, relinquit PQ$-2$VQ, ſeu PV$-$VQ, hoc eſt PT.

Si denique globorum, poſtquam ſuperior incidit in inferiorem, & impetu in ſe invicem facto inferior accelèratur, ſuperior retardatur, deſiderantur loci, ubi inter cadendum diſtantiam datæ rectæ æqualem acquirent: quærendus erit primò locus, ubi ſuperior impingit in inferiorem; dein, ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum, ubi in ſe impingunt, celeritatibus, inveniendæ ſunt celeritates, quas proxime poſt reflexionem habebunt; idque per modum PROB. XII. Poſtea quærenda ſunt loca ſumma, ad quæ globi celeritatibus hiſce, ſi ſurſum ferantur, aſcenderent; & inde cognoſcentur ſpatia, quæ globi datis temporibus poſt reflexionem cadendo deſcribent, ut & differentia ſpatiorum: & viciſſim, ex aſſumptâ illâ differentiâ, per Analyſin regredietur ad ipſa ſpatia cadendo deſcripta.

Ut ſi globus ſuperior incidit in inferiorem ad punctum π, & poſt reflexionem celeritas ſuperioris deorſum tanta ſit, ut ſi ſurſum

CAPUT XIV.

M
N
π
G
H

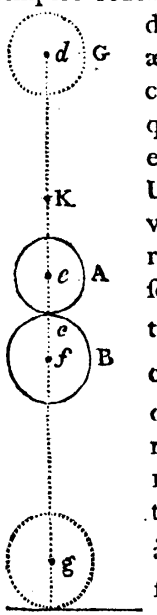
ſum eſſet, aſcendere faceret globum illum per ſpatium πN, & inferioris celeritas deorſum tanta eſſet, ut, ſi ſurſum eſſet, aſcendere faceret globum illum inferiorem per ſpatium πM; tum tempora, quibus globus ſuperior viciſſim deſcenderet per ſpatia Nπ, NG, & inferior per ſpatia Mπ, MH, forent ut $\sqrt{N\pi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\pi}$, $\sqrt{MH}$; adeoque tempora, quibus globus ſuperior conficeret ſpatium πG, & inferior ſpatium πH, forent ut $\sqrt{NG}-\sqrt{N\pi}$, ad $\sqrt{MH}-\sqrt{M\pi}$. Pone hæc tempora æqualia eſſe, & erit $\sqrt{NG}-\sqrt{N\pi}=\sqrt{MH}-\sqrt{M\pi}$. Et inſuper, cùm detur diſtantia GH, pone $\pi G+GH=\pi H$. Et harum duarum æquationum reductione ſolvetur problema. Ut ſi ſit $M\pi=a$, $N\pi=b$, $GH=c$, $\pi G=x$; erit, juxta poſteriorem æquationem, $x+c=\pi H$. Adde $M\pi$; fiet $MH=a+c+x$. Ad πG adde Nπ, & fiet $NG=b+x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem, erit $\sqrt{b+x}-\sqrt{b}=\sqrt{a+c+x}-\sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; & æquatio fiet $\sqrt{b+x}=\sqrt{e+x}-\sqrt{f}$. Et, partibus quadratis, $b+x=e+x+f-2\sqrt{ef+fx}$, ſeu $e+f-b=2\sqrt{ef+fx}$. Pro $e+f-b$ ſcribe g, & fiet $g=2\sqrt{ef+fx}$; &, partibus quadratis, $gg=4ef+4fx$; &, per reductionem, $\frac{gg}{4f}-e=x$.

PROB. LIV.

Si duo ſint globi, A, B, *quorum ſuperior,* A, *ab altitudine,* G, *decidens, in alterum inferiorem,* B, *à fundo,* H, *verſus ſuperiora reſilientem, incidat; & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuò recedant, ut globus* A, *vi reflexionis illius, ad altitudinem priorem,* G, *redeat, idque eodem tempore quo globus inferior,* B, *ad fundum,* H, *revertitur; dein globus* A *rurſùs decidat, & in globum* B, *à fundo reſilientem, denuò incidat, idque in eodem loco,* AB, *ubi priùs in ipſum incidebat; & ſic perpetuò globi ab invicem reſiliant, rurſuſque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, poſitione fundi & loco* G, *à quo globus ſuperior decidit, invenire locum ubi globi in ſe mutuò impingent.*

SIT e centrum globi A, & f centrum globi B; d centrum loci G, in quo globus ſuperior in maximâ eſt altitudine; g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit; a ſemidiameter

meter globi A, b ſemidiameter globi B, c punctum contactûs globorum in ſe mutuò impingentium, & H punctum contactûs globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit, quæ generatur caſu globi ab altitudine de; adeoque eſt ut $\sqrt{de}$. Hâc eâdem celeritate reflecti debet globus A verſus ſuperiora, ut ad locum priorem, G, redeat. Et globus B eâdem celeritate deorſum reflecti debet, quâ aſcenderat, ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde receſſerat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales eſſe debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur; adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei, quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde ſi factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proximè ante & poſt reflexionem; ſeu ſub fine aſcenſûs & initio deſcenſûs. Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$; ſeu, cùm globi ſint ut cubi radiorum, ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proximè ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hâc celeritate, ſi occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, aſcenderet, ad altitudinem ed à quâ globus A deſcendit. Hoc eſt ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de, ſeu ut Aq ad Bq, vel a^6 ad b^6, ita altitudo illa prior ad x; ſi modò pro altitudine poſteriore ed ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum, B ſi non impediretur, aſcenderet, eſt $\frac{a^6}{b^6}x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, ſeu $dH-de-ef-gH$; hoc eſt $p-x$, ſi modò pro dato $dH-ef-gH$ ſcribas p, & x pro incognito de; & habebitur $Kg=\frac{a^6}{b^6}x+p-x$. Unde celeritas globi B, ubi decidit à K ad fundum, hoc eſt ubi decidit per ſpatium Kg quod centrum ejus inter decidendum deſcriberet, erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p-x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum, eodem tempore quo globus ſuperior, A, aſcendit à loco Ace ad ſummam altitudinem d,



PROBLEMATA GEOMETRICA.

aut

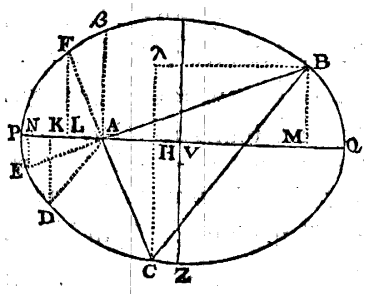
CAPUT XIV. aut viciſſim deſcendit à *d* ad locum A*ce*; & proinde, cùm gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B deſcendendo ad fundum tantùm augebitur, quanta eſt celeritas tota, quam globus A eodem tempore cadendo à *d* ad *e* acquirat, vel aſcendendo ab *e* ad *d* amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco B*cf* adde celeritatem, quam globus A habet in loco A*ce*; & ſumma, quæ eſt ut $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ſeu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B, ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x + p - x}$. Pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ ſcribe $\frac{r}{s}$; & pro $\frac{a^6-b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$; & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rt}{ss}x + p}$; &, partibus quadratis, $\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in *ss*, ac divide per *rr*−*rt*; & orietur $x = \frac{ssp}{rr-rt}$. Quæ quidem æquatio prodiiſſet ſimplicior, ſi modò aſſumpſiſſem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$: prodiiſſet enim $\frac{ss}{p-t} = x$. Unde faciendo ut ſit *p*−*t* ad *s* ut *s* ad *x*, habebitur *x*, ſeu *ed*; cui ſi addas *ec*, habebitur *dc*, & punctum *c* in quo globi in ſe mutuò impingent. Q. E. F.

PROB. LV.

Erectis alicubi terrarum tribus baculis, ad Horizontale planum in punctis A, B, & C, *perpendicularibus, quorum is qui in* A *ſit ſex pedum, qui in* B *octodecim pedum, & qui in* C *octo pedum, exiſtente lineâ* AB *triginta trium pedum: contingit quodam die extremitatem umbræ baculi* A, *tranſire per puncta* B & C; *baculi autem* B *per* A & C; *ac baculi* C *per punctum* A. *Quæritur declinatio ſolis & elevatio Poli, ſive dies locuſque, ubi hæc evenerint?*

QUoniam umbra baculi cujuſque deſcripſit Conicam ſectionem, ſectionem nempe Coni radioſi cujus vertex eſt baculi ſummitas; fingam BCDEF eſſe hujuſmodi curvam (ſive ea ſit Hyperbola, Parabola vel Ellipſis) quam umbra baculi A eo die deſcripſit; ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuiſſe cùm BC, BA, CA reſpectivè fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ eſſe lineam Meridionalem, ſive axem hujus curvæ, ad quem demiſſæ perpendiculares, BM, CH, DK, EN, & FL, ſunt ordinatim

dinatim applicatæ. Has verò ordinatim applicatas indefinitè deſignabo literâ *y*, & axis partes interceptas, AM, AH, AK, AN, & AL, literâ *x*. Fingam denique æquationem $aa \pm bx + cxx = yy$, ipſarum *x* & *y* relationem (*i. e.* naturam Curvæ) deſignare, aſſumendo *aa*, *b* & *c* tanquam cognitas, ut ex Analyſi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates *x* & *y*, duarum tantùm dimenſionum poſui, quia æquatio eſt ad Conicam ſectionem; & ipſius *y* dimenſiones impares omiſi, quia ipſa eſt ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipſorum *b* & *c*, quia indeterminata ſunt, deſignavi notulâ ±, quam indifferenter pro + aut − uſurpo, & ejus oppoſitum ∓ pro ſigno contrario. At ſignum quadrati *aa* affirmativum poſui, quia baculum A, umbras in adverſas plagas (C & F, B & E) projicientem, concava pars curvæ neceſſariò complectitur; & proinde ſi ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ, hoc alicubi occurret curvæ, puta in β; hoc eſt, ordinatim applicata *y*, ubi *x* nullum eſt, erit reale. Nam inde ſequitur, quadratum ejus, quod in eo caſu eſt *aa*, affirmativum eſſe.



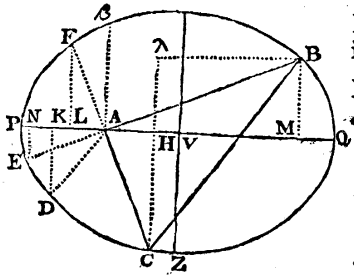
PROBLEMATA GEOMETRICA.

Conſtat itaque quòd æquatio hæc fictitia $aa \pm bx \pm cxx = yy$, ſicut terminis ſuperfluis non referta, ſic neque reſtrictior eſt, quàm ut ad omnes hujus problematis conditiones ſe extendat, Hyperbolam, Ellipſin vel Parabolam quamlibet deſignatura, prout ipſorum *aa*, *b*, *c*, valores determinabuntur, aut nulli fortè reperientur. Quid autem valent, quibuſque ſignis *b* & *c* debent affici, & inde quænam ſit hæc curva, ex ſequenti Analyſi conſtabit.

Analyſeos pars prior.

Cum umbræ ſint ut altitudines baculorum erit BC. AD :: AB. AE (:: 18. 6.) :: 3. 1. Item CA. AF (:: 8. 6.) :: 4. 3. Quare nominatis AM=*r*, MB=*s*, AH=*t*, & HC = ∓*v*; ex ſimilitudine triangulorum, AMB, ANE, & AHC, ALF, erunt $AN = -\frac{r}{3}$. $NE = -\frac{s}{3}$. $AL = -\frac{3t}{4}$. Et $LF = \mp\frac{3v}{4}$: quarum ſigna ſignis ipſarum, AM, MB, AH, HC, contraria poſui, quia tendunt ad contrarias plagas reſpectu puncti

CAPUT XIV.



puncti A, à quo ducuntur, axiſve PQ cui inſiſtunt. His autem pro x & y in æquatione fictitiâ, $aa \pm bx \pm cxx = yy$, reſpectivè ſcriptis,

r & s dabunt $aa \pm br \pm crr = ss$.

$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa \mp \frac{br}{3} + \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss$.

t & $\pm v$ dabunt $aa \pm bt + ctt = vv$.

$-\frac{3}{4}t$ & $\pm\frac{3}{4}v$ dabunt $aa \pm \frac{3}{4}bt + \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Jam è primâ & ſecundâ harum, exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{\pm b} = r$: unde patet $\pm b$ eſſe affirmativum. Item è tertiâ & quartâ, exterminando vv ut obtineatur t, prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et ſcriptis inſuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in primâ, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertiâ, oriuntur $3aa \pm \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \pm \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

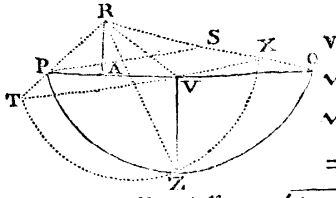
Porrò demiſſâ BΛ perpendiculari in CH, erit BC. AD (:: 3. 1.) :: BΛ. AK :: CΛ. DK. Quare, cùm ſit BΛ $(= AM - AH = r - t) = \frac{5aa}{3b}$, erit AK $= \frac{5aa}{9b}$; vel potiùs $= -\frac{5aa}{9b}$. Item, cùm ſit CΛ $(= CH \pm BM = v \pm s) = \sqrt{\frac{4aa}{3} \pm \frac{a^4c}{9bb}} + \sqrt{3aa \pm \frac{4a^4c}{bb}}$, erit DK $(= \frac{1}{3}C\Lambda) = \sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} + \sqrt{\frac{1}{3}aa \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione, $aa + bx \pm cxx = yy$, pro AK ac DK, ſive x, & y, reſpectivè ſcriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \pm \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa \pm \frac{37a^4c}{81bb} + 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et, per reductionem, $-bb \mp 4aac = \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51aabbc + 4a^4cc}$; &, partibus quadratis, iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 \pm 196aabbc$, ſive $\frac{\mp 143bb}{196aa} = \pm c$. Unde conſtat $\pm c$ negativam eſſe, adeoque æquationem fictitiam, $aa \pm bx \pm cxx = yy$, hujus eſſe formæ, $aa + bx - cxx = yy$; & ideo curvam quam deſignat Ellipſin eſſe. Ejus vero centrum & axes duo ſic eruuntur.

Ponendo $y = 0$ (ſicut in Figuræ verticibus P & Q contingit) habebitur $aa + bx = cxx$; &, extractâ radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = \frac{AQ}{AP}$. Adeoque ſumpto AV $= \frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipſis, & VQ vel VP $(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}})$ ſemiaxis maximus. Si porrò ipſius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in

in æquatione, $aa + bx - cxx = yy$, ſcribatur, fiet $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Quare eſt $aa + \frac{bb}{4c} = VZq$, hoc eſt, quadrato ſemiaxis minimi. Denique in valoribus ipſarum, AV, VQ, VZ, jam inventis, ſcripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c, exeunt $\frac{98aa}{143b} = AV$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b} = VQ$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$. PROBLEMATA GEOMETRICA.

Analyſeos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A inſiſtens eſſe AR, & erit RPQ planum meridionale, ac RPZQ conus radioſus, cujus vertex eſt R. Sit inſuper TXZ planum ſecans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX; quæ ſectio ſit ad axem mundi conive perpendicularis; & ipſum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum ſecabit in peripheriâ circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo, RX, RZ, RT, diſtabit. Quamobrem, ſi PS ipſi TX parallela ducatur, fiet RS = RP, propter æquales, RX, RT; nec non SX = XQ, propter æquales, PV, VQ. Unde eſt RX, vel RZ $(= \frac{RS+RQ}{2}) = \frac{RP+RQ}{2}$. Denique ducatur RV; & cùm VZ perpendiculariter inſiſtat plano RPQ, (ſectio utique exiſtens planorum eidem perpendiculariter inſiſtentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.



Dictis jam RA $= d$, AV $= e$, VP, vel VQ, $= f$, & VZ $= g$; erit AP $= f - e$, & RP $= \sqrt{ff - 2ef + ee + dd}$. Item AQ $= f + e$, & RQ $= \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}$: adeoque RZ $(= \frac{RP+RQ}{2}) = \frac{\sqrt{ff-2ef+ee+dd} + \sqrt{ff+2ef+ee+dd}}{2}$. Cujus quadratum $\frac{dd+ee+ff}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4}$, eſt æquale $(RVq + VZq = RAq + AVq + VZq =) dd + ee + gg$. Jam, reductione factâ, eſt $\sqrt{f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4} = dd + ee - ff + 2gg$; &, partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff = ddgg + eegg - ffgg + g^4$; ſive $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipſorum AR, AV, VQ, & VZ) pro d, e, f, ac g reſtitutis, oritur $36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14aa}{143bb}$; & inde, per reductionem, $\frac{49a^4 + 36 \times 49aa}{48aa + 1287} = bb$.

CAPUT XIV. In primo Schemate est $AMq+MBq=ABq$, hoc est $rr+ss=33\times 33$. Erat autem $r=\frac{2aa}{b}$, & $ss=3aa-\frac{4a^4c}{bb}$; unde $rr=\frac{4a^4}{bb}$, & (substituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss=\frac{4aa}{49}$: quare $\frac{4a^4}{bb}+\frac{4aa}{49}=33\times 33$: & inde, per reductionem, iterum resultat $\frac{4\times 49a^4}{53361-4aa}=bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49, fit $\frac{a^4+36aa}{48aa+1287}=\frac{4b^4}{53361-4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac divisis per 49, exit $4a^4=981aa+39204$, cujus radix aa est $\frac{981+\sqrt{1589625}}{8}=280\frac{1}{2}\frac{2254144}{}$.

Suprà inventum fuit $\frac{4\times 49a^4}{53361-4aa}=bb$, sive $\frac{14aa}{\sqrt{53361-4aa}}=b$. Unde AV $(\frac{98aa}{143b})$ est $\frac{7\sqrt{53361-4aa}}{143}$; & VP vel VQ $(\frac{1122a\sqrt{3}}{143b})$ est $\frac{8}{143}\sqrt{160083-12aa}$. Hoc est, substituendo $280\frac{1}{2}\frac{2254144}{}$ pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, AV $=111\frac{1}{2}\frac{188297}{}$; & VP vel VQ $=22\frac{1}{2}\frac{147085}{}$. Adeoque AP (PV − AV) $=10\frac{1}{2}\frac{958788}{}$; & AQ (AV+VQ) $33\frac{1}{2}\frac{335382}{}$.

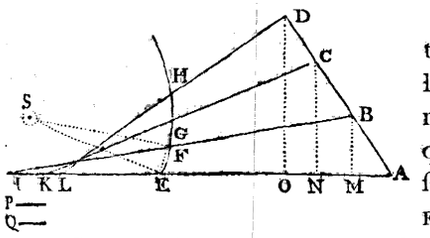
Denique si $\frac{1}{6}$ AR, sive 1, ponatur radius, erit $\frac{1}{6}$ AQ, sive $5\frac{1}{2}\frac{555897}{}$, tangens anguli ARQ, 79 gr. 47′. 48″; & $\frac{1}{6}$ AP, sive $1\frac{1}{2}\frac{826465}{}$, tangens anguli ARP, 61 gr. 17′. 57″. Quorum angulorum semisumma, 70 gr. 32′. 52″, est complementum declinationis solis; & semidifferentia, 9 gr. 14′. 56′, complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio solis erat 19 gr. 27′. 8″; & Latitudo loci 80 gr. 45′. 4″. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E Cometæ, motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis, locis quatuor observatis, distantiam à terrâ, motúsque determinationem, in Hypothesi Copernicæâ colligere.

SI è centro Cometæ, in locis quatuor observatis, ad planum Ecliptice demittantur totidem perpendicula; sintque A, B, C, D, puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; per puncta illa agatur recta AD, & hæc secabitur à perpendiculis in eâdem ratione cum lineâ quam Cometa motu suo describit; hoc est, ita ut sit AB ad AC ut tempus inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam ac tertiam; & AB ad AD ut tempus

tempus illud inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam & quartam. Ex observationibus itaque dantur rationes linearum, AB, AC, AD, ad invicem. PROBLEMATICA GEOMETRICA.



Insuper in eodem Ecliptice plano sit S Sol; EH arcus lineæ Ecliptice in quâ terra movetur; E, F, G, H, loca quatuor terræ temporibus observationum; E locus primus, F secundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur, donec tres posteriores priorem secent in I, K & L; BF in I, CG in K, DH in L: et erunt anguli, AIB, AKC, ALD, differentiæ longitudinum observatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & secundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex observationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; &, ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore observationis primæ. Quare si complementum ejus ad duos rectos, nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli unà cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et simili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur positione lineæ quatuor, AI, BI, CK, DL; adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor positione datis, quintam inveniamus, quæ ab his in datâ ratione secabitur.

Demissis ad AI perpendiculis, BM, CN, DO, ob datum angulum AIB, datur ratio BM ad MI. Est & BM ad CN in datâ ratione BA ad CA; &, ob datum angulum CKN, datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI−KN, hoc est ad MN+IK. Cape P ad IK ut est AB ad BC; &, cùm sit MA ad MN in eâdem ratione, erit etiam P+MA ad IK+MN in eâdem ratione; hoc est in ratione datâ. Quare datur ratio BM ad P+MA. Et simili argumento, si capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q+MA. Et proinde ratio BM ad ipsorum

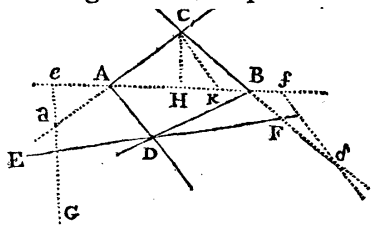
CAPUT XIV. forum P+MA & Q+MA differentiam quoque dabitur. At differentia illa, nempe P−Q vel Q−P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, simul dantur P+MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem, quæ sit ad lineam EA, ut tangens latitudinis Cometæ in observatione primâ ad radium; & istius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in observatione primâ. Unde datur distantia Cometæ à Terrâ tempore illius observationis. Et eodem modo, si è puncto B erigatur perpendicularis, quæ sit ad lineam BF, ut tangens latitudinis Cometæ in observatione secundâ ad radium, habebitur locus centri Cometæ in observatione illâ secundâ. Et acta linea à loco primo ad locum secundum ea est, in quâ Cometa per Cœlum trajicit.

PROB. LVII.

Si angulus datus, CAD, *circa punctum angulare,* A, *positione datum, & angulus datus,* CBD, *circa punctum angulare,* B, *positione datum, eâ lege circumvolvantur, ut crura,* AD, BD, *ad rectam positione datam,* EF, *sese semper intersecent: invenire lineam illam curvam, quam reliquorum crurum,* AC, BC, *intersectio,* C, *describit.*

PRoduc CA ad *d*, ut sit A*d* = AD, & CB ad ∂, ut sit B∂ = BD. Fac angulum A*de* æqualem angulo ADE, & angulum B∂*f* æqualem angulo BDF; & produc AB utrinque, donec ea occurrat *de* & ∂*f* in *e* & *f*. Produc etiam *ed* ad G, ut sit *d*G = ∂*f*; & à puncto C ad lineam AB, ipsi *ed* parallelam, age CH, & ipsi *f*∂ parallelam CK. Et concipiendo lineas *e*G, *f*∂ immobiles manere, dum anguli, CAD, CBD, lege præscriptâ circa polos A & B volvantur, semper erit G*d* æqualis ipsi ∂*f*, & triangulum CHK dabitur specie. Dic itaque A*e* = *a*, *e*G = *b*, B*f* = *c*, AB = *m*, BK = *x*, & CK = *y*. Et erit BK. CK :: B*f*. *f*∂. Ergo *f*∂ = $\frac{cy}{x}$ = G*d*. Aufer hoc de G*e*, & restabit *ed* = *b* − $\frac{cy}{x}$. Cùm detur specie triangulum

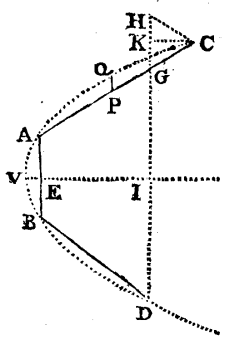


angulum CKH, pone CK. CH :: *d*. *e*; & CH. HK :: *e*. *f*; & erit CH = $\frac{cy}{d}$, & HK = $\frac{fy}{d}$. Adeoque AH = $m - x - \frac{fy}{d}$. Est autem AH. HC :: A*e*. *ed*, hoc est $m - x - \frac{f}{d}y$. $\frac{cy}{d}$ :: *a*. *b* − $\frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in se, fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{acy}{d}$. Duc omnes terminos in *dx*, eosque in ordinem redige; & fiet $\begin{matrix} +dc \\ fcyy - ae\,xy - dcmy - bdxx + bdmx = 0. \\ -fb \end{matrix}$ Ubi, cùm incognitæ quantitates, *x* & *y*, ad duas tantùm dimensiones ascendunt, patet curvam lineam, quam punctum C describit, esse Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae+fb-dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extractâ radice, $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$. Unde colligitur Curvam Hyperbolam esse, si sit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quàm $\frac{pp}{ff}$; Parabolam, si sit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipsin vel Circulum, si sit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quàm $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. LVIII.

Parabolam describere quæ per data quatuor puncta transibit.



SInt puncta illa data A, B, C, D. Junge AB, & eam biseca in E. Et per E age rectam aliquam, VE, quam concipe diametrum esse Parabolæ, puncto V existente vertice ejus. Junge AC, ipsique AB parallelam age DG, occurrentem AC in G. Dic AB = *a*, AC = *b*, AG = *c*, GD = *d*. In AC cape AP cujusvis longitudinis, & à P age PQ parallelam AB: & concipiendo Q punctum esse Parabolæ, dic AP = *x*, PQ = *y*; & æquationem quamvis ad Parabolam assume, quæ relationem inter AP & PQ exprimat: ut quòd sit $y = e + fx \pm \sqrt{gg + bx}$.

Jam

CAPUT XIV.

Jam si ponatur AP sive $x = 0$ (puncto P incidente in ipsum A) fiet PQ, sive $y, = 0$, ut & $= -$ AB. Scribendo autem in æquatione assumptâ 0 pro x, fiet $y = e \pm \sqrt{gg}$, hoc est $= e \pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e+g$, est $= 0$; minor, $e-g, = -$ AB, sive $-a$. Ergo $e = -g$; & $e-g$, hoc est, $-2g, = -a$, sive $g = \frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc, $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bx}$.

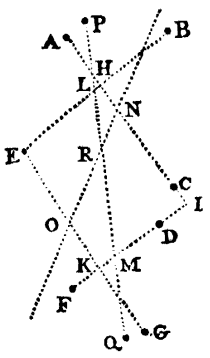
Adhæc si ponatur AP sive $x =$ AC, ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum PQ $= 0$. Pro x igitur in æquatione novissimâ scribe AC sive b, & pro y, 0; & fiet $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, sive $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; &, partibus quadratis, $-afb + ffbb = bb$; sive $ffb - fa = b$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc, $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$.

Insuper si ponatur AP sive $x =$ AG, sive c; fiet PQ, sive $y, = -$ GD, sive $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissimâ scribe c, & $-d$; & fiet $-d = -\frac{1}{2}a + fc - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$; sive $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbc - fac}$. Et, partibus quadratis, $-ad - fac + dd + 2dcf + ccff = ffbc - fac$. Et, æquatione ordinatâ & reductâ, $ff = \frac{2d}{b-c}f + \frac{dd-ad}{bc-cc}$. Pro $b-c$, hoc est pro GC, scribe k; & æquatio illa fiet $ff = \frac{2d}{k}f + \frac{dd-ad}{kc}$. Et extractâ radice, $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{ddc+ddk-adk}{kkc}}$. Invento autem f, æquatio ad Parabolam, *viz.* $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$, plenè determinatur: cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bisecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V; ut sit EV. EI :: EBq. DIq $-$ EBq; & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{BEq}{VE}$ latus rectum Parabolæ quæsitæ.

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.

Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE, se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc



ID ad F, & EK ad G; ut sit AHC. BHE :: AIC. FID :: EKG. FKD; & erunt puncta F ac G in conicâ sectione, ut notum est. Hoc tamen observare debebis, quòd si punctum H cadit inter puncta omnia, A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia, A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia, D, F & E, G, vel extra ea omnia. At si punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E, vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C; debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & similiter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: id quod fiet capiendo IF, KG, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentiâ problematis. Inventis punctis F ac G, bisecа AC, EG in N & O; item BE, FD, in L & M. Junge NO, LM se mutuò secantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ sectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde, si opus est, ad P & Q, ita ut sit BLq. FMq :: PLQ. PMQ; & erunt P & Q vertices Conicæ sectionis & PQ latus transversum. Fac PLQ. LBq :: PQ. T : et erit T latus rectum; quibus cognitis cognoscitur Figura. PROBLEMATA GEOMETRICA.

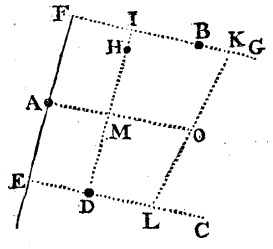
Restat tantùm ut doceamus, quomodo LM hinc inde producenda sit ad P & Q, ita ut fiat BLq FMq :: BLQ. PMQ. Nempe PLQ, sive PL × LQ, est $\overline{PR-LR} \times \overline{PR+LR}$; nam PL est PR $-$ LR, & LQ est RQ $+$ LR, seu PR $+$ LR. Porro $\overline{PR-LR} \times \overline{PR+LR}$ multiplicando fit PRq $-$ LRq. Et ad eundem modum PMQ est $\overline{PR+RM} \times \overline{PR-RM}$, seu PR$q$ $-$ RMq. Ergo BLq. FMq :: PRq $-$ LRq. PRq $-$ RMq; & dividendo BLq $-$ FMq. FMq :: RMq $-$ LRq. PRq $-$ RMq. Quamobrem cùm dentur BLq $-$ FMq, FMq, & RMq $-$ LRq, dabitur PRq $-$ RMq. Adde datum RMq, & dabitur summa PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis est.

PROB.

CAPUT XIV.

PROB. LX.

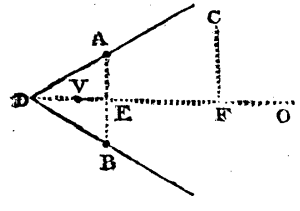
Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per quatuor data puncta, & in uno iſtorum punctorum continget rectam poſitione datam.



SInt puncta quatuor data, A, B, C, D, & recta poſitione data AE, quam conica ſectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta DC; & DC, producta ſi opus eſt, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum, B, ipſi DC age parallelam BF; quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipſi BF in I. In FB, DI, ſi opus eſt productis, cape FG, HI ejus longitudinis, ut ſit AE*q*. CED :: AF*q*. BFG :: DIH. BIG. Et erunt puncta G & H in Conicâ ſectione, ut notum eſt: ſi modò capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in ſuperiore Problemate traditam. Biſeca BG, DC, DH in K, L & M; junge KL, AM ſe mutuò ſecantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad ſemidiametrum AO. Quibus cognitis cognoſcitur figura.

PROB. LXI.

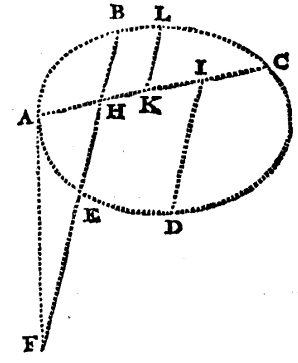
Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per tria data puncta, & in duobus iſtorum punctorum continget rectas poſitione datas.



SInt puncta illa data A, B, C; tangentes AD, BD ad puncta A & B; D communis interſectio tangentium. Biſeca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O; & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO, eâ lege ut ſit etiam AE*q*. CF*q* :: VE × $\overline{\text{VO}+\text{OE}}$. VF × $\overline{\text{VO}+\text{OF}}$; & erit V vertex, & O centrum Figuræ. Quibus cognitis Figura ſimul

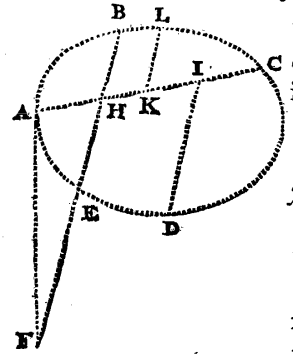
ſimul cognoſcitur. Eſt autem VE = VO − OE; adeoque VE × $\overline{\text{VO}+\text{OE}}$ = VO − OE × VO + OE = VO*q* − OE*q*. Præterea, quia VO media proportionalis eſt inter DO & EO, erit VO*q* = DOE; adeoque VO*q* − OE*q* = DOE − EO*q* = DEO. Et ſimili argumento erit VF × $\overline{\text{VO}+\text{OF}}$ = VO*q* − OF*q* = DOE − OF*q*. Ergo AE*q*. CF*q* :: DEO. DOE − OF*q*. Eſt OF*q* = EO*q* − 2FEO + FE*q*. Adeoque DOE − OF*q* = DOE − OE*q* + 2FEO − FE*q* = DEO + 2FEO − FE*q*. Et AE*q*. CF*q* :: DEO. DEO + 2FEO − FE*q* :: DE. DE + 2FE − $\frac{\text{FE}q}{\text{EO}}$. Datur ergo DE + 2FE − $\frac{\text{FE}q}{\text{EO}}$. Aufer hoc de dato DE + 2FE, & reſtabit $\frac{\text{FE}q}{\text{EO}}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{\text{FE}q}{\text{N}}$ = EO, adeoque dabitur EO. Dato autem EO, ſimul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

PROBLEMATA GEOMETRICA.



Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii ſatis expeditè reſolvuntur hæc problemata: quæ tamen, ſine iſtis Theorematibus, per Algebram ſolam reſolvi poſſent. Ut ſi proponatur primum trium noviſſimorum Problematum: Sint puncta quinque data, A, B, C, D, E, per quæ Conica ſectio tranſire debet. Junge duo quævis, A, C, & alia duo, B, E, rectis ſe ſecantibus in H. Ipſi BE parallelam age DI, occurrentem AC in I; ut & aliam quamvis rectam, KL, occurrentem AC in K, & conicæ ſectioni in L. Et finge Conicam ſectionem datam eſſe; ita ut cognito puncto K ſimul cognoſcatur punctum L. Et poſito AK = *x*, & KL = *y*, ad exprimendam relationem inter *x* & *y*, aſſume quamvis æquationem, quæ Conicas ſectiones generaliter exprimit; puta hanc, $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$; ubi *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, *x* verò & *y* quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* invenire poſſumus, habebimus Conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſivè incidere in puncta, A, C, B, E, D, & videamus quid inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu AK & KL, hoc eſt, *x* & *y*, nihil. Proinde æquationis omnes termini præter *a* evaneſcent, & reſtabit $a = 0$. Quare delendum eſt *a* in æquatione illâ, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt = 0. Porro ſi L

CAPUT XIV. incidit in C, erit AK, seu x, = AC, & KL seu $y = 0$. Pone ergo AC = f; & substituendo f pro x, & 0 pro y, æquatio ad curvam, $bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, evadet $bf + cff = 0$, seu $b = -cf$. Et in æquatione illâ scripto $-cf$ pro b, evadet $-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0$. Adhæc si punctum L incidit in punctum B, erit AK, seu x, = AH; & KL, seu y, = BH. Pone ergo AH = g, & BH = h, & perinde scribe g pro x, & h pro y, & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$. Quòd si punctum L incidit in E, erit AK = AH, seu $x = g$; & KL, seu y, = HE. Pro HE ergo scribe $-k$ cum signo negativo, quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC, & substituendo g pro x, & $-k$ pro y, æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg - dk - egk + kk = 0$. Aufer hoc de superiori æquatione, $-cfg + cgg + dh + egh + hh$, & restabit $dh + egh + hh + dk + egk - kk = 0$. Divide hoc per $h + k$, & fiet $d + eg + h - k = 0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0$, & restabit $-cfg + cgg + bk = 0$, seu $\frac{bk}{-gg + fg} = c$. Denique, si punctum L incidit in punctum D, erit AK, seu x, = AI, & KL, seu y, = ID. Quare pro AI scribe m, & pro ID, n; & perinde pro x & y substitue m & n, & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfm + cmm + dn + emn + nn = 0$. Hoc divide per n, & fiet $\frac{-cfm + cmm}{n} + d + em + n = 0$. Aufer $d + eg + h - k = 0$; & restabit $\frac{-cfm + cmm}{n} + em - eg + n - h + k = 0$. Sive $\frac{cmm - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$. Jam verò ob data puncta A, B, C, D, E, dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI; hoc est f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem, $\frac{bk}{fg - gg} = c$, datur c. Dato autem c, per æquationem, $\frac{cmm - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$, datur $eg - em$. Divide hoc datum per datum $g - m$, & emerget datum e. Quibus inventis, æquatio $d + eg + h - k = 0$, seu $d = k - h - eg$, dabit d. Et his cognitis, simul determinatur æquatio ad quæsitam Conicam sectionem, $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Et ex eâ æquatione per methodum Cartesii determinabitur Conica sectio.

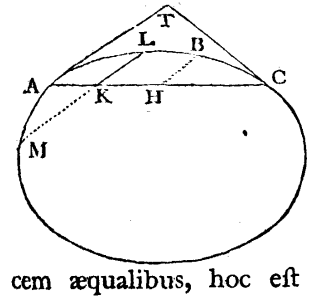


Quod si quatuor, A, B, C, E, & positio rectæ, AF, quæ tangit Conicam sectionem ad unum istorum punctorum, A, daretur; posset

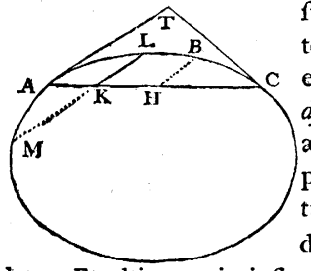
Conica sectio sic facilius determinari. Inventis, ut suprà, æquationibus $cfx = cxx + dy + exy + yy$, $d = k - b - eg$, & $c = \frac{bk}{fg - gg}$, concipe tangentem, AF, occurrere rectæ EH in F; dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE, donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipsius LK ad AK erit ratio FH ad AH; ut contemplanti figuram constare potest. Dic verò FH = p; & in hoc casu, ubi LK est ad AK in ultimâ ratione, erit $p . g :: y . x$, sive $\frac{gy}{p} = x$. Quare pro x in æquatione $cfx = cxx + dy + exy + yy$, scribe $\frac{gy}{p}$; & orietur $\frac{cfgy}{p} = \frac{cggyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy$. Divide omnia per y, & emerget $\frac{cfg}{p} = \frac{cggy}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y$. Jam quia supponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL, seu y, infinitè parvum vel nihil esse, dele terminos qui per y multiplicantur, & restabit $\frac{cfg}{p} = d$. Quare fac $\frac{bk}{fg - gg} = c$; dein $\frac{cfg}{p} = d$; denique $\frac{k - b - d}{g} = e$; &, inventis c, d & e, æquatio, $cfx = cxx + dy + exy + yy$, determinabit conicam sectionem.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Si denique tria tantùm puncta, A, B, C, dentur, unà cum positione duarum rectarum, AT, CT, quæ tangunt Conicam sectionem in duobus istorum punctorum, A & C; obtinebitur ut suprà ad Conicam sectionem æquatio hæc, $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Deinde, si supponatur ordinatam KL parallelam esse tangenti AT, & concipiatur eam produci, donec rursus occurrat Conicæ sectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem, AT, donec cum eâ conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis; ut contemplanti figuram constare potest. Quamobrem in illo casu existentibus KL & KM sibi invicem æqualibus, hoc est duobus valoribus ipsius y (affirmativo scilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis, $cfx = cxx + dy + exy + yy$, termini illi in quibus y est imparis dimensionis, hoc est termini $+dy + exy$, respectu termini yy, in quo y est paris dimensionis, evanescere. Aliter enim duo valores ipsius y, affirmativus & negativus, æquales esse non possunt. Et in illo quidem casu AK infinitè minor erit quàm LK; hoc est x quàm y; proinde & terminus exy quàm terminus yy. Atque adeo infinitè



Caput XVI. minor exiſtens pro nihilo habendus erit. At terminus dy, reſpectu termini yy, non evaneſcet, ut oportet, ſed eo major erit, niſi d ſupponatur eſſe nihil. Delendus eſt itaque terminus dy; & ſic reſtabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam ſectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT ſibi mutuò occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C, donec in illud incidat. Et ultima ratio ipſius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f-x$. Dic AT$=g$; & ultima ratio y ad $f-x$ erit ea quæ eſt g ad f. Æquatio $cfx=cxx+exy+yy$, ſubducto utrobique cxx, fit $cfx-cxx=exy+yy$; hoc eſt, $\overline{f-x}$ in $cx=y$ in $\overline{ex+y}$. Ergo eſt $y.f-x::cx.ex+y$; adeoque $g.f::cx.ex+y$. At, puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g.f::cx.ex$. Divide poſteriorem rationem per x, & evadet $g.f::e.e$, & $\frac{cf}{g}=e$. Quare ſi in æquatione $cfx=cxx+exy+yy$, ſcribas $\frac{cf}{g}$ pro e, fiet $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, æquatio ad conicam ſectionem. Denique ipſi KL, ſeu AT, à dato puncto, B, per quod Conica ſectio tranſire debet, age parallelam BH occurrentem AC in H; & concipiendo LK accedere ad BH, donec cum eâ coincidat, in eo caſu erit AH$=x$, & BH$=y$. Dic ergo datam AH$=m$, & datam BH$=n$, & perinde pro x & y, in æquatione $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, ſcribe m & n; & orietur $cfm=cmm+\frac{cf}{g}mn+nn$. Aufer utrobique $cmm+\frac{cf}{g}mn$, & fiet $cfm-cmm-\frac{cf}{g}mn=nn$. Pone $f-m-\frac{fn}{g}=s$, & erit $csm=nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c=\frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam ſectionem, $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$. Et inde, per methodum Carteſii, Conica ſectio datur, & deſcribi poteſt.



Atque hactenus varia evolvi Problemata. In ſcientiis enim addiſcendis proſunt exempla magis quàm præcepta: quâ de cauſâ in his fuſiùs expatiatus ſum. Sed & aliqua, quæ inter ſcribendum occurrebant, immiſcui ſine Algebrâ ſoluta, ut inſinuarem, in problematis, quæ primâ fronte difficilia videantur, non ſemper

ſemper ad Algebram recurrendum eſſe. Sed tempus eſt jam æquationum reſolutionem docere. Nam poſtquam Problema ad æquationem deductum eſt, radices illius æquationis, quæ quantitates ſunt Problemati ſatisfacientes, extrahere oportebit. De Æquatione Reſolvenda.

CAPUT XV.

Quomodo æquationes reſolvendæ ſunt.

Poſtquam igitur in Quæſtionis alicujus ſolutione ad æquationem perventum eſt, & æquatio illa debitè ordinata eſt & reducta; ubi quantitates, quæ per ſpecies deſignantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipſis ſubſtituendi ſunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem ſatisfaciet Quæſtioni. Ut ſi in ſectione anguli in quinque partes æquales, ſumendo r pro radio circuli, q pro ſubtenſâ complementi anguli propoſiti ad duos rectos, & x pro ſubtenſâ complementi quintæ partis anguli illius, perveniſſem ad hanc æquationem, $x^5-5rrx^3+5r^4x-r^4q=0$. Ubi in caſu aliquo particulari dantur in numeris radius, r, & linea dati anguli complementum ſubtendens, q; ut quòd radius ſit 10, & ſubtenſa 3; ſubſtituo numeros illos in æquatione pro r & q; & provenit æquatio numeralis, $x^5-500x^3+50000x-30000=0$: cujus radix tandem extracta erit x, ſeu linea complementum quintæ partis anguli illius dati ſubtendens.

CAPUT XVI.

De naturâ radicum Æquationis.

RADIX verò numerus eſt, qui, ſi in æquatione pro literâ vel ſpecie radicem ſignificante ſubſtituatur, efficiet omnes terminos evaneſcere.

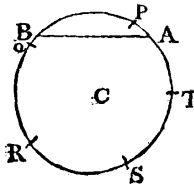
Sic æquationis $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, unitas eſt radix, quoniam ſcripta pro x producit $1-1-19+49-30$, hoc eſt nihil. Sed æquationis ejuſdem plures eſſe poſſunt radices. Nam ſi in hâc eâdem æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, pro x ſcribas numerum 2, & pro poteſtatibus x ſimiles poteſtates numeri 2, producetur $16-8-76+98-30$, hoc eſt nihil. Atque ita ſi pro x ſcribas numerum 3, vel numerum negativum -5, utroque caſu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hiſce quatuor

CAPUT XVI. quatuor casibus se mutuò destruentibus. Proinde cùm numerorum, 1, 2, 3, & − 5, quilibet scriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipsius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere posse *plures radices*, sciendum est *plures esse posse solutiones ejusdem Problematis*.

Ut si circulorum duorum quæreretur *intersectio*; *duæ* sunt eorum intersectiones, atque adeo quæstio admittit *duo responsa*; & perinde æquatio intersectionem determinans habebit *duas radices*, quibus intersectionem utramque determinet; *si modò nihil in datis sit, quo responsum ad unam intersectionem determinetur*.

Sic & si arcûs APB pars quinta AP invenienda esset, quamvis animum forte advertas tantùm ad arcum APB; tamen æquatio, quâ quæstio solvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æquè ac quintam partem arcûs APB; quæ quintæ partes, si dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes, PQ, QR, RS, ST, TP, erunt, AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur, quærendo quintas partes arcuum quos recta AB subtendit, ad casus omnes determinandos, circumferentia tota secari debet in quinque punctis, P, Q, R, S, T; ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem



(9) Geminas æquationibus Quadraticis esse radices, item Cubicis certæ cujusdam formæ vel tergeminas Cardanus (α) monuit; Biquadraticis quibusdam quadrigeminas, nonnullis Quadrato-cubicis quintuplices (β) Vieta. Id verò generaliter obtinere, ut æquationi cujuscunque demum gradûs tot possint esse radices, neque tamen plures, quot sint in numero gradum æquationis designante unitates, primus ni fallor mortalium Albertus Girardus intellexit; cujus in opusculo Gallicè scripto et anno 1629 in lucem Æmsteladami edito, hæc est enuntiatio. "Toutes les equations d'Algebre recoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes." Quæ quidem Latin sic ferè sonant. "Omnes æquationes algebraicæ, si imperfectas exceperis, tot solutiones capiunt, quot index potestatis elatissimæ indicat." Girardo autem hâc in re neque Carteſius neque Harriottus nostras facem prætulisse censendi sunt, quum Harriotti Artis Analyticæ Praxis non nisi biennio post Inventa Nova Algebraica Girardi in lucem edita est, Carteſii vero Geometria seri s etiam quinquennio. Quinetiam Harriotus de numero radicum nil plan fani habet. Vir magnæ quidem diligentiæ, sed mediocris ingenii, ea ferè in Algebraicis intellexit, quæ a Cardano et a Vietâ acceperat; et radices, sicut

(α) Arithmet. Lib. 10. c. 1. (β) De emendat. æquat. c. 14.

eandem semper æquationem incideris, sive quæras quintam partem arcûs APB, sive quintam partem arcûs ASB, sive alterius cujusvis ex arcubus quintam partem. Unde si æquatio, quâ quinta pars arcûs APB determinatur, non haberet plures radices quàm unam, dùm quærendo quintam partem arcûs ASB incidimus in eandem illam æquationem, sequeretur, majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor est; eo quòd subtensa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate necesse est æquationem, quâ respondetur, tot habere radices, quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi, ab iisdem datis pendentes & eâdem argumentandi ratione determinandi.* DE NATURA RADICUM.

Potest verò æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures (9).

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices 1, 2, 3, & − 5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro x efficet terminos omnes se mutuò destruere, ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

Cæterùm numerus & natura radicum ex generatione æquationis optimè intelligetur.

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, & − 5, supponendum erit x ambiguè significare numeros illos; seu esse $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$; vel quòd perinde est, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x + 5 = 0$; Et multiplicando hæc in se, prodibit, multiplicatione $x - 1$, in $x - 2$,

sicut illi fecerant, cuilibet æquationi totidem tribuit, quot illa positivas habeat; negativarum ne in ullo quidem casu ratione habitâ, utpote quas semper, ut opinor, inutiles judicavit, cùm earum naturam minimè perspexisset. Sic in sectione operis sui quartâ prop. 1ª. æquationis quadraticæ, $aa \overset{-b}{+c} a = bc$, cujus radices sunt $+b$, $-c$, unicam radicem statuit b; illam c radicem esse negat. In propositione verò secundâ æquationis, $aa \overset{-b}{-c} a = bc$, radicem utramque, $+b$, $+c$, agnovit. Rursum in propositione 3ª. æquationis cubicæ $aaa \overset{+b\ \ +bc}{+c\ \ aa} \overset{}{-bd\ a} = bcd$, cujus tres sunt radices $+d$, $-b$, $-c$ radicem unicam, $+d$, statuit; alteras, b et c, radices esse negat. In propositione 4ª. æquationis $aaa \overset{+b\ \ -bc}{-c\ \ aa} \overset{}{-bd\ a} = -bcd$, cujus radices sunt tres, $+d$, $+c$, $-b$, duas, d, c, agnovit, tertiam $-b$ rejecit. In propositione 5ª. æquationis $aaa \overset{-b\ \ +bc}{-c\ \ aa} \overset{}{+cd\ a} = bcd$ agnovit tres radices positivas b, c, d.

hæc

CAPUT XVI. hæc æquatio, $xx-3x+2=0$; quæ duarum eſt dimenſionum, & duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x-3$ prodibit $x^3-6xx+11x-6=0$, æquatio trium dimenſionum totidemque radicum; quæ iterum multiplicata per $x+5$ fit $x^4-x^3-19xx+49x-30=3$, ut ſuprà. Cùm igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x-1$, $x-2$, $x-3$, & $x+5$, in ſe continuò ductis, ubi factorum aliquis nihil eſt, quod ſub omnibus fit nihil erit; ubi verò horum nullus nihil eſt, quod ſub omnibus continetur nihil eſſe non poteſt. Hoc eſt, non poteſt $x^4-x^3-19xx+49x-30$, eſſe nihilo æquale, ut oportet, niſi his quatuor caſibus, ubi eſt $x-1=0$, vel $x-2=0$, vel $x-3=0$, vel denique $x+5=0$: proinde ſoli numeri, 1, 2, 3, & -5, valere poſſunt x, ſeu radices eſſe æquationis. Et ſimile eſt ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari poſſumus omnes generari, quamvis factores ab invicem ſecernere ſolet eſſe difficillimum, & ipſum eſt quod æquationem reſolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radices verò ſunt duplices; affirmativæ *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, & negativæ *ut* -5. *Ex his verò aliquæ non rarò evadunt* impoſſibiles (r).

Sic æquationis, $xx-2ax+bb=0$, radices duæ, quæ ſunt $a+\sqrt{aa-bb}$, & $a-\sqrt{aa-bb}$ reales quidem ſunt, ubi aa majus eſt quàm bb; at ubi aa minus eſt quàm bb, evadunt impoſſibiles; eò quòd $aa-bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica eſt impoſſibilis. Omnis enim radix poſſibilis ſive affirmativa ſit, ſive negativa, ſi per ſeipſam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impoſſibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento

(r) Ainſi qu'on peut donner trois noms aux ſolutions, veu qu'il y en a qui ſont plus que rien, d'autres moins que rien; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres ſemblables. *Albert Girard. Invent. nouv. en Alg.*

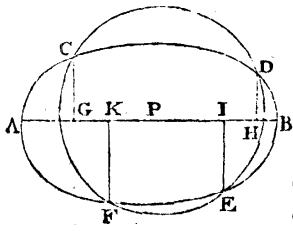
" Tribus igitur nominibus radices diſtinguendæ ſunt. Sunt enim nihilo majores, ſunt minores nihilo, ſunt etiam involutæ; nimirum hoc ſigno implicitæ, $\sqrt{-}$, ut $\sqrt{-3}$, aut aliûs cujuſvis numeri negati radix quadratica." Quas verò hoc loco *involutas* alibi aptiore vocabulo *impoſſibiles* dixit.

(*) Id verò notandum, in æquationibus quibus membra nulla deſunt, non ex formâ æquationis ſed ex magnitudinibus coefficientium et homogenei comparationis radices impoſſibiles fieri. Nam in quâlibet æquatione radices ſunt poſſibiles, quamdiu coefficientium et homogenei comparationis magnitudines, ac mutuæ proportiones, intra limites quoſdam conſtiterint certis legibus præfinitos. Sic omnis æquationis quadraticæ radices ſunt poſſibiles, cujus homogeneum comparationis

gumento colligitur æquationem, $x^3-4xx+7x-6=0$, unam quidem realem radicem habere, quæ eſt 2; duas verò impoſſibiles, $1+\sqrt{-2}$, & $1-\sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his, 2, $1+\sqrt{-2}$, & $1-\sqrt{-2}$, ſcripta in æquatione pro x, efficiet omnes ejus terminos ſe mutuò deſtruere; ſunt verò $1+\sqrt{-2}$, & $1-\sqrt{-2}$, numeri impoſſibiles, eò quòd extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præſupponant (t).

Æquationum verò radices ſæpe impoſſibiles eſſe æquum eſt, ne caſus problematum, qui ſæpe impoſſibiles ſunt, exhibeant poſſibiles.

Ut ſi rectæ & circuli interſectio determinanda eſſet, & pro circuli radio, & rectæ à centro ejus diſtantiâ, ponantur literæ duæ; ubi æquatio interſectionem definiens habetur, ſi pro literâ deſignante diſtantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, interſectio poſſibilis erit; ſin major, fiet impoſſibilis; & æquationis radices duæ quæ interſectiones duas determinant, debent eſſe perinde poſſibiles vel impoſſibiles, ut rem ipſam verè exprimant. Atque ita ſi circulus CDEF, & Ellipſis ACBF ſe mutuò ſecent in punctis, C, D, E, F, & ad rectam aliquam poſitione datam, AB, demittantur perpendicula, CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem; æquatio illa, ubi circulus ſecat Ellipſin in quatuor punctis, habebit quatuor radices reales; quæ erunt quatuor illa perpendicula. Quòd ſi circuli radius, manente centro ejus, minuatur, donec, punctis E & F coaleſcentibus, circulus tandem tangat Ellipſin, ex radicibus duæ illæ, quæ perpendicula, EI & FK, jam coincidentia, exprimunt, evadent æquales. Et ſi circulus adhuc minuatur,



parationis quadrante poteſtatis quadraticæ coefficientis lateris non ſit majus. Et omnis æquationis cubicæ radices ſunt poſſibiles, cujus deleto membro ſecundo (id quod viâ mox tradendâ in omnibus facere licet) homogenei comparationis æquationis transformatæ poteſtas cubica ad poteſtatem quadraticam coefficientis membri ejuſdem transformatæ tertii proportionem habeat minorem quàm numerus viceniſeptenarius ad quaternarium. Erravit igitur Girardus cùm regulæ generalis, quam de radicum numero veriſſimam allegavit, in æquationibus imperfectis exceptionem conſtituit, quaſi verò aut ſolis aut ſemper illis radices impoſſibiles eſſent. Sunt quidem perfectæ, quibus nulla radix eſt poſſibilis; ſunt imperfectæ, quæ juſto radicum numero gaudent. Æquationi biquadraticæ $x^4-5x^3+18x^2-31x^2+35=0$, perfectæ licèt, radices omnes ſunt impoſſibiles: cubicæ, $y^3-19y+30=0$, veræ ſunt omnes. Nempe prioris radices ſunt $1+\sqrt{-6}$, $1-\sqrt{-6}$, $\frac{1}{2}+\sqrt{-2\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{2}-\sqrt{-2\frac{1}{4}}$; poſterioris 2, 3, -5.

CAPUT XVI.

ut Ellipſin in puncto EF ne quidem tangat, ſed ſecet tantùm in alteris duobus punctis, C, D; tunc ex quatuor radicibus duæ illæ, quæ perpendicula, EI, FK, jam facta impoſſibilia exprimebant, fient unà cum perpendiculis illis impoſſibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus, augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primò æquales, deinde impoſſibiles, evadere ſolent. (t) Et inde fit quòd radicum impoſſibilium numerus ſemper ſit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquandò poſſibiles, ubi Schema impoſſibiles exhibet. Sed hoc fit, ob limitationem aliquam in Schemate, quod ad æquationem nil ſpectat.

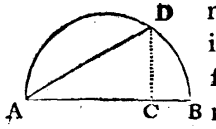
Ut ſi in ſemicirculo, ADB, datis diametro, AB, & lineâ inſcriptâ, AD, demiſſoque perpendiculo, DC, quærerem diametri ſegmentum, AC, foret $\frac{AD^2}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quantitas, ubi linea inſcripta AD major eſt quàm diameter

(t) Vides igitur radices ex eo fieri impoſſibiles, quòd datarum magnitudines eæ ſint, quæ cum conditionibus Problematis conſiſtere nequeant: unde talis neceſſariò naſcitur æquatio, cujus coefficientes et homogeneum comparationis conditiones recuſant, quas ad rei propoſitæ effectionem omninò illis ſubeundas ſigna æquationis indicant. Vel ut breviùs dicam, cùm id aggreſſus ſis quod fieri omninò rerum Naturâ vetuit, exinde eveniet ut in ſymbola incidas quorum nulla eſt interpretatio, quæ intelligi nequeunt. (confer Maclaurin. Algebr. part. 3, cap. 1.)

Reverâ Radix impoſſibilis illud eſt, quod in rerum Naturâ nuſquam extat. Cautè igitur accipiendum eſt, quòd à Maclaurino, credo, omnium primo dictum, nunc omnibus eſt in ore, quantitatis cujuſvis, atque ipſius adeo unitatis, triplicem eſſe radicem cubicam Algebraicam; unam veram, duas impoſſibiles: unitatis quidem, præter ipſam unitatem quæ ſola vera eſt, impoſſibiles duas, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$: alius autem cujuſvis quantitatis cubicæ, puta a^3, præter veram a, duas illas $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$: atque hæc ita eſſe ex eo conficitur, quòd æquationi cubicæ, $x^3-a^3=0$, radices illæ tres ſint, a, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$. Hæc verò minimè ita accipienda ſunt, ac ſi quantitas ulla eſſet, quæ in ſe cubicè multiplicata unitatem redderet, præter ipſam unitatem; qualis certè in rerum Naturâ nulla extat: ſicut nulla eſt, quæ in ſe cubicè multiplicata quantitatem cubicam ſymbolo a^3 deſignatam reddat præter ipſam a. Neque profectò linea recta eſt ulla, ex quâ ſi cubus ſit extructus cubum è rectâ datæ longitudinis adæquabit, præter ipſam illam datæ longitudinis rectam. Symbola autem illa, $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, quantitatis a^3 radices cubicæ dicuntur, ſenſu merè algebraico. Nimirum ſi horum binomiorum utrumvis, nullâ ſignificantiæ ejus ratione habitâ, perinde ac ſi veram aliquam quantitatem deſignaret, ſecundum leges multiplicationis algebraicæ in ſe cubicè multiplicaveris, exitu operis, quantitas a^3 exſiſtet; vel ſi binomium $x-a$ cum trinomiis $x+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$ algebraicè multiplicaveris, binomium y^3-a^3 effeceris; cujus propterea radices binomia $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$ jure optimo vocanda ſunt, cùm ad ejus compoſitionem algebraicam eodem planè modo eorum unumquodque contulerit, ac quantitas a quæ verè radix eſt. Similis ſemper interpretatio adhibenda eſt, quando mathematici radices æquationum impoſſibiles certis tamen ſymbolis repræſentari volunt. Sunt utique iſtiuſmodi ſymbola æquationum, quarum radices dicuntur, elementa merè algebraica; ex quibus, certa lege compoſitis, aſſumptis etiam quas poſſibiles quæque radices habeat, æquationes exſiſtunt, haud aliter ac ſyllabæ et voces è literis certo ordine conjunctis, aſciſcique vocalibus, quarum ſeparatim et ſine illis neque ſonus neque ſenſus eſt.

(u) Idem planè eodemque modo Albertus Girardus dixit, cujus hæc ſunt verba.

Juſques



meter AB; per Schema verò AC tunc evadit impoſſibilis. Nimirum, in ſchemate, linea AD ſupponitur inſcribi in circulo, atque adeo diametro circuli major eſſe non poteſt; in æquatione verò nihil eſt, quod à conditione illâ pendeat. Ex hâc ſolâ linearum conditione colligitur æquatio, quòd ſint AB, AD, & AC continuè proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones ſchematis, non neceſſe eſt, ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius eſt in ſchemate, quam in æquatione, poteſt illud limitibus arctare, hanc non item. Quâ de cauſâ ubi æquationes ſunt imparium dimenſionum, adeoque radices omnes impoſſibiles habere non poſſunt; ſchemata quantitatibus, à quibus radices omnes pendent, ſæpè limites imponunt, quos tranſgredi, ſervatis ſchematum conditionibus, impoſſible eſt (u).

Ex

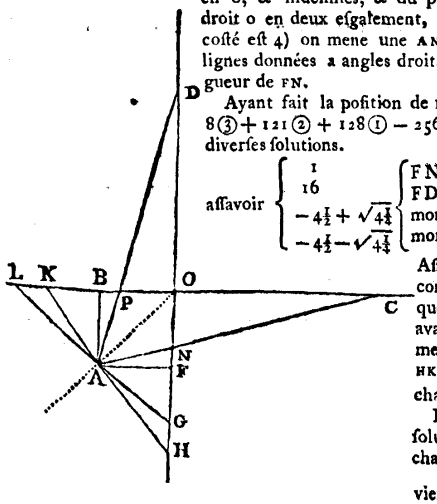
Juſques icy nous n'avons encor expliqué a quoy ſervent les ſolutions par moins, quand il y en a. La ſolution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, et le moins recule là ou le + avance.

BROBLEME D'INCLINAISON.

Soyent deux lignes droictes, DG, BC, ſe couppant en angles droits en O, & indefinies, & du poinct A (dans la ligne qui couppe l'angle droit O en deux eſgalement, ainſi que ABOF eſt quarré dont chacun coſté eſt 4) on mene une ANC, ainſi que l'intercepté, NC, (entre les lignes données a angles droit, DG, BC) ſoit $\sqrt{153}$, on demande la longueur de FN.

Ayant fait la poſition de FN 1① on trouvera que 1④ ſera eſgale a 8③ + 121② + 128① − 256, & ainſi la valeur de 1① recevra quatre diverſes ſolutions.

aſſavoir { 1 FN; 16 FD; $-4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$ monſtrant le poinct G; $-4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$ monſtrant le poinct H } du poinct F.



Aſſavoir, monſtrant leſdits poincts G & H, comme ſi les diſtances FG, FH eſtoyent moins que rien, en retrogradant; prenant que FN, FD avancent, & FG, FH reculent en arriere, tellement donc que les interceptes CN, DF, GL, HK, tendent & s'enclinent au poinct A, faiſant chacune $\sqrt{153}$, ſelon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux ſolutions qui ſont moins que O, ſe doivent changer, aſſavoir les ſignes.

viendra { $4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$ pour FG; $4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$ pour FH }

Leſquels il faut poſer au contraire de FN, FD, comme il eſt exprimé en la figure precedente: &

 ainſi

CAPUT XVI. *Ex radicibus verò quæ reales ſunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppoſitas ſolent tendere.*

Sic, in ſchemate penultimo, quærendo perpendiculum CG, incidetur in æquationem, cujus duæ erunt affirmativæ radices, CG ac DH, à punctis C & D tendentes verſus unam plagam, & duæ negativæ, EI & FK, tendentes à punctis E & F verſus plagam oppoſitam. Aut ſi in lineâ AB, ad quam perpendicula demittuntur, detur aliquod punctum P, & pars ejus PG, à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG extendens, quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK; quarum quæſita PG, & quæ à puncto P ad eaſdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ verò tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impoſſibiles ſunt, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* ſignis *terminorum æquationis cognoſci poteſt.* Tot *enim ſunt radices affirmativæ quot ſignorum in continuâ ſerie* mutationes *de* + *in* − & − *in* + ; *cæteræ* negativæ *ſunt* (X).

Ut in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ubi terminorum ſigna ſe ſequuntur hoc ordine, +−−+−, variationes ſecundi − à primo +, quarti + à tertio −, & quinti −, à quarto +, indicant tres

ainſi le faudra-t-il entendre de toutes ſolutions par moins, qui eſt une choſe de conſequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

Hæc quidem de radicibus negativis Girardus, quorum ſenſum vocibus Latinis, & notis Algebraicis hodiè uſitatis ſic effero.

Radices negativæ, ſi quando obveniant, nondum diximus ad quid ſint utiles. Radicis igitur negatio in Geometriâ ſic accipienda eſt, ut per eam ſignificetur contrarius quidam linearum ac quaſi retrorſum ductus. Etenim ubi + progreditur ibi − recedit.

PROBLEMA EX INCLINATIONIBUS.

Sint duæ rectæ indefinitæ, DG, EG, quarum decuſſatio fiat in G ad angulos rectos. A puncto autem A (ad rectam ſcilicet quæ rectum angulum ad G medium dividit, ut ſit ABOF quadratum cujus latus ſit 4) ducatur puta recta ANC, cujus pars NC rectis primò poſitis, BG, DG, interceptæ, ſit $\sqrt{153}$. Quæritur longitudo rectæ FN.

Si rectam FN litterâ x deſignaveris, ſubductis calculis invenies, $x^4=8x^3+121x^2+128x-256$. Hinc literæ x æſtimationes ſunt quatuor.

Nimirum $\left\{\begin{array}{ll} 1 & \\ 16 & \\ -4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{diſtantia puncti G} \\ -4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{diſtantia puncti H} \end{array}\right\}$ a puncto F.

Quibus

tres affirmativas eſſe radices, adeoque quartam negativam eſſe. At, ubi radices aliquæ *impoſſibiles* ſunt, regula non valet; niſi quatenus impoſſibiles illæ, quæ nec negativæ ſunt nec affirmativæ, pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione, $x^3+pxx+3ppx-q=0$; ſigna indicant unam eſſe affirmativam radicem, & duas negativas. Finge $x=2p$, ſeu $x-2p=0$; & multiplica æquationem priorem per hanc $x-2p=0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus; & prodibit hæc æquatio $x^4-px^3+ppxx-\frac{6p^3}{-q}x+2pq=0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices: habet tamen, ſi mutationem ſignorum ſpectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impoſſibiles*; quæ, pro ambiguitate ſuâ, priori caſu negativæ, poſteriori affirmativæ, eſſe videntur. DE NATURA RADICUM.

Verùm quot radices impoſſibiles ſunt cognoſci ferè poteſt per hanc regulam.

Conſtitue ſeriem fractionum, quarum denominatores ſunt numeri in hâc progreſſione, 1, 2, 3, 4, 5, &c. *pergendo ad numerum uſque qui eſt dimenſionum æquationis; numeratores vero eadem ſeries numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem poſteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca ſuper terminis mediis æquationis. Et ſub quolibet mediorum terminorum, ſi quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem ſit majus* (Y) *quàm rectangulum terminorum utrinque conſiſtentium,*

Quibus punctorum G, H ſitus ita indicatur, ac ſi diſtantiæ FG, FH retrorſum emenſæ nihilo minores eſſent. Etenim ſi linearum FN, FD verſus puncta N, D ductum *progreſſum* dixeris, contrarium rectarum FG, FD ductum neceſſe eſt *regreſſum* dicas. Quatuor autem, CN, DP, GL, HK, rectis DG, EC, interceptæ, quantitati $\sqrt{153}$ ſingulatim ſunt æquales; et, ad punctum A vergendo, problematis requiſitis ſingulæ quidem ſatisfaciunt.

Vel ut rem etiam clariùs dicam, radicum duarum negativarum ſigna [partium] mutari debent, ut ex [duarum $4\frac{1}{2}, \sqrt{4\frac{1}{4}}$ differentiâ] $4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$, efficiatur diſtantia FG; ex [earumdem ſummâ] $4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$ diſtantia FH. Tum duæ illæ FH, FG, ad partes puncti F ponendæ ſunt, earum ad quas poſitæ ſunt FN, FD contrarias; quemadmodum figuræ appoſitæ lineationes indicant. Atque omnium quidem radicum negativarum ſimilis eſt interpretatio, quæ res licèt hactenus incognita maximas tamen habet in Geometriâ utilitates.

(X) Hæc regula magnum illum *Carteſium* inventorem habuit, quem graviter ſanè nonnulli incuſârunt quaſi in Algebraicis totus alienus eſſet. Mihi verò crimen non probant.

(Y) Intellige, *algebraicè* majus; licet enim quantitas fracta, quæ ſuper coefficientem aliquem ſcripta eſt, coefficientis illius poteſtatem quadraticam multiplicans quantitatem fecerit facto ex coefficientibus utrinque proximis minorem, tamen ſi coefficientibus illis proximis contraria ſigna ſint, ut factum ex illis negativum ſit, ſub coefficiente intermedio collocandum eſt ſignum +. Vel ſi membro aliquo æquationis deficiente, membra utrinque proxima ſignis prædita ſint contrariis ſub membro deficiente collocandum eſt ſignum +.

colloca

CAPUT XVI. *colloca signum +; sin minus, signum −. Sub primo verò & ultimo termino colloca signum +. Et tot erunt radices impossibiles, quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes, de + in − & − in +.*

Ut si habeatur æquatio, $x^3 + pxx \pm 3ppx - q = 0$: Divido seriei hujus $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}$ fractionum secundam, $\frac{2}{2}$, per primam, $\frac{3}{1}$; & tertiam, $\frac{1}{3}$, per secundam, $\frac{2}{2}$; & fractiones prodeuntes, $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis, ut sequitur. Dein quoniam quadratum secundi termini, pxx, ductum in imminentem fractionem, $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$, minus est, quàm primi termini x^3 & tertii $3ppx$ rectangulum, $3ppx^4$; sub termino pxx, colloco signum −. At quia tertii termini, $3ppx$, quadratum, $9p^4xx$, ductum in imminentem fractionem, $\frac{1}{3}$, majus est quàm nihil, atque adeo multo majus quàm secundi termini, pxx, & quarti, $-q$, rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino, x^3, & ultimo, $-q$, colloco signa +. Et signorum subscriptorum, quæ in hâc sunt serie, + − + +, mutationes duæ, una de + in −, alia de − in +, indicant duas esse radices impossibiles. Sic & æquatio,

$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3}$
$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$
$+ \quad + \quad - \quad +$

$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, duas habet radices impossibiles. Æquatio item, $x^4 - 6xx - 3x - 2 = 0$, duas habet. Nam hæc fractionum series, $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$, dividendo secundam per primam, tertiam per secundam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem, $\frac{3}{8}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}$, super mediis æquationis terminis collocandam. Dein secundi termini, qui hic nihil est, quadratum, ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$, producit, nihil; quod tamen majus est quàm rectangulum negativum, $-6x^6$, sub terminis utrinque positis, x^4 & $-6xx$, contentum. Quare sub termino illo deficiente scribo +. In cæteris pergo ut in exemplo superiori; & signorum subscriptorum prodit hæc series, + + + − +; ubi duæ mutationes indicant duas radices impossibiles. Et ad eundem modum in æquatione $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, deteguntur impossibiles duæ.

$\frac{3}{8}\quad\frac{4}{9}\quad\frac{3}{8}$
$x^4 * - 6xx - 3x - 2 = 0$
$+ + \quad + \quad - \quad +$

$\frac{2}{5}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{5}$
$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$
$+ \quad + \quad - \quad + \quad + \quad +$

Ubi

Ubi termini duo vel plures simul desunt, sub primo terminorum deficientium collocandum est signum −, sub secundo signum +, sub tertio signum −, & sic deinceps, semper variando signa; nisi quòd sub ultimo terminorum simul deficientium semper collocandum est signum +, ubi deficientibus utrinque proximi habent signa contraria. Ut in æquationibus

$x^5 + ax^4 * * * + a^5 = 0$,
$+ \quad + - + - \quad +$

& $x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0$,
$+ \quad + - + + \quad +$

quarum prior quatuor, posterior duas, habet impossibiles radices. Sic & æquatio

$\frac{3}{7}.\quad\frac{5}{9}.\quad\frac{3}{5}.\quad\frac{3}{5}.\frac{5}{9}.\frac{3}{7}.$
$x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3 * * - 3 = 0$
$+ \quad - \quad + \quad - \quad + - + \quad +$

sex habet impossibiles.

Hinc etiam cognosci potest, utrùm radices impossibiles inter affirmativas radices latent, an inter negativas. Nam signa terminorum, signis subscriptis variantibus imminentium, indicant tot affirmativas esse impossibiles, quot sunt ipsorum variationes; & tot negativas, quot sunt ipsorum successiones, sine variatione. Sic in æquatione

$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$
$+ \quad + \quad - \quad + \quad + \quad +$

quoniam signis infrà scriptis variantibus, + − +, quibus radices duæ impossibiles indicantur, imminentes termini, $-4x^4 + 4x^3 - 2xx$, signa habent − + −, quæ, per duas variationes, indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impossibiles inter affirmativas latebunt. Cùm itaque omnium æquationis terminorum signa, + − + − − −, per tres variationes indicant tres esse affirmativas radices, & reliquas duas negativas esse, & inter affirmativas lateant duæ impossibiles, sequitur, æquationis unam esse radicem verè affirmativam, duas negativas ac duas impossibiles. Quòd si æquatio fuisset $x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$

$+ \quad + \quad - \quad - \quad + \quad +$

tunc termini subscriptis signis prioribus variantibus, + −, imminentes, nimirum $-4x^4 - 4x^3$, per signa sua non variantia − & −, indicant unam, ex negativis radicibus, impossibilem esse; & termini signis subscriptis posterioribus variantibus, − +, imminentes, nimirum $-2xx - 5x$, per signa sua non variantia, − & −, indicant aliam, ex negativis radicibus, impossibilem esse.

DE NATURA RADICUM.

Cap. XVI. esse. Quamobrem, cùm æquationis signa, + − − − − −, per unam variationem, indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas esse; sequitur, unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent, ubi non sunt plures impossibiles radices, quàm per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perrarò eveniat.

CAPUT XVII.

De transmutationibus Æquationum (z).

Cæterùm æquationis cujusvis radices omnes affirmativæ *in* negativis, & negativæ *in* affirmativas, *mutari possunt, idque mutando tantùm signa terminorum alternorum* (a).

Sic æquationis, $x^5-4x^4+4x^3-2xx-5x-4=0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas, mutando tantùm signa secundi quarti & sexti termini ut hîc fit, $x^5+4x^4+4x^3+2xx-5x+4=0$. Eadem habet hæc æquatio radices cum priore, nisi quòd hîc affirmativæ sunt, quæ ibi erant negativæ, & hîc negativæ, quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles, quæ ibi inter affirmativas latebant, hîc latent inter negativas; ita ut his deductis restet unica tantùm radix verè negativa.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. *Possumus enim supponere, radicem æquationis ex cognitâ & incognitâ aliquâ quantitate utcunque componi, & perinde pro eâ substituere, quod æquipollens esse fingitur.* Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognitâ illâ quantitate augere vel diminuere, vel de cognitâ quantitate subducere; atque ita efficere, ut earum aliquæ, quæ priùs erant negativæ, jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ (b). Sic in æquatione, $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, si radices unitate augeri vellem, fingo $x+1=y$, seu $x=y-1$; & perinde pro x scribo in æquatione

(z) Hujusce doctrinæ fundamenta jecit Franciscus Vieta, cujus librum vide de Recognitione Æquationum, c. 7.

(a) Anastrophe Vietæa De Emendat. Æquationum, c. 3. Vide etiam Cartesii Geometr. Lib. 3.

(b) Vid.

tione $y-1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x similem potestatem de $y-1$, ad hunc modum. De Transmut. Æquat.

x^4	$y^4-4y^3+6yy-4y+1$	
$-x^3$	$-y^3+3yy-3y+1$	
$-19xx$	$-19yy+38y-19$	
$+49x$	$+49y-49$	
-30	-30	
Summa	$y^4-5y^3-10yy+80y-96=0$.	

Et æquationis prodeuntis $y^4-5y^3-10yy+80y-96=0$, radices erunt, 2, 3, 4, -4; quæ priùs erant, 1, 2, 3, -5, unitate jam factæ majores. Quòd si pro x scripsissem $y+1\frac{1}{2}$, prodiisset æquatio $y^4+5y^3-10yy-\frac{5}{4}y+\frac{39}{16}=0$; cujus duæ fuissent radices affirmativæ, $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$, ac duæ negativæ, $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero scribendo $y-6$, prodiisset æquatio, cujus radices fuissent, 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ; & pro eodem scribendo $y+4$, radices, jam numero quaternario diminutæ, evasissent -3, -2, -1, -9; negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices, siquæ impossibiles sunt, hæ aliquando faciliùs detegentur quàm priùs. Sic in æquatione, $x^3-3aax-3a^3=0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impossibiles. At si augeas radices quantitate a, scribendo $y-a$ pro x, in æquatione resultante, $y^3-3ayy-a^3=0$, radices duæ impossibiles jam per regulam illam detegi possunt.

Eâdem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere (c). Hoc enim fiet, si cognitam quantitatem secundi termini æquationis propositæ, per numerum dimensionum æquationis divisam, subducamus de quantitate, quæ pro novæ æquationis radice significandâ assumitur, & residuum substituamus pro radice æquationis propositæ. Ut si proponatur æquatio, $x^3-4xx+4x-6=0$, cognitam quantitatem secundi termini, quæ est -4, divisam per numerum dimensionum æquationis, 3, subduco de specie, quæ pro novâ radice significandâ assumitur, puta de y; & residuum $y+\frac{4}{3}$ substituo pro x, & provenit,

y^3	$+4y+\frac{16}{3}y+\frac{64}{27}$
	$-4yy-\frac{32}{3}y-\frac{64}{9}$
	$+4y+\frac{16}{3}$
	-6
y^3	$*-\frac{4}{3}y-\frac{140}{27}=0$.

Eâdem methodo potest & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4-3x^3+3xx-5x-2=0$, & finge $x=y-e$; & substituendo $y-e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$\left.\begin{array}{llll} y^4 & -4e & +6ee & -4e^3 \\ -3y^3 & +9e & -9ee & +3e^3 \\ +3yy & -6e & +3ee & -e^4 \\ -5y & +5e & -2e & \\ -2 & & & \end{array}\right\} = 0.$$

Hujus æquationis tertius terminus est $6ee+9e+3$ ductum in yy. Ubi si $6ee+9e+3$ nullum

(c) Vid. Cartesii Geomet. Lib. 3.

(d) Expurgatio per Uncias Vietæ. Vid. Librum de emendatione æquationum, c. 1.

CAP. XVII. esset, eveniret ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse, ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum substitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee+9e+3=0$; quæ divisa per 6 fiet $ee+\frac{3}{2}e+\frac{1}{2}=0$, seu $ee=-\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}$; &, extractâ radice, $e=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}$, seu $=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc est $=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$, atque adeo vel $=-\frac{1}{2}$ vel $=-1$. Unde $y-e$ erit vel $y+\frac{1}{2}$, vel $y+1$. Quamobrem, cùm $y-e$ scriptum fuit pro x, vice $y-e$ debet $y+\frac{1}{2}$, vel $y+1$, scribi pro x, ut tertius æquationis resultantis terminus nullus sit. Et in utroque quidem casu id eveniet. Nam si pro x scribatur $y+\frac{1}{2}$, orietur hæc æquatio, $y^4-y^3-\frac{15}{4}y-\frac{65}{16}=0$; sin scribatur $y+1$, orietur hæc, $y^4+y^3-4y-6=0$.

Possunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractionesque & radicales quantitates aliquandò tolli (d).

Ut si æquatio sit $y^3-\frac{4}{3}y-\frac{146}{27}=0$, ad tollendas fractiones fingo esse $y=\frac{1}{3}z$; & perinde pro y substituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^3}{27}-\frac{12z}{27}-\frac{146}{27}=0$; & rejecto terminorum communi denominatore, $z^3-12z-146=0$, cujus æquationis radices sunt triplo majores quàm antè. Et rursus, ad diminuendos terminos æquationis hujus, si scribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3-24v-146=0$; &, divisis omnibus per 8, fiet $v^3-3v-18\frac{1}{4}=0$; cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hîc, si tandem inveniatur v, ponendum erit $2v=z$, $\frac{1}{3}z=y$, & $y+\frac{4}{3}=x$; & æquationis primo propositæ, $x^3-4xx+4x-6=0$, habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3-2x+\sqrt{3}=0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3}-2y\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$; quæ, divisis omnibus terminis per $\sqrt{3}$, fit $3y^3-2y+1=0$.

Rursus

(d) *Multiplicatio & Divisio ifœmerica Vietæ* (De Emendat. Æquationum, c. 14.) quarum præcepta Cartesius breviter ac luculenter tradidit. "Multiplicetur vel dividatur coefficiens membri secundi æquationis propositæ per quantitatem illam, quæ multiplicare aut dividere debet radices. Ejusdem potestas quadratica multiplicet vel dividat coefficientem membri tertii; cubica coefficientem quarti, eodemque deinceps modo." Cæterùm harum transmutationum in numerali æquationum exegesi maximæ sunt utilitates; utpote quarum ope non modò fractiones & surda tollantur, sed numeri ipsâ mole intractabiles ad minores revocentur, calculis faciliùs subjiciendos. Sic si æquatio fuerit $x^3*-203125x-23437500=0$, divido *ισαμοιρικως* per numerum 125. $\begin{array}{cccc} 1 & 125 & 15625 & 1953125 \end{array}$. Ex divisione provenit nova, $x^3*-203125x-23437500=0$; cujus radicibus 4, -3, -1, cum numero 125 multiplicatis, exsistunt propositæ radices, 500, -375, -125.

Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquandò ad formam commodiorem reduci (e). DE TRANSMUT. ÆQUAT.

Sic æquatio novissima, $3y^3-2y+1=0$, scribendo $\frac{1}{z}$ pro y, evadit $\frac{3}{z}-\frac{2}{z}+1=0$, seu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato, $z^3-2z+3=0$. Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modò secundus priùs tollatur; ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias, id fiet, si modò tertium priùs tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, cujus radices sunt; 3, 2, 1, -5; si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x, resultabit æquatio $\frac{1}{y^4}-\frac{1}{y^3}-\frac{19}{yy}+\frac{49}{y}-30=0$; quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4, ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet $y^4-\frac{49}{30}y^3+\frac{19}{30}yy+\frac{1}{30}y-\frac{1}{30}=0$; cujus radices sunt, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maximâ, 3, jam conversâ in minimam, $\frac{1}{3}$, & minimâ, 1, jam factâ maximâ, & radice negativâ, -5, quæ omnium maximè distabat à nihilo, jam omnium maximè accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes, (f) sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius, ubi tertium æquationis terminum sustulimus confici possunt; ut non opus sit hâc de re plura dicere. Addamus potiùs aliqua de limitibus æquationum.

CAPUT XVIII.

De Limitibus æquationum.

EX Æquationum generatione conflat, quod cognita quantitas secundi *termini æquationis, si signum ejus mutetur, æqualis*

(e) Transmutatio *Πρῶτη ἰσοχαλὸς* Vietæ, cui nomen inditum ex inverso, in æquatione transmutatâ coefficientium ordine. De Emendat. Æquationum, c. 2.

(f) Harum, ni fallor, præcipua est *Canonica æquationum transmutatio*, ut coefficientes sint quæ præscribantur: de quâ consule Vietam in Libro de Emendatione Æquationum, c. 8. & Cartesium in Libro tertio Geometriæ.

Cap. XVIII. *ſit aggregato omnium radicum ſub ſignis propriis*; *ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum ſub ſingulis binis radicibus*; *ea* quarti, *ſi ſignum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis ternis radicibus*; *ea* quinti *æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis quaternis*; *&c. ſic in infinitum* (ε).

Aſſumamus $x=a$, $x=b$, $x=-c$, $x=d$, &c. ſeu $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, $x-d=0$, & ex horum continuâ multiplicatione generemus æquationes, ut ſuprà. Jam multiplicando $x-a$ per $x-b$, producetur æquatio $xx \overset{-a}{-b} x+ab=0$; ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſi ſigna ejus mutentur, nimirum $a+b$, eſt ſumma duarum radicum, a & b; & cognita tertii, ab, illud unicum quod ſub utrâque continetur rectangulum. Rurſus, multiplicando hanc æquationem per $x+c$, producetur æquatio cubica, $x^3 \overset{-a}{-b} xx \overset{+ab}{-ac} x \overset{}{+abc}=0$; ubi cognita quantitas ſecundi, ſub $+c \quad -bc$

ſignis

(ε) Hæc eſt primaria æquationum proprietas, quam omnibus generaliter ineſſe primus affirmare auſus eſt Albertus Girardus, cùm de illis, quarum radices omnes poſſibiles ac poſitivæ eſſent, prior pronuntiaverat Franciſcus Vieta. Harriottus autem veritatem hâc in re, quam primus inveniſſe dicitur atque demonſtraſſe, ne intellexit quidem, licèt ea ſcripſiſſet, ex quibus aliis intelligere facile eſſet, ſi non priùs patefacta eſſet à Girardo. Nimirum Harriottus æquationem quadraticam $aa \overset{-b}{+c} a=bc$ procreari docet è multiplicatione æquationis ſimplicis, $a-b$, in quantitatem $a+c$; æquationem vero cubicam $aaa \overset{-b}{+c} aa \overset{-bc}{-bd} a=bcd$ è multiplicatione æquationis ſimplicis $a-b=0$ in quantitatem $a+c$, æquationiſque quadraticæ, ex primâ illâ multiplicatione effectæ, in quantitatem $a+d$. Hæc ſanè ac plura hujuſcemodi exempla, quorum quidem affatim congeſſit, tantundem valent, ac ſi generaliter dixiſſet, coefficientes in æquationibus compoſitis ex quantitatibus illis, b, c, d, generari, quæ cum quantitate ignotâ ſignis, $+$, $-$, connexæ binomia conſtituunt, quorum multiplicatione continuâ æquatio quæque generata eſt; legemque præterea procreationis eam attuliſſet, ut quantitatum illarum ſumma, ſignis contrariis, coefficientem ſecundi membri æquationis efficeret: factorum è binis ſumma coefficientem tertii: factorum è ternis ſignis contrariis ſumma coefficientem quartæ, eodemque uſque modo. Hæc inquam, exempla illa Harriotto congeſta ſatis apertè ſignificant: Hæc ipſe Harriottus tam enuntiaviſſe cenſendus eſt, ac ſi verbis diſertiſſimè enuntiâſſet. Ex hiſce verò Girardi Theorema procudere Carteſio quidem facile fuiſſet. Quid dicam Carteſio, ſummo plane Arithmetico? Cùm idem vel è populo cuilibet licuiſſet, cui id modò perceptum eſſet, æquationum ex multiplicationibus provenientium quantitates negativas, $-c$, $-d$, æquè ac poſitivam b, habendas eſſe radices. Harriottus autem, cui id nunquam planè perceptum fuit, qui arctè adeo ad lumen connivebat, ut quantitates $-c$, $-d$, æquationum, quæ ex illis procreatæ eſſent, radices eſſe conſtantiſſimè negaret, quî fieri potuit ut ille intelligeret coefficientium geneſin è *radicum* multiplicatione? Girardi autem, ut ad illum redeam, hæc ſunt verba. "La premiere faction des ſolutions eſt eſgale au nombre du premier meſlé, la ſeconde faction des meſmes eſt eſgale au nombre du deuxieſme meſlé, la troiſieſme au troiſieſme, & tousjours ainſi, tellement que la derniere faction eſt eſgale a la fermeture, & ce ſelon les ſignes qui ſe peuvent remarquer en l'ordre alternatif."

Quæ

ſignis mutatis, nimirum $a+b-c$, eſt ſumma radicum, a, b & $-c$; cognita tertii, $ab-ac-bc$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis, a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti, ſub ſigno mutato, $-abc$, illud unicum contentum eſt quod omnium continuâ multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc, multiplicando cubicam illam æquationem per $x-d$, producetur hæcce quadrato-quadratica, ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſub ſignis mutatis, $a+b-c+d$, eſt ſumma omnium radicum; ea tertii, $ab-ac-bc+ad+bd-cd$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis; ea quarti, ſub ſignis mutatis, $-abc+abd-bcd-acd$, ſumma contentorum ſub ſingulis ternis; ea quinti, $-abcd$, contentum unicum ſub omnibus. Et hinc primò colligimus omnes æquationis cujuſcunque terminos nec fractos nec ſurdos habentis radices non ſurdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium.

$$x^4 \overset{-a}{-b} x^3 \overset{+ab}{-ac} \overset{-bc}{+ad} xx \overset{+abc}{-abd} \overset{+bcd}{+acd} x - abcd = 0 :$$

De Limitibus Æquat.

Quæ Latinè ſic ſonant:

Radicum effectio prima coefficienti primi compoſiti æqualis eſt, effectio earundem ſecundæ compoſiti ſecundi coefficienti, tertia tertii, atque ſic continuò donec ad effectionem ultimam perventum fuerit, quæ homogeneo comparationis eſt æqualis. Signa autem coefficientium ea adhibenda ſunt, quæ reperiuntur in ordine æquationis alterno.

Quòd ſi vocibus illis minùs uſitatis, *effectio*, *compoſitum*, *alternus ordo* (effection, meſlè, ordre alternatif) obſcuritas aliqua inſit, eam omnem amolientur auctoris definitiones. "Es equations meſlées la plus haute quantité eſt dite Maxime, ou haute extremitè; celle qui eſt un degré plus bas, eſt dite premier meſlé; celle qui eſt encor un degre plus bas eſt dite ſecond meſlé, & ainſi conſequemment, tellement que le ◎ eſt la fermeture ou baſſe extremité."

"Quant pluſieurs nombres ſont propoſez, la ſomme totale ſoit dite premiere faction; la ſomme de tous les produits de deux a deux ſoit dite deuxieſme faction: la ſomme de tous les produits de 3 à 3 ſoit dite la troiſieſme faction, & tousjours ainſi juſques à la fin; mais le produit de tous les nombre ſoit la derniere faction: or il y a autant de factions que de nombres propoſez."

"Ordre alterne des equations eſt quand les maxime ou haute extremité n'a autre nombie que l'unite avec le ſigne $+$, & que les denominateurs, ou caracteres, impairs ſont d'un coſté & les pairs de l'autre."

Quæ Latinè ſic dici poſſunt. "Æquationis cujuſvis compoſitæ membrum illud, quod ex quantitatis incognitæ poteſtate elatiſſimâ efficitur, maximum dicitur, five extremum ſuperius; quod ex poteſtate uno tantùm gradu inferiore, compoſitum primum; quod ex uno rurſum gradu inferiore, compoſitum ſecundum; eodemque ſimiliter progreſſu uſquedum ad membrum perventum fuerit incognitâ quantitate prorſus vacuum, quod *clauſula* dicatur, ſive extremum inferius. [Membrum illud ultimum quod *clauſulam* Girardus, ſive *poſitionem*, dixit, Vieta *homogeneum comparationis* appellabat.]

Quotcunque numeris propoſitis, ſumma quæ ex omnibus Algebraicè conficitur, effectio prima dicatur. Summa factorum è binis effectio ſecunda: ſumma factorum è ternis effectio tertia: ac ſimili deinceps modo. Factum verò ex omnibus dicatur effectio ultima. Cæteràm tot ſemper effectiones erunt quot numeri ex quibus procreatæ fuerint.

Alternus eſt æquationum ordo, cùm membra omnia, indicibus poteſtatum incognitæ imparibus prædita, ab alterâ parte conſtituantur, ab alterâ verò ſeorſum quot indicibus paribus gaudent: eâ verò lege, ut poteſtati elatiſſimæ ſignum, ſit $+$, neque coefficiens alius præter ipſam unitatem."

Id

CAP. XVIII.

rium contenta, esse aliquos ex divisoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi constiterit, nullum ultimi termini divisorem esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum, pluriumve contentum, simul constabit, nullam esse radicem, radicumve rectangulum, aut contentum, nisi quod sit surdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse, p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps. Et, signis terminorum probè observatis, fiat $p=a$. $pa+2q=b$. $pb+qa+3r=c$. $pc+qb+ra+4s=d$. $pd+qc+rb+sa+5t=e$. $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$. & sic in infinitum, observatâ serie progressionis. Et erit a summa radicum; b summa quadratorum ex singulis radicibus; c summa cuborum; d summa quadrato-quadratorum; e summa quadrato-cuborum; f summa cubo-cuborum; & sic in reliquis (h). Ut in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ubi cognita quantitas secundi termini est -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1=p$, $19=q$, $-49=r$, $30=s$. Et inde orientur $a=(p=)\ 1$. $b=(pa+2q=1+38=)\ 39$. $c=(pb+qa+3r=39+19-147=)-89$. $d=(pc+qb+ra+4s=-89+741-49+120=)723$. Quare summa radicum erit 1; summa quadratorum radicum 39; summa cuborum -89; & summa quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices sunt, 1, 2, 3, & -5; & harum summa, $1+2+3-5$, est 1; summa quadratorum, $1+4+9+25$, est 39; summa cuborum, $1+8+27-125$, est -89; & summa quadrato-quadratorum, $1+16+81+625$, est 723.

Et hinc colliguntur *limites*, inter quos consistent radices æquationis, ubi nulla earum impossibilis est. Nam cùm radicum omnium quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento,

Id nimirum efficit illa alternatio, ut membri secundi, quarti, sexti, aliorumque paribus in locis æquationis ordinatæ consistentium, signa mutentur, reliquorum non mutatis.

(h) Potestatum è radicibus incognitis consummationem idem vir ille magnus Albertus Girardus omnium primus, credo, ante Newtonum aggressus est; ex cujus formulis, inter nova inventa Algebraica editis, Newtonianæ facilè deducendæ sunt

Soit { A premier meslé; a second; c troiseſme; D quatrieſme; &c. } fit { A coefficiens primus; intelligè membri secundi coefficientem; B secundus; c tertius; D quartus; &c. }

Alors

argumento, summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quàm quadrato-quadratum radicis maximæ; & summa cubo-cuborum major quàm cubo-cubus radicis maximæ. DE LIMITIBUS ÆQUAT.

REGULA I.

Quamobrem si limitem desideres, quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum radicum, & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major *erit quam radix maxima æquationis.* Sed ad radicem maximam propius accedes, si quæras *summam quadrato-quadratorum, & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam: & adhuc* magis, *si quæras summam cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente, radix quadratica summæ quadratorum radicum, seu $\sqrt{39}$, est $6\frac{1}{2}$ quàm proximè; & $6\frac{1}{2}$ magis distat à nihilo quam ulla radicum, 1, 2, 3, -5. At radix quadrato-quadratica summæ quadrato-quadratorum radicum, nempe $\sqrt[4]{723}$, quæ est $5\frac{1}{2}$ circiter, propiùs accedit ad radicem à nihilo remotissimam, -5.

REGULA II.

Si inter summam quadratorum & summam quadrato-quadratorum radicum, inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quàm summa cuborum radicum sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, ut priùs inventæ, semisumma erit major, quàm summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia major quàm summa cuborum radicum negativarum.

Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quàm radix cubica illius semisummæ, & maxima radicum negativarum minor quàm radix cubica illius semidifferentiæ.

Alors en toute sorte d'equations { A; Aq − B2; A cub. − AB3 + C3; Aqq − Aqb4 + AC4 + Bq2 − D4 } fera la somme de { solutions; quarez; cubes; quare-quarez. }

Tum in æquatione cujuscunque formæ { A; A² − 2B; A³ − 3A × B + 3C; A⁴ − 4B × A² + 4A × C + 2B² − 4D } summa erit { radicum; quadratorum è radicibus; cuborum ex iisdem; quadrato-quadratorum. }

Sic

CAP. XVIII. Sic in æquatione præcedente, media proportionalis inter ſummam quadratorum radicum, 39, & ſummam quadrato-quadratorum, 723, eſt 168 circiter. Summa cuborum ſub propriis ſignis ſupra erat – 89. Hujus & 168 ſemiſumma eſt $39\frac{1}{2}$, ſemidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ eſt $3\frac{1}{2}$ circiter, major eſt quàm maxima radicum affirmativarum, 3. Poſterioris radix cubica, quæ eſt $5\frac{1}{21}$ proximè, tranſcendit radicem negativam, – 5. Quo exemplo videre eſt, quàm propè ad radicem hâc methodo acceditur, ubi unica tantùm radix negativa eſt, vel unica affirmativa.

REGULA III.

Et tamen propiùs adhuc accederetur; ſi inter ſummam quadrato-quadratorum radicum & ſummam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur, atque ex hujus, & ſummæ quadrato-cuborum radicum ſemiſummâ, & ſemidifferentiâ, radices quadrator cubicæ extraherentur.

Nam radix quadrato-cubica ſemiſummæ tranſcenderet maximam radicem affirmativam; & radix quadrato-cubica ſemidifferentiæ maximam ſeu extimam negativam, ſed exceſſu multo minore quàm antè. Cùm igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri poteſt minima, dein minima in maximam converti, & poſtea omnes præter maximam fieri negativæ, conſtat quomodo radix imperata, quàm proximè, poteſt obtineri.

REGULA IV.

Si radices omnes præter duas negativæ ſunt, poſſunt illæ duæ ſimul hoc modo erui.

Inventâ juxta methodum præcedentem ſummâ cuborum duarum illarum radicum, ut & ſummâ quadrato-cuborum, & ſummâ quadrato-quadrato cuborum radicum omnium; inter poſteriores duas ſummas quære mediam proportionalem; & ea erit differentia inter ſummam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſummam cubo-cuborum radicum negativarum, quàm proximè; adeoque hujus mediæ proportionalis, & ſummæ cubo-

cubo-cuborum radicum omnium ſemiſumma erit ſumma cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia erit ſumma cubo-cuborum radicum negativarum. Habitâ igitur tùm ſummâ cuborum, tum ſummâ cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo ſummæ poſterioris aufer quadratum ſummæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habitâ vero tum ſummâ tum differentiâ cuborum, habentur cubi ipſi. Extrahe eorum radices cubicas, & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quàm proximè. Et ſi in altioribus poteſtatibus opus conſimile inſtitueretur, magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes, ob difficilem calculum, minùs uſui ſunt, & ad æquationes tantùm extenduntur, quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites aliâ ratione invenire jam docebo, quæ & facilior ſit, & ad omnes æquationes extendat. DE LIMITIBUS ÆQUAT.

REGULA V.

Multiplicetur æquationis terminus unuſquiſque per numerum dimenſionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rurſus multiplicetur unuſquiſque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quàm priùs; & factum dividatur per radicem æquationis. Et ſic pergatur, ſemper multiplicando per numeros unitate minores quàm priùs, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes deſtruantur, quorum ſigna diverſa ſunt à ſigno primi, ſeu altiſſimi termini, præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativâ radice major; qui in terminis prodeuntibus ſcriptus pro radice, efficit, eorum, qui ſingulis vicibus per multiplicationem producebantur, aggregatum ejuſdem ſemper eſſe ſigni cum primo, ſeu altiſſimo, termino æquationis.

Ut ſi proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. Hanc primum ſic multiplico, $\overset{5}{x^5} - \overset{4}{2x^4} - \overset{3}{10x^3} + \overset{2}{30xx} + \overset{1}{63x} - \overset{0}{120}$. Dein terminos prodeuntes, diviſos per x, rurſum multiplico ſic, $\overset{4}{5x^4} - \overset{3}{8x^3} - \overset{2}{30xx} + \overset{1}{60x} + \overset{0}{63}$; & terminos prodeuntes rurſum dividendo per x prodeunt $20x^3 - 24xx - 60x + 60$; quos, minuendi gratiâ, divido per maximum diviſorem 4, & fiunt $5x^3 - 6xx - 15x + 15$.

Cap. XVIII. Hi itidem multiplicati per progreſſionem 3. 2. 1. 0, & diviſi per x, fiunt $15xx-12x-15$; & rurſum diviſi per 3 fiunt $5xx-4x-5$. Et hi multiplicati per progreſſionem 2. 1. 0, & diviſi per $2x$, fiunt $5x-2$. Jam cùm terminus æquationis altiſſimus, x^5, affirmativus ſit; tento, quinam numerus ſcriptus in his productis pro x efficiet ea omnia affirmativa eſſe. Et quidem tentando 1, fit $5x-2=3$, affirmativum; ſed $5xx-4x-5$, fit -4, negativum. Quare limes erit major quàm 1. Tento itaque numerum aliquem majorem, puta 2. Et in ſingulis ſubſtituendo 2 pro x, evadunt,

$5x-2=8$
$5xx-4x-5=7$
$5x^3-6xx-15x+15=1$
$5x^4-8x^3-30xx+60x+63=79$
$x^5-2x^4-10x^3+30xx+63x-120=46.$

Quare cùm numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, ſint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quàm radicum affirmativarum maxima. Similiter ſi limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel, quod perinde eſt, muto ſigna terminorum alternorum, & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum ſignis, quantitates, in quibus numeri ſubſtituendi ſunt, fient

$5x+2$
$5xx+4x-5$
$5x^3+6xx-15x-15$
$5x^4+8x^3-30xx-60x+63$
$x^5+2x^4-10x^3-30xx+63x+120$

Ex his ſeligo quantitatem aliquam, ubi termini negativi maximè prævalere videntur; puta $5x^4+8x^3-30xx-60x+63$: & hîc, ſubſtituendo pro x numeros 1 & 2, prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quàm -2. Subſtituendo autem numerum 3, prodit numerus affirmativus 234. Et ſimiliter in cæteris quantitatibus ſubſtituendo numerum 3 pro x prodit ſemper numerus affirmativus. Id quod ex inſpectione ſolâ colligere licet. Quare numerus -3 tranſcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3, inter quos radices omnes conſiſtunt.

Horum verò limitum inventio uſui eſt, tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum ſurdarum ex ipſis; ne fortè radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione noviſſimâ, ſi radices rationales, ſiquas fortè habeat, invenire vellem; ex ſuperioribus certum eſt, has non alias eſſe poſſe, quàm diviſores ultimi termini æquationis, qui hîc eſt 120. Proin tentando omnes ejus diviſores, ſi nullus earum, ſcriptus in æquatione pro radice x, efficeret omnes

nes terminos evaneſcere; certum eſt æquationem non admittere radicem, niſi quæ ſit ſurda. At ultimi termini 120, diviſores permulti ſunt, nimirum 1.-1.2.-2.3.-3.4.-4.5.-5.6.-6.8.-8.10.-10.12.-12.15.-15.20.-20.24.-24.30.-30.40.-40.60.-60.120. & -120. Et hos omnes diviſores tentare, tædio eſſet. Cognito autem quòd radices inter limites 2 & -3 conſiſtunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit, diviſores tentare, niſi qui ſunt inter hos limites; nimirum diviſores 1, -1, & -2. Nam ſi horum nullus radix eſt, certum eſt æquationem non habere radicem, niſi quæ ſit ſurda. De Surdis Diviſoribus.

CAPUT XIX.

Æquationum reductio per diviſores ſurdos.

HActenus reductionem æquationum tradidi, quæ rationales diviſores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, ſex, aut plurium dimenſionum irreducibilem eſſe concludere poſſumus, tentandum erit etiam, annon per ſurdum aliquem diviſorem reduci queat; vel, quod perinde eſt, tentandum erit, annon æquatio ita in duas æquales partes dividi poſſit, ut ex utrâque radix extrahatur. Id autem fiet per ſequentem methodum.

Diſpone æquationem ſecundum dimenſiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini ſub ſignis ſuis conjunctim æquales ſint nihilo, & terminus altiſſimus affirmativo ſigno afficiatur. Deinde, ſi æquatio quadratica *ſit, (nam & hunc caſum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut ſi æquatio ſit $xx-ax-b=0$, aufer utrobique $-b$, & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx-ax+\frac{1}{4}aa=b+\frac{1}{4}aa$, *& extractâ utrobique radice, fiet* $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}aa}$; ſive $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}aa}$.

Quòd ſi æquatio ſit quatuor dimenſionum, *ſit ea* $x^4+px^3+qxx+rx+s=0$, ubi p, q, r, & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis ſignis propriis adfectas. Fac* $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$. $r-\frac{1}{2}\alpha p=\beta$. $s-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\zeta$ *Dein pone pro n communem aliquem terminorum* β & 2ζ *diviſorem*

CAPUT XIX. *forem integrum, & non quadratum; qui & impar esse debet, & per 4 divisus unitatem relinquere, si terminorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantitatis* $\frac{\beta}{n}$, *si p sit par; vel imparis divisoris dimidium, si p sit impar; vel nihil, si dividuum* β *sit nihil. Aufer Quotum de* $\frac{1}{2}pk$, *& reliqui dimidium dic l. Dein pro* Q *pone* $\frac{\alpha+nkk}{2}$, *& tenta si n dividat* QQ$-s$, *& Quoti radix sit rationalis & æqualis l. Si hoc contigerit ad utramque partem æquationis adde* $nkkxx + 2nklx + nll$, *& radicem extrahes utrobique; prodeunte* $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}$ *in* $kx+l$.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^4+12x-17=0$; & quia p & q hîc desunt, & r est 12, & s est -17, substitutis hisce numeris fiet $\alpha=0$, $\beta=12$, & $\zeta=-17$; & ipsorum β & 2ζ, seu 12 & -34, communis divisor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ est 6, & ejus divisores 1, 2, 3, & 6 successivè tentandi sunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l respectivè. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$, id est kk, æquale Q. Est & $\sqrt{\frac{QQ-s}{n}}$, id est, $\sqrt{\frac{QQ+17}{2}}=l$. Ubi numeri pares 2 & 6 scribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & QQ$-s$ numerus erit impar, adeoque dividi non potest per n seu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi sunt. Ubi verò 1 & 3 scribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & QQ$-s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi possunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen sola -3 congruit cum l. Pono itaque $k=1$, $l=-3$, & $Q=1$; & quantitatem $nkkxx+2nklx+nll$, id est $2xx-12x+18$, addo ad utramque partem æquationis; & prodit $x^4+2xx+1=2xx-12x+18$; & extractâ utrobique radice, $xx+1=x\sqrt{2}-3\sqrt{2}$. Quòd si radicis extractionem effugere malueris, pone $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n\times kx+l}$, & invenietur, ut antè, $xx+1=\pm\sqrt{2\times x-3}$. Et ex hâc æquatione, si radices iterum extrahas, proveniet $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\sqrt{\frac{-1}{2}\mp 3\sqrt{2}}$, *h. e.* secundùm signorum variationes, $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, & $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Item $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$; & $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Quæ quidem quatuor sunt radices æquationis sub initio propositæ, $x^4+12x-17=0$. Sed earum ultimæ duæ sunt impossibiles.

Proponamus

DE SURDIS DIVISORIBUS.

Proponamus jam æquationem $x^4-6x^3-58xx-114x-11=0$, & scribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s respectivè, orietur $-67=\alpha$, $-315=\beta$, & $-1133\frac{1}{4}=\zeta$. Numerorum β & 2ζ, seu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis divisor est unicus 3, adeoque hic erit n; & ipsius $\frac{\beta}{n}$, seu -105, divisores sunt 3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi sunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu -105 per 3, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu -3×3, & restat 26; cujus dimidium, 13, esse debet l. Sed $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu $\frac{-67+27}{2}$, id est -20, erit Q, & QQ$-s$ erit 411, qui dividi potest per n seu 3; sed quoti 137 radix non potest extrahi. Quamobrem rejicio 3, & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu -105 per 5, est -21, & hunc subducendo de $\frac{1}{2}pk$ seu -3×5, restat 6, cujus dimidium 3 erit l. Est & Q, seu $\frac{\alpha+nkk}{2}$, id est $\frac{-67+75}{2}$, numerus 4. Et QQ$-s$, seu $16+11$ dividi potest per n; & Quoti, qui est 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo esse $l=3$, $k=5$, $Q=4$, & $n=3$; & si $nkkxx+2nklx+nll$, id est $75xx+90x+27$ ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi posse, & prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n\times kx+l}$; seu $xx-3x+4=\pm\sqrt{3\times 5x+3}$: & extractâ iterum radice $x=\frac{3\pm 5\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{17\pm\frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud secus si proponatur æquatio hæcce, $x^4-9x^3+15xx-27x+9=0$, scribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s respectivè, emerget $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $-50\frac{5}{8}=\beta$, & $2\frac{7}{64}=\zeta$. Ipsorum β & 2ζ, seu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes divisores sunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; sed 9 quadratus est, & 3, 15, 27, 135 divisi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis restant soli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primò $n=5$, & ipsius $\frac{\beta}{n}$, seu $-\frac{81}{8}$, divisores impares dimidiati, nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, subductus de $\frac{1}{2}pk$, seu $-\frac{9}{4}$, relinquit 18 pro $2l$; & $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu -2 est, Q; & QQ$-s$,

CAPUT XIX. $QQ-s$, seu -5, dividi quidem potest per n, seu 5; sed Quoti negativi, -1, radix impossibilis est, quæ tamen deberet esse 9. Quare concludo k non esse $\frac{1}{2}$, & tento jam si sit $\frac{3}{2}$. Quotum, qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$, nempe Quotum $-\frac{27}{4}$, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu $-\frac{27}{4}$, & restat 0. Unde l jam nihil erit. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu 3, æqualis Q, & $QQ-s$ nihil est; unde rursus l, qui hujus $QQ-s$ divisi per n radix est, invenitur nihil. Quamobrem, his ita quadrantibus, concludo esse $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, & $Q=3$: adeoque addendo ad utramque partem æquationis propositæ terminos $nkkxx+2nlkx+nll$ id est $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo, prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$; id est $xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}\times\frac{3}{2}x$.

Eâdem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut si fuerit $x^4-2ax^3\overset{+2aa}{-cc}xx-2a^3x+a^4=0$, substituendo $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro p, q, r, & s respectivè, obtinebuntur $aa-ce=\alpha$, $-acc-a^3=\beta$, & $\frac{3}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. Quantitatum β & 2ζ divisor communis est $aa+cc$, qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$, seu $-a$, divisores habet 1 & a. Sed quia n duarum est dimensionum, & $k\sqrt{n}$ non nisi unius esse debet, ideo k nullius erit, adeoque non potest esse a. Sit ergo $k=1$, & diviso $\frac{\beta}{n}$ per k, aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$, seu $-a$, & restabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu aa, est Q, & $QQ-s$, seu a^4-a^4, nihil est; & inde rursus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q rectè inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis propositæ terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id est $aaxx+ccxx$, radicem utrobique extrahi posse, & extractione illâ prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$; id est $xx-ax+aa=\pm x\sqrt{aa+cc}$. Et, extractâ iterum radice, $x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum surdarum*: potest tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, si modò pro quantitate n usurpetur unitas; eoque pacto unâ vice examinare possumus, utrùm æquatio, fractis & surdis terminis carens, divisorem aliquem duarum dimensionum, aut

rationalem aut surdum, admittat. Ut si æquatio $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$ proponatur, substituendo -1, -5, $+12$, & -6, pro p, q, r, & s respectivè invenientur $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $9\frac{3}{8}=\beta$, & ponendo $n=1$, Quantitatis $\frac{\beta}{n}$, seu $\frac{75}{8}$, divisores sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75; quorum dimidia (siquidem p sit impar) tentanda sunt pro k. Et si pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk-\frac{\beta}{nk}=-5$, & ejus dimidium $-\frac{5}{2}=l$. Item $\frac{\alpha+nkk}{2}=\frac{1}{2}=Q$, & $\frac{QQ-s}{n}=6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l. DE SURDIS DIVISORIBUS.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q rectè inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id est $6\frac{1}{4}xx-12\frac{1}{2}x+6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi posse; & extractione illâ prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\pm\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$: id est, $xx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\pm1\times\overline{2\frac{1}{4}x-2\frac{1}{2}}$, seu $xx-3x+3=0$, & $xx+2x-2=0$; adeoque per hasce duas æquationes quadraticas, æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditiùs inveniuntur per aliam methodum suprà traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi sunt divisores, ita ut omnes pro k tentare molestum fuerit, potest eorum numerus citò minui, quærendo omnes divisores quantitatis $\alpha s-\frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui, aut imparis alicujus dimidio, debet quantitas Q æqualis esse. Sic in exemplo noviissimo $\alpha s-\frac{1}{4}rr$ est $-\frac{9}{2}$, è cujus divisoribus 1, 3, 9, aut iisdem dimidiatis, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q. Quare sigillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$, seu $-\frac{21}{8}+\frac{1}{2}kk$, id est Q, esse aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, &c. pro k, prodeunt respectivè $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, &c. pro Q, è quibus soli $-\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, adeoque, cæteris rejectis, aut erit $k=\frac{3}{2}$, & $Q=-\frac{3}{2}$ aut $k=\frac{5}{2}$, & $Q=\frac{1}{2}$. Qui duo casus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimensionum.

Si æquatio sex *dimensionum reducenda est*, sit ea $x^6+px^5+qx^4+rx^3+sxx+tx+v=0$, & fac $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta=\gamma$. $\gamma-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\zeta$. $t-\frac{1}{2}\alpha\beta=\eta$. $v-\frac{1}{4}\beta\beta=\vartheta$. $\zeta\vartheta-\frac{1}{4}\eta\eta=\lambda$.

Dein sumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2ϑ, divisor

CAPUT XIX.

divisor integer, & non quadratus, nec per numerum quadratum, divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modò terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$, si p sit par, vel divisoris imparis dimidium, si p sit impar, vel nihil si λ nihil sit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$. Pro l divisor aliquis quantitatis $\frac{Qr-QQp-t}{n}$, si Q sit integer; vel divisoris imparis dimidium, si Q sit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil, si dividuum istud $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ sit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}Qp+nkl$. Dein tenta si RR$-v$ dividi possit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea si radix ista æqualis sit tam quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ quàm quantitati $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propositæ, scribe hanc $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\pm\sqrt{n\times kxx+lx+m}$. Etenim hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propositam. Quòd si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modò priùs constet, æquationem per divisorem rationalem reduci non posse.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^6-2ax^5+2bbx^4+2abbx^3\begin{matrix}-2aabb\\+2a^3b\\-4ab^3\end{matrix}xx\begin{matrix}+3aab^4\\-a^4bb\end{matrix}=0$, & scribendo $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb$ $+2a^3b-4ab^3$, 0, & $3aab^4-a^4bb$ pro p, q, r, s, t, & v respectivè, prodibunt $2bb-aa=\alpha$. $4abb-a^3=\beta$. $2a^3b+2aabb-4ab^3-a^4=\gamma$. $-b^4+2a^3b+3aabb-4ab^3-\frac{5}{4}a^4=\zeta$. $-\frac{1}{2}a^5+3a^3bb-4ab^4=\eta$. & $-aab^4$ $+a^4bb-\frac{1}{4}a^5=\theta$. Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis divisor est $aa-2bb$, seu $2bb-aa$, perinde ut aa vel $2bb$ majus sit. Sed esto aa majus quàm $2bb$, & $aa-2bb$ erit n. Debet enim n semper affirmativum esse. Porro $\frac{\zeta}{n}$ est $-\frac{5}{4}aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; $\frac{\eta}{n}$ est $-\frac{1}{2}a^3+2aabb$; & $\frac{\theta}{n}$ est $-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb$: adeoque $\frac{\zeta}{2n}\times\frac{\theta}{n}-\frac{\eta\eta}{8nn}$ seu, $\frac{\lambda}{2nn}$, est $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4bb$ $+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{5}aab^4$; cujus divisores sunt 1, a, aa; sed quia $\sqrt{n\times k}$ non nisi unius dimensionis esse potest, & $\sqrt{n}$ unius est, ideo k nullius erit; proinde non nisi numerus esse potest. Quare rejectis a & aa, restat solum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ etiam nihil est; adeoque l, qui ejus divisor esse debet, erit

erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r-pQ+nkl$ dat abb pro R. Et RR$-v$ est $-2aab^4+a^4bb$; quod dividi potest per n, seu $aa-2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negativè sumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$, seu $\frac{0}{0}$, non est inæqualis; quantitati verò definitæ $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$ æqualis est. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m; &, loco æquationis propositæ, scribi potest $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\sqrt{n\times kxx+lx+m}$, i. e. $x^3-axx+abb=\sqrt{aa-2bb}\times\sqrt{xx-ab}$. Cujus conclusionis veritatem probare potes, quadrando partes æquationis inventæ, & auferendo terminos ad dextram ex utrâque parte. Eâ enim operatione producetur æquatio $x^6-2ax^5+2bbx^4+2abbx^3$ $-2aabbxx+2a^3bxx-4ab^3xx+3aab^4-a^4bb=0$, quæ reducenda proponebatur.

DE SURDIS DIVISORIBUS.

Si æquatio est octo *dimensionum, sit ea* $x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+tx^3$ $+vxx+wx+z=0$, & fiat $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{2}\alpha\alpha=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$. & $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$. Et terminorum 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, quære communem divisorem, qui integer sit, & non quadratus, nec per quadratum divisibilis; quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modò terminorum alternorum p, r, t, w, aliquis sit impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis, certum est æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non posse; & si non potest ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum divisor communis. Opusculum igitur hactenus institutum examinatio quædam est, utrùm æquatio reducibilis sit necne, adeoque, cùm ejusmodi reductiones rarò possibiles sint, finem operi ut plurimùm imponet.

Et simili ratione si æquatio sit decem, duodecim, vel plurium dimensionum, impossibilitas reductionis cognosci potest.

Ut si ea sit $x^{10}+px^9+qx^8+rx^7+sx^6+tx^5+vx^4+ax^3+bxx+cx+d=0$, faciendum erit $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$, $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$, $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$, $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$, $v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$, $a-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, $b-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$, $c-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta$, $d-\frac{1}{4}\delta\delta=\varkappa$; & quærendus communis divisor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, qui integer sit & non quadratus; quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modò terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis sit impar.

CAPUT XIX. Sic ſi *duodecim* dimenſionum æquatio ſit $x^{12}+px^{11}+qx^{10}+rx^{9}+sx^{8}+tx^{7}+vx^{6}+ax^{5}+bx^{4}+cx^{3}+dxx+ex+f=0$, faciendum erit $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$, $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$, $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$, $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$, $v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$, $a-\frac{1}{2}p\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, $b-\frac{1}{2}\alpha\varepsilon-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$, $c-\frac{1}{2}\beta\varepsilon-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta$, $d-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon-\frac{1}{4}\delta\delta=\iota$, $e-\frac{1}{2}\delta\varepsilon=\lambda$, $f-\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon=\mu$; & quærendus communis diviſor integer, & non quadratus, terminorum ſex 2ζ, 8η, 4θ, 8ι, 4λ, 8μ, qui per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modò terminorum alternorum p, r, t, a, c, e aliquis ſit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio propoſita ſemper per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit, ubi ejuſmodi diviſor communis nullus eſt. Siquando verò ejuſmodi diviſor n inventus ſpem faciat futuræ reductionis, poteſt ea inſtituti inſiſtendo veſtigiis operis, quod in æquatione octo dimenſionum ſubjungimus.

Quære numerum quadratum, cui, per n multiplicato, ultimus æquationis terminus z, ſub ſigno proprio adnexus, quadratum numerum efficit. Id autem expeditè fiet, ſi ad z, ubi n eſt par, vel ad $4z$ ubi n eſt impar, ſucceſſivè addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps, donec ſumma æqualis fiat numero alicui in tabulâ numerorum quadratorum, quam ad manus eſſe ſuppono. Et ſi nullus ejuſmodi quadratus numerus priùs occurrit, quàm ſummæ illius radix quadratica aucta radice quadraticâ exceſſûs illius ſummæ ſupra ultimum æquationis terminum, quadruplo major ſit quàm maximus terminorum æquationis propoſitæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultrà tentare. Æquatio enim reduci non poteſt. Sed ſi ejuſmodi numerus quadratus priùs occurrit, ſit ejus radix s, ſi n eſt par, vel $2s$ ſi n eſt impar; & $\sqrt{\frac{ss-z}{n}}$ dic b. Debent autem s & b eſſe numeri integri, ſi n eſt par; at ſi n impar eſt, poſſunt eſſe fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et ſi unus eorum fractus eſt, alter fractus eſſe debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, p & k, poſt inveniendis, obſervandum eſt. Et omnes numeri s & b, qui intra præfatum limitem inveniri poſſunt, in catalogum referendi ſunt.

Poſtea pro k tentandi ſunt omnes numeri ſucceſſivè, qui non efficiunt $nk\pm\frac{1}{2}p$ quadruplo majus quàm maximus terminus æquationis;

quationis; & ponendum eſt in omni caſu $\frac{nkk+\alpha}{2}=Q$. Dein pro l tentandi ſunt ſucceſſivè numeri omnes, qui non efficiunt $nl\pm Q$ quadruplo majus quàm maximus terminus æquationis: & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4}+nkl=R$. Denique pro m tentandi ſunt ſucceſſivè omnes numeri, qui non efficiunt $nm\pm R$ quadruplo majus quàm maximus terminorum æquationis; & videndum, an in caſu quovis, ſi fiat $s-QQ-pR+nll=2H$, & $H+nkm=s$, ſit s aliquis numerorum, qui priùs pro s in catalogum relati erant; & præterea ſi alter numerus ei s reſpondens, qui pro b in eundem catalogum relatus erat, ſit his tribus $\frac{2RS-w}{2nm}$, $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}$ & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo caſu evenerint, vice æquationis propoſitæ, ſcribenda erit hæcce $x^{4}+\frac{1}{2}px^{3}+Qxx+Rx+S=\sqrt{n\times kx^{3}+lxx+mx+b}$.

De Surdis Diviſoribus.

Exempli gratiâ proponatur æquatio $x^{8}+4x^{7}-x^{6}-10x^{5}+5x^{4}-5x^{3}-10xx-10x-5=0$. Et erit $q-\frac{1}{4}pp=-1-4=-5=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=-10+10=0=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=5-\frac{25}{4}=-\frac{5}{4}=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=-5+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=-10-\frac{25}{8}=-\frac{105}{8}$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=-10=\zeta$. $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=-5-\frac{25}{64}=-\frac{345}{64}=\eta$. Ergo 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, reſpectivè, ſunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum diviſor communis 5; qui per 4 diviſus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cùm itaque inventus ſit diviſor communis n, ſeu 5, qui ſpem facit futuræ reductionis, quoniam iſte impar eſt, ad $4z$, ſeu -20, ſucceſſivè addo n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. ſeu 5, 15, 25, 35, 45, &c. & prodeunt $-15.\ 0.\ 25.\ 60.\ 105.\ 160.\ 225.\ 300.\ 385.\ 480.\ 585.\ 700.\ 825.\ 960.\ 1105.\ 1260.\ 1425.\ 1600$. Ex quibus ſolùm 0. 25. 225, & 1600 quadrati ſunt. Quare horum radices dimidiatæ $0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 20$, in catalogum referendæ ſunt pro s, & $\sqrt{\frac{ss-z}{n}}$, id eſt $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 9$, reſpectivè pro b. Sed quia $s+nb$, ſi ſcribatur 20 pro s & 9 pro b, fit 65, numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos ſolùm refero in tabulam, ut ſequitur.

b	$1.\ \frac{3}{2}.\ \frac{7}{2}.$
S	$0.\ \frac{5}{2}.\ \frac{15}{2}.$

His ita diſpoſitis, tento pro k numeros omnes, qui non efficiunt $\frac{1}{2}p\pm nk$, ſeu $2\pm 5k$, majus quadruplo maximi termini æqua-

CAPUT XIX. tionis 40; id est numeros, $-8.-7.-6.-5.-4.-3.-2.-1.0.1.2.3.4.5.6.7$; ponendo $\frac{nkk+\alpha}{2}$, seu $\frac{5kk-5}{2}$, id est numeros $\frac{315}{2}.120.\frac{175}{2}.60.\frac{75}{2}.20.\frac{15}{2}.0.-\frac{5}{2}.0.\frac{15}{2}.20.\frac{75}{2}.60.\frac{175}{2}.120.$ respectivè pro Q. Imo verò cum $Q\pm nl$, & multò magis Q, non debeat majus esse quàm 40, rejiciendos esse sentio $\frac{315}{2}.120.\frac{175}{2}$ & 60, & qui his respondent $-8.-7.-6.-5.5.6.7$. adeoque solos $-4.-3.-2.-1.0.1.2.3.4$ pro k, & $\frac{75}{2}.20.\frac{15}{2}.0.-\frac{5}{2}.0.\frac{15}{2}.20.\frac{75}{2}$ pro Q respectivè tentandos. Tentemus autem -1 pro k, & 0 pro Q; & in hoc casu, pro l tentandi deinceps erunt successivè omnes numeri, qui non efficiunt $Q\pm nl$ majus quàm 40, id est omnes numeri inter 10 & -10, & pro R respectivè numeri $\frac{2\beta-npkk}{4}+nkl$, seu $-5-5l$ id est $-55.-50.-45.-40.-35.-30.-25.-20.-15.-10.-5.0.5.10.15.20.25.30.35.40.45$, quorum tamen tres priores & ultimum, quia majores quàm 40, negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R; & in hoc casu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri, qui non efficiunt $R\pm nm$, seu $5\pm 5m$, majus quàm 40; id est numeri omnes inter 7 & -9; & videndum, an si ponendo $s-QQ-pR+nll$, id est $5-20+20$, seu $5,=2H$, fit $H+nkm$, seu $\frac{5}{2}-5m,=s$: id est, si ex his numeris $\frac{-65}{2}.\frac{-55}{2}.\frac{-45}{2}.\frac{-35}{2}.\frac{-25}{2}.\frac{-15}{2}.\frac{-5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{15}{2}.\frac{25}{2}.\frac{35}{2}.\frac{45}{2}.\frac{55}{2}.\frac{65}{2}.\frac{75}{2}.\frac{85}{2}$, aliquis æqualis sit alicui numerorum $0.\pm\frac{5}{2}.\pm\frac{15}{2}$, qui priùs in tabulam pro s relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt, $-\frac{15}{2}.-\frac{5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{15}{2}$, quibus respondent $\pm\frac{7}{2}.\pm\frac{3}{2}.\pm\frac{3}{2}.\pm\frac{7}{2}$ pro b in eâdem tabulâ scripti, ut & $2.1.0.-1$ pro m substituti. Verùm tentemus $-\frac{5}{2}$ pro s, 1 pro m, & $+\frac{3}{2}$ pro b; & fiet $\frac{2RS-w}{2nm}=\frac{-25+10}{10}=-\frac{3}{2}$, & $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}=\frac{25+10-5}{-20}=-\frac{3}{2}$, & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}=\frac{-10.+5+20}{-10}=-\frac{3}{2}$. Quare cùm prodeat omni casu $-\frac{3}{2}$ seu b, concludo numeros omnes rectè inventos esse, adeoque vice æquationis propositæ scribendum esse $x^4+\frac{1}{2}px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{n\times kx^3+lxx+mx+b}$, id est $x^4+2x^3+5x-2\frac{1}{2}=\sqrt{5\times -x^3-2xx+x-1\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimensionum, quæ sub initio proponebatur.

Quòd si tentando casus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipsius b nullo in casu inter se consensissent, argumento fuisset, æquationem, per extractionem surdæ radicis quadraticæ, reduci non potuisse. Deberent

Deberent autem aliqua hîc in operis abbreviationem annotari; sed quæ brevitatis causâ prætereo, cùm tantarum reductionum perexiguus sit usus, & rei possibilitatem potiùs quàm praxin commodissimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *surdæ radicis quadraticæ*. DE SURDIS DIVISORIBUS.

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem surdæ radicis cubicæ*, sed & has, ut quæ perrarò utiles sint, brevitatis gratiâ prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgò notæ, quas, si penitus præterirem, Lector fortasse desideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3*+qx+r=0$, cujus secundus terminus deest. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex precedentibus. Et supponatur x esse $=a+b$. Erit $a^3+3aab+3abb+b^3$ (id est x^3) $+qx+r=0$. Sit $3aab+3abb$ (id est $3abx$) $+qx=0$; & erit $a^3+b^3+r=0$. Per priorem æquationem est $b=-\frac{q}{3a}$, & cubicè, $b^3=-\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo, per posteriorem, est $a^3-\frac{q^3}{27a^3}+r=0$, seu $a^6+ra^3=\frac{q^3}{27}$; & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3=-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam, & habebitur a. Et supra erat $-\frac{q}{3a}=b$, & $a+b=x$. Ergo $a-\frac{q}{3a}$ radix est æquationis propositæ.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $y^3-6yy+6y+12=0$. Ad tollendum secundum æquationis hujus terminum, ponatur $x+2=y$, & orietur $x^3*-6x+8=0$; ubi est $q=-6$; $r=8$; $\frac{1}{4}rr=16$; $\frac{q^3}{27}=-8$; $a^3=-4\pm\sqrt{8}$; $a-\frac{q}{3a}=x$; & $x+2=y$; id est $2+\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}+\frac{2}{\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}}=y$.

Et hoc modo eruì possunt radices omnium cubicarum æquationum, ubi q affirmativum est; vel etiam ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quàm $\frac{1}{4}rr$; *id est ubi duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles*. At ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ simul majus quàm $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{q^3}{27}}$ quantitas impossibilis; atque adeo æquationis radix x vel y, hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu *tres sunt radices possibiles*, quæ omnes eodem modo se habent ad

æquationis

CAPUT XIX. æquationis terminos q & r, & indifferenter designantur per literam x vel y, adeoque omnes eâdem deberent lege erui & exprimi, quâ una aliqua eruitur & exprimitur: *sed omnes tres lege præfatâ exprimere impossibile est.* Quantitas $a-\frac{q}{3a^2}$, quâ x designatur, multiplex esse non potest, eâque de causâ Hypothesis quòd x, hoc in casu ubi triplex est, æqualis esse potest binomio $a-\frac{q}{3a^2}$, seu $a+b$, cujus nominum cubi, a^3+b^3, conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impossibilis est; & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi, mirum esse non debet.

Est & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de a^3+b^3+r id est de nihilo, aufer a^3+r, seu $\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$, & restabit $b^3=-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$. Est itaque $a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, & $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; vel $a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, & $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; adeoque horum summa $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; erit $=x$.

Possunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.

Tollendus est autem primùm secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans $x^4+qxx+rx+s=0$. Pone hanc multiplicatione duarum, $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, generari; id est eandem esse cum hâc, $x^4*\begin{smallmatrix}+f\\+g\\-ee\end{smallmatrix}xx\begin{smallmatrix}+eg\\-ef\end{smallmatrix}x+fg=0$; &, collatis terminis, fiet $f+g-ee=q$; $eg-ef=r$; & $fg=s$. Quare $q+ee=f+g$; $\frac{r}{e}=g-f$; $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$; $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$; $\frac{qq+2eeq+e^4-\frac{rr}{ee}}{4}(=fg)=s$; &, per reductionem, $e^6+2qe^4+\frac{qq}{-4}ee-rr=0$. Pro ee scribe y; & fiet $y^3+2qyy+\frac{qq}{-4}y-rr=0$, æquatio cubica, cujus terminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam præcedentem, vel secus, extrahi. Dein, habitâ illâ radice, regrediendum erit, ponendo $\sqrt{y}=e$; $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$; $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$; & æquationes duæ, $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$,

DE SURDIS DIVISORIBUS.

extractis earum radicibus, dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ, $x^4+qxx+rx+s=0$; nimirum $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum est, quòd si æquationis biquadraticæ radices quatuor possibiles sunt, æquationis cubicæ, $y^3+2qyy+\frac{qq}{-4}y-rr=0$, radices tres possibiles erunt; atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. *Sic & si æquationis quinque, vel plurium, dimensionum radices affectæ in radices non affectas, mediis æquationis terminis quoque pacto sublatis, convertantur; illa radicum expressio semper erit impossibilis, ubi plures quàm una radix, in æquatione imparium dimensionum, possibiles sunt, aut plures quàm duæ, in æquatione parium dimensionum, quæ per extractionem surdæ radicis quadraticæ, methodo suprà expositâ, reduci nequeunt.*

Docuit *Cartesius* æquationem biquadraticam per regulas ultimò traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio à nobis suprà reducta, $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Tolle secundum terminum, scribendo $v+\frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4-\frac{43}{8}vv+\frac{75}{8}v-\frac{851}{256}=0$. Ad tollendas fractiones scribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4-86zz+600z-851=0$. Hîc est $-86=q$; $600=r$; & $-851=s$; adeoque $y^3+2qyy+\frac{qq}{-4}y-rr=0$, substitutis æquipollentibus, fiet $y^3-172yy+10800y-360000=0$. Ubi tentando omnes ultimi termini divisores $1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,5,-5$, & deinceps usque ad 100, invenietur tandem $y=100$. Quod idem multo expeditiùs, per methodum à nobis suprà expositam, inveniri potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}$, id est $\frac{-86+100-60}{2}$, seu -23, erit f; & $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$, seu 37, erit g; adeoque æquationes, $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, scripto z pro x, & substitutis æquipollentibus, evadent $zz+10z-23=0$, & $zz-10z+37=0$. Restitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv+2\frac{1}{2}v-\frac{23}{10}=0$, & $vv-2\frac{1}{2}v+\frac{37}{16}=0$. Restitue insuper $x-\frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx+2x-2=0$, & $xx-3x+3=0$; æquationes duæ, quarum radices quatuor, $x=-1\pm\sqrt{3}$, & $x=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$, eædem sunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ sub initio propositæ, $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Sed hæ faciliùs, per methodum inveniendi divisores à nobis suprà explicatam, inveniri potuerunt.

ÆQUA-

Appendix.

ÆQUATIONUM

CONSTRUCTIO LINEARIS.

HActenus æquationum proprietates, tranſmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonſtrationes non ſemper adjunxi, quoniam ſatis faciles mihi viſæ ſunt, & nonnunquam, abſque nimiis ambagibus, tradi non poſſent. Reſtat jam tantùm, ut æquationum, poſtquam ad formam commodiſſimam reductæ ſunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hîc præcipua difficultas eſt, in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodiſſimè per æquationis conſtructionem aliquam, ſeu Geometricam, ſive Mechanicam, confit. Quâ de causâ non pigebit hujuſmodi conſtructiones aliquas ſubjungere.

Veteres, ut ex Pappo diſcimus, triſectionem anguli, & inventionem duarum mediè proportionalium, ſub initio per rectam lineam & circulum, fruſtrà aggreſſi ſunt. Poſtea conſiderare cœperunt alias permultas lineas, ut Conchoidem, Ciſſoidem, & Conicas ſectiones, & per harum aliquas ſolverunt Problemata. Tandem re penitius examinatâ, & Conicis ſectionibus in Geometriam receptis, Problemata diſtinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas ortum à ſolidi, id eſt Coni, conſideratione derivantes, ſolvebantur; & *Linearia*, ad quorum ſolutionem requirebantur lineæ magis compoſitæ. Et juxta hanc diſtinctionem, problemata ſolida per alias lineas quàm Conicas ſectiones ſolvere à Geometriâ alienum eſt; præſertim ſi nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas ſectiones in Geometriam recipiantur. At Recentiores longiùs progreſſi receperunt lineas omnes in Geometriam, quæ per æquationes exprimi poſſunt, & pro dimenſionibus æquationum diſtinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt, non licere Problema per lineam ſuperioris generis conſtruere, quod conſtrui poteſt per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, diſtinctionem earum in genera, juxta dimenſiones æquationum, per

Æquationum Conſtructiones.

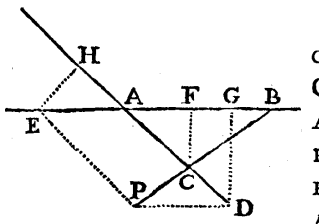
quas definiuntur, laudo. At æquatio non eſt, ſed deſcriptio, quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica eſt, non quòd per æquationem exprimi poteſt; ſed quòd deſcriptio ejus poſtulatur. Æquationis ſimplicitas non eſt, ſed deſcriptionis facilitas, quæ lineam ad conſtructiones Problematum priùs admittendam eſſe indicat. Nam æquatio ad Parabolam ſimplicior eſt, quàm æquatio ad circulum; & tamen circulus, ob ſimpliciorem deſcriptionem, priùs admittitur. Circulus & Coni ſectiones, ſi æquationum dimenſiones ſpectentur, ejuſdem ſunt ordinis; & tamen circulus, in conſtructione problematum, non connumeratur cum his, ſed ob ſimplicem deſcriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum conſtruere, quod per rectas conſtrui poteſt, non ſit illicitum; per Conicas verò ſectiones conſtruere, quod per circulum conſtrui poteſt, vitio vertatur. Aut igitur legem à dimenſionibus æquationum in circulo obſervandam eſſe ſtatue, & ſic diſtinctionem inter problemata plana & ſolida ut vitioſam tolle; aut concede, legem illam in lineis ſuperiorem generum non ita obſervandam eſſe, quin aliquæ, ob ſimpliciorem deſcriptionem, præferantur aliis ejuſdem ordinis, &, in conſtructione Problematum, cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In conſtructionibus quæ ſunt æquè Geometricæ, præferendæ ſemper ſunt ſimpliciores. Hæc lex omni exceptione major eſt. Ad ſimplicitatem verò conſtructionis expreſſiones Algebraicæ nil conferunt. Solæ deſcriptiones linearum hîc in cenſum veniunt. Has ſolas conſiderabant Geometræ, qui circulum conjungebant cum rectâ. Prout hæ ſunt faciles, vel difficiles, conſtructio facilis vel difficilis redditur. Adeòque à rei naturâ alienum eſt, leges conſtructionibus aliunde præſcribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum, & fortè Conicas ſectiones, è Geometriâ cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in datâ ratione ſecare. Numquid ergo reprehenderes, ſiquis hâc lineâ ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes, hanc lineam per æquationem non definiri, lineas verò quæ per æquationes definiuntur adhibendas eſſe? Igitur ſi an-

Appendix. gulus *e.g.* in 10001 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam æquatione plusquam centum dimensionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium describere, nedum intelligere, valeret; & hanc anteponere Trochoidi, quæ linea notissima est, & per motum rotæ, vel circuli, facillimè describitur. Quod quàm absurdum sit quis non videt? Aut igitur Trochoides in Geometriam non est admittenda, aut, in constructione Problematum, curvis omnibus difficilioris descriptionis anteferenda. Et eadem est ratio de reliquis curvis. Quo nomine trisectiones anguli per Conchoidem, quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus posuere, præ aliorum hâc de re inventis omnibus laudamus; siquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometriâ excludere debeamus, aut secundum descriptionis simplicitatem admittere, & Conchoides, simplicitate descriptionis, nulli curvæ præter circulum cedit. Æquationes sunt expressiones computi Arithmetici, & in Geometriâ locum propriè non habent, nisi quatenus quantitates verè Geometricæ (id est lineæ, superficies, solida & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Divisiones, & ejusmodi computa in Geometriam recèns introducta sunt; idque inconsultò, & contra primum institutum scientiæ hujus. Nam qui constructiones Problematum per rectam & circulum, à primis Geometris adinventas, considerabit, facilè sentiet, Geometriam excogitatam esse, ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ scientiæ confundi non debent. Veteres tam sedulò distinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam terminos Arithmeticos nunquam introduxerint. Et recentes, utramque confundendo, amiserunt simplicitatem, in quâ Geometriæ elegantia omnis consistit. Est itaque *Arithmeticè* quidem simplicius quod per simpliciores æquationes determinantur; at *Geometricè* simplicius est, quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometriâ prius & præstantius esse debet, quod est ratione Geometricâ simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit, si cum Mathematicorum Principe *Archimede*, aliisque Veteribus, Conchoidem ad Solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen siquis aliter senserit, sciat me hic de constructione non Geometricâ, sed qualicunque, sollicitum esse, quâ

radices æquationum in numeris proximè assequar. Cujus rei gratiâ præmitto hoc Problema Lemmaticum. Æquationes Constructiones.

Inter datas duas lineas, AB, AC, *rectam datæ longitudinis,* BC, *ponere quæ producta transeat per datum punctum* P.

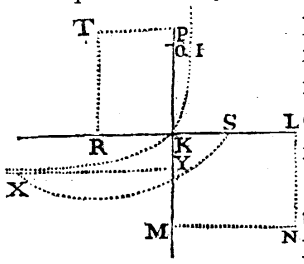
SI circa polum P gyret linea BC, & simul termino ejus C incedat super rectâ AC, ejus alter terminus B describet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eâdem lege linea BC duci potest, ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur.



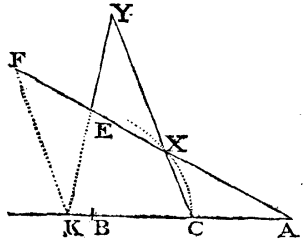
Sicui constructio hæcce per Conchoidem minùs placeat, potest alia per Conicam sectionem ejus vice substitui. A puncto P ad rectas AD, AE age PD, PE constituentes parallelogrammum EADP, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicula CF, DG, ut & à puncto E ad rectam AC versus A productam perpendiculum EH; & dictis AD = *a*. PD = *b*. BC = *c*. AG = *d*. AB = *x*, & AC = *y*. Erit AD. AG :: AC. AF, adeoque AF = $\frac{dy}{a}$. Erit & AB. AC :: PD. CD, seu *x*. *y* :: *b*. *a* − *y*. Ergo $by = ax - yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam. Rursus per 13. II. *Elem.* erit $BCq = ACq + ABq - 2FAB$, id est $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx$, æquatio ad circulum, ubi *x* & *y* ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas lineas, Hyperbolam & Circulum, ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis *x* & *y*, seu AB & AC, quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & asymptotis LN, MN per punctum K describe Hyperbolam IKX.

Appendix. In KM versus K productâ cape KP æqualem AG & KQ æqualem BC. Et in KL productâ versus K cape KR æqualem AH, & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T intervallo TS describe circulum. Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ AC & AB, vel una earum cum puncto P, determinant positionem quæsitam rectæ BC. Cui constructioni demonstrandæ, & ejus casibus secundum casus Problematis determinandis non immoror.

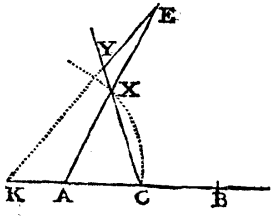


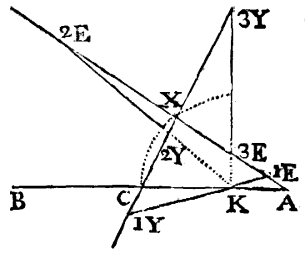
Hâc, inquam, constructione solvi potest Problema sicui ita visum sit. Sed hæc solutio magis composita est quàm ut usibus ullis inservire possit. Nuda speculatio est, & speculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum simplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis secum afferunt. Eâ de causâ constructionem per Conchoidem præfero ut multo simpliciorem, & non minùs Geometricam; & quæ resolutioni æquationum à nobis propositæ optimè conducit. Præmisso igitur præcedente Lemmate construimus Geometricè Problemata cubica, & quadrato-quadratica [*utpote quæ ad cubica reduci possunt*] ut sequitur.



Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$. *cujus terminus secundus deest, tertius verò sub signo suo designatur per* $+q$ *& quartus per* $+r$.

Duc quamlibet KA quam dic n. In KA utrinque productâ cape KB $= \frac{q}{n}$, ad easdem partes cum KA si habeatur $+q$, aliter ad contrarias. Bisecа BA in C, & centro K radio KC fac circulum CX, cui inscribe rectam CX æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge AX, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis





gitudinis cum CA, quæque producta transeat per punctum K, & XY erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X versus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, si habeatur $+r$, & contrò si habeatur $-r$.

Æquationum Constructiones.

Demonstratio.

Ad demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

Lem. I. *Est* YX *ad* AK *ut* CX *ad* KE. Etenim age KF parallelam CX, & ob similia triangula ACX, AKF, & EYX, EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF; & YX ad YE, seu AC, ut KF ad KE; adeóque ex æquo perturbatè YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

Lem. II. *Est* YX *ad* AK *ut* CY *ad* AK + KE. Nam componendo est YX ad AK ut YX + CX, id est CY ad AK + KE. Q. E. D.

Lem. III. *Est* KE − BK *ad* YX *ut* YX *ad* AK.

Nam per 12 II. *Elem.* est $YKq - CKq = CYq - CY \times CX = CY \times YX$; hoc est, si Theorema resolvatur in proportionem, CY ad YK − CK ut YK + CK ad YX. Sed est YK − CK = YK − YE + CA − CK = KE − BK. Et YK + CK = YK − YE + CA + CK = KE + AK. Adeoque est CY ad KE − BK ut KE + AK ad YX. Sed per *Lemma secundum* erat CY ad KE + AK ut YX ad AK. Ergo ex æquo est YX ad KE − BK ut AK ad YX. Seu KE − BK ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

His præmissis demonstrabitur Theorema ut sequitur. In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, seu $KE \times YX = AK \times CX$. In *tertio* erat KE − BK ad YX ut YX ad AK. Unde, si prioris rationis termini ducantur in YX, fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, id est $AK \times CX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK; & ductis extremis & mediis in se $AKq \times CX - AK \times BK \times Yx = YX$ *cub.* Denique pro YX, AK, BK, & CX restitutis x, n, $\frac{q}{n}$, & $\frac{q}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod verò ad signorum variationes attinet, istis secundum casus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deest $x^3 + pxx + r = 0$. Et ad ejus constructionem assumpto quolibet n, cape in rectâ aliquâ longitudines duas KA $= \frac{r}{n.}$, & KB $= p$; idque ad easdem partes si

r & p

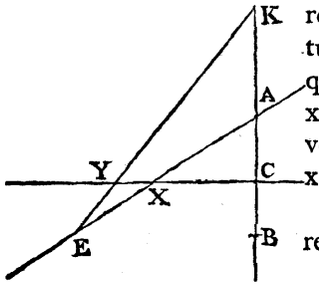
Appendix. r & p habeant eadem ſigna, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K radio KC deſcribe circulum cui, inſcribe CX æqualem n, & produc eam utrinque. Item junge AK, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis cum CA, ita ut ea ſi producatur tranſeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ ſunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X verſus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X; ſi modò habeatur $+r$, & contrà ſi habeatur $-r$.

Ad hujus Propoſitionis demonſtrationem Schemata & Lemmata de priori propoſitione mutuò ſumantur, & *Demonſtratio* erit ut ſequitur.

Per *Lemma* 1, erat YX ad AK ut CX ad KE, ſeu $YX \times KE = AK \times CX$; & per *Lemma* 3, KE−KB ad YX ut YX ad AK, aut (ſumpto KB ad contrarias partes) KE+KB ad YX ut YX ad AK; adeóque KE+KB in KE ad $YX \times KE$, ſeu $AK \times CX$, ut YX ad AK, ſeu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in ſe, eſt KE *cub.* $+KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipſarum KE, KB, AK, & CX reſtitutis valoribus ſuprà aſſignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimenſionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *nullo termino carentem, & cujus tres radices non ſunt omnes affirmativæ, neque omnes negativæ.*

Et primò ſi terminus q *negativus* eſt, in rectâ aliquâ KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$, & $KB = p$, idque ad eaſdem partes puncti K ſi p & $\frac{r}{q}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias. Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum, inſcribatur recta EY, quæ æqualis ſit



rectæ AC, & producta tranſeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis; quæ quidem affirmativa erit ſi punctum X cadat inter puncta A & E, negativa verò ſi punctum E cadat ad partes puncti X verſus A.

Quòd ſi terminus q *affirmativus* eſt, in rectâ KB capiantur longitudines illæ duæ $KA = \sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB = \frac{q}{KA}$, idque ad eaſdem partes puncti K, ſi $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias: Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum, inſcribatur recta EY quæ æqualis ſit rectæ AC, & producta tranſeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit ſi punctum x cadat inter puncta A & F, affirmativa verò ſi punctum Y cadat ad partes puncti X verſus punctum C.

Æquationum Conſtructiones.

Demonſtratio caſûs prioris.

Per *Lemma primum* erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) eſt KE + AK, id eſt KY + KC ad CX + YX, id eſt CY. Sed in triangulo rectangulo KCY eſt YCq æquale $YKq - KCq$, id eſt æquale KY + KC in KY − KC, & reſolvendo terminos æquales in proportionales, KY + KC ad CY ut CY ad KY − KC, ſeu KE + AK ad CY ut CY ad EK − KB. Quare cùm in hâc proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE + AK ad KE − KB; & ductis extremis & mediis in ſe KE *cub.* $-KB \times KEq = CXq \times KE + CXq \times AK$. Et reſtitutis valoribus ſuprà aſſignatis $x^3 - pxx = qx + r$.

Demonſtratio caſûs ſecundi.

Per *Lemma primum* eſt KE ad CX ut AK ad YX, ductiſque extremis & mediis in ſe, fit $KE \times YX = CX \times AK$. Scribe ergo in ſuperioribus $KE \times YX$ pro $CX \times AK$, & fiet KE *cub.* $-KB \times KEq = CXq \times KE + CX \times KE \times YX$. Et applicatis omnibus ad KE erit $KEq - KB \times KE = CXq + CX \times YX$: ductiſque omnibus in AK, habebitur $AK \times KEq - AK \times KB \times KE = AK \times CXq + AK \times CX \times YX$: Ac rurſus ſcripto $KE \times YX$ pro $CX \times AK$, fiet $AK \times KEq - AK \times KB \times KE = KE \times YX \times CX + KE \times YXq$: & applicatis omnibus ad KE orietur $AK \times KE - AK \times KB = YX \times CX + YXq$: ductiſque omnibus in YX emerget $AK \times KE \times YX - AK \times KB \times YX = YXq \times CX + YX$ *cub.* Et pro $KE \times YX$ ſcriptis in primo termino $CX \times AK$, fiet $CX \times AKq - AK \times KB \times YX = CX \times YXq + YX$ *cub.* ſeu quod perinde eſt YX *cub.* $+CX \times YXq + AK \times KB \times YX - CX \times AKq = 0$. Atque pro YX, CX, AK & KB ſubſtitutis valoribus ſuprà aſſignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$ emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio conſtruenda.

Solvuntur

APPENDIX. *Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, eâ lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.*

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest.*

Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque productâ cape $KB = \frac{q}{n}$, idque ad easdem partes puncti K cum lineâ KA si modò habeatur $-q$, aliter ad diversas. Bisecа BA in C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum KCXG. Junge AX, & Y K B L C A F G H M X E

juncta produc donec ea iterum secet circulum ultimò descriptum KCXG in puncto G. Denique inter hunc ultimò descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum rectâ AC; ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contrà si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus verò constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Positis quæ in constructione superiore, est* CE *ad* KA *ut* CE + CX *ad* AY, *&* CX *ad* KA.

Nam rectâ KG ductâ, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY, eò quòd EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbatè, quòd fit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut

KA

KA ad KY. Unde componendo fit CE+CX ad CX ut KA+KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE+CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q. E. D. ÆQUATIONUM CONSTRUCTIONES.

LEM. II. *Demisso ad lineam* GY *perpendiculo* CH, *fiet rectangulum* 2HEY *æquale rectangulo* CE×CX.

Nam demisso etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demisso perpendiculo AM, ob æquales AK, AG bisecabitur KG in M, & triangula KAM KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient similia: & inde est AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut est AK ad KM ita est 2AK ad 2KM seu KG, & ita (ob similia triangula AKG, ACX) est 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita est 2EY ad CX. Ergo est 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo EC×CX. Q. E. D.

Assumpsimus hic lineas AK, AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop.* 36. *lib.* III. *Elem.*) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK. Sed CA, XA æquales sunt per Hypothesin; ergo & AG, AK.

LEM. III. *Constructis omnibus ut supra, tres lineæ* BY, CE, KA, *sunt continue proportionales.*

Nam (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*) est $CY q = EY q + CE q + 2EY \times EH$. Et ablato utrinque $EY q$ fit $CY q - EY q = CE q + 2EY \times EH$. Sed $2EY \times EH$ (per *Lem.* 2.) æquale est rectangulo $CE \times CX$, & addito utrinque $CE q$ fit $CE q + 2EY \times EH = CE q + CE \times CX$. Ergo $CY q - EY q$ æquale est $CE q + CE \times CX$, id est $CY + EY$ in $CY - EY$ æquale est $CE q + CE \times CX$. Et resolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit CE+CX ad CY+EY ut CY−EY ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque AY pro CY+EY, & BY pro CY−EY, & fiet CE+CX ad AY ut BY ad CE. Sed *(per Lem.* 1.) est CE ad KA ut CE+CX ad AY, ergo est CE ad KA ut BY ad CE, hoc est lineæ tres BY, CE, KA, sunt continue proportionales. Q. E. D.

APPENDIX. Tandem ope horum Lemmatum conſtructio ſuperioris Problematis ſic *demonſtratur*.

Per Lemma I. eſt CE ad KA ut CX ad KY, adeoque KA×CX = KY×CE, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA \times CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* eſt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in ſe provenit CEq æquale $BK \times KA + \frac{KA q \times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit CE *cub.* æquale BK×KA×CE+KAq×CX. CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n, KB $\frac{q}{n}$, & CX $\frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX ſubſtitutis oritur $x^3 = qx + r$, ſeu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio conſtruenda; ubi q & r negativa prodeunt ſumptis KA & KB ad eaſdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori ſegmento CGK exiſtente. Hic *unus caſus* eſt Conſtructionis demonſtrandæ. Ducatur KB ad partes contrarias, id eſt, mutetur ſignum ejus ſeu ſignum ipſius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde eſt, ſignum termini q, & habebitur conſtructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: *Qui caſus eſt alter*. In his caſibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad eaſdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad eaſdem mutato ſigno ipſius CX ſeu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde eſt) ſigno ipſius r, & habebitur *caſus tertius* $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes ſunt negativæ. Et mutato rurſus ſigno ipſius KB ſeu $\frac{q}{n}$ vel ſolius q, incidetur in *caſum quartum* $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium caſuum conſtructiones percurrere licebit, & ſigillatim demonſtrare ad modum caſus primi. Nos uno caſu demonſtrato cæteros leviter attingere ſatis eſſe putavimus. Hi verbis iiſdem mutato ſolum linearum ſitu demonſtrantur.

Conſtruenda jam ſit æquatio cubica $x^3 + pxx * + r = 0$, *cujus tertius terminus deeſt.*

In figura ſuperiore aſſumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad eaſdem partes puncti K, ſi modo ſigna terminorum p & r ſint eadem, ſecus ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro

& centro K intervallo KC deſcribe circulum CXG. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini aſſumptæ n. Junge AX & producjunctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, deſcribe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inſcribe rectam EY ejuſdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inſcripta recta tranſeat per punctum G ſi modo ipſa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K verſus punctum A ſi modo habeatur $+r$; ſin habeatur $-r$, affirmativæ ſunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et ſi affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ ſunt quæ jacent ex altera. ÆQUATIONUM CONSTRUCTIONES.

Demonſtratur autem hæc conſtructio ope Lemmatum trium noviſſimorum in hunc modum.

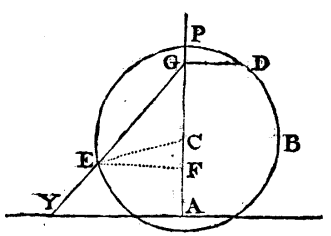
Per *Lemma tertium* ſunt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut eſt CE ad KA ita eſt CX ad KY. Ergo BY eſt ad CE ut CX ad KY. BY idem eſt quod KY−KB. Ergo KY−KB eſt ad CE ut CX ad KY. Sed ut eſt KY−KB ad CE ita eſt KY−KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY eſt CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY−KB in KY eſt ad KA in CX (ut KY−KB ad CE, hoc eſt) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in ſe invicem fit KY−KB in KYq æquale KA in CXq: id eſt KY *cub.* −KB×KY *quad.* æquale KA×CX *quad.* Erat autem in conſtructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX reſpective, & fiet $x^3 - pxx = r$, ſeu $x^3 - pxx - r = 0$.

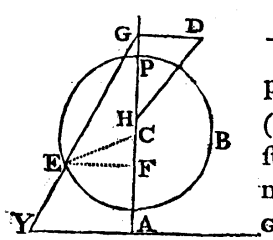
Reſolvi poteſt conſtructio demonſtranda in haſce quatuor æquationum caſus, $x^3 - pxx - r = 0$, $x^3 - pxx + r = 0$, $x^3 + pxx - r = 0$, & $x^3 + pxx + r = 0$. Caſum primum jam demonſtratum dedi, cæteri tres iiſdem verbis mutato tantum linearum ſitu demonſtrantur. Nimirum uti ſumendo KA & KB ad eaſdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* −KB×KYq = KA×CXq, & inde $x^3 - pxx - r = 0$: ſic ſumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit ſimili argumentationis progreſſu KY *cub.* +KB×KYq = KA×CXq, & inde $x^3 + pxx - r = 0$.

APPENDIX. Et in hiſce duobus caſibus ſi mutetur ſitus radicis affirmativæ KY ſumendo eam ad alteram partem puncti K, per ſimilem argumentationis ſeriem devenietur ad alteros duos caſus KY *cub.* $+KB\times KYq = -KA\times CXq$, ſeu $x^3+pxx+r=0$, & KY *cub.* $-KB\times KYq = -KA\times CXq$, ſeu $x^3-pxx+r=0$. Qui omnes caſus erant demonſtrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3+pxx+qx+r=0$, *nullo (niſi forte tertio) termino carens.* Ea conſtruetur ad hunc modum.

Cape ab arbitrium longitudinem *n*. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$. Deinde ſi termini *p* & *r* habent contraria ſigna, centro C intervallo CD deſcribe circulum PBE. Sin eadem ſunt eorum ſigna, centro D intervallo GC deſcribe circulum occultum ſecantem rectam GA in H; dein centro C intervallo GH deſcribe circulum PBE. Tum fac GA = $-\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$, eamque duc in linea GC ad partes puncti G verſus C ſi modo quantitas $-\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$ (ſignis terminorum *p*, *q*, *r*, in æquatione conſtruendâ probe obſervatis) affirmativa obvenerit: ſecus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE ſuperius deſcriptum inſcribe lineam EY æqualem termino *p*, ea lege ut hæc inſcripta convergat ad punctum G. Quo facto & productâ illâ EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis conſtruendæ. Quæ quidem radices affirmativæ ſunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, ſi modo habeatur $+p$; & contra ſi $-p$.





Demonſtrationi hujus conſtructionis præmittimus *Lemmata* ſequentia.

LEM. I. *Demiſſo ad* AG *perpendiculo* EF & *acta recta* EC, *eſt* $EGq+GCq = ECq+2CGF$.

Nam per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.* eſt $EGq = ECq+GCq+2GCF$. Addatur utrinque GC*q* & fiet $EGq+GCq = ECq+2GCq+2GCF$. Sed $2GCq+2GCF$ eſt 2GC in GC + CF id eſt 2CGF. Ergo $EGq+GCq = ECq+2CGF$. Q. E. D.

ÆQUATIONUM CONSTRUCTIONES.

LEM. II. *In conſtructionis caſu primo ubi circulus* PBE *tranſit per punctum* D, *eſt* $EGq-GDq = 2CGF$.

Nam per *Lemma primum* eſt $EGq+GCq = ECq+2CGF$, & ablato utrinque GC*q*, fit $EGq = ECq-GCq+2CGF$. Sed $ECq-GCq$ idem eſt quod $CDq-GCq$, hoc eſt idem quod GDq. Ergo $EGq = GDq+2CGF$, & ſubducto utrobique GDq, fit $EGq-GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. III. *In conſtructionis caſu ſecundo, ubi circulus* PBE *non tranſit per punctum* D, *eſt* $EGq+GDq = 2CGF$.

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq+GCq = ECq+2CGF$. Aufer utrinque EC*q* & fiet $EGq+GCq-ECq = 2CGF$. Sed GC = DH & EC = CP = GH: ergo $GCq-ECq = DHq-GHq = GDq$, atque adeo $EGq+GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. IV. *Eſt* 2CGF *in* GY = 2CG *in* AGE.

Namque ob ſimilia triangula GEF, GYA eſt GF ad GE ut AG ad GY; hoc eſt (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG\times AG$ ad $2CG\times GY$. Ducantur extrema & media in ſe, & fiet $2CG\times GY\times GF = 2CG\times AG\times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum conſtructio Problematis ſic demonſtratur.

In caſu *primo* eſt (per *Lem.* 2.) $EGq-GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq\times GY-GDq\times GY = 2CGF\times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $= 2CG\times AGE$. Pro GY ſcribe EG + EY, & fiet EG *cub.* $+EY\times EGq-GDq\times EG-GDq\times EY = 2CGA\times EG$, ſeu EG *cub.* $+EY\times EGq-\frac{GDq}{2CGA}\times EG-GDq\times EY = 0$.

In caſu *ſecundo* eſt (per *Lem.* 3.) $EFq+GEq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq\times GY+GDq\times GY = 2CGF\times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $= 2CG\times AGE$. Pro GY ſcribe EG+EY, & fiet EG *cub.* $+EY\times EGq+GDq\times EG+GDq\times EY = 2CGA\times EG$, ſeu EG *cub.* $+EY\times EGq+\frac{GDq}{-2CGA}\times EG+GDq\times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis conſtructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, & $GA = -\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$, id eſt in caſu primo ubi terminorum *p* & *r* diverſa ſunt ſigna: at in caſu ſecundo ubi alterutrius *p* vel *r* mutatur ſignum fiet $-\frac{q}{n}+\frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur

Appendix. tur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-_{n}\mp\frac{}{np}$,

& casu *primo* fiet $x^3+px^2 \overset{-\frac{r}{p}}{+q+\frac{r}{p}}x-r=0$, id est $x^3+pxx+qx-r=0$,

casu autem *secundo* $x^3+px^2 \overset{+\frac{r}{p}}{+q-\frac{r}{p}}x+r=0$, id est $x^3+pxx+qx+r=0$,

Est igitur in utroque casu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdistinguitur autem casus uterque in casus plures particulares: Nimirum prior in hosce $x^3+px^2+qx-r=0$, $x^3+pxx-qx-r=0$, $x^3-pxx+qx+r=0$, $x^3-pxx-qx+r=0$, $x^3+px^2-r=0$, & $x^3-pxx+r=0$; posterior in hosce $x^3+pxx+qx+r=0$, $x^3+pxx-qx+r=0$, $x^3-pxx+qx-r=0$, $x^3-pxx-qx-r=0$, $x^3+pxx+r=0$, & $x^3-pxx-r=0$. Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum linearum situ, compinguntur.

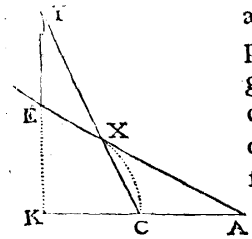
Hæ sunt Problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam positione datam, eâ lege, ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscribitur autem talis recta, ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus sit punctum illud, ad quod recta inscribenda debet convergere, Regula seu Asymptotos recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E, per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis, rectam illam, inter circulum & alteram positione datam rectam, ratione quâcunque mechanicâ interponere.

In hisce autem constructionibus notandum est quod quantias n, ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur; id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

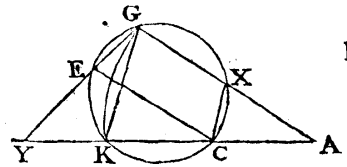
Inveniendæ sint inter a & b duæ medie proportionales x & y. Quoniam sunt *a. x. y. b* continue proportionales erit *aa* ad *xx* ut *x* ad *b*, adeoque $x^3=aab$, seu $x^3-aab=0$. Hic desunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in constructionum formulâ primâ, ubi recta EY ad datum punctum K convergens

convergens inseritur inter alias duas positione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id est æqualis $\frac{-aab}{nn}$, assumo n æqualem a, & sic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emerget constructio. Æquationum Constructiones.

Duco quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C, centroque K intervallo KC describo circulum CX ad quem apto rectam CX æqualem b & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ medie proportionales inter a & b. Constructio nota est.

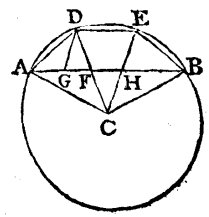


Inter altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, estque $CX=\frac{r}{nn}$ id est (in hoc Problemate $=\frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n=a$, & sic fit $CX=b$, cæteraque peraguntur ut sequitur.



Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C & centro A intervallo AK describo circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ constituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$KG, id est EC & KY duæ medie proportionales erunt inter datas a & b.

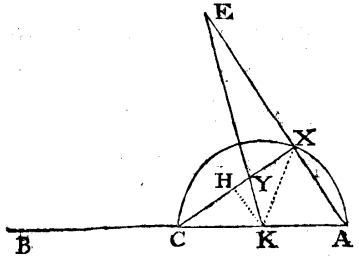
Secandus jam sit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secandus ACB, *partes ejus inveniendæ* ACD, DCE, ECB.



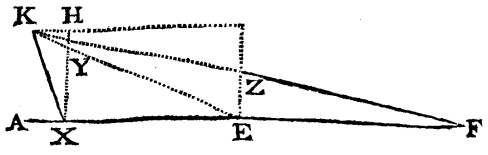
Centro C intervallo CA describatur circulus ADEB secans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB secans rectas CD, CE in F & H, & ipsi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob similia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales sunt CA, AD, DF, FG. Ergo si dicatur AC=a, & AD

Appendix. & AD=x, fiet DF=$\frac{xx}{a}$, & FG=$\frac{x^3}{aa}$. Eſt autem AB=BH+HG+FA −GF=3AD−GF=3x−$\frac{x^3}{aa}$. Dic AB=b, & fiet b=3x−$\frac{x^3}{aa}$, ſeu x^3−3aax+aab=0. Hîc deeſt æquationis terminus ſecundus p, & loco q & r habentur −3aa & aab. Ergo in conſtructionum formula prima ubi erat p=0, KA=n, KB=$\frac{q}{n}$, & CX=$\frac{r}{nn}$, id eſt in problemate jam conſtruendo KB=−$\frac{3aa}{n}$, & CX=$\frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam ſimpliciſſimæ pono n=a, & ſic fit KB=−3a, & CX=b. Unde talis emergit Problematis *conſtructio*.

Ago quamvis KA=a, & ad contrarias partes KB=3a. Biſeco BA in C, centroque K intervallo KC deſcribo circulum, cui inſcribo rectam CX=b. Et actâ rectâ AX, inter ipſam infinite productam & rectam CX pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit XY=x. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales ſubtenſas AB, CX, nec non æquales ſubtenſarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX, ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujuſvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, AX infinitè productas rectam EY æqualem diametro AC, & convergentem ad circuli centrum K.



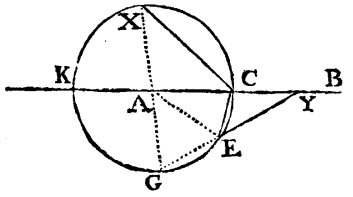
Hinc ſi à circuli centro K ad ſubtenſam CX demittas perpendiculum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut ſi detur quilibet angulus HKX inveniri poſſit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriuſvis KX puncto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipſius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. *Vel ſic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum AX erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur



gatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH ſit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rurſus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ ſit dupla ipſius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & ſic pergitur per continuam anguli triſectionem in infinitum. Exſtat autem hæc triſectio apud *Pappum, lib.* 4. *Prop.* 32. Æquationum Conſtructiones.

Quod ſi angulum per alteram conſtructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda eſt, trifariam dividere malueris : hic etiam erunt KB=$\frac{q}{n}$, & CX=$\frac{r}{nn}$, id eſt in problemate de quo nunc agimus KB=$\frac{-3aa}{n}$, & CX=$\frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo n=a fiet KB=−3a, & CX=b. Et inde talis emerget *conſtructio.*

A puncto quovis K ducantur ad eaſdem partes rectæ duæ KA=a, & KB=3a. Biſeca AB in C, centroque A intervallo AC deſcribe circulum. In eo pone rectam CX=b. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum ſecet circulum jam deſcriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæſita x, qua tertia pars anguli dati ſubtenditur.

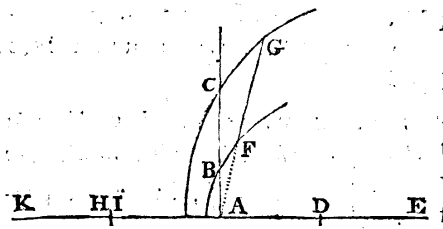


Talis conſtructio conſequitur formulam ſuperius allatam : quæ tamen ſic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales ſubtenſas CX & AB, æquales ſunt anguli CAX ſive KAG & ACB, adeoque CE ſubtenſa eſt tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinité productum rectam EY æqualem circuli ſemidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum trifariam ſecare. Eædem conſtructiones facilius explicari poſſint quam hic factum eſt ; ſed in his volui oſtendere quomodo ex generalibus Problematum conſtructionibus ſuperius

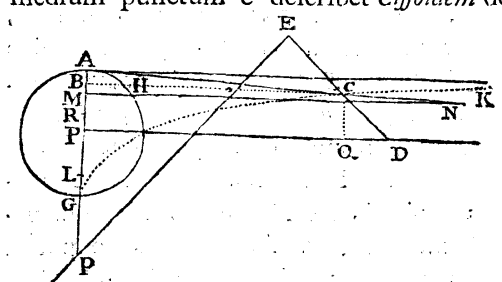
Lemma Archim 8.

Appendix. expositis constructiones simpliciſſimas particularium Problematum derivare liceat.

Præter conſtructiones hic expoſitas adjungere liceret quamplurimas. *Ut ſi inter a & b inveniendæ eſſent duæ medié proportionales.* Age quamvis AK=*b*, & huic perpendiculare AB=*a*. Biſeca AK in I, & in eâdem AK, ſubtenſæ BI æqualem pone AH; ut & in lineâ AB productâ ſubtenſæ BH æqualem AC. Tum in lineâ AK ad alteras partes puncti A cape AD cujuſvis longitudinis, & huic æqualem DE, centriſque D & E, intervallis DB, EC deſcribe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF, prima duarum medié proportionalium quas invenire oportuit.



Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *Ciſſoidem*; ſed lineæ hujus deſcriptionem commodam manualem nemo, quod ſcio, appoſuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *Ciſſois* pertinet. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infinitum. Et producatur FG ad P, ut FP æqualis ſit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED eâ lege ut crus ejus EP perpetuò tranſeat per punctum P, & crus alterum ED circuli Diametro AG ſeu FR æquale, termino ſuo D tangat ſemper lineam FD, & cruris hujus medium punctum C deſcribet *Ciſſoidem* deſideratam GCK ut ſupra expoſui. Quare ſi inter duas quaſvis *a* & *b* inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales: cape AM=*a*, erige perpendiculum MN = *b*. Junge AN; & lege præfatâ moveatur norma PED, uſque dum punctum ejus C incidat in rectam AN. Tum demiſſo ad AP perpendiculo CB, cape *t* ad BH, & *u* ad BG, ut eſt



MN

MN ad BC, & ob continue proportionales AB, BH, BG, BC erunt etiam continue proportionales *a*, *t*, *u*, *b*.

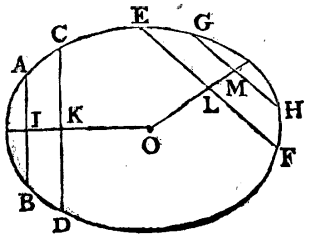
Æquationum Conſtructiones.

Simili normæ applicatione conſtrui poſſunt etiam alia Problemata ſolida. Verbi gratiâ proponatur æquatio cubica $x^3 \mp pxx + qx - r = 0$; ubi *q* ſemper affirmativum ſit, *r* negativum, & *p* ſigni utriuſvis. Fac AG $= \frac{r}{q}$, eamque biſeca in F, & cape FR & GL $= \frac{1}{2}p$, idque verſus A ſi habeatur $+p$ aliter verſus P. Erige inſuper normalem FD, inque eâ cape FQ $= \sqrt{q}$ huic etiam erige normalem QC. In normæ autem crure ED, cape ED & EC ipſis AG & AR æquales reſpective, & applicetur deinceps norma ad Schema ſic ut punctum ejus D tangat rectam FD, & punctum C rectam QC, tum ſi compleatur parallelogrammum BQ; erit LB æquationis radix quæſita *x*.

Hactenus conſtructionem ſolidorum Problematum, per operationes, quarum praxis manualis maxime ſimplex eſt & expedita, exponere viſum fuit. Sic Veteres, poſtquam confectionem horum problematum per compoſitionem locorum ſolidorum aſſecuti fuerant, ſentientes ejuſmodi conſtructiones, ob difficilem Conicarum ſectionum deſcriptionem, inutiles eſſe, quærebant conſtructiones faciliores per Conchoidem, Ciſſoidem, extenſionem filorum, & figurarum adaptiones quaſcunque mechanicas: prælatâ mechanicâ utilitate inutili ſpeculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* diſcimus. Sic magnus ille *Archimedes* triſectionem anguli, per coni ſectiones, à ſuperioribus Geometris expoſitam, neglexit, & in Lemmatis ſuis angulum, modo à nobis ſuperius expoſito, trifariam ſecare docuit. Si Veteres problemata, per figuras, eâ tempeſtate in Geometriam non receptas, conſtruere maluerint, quanto magis præferendæ nunc ſunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipſæ coni ſectiones à pleriſque receptæ.

Verumtamèn novo huic Geometrarum generi haud aſſentior, qui figuras haſce omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad conſtructionem Problematum, eo ordine, quo æquationes, quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimenſionum aſcendunt, arbitraria eſt, & in Geometriâ fundamentum non habet. Imo falſa eſt, propterea quod circulus, hâc lege, cum coni ſectionibus conjungendus eſſet, quem tamen Geometræ omnes cum lineâ rectâ conjungunt. Vacil-

Appendix. lante autem hâc regulâ, tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam, meo quidem judicio, lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent; nisi forte linearum distinctio aliqua prius excogitetur, quâ linea circularis conjungatur cum rectâ, & à reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum. Nam figuræ omnes sunt planæ, quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometræ postulent in plano describere. Et problema omne planum est, quod per figuras planas construi potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conicis sectionibus, aliisque magis compositis figuris, problemata omnia solida, & plus quam solida, quæ per has figuras construi possunt, evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta Analyticè simplicior est quam circulus; hoc non obstante problemata ejusdem sunt ordinis, quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum rectâ. Et multo magis Ellipsis, quæ minus differt à circulo, quam circulus à rectâ, postulando consimiliter descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis, speculando Ellipsin, incideret in problema aliquod solidum, et ipsum beneficio ejusdem Ellipseos & circuli construeret; hoc problema jam pro plano habendum esset: eo, quod Ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis, quæ supereſt, absolvitur per circuli solius descriptionem. Eâdem de causâ problemata quævis plana per datam Ellipsin construere licitum est. Verbi gratiâ si datæ Ellipseos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipsi occurrentes in A, B, C, D, aliasque duas EF, GH Ellipsi occurrentes in E, F, G, H. Has bisecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem, usque ad concursum suum in O. Legitima est hæc constructio plani problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analyticè definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometricè generetur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida, per ipsam constructa, reducit ad ordinem planorum, efficitque, ut plana omnia



omnia per ipsam legitimè construantur. Et eadem est ratio Postulati. Quod vi postulatorum fieri potest, ut jam factum, & datum assumere concessum est. Postuletur igitur Ellipsin in plano describere, & ad ordinem planorum problematum reducentur, ea omnia, quæ per Ellipsin construi possunt, planaque omnia per Ellipsin licebit construere. Æquationum Constructiones.

Necesse est igitur aut Problemata plana & solida inter se confundi, aut lineas omnes rejici è Geometriâ planâ præter rectam & circulum, & siqua forsan alia detur aliquando, in statu construendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi, nemo certe permiserit. Rejiciantur igitur è Geometriâ planâ sectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in statu problematum dari. Alienæ sunt igitur à Geometriâ descriptiones illæ omnes conicarum sectionum in plano, quibus hodierni Geometræ tantoperè indulgent. Nec tamen ideo Coni sectiones è Geometriâ rejiciendæ erunt. Hæ in plano non describuntur Geometricè, generantur vero in solidi Geometrici superficie plane. Conus constituitur Geometrice, & plano Geometrico secatur. Tale Coni segmentum figura Geometrica est, eundemque habet locum in Geometriâ solidâ ac segmentum circuli in planâ, & hâc ratione basis ejus, quam Coni sectionem vocant, figura Geometrica est. Locum igitur habet Coni sectio in Geometriâ, quatenus ea superficies est solidi Geometrici. Aliâ autem nullâ ratione Geometricâ, quam solidi sectione, generatur, & ideo non nisi in Geometriam solidam antiquitùs admissa fuit. Talis autem Conicarum sectionum generatio difficilis est, & in rebus practicis, quibus Geometria potissimum inservire debet, prorsus inutilis. Ideo veteres se ad varias figurarum in plano descriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar constructiones præcedentes concinnavimus. Sunto constructiones illæ Mechanicæ: sic & constructiones per Coni sectiones, in plano ut jam moris est descriptas, Mechanicæ sunt. Sunto constructiones per datas Coni sectiones Geometricæ: sic & constructiones per alias quascunque

Appendix. cunque figuras datas Geometricæ ſunt, & ejuſdem ordinis cum conſtructionibus planorum Problematum. Nullâ ratione præferendæ ſunt in Geometriâ Sectiones conicæ figuris aliis, niſi quatenus illæ à ſectione Coni, praxi ad ſolutionem problematum prorſus inutili, derivantur. Verumtamen ne conſtructiones per Conicas ſectiones omnino præteream, viſum fuit aliqua de his ſubjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ conſulatur.

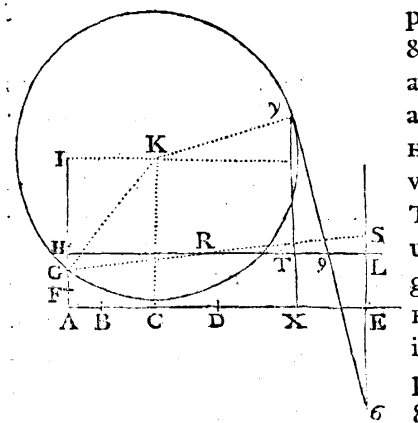
Conicarum ſectionum ſimpliciſſima eſt Ellipſis. Hæc notior eſt, & circulo magis affinis, & praxi manuali facilius deſcribitur in plano. Parabolam præferunt plerique, ob ſimplicitatem æquationis, per quam ea exprimitur. Verum hâc ratione Parabola ipſi etiam circulo præferenda eſſet, contra quam fit. Falſa eſt igitur argumentatio à ſimplicitate æquationum. Æquationum ſpeculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum ſimplicitas eſt conſiderationis Analyticæ. Nos in compoſitione verſamur, & compoſitioni leges dandæ non ſunt ex Analyſi. Manuducit Analyſis ad Compoſitionem: ſed Compoſitio non prius verè conſit, quam liberatur ab omni Analyſi. Inſit compoſitioni vel minimum Analyſeos, & compoſitionem veram nondum aſſecutus es. Compoſitio in ſe perfecta eſt, & à miſturâ ſpeculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum ſimplicitas à ſimplicitate geneſeos & Idearum, & æquatio non eſt, ſed deſcriptio, ſive Geometrica ſive Mechanica, quâ figura generatur, & redditur conceptu facilis. Ellipſi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam, quomodo æquationes per ipſam conſtruere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, *ubi* p, q *&* r *datas terminorum æquationis coefficientes cum ſignis ſuis* + *&* − *ſignificant, & alteruter terminorum* p *&* q, *vel etiam uterque deeſſe poteſt.* Sic enim æquationum omnium cubicarum conſtructiones unâ illâ operatione quæ ſequitur exhibebimus.

A puncto D in rectâ quavis datâ cape duas quaſcunque rectas BC, BE ad eaſdem partes; ut & inter ipſas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eâdem rectâ BA $= \frac{q}{n}$, idque verſus punctum C ſi habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias.

Ad

Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut eſt BC ad BE. FH vero & FI capiendæ ſunt ad partes puncti F verſus G ſi termini p & r habent eadem ſigna, aliter ad partes verſus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG deſcribatur circulus. Tum in lineâ HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ ſit ad HL ut BD ad BE: agatur GR ſecans EL in s, & moveatur lineâ GRS puncto ejus R ſuper lineâ HL, & puncto s ſuper lineâ EL incedente, donec tertium ejus punctum G deſcribendo Ellipſin, occurrat circulo, quemadmodum videre eſt in poſitione $\gamma\varsigma\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occurſus illius puncto γ in rectam AE demiſſi erit radix æquationis. Poteſt autem Regulæ GRS vel $\gamma\varsigma\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot ſunt poſſibiles radices. Et è radicibus hæ ſunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, ſi modo habeatur $+r$: & contra ſi habeatur $-r$.



Æquationum Conſtructiones.

Demonſtratur autem hæc conſtructio ſubſidio *Lemmatum* ſequentium.

Lem. I. *Poſitis quæ in ſuperiore conſtructione, eſt* $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

Namque ex natura circuli eſt $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed eſt $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc eſt æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id eſt ipſi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop.* 4. *Lib.* II. *Elem.*) æquale eſt $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo

Appendix. adeo $AIq-GIq$ æquale eſt $AGq+2AGI$, hoc eſt æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG+GI$, ſeu æquale $2AG\times FI$, & proinde $2CAX-AXq$, æquale eſt $\gamma Xq-2AI\times\gamma X+2AG\times FI$. Q. E. D.

Lem. II. *Poſitis quæ in ſuperiore conſtructione, eſt* $2EAX-AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH}X\gamma q-\frac{2FI}{FH}AH\times X\gamma+2AG\times FI$.

Notum eſt enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\sigma$ ſuperius aſſignato deſcribit Ellipſin cujus centrum eſt L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ ſive 2GR, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ ſive 2GS. Et horum ratio ad invicem ea eſt quæ lineæ HR ad lineam HL, ſive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus tranſverſum eſt ad latus rectum principale ut BE ad BC ſive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipſeos $GSq-LTq$ æquale $\frac{FI}{FH}T\gamma q$. Eſt autem LT æquale $AE-AX$, & $T\gamma$ æquale $X\gamma-AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq-AEq+2EAX-AXq=\frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q-2AH\times X\gamma+AHq$. Eſt autem $GSq-AEq$ æquale quadrato ex GH+LS, propterea quod GS hypotenuſa eſt trianguli rectanguli cujus latera ſunt ipſis AE & GH+LS æqualia. Eſt & (ob ſimilia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo GH+LS ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex GH+LS, eſt ad GHq ut HLq ad HRq, hoc eſt (per conſtructionem) ut BEq ad BDq, id eſt ut BE ad BC, ſeu FI ad FH, adeoque quadratum ex GH+LS æquale eſt $\frac{FI}{FH}GHq$. Eſt itaque $GSq-AEq$ æquale $\frac{FI}{FH}GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH}GHq+2EAX-AXq=\frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q-2AH\times X\gamma+AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH}GHq$, & reſtabit $2EAX-AXq=\frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q-2AH\times X\gamma+AHq-GHq$. Eſt autem $AH=AG+GH$, adeoque $AHq=AGq+2AGH+GHq$ & ſubducto utrinque GHq reſtat $AHq-GHq=AGq+2AGH$, hoc eſt $=2AG$ in $\frac{1}{2}AG+GH$, ſeu $=2AG\times FH$, atque adeo eſt $2EAX-AXq=\frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q-2AH\times X\gamma+2AG\times FH$, i. e. $=\frac{FI}{FH}X\gamma q-\frac{2FI}{FH}AH\times X\gamma+2AG\times FI$. Q. E. D.

Lem. III. *Iiſdem poſitis eſt* AX *ad* $X\gamma-AG$ *ut* $X\gamma$ *ad* 2BC.

Nam ſi de æqualibus in *Lemmate ſecundo* ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, reſtabunt æqualia $2CE\times AX$ & $\frac{HI}{FH}X\gamma q-\frac{2FI}{FH}AH\times X\gamma+2AI\times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH\times CE\times AX$ æquale $HI\times X\gamma q-2FI\times AH\times X\gamma+2AI\times FH\times X\gamma$. Eſt autem $AI=AH+HI$, adeoque $2FI\times AH-2FH\times AI=2FI\times AH-2FHA-2FHI$. Sed $2FI\times AH-2FHA=2AHI$, & $2AHI-2FHI=2HI\times AF$. Ergo $2FI\times AH-2FH\times AI=2HI\times AF$, adeoque $2FH\times CE\times AX=HI\times X\gamma q-2HI\times AF\times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE\times AX$ ad $X\gamma q-2AF\times X\gamma$. Sed per conſtructionem HI eſt ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE\times AX$ ad $2BC\times AK$ & proinde $2BC\times AK$ & $X\gamma q-2AF\times X\gamma$ (per *Prop.* 9. *lib.* V. *Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera, AX ad $X\gamma-2AF$, id eſt ad $X\gamma-AG$ ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D.

Æquationum Conſtructiones.

Lem. IV. *Iiſdem poſitis, eſt* 2FI *ad* $AX-2AB$ *ut* $X\gamma$ *ad* 2BC.

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC\times AX=X\gamma q-2AF\times X\gamma$, ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, & reſtabunt æqualia $-2AB\times AX+AXq=2FI\times X\gamma-2AG\times FI$, hoc eſt AX in $AX-2AB=2FI$ in $X\gamma-AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera 2FI ad $AX-2AB$ ut AX ad $X\gamma-AG$, hoc eſt (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D.

Præſtratis his Lemmatibus, Conſtructio Problematis ſic tandem demonſtratur.

Per *Lemma quartum* eſt $X\gamma$ ad 2BC ut 2FI ad $AX-2AB$, hoc eſt (per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2BC\times 2FI$ ad $2BC\times AX-2AB$, ſeu ad $2BC\times AX-2BC\times 2AB$. Sed per *Lemma tertium* eſt AX ad $X\gamma-2AF$ ut $X\gamma$ ad 2BC, ſeu $2BC\times AX=X\gamma q-2AF\times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ eſt ad 2BC ut $2BC\times 2FI$ ad $X\gamma q-2AF\times X\gamma-2BC\times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in ſe, fit $X\gamma$ *cub.* $-2AF\times X\gamma q-4BC\times AB\times X\gamma=8BCq\times FI$. Addantur utrinque $2AF\times X\gamma q+4BC\times AB\times X\gamma$, & fiet $X\gamma$ *cub.* $=2AF\times X\gamma q+4BC\times AB\times X\gamma+8BCq\times FI$. Erat utem in conſtructione demonſtrandâ, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF=p$, $BC=n$, $AB=\frac{q}{n}$, & $FI=\frac{r}{nn}$, adeoque $BC\times AB=q$. Et $BCq\times FI=r$. Quibus ſubſtitutis fiet $x^3=px^2+qx+r$. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum fiet 2FI ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad 2BC. Unde conſtat inventio duarum mediè proportionalium inter datas quaſlibet FI & BC.

APPENDIX. *Scholium.* Hactenus æquationis cubicæ conſtructionem per Ellipſin ſolummodo expoſui: ſed regula ſuâ naturâ generalior eſt, ſeſe ad omnes coni ſectiones indifferenter extendens. Nam ſi loco Ellipſeos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut antè; excepto tantùm quòd FH debet ſumi ad partes ipſius F contra I, & quòd HR non in lineâ HL, ſed in lineâ AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro aſymptotis Hyperbolæ. Cum iſtis itaque aſymptotis LR, LR deſcribe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum interſectionibus ad rectam AE demiſſorum erunt radices æquationis propoſitæ. Quæ omnia, ſignis + & − probè mutatis, demonſtrantur ut priùs.

Quòd ſi Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet, eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A deſcribenda, ſito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B ſitum eſt reſpectu puncti C.

Sic ſunt conſtructiones per Parabolam, ſi ſimplicitatem analyticam ſpectes, ſimpliciſſimæ omnium. Eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipſin abſolvuntur. Quòd ſi praxeos manualis in deſcribendis figuris ſpectetur ſimplicitas, mutandus eſt ordo.

In hiſce autem conſtructionibus obſervandum venit, quòd proportione lateris recti principalis ad latus tranſverſum determinatur ſpecies Ellipſeos & Hyperbolæ; & proportio illa eadem eſt quæ linearum BC & BE, atque adeo aſſumi poteſt: Parabolæ verò ſpecies eſt, unica quam artifex ponendo BE infinitè longam aſſequitur. Sic igitur penes artificem eſt, æquationem quamcunque cubicam per conicam ſectionem imperatæ ſpeciei conſtruere. A figuris autem ſpecie datis, ad figuras magnitudine datas devenietur, augendo vel diminuendo in ratione datâ lineas omnes, quibus figuræ ſpecie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas, per datam quamvis Conicam ſectionem, conſtruere licebit. Id quod ſic pleniùs explico.

Proponatur

ÆQUATIONUM CONSTRUCTIONES.

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = pxx. qx. r.$ ***ope datæ cujuſcunque ſectionis conicæ conſtruere.***

A puncto quovis B in rectâ quâvis infinitâ BCE, cape duas quaſcunque longitudines BC, BE ad eaſdem partes ſi data Coni ſectio ſit Ellipſis, ad contrarias ſi ea ſit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ ſectionis latus rectum principale ad latus tranſverſum; & BC nominatâ n, cape $BA = \frac{q}{n}$, idque verſus C ſi habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p & FG æqualem AF; item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur verò FI verſus G ſi termini p & r habent eadem ſigna, aliter verſus A. Dein fac ut ſit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape à puncto F verſus I ſi ſectio ſit Ellipſis, aut ad partes contrarias ſi ea ſit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma IACK & HAEL, & hæ omnes jam deſcriptæ lineæ transferantur ad datam ſectionem Conicam, aut quod perinde eſt, his ſuperponatur curva, ita ut axis ejus ſive tranſverſa diameter principalis conveniat cum rectâ LH & centrum cum puncto L. His ita conſtitutis agatur recta KL ut & recta GL ſecans conicam ſectionem in g. In LK cape Lk quæ ſit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg deſcribe circulum. A punctis ubi hic ſecuerit curvam impoſitam demitte perpendicula ad lineam LH, cujuſmodi ſit γT. Denique verſus γ, cape TY

Appendix. quæ ſit ad $T\gamma$ ut LG ad Lg, & hæc TY producta ſecet rectam AB in X, eritque recta $\frac{1}{2}$XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes, ſi modò habeatur $+r$, & contrà ſi $-r$ obvenerit.

Hoc modo conſtruuntur æquationes cubicæ per Ellipſes & Hyperbolas datas: Quòd ſi detur Parabola, capienda eſt BC æqualis lateri recto ipſius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut antè, centro K intervallo KG deſcribendus eſt circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam deſcriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipſa tranſeat per puncta A & G, & axis ejus ipſi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita conſtitutis, ſi perpendicula ab ejus occurſibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis conſtruendæ.

Et notes quòd ubi ſecundus æquationis terminus deeſt, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc conſtructio evadet eadem cum illâ quam Carteſius attulit in Geometriâ ſuâ, præterquam quòd lineamenta hîc ſunt illorum duplicia.

Hæc eſt conſtructionum regula generalis. Verùm ubi problemata particularia proponuntur, conſulendum eſt conſtructionum formulis ſimpliciſſimis. Libera enim manet quantitas n, cujus aſſumptione conſtructio plerumque ſimplicior reddi poteſt. Ejus rei exemplum unum ſubjungo.

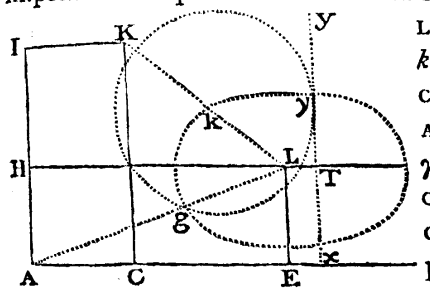
Detur Ellipſis, & inter datas lineas a & b inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a.x.\frac{xx}{a}.b$ erunt continuè proportionales, adeoque $ab=\frac{x^3}{a}$, ſeu $x^3=aab$, æquatio eſt quam conſtruere oportet. Hîc deſunt termini p, & q, & terminus r eſt aab, adeoque BA & AF nullæ ſunt, FI & eſt $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus noviſſimus evadat ſimplicior aſſumatur $n=a$, & fiet FI $=b$. Deinde conſtructio ita ſe habebit.

A puncto quovis A in rectâ quâvis infinitâ AE cape AC $=a$, & ad eaſdem partes puncti A cape AC ad AE ut eſt Ellipſeos latus rectum principale ad latus tranſverſum. Tum in perpendiculo

AI

AI cape AI $=b$, & AH ad AI ut eſt AC ad AE. Compleantur parallelogramma IACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic ſchemati imponatur Ellipſis data. Secet ea rectam AL in puncto g, Fiat

Æquationum Conſtructiones.



Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg deſcribatur circulus ſecans Ellipſin in γ. Ad AE demittatur perpendiculum γX ſecans HL in T, & producatur id ad Y ut ſit TY ad $T\gamma$ ſicut LA ad Lg. Sic fiet $\frac{1}{2}$XY prima duarum mediè proportionalium x. Q. E. I.

FINIS ARITHMETICÆ UNIVERSALIS.

TOMI PRIMI

PARS SECUNDA,

IN QUA CONTINENTUR

TRACTATUS OMNES

AD

FUNDAMENTA GEOMETRIÆ SUBLIMIORIS

PERTINENTES.

MONITUM EDITORIS.

CUM in eâ diu fuerim opinione, fore ut ſublimioris Geometriæ ſcientia faciliùs atque meliùs ex ipſius Newtoni libris quàm aliunde ferè haurienda eſſet, modò ea ſuppleta eſſent quæ Newtonus reliquit imperfecta, et pauca quædam accuratiùs expoſita, quæ ille breviùs dixit quàm ut diſcentibus perſpicua eſſent; nonnulla Newtonianis adjungere decrevimus, quæ tironibus viam complanare poſſint, modò ipſi à Matheſi elementariâ ſatis inſtructi ad hæc ſublimiora accedant. Exigit igitur inſtituti ratio, ut quo ordine hæc omnia ſint legenda, ſi quis tempore breviſſimo minimoque labore fructus ſtudiorum maximos percipere cupiat, breviter exponam.

CUI *igitur nova ſit quæ in hiſce traditur diſciplina, is omnium primum Tractatum ipſius Newtoni de Rationibus Primis Ultimiſque diligenter velim perlegat.*

2. *Dein noſtram Fluxionum Geometriam.*

3. *Newtoni Introductionem ad Quadraturam Curvarum, et libri ipſius de Quadraturis initium, abſolutam uſque ſecundi Problematis enodationem.*

4. *Analyſin per æquationes numero terminorum infinitas, collatis Geometriæ Analyticæ locis cognatis, ad quæ notationes noſtræ legentes ablegant.*

5. *Noſtram Infinitorum Logiſticam.*

6. *Excerpta ex Epiſtolis Newtoni ad Series Infinitas Fluxioneſque pertinentia.*

7. *Newtoni Geometriam Analyticam, ab initio doctrinæ fluxionalis abſolutum uſque nonum Problema.*

8. *Librum de Quadraturâ Curvarum, ab initio reſumptum, finem uſque; conferendo Geometriæ Analyticæ loca cognata.*

9. *Methodum Differentialem.*

10. *Enumerationem linearum tertii ordinis. Nos verò in condendis demonſtrationibus noſtris, eam nobis legem tulimus, ut non aliis unquam tanquam cognitis uteremur, præter ea quæ non cognoviſſe lectori non licebit, qui ordinem legendi à nobis præſcriptum obſervaverit.*

DE

RATIONIBUS

PRIMIS ULTIMISQUE

E

LIBRO PRIMO PRINCIPIORUM.

DE

RATIONIBUS

PRIMIS ULTIMISQUE

E

LIBRO PRIMO PRINCIPIORUM.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt, quàm pro datâ quávis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, & ſit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypotheſin (a).

LEMMA

(a) Siquis ea quæ ſub Lemmatis Primi titulo hîc proferuntur, pro definitione potiùs haberi velit, quâ nimirum conſtituit Newtonus quidnam ſit ultima illa, quam ſæpè adeo locuturus eſt, ſive magnitudinum ſive rationum æqualitas, is ſententiæ ſuæ me certè haud magnoperè refragantem habiturus eſt. Quid enim? Si duarum magnitudinum, A, B, quarum illam A minorem ponamus, harum ſi major B fixa maneat, minor A ſenſim increſcat, eâ quidem lege, ut licèt nunquam ea major evadat quàm B, intra certum tamen tempus minùs abiit à B quàm pro differentiâ ullâ quam minimam quis poſuerit, quidni habeatur illa A alteri B ultimò æqualis? Cùm dari nequeat magnitudo ulla illâ B vel tantillo minor, quam A ultimò non exuperabit; cùm tamen ipſam B nunquam ei exuperare liceat. Vel ſi, maneante magnitudine minore A, major B ſenſim minuatur, eâ quidem lege, ut licet nunquam ea minor fiat quàm A, intra certum tamen tempus minùs exuperet A, quàm pro differentiâ ullâ quam minimam quis poſuerit, quidni habeatur illa B alteri A ultimò æqualis? Cùm dari nequeat magnitudo ulla illâ A vel tantillo major, quâ altera B ultimò minor non fiat; cùm tamen ipſâ A nunquam ea fiat minor.

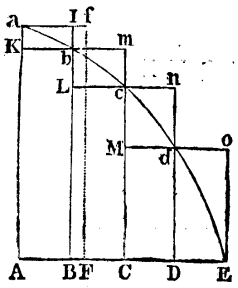
A B

Rurſum duæ magnitudines, A, B, increſcendo vel decreſcendo quovis modo mutationes ſubeant. Sint datæ duæ, C, D; ſitque E magnitudo cui mutabilis B ultimò æqualis fiat. Sit etiam alia F, quæ habeat ad E rationem eam quam C ad D. Jam ſi magnitudini mutabili, A, is ſit mutationum

De Rationibus

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis AACE, *rectis* Aa, AE *& curvâ* ACE *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque,* Ab, BC, Cd, *&c. sub basibus* AB, BC, CD, *&c. æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* AKbI, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quòd ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AaIbmcndoE, *& curvilinea* Aabcde, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum KI, Lm, Mn, Do, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summâ Aa, id est, rectangulum ABIa. Sed hoc rectangulum, eò quòd latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. E. D.

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum FA*af*. Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ

F A B E
C D

tionum suarum omnium terminus atque finis, ut illi F ultimò æqualis fiat, his positis, quidni ratio illius C ad D, magnitudinis A ad B ultima dicatur ratio? Vel quidni dicantur rationes illæ, C ad D, A ad B, ultimò æquales? Siquidem illa A cuivis magnitudini ultimò inæqualis fiat, quæ ad ultimam ipsius B magnitudinem rationem habeat aliam atque C habet ad D. Si neges, inquit Newtonus, magnitudines, A, B, in casu primo habendas esse ultimò æquales, necesse est contrarium velis; eas habendas esse ultimò inæquales. Si hoc velis, necesse erit aliquam inter eas ponas differentiam ultimam: nam inæqualium est semper aliquid quo alterum ab altero absit: neque propiùs quam pro differentiâ illâ, quam ultimam habituræ sunt, magnitudines ultimò inæquales accedere poterunt. Hoc autem contrarium est legi mutationum à nobis constitutæ. Haud igitur inæquales ultimò habendæ sunt magnitudines, quarum mutationes legi, quam tulimus, obtemperant. Si non inæquales,

scriptæ & figuræ circumscriptæ; at latitudine suâ AF in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D. Primis Ultimisque.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

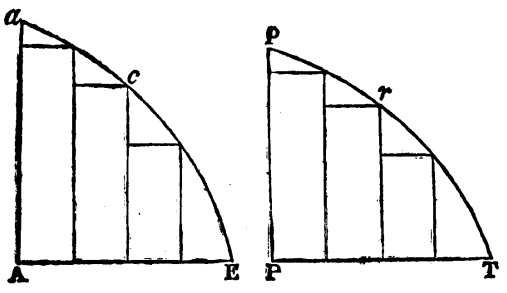
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab, bc, cd,* &c. comprehenditur, coincidit ultimò cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumscripta, quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *ace*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris AACE, Pprt, *inscribantur (ut suprà) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eædem; dico quòd figuræ duæ* AACE, Pprt, *sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per lem-

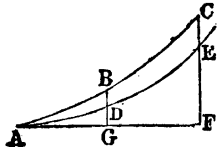
quales, æquales certè. Namque Æqualis & Inæqualis haud sanè novimus intermedium quid, cui nec æquali nec inæquali esse liceat. Jam verò si magnitudines illæ A, B jure optimo censeantur ultimò æquales, rationes etiam, secundum eandem legem nostram mutabiles, nihilo ineptiùs ultimò æquales dici, id etiam invictis argumentis obtinebimus. Quid enim? Cùm in casu secundo magnitudinum mutabilium, A, B, datæ, r, E, sint ultimæ magnitudines, hoc est cùm A fiat ultimò æqualis illi F, necnon B ultimò æqualis illi E, nonne dicendum A esse ultimò ad F ut B ultimò ad E. Id verò si rectè dicitur, nonne Euclides ipse dicere jubebit, esse permutando A ultimò ad B sicut F ad E. Quòd si illud etiam rectè dicitur, cùm sit præterea F ad E ut C ad D (id enim posuimus) nonne iterum ex Euclidis mente dicendum erit, esse A ad B ultimò sicut C ad D, sive rationes, A ad B, C ad D, esse ultimò æquales. Evicimus igitur, inquit Newtonus, magnitudines rationesque mutabiles, quarum mutationes legem à nobis constitutam servant, habendas esse ultimò æquales.

De Rationibus

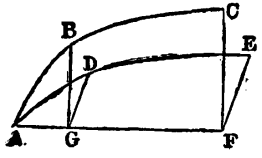
ma III) ad ſummam priorem, & figurâ poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D. (b).

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium

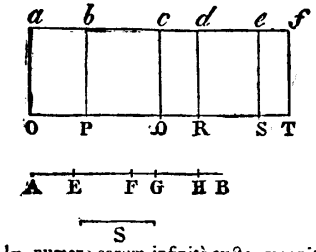
(b) *Cor. H.* 1. Si duæ curvæ (ABC, ADE) axem habeant communem (AF) hujus autem curvæ ordinatæ ad ordinatas alterius datam aliquam rationem gerant, binas utique ſemper conferendo, quæ ex eodem axis puncto eductæ ſint, areæ curvarum AFC, AFE, datam ordinatarum inter ſe rationem habebunt. Nempe hoc dico; à puncto G in axe curvarum, AF, pro lubitu aſſumpto eductâ ad perpendiculum rectâ GB, quæ curvis duabus, ABC, ADE, illi in puncto B, huic in puncto D, occurrat, ſi rectis BG, DG, data aliqua ratio intercedat, quæ eadem obtineat à quocunque demum axis puncto ordinata educatur, eadem arearum etiam, AFC, AFE, inter ipſas ratio erit.



Cor. H. 2. Quòd ſi recta GB non ad perpendiculum, ſed cum datâ quâvis ad axem communem AF inclinatione, educatur, idem obtinebit.



Cor. H. 3. Si verò curvæ duæ, ABC, ADE, eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut rectæ, GB, GD, à puncto aliquo G in axe communi, AF, ordinatim eductæ, datis quidem ſed diverſis ad axem illam inclinationibus, datam inter ſe rationem gerant; quæ eadem obtineat, à quocunque demum axis puncto ordinatæ illæ educantur; vel ſic etiam areis ABCF, ADEF, data quædam ratio intercedet; ea nimirum, quam rectæ à punctis B, D in axem AF ad perpendiculum demiſſæ inter ſe habent.



(c) Sint duæ quantitates AB, CD cujuſcunque generis quæ in partes quotcunque dividantur, AE, EF, FG, GH, HB; CK, KL, LM, MN, ND; quæ partes totidem in hâc et in illâ ſint. Si partes illæ, numero earum infinitè aucto, magnitudinibus verò ſingularum infinitè imminutis, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ordine ad cæteras, hoc eſt ſi AE ad CK, EF ad KL, FG ad LM, GH ad MN, HB ad ND, datam inter ſe rationem habeant; hoc ſi fiat, dicit Newtonus inter quantitates ipſas, AB, CD, eandem rationem datam obtinere, quæ partium evaneſcentium communis eſt.

DEMONSTRATIO AD MENTEM NEWTONI.

Exponatur recta OP datæ cujuſlibet longitudinis; et in eâdem rectâ, infinitè productâ, capiatur PQ, ad quam OP rationem habeat eandem ac AE ad EF; et QR, ad quam PQ rationem habeat quam EF

partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultimâ ratione partis ad partem (c). Primis Ultimisque.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuò reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quàm rectilinea; & areæ ſunt in duplicatâ ratione laterum.

EF ad FG; et RS, ad quam QR rationem habeat quam FG ad GH; et ST, ad quam RS rationem habeat quam GH ad HB. Rectam OT ad perpendiculum infiſtat *oα* datæ cujuſlibet longitudinis, et rectangulum *oαfr* compleatur; cujus cum lateribus parallelæ ducantur *pb*, *qc*, *rd*, *se*. Exponatur alia recta VΔ rectæ OT æqualis, in quâ capiantur partes, VX, Xy, yz, zΓ, ΓΔ, partibus OP, PQ, QR, RS, ST, ordine æquales. Rectam VΔ ad puncta V, X, *y*, Z, Γ, Δ, rectæ V*v*, X*g*, *yb*, Z*k*, Γ*l*, Δ*m*, ad perpendiculum inſiſtant.

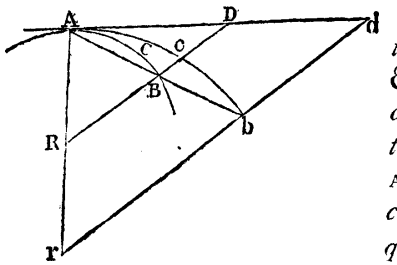
Capiantur X*g*, *yb*, Z*k*, Γ*l*, Δ*m*, ad quas *oα* rationes habeat quas AE ad CK, EF ad KL, FG ad LM, GH ad MN, HB ad ND; et rectangula V*g*, X*b*, *yk*, Z*l*, Γ*m* compleantur. Jam cùm OP ſit ad PQ ut AE ad EF, componendo erit OQ : PQ = AF : FE. Sed PQ : QR = EF : FG. Id enim factum eſt. Igitur ex æquo OQ : QR = AF : FG, et componendo, OR : QR = AG : GF. Sed, QR : RS = FG : GH. Igitur ex æquo, OR : RS = AG : GH, et componendo OS : SR = AH : HG. Sed RS : ST = GH : HB. Igitur ex æquo OS : ST = AH : HB, et componendo OT : TS = AB : BH. Atque hinc colligitur rectam OT eſſe ad partes ſuas, OP, PQ, QR, RS, ST, ſicut quantitas AB ad partes ſuas, AE, EF, FG, GH, HB, ordine ſumendas. Et cùm parallelogramma ejuſdem altitudinis ſint inter ſe ut baſes, rectangula *ob*, *pc*, *qd*, *re*, *sf* erunt inter ſe et ad rectangulum totum *of*, ut AE, EF, FG, GH, HB, partes quantitatis AB, inter ſe et ad totam. Atqui propter rectas VX, OP æquales, rectangula V*g*, *ob*, ſunt inter ſe ut rectæ *xg*, *pb*; et X*g*, *pb*, ſunt ut CK, AE; ita enim factæ ſunt. Rectangulum igitur V*g* ad *ob* ut CK ad AE. Et ex modò oſtenſis, *ob* : *of* = AE : AB. Quare ex æquo erit V*g*, *of* ut CK ad AB. Rurſum propter æquales X*y*, PQ, erit rectangulum *yo* ad Q*b* ut *yb* ad *pb*, id eſt ut KL ad EF. Et ex modò oſtenſis, Q*b* : *of* = EF : AB. Quare ex æquo, *yo* : *of* = KL : AB. Sed jam oſtenſum eſt X*n* eſſe ad *pα* ut CK ad AB. Ergo duo rectangula *yo*, X*n* ſimul ſumpta erunt ad rectangulum *of*, ut CK, KL ſimul ſumptæ ad AB (per 24. 5. Elem.) Rurſùm propter æquales *yz*, QR, rectangulum Z*p* : R*c* = Z*k* : Q*c* = LM : FG. Et ex modò oſtenſis, RC : *of* = FG : AB. Quare ex æquo Z*p* : *of* = LM : AB. Tria igitur rectangula ſimul ſumpta Z*p*, *yo*, X*n* erunt ad *of*, ut tres ML, LK, CK ſimul ſumptæ, hoc eſt ut CL ad AB (per 24. 5. Elem.) Atque eandem eundo argumentationis viam eò tandem pervenietur, eſſe omnia rectangula Δ*r*, Γ*q*, Z*p*, *yo*, X*n* ſimul ſumpta ad rectangulum *of* ſicut quantitas CD ad quantitatem AB. Atque hæc ita erunt quotcunque fuerint rectangula illa, et quantacunque fuerit cujuſque magnitudo. Quare et figura Δ*v*Θ*m*, cui rectangulorum illorum omnium ſumma, numero eorum infinitè aucto, magnitudinibus ſingulorum infinitè imminutis, ultimò ſit æqualis, hæc etiam erit ad rectangulum *of* ſicut CD ad AB.

Sit jam ratio illa data, quæ ultima eſt evaneſcentium partium quantitatis AB ad partes quantitatis CD ſimul evaneſcentes, ea quam recta s habet ad rectam *t*.

Jam numero partium quantitatum, AB, CD, infinitè creſcente, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus, rectangulorum *ob*, *pc*, *qd*, *re*, *sf* necnon V*g*, X*b*, *yk*, Z*l*, Γ*m* numerum infinitè pariter augeri, magnitudines ſingularum infinitè pariter diminui, ex conſtructione et è demonſtratis ſatis patet. Cùm vero recta *oα* ſemper ſit ad rectam *xg* ut AE ad CK (id enim poſuimus) et cùm AE fiat ultimò ad CK, ut s ad *t*, erit *oα* ad *xg* ultimò ut s ad *t*. Sed ut *oα* ad *xg* ita ſemper erit rectangulum *ob* ad rectangulum V*g*, propter OP, VX ſemper æquales. Ergo *ob* ad V*g* ultimò ut s ad *t*. Ac ſimili ratione rectangula reliqua *pc*, *qd*, *re*, *sf* ad reliqua X*b*, *yk*, Z*l*, Γ*m*, ordine ſumenda, fient ultimò ut s ad *t*. Ergo ut s ad *t* ita erit rectangulum *of* ad figuram Θ*v*Δ*m* (per Lemma). Sed ex ſuprà oſtenſis rectangulum *of* ad figuram Θ*v*Δ*m* ut AB ad CD. Habet igitur AB ad CD rationem eam quam s ad *t*; hoc eſt, datam illam, quæ partium evaneſcentium ultimò fit communis. Q. E. D.

De Rationibus

LEMMA VI.



Si arcus quilibet positione datus, ACB, *subtendatur chordâ* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ* (d), *tangatur à rectâ utrinque productâ* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant, & coeant*; *dico, quòd angulus* BAD, *sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum, & ultimò evanescet.*

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

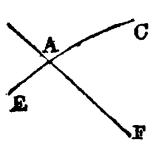
LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quòd ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB & AD ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti BD parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Acb* semper similis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus *dAb*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ *Ab*, *Ad*, & arcus intermedius *Acb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuò secans in F, hæc BF ultimò

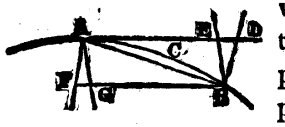
DEFINITIO.



(d) Curvæ cujuspiam, EAC, curvatura in puncto quovis, A, *continua* dicitur, si recta quævis, FA, quæ curvæ in puncto illo occurrat, angulos hinc inde faciat, FAE, FAC, quorum simul sumptorum summa duos rectos propiùs quàm pro datâ quâvis differentiâ accedat.

(e) Si

Primis Ultimisque.



ultimò ad arcum evanescentem ACB rationem habebit æqualitatis; eo quòd completo parallelogrammo AFDB rationem semper habet æqualitatis ad AD.

Corol. 2. Et si per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, secantes tangentem AD & ipsius paralellam BF; ratio ultima abscissarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcûs AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR (e) *cum arcu* ACB, *chordâ* AB, *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico, quòd ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis. (Vide fig. Lemma* VI.)

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB, AD, AR ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipsique RD parallela agi *rbd*, & arcui ACB similis semper sit arcus *Acb*. Et coeuntibus punctis A, B, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *rAb*, *rAcb*, *rAd* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia RAB, RACB, RAD fient ultimò sibi invicem similia & æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

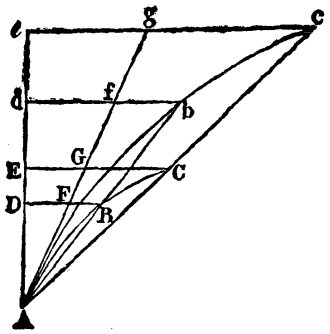
Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuò secent in angulo dato,* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *simul*

(e) Intellige rectam AR positione datam; rectam verò BR eâ lege mobilem, ut cum aliâ aliquâ, positione datâ, semper ea parallela maneat.

DE RATIONIBUS

accedant ad punctum A : *dico, quòd areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimò ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, c accedunt ad punctum A, intelligatur ſemper AD produci ad puncta longinqua *d* & *e*; ut ſint A*d*, A*e* ipſis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis



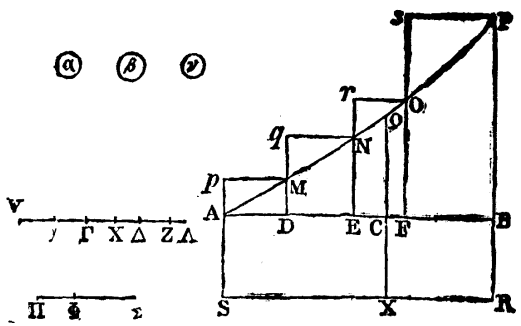
DB, EC parallelæ, quæ occurrant ipſis AB, AC productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva A*bc* ipſi ABC ſimilis, tum recta A*g*, quæ tangat curvam utramque in A, & ſecet ordinatam applicatas DB, EC, *db*, *ec* in F, G, *f*, *g*. Tum, manente longitudine A*e*, coeant puncta B, c cum puncta A; &, angulo *c*A*g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce*

(f) Ideoque (per Lemma 5.) erunt, &c.

Hæc ſic emendarem, " ideòque erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*. Sed his areis proportionales ſemper ſunt areæ ABD, ACE, (per Lemma 5.) et his lateribus latera AD, AE. Ergo &c."

Nimirum areas curvilineares A*bd*, A*ce*, cum rectilinearibus A*fd*, A*ge* ultimò congruentes, habere inter ſe ultimò rationem laterum A*d*, A*e* duplicatam ſatis patet ex ſimilitudine triangulorum A*fd*, A*ge*, et ex propoſitione 19 Libri 6 Elementorum Euclidis. Et arearum curvilinearium A*bd*, A*ce*, ABD, ACE conſtans analogia è lemmate quinto ad hunc modum colligenda eſt. Areæ curvilineæ ABD, A*bd* inter ſe ſunt ſimiles (id enim ponitur). Ergo ABD : A*bd* = AD² : A*d*² (per Lemma 5.) Simili ratione ACE : A*ce* = AE² : A*e*², (per Lemma 5ᵐ.) Sed AD² : A*d*² = AE² : A*e*²; nimirum cùm rectæ quatuor AD, A*d*, AE, A*e* proportione inter ſe conveniant. Ergo ABD : A*bd* = ACE : A*ce* (per V. 11. El.) Permutando ABD : ACE = A*bd* : A*ce*.

THEOREMA.



(f) Exponatur recta AB datæ cujuſvis longitudinis, quæ in puncto c ita dividatur, ut pars AC ſit ad totam AB, ut tempus quoddam *t* ad tempus majus T. Jam dividatur recta AB in partes quotvis, AD, DE, EF, FB; quæ ſint inter ſe et ad totam AB ut temporis T portiones totidem, ordine ſumendæ, inter ſe & ad totum tempus T. Rectam AB in punctis D, E, C, F, B, rectæ, DM, EN, FO, BP, ad perpendiculum inſiſtant; capianturque DM, EN, FO, BP, quæ ſint inter ſe ſicut velocitates, quas corpus quodpiam

A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*; ideoque (per Lemma v.) erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*: ſed his areis proportionales ſemper ſunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE (f). Ergo & areæ ABD, ACE ſunt ultimò in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q. E. D.

PRIMIS ULTIMISQUE.

LEMMA X.

Spatia, quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ deſcribit, ſive vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, ſunt ipſo motûs initio in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis deſcriptæ (g), hoc eſt, ipſo motûs initio

quodpiam α, urgente vi quâpiam finitâ utcunque mutabili, temporibus AD, AE, AF, AB adeptum fuerit. Idque ſemper fieri intelligatur, dum partium AD, DE, EF, FB numerus infinitè augeatur magnitudinibus fingularum infinitè decreſcentibus: ductâque curvâ, quæ per omnium perpendiculorum puncta extrema A, M, N, O, P, tranſeat, et a puncto C eductâ ad perpendiculum rectâ CQ, quæ curvæ in Q occurrat, ſpatia quæ corpus α urgente vi illâ temporibus *t*, T tranſiverit, arearum ACQ, ABP inter ſe proportionem gerent.

Sint enim VX, VZ ſpatia, quæ corpus α urgente vi illâ temporibus *t*, T tranſivit. Rectam AB in puncto A recta datæ longitudinis, AB, ad perpendiculum infiſtat. Puta corpus quoddam, β, toto tempore T velocitate æquabili latum, quæ ad velocitatem rectâ BP expoſitam datæ rectæ AB ad rectam BP rationem habeat; puta, inquam, corpus β, hâc velocitate latum, tempore T ſpatium ΠΣ tranſiiſſe. Capiantur rectæ, *vy*, *y*Γ, ΓΔ, ΔΛ, æquales ſpatiis quæ corpus quodlibet tertium ρ, temporibus AD, DE, EF, FB, velocitatibus DM, EN, FO, BP latum, deſcriberet. Hoc eſt corpori ρ, in loco V quieſcenti, puta ictu quodam ſubito velocitatem omnem DM ſimul imprimi; quâ corpus illud ρ totum tempus AI curſu recto *v*A perſeverans ſpatium *vy* abſolvat. Sub fine autem temporis AD, ſimul ac corpus in locum *y* pervenerit, puta velocitatem primùm impreſſam, DM, novo ictu accedente, in velocitatem EN ſubitò mutari. Et corpus novâ hâc velocitate totum tempus DE curſu recto perſeverans ſpatium *y*Γ conficiat. Et ſub fine temporis DE, ſimul ac corpus in locum Γ pervenerit, puta velocitatem EN novo rurſum ictu in aliam, FO, mutari. Atque idem ſemper fieri intelligatur; nimirum ut ſub fine temporis cujuſque ex illis AD, DE, EF, FB, quæ tempus totum AB, ſive T, conſtituunt, corporis ρ velocitas in illam ſubitò mutetur, quam corpus α ſub fine temporis proximè ſequentis acquiſierit: et velocitatibus hiſce diverſis, temporibus illis AD, DE, EF, FB ordine ſuccedentibus, corpus ρ ſpatia *vy*, *y*Γ, ΓΔ, ΔΛ ordine conficiat; donec, conſumpto tandem toto tempore AB, in locum Λ pervenerit. Compleantur rectangula AR, BS, FT, EQ, DP. Jam ſpatium *vy* habet ad ſpatium ΠΣ rationem compoſitam è rationibus temporis ad tempus et velocitatis ad velocitatem; hoc eſt rectæ AD ad AB, et DM ad AS, ſive rationem rectanguli AM ad rectangulum BS. Ac ſimili ratione ſpatium *y*Γ erit ad ſpatium ΠΣ ut rectangulum DN ad rectangulum BS. Ergo ſpatia *vy*, *y*Γ ſimul ſumpta erunt ad ſpatium ΠΣ ut rectangula AM, DN ſimul ſumpta ad rectangulum BS. (per 24. 5. Elem.) Rurſum ſpatium ΓΔ ad ſpatium ΠΣ ut rectangulum EO ad rectangulum BS. Ergo tria ſpatia *vy*, *y*Γ, ΓΔ, ſive ſpatium *v*Δ, ad ΠΣ, ut tria rectangula AM, DN, EO ſimul ſumpta ad rectangulum BS. Atque eâdem argumentationis viâ eò tandem perventum erit, eſſe omnia rectangula AM, DN, EO, FF, ſimul ſumpta ad rectangulum

De Ratiocinibus initio (per Lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc facilè colligitur, quòd corporum, ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium, errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum à figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus, ſine viribus iſtis, pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus, datam aliquam inter ſe ipſas proportionem ſervantibus, ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis, generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motûs initio, deſcripta directè, & quadrata temporum inverſè.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directè, & vires inverſè.

SCHOLIUM.

Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directè vel inverſè: ſenſus eſt, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directè vel inverſè:

gulum BS ut ſpatia omnia vy, yΓ, ΓΔ, ΔΑ ſimul ſumpta ad ſpatium ΠΣ. Hinc, ſi partium AD, DE, EF, FB numerus infinitè augeatur, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus, (ex quo fiet ut ſpatiorum etiam, vy, yΓ, ΓΔ, ΔΑ numerus pariter infinitè creſceat, ſingulorum verò magnitudines infinitè diminuentur) ſumma rectangulorum omnium, AM, DN, EO, FP, quæ ultimò ſcilicet evaneſcentium fit, hoc eſt (per Lemma 3.) area ABP, erit ad rectangulum BS, ut ultima ſpatiorum omnium vy, yΓ, ΓΔ, ΔΑ evaneſcentium ſumma ad ſpatium ΠΣ.

Sed ſumma ultima ſpatiorum omnium vy, yΓ, ΓΔ, ΔΑ evaneſcentium, ſive longitudo rectæ vA quæ ultimò fit, rectæ vz æqualis eſt. Numero enim partium, ſive temporum, AD, DE, EF, FB, infinitè creſcente, æqualis erit ultimò velocitas, quæ, tempore quovis finito, corpori γ acceſſerit, ei quæ eodem tempore corpori α. Si igitur recta vA non ſit ultimò æqualis rectæ vz, ſint illæ rectæ ultimò inæquales. Corpus igitur α, quod urgente vi finitâ ſecundum legem quandam mutabili, motu à puncto v incepto, curſu recto tempore τ perſeveravit, ſub fine temporis τ in locum z devenerit. Et corpus aliud γ, quod urgente eâdem vi finitâ juxta eandem legem mutabili, motu

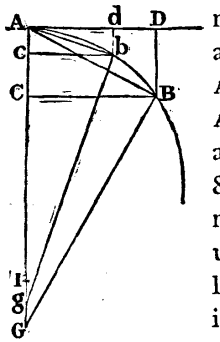
ab

inverſè: ſenſus eſt, quòd prima augetur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ, vel aliarum reciprocæ, augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directè & C directè & D inverſè: ſenſus eſt, quòd A augetur, vel diminuitur, in eâdem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$; hoc eſt, quòd A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione datâ. Primis Ultimisque.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactûs, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs habentibus, eſt ultimò in ratione duplicatâ ſubtenſæ arcûs contermini.

Caſ. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, ſubtenſa anguli contactûs ad tangentem perpendicularis BD, ſubtenſa arcûs AB. Huic ſubtenſæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, occurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitque J interſectio linearum BG, AG ultimò facta, ubi puncta D, B accedunt uſque ad A. Manifeſtum eſt, quòd diſtantia GJ minor eſſe poteſt quàm aſſignata quævis. Eſt autem (ex naturâ circulorum per puncta ABG, A*bg* tranſeuntium) AB *quad.* æquale AG × BD, & A*b quad.* æquale A*g* × *bd*; ideoque ratio AB *quad.* ad A*b quad.* componitur ex rationibus AG ad A*g* & BD ad *bd*. Sed quoniam GJ aſſumi poteſt minor longitudine quâvis aſſignatâ, fieri poteſt, ut ratio AG ad A*g* minùs differat à ratione æqualitatis, quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ; ideoque ut ratio AB *quad.* ad A*b quad.* minùs



ab eodem puncto v incepto, eodem curſu recto eodem tempore perſeveravit, ſub ejuſdem temporis fine in alium locum A devenerit. Quod eſt abſurdum. Non igitur ſunt inæquales recta vz et ſpatiorum vy, yΓ, ΓΔ, ΔΑ ſumma quæ ultima evaneſcentium fit. Æquales igitur. Ergo area ABP erit ad rectangulum BS ut vz ad ΠΣ.

Jam verò recta CQ producta rectæ SR in x occurrat, et capiatur ΠΦ æqualis ſpatio, quod corpus velocitate æquabili AS latum, tempore *t*, ſeu AC, abſolveret. Atque eodem argumento quo hactenus uſi ſumus, oſtendere licet aream ACQ eſſe ad rectangulum CS ut ſpatium vx ad ſpatium ΠΦ. Invertendo CS : ACQ = ΠΦ : vx.

Cùm igitur ſit ABP : BS = vz : ΠΣ
et BS : CS = BA : AC = T : *t* = ΠΣ : ΠΦ
et CS : ACQ = ΠΦ : vx.
Erit, ex æquo, ABP : ACQ = vz : vx. Q. E. D.

differat

De Rationibus

differat à ratione BD ad *bd* quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima AB *quad.* ad A*b quad.* eadem cum ratione ultimâ BD ad *bd*. Q. E. D.

Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad *bd* quæ priùs, ideoque eadem ac AB *quad.* ad A*b quad.* Q. E. D.

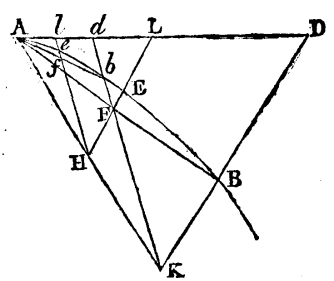
Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli D, *d*, communi lege constituti, ad æqualitatem semper vergent; & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimò æquales erunt, per Lem. I; & propterea lineæ BD, *bd* sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. Q. E. D.

Corol. 1. Unde cùm tangentes AD, A*d*, arcus AB, A*b*, & eorum sinus BC, *bc* fiant ultimò chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimò ut subtensæ BD, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimò ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant, & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ BD, *bd* (h).

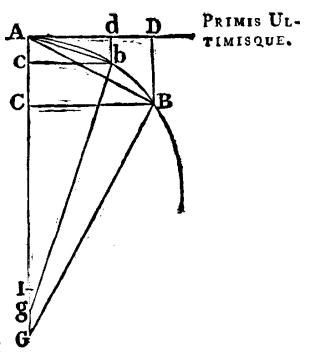
Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, A*db* sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD, A*d*, inque sesquiplicatâ laterum DB, *db*; utpote in compositâ ratione laterum AD & DB, A*d* & *db* existentia. Sic



(h) Sagittæ, EF, *ef*, chordas, AE, A*b*, medias dividentes, in dato puncto H concurrant. Jungatur AH, et in AH productâ capiatur HK = AH; junctæque K*b*, KB et productæ contingenti AD in punctis *d*, D occurrant. Eidem contingenti occurrant sagittæ, *fe*, FE, productæ in punctis *l*, L. Ex constructione AH : AK = AF : AE. Sunt igitur HF, KB, sive FL, BD inter se parallelæ. Coeuntibus igitur punctis B, A ratio ultima evanescentis EL ad BD evanescentem, quadrati ex evanescente AE ad quadratum ex evanescente AB ultima erit (per Lemma). Eadem igitur quæ est quadrati ex AF ad quadratum ex AB, sive unitatis ad quaternarium: fiunt enim AF, AE ultimò æquales. Sed propter rectas BD, FL parallelas, erit BD ad

Sic & triangula ABC, A*bc* sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum BC, *bc*. Rationem verò sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicatâ componitur.



Primis Ultimisque.

Corol. 5. Et quoniam DB, *db* sunt ultimò parallelæ & in duplicatâ ratione ipsarum AD, A*d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, A*db* (ex naturâ parabolæ) (i) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, A*db*; & segmenta AB, A*b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc segmenta erunt in duplicatâ ratione tum tangentium AD, A*d*, tum chordarum & arcuum AB, A*b*.

SCHOLIUM.

Cæterùm in his omnibus supponimus angulum contactûs nec infinitè majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam; seu intervallum AJ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3: quo in casu circulus nullus, per punctum A, inter tangentem AD & curvam AB, duci potest, proindeque angulus contactûs erit infinitè minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur series angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Et si fiat DB successivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactûs, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinitè major, & quilibet posterior infi-

ad FL, ut AB ad AF hoc est ut quaternarius ad binarium. Quare ex æquo ratio ultimæ rectæ EL ad BL unitatis erit ad binarium. Ergo FE, EL fiunt ultimò æquales, ac proinde EF erit ultimò ad ED sicut unitas ad quaternarium. Simili ratione ostendetur esse *ef* ad *bd* ultimò sicut unitas ad quaternarium. Quare ultimò EF : BD = *ef* : *bd*; et permutando, ultimò, EF : *ef* = BD : *bd*. Sed BD, *bd* ad datum punctum K vergunt. Quare (per Lemma 11.) punctis, B, *b*, in A coeuntibus, quadrata ex subtensis evanescentibus AB, A*b* sunt ultimò inter se sicut evanescentes BD, *bd*: hoc est, sicut sagittæ EF, *ef* evanescentes. Q. E. D.

(i) *Ex natura parabolæ.* Etenim cùm BD, *bd* evanescentes rationem inter se ultimam habeant evanescentium AD, A*d* duplicatam, arcus evanescens AB, cujuscunque demum generis curva AB fuerit, ab evanescente arcu parabolico ultimò non differt.

De Ratio-nibus

nitè major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries, utrinque in infinitum pergens, angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinitè major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries AD$^{13}_{6}$, AD$^{11}_{5}$, AD$^{9}_{4}$, AD$^{7}_{3}$, AD$^{5}_{2}$, AD$^{8}_{3}$, AD$^{11}_{4}$, AD$^{14}_{5}$, AD$^{17}_{6}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum, ab invicem infinitis intervalliis differentium. Neque novit natura limitem (k).

Quæ de curvis lineis, deque ſuperficiebus comprehenſis, demonſtrata ſunt, facilè applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas, & contenta. Præmiſi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minùs geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes, quâ potui brevitate, præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quòd quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æquè contendi poſſet, nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cùm attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum, & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes, quem velocitas in fine motûs attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cúmque hic limes ſit certus & definitus, problema eſt verè geometricum, eundem determinare. Geometrica verò omnia, in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis, legitimè uſurpantur.

(k) Vide Keil. Introduct. ad Veram Phyſicam. Lect. 4.

Primis Ultimisque.

Contendi etiam poteſt, quòd ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contrà quàm *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo elementorum, demonſtravit. Verùm hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, reverâ non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites, ad quos quantitatum, ſine limite decreſcentium, rationes ſemper appropinquant; & quas propiùs aſſequi poſſunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò tranſgredi; neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data eſt differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis; nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ, ſeu maximæ, quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſiquando, facili rerum conceptui conſulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

DE ANALYSI

PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM

INFINITAS.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

CAP. I. *Curvarum ſimplicium quadratura.* Pag. 257

CAP. II. *Compoſitarum curvarum quadratura ex ſimplicibus.* p. 258

CAP. III. *Aliarum omnium quadratura.* p. 263

CAP. IV. *Exempla per reſolutionem æquationum.* Sect. 1. *Numeralis æquationum affectarum reſolutio.* p. 268 Sect. 2. *Literalis æquationum affectarum reſolutio.* p. 270. Sect. 3. *Alius modus eaſdem reſolvendi.* p. 272

CAP. V. *Applicatio prædictorum ad reliqua iſtiuſmodi Problemata.* p. 275

CAP. VI. *Longitudines curvarum invenire.* ibid.

CAP. VII. *Invenire prædictorum converſum.* Sect. 1. *Inventio baſis ex areâ datâ.* p. 276. Sect. 2. *Inventio baſis e datâ longitudine curvæ.* p. 276

CAP. VIII. *De ſerie progreſſionum continuandâ.* p. 278

CAP. IX. *Applicatio prædictorum ad curvas mechanicas.* ibid.

CAP. X. Sect. 1. *Demonſtratio quadraturæ curvarum ſimplicium in regulâ prima.* p. 280. Sect. 2. *Demonſtratio reſolutionis æquationum affectarum.* p. 281

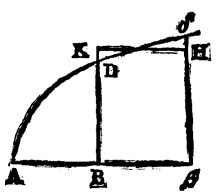
DE ANALYSI

PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

METHODUM generalem, quam, de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem menſurandâ, olim excogitaveram, in ſequentibus breviter explicatam, potiùs quàm accuratè demonſtratam, habes.

CAPUT PRIMUM.

CAPUT PRIMUM.



BASI AB Curvæ alicujus AD, ſit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur AB = x, BD = y, & ſint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

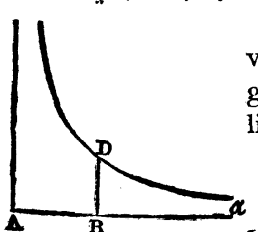
Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Areæ* ABD.

Res Exemplo patebit.

1. Si x^2 $(= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc eſt, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 =$ ABD.
2. Si $4\sqrt{x}$ $(= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3} =$ ABD.
3. Si $\sqrt[3]{x^5}$ $(= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ $(= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) =$ ABD.
4. Si $\frac{1}{x^2}$ $(= x^{-2}) = y$; id eſt, ſi $a = 1 = n$, & $m = -2$;



Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}}=) - x^{-1}$ $(= -\frac{1}{x}) = \alpha$BD, infinitè verſus α protenſæ; quam Calculus ponit negativam, propterea quòd jacet ex alterâ parte lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}(= x^{-\frac{3}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{-\sqrt{x}} =$ BDα.
6. Si $\frac{1}{x}$ $(= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ; qualis eſt Area Hyperbolæ ex utrâque parte lineæ BD.

CAPUT SECUNDUM.

CAPUT SECUNDUM.

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipsius y *ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis, quæ à singulis Terminis emanant.* (a)

Exempla

REGULÆ PRIMÆ

(a) Duabus hisce regulis, quæ ex Problemate Secundo Quadraturæ Curvarum facilè sunt deducendæ, omnis ferè Arithmetica Infinitorum Wallisii summatim comprehensa est. Ac Primam quidem Wallisius ipse allegavit; Arithmet. inf. prop. 64 & 102; Secundam verò, si minùs verbis, saltem exemplis patefecit. Demonstrationem prioris syntheticam, simplicitate et elegantiâ planè admirabilem, haud ingratum certè Geometris fecero, si è Fermatio apponam.

" Unico, quod notissimum est, Proportionis Geometricæ attributo tota hæc methodus in-
" nititur.

" Theorema hoc est. *Datâ quâvis proportione geometricâ, cujus termini decrescant in infinitum,*
" *est ut differentia terminorum progressionem constituentium ad minorem terminum, ita maximus progressio-*
" *nis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.*

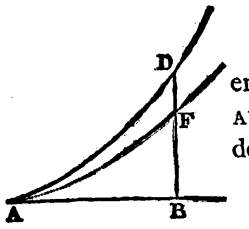
" Hoc posito, proponantur primò HYPERBOLÆ quadrandæ. Exponatur si placet hyperbola, cu-
" jus ea sit proprietas, ut sit semper ut quadratum rectæ HA ad quadratum rectæ AG ita recta GE
" ad rectam HI; et ut quadratum OA ad quadratum AH ita recta HI ad rectam ON. Aio spatium
" infinitum, cujus basis GE, & curva ES ex uno latere, ex alio vero asymptotos infinita GOR, æquari
" spatio rectilineo dato. Fingantur termini progressionis Geometricæ in infinitum extendendæ,
" quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, in infinitum: et ad se per approximationem
" tantum accedant, quantum satis sit, ut juxta methodum Archimedeam parallelogrammum
" rectilineum GE × GH, quadrilineo mixto GHIE adæquetur. Item ut priora ex intervallis
" rectis proportionalium, GH, HO, OM, & similia, sint ferè inter se æqualia; ut commodè per
" ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedea demonstrandi ratio in-
" stitui possit: quod semel monuisse sufficiat.

" His positis, cùm sit AG : AH = AH : AO = AO : AM, erit pariter ut AG ad AH ita intervallum
" GH ad HO, et ita intervallum HO ad OM, &c. Parallelogrammum autem EG × GH erit ad paral-
" lelogrammum HI × HO, ut parallelogrammum HI × HO ad parallelogrammum NO × OM. Cùm
" enim ratio parallelogrammi GE × GH ad HI × HO componatur ex ratione rectæ GE ad rectam
" HI, et ex ratione rectæ GH ad HO; fit autem GH : HO = AG : AH, ut præmonuimus: ergo, ratio
" parallelogrammi GE × GH ad parallelogrammum HI × HO componitur ex ratione GE ad HI, et ex
" ratione AG ad AH. Sed GE : HI = AH : AG² (ex hyp.) et AH² : AG² = AO : AG, propter proportio-
" nales. Ergo ratio parallelogrammi GE × GH ad HI × HO componitur ex ratione AO ad AG et
" AG ad AH. Sed ratio AO ad AH componittur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum GE × GH
" ad parallelogrammum HI × HO ut AO ad AH, sive ut AH ad AG. Similiter probabitur paralleio-
" grammum HI × HO esse ad parallelogrammum NO × OM ut AM ad AO, hoc est ut AH ad AG.
" Ergo parallelogramma EG × GH, HI × HO, NO × OM, &c in infinitum sumpta erunt continuè pro-
" portionalia, in ratione rectæ HA ad GA. Est igitur, ex theoremate hujus methodi constitutivo,
" ut GH, differentia terminorum, ad minorem terminum GA, ita primum parallelogrammum
" EG × GH ad reliqua in infinitum parallelogramma; hoc est, ex adæquatione Archimedeâ, ad
" figuram sub HI asymptoto HR, et curvâ IND, in infinitum extendendâ, contentam. Sed ut HG
" ad GA ita, sumptâ communi latitudine rectâ GE, parallelogrammum GE × GH ad parallelo-
" grammum GE × GA. Ergo parallelogrammum GE × GA, quod est spatium rectilineum datum,
" adæquatur figuræ prædictæ. Cui si addas parallelogrammum GE × GH, quod propter minu-
" tissimos τμαχισμοὺς, evanescat, et abit in nihilum, superet vel minimum et Archimedeâ licet pro-
" lixiore demonstratione facillimè firmandum, parallelogrammum AE, in hâc hyperbolæ specie,
" æquari figuræ sub basi GE, asymptoto GR, curvâ ED, in infinitum producendâ, contentæ.
" Nec operosum ad omnes omninò hujusmodi hyperbolas, unâ demptâ, inventionem extendere.

" Sit

QUADRATURA COMPOSITARUM.

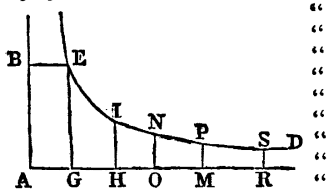
Exempla Prima.



1. Si $x^2+x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD.
Etenim si semper sit $x^2=$ BF, et $x^{\frac{3}{2}}=$ FD, erit, ex præcedente Regulâ, $\frac{1}{3}x^3=$ superficiei AFB descriptæ per lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ AFD descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ toti ABD.
2. Sic si $x^2-x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD.
3. Et si $3x-2x^2+x^3-5x^4=y$; Erit $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-x^5=$ ABD.

Exempla

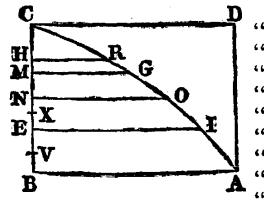
" Sit ea alterius, si placet, hyperbolæ proprietas, ut sit GE ad HI ut cubus rectæ HA ad cubum DEMON-
" rectæ AG, & sic de reliquis. Expositâ ex more infinitâ proportionalium, ut suprà, serie, fient STRATIO
" proportionalia parallelogramma EH, IO, NM ut suprà in infinitum. In hoc verò casu paral- FERMATI-



" lelogrammum primum erit ad secundum, et secundum ANA.
" ad tertium, &c. ut recta AO ad AG, quod statim com-
" positio proportionum manifestabit. Erit igitur ut pa-
" rallelogrammum EH ad figuram, ita recta OG ad AG;
" & sumptâ communi latitudine GE, ita parallelogram-
" mum OG × GE ad parallelogrammum AG × GE. Est
" igitur ut parallelogrammum OG × GE ad parallelogram-
" mum AG × GE, ita parallelogrammum EG × GH ad figu-
" ram. Et vicissim ut parallelogrammum OG × GE, ad
" parallelogrammum EG × GH, ita AG × GE ad figuram. Ut autem parallelogrammum OG × GE
" ad EG × GH ita OG ad GH, sive 2 ad 1 ex adæquatione: intervalla enim basi proxima facta
" sunt ex constructione ferè (*sive ultimò*) æqualia inter se. Ergo, in hâc hyperbolâ, parallelogram-
" mum EGA, quod est æquale spatio rectilineo dato, est duplum figuræ sub basi GE, asymptoto
" GR, et curvâ ESD in infinitum protensâ.

" Similis in quibuslibet aliis casibus habebit locum demonstratio; nisi quòd in primariâ, sive
" Apollonianâ et simplici hyperbolâ, deficit eâ solâ ratione methodus, quia in hâc parallelo-
" gramma, EH, IO, NM sunt semper inter se æqualia; atque ideo cùm termini progressionis con-
" stitutivi sint inter se æquales, nulla inter eos est differentia, quæ totum in hoc negotio conficit
" mysterium.

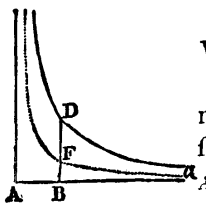
" Eâdem ratione PARABOLÆ omnes omninò quadrantur; nec est ulla, quæ ab artificio nostræ
" methodi, ut fit in hyperbolis, possit esse immunis.



" Sit semiparabola primaria AGRE cujus diameter CB, semibasis
" AB : sumptis autem applicatis IE, ON, GM, &c. fit semper ut
" quadratum AB ad quadratum IE, ita recta BC, ad CE; et ut
" quadratum IE ad quadratum ON ita recta EC ad CN: et sic in
" infinitum. Intelligantur, ex more methodi, rectæ BC, EC, NC,
" MC, HC, in infinitum, continuè proportionales. Erunt etiam, ut
" superiùs probatum est, proportionalia parallelogramma, AE, IN,
" OM, GH in infinitum. Ut cognoscatur ratio parallelogrammi
" AE ad parallelogrammum IN, recurrendum ex methodo ad com-
" positionem proportionum. Componitur autem ratio parallelo-
" grammi AE ad parallelogrammum IN ex ratione AB ad IE et ex ratione BE ad EN. Cùm autem
" sit ut AB quadratum ad IE quadratum, ita BC ad CE; si inter BC & CE sumatur media propor-
" tionalis CV, item inter EC, & CN, media proportionalis XC, erunt continuè proportionales BC,
" VC, EC, XC, NC: et ut BC ad EC ita quadratum BC ad quadratum CV. Sed BC : EC = AB² : IE².
" Ergo BC³ : CV³ = AB² : IE², et EC : CV = AB : EI. Ratio igitur parallelogrammi AE ad parallelo-
" grammum IN componetur ex ratione BC ad VC, sive VC ad CE, sive EC ad CX, et ex ratione
" BE ad EN, sive BC ad CE. Ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus, BC nempe
" ad CE, et CE ad CX, est eadem quæ ratio BC ad CX. Igitur parallelogrammum AE est ad

CAPUT SECUNDUM.

Exempla Secunda.



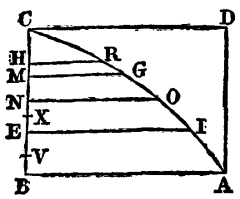
4. Si $x^{-2}+x^{-\frac{1}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$. Vel si $x^{-2}-x^{-\frac{1}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$.

Quarum signa si mutaveris, habebis Affirmativum valorem ($x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}$) superficiei αBD, modò tota cadat supra basim ABα.

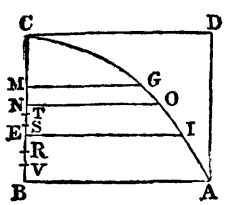
5. Sin

REGULÆ PRIMÆ

" parallelogrammum IN ut BC ad CX. [*Atque eadem erit ratio parallelogrammi* IN *ad parallelogram-*
" *mum* OM, *et parallelogrammi* OM *ad parallelogrammum* GH, &c.] Ideoque ex theoremate methodi
" constitutivo parallelogrammum AE erit ad figuram IRCHE ut recta BX ad rectam XC; ideoque

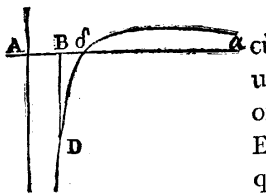


" ut idem parallelogrammum AE ad totam figuram AIGRCB ita
" recta BX ad totam diametrum BC. Ut autem recta BX ad to-
" tam diametrum BC, ita, sumptâ communi latitudine AB, pa-
" rallelogrammum AB × BX ad parallelogrammum AB × BC, sive
" parallelogrammum BD, ductâ AD diametro parallelâ occurrente
" tangenti CD in D. Ergo ut parallelogrammum AE ad totam
" figuram semiparabolicam ARCB, ita parallelogrammum AB × BX
" ad parallelogrammum BD. Et vicissim ut parallelogrammum
" AE ad parallelogrammum AB × BX ita, figura ad parallelogram-
" mum BD. Ut autem parallelogrammum AE ad AB × BX, ita,
" propter communem latitudinem, recta BE ad BX. Ergo ut BE ad BX ita figura ad paral-
" lelogrammum. Est autem BE ad BX, propter adæqualitatem, & sectiones minutissimas, quæ
" rectas BV, VE, EX, intervalla proportionalium representantes, ferè inter se supponit æquales,
" ut 2 ad 3. Ergo figura semiparabolica ARCB ad parallelogrammum BD, ut 2 ad 3.



" Rursum, sit curva AICB, cujus basis AB diameter CB, ejus gene-
" ris parabola, ut cubus applicatæ AB sit ad cubum applicatæ IE ut
" quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ CE, et reliqua ponantur
" ut suprà. Series nempe proportionalium rectarum BC, CE, CN,
" CM, &c. item series proportionalium parallelogrammorum AE, IN,
" OM, &c. in infinitum. Inter BC et EC sumantur duæ mediæ pro-
" portionales, CV, CR. Item inter EC & CN sumantur etiam duæ
" mediæ proportionales CS, CT. Constat ex constructione, cùm ratio
" BC ad EC sit eadem rationi EC ad NC, fore quoque continuè propor-
" tionales rectas BC, CV, CR, CE, CS, CT, CN. Est autem $AB^3:IE^3=$
" $CB^3:CE^3=CB:NC$ Cùm autem sint, ut suprà probavimus, septem continuè proportionales, BC,
" CV, CR, CE, CS, CT, CN, ergo prima, tertia, quinta, septima erunt etiam continuè propor-
" tionales: Ideoque erit BC ad RC ut RC ad CS, et ut CS ad CN. Ut igitur prima BC ad quartam
" NC ita cubus primæ BC ad cubum secundæ RC. Sed ut BC ad NC ita probavimus esse cubum AB
" ad cubum IE. Ergo $AB^3:IE^3=BC^3:RC^3$, et $AB:IE=BC:RC$. Cùm igitur ratio parallelogrammi
" AE ad parallelogrammum IN, componatur ex ratione AB ad IE, et ex ratione BE ad EN, sive
" BC ad EC; eadem parallelogrammorum ratio componetur ex ratione BC ad RC et BC ad EC.
" Ut autem BC prima septem proportionalium ad EC quartam, ita RC tertia, ad CT sextam.
" Ergo parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN ratio componitur ex ratione BC ad RC et
" RC ad TC: hoc est parallelogrammum AE est ad parallelogrammum IN ut BC ad CT. Paral-
" lelogrammum igitur AE, ex prædemonstratis, est ad figuram IGCE ut BT ad CT; ideoque ut
" parallelogrammum AE ad totam figuram AICB, ita recta BT ad rectam BC, sive AB × BT, ad
" AB × BC, vel BD. Et vicissim parallelogrammum AE ad AB × BT, sive recta BE ad rectam BT, ut
" figura AICB ad parallelogrammum BD. Recta autem BT continet quinque intervalla TS, SE,
" ER, RV, VE, quæ inter se, propter nostram methodum, censentur æqualia. Recta autem BE
" continet tria ex iis intervallis, nempe ER, RV, VB. Ergo BE est ad BT, ac propterea figura
" AICB ad parallelogrammum BD, ut 3 ad 5.

" CANON verò universalis inde nullo negotio elicietur. Patet nempe semper fore parallelo-
" grammum BD ad figuram AICB ut aggregatum exponentium potestatum applicatæ et diametri
" ad



QUADRATURA COMPOSITARUM.

5. Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cùm Curva decussat suam Basin inter B et α, ut hîc vides in δ,) istâ parte à parte superiori subductâ, habebis valorem Differentiæ:(b) Earum verò Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.

Exempla

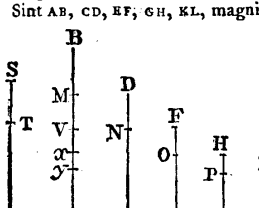
" ad exponentem potestatis applicatæ. Ut in hoc exemplo videre est, in quo potestas applicatæ
" AB est cubus, cujus exponens 3; potestas autem diametri est quadratum, cujus exponens 2.
" Ergo debet esse BD ad AICB, ut jam demonstravimus, & perpetuò constabit, ut summa 3 & 2,
" hoc est 5, ad 3, exponentem applicatæ.

DEMONSTRATIO FERMATIANA.

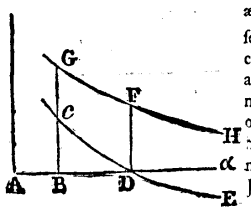
" In hyperbolis autem Canon non minori facilitate invenietur universalis. Erit enim in quâ-
" cunque hyperbolâ, parallelogrammum BG (vid. fig. p. 259.) ad figuram in infinitum protensam,
" RGED, ut differentia potestatum applicatæ & diametri ad exponentem potestatis applicatæ."
Nempe verbis hîc dicit Fermatius quæ Newtonus, Regulâ suâ Primâ, symbolis.

Cæterùm Theorema, ex quo deductæ sunt Fermatii demonstrationes, ad hunc ferè modum ostendi potest.

Sint AB, CD, EF, GH, KL, magnitudines quarum sit continua, secundum datam duarum RS, RT rationem, proportionis convenientia. Si earum numerus infinitè augeatur, dico maximæ AB ad reliquas omnes simul sumptas proportionem ultimam eam esse quam ST habet ad TR. Magnitudini enim AB auferatur AM magnitudini CD æqualis. Et huic CD auferatur CN magnitudini EF æqualis. Et huic EF auferatur EO magnitudini GH æqualis. Et huic GH auferatur GP magnitudini KL æqualis. Tum sumatur $MV=DN$. $Vx=FO$. $xy=HP$. Jam cùm AB sit ad CD, vel AM, ut SR ad RT, dividendo erit BM ad CD ut ST ad TR. Simili ratione erit DN sive MV ad EF ut ST ad TR. Necnon FO, sive Vx ad GH, et HP, sive xy, ad KL, ut ST ad TR. Erunt igitur omnes BM, MV, Vx, xy, simul sumptæ, sive By, ad omnes CD, EF, GH, KL, simul sumptas ut ST ad TR. (per 12. 5. Elem.) Et quotcunque fuerint magnitudines illæ AB, CD, EF, GH, KL proportione inter se continuè convenientes, hæc ratio summæ differentiarum By ad summam omnium à maximâ manet. Quare major erit AB quam ut habeat ad omnium reliquarum summam rationem eam quam ST ad TR. Sed eo minùs quidem major quo minor fuerit Ay. Et Ay ultimæ reliquarum KL semper est æqualis, ut ex constructione satis patet. Et numero omnium infinitè crescente, ultima illarum infinitè minuetur, & minor fiet ultimò quâvis datâ. Quare magnitudo Ay minor fit ultimo quâvis datâ. Quare magnitudo By ipsi BA fit ultimò æqualis; & rationes magnitudinis AB ad summam omnium CD, EF, GH, KL, simul sumptas, & alterius By ad eandem summam fiunt ultimò æquales. (Newton De Rat. prim. & ult. 1.) Sed By ad summam illam rationem eam quam ST ad TR semper habet, ex suprà ostensis. Eadem igitur ratio ST ad TR magnitudinis AB ad omnes CD, EF, GH, KL ultima erit. Q. E. D.



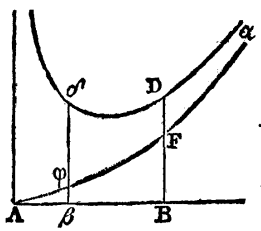
(b) Sit Curva CDE cujus abscissa AB, x, ordinatim applicata BC, y. Naturam vero curvæ hæc æquatio definiat, $x^{-2}-x^{-\frac{1}{2}}=y$. Talis quidem curva basin AB secabit. Secet in D. Dico quantitatem $2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$, quæ ex calculo secundum regulam Newtonianam peracto pro aream provenerit, arearum CDB, αDE differentiam esse. Per D ducatur DF cum ordinatis (BC) curvæ CDE parallela. Et capiatur $DF=1=AD$. In BC, ordinatâ quâvis curvæ CDE, capiatur $BG=x^{-2}$. Et per GF scriba curva GFH quam punctum G perpetuò tangit; sive cujus ea sit natura, ut $x^{-2}=z$, designante x abscissam AB, z ordinatam BG. Jam per regulam primam $-x^{-1}=$ areæ HGBα. Sed cùm $GB=x^{-2}$, et $BC=x^{-2}-x^{-\frac{1}{2}}$, erit $GC=x^{-\frac{1}{2}}$. Et $-2x^{-\frac{1}{2}}=$ areæ HFGCB



curvis

CAPUT SECUNDUM.

Exempla Tertia.



6. Si $x^2+x^{-2}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-x^{-1}$ = Superficiei descriptæ. Sed hîc notandum est, quòd dictæ Superficici partes sic inventæ jacent ex diverso latere lineæ BD.

Nempe, posito x^2 = BF, & x^{-2} = FD; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABF Superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1}$ = DFα Superficiei descriptæ per DF.

7. Et hoc semper accidit, cùm indices $(\frac{m+n}{n})$ rationum Basis x in valore Superficiei quæsitæ, sint variis Signis affecti. In hujusmodi Casibus, pars aliqua BDδβ Superficiei media (quæ sola dari poterit, cùm Superficies sit utrinque infinita) sic invenitur.

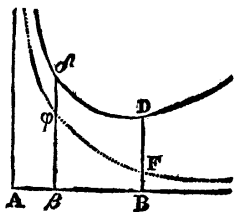
8. Subtrahe Superficiem ad minorem Basin Aβ pertinentem, à Superficie ad majorem Basin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Basium insistentem. Sic in hoc Exemplo *(Vide Fig. præcedentem.)* Si AB = 2, & Aβ = 1; Erit βBDδ = $\frac{17}{6}$.

Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF − DFα) erit $\frac{8}{3}-\frac{1}{2}$, sive $\frac{13}{6}$; et superficies ad Aβ pertinens (viz. Aφβ − δφα) erit $\frac{1}{3}-1$, sive $-\frac{2}{3}$: et earum differentia (viz. ABF − DFα − Aφβ + δφα = βBDδ) erit $\frac{13}{6}+\frac{2}{3}$, sive $\frac{17}{6}$.

9. Eodem modo, si Aβ = 1, AB = x; erit βBDδ = $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^3-x^{-1}$.

10. Sic si $2x^3-3x^5-\frac{2}{3}x^{-4}+x^{-3}=y$, & Aβ = 1; Erit βBDδ = $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^6+\frac{2}{9}x^{-3}+\frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{49}{18}$.

11. Denique notari poterit, quòd si quantitas x^{-1} in valore ipsius y reperiatur, iste terminus (cùm hyperbolicam superficiem generat) seorsim à reliquis considerandus est.



Ut si $x^2+x^{-3}+x^{-1}=y$: sit x^{-1} = BF, & x^2+x^{-3} = FD, ac Aβ = 1; et erit δφFD = $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex terminis x^2+x^{-3} generatur.

Quare

curvis duabus HFG, CDE interceptæ. Hinc $2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$ arearum HGBα, HGCDE differentia erit. Sed duarum HGBα, HGCDE, eadem quæ duarum CDB, αDE differentia erit; nempe cùm pars αDCGH utrique

Quare, si reliqua superficies βφFB, quæ hyperbolica est, ex calculo aliquo sit data, dabitur tota βBDδ. QUADRATURA COMPOSITARUM.

CAPUT TERTIUM.

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis, ad eundem Modum quo Arithmetici, in Numeris Decimalibus, dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas, deinceps elicies.

Exempla Dividendo.

1. SIT $\frac{aa}{b+x}=y$, curvâ nempe existente Hyperbolâ.

Jam ut Æquatio ista à Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$b+x)\ aa+0\ (\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}$ &c.

$aa+\frac{aax}{b}$

$0-\frac{aax}{b}+0$

$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$

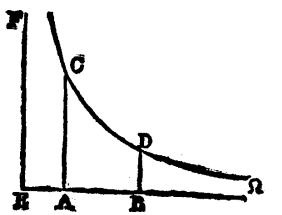
$0+\frac{aax^2}{b^2}+0$

$+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3}$

$0-\frac{aax^3}{b^3}+0$

$-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}$

$0+\frac{aax^4}{b^4}$



utrique fit communis. Ergo $2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$ = differentiæ arearum CBD, αDE. Q. E. D. [*E Commentariis Joannis Stewart Abredonensis.*]

CAPUT TERTIUM.

Et ſic vice hujus, $y = \frac{aa}{b+x}$, nova prodit, $y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. ſerie iſtâc infinitè continuatâ; adeoque (per Regulam Secundam) area quæſita ABDC æqualis erit ipſi $\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. (c) infinitæ etiam ſeriei, cujus tamen Termini pauci initiales ſunt in uſum quemvis ſatis exacti, ſi modò x ſit aliquoties minor quàm b.

2. Eodem modo, ſi ſit $\frac{1}{1+xx} = y$, dividendo prodibit $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c.

3. Vel ſi Terminus xx ponatur in diviſore primus, hoc modo, $xx + 1$, prodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c. pro valore ipſius y; unde (per Regulam Secundam) erit BD$\Omega = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cùm x eſt ſatis parva, poſteriori cùm ſatis magna ſupponitur.

4. Denique ſi $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; dividendo prodit $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit ABDC $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

5. Si ſit $\sqrt{aa+xx} = y$, radicem ſic extraho,

$aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}\right.$ &c.

$\frac{aa}{0 + xx}$

$xx + \frac{x^4}{4a^2}$

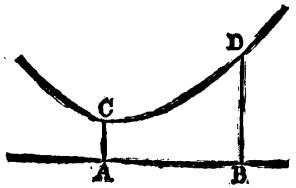
$0 - \frac{x^4}{4a^2}$

$- \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$

$0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$

$+ \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}$

$0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}$

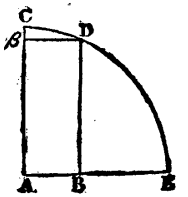


&c.

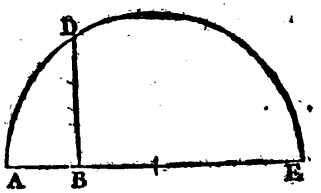
Unde,

Unde, pro æquatione $\sqrt{aa+xx} = y$, nova producitur, viz. $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) area quæſita ABDC erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc eſt quadratura hyperbolæ (d). QUADRATURA COMPOSITARUM.

6. Eodem modo, ſi ſit $\sqrt{aa-xx} = y$, ejus radix erit $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Adeoque area quæſita ABDC erit æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc eſt Quadratura Circuli (e).

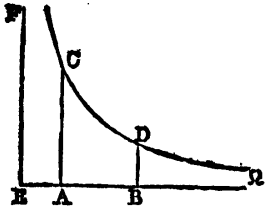


7. Vel ſi ponas $\sqrt{x-xx} = y$, erit radix æqualis infinitæ ſeriei $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et area quæſita ABD æqualis erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$ &c. Et hæc eſt Areæ Circuli Quadratura (f).



8. Si $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ (g), extrahendo radicem utramque prodit

1 +



(c) Sit hyperbola ΩDC quæ centrum habeat E, aſymptotas ad perpendiculum compoſitas EF, EΩ. In aſymptotâ alterutrâ, puta EΩ, datum intelligatur punctum A. Sitque BD cum alterâ aſymptotâ parallela. Jam è naturâ curvæ rectangulum EB × BD dabitur. Si igitur rectangulum illud datum ſymbolum aa deſignet; rectam datam EA, litera b; indefinitas AB, BD, literæ x, y; erit $by + xy = aa$, et $\frac{aa}{b+x} = y$. Et ſeries Newtoniana infinitè producta areæ hyperbolicæ ABDC ultimò æqualis erit.

(d) Sit hyperbola æquilatera CD, cujus centrum A, ſemiaxis tranſverſus AC $= a$, abſciſſa AB axis ſecundi $= x$, ordinata BD $= y$. (Vid. fig. pag. 264.) Erit ACBD area illa hyperbolica cui ſeries $ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{40a^3}{x^5} +$ ultimò æqualis erit.

(e) Circuli centrum ſit A, ſemidiameter AE $= a$. Quadrans AEDC. Abſciſſa ſemidiametri à parte centri, AB $= x$; ordinata BD $= y$. Erit ABDC area circularis, cui ſeries $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$ infinitè producta ultimò æqualis erit.

(f) Sit AE circuli diameter $= 1$; ADE ſemiciculus; AB abſciſſa $= x$; BD ordinata $= y$; ſeries $x^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3$ infinitè producta areæ ADB ultimò æqualis erit.

(g) Nempe hoc modo. Sit ellipſis CDBE cujus centrum A, axes CAB, DAE. Abſciſſa axis minoris

CAPUT TERTIUM.

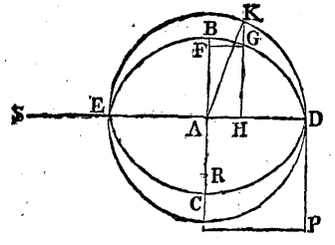
$$\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6-\frac{1}{128}a^4x^8}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}bx^4-\frac{1}{16}b^2x^6-\frac{5}{128}b^3x^8} \text{ &c.}$$

Et Dividendo, ſicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{llll} 1+\frac{1}{2}b^3x^2+\frac{3}{8}b^2x^4+\frac{5}{16}b^3x^6+\frac{35}{128}b^4x^8 \text{ &c.} \\ +\frac{1}{2}a & +\frac{1}{4}ab & +\frac{3}{16}ab^2 & +\frac{5}{32}ab^3 \\ & -\frac{1}{8}a^2 & -\frac{1}{16}a^2b & -\frac{3}{64}a^2b^2 \\ & & +\frac{1}{16}a^3 & +\frac{1}{32}a^3b \\ & & & -\frac{5}{128}a^4 \end{array}$$

Adeoque

LONGITUDO



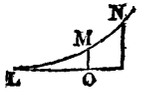
noris à parte centri, AF, deſignetur literâ x; ordinata GF literâ y; arcus DG literâ z. Sit AR ſemiparameter Ellipſeos, et ſumatur AS, ad quam ſemiaxis tranſverſus AD rationem habeat eam quam AR ad ipſum AD: et recta illa AS deſignetur literâ b: ponaturque ſemiaxis tranſverſus AD $=1$. Jam, propter angulum AFG rectum, fluxiones rectarum AF, FG ſunt ad fluxionem arcûs DG, ſicut latera trianguli cujuſdam rectilinearis rectanguli ad hypotenuſam (Newton Introduct. ad Quad. Curv.) Erunt igitur $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{z}\dot{z}$. Et $\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}=\dot{z}$. Centro A, ſemidiametro AD, ſcribatur circulus DKE. A puncto G in axem tranſverſum AD deducatur ad perpendiculum GH, quæ circuli circumflexum in puncto K ſecet. Jungatur AK. Jam propter circulum, $AK^2-HK^2=AH^2$; hoc eſt $1-HK^2=y^2$. Sed è naturis ellipſeos circulique quibus axis DE communis, $GH^2:HK^2=AB^2:AD^2=AR:AD=AD:AS$. Hoc eſt $x^2:HK^2=1:b$. Quare $HK^2=bx^2$, et $1-bx^2=y^2$. Hinc $\dot{y}=-\frac{b\dot{x}x}{y}=-\frac{b\dot{x}x}{\sqrt{1-bx^2}}$. Ergo $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{x}\times\frac{b^2x^2}{1-bx^2}$. Et $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times 1+\frac{b^2x^2}{1-bx^2}=\frac{1+b^2-b.x^2}{1-bx^2}\dot{x}\dot{x}$. Vel, ſi ponatur $a=b^2-b$, $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\dot{x}\dot{x}$. Et $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}\dot{x}=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}=\dot{z}$.

$$\text{Ergo } \dot{x}\,\frac{1+\frac{ax^2}{2}-\frac{a^2x^4}{8}+\frac{a^3x^6}{16}-\frac{5}{128}a^4x^8+}{1-\frac{bx^2}{2}-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6-\frac{5}{128}b^4x^8-}=\dot{z}.$$

Hinc, Diviſionis operâ, invenietur

$$\begin{array}{llll} \dot{z}=\dot{x}\times 1+\frac{1}{2}b & +\frac{3b^2}{2^2\times 2} & +\frac{b^3\times 3\times 5}{2^3\times 2\times 3} & \\ +\frac{1}{2}a & +\frac{ab}{2^2}x^4 & +\frac{3ab^2}{2^3\times 2} & x^6 \\ & -\frac{a^2}{2^2\times 2} & -\frac{a^2b}{2^3\times 2} & \\ & & +\frac{3a^3}{2^3\times 2\times 3} & \end{array}$$

Jam ſit curva LMN, cujus ſi abſciſſa LO capiatur $=x$, ordinata MO ad perpendiculum educta ſemper æqualis ſit quantitati $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, cui ſeries utique illa $1+\frac{1}{2}bx^2+\frac{1}{2}a$ infinitè producta, ultimò fit æqualis.



Tum

Adeoque aream quæſitam $x+\frac{1}{6}bx^3+\frac{3}{40}b^2x^5$ &c.
$+\frac{1}{6}a \quad +\frac{1}{20}ab$
$-\frac{1}{40}a^2$

QUADRATURA COMPOSITARUM.

9. Sed obſervandum eſt, quòd operatio non rarò abbreviatur per debitam æquationis præparationem; ut in allato exemplo

Tum hæc ſeries $x+\frac{1}{6}bx^3+\frac{3b^2}{2^2.2\times 5}+\frac{ab}{2^2\times 5}x^5-\frac{a^2}{2^2\times 2\times 5}$

infinitè producta areæ LOM ultimò æqualis erit (per Regulam Secundam). Sed eadem ſeries Arcûs Elliptici. Esquantitati z, ſive $1\times z$, ultimò æqualis erit. (Geomet. flux. Prop. II.) Nempe cùm hæc ſeries fluens ſit alterius, quæ quantitati $\dot{z}$ oſtenſa eſt æqualis, et unà cum quantitate z à nihilo generari inceperit. Rectangulum igitur $1\times z$, ſive AD × arc. DG areæ, LOM æqualis erit. Et ſi ad rectam AD applicetur rectangulum AP = areæ LOM, latus DP, ex applicatione ortum, arcui Elliptico, DG, æquale erit. Et hoc eſt quod dixit Newtonus, per quadraturam curvæ, cujus ea ſit natura, ut ordinata ſit $\sqrt{\frac{1+ax}{1-bx^2}}\dot{x}$, exiſtente abſciſſâ x, dari longitudinem arcûs Elliptici.

Et hujus exemplo interpretanda ſunt quæcunque ſimiliter ſunt dicta, qualia multa certè occurrunt, in ſcriptis Newtoni. Arithmeticè autem æſtimatur arcus z ſummam ſeriei colligendo. Cæterùm eo ſermone Newtonus uti voluit, qui maximè ſignificaret, geometricas etiam problematum conſtructiones è calculis, quos tradit, facillimè deducendas. Nam ſi talis eſſet curva LMN, cujus area Geometricæ alicujus lineationis ope quadraturam ſubiret, Arcûs etiam Elliptici Longitudinem geometricè definire liceret. Vel ſi aut conſtructione Geometricâ, aut artificio quopiam mechanico, aream curvæ LMN appropinquare ſaltem potueris, arcûs Elliptici longitudinem geometricè vel mechanicè æquè appropinquare poteris.

Series ſimplicior paulò exſiſtet è computatione ſequente, quæ literam b exulare coget; modò litera b non AS, ut priùs, ſed ſemiaxem ſecundum AB deſignet. E naturâ Ellipſeos, $y^2:b^2-x^2=1:b^2$. Ergo $b^2y^2=b^2-x^2$, et $x^2=b^2-b^2y^2$. Hinc $\dot{x}=\frac{-b^2y}{x}\dot{y}=\frac{-b^2y}{\sqrt{b^2-b^2y^2}}\dot{y}=\frac{-by}{\sqrt{1-y^2}}\dot{y}$. Hinc $\dot{x}\dot{x}=\frac{b^2y^2}{1-y^2}\dot{y}\dot{y}$. Et $\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y}=\dot{y}\dot{y}\times 1+\frac{b^2y^2}{1-y^2}=\dot{y}\dot{y}\times\frac{1-y^2+b^2y^2}{1-y^2}$. Vel, ſi ponatur $b^2-1=-a$, $\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y}=\frac{1-ay^2}{1-y^2}\dot{y}\dot{y}$. Ergo $\dot{y}\times\sqrt{\frac{1-ay^2}{1-y^2}}=\sqrt{\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y}}=-\dot{z}$. Unde calculo ut priùs peracto veniet ſeries $y+\frac{1}{6}ax^3+\frac{3}{2^2\times 2\times 5}-\frac{a}{2^2\times 5}-\frac{a^2}{2^2\times 2\times 5}y^5$ &c. $=-z$.

hoc eſt arcui Elliptico RG. Poſitis autem ſemiaxe ſecundo AB $=1$, tranſverſo AD $=b$, arcus DG ſimili computatione prodibit $x+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}a^{x^3}+\frac{3}{2^2\times 2\times 5}+\frac{a}{2^2\times 5}x^5+-\frac{a^2}{2^2\times 2\times 5}$

quantitate ſcilicet a, quæ in priore caſu negata, eſt in hoc poſteriore affirmata.

CAPUT QUARTUM. $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices, prodibit $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4}}{1+bx^2} = -b$ $= y$, & reliquum opus perficitur extrahendo radicem numeratoris tantùm, & dividendo per denominatorem.

10. Ex hiſce, credo, ſatis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipſius y (quibuſcunque radicibus vel denominatoribus ſit perplexus, ut hic videre eſt; $x^3 + \frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^4}} - \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^5-x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{x+x-\sqrt[3]{2x-x^{\frac{1}{2}}}}}$ $= y$) in ſeries infinitas ſimplicium terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæſita ſuperficies cognoſcetur.

CAPUT QUARTUM.

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

SECT. I.

Numeralis Æquationum affectarum reſolutio.

1. QUIA tota difficultas in Reſolutione latet, modum, quo ego utor, in Æquatione Numerali primùm illuſtrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, reſolvenda: et ſit 2 numerus qui minùs quàm decimâ ſui parte differt à Radice quæſitâ. Tum pono $2 + p = y$, & ſubſtituo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde novâ prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus radix p exquirenda eſt, ut quotienti addatur: nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, ſive $p = 0,1$ prope veritatem eſt; itaque ſcribo 0,1 in quotiente, & ſuppono $0,1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut priùs, ſubſtituo; unde prodit $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$.

Et cùm $11,23q + 0,061$ veritati propè accedit, ſive ferè ſit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur figuræ, quot locis primæ figuræ hujus & principalis quotientis excluſivè diſtant) ſcribo $-0,0054$ in inferiori parte quotientis, cùm negativa ſit.

2. Et ſupponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut priùs ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſque placuerit. Verùm ſi ad bis tot

tot figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unâ demptâ, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,0054 + r$ in [illegible] $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem ſuam neglecto; & prodit $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$ ferè, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$ ferè, quam ſcribo in negativâ parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativâ ſubducens habeo 2,09455147 Quotientem quæſitam.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
	Summa	$-1 + 10p - 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+0,06 + 1,2 + 6,0$ $+1, + 10,$ $-1,$
	Summa	$+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$+0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$ $-0,060642 + 11,23$ $+0,061$
	Summa	$+0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + s = r$		

3. Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſeciùs reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hîc factum fuit, levabis, ſi primos ejus terminos gradatim omiſeris.

4. Præterea notandum eſt, quòd in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0,1 = p$ veritati ſatis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxiſſem $6p^2 + 10p - 1 = 0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente ſcripſiſſem; & ſecundam vel tertiam Quotientis figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſtâ ultimò reſultante quadratum coefficientis penultimi termini, non ſit decies majus quàm factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

5. Imo laborem plerumque minues, præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis noviſſimè reſultantis) exquiras: iſto enim modo figuras duplo plures quâlibet vice Quotienti lucraberis.

CAPUT QUARTUM.

6. Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio; certè mihi videtur præ reliquis simplex, & usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet; unde cùm opus sit, in memoriam facilè revocatur.

7. Æquationes, in quibus vel aliqui vel nulli Termini desint, eâdem fere facilitate tractantur; & Æquatio semper relinquitur, cujus Radix unà cum acquisitâ Quotiente adæquat Radicem Æquationis primò propositæ. Unde Examinatio Operis hîc æquè poterit institui ac in reliquâ Arithmeticâ, auferendo nempe Quotientem à Radice primæ Æquationis (sicut Analystis notum est) ut Æquatio ultima, vel termini ejus duo trese ultimi, producantur inde.

8. Quicquid laboris hîc est, istud in Operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur: id quod variè perficias, at sequentem modum maximè expeditum puto, præsertim ubi Numeri coefficientes constant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ substituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$.

Et cùm ista possit resolvi in hanc formam $y-4\times y+5\times y-12\times y+17=0$ (h). Æquatio nova sic generabitur $p-1\times p+3=p^2+2p-3$. et p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$. et p^3+5p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. et $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

SECT. II.

Literalis Æquationum affectarum resolutio.

1. His in numeris sic ostensis: sit Æquatio literalis $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$, resolvenda.

Primùm inquiro valorem ipsius y, cùm x sit nulla; hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis, $y^3+a^2y-2a^3=0$, & invenio esse $+a$. Itaque scribo $+a$ in Quotiente, & supponens $+a+p=y$, substituo pro y valorem ejus, & Terminos inde resultantes ($p^3+3ap^2+4a^2p$, &c.) margini appono; ex quibus assumo $+4a^2p+a^2x$ terminos

(h) Sensus est, æquationem propositam ita generandam esse, si apotomen $y-4$ cum y multiplicaveris: factum quinario auctum cum y rursùm multiplicaveris: Novum factum duodenario imminutum

minos utique ubi p & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & eos nihilo ferè æquales esse suppono, sive $p=-\frac{1}{4}x$ ferè, vel $p=-\frac{1}{4}x+q$. Et scribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, substituo $-\frac{1}{4}x+q$ pro p; et terminos inde resultantes iterum in margine scribo, ut vides in annexo schemate, & inde assumo Quantitates $+4a^2q-\frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q & x seorsim sunt minimarum dimensionum; & fingo $q=\frac{xx}{64a}$ ferè, sive $q=+\frac{xx}{64a}+r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ quotienti, substituo $\frac{xx}{64a}+r$ pro q; & sic procedo quo usque placuerit. ÆQUATIONUM RESOLUTIONES.

$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$

$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{5091x^4}{16384a^3}$ &c.

$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$
	$+a^2y$	$+a^3+a^2p$
	$+axy$	$+a^2x+axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{8}axq+3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x+4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2+axq$
	$+ax$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{3}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{5091x^4}{16384a^3}$		

2. Sin duplo tantùm plures quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: primo termino (q^3) æquationis novissimè resultantis misso, & istâ etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) secundi, ubi x est tot dimensionum quot in penultimo termino quotientis; in reliquos terminos ($3aq^2+4a^2q$, &c.) margini adscriptos ut vides, substituo $\frac{x^2}{64a}+r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis ($\frac{15x^4}{4096a}-\frac{131}{128}x^3+\frac{9}{32}x^2r-\frac{1}{2}axr+4a^2r$) æquationis inde resultantis, factâ divisione, $4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}$ (elicio $+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{5091x^4}{16384a^3}$ quotienti adnectendos.

imminutum in y rursùm multiplicaveris, factoque rursùm novo deniseptenarium tandem adjeceris.

3. De-

CAPUT QUARTUM.

3. Denique quotiens iſta $(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam Secundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro areâ quæſitâ; quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x ſit minor.

SECT. III.

Alius modus eaſdem Reſolvendi.

1. Sin valor areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x ſit major; exemplum eſto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc reſoluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$, in quibus x & y vel ſeorſim, vel ſimul multiplicatæ, ſunt & plurimarum, & æqualium ubique dimenſionum; & ex iis quaſi nihilo æqualibus radicem elicio. Hanc invenio eſſe x, & in quotiente ſcribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x ſubſtitutâ) radicem extraho; quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in quotiente ſcribo. Denique pono $x + p = y$; & ſic procedo ut in priori exemplo, donec habeam quotientem $x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. adeoque aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}$ (1) $- \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de quâ vide exempla tertia Regulæ Secundæ. Lucis gratiâ dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modò x & a ſibi invicem ibi ſubſtituantur, ut non opus eſſet aliud reſolutionis exemplum hic adjungere.

2. Area autem $(\frac{xx}{2} - \frac{x}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}$ &c. terminatur ad curvam, quæ juxta Aſymptoton aliquam in infinitum ſerpit; & Termini initiales $(x - \frac{1}{4}a)$ valoris extracti de y, in Aſymptoton iſtam ſemper terminantur; unde portionem Aſymptoti facilè invenies. Idem ſemper notandum eſt, cùm area deſignatur terminis plus pluſque diviſis per x continuè, præterquam quòd vice Aſymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis compoſita.

3. Sed

(1) Nempe hujuſmodi ſymbolis $\boxed{\frac{a}{b.x^n}}$ curvarum hyperboliformium areas deſignari voluit, quarum abſciſſas litera x deſignat, ordinatas ſymbolum $\frac{a}{bx^n}$. Hinc pleriſque noſtratium uſu receptum

ÆQUATIONUM RESOLUTIONE.

3. Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem curvis in orbem, ad inſtar Ellipſium, flexis; de altero modo per exemplum, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſuprà oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in numeratoribus quotientis perpetuò augeantur) annotabo ſequentia.

I. Si quando, accidit quòd valor ipſius y, cùm x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitùs ignota, licebit illam literâ aliquâ deſignare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$; ſi radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuiſſet ſurda, vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro eâ ponendam; et reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in quotiente, ſuppono $b + p = y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. reſultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quòd b ſupponitur radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $- \frac{abx}{3b + a}$ quotienti apponendum, et $- \frac{abx}{3b + a} + q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$. Sit $cc = 3b^2 + a^2$.

$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} - \frac{a^4bx^3}{c^8} + \frac{a^5b^3x^3}{c^{10}}$ &c.

$b + p = y$	y^3	$+b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$
	$+axy$	$+abx + axp$
	$+aay$	$+aab + aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc} + q = p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^3$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$ &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$
	$+ccp$	$-abx + ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$

$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}) \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} (\frac{a^2bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^5}$ &c.

Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſuprà, reſolvo; & radicem ejus pro b ſubſtituo.

II. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt, ſi in æquatione reſolvendâ nullus ſit terminus, niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hâc $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos $(-axy + x^3)$ ſeligo in quibus x ſeorſim & y etiam ſeorſim, ſi fieri poteſt, aliàs per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. Et illi dant $+ \frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$

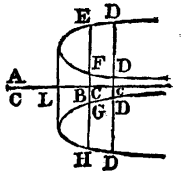
tum eſt, ut hoc ſymbolo, $ax^{\frac{m}{n}}\dot{x}$, fluxionem deſignante, hoc aliud $\boxed{ax^{\frac{m}{n}}\dot{x}}$ generaliter deſignet fluentem.

CAPUT QUARTUM.

pro y ſubſtituendum. In hâc $y^3-a^2y+axy-x^3=0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y-x^3$, vel ex y^3-a^2y elicere.

III. Si valor iſte ſit imaginarius, ut in hâc $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$, augeo vel imminuo quantitatem x, donec dictus valor evadat realis.

Sic in annexo ſchemate (k), cum AC (x) nulla eſt, tum CD (y) eſt imaginaria.



Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum, poſito quòd BC (x) ſit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet poteſt eſſe primus terminus quotientis, prout ſuperficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC deſideratur. In aliis etiam caſibus, ſi quando hæſitas, te hoc modo extricabis.

Denique ſi index poteſtatis ipſius x vel y ſit fractio, reduco ipſum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}=0$. Poſito $y^{\frac{1}{2}}=v$, & $x^{\frac{1}{3}}=z$, reſultabit $v^6-z^3v+z^4=0$, cujus radix eſt $v=z+z^3$, &c. ſive (reſtituendo valores) $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}+x$, &c. & quadrando $y=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant (l). Imo cùm Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & ſuperficie ſolidorum, deque Centro Gravitatis, poſſunt eò tandem reduci, ut quæratur quantitas ſuperficiei planæ lineâ curvâ terminatæ, non opus eſt quicquam de iis adjungere. In iſtis autem quo ego operor modo dicam breviſſimè.

CAPUT

(k) Sit curva DEHD cujus abſciſſam, AC, litera x deſignet; ordinatam, CD, litera y; æquatione biquadraticâ modò expoſitâ abſciſſa AC ordinataque CD quomodo inter ſe mutuò habeant generaliter ſignificante. Hæc quidem curva talis erit, ut ſi per datum punctum A, unde abſciſſæ initium ducant, recta ducatur cum ordinatis CD parallela, ea curvæ nullibi occurrat. Ergo quando x nulla eſt, hoc eſt punctis, A, C, coeuntibus, æſtimatio literæ y imaginaria erit. Duci intelligatur recta cum ordinatis parallela quæ curvam contingat; axem verò contingens illa in puncto L ſecet. Sumatur recta AB datæ cujuſvis longitudinis, modò rectâ AL non ſit minor. Si per datum punctum B ducatur recta BE, cum ordinatis parallela, quatuor illa locis cum curvâ concurret. Concurſus quatuor ſint F, E, G, H. Jam ſi litera x, pro indefinitâ AC, indefinitæ illius datæque AB differentiam BC deſignet, et in æquationem biquadraticam pro x, illud $x+$AB ubique ſubſtituatur; quo facto illa in hanc migraverit, $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2\text{AB}.x.y^2-\text{AB}^2.y^2-2x-2\text{AB}+x^2+2\text{AB}.x+\text{AB}^2+x^4+4\text{AB}.x^3+6\text{AB}^2x^2+4\text{AB}^3x+\text{AB}^4=0$; æquationis, $y^4+y^2-2y+6-2\text{AB}+\text{AB}^2+\text{AB}^2=0$, quæ ex tranſmutatâ fiet, poſito quòd x nihilo æqualis ſit; hujus inquam nulla radix impoſſibilis erit, ſed veræ quatuor exſiſtent. Coeuntibus enim punctis B, C, quod fieri quidem neceſſe eſt, ſi indefinita $x=0$, hoc eſt ſi illius AC datæque AB differentia nulla ſit, ſignificantia literæ y quadruplex erit, cùm ex quatuor, BF, BE, BG, BH, quamlibet illa deſignârit. Harum autem aliam vel aliam pro membro primo ſerici ſumere oportet, prout aream BEDC, vel BFDC, vel BGDC, vel BHDC, æſtimare velis.

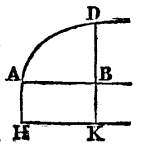
(l) Quæ hic verò breviter dixit eadem in Geometriâ Analyticâ pluribus et explanatiùs tradit. Ea quidem quæ Æquationum in ſeries infinitas reſolutionem ſpectant, capite ejus libri primo ſecundo et tertio: quæ Curvarum per ſeries Quadraturas, Problemate 9°.

CAPUT QUINTUM.

CURVARUM LONGITUDINIS.

Applicatio prædictorum ad reliqua iſtiuſmodi Problemata.

SIT ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH, vel BK, eſt unitas. Et cogita rectam DBK, uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK deſcribere; & quòd BK (1) ſit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quòd ex momento BD perpetim dato, poſſis, per prædictas regulas, aream ABD ipſo deſcriptam inveſtigare; ſive cum AK (x) momento 1 deſcriptâ conferre.

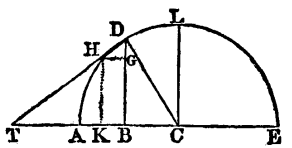


Jam quâ ratione ſuperficies ABD ex momento ſuo perpetim dato, per præcedentes regulas, elicitur, eâdem quælibet alia quantitas ex momento ſuo ſic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior (m).

CAPUT SEXTUM.

Longitudines Curvarum invenire.

1. SIT ADLE circulus, cujus arcûs AD longitudo eſt indaganda. Ductâ tangente DHT, & completo indefinitè parvo rectangulo HGBK, & poſito AE=1=2AC: erit ut BK ſive GH, momentum baſis AB (x), ad HD momentum arcûs AD :: BT : DT :: BD $(\sqrt{x-xx})$: DC $(\frac{1}{2})$ :: 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ ſive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$, eſt momentum arcûs AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}+\frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}+\frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Quare, per Regulam



(m) Vide (e) & confer Newton. de Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor.

CAPUT SEPTIMUM. Secundam, longitudo arcûs AD eſt $x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}+\frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c. ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5$ &c.

2. Non ſecus ponendo CB eſſe x, & radium CA eſſe 1, invenies arcum LD eſſe $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c.

3. Sed notandum eſt, quòd unitas iſta, quæ pro momento ponitur, eſt ſuperficies cùm de ſolidis, & linea cùm de ſuperficiebus, & punctum cùm de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate (n) in punctis, ſive lineis infinitè parvis, ſiquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indiviſibilium.

Ex his fiat conjectura de ſuperficiebus & quantitatibus ſolidorum; ac de centris gravitatum.

CAPUT SEPTIMUM.

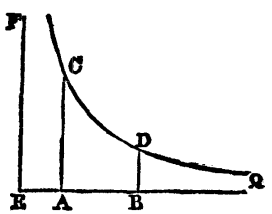
Invenire prædictorum converſum.

VERUM ſi è contrà ex areâ vel longitudine, &c. curvæ alicujus datâ longitudo baſis AB deſideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix x.

SECT. Ia.

Inventio Baſis ex Areâ datâ.

Ut ſi ex areâ ABDC hyperbolæ ($\frac{1}{1+x}=y$) datâ, cupiam baſim AB inveſtigare, areâ iſtâ z nominatâ, extraho radicem hujus z (ABCD) $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x eſt plurium dimenſionum quàm z, in quotiente, deſideratur.



Ut ſi vellem quòd z ad quinque tantùm dimenſiones in quotiente aſcendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8$, &c. et radicem hujus tantùm $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0$ extraho (°).

Analyſin

(n) Quam tamen loquendi formam ita non probavit Newtonus, ut non alium in finem, quàm ut illa ex argumentationibus Geometrarum exularet, viam ſuam Rationum Primarum Ultimarumque ex-

$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z+p=x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4-z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3+z^2p+zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2-zp-\frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2+q=p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^3$	$-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4+z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3-zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2-q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1-z+\frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{30}z^5\ (\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$		

BASIS EX AREA VEL ARCU.

Analyſin, ut vides, exhibui propter adnotanda duo ſequentia.

I. Quòd inter ſubſtituendum, iſtos terminos ſemper omitto, quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quòd poſt primum terminum, ex quâlibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures terminos dextrorſum, quàm iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantùm poſt z^3. Cùm radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula; quòd poſt primum terminum, ex quâlibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures terminos dextrorſum, quàm iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis à ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

II. Cùm video p, q, vel r, &c. in æquatione noviſſimè reſultante eſſe unius tantùm dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos terminos quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hîc vides factum.

SECT. II.

Inventio Baſis ex datâ Longitudine Curvæ.

Si ex dato arcu CD ſinus AB deſideratur; æquationis $z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c. ſuprà inventæ, (poſito nempe AB $=x$,

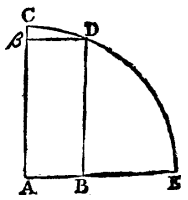
excogitaverit.

(°) Vide Geometr. Analyt. Cap. III. § 8.

CD $=z$,

CAPUT OCTAVUM. CD=z, & AC=1,) radix extracta erit $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7+\frac{1}{362880}z^9$, &c (P).

Et præterea si cosinum Aβ ex isto arcu dato cupis, fac Aβ $(=\sqrt{1-xx})=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\frac{1}{40320}z^8-\frac{1}{3628800}z^{10}$, &c (q).



CAPUT OCTAVUM.

De Serie progressionum continuandâ.

Hic obiter notetur, quòd 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogiâ observatâ poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

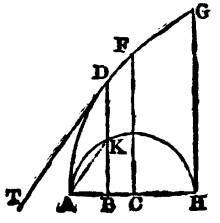
Et hanc $z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, &c. Et sic in reliquis (r).

CAPUT NONUM.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

1. Et hæc de curvis Geometricis sufficiant. Quinetiam curva etiamsi mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.

Exemplo sit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota quâ describitur: et quæratur superficies ABD. Jam posito AB $=x$, BD$=y$, ut suprà, & AH$=1$; primò quæro longitudinem ipsius BD. Nempe, ex naturâ trochoidis, est KD = arcui AK. Quare tota BD = BK + arc. AK. Sed est BK $(=\sqrt{x-xx})=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus AK$=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota BD$=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.



(p) Vide Geometr. Analyt. C. III. § 9.

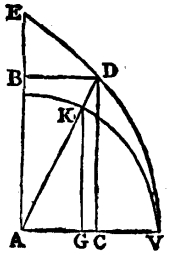
(q) Nempe ex æquatione priore, $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-$, quadraticè multiplicando, efficitur $x^2=z^2-\frac{1}{3}z^4+\frac{2}{45}z^6-\frac{1}{315}z^8+\frac{2}{14175}z^{10}-$. Ergo $1-x^2=1-z^2+\frac{1}{3}z^4-\frac{2}{45}z^6+\frac{1}{315}z^8-\frac{2}{14175}z^{10}+$. Unde radicem extrahendo, veniet $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\frac{1}{40320}z^8-\frac{1}{3628800}z^{10}+$

2. Vel breviùs sic: cùm recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x:\sqrt{x-xx}::1:\frac{1}{x}\sqrt{x-xx}=x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) BD$=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et superficies ABD$=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{3156}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

De Curvis Mechanicis.

3. Non dissimili modo (posito c centro circuli, & CB$=x$) obtinebis aream CRDF, &c.

4. Sit area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est v, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ductâ quâlibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG : : AB (x) : BD (y), sive $\frac{x\times AG}{KG}=y$. Verùm ex naturâ Quadratricis est BA $(=DC)$ = arcui VK, sive VK$=x$. Quare posito AV$=1$, erit GK$=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$, &c. ex suprà ostensis; & GA$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6$, &c.



Adeoque $y\ (=\frac{x\times AG}{KG})=\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6}{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5040}x^6}$ &c. sive, divisione factâ, $y=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6$, &c. et (per Reg. 2.) area AVDB $=x-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{225}x^5-\frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est (t).

5. Nec quicquam hujusmodi scio, ad quod hæc methodus, idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad curvas mechanicas (si quando id non aliâs fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id fit possibile) perficit, hæc per

(r) Vide Geom. Analyt. Cap. III. § 12.

(t) Vide Geometr. Analyt. Problem ult. Exemp. ult. Cæterùm in quarto *Excerptorum ex Ephemeridibus* habes Aream et Longitudinem Quadratricis Dinostrati.

CAPUT DECIMUM.

æquationes infinitas ſemper perficiat: ut nil dubitaverim nomen Analyſis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hâc non minùs certa ſunt quàm in illâ, nec æquationes minùs exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines, & rationis finitæ, nec deſignare neque ita concipere poſſimus, ut quantitates inde deſideratas exactè cognoſcamus: ſicut radices ſurdæ finitarum æquationum nec numeris, nec quâvis arte Analyticâ, ita poſſunt exhiberi, ut alicujus quantitas, à reliquis diſtincta, exactè cognoſcatur.

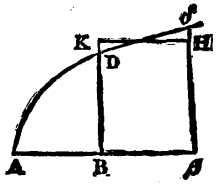
6. Denique ad Analyticam meritò pertinere cenſeatur, cujus beneficio curvarum areæ & longitudines, &c. (id modò fiat) exactè & Geometricè determinentur. Sed iſta narrandi non eſt locus. Reſpicienti duo præ reliquis demonſtranda occurrunt.

CAPUT DECIMUM.

1. *Demonſtratio Quadraturæ Curvarum Simplicium in Regulâ primâ.*

Præparatio pro Regulâ primâ demonſtrandâ.

1. SIT itaque curvæ alicujus ADδ baſis AB$=x$, perpendiculariter applicata BD $=y$, & area ABD$=z$, ut priùs. Item ſit Bβ $=o$, BK$=v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale ſpatio B$\beta\delta$D.



Eſt ergo A$\beta=x+o$, & A$\delta\beta=z+ov$.

His præmiſſis, ex relatione inter x & z, ad arbitrium aſſumptâ, quæro y iſto, quem ſequentem vides, modo.

Pro lubitu ſumatur $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}=z$, ſive $\frac{4}{9}x^3=zz$. Tum $x+o$ (Aβ) pro x, & $z+ov$ (A$\delta\beta$) pro z ſubſtitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3+3x^2o+3xo^2+o^3=$ (ex naturâ curvæ) $z^2+2zov+o^2v^2$. Et ſublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $\frac{4}{9}$ in $3x^2+3xo+o^2=2zv+ov^2$. Si jam ſupponamus Bβ in infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evaneſcent: quare reſtabit $\frac{4}{9}\times 3xx=2zv$, ſive $\frac{2}{3}xx$ $(=zy)=\frac{2}{3}x^3y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}\left(=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)=y$. Quare è contra ſi $x^{\frac{1}{2}}=y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$.

Demonſtratio.

REGULARUM DEMONSTRATIONES.

Demonſtratio.

2. Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n}\times ax^{\frac{m+n}{n}}=z$; ſive, ponendo $\frac{na}{m+n}=c$, & $m+n=p$, ſi $cx^{\frac{p}{n}}=z$, ſive $c^nx^p=z^n$: tum $x+o$ pro x, & $z+ov$ (ſive, quod perinde eſt, $x+oy$) pro z, ſubſtitutis, prodit c^n in x^p+pox^{p-1}, &c. $=z^n+noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis c^nx^p & z^n æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $c^npx^{p-1}=nyz^{n-1}$ $\left(=\frac{nyz^n}{z}=\frac{nyc^nx^p}{\frac{p}{cx^n}}\right)$ ſive, dividendo per c^nx^p, erit $px^{-1}=\frac{ny}{\frac{p}{cx^n}}$ ſive $pcx^{\frac{p-n}{n}}=ny$; vel, reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc eſt, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}}=y$. Quare è contra, ſi $ax^{\frac{m}{n}}=y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}=z$. Q.E.D.

Inventio curvarum quæ poſſunt quadrari.

3. Hinc in tranſitu notetur modus, quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ ſunt cognitæ, poſſunt inveniri; ſumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & baſin x, ut inde quæratur applicata y. Ut ſi ſupponas $\sqrt{aa+xx}=z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}=y$. Et ſic de reliquis (t).

SECT. II.

2. *Demonſtratio reſolutionis æquationum affectarum.*

1. Alterum demonſtrandum eſt literalis æquationum affectarum reſolutio. Nempe quòd quotiens, cùm x ſit ſatis parva, quo magis producitur, eo magis ad veritatem accedit; ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo diſtat ab exacto valore ipſius y, tandem evadat minor quâvis datâ quantitate; &, in infinitum producta, ſit ipſi y æqualis. Quod ſic patebit.

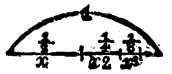
2. I. Quoniam ex ultimo termino æquationum, quarum p, q, r, &c. ſunt radices, quantitas illa in quâ x eſt minimæ dimenſi-

(t) Geometr. Analyt. Prob. VII. & Quadrat. Curv. Prop. II.

CAPUT DECIMUM.

onis (hoc eſt, pluſquam dimidium iſtius ultimi termini, ſi ſupponis x ſatis parvam eſſe) in quâlibet operatione perpetuò tollitur: iſte ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quâvis datâ quantitate; & prorſus evaneſcet, ſi opus infinitè continuatur.

Nempe ſi $x=\frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x+x^2+x^3+x^4$, &c. et x^2 dimidium omnium $x^2+x^3+x^4+x^5$, &c. Itaque ſi $x\multimap\frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x+x^2+x^3$, &c. et x^2 pluſquam dimidium omnium $x^2+x^3+x^4$, &c. Sic ſi $\frac{x}{b}\multimap\frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{bb}$, &c (u). Et ſic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decreſcunt perpetuò, vel ſi quando increſcant, tantùm opus eſt, ut x aliquoties adhuc minor ſupponatur.



II. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuò diminuatur, donec tandem evaneſcat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur, donec cum ultimo termino ſimul evaneſcat.

III. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuò decreſcit, donec tandem, cùm opus in infinitum producitur, penitùs evaneſcat.

IV. Sed valores iſtarum p, q, vel r, &c. unà cum quotiente eatenus extractâ, adæquant radices æquationis propoſitæ (ſic in reſolutione æquationis $y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0$, ſuprà oſtenſâ, percipies $y=a+p=a-\frac{1}{4}x+q=a-\frac{1}{4}x+\frac{xx}{64a}+r$, &c.) Unde ſatis liquet propoſitum, quòd quotiens, infinitè producta, eſt una ex valoribus de y (x).

3. Idem patebit ſubſtituendo quotientem pro y in æquationem propoſitam. Videbis enim terminos illos ſeſe perpetuò deſtruere, in quibus x eſt minimarum dimenſionum.

(u) Hæc ſatis patent ex theoremate illo, quod ſuprà demonſtratum dedimus, de progreſſionibus geometricis.

(x) Vide Geometr. Analyt. Cap. III. § 18 & 19.

EXCERPTA QUÆDAM

EX

EPISTOLIS NEWTONI

AD

SERIES FLUXIONESQUE PERTINENTIA.

EXCERPTUM I.

EX EPISTOLA NEWTONI AD OLDENBURGUM PRIMA.

[Vide Commerc. Epiſtolic. N. 48.]

DE FORMULIS ALGEBRAICIS IN SERIES INFINITAS RESOLVENDIS.

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus, ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multùm abbreviantur per hoc *Theorema*. THEOREMA BINOMIALE.

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ +, \&c.$$

2. Ubi $P+PQ$ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt; P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: ſive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro *aa*, *aaa*, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{2}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} (1). Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{c+a^3+b^3x}}$ ſcribo $aa \times \overline{a^3+b^3x}\Big|^{-\frac{1}{2}}$; & pro $\frac{a^2b}{\sqrt{c+a^3+b^3x} \times a^3+b^3x}$ ſcribo $a^2b \times \overline{a^3+b^3x}\Big|^{-\frac{3}{2}}$: In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+b^3x}\Big|^{-\frac{3}{2}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}}$ in Regulâ; erit $P=a^3$, $Q=\frac{b^3x}{a^3}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, uſurpo

(1) Vide Arithmet. Univerſ. C. I.

EXCERPTUM PRIMUM.

A, B, C, D, &c. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro ſecundo $\frac{m}{n}AQ$, & ſic deinceps (b). Cæterùm uſus Regulæ patebit exemplis.

3. *Exempl.* 1. Eſt $\sqrt{c^2+x^2}$ (ſeu $\overline{c^2+x^2}^{\frac{1}{2}}$) $= c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}$, &c. Nam, in hoc caſu, eſt $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, $m=1$, $n=2$, A $(=P^{\frac{m}{n}}=\overline{cc}^{\frac{1}{2}})$ $=c$, B $(=\frac{m}{n}AQ)=\frac{x^2}{2c}$, C $(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{x^4}{8c^3}$, & ſic deinceps.

4. *Exempl.* 2. Eſt $\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5}$ (i. e. $\overline{c^5+c^4x-x^5}^{\frac{1}{5}}$) $= c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}$ $-\frac{2c^3x^2+4c^2x^6-2x^{10}}{25c^9}$ + &c. Ut patebit ſubſtituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Poteſt etiam $-x^5$ ſubſtituti pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q; et tunc evadet $\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5}$ $=-x$

DEMONSTRATIO

(b) Hujus formulæ hanc ferè inveſtigationem auctores tradunt.

Caſus 1. Deſignante P unitatem, ut ſit $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}=\overline{1+Q}^{\frac{m}{n}}$, finge ſeriem infinitam

$$1+aQ+bQ^2+cQ^3+dQ^4+eQ^5+\&c.=\overline{1+Q}^{\frac{m}{n}}.$$

Unde hæc orietur fluxionum æquatio.

$$a\dot{Q}+2bQ\dot{Q}+3cQ^2\dot{Q}+4dQ^3\dot{Q}+5eQ^4\dot{Q}+\&c.=\frac{m}{n}\dot{Q}\times\overline{1+Q}^{\frac{m-n}{n}}.$$

Et ex duabus hiſce, diviſione nimirum, tertia fiet.

$$\frac{a+2bQ+3cQ^2+4dQ^3+5eQ^4+\&c.}{1+aQ+bQ^2+cQ^3+dQ^4+eQ^5+\&c.}=\frac{m}{n}\frac{\overline{\times 1+Q}^{\frac{m-n}{n}}}{\overline{1+Q}^{\frac{m}{n}}}=\frac{m}{n.1+Q}.$$

Ex hâc tertiâ, fractionibus per multiplicationes quibus opus eſt ſublatis, quarta demum exſiſtet.

$$na+2nbQ+3ncQ^2+4ndQ^3+5neQ^4+\&c.=m+maQ+mbQ^2+mcQ^3+mdQ^4+meQ^5+\&c.$$
$$+naQ+2nbQ^2+3ncQ^3+4ndQ^4+\&c.$$

Jam verò membrorum homologorum coefficientibus æquatis, elicientur ſeriei principio poſitæ coefficientes. Nempe hoc modo.

I. $na=m$. Ergo $a=\frac{m}{n}$.

II. $2nb+na=ma$. Ergo $b=a\times\frac{m-n}{2n}$.

III. $3nc+2nb=mb$. Ergo $c=b\times\frac{m-2n}{3n}$.

IV. $4nd+3nc=mc$. Ergo $d=c\times\frac{m-3n}{4n}$.

V. $5ne+4nd=md$. Ergo $e=d\times\frac{m-4n}{5}$.

Hinc literâ A in hoc caſu deſignante unitatem, membrum ſecundum ſeriei principio poſitæ, ſive $aQ=\frac{m}{n}AQ$.

Membrum

$=-x+\frac{c^4x+c^5}{5x^4}+\frac{2c^3x^2+4c^2x+c^{10}}{25x^9}$ + &c. Prior modus eligendus eſt, ſi x valdè parvum ſit; poſterior, ſi valdè magnum. THEOREMA BINOMINALE.

5. *Exempl.* 3. Eſt $\frac{N}{\sqrt[3]{y^3-a^2y}}$ (hoc eſt, $N\times\overline{y^3-a^2y}^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N\times\frac{1}{y}+\frac{a^2}{3y^3}+\frac{2a^4}{9y^5}+\frac{14a^6}{81y^7}+$, &c. Nam $P=y^3$, $Q=\frac{-aa}{yy}$, $m=-1$, $n=3$. A $(=P^{\frac{m}{n}}=y^{3\times-\frac{1}{3}})=y^{-1}$, hoc eſt $\frac{1}{y}$. B $(=\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{y}\times\frac{-aa}{yy})=\frac{aa}{3y^3}$, &c.

6. *Exempl.* 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}^{\frac{4}{3}}$) eſt $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}+$,&c. Nam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=4$, $n=3$, A $(=P^{\frac{m}{n}})=d^{\frac{4}{3}}$, &c.

7. *Exempl.* 5. Eodem modo ſimplices etiam poteſtates eliciuntur. Ut ſi quadrato-cubus ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}^{5}$, ſeu $\overline{d+e}^{\frac{5}{1}}$) deſideretur: erit, juxta regulam, $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$, & $n=1$; adeoque A $(=P^{\frac{m}{n}})=d^5$, B $(=\frac{m}{n}AQ)=5d^4e$, & ſic $C=10d^3e^2$, $D=10d^2c^3$, $E=$

Membrum tertium, ſive $bQ^2=a\times\frac{m-n}{2n}Q^2=aQ\times\frac{m-n}{2n}Q=\frac{m-n}{2n}BQ$, deſignante nimirum literâ B quantitatem aQ. THEOREMATIS BINOMINALIS.

Membrum quartum ſeriei principio poſitæ, ſive $cQ^3=b\times\frac{m-2n}{3n}Q^3=bQ^2\times\frac{m-2n}{3n}Q=\frac{m-2n}{3n}CQ$, deſignante literâ C quantitatem bQ^2.

Membrum quintum ſeriei principio poſitæ, ſive $dQ^4=c\times\frac{m-3n}{4n}Q^4=cQ^3\times\frac{m-3n}{4n}Q=\frac{m-3n}{4n}DQ$, deſignante literâ D quantitatem cQ^3.

In ſummâ, ſeries principio poſita, videlicet, $1+aQ+bQ^2+cQ^3+dQ^4+eQ^5$, &c. huic æqualis erit $1+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\frac{m-4n}{5n}EQ+$, Q. E. D.

Caſus 2. Jam verò litera P quantitatem quamvis deſignet ſive majorem ſive minorem unitate. Quantitas $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}\times\overline{1+Q}^{\frac{m}{n}}$. Sed ex caſu priori $\overline{1+Q}^{\frac{m}{n}}=1+\frac{m}{n}Q+\frac{m-n}{2n}aQ^2+\frac{m-2n}{3n}bQ^3+\frac{m-3n}{4n}cQ^4+\frac{m-4n}{5n}dQ^5+$.

Ergo $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q+\frac{m-n}{2n}P^{\frac{m}{n}}aQ^2+\frac{m-2n}{3n}P^{\frac{m}{n}}bQ^3+\frac{m-3n}{4n}P^{\frac{m}{n}}cQ^4+\frac{m-4n}{5n}P^{\frac{m}{n}}dQ^5+$.

Hoc eſt, ſi quantitatem $P^{\frac{m}{n}}$ literâ A deſignaveris, quantitatem $P^{\frac{m}{n}}aQ$ literâ B, quantitatem $P^{\frac{m}{n}}bQ^2$ literâ C, quantitatem $P^{\frac{m}{n}}cQ^3$ literâ D, quantitatem $P^{\frac{m}{n}}dQ^4$ literâ E: $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\frac{m-4n}{5n}EQ+$. Q. E. D.

Hujus inveſtigationis auctorem Heyneſium quendam nomine Raphſonus perhibet. (Hiſtory of Fluxions, Cap. 3.)

Excerptum Primum.

$E = 5de^4$, $F = e^5$, & $G\left(=\frac{m-5n}{6n}FQ\right) = 0$. Hoc eſt, $\overline{d+e}|^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3e^2 + 10d^2e^3 + 5de^4 + e^5$.

8. *Exempl.* 6. Quinetiam Diviſio, ſive ſimplex ſit, ſive repetita, per eandem regulam perficitur. Ut ſi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{-1}$ ſive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in ſeriem ſimplicium terminorum reſolvendum ſit: Erit, juxta regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = -1$. $n = 1$. & $A\left(=P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}\right) = d^{-1}$ ſeu $\frac{1}{d}$. $B\left(=\frac{m}{n}AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d}\right) = -\frac{e}{dd}$. Et ſic $C = \frac{ee}{d^3}$. $D = -\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc eſt, $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^3} - \frac{e^3}{d^4}$, &c.

9. *Exempl.* 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eſt, Unitas ter diviſa per $d+e$, vel ſemel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6ee}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} +$, &c.

10. *Exempl.* 8. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eſt, N diviſum per radicem cubicam ipſius $d+e$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} +$, &c.

11. *Exempl.* 9. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eſt, N diviſum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt[5]{d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} +$, &c.

12. Per eandem regulam, Geneſis poteſtatum, Diviſiones per poteſtates aut per quantitates radicales, & Extractiones radicum altiorum in numeris, etiam commodè inſtituuntur.

13. Extractiones radicum affectarum in ſpeciebus imitantur earum extractiones in numeris. Sed methodus *Vietæ & Oughtredi* noſtri huic negotio minùs idonea eſt. Quapropter aliam excogitare adactus ſum, *cujus ſpecimina, ne repetantur, vide in tractatu de Analyſi, &c.* Cap. IV.

14. Dicam tantùm in genere, quòd radix cujuſvis æquationis ſemel extracta, pro regulâ reſolvendi conſimiles æquationes aſſervari poſſit; quòdque ex pluribus ejuſmodi regulis, regulam generaliorem plerumque efformare liceat; & quòd radices omnes, ſive ſimplices ſint ſive affectæ, modis infinitis extrahi poſſint; de quorum ſimplicioribus itaque ſemper conſulendum eſt.

EXCERPTUM

EXCERPTUM IIm.

Ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum poſteriore.

[*Commerc. Epiſtolic.*] N°. 55—64.

De Seriebus condendis et invertendis.

[*Quæ ſequuntur ſcripta ſunt in explicationem Epiſtolæ præcedentis.*]

QUOD verò attinet ad Inventionem terminorum *p*, *q*, *r*, (vide Analyſ. per Æquat. Infinit. cap. 4.) in extractione radicis affectæ, primum *p* ſic eruo (c)

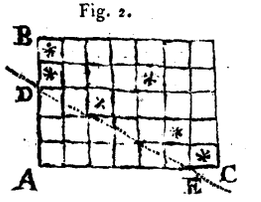
Fig. 1.

x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
x^3	x^2y	x^2y^2	xy^3	y^4
x^2	xy	xy^2	xy^3	y^4
x	xy	y^2	y^3	y^4
0	y	y^2	y^3	y^4

B A C

2. Deſcripto angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia parallelogramma vel quadrata, quæ concipio denominata eſſe à dimenſionibus duarum indefinitarum ſpecierum, puta x & y, regulariter aſcendentium à termino A; prout vides in Fig. 1. inſcriptas. Ubi y denotat radicem extrahendam; et x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus poteſtatibus ſeries conficienda eſt. Deinde, cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma ſingulis ejus terminis correſpondentia inſignio notâ aliquâ: et regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis parallelogrammis applicatâ; quorum unum ſit humillimum in columnâ ſiniſtrâ juxta AB, & alia ad regulam dextrorſum ſita, cæteraque omnia, non contingentia regulam, ſupra eam jaceant; ſeligo terminos æquationis per parallelogramma contingentia regulam deſignatos, & inde quæro quantitatem quotienti addendam.

Fig. 2.



3. Sic ad extrahendam radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis reſpondentia ſigno notâ aliquâ *; ut vides in Fig. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem è locis ſignatis in ſiniſtrâ columnâ; eamque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio, donec

(c) Vide Geometr. Analyt. c. iii. §. 2.

EXCERPTUM SECUNDUM.

donec alium ſimiliter, vel fortè plura, è reliquis ſignatis locis cœperit attingere. Videoque loca ſic attacta eſſe x^3, x^2y^2, & y^6. E terminis itaque, $y^6-7a^2x^2y^2+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& inſuper ſi placet reductis ad $v^6-7v^2+6=0$, ponendo $y=v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout è radicibus quampiam extrahere decretum eſt.

4. Sic æquatio $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, quam reſolvebam in priori Epiſtolâ, dat $-2a^3+aay+y^3=0$, & inde $y=a$ proximè : cùm itaque a ſit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & ſubſtituo $a+p=y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; ſed ex iis, credo, lector ſe proprio marte extricabit.) Subſequentes vero termini q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus ſecundis, tertiis, cæteriſque eruuntur, quo primus p è prima, ſed curâ leviori; quia cæteri valores y ſolent prodire dividendo terminum involventem infimam poteſtatem indefinitæ quantitatis x per coefficientem radicis p, q, r, aut s.

5. Intellexti credo ex ſuperioribus, regreſſionem ab areis curvarum ad lineas rectas, fieri per hanc extractionem radicis affectæ. Sed duo alii ſunt modi quibus idem perficio.

6. Eorum unus affinis eſt computationibus, quibus colligebam approximationes ſub finem alterius Epiſtolæ, & intelligi poteſt per hoc exemplum. Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ $z=x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$, &c (d). Et partibus ejus multiplicatis in ſe, emerget $z^2=x^2+x^3+\frac{11}{12}x^4+\frac{5}{6}x^5$, &c. $z^3=x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5$, &c. $z^4=x^4+2x^5$, &c. $z^5=x^5$, &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & reſtat $z-\frac{1}{2}zz=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{24}x^4-\frac{13}{60}x^5$, &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3=x+\frac{1}{24}x^4+\frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & reſtat $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4=x-\frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5=x$ quamproximè; ſive $x=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c.

7. Eodem modo, ſeries de unâ indefinitâ quantitate, in aliam transferri poſſunt. Quemadmodum ſi poſito r radio circuli, x

(d) Vide Geometr. Analyt. cap. IX. §. 34.

ſinu recto arcûs z, & $x+\frac{x^3}{6rr}+\frac{3x^5}{40r^4}$ + &c. longitudine arcûs iſtius; atque hanc ſeriem à ſinu recto ad tangentem vellem transferre: quæro longitudinem tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam ſeriem, $x+\frac{x^3}{2rr}+\frac{3x^5}{8r^4}$ + &c. Vocetur hæc quantitas, t. Colligo poteſtates ejus $t^3=x^3+\frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5=x^5+$ &c. Aufero autem t de z, & reſtat $z-t=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{10}x^5-$ &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z-t+\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{5}x^5+$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z-t+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5=0$ quamproximè. Quare eſt $z=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-$ &c. Sed ſiquis in uſus trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem arcûs per tangentem; eam non hoc circuitu, ſed directâ methodo quæſiviſſem.

INVERSIO SERIERUM.

8. Per hoc genus computi colliguntur etiam ſeries ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus conſtantes; & radices affectarum æquationum magnâ ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potiùs methodum in alterâ epiſtolâ deſcriptam tanquam generaliorem, & (regulis pro eliſione ſuperfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

9. Pro Regreſſione vero ab areis ad lineas rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi *Theoremata* adhiberi.

10. THEOREMA I. Sit $z=ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5$, &c.

Et viciſſim erit $y=$
$$\frac{z}{a}$$
$$-\frac{b}{a^3}z^2$$
$$+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3$$
$$+\frac{5abc-5b^3-a^2d}{a^7}z^4$$
$$+\frac{3a^2c^2-21ab^2c+6a^2bd+14b^4-a^3e}{a^9}z^5+\text{ &c.}$$

11. *Exempli gratiâ.* Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ, $z=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c (e). Et ſubſtitutis in regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+$ &c.

12. THEOREMA II. Sit $z=ay+by^3+cy^5+dy^7+ey^9+$ &c.

(e) Vide Geometr. Analyt. c. IX. §. 34.

EXCERPTUM TERTIUM.

Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3b^2-ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc-a^2d-12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4-55ab^2c+10a^2bd+5a^2c^2-a^3e}{a^{13}}z^9 +$ &c.

13. *Exempli gratiâ.* Proponatur æquatio ad arcum circuli, $z = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ + &c. Et ſubſtitutis in regulâ 1 pro a, $\frac{1}{6r^2}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d, &c. orietur $y = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6}$ + &c (f).

EXCERPTUM III.

Ex Epiſtolâ Newtoni ad Walliſium, de radicibus æquationum fluxionalium extrahendis.

1. SUB finem epiſtolæ anni 1676 [*hæc ſunt verba* Walliſii] ſcribit [D. *Newtonus*] etiam Problema determinandi curvas per conditiones tangentium in ſuâ poteſtate eſſe, unà cum aliis difficilioribus; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe dicit duplici methodo, unâ concinniore, alterâ generaliore; & utramque literis tranſpoſitis celat: quæ in ordinem redactæ hanc ſententiam exhibent. *Una methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus. Altera tantùm in aſſumptione ſeriei*

ÆQUATIONIS INFINITÆ

(f) Duobus hiſce Newtonianis meritò tertium adjungatur Moivræi Theorema, cujus ope radices extrahantur infinitè quæ dicuntur affectæ.

Sit æquatio inter ſeries infinitas

$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \&c. = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + cy^5 +$

Ut extrahatur radix y, ponatur

$y = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 +$

Hujus coefficientes his æquationibus definientur:

$A = \frac{a}{a}$

$B = \frac{a^2b - ba^2}{a^3}$

$C = \frac{a^4c - aca^3 - 2ba^2ab + 2b^2a^3}{a^5}$

$D = \frac{a^6d - 2ba^4ca + 2baca^4 + 6b^2a^2a^2b - 5b^3a^4 - bb^2a^4 + 3cbaa^4 - 3ca^3a^2b - da^2a^4}{a^7}$

$a^8e -$

riei pro quantitate quâlibet incognitâ ex quâ cætera commodè deri-vari poſſunt; & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis ad eruendos terminos aſſumptæ ſeriei. Harum methodorum ſecunda ex verbis jam recitatis abſque ulteriore explicatione intelligi poteſt; priorem ab authore jam accepi ut ſequitur. DE RAD. ÆQUAT. FLUX. EXTRAHEND.

2. Hæc methodus, ait, ejuſdem eſt generis cum eâ pro extrahendo radices ex æquationibus affectis ſuperiùs deſcriptâ. Pone quòd Problema reſolvendum reducatur ad æquationem fluentes quantitates y & z unà cum earum fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quòd fluxio ipſius z uniformis ſit. Ut hæc fluxio ex æquatione evaneſcat, pro eâ ponatur unitas, & manebit æquatio ſolas y, z & $\dot{y}$ involvens, *quam reſolvendam* vocat. Proponitur inventio ipſius y in ſerie infinitâ convergente, quæ ſolam z involvet. Hoc in aliquibus æquationibus impoſſibile eſt, in aliis præparationem æquationum requirit, ubi verò directè confici poſſit reſolutio eſt hujuſmodi.

PROBLEMA

3. *Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

TERMINI omnes, ex eodem æquationis latere conſiſtentes, æquentur nihilo, & ipſarum y & $\dot{y}$ dignitates (ſi opus ſit) exaltentur vel deprimantur, ſic ut earum indices nec alicubi negativi ſint, nec tamen altiores quàm ad hunc effectum requiritur; & ſit kz^λ terminus infimæ dignitatis eorum, qui neque per y, ne-

REDUCTIO MOIVRÆANA.

$E = \frac{a^8e - 2ba^6ad + 6b^2a^4ca^2 - 21b^2aca^5 - 16b^3a^2a^3b + 14b^4a^5 + 2b^2b^2a^4a + 20bca^3a^3b + 6bda^2a^5 - 2ba^4cb + 4b^2a^4b^2 - 4b^3a^2ba^2 - 3ca^5ca^2 + 3c^2a^2a^5 - 3ca^2b^2a - 4da^4a^3b - ea^3a^5}{a^9}$

&c.

Vel hoc modo

$A = \frac{a}{a}$. $B = \frac{b - bA^2}{a}$. $C = \frac{c - 2bBA - cA^3}{a}$.

$D = \frac{d - 2b.AC - bB^2 - 3cA^2B - dA^4}{a}$.

$E = \frac{e - 2b.AD - 2bBc - 3cA^2C - 3cB^2A - 4dA^3B - eA^5}{a}$.

Harum inveſtigationem Maclaurinus tradit Algebræ ſuæ Part II. Cap. X.

que

EXCERPTUM TERTIUM.

que per ejus fluxionem $\dot{y}$, neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $lz^{\mu}y\dot{y}^{\beta}$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex ſingulis ſeorſim numerum $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ ſic, ut tot habeas ejuſmodi numeros quot ſunt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit dignitas primi termini ſeriei. Pro ejus coefficiente ponatur a, & in æquatione quæ *reſolvenda* dicitur, ſcribe az^{ν} pro y, & $\nu az^{\nu-1}$ pro $\dot{y}$; ac termini omnes reſultantes in quibus z ejuſdem eſt dignitatis ac in termino kz^{λ}, ſub propiis ſignis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debitè reducta dabit coefficientem a. Sic habes az^{ν} terminum primum ſeriei.

Operatio ſecunda.

4. Pro reliquis omnibus hujus ſeriei terminis nondum inventis pone p, & habebis æquationem $y=az^{\nu}+p$, & inde etiam æquationem $\dot{y}=az^{\nu-1}+\dot{p}$. In reſolvenda, pro y & $\dot{y}$ ſcribe hos eorum valores, & habebis reſolvendam novam, ubi p officium præſtat ipſius y: & ex hâc reſolvendâ primum extrahes terminum ſeriei p eodem modo atque terminum primum ſeriei totius, $y=az^{\nu}+p$, ex reſolvendâ primâ extraxiſti.

Operatio tertia et ſequentes.

5. Dein tertiam reſolvendam eâdem ratione invenias atque ſecundam inveniſti, & ex eâ terminum tertium ſerici totius extrahes. Et ſimiliter reſolvendam quartam invenies, & ex eâ quartum ſeriei terminum, & ſic in infinitum. Series autem ſic inventa erit radix æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

6. Ex æquatione $y^2\dot{z}^2-z^2\dot{z}\dot{y}-d^2\dot{z}\dot{z}+dz\dot{z}^2=0$, extrahenda ſit radix y. Pone $\dot{z}=1$, & æquatio evadet $y^2-z^2\dot{y}-dd+dz=0$, quæ eſt reſolvenda. Jam verò terminus infimus, in quo nec y, neque $\dot{y}$ reperitur, eſt dd, qui ipſi kz^{λ} æquatus dat $\lambda=0$. Terminis reliquis y^2, $-z^2\dot{y}$ pone $lz^{\mu}y^{\alpha}\dot{y}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè, & inde in primo caſu habebis $\mu=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$; in ſecundo $\mu=2$, $\alpha=0$, & $\beta=1$. Et

Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ fit in primo caſu 0, in ſecundo -1. Unde ν eſt 0, & az^{ν} & $\nu az^{\nu-1}$ ſunt a & 0; quarum ultimæ duæ a & 0 in reſolvendâ pro y & $\dot{y}$ ſcriptæ, producunt $aa+0z^2-dd+dz$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 0, poſiti æquales nihilo dant $a=d$. Unde primus ſeriei terminus az^{ν} evadit d.

DE RAD. ÆQUAT. FLUX. EXTRAHEND.

Operatio ſecunda.

7. Pro terminis reliquis pone p, & habebis æquationem $y=d+p$, & inde $\dot{y}=\dot{p}$; qui valores in reſolvendâ pro y & $\dot{y}$ ſubſtituti dant reſolvendam novam $2dp+pp-z\dot{z}\dot{p}+dz=0$, ubi p & $\dot{p}$ vices ſubeunt ipſarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur eſt dz, qui cum termino kz^{λ} collatus dat $\lambda=1$. Terminis reliquis $2dp$, pp & $-z\dot{z}\dot{p}$ pone $lz^{\mu}p^{\alpha}\dot{p}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè, & inde in primo caſu habebis $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in ſecundo $\mu=0$, $\alpha=2$, & $\beta=0$; & in tertio $\mu=2$, $\alpha=0$, & $\beta=1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit primo caſu 1, in ſecundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde ν eſt 1, & az^{ν} & $az^{\nu-1}$ ſunt az & a. Termini duo ultimi az & a in reſolvendâ pro p & $\dot{p}$ reſpectivè ſcripti, producunt $2daz+a^2z^2-az^2+dz$. Et termini $2daz$ & dz, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 1, poſiti æquales nihilo, dant $a=-\frac{1}{2}$. Unde az, terminus primus ſeriei, p fit $-\frac{1}{2}z$.

Operatio tertia.

8. Pro terminis reliquis nondum inventis pone q, & habebis æquationem $p=-\frac{1}{2}z+q$, & inde $\dot{p}=-\frac{1}{2}+\dot{q}$: qui valores pro p & $\dot{p}$ in reſolvendâ noviſſimâ ſubſtituti producunt reſolvendam novam $2dq-zq+qq+\frac{3}{4}zz-z\dot{z}\dot{q}=0$. Ubi q & $\dot{q}$ vices ſupplent ipſorum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur eſt $\frac{3}{4}zz$, qui cum kz^{λ} collatus dat $\lambda=2$. Terminis reliquis $2dq$, $-zq$, $+qq$, $-z\dot{z}\dot{q}$ pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè; & inde in primo caſu habebis $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in ſecundo, $\mu=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$; in tertio, $\mu=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$: in quarto, $\mu=2$, $\alpha=0$, $\beta=1$: & inde $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit in primo caſu 2, in ſecundo, tertio, & quarto, 1.

EXCERPTUM TERTIUM.

Et hinc y eſt 2, vel az^y & yaz^{y-1} ſunt az^2 & $2az$: qui valores in reſolvendâ pro q & $\dot{q}$ ſubſtituti dant $2daz^2 - az^3 + aaz^4 + \frac{3}{4}zz - 2az^3$; & termini $2dazz + \frac{3}{4}zz$, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 2, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde az^y terminus primus ſeriei q evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

Operatio quarta.

9. Pro reliquis ſeriei terminis nondum inventis pone r, & habebis æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde reſolvendam novam $2d\dot{r} + \frac{9z^3}{8d} - z\dot{r} + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zz\dot{r}}{4d} + r\dot{r} - zz\dot{r} = 0$; & ex eâ per methodum ſuperiorem habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$ terminum primum ſeriei r. Et ſic pergitur in infinitum.

10. Eſt igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd}$ - &c. Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures (g).

11. Et eâdem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones ſecundas, tertias, quartas, $(\ddot{y}, \dddot{y}, \ddddot{y},)$ aliaſque involventium, extrahi poſſe (h).

12. His utitur radicum extractionibus ubi aliæ methodi nil proſunt. Nam in epiſtolâ prædictâ anni 1676 docet, quòd in ſolutione problematum de tangentibus inverſorum, caſus aliqui dantur in quibus hæc methodus generalis non requiritur: & particulariter, ſi in triangulo rectangulo quod ab ordinatâ, tangente, & interjacente parte abſciſſæ conſtituitur, relatio duorum quorumlibet è lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur; problema abſque methodo hâcce generali ſolvi poterit.

13. Methodi autem hæ omnes, tam particulares quàm generales, collectim

(f) Harum operationum rationem Maclaurinus optimè explicavit Algebræ ſuæ Part II. Cap. X.

(g) Aliam etiam viam reſolvendi æquationes, quæ fluxionibus ſunt implicitæ, Newtonus in Geometriâ Analyticâ docet capite ejus Libri 4°. Sect. 2. quæ cùm non minùs generalis ſit quàm illa quæ in hoc excerpto tradita eſt, & computationum facilitate, meo equidem judicio, longè illi antecellat, miror profectò eam ab omnibus ferè relictam, cùm hæc, ſubtilior ſanè ſed uſu difficilior, diligentiſſimè exculta ſit.

collectim ſumptæ, ſolutionem exhibent ſecundæ partis problematis, quod *Newtonus* ſub initio iſtius epiſtolæ his verbis propoſuit. *Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice verſâ.* Nam tota fluxionum methodus in hujus directâ & inverſâ ſolutione conſiſtit. ARCUSEXSINU.

EXCERPTUM IV.

Ex epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ.

De Problematis per Series Infinitas Reſolvendis.

QUOMODO ex æquationibus, ſic ad infinitas ſeries reductis, Areæ & Longitudines curvarum, Contenta & Superficies ſolidorum, vel quorumlibet ſegmentorum figurarum quarumvis, eorumque centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam curvæ omnes mechanicæ ad ejuſmodi æquationes infinitarum ſeriorum reduci poſſint, indeque problemata circa illas reſolvi, perinde ac ſi Geometricæ eſſent; nimis longum foret deſcribere: ſufficiat ſpecimina quædam talium problematum recenſuiſſe: inque iis, brevitatis gratiâ, literas A, B, C, D, &c. pro terminis ſeriei, ſicut ſub initio, nonnunquam uſurpabo.

1. *Si ex dato ſinu recto, vel ſinu verſo, arcus deſideretur:* ſit radius r, & ſinus rectus x: eritque arcus $= x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ &c. hoc eſt, $= x + \frac{1\times1\times xx}{2\times3\times rr}\,A + \frac{3\times3xx}{4\times5rr}\,B + \frac{5\times5xx}{6\times7rr}\,C + \frac{7\times7xx}{8\times9rr}\,D +$ &c.

Vel, ſit d diameter, ac x ſinus verſus; & erit arcus æqualis $d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. hoc eſt, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3x^2}{40d^2} + \frac{5x^3}{112d^3}$ + &c (i).

2. Si viciſſim, *ex dato arcu deſideretur ſinus:* ſit radius r, & arcus

(i) 1. PUNCTO A manente (vid. fig. p. 299.) circumduci puta rectam AB datæ longitudinis, a quæ termino ſuo mobili B circuli BBc circumflexum ſcribat. Sit AB ſitus quivis rectæ revolventis, et à puncto B in ſitum ejus primum AB deducatur ad perpendiculum recta BE: et per idem punctum B ducatur BF quæ circulum in B contingat, rectæque AB productæ in F occurrat. Fluxio arcûs BB ad fluxionem rectæ BE rationem habet eam quam BF ad BE (Introduct. ad Quadrat. Curv. § 4.) ſive eam quam AB ad AE. Hinc ſi rectam datam AB litera x deſignet, arcum BB litera z, ſinum ejus rectum BE litera x, erit $\dot{z} : \dot{x} = r : AE$.

EXCERPTUM QUARTUM. arcus z: eritque ſinus rectus $= z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ &c. hoc eſt, $= z - \frac{zz}{2\times 3rr}A - \frac{zz}{4\times 5rr}B - \frac{zz}{6\times 7rr}C -$ &c. Et ſinus verſus

EX SINU. $\dot z : \dot x = r : \sqrt{r^2 - x^2}$. Quare $\dot z = \frac{\dot x r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Hoc eſt, ſi fractio $\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$ convertatur in ſeriem infinitam (quod perficietur, ſi primùm extrahatur radix quadratica quantitatis $r^2 - x^2$, tum quantitas r radice illâ dividatur)

$$\dot z = \dot x \times 1 + \frac{x^2}{2r^2} + \frac{3x^4}{8r^4} + \frac{5x^6}{16r^6} + \frac{35x^8}{128x^8} +$$

Ergo $z = x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$

SIN. EX ARC. Et invertendo, ope Theorematis 2. Excerpti II.

$$x = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} +$$

2. *Cor.* Fluxio arcûs circularis ad ſinûs fluxionem rationem habet quam radius ad ſinum complementi.

ARC. EX SIN. VERS. 3. (k) FLUXIO arcûs BB ad fluxionem rectæ BE rationem habet quam BF ad FE (Introduct. Quad. Curv. §4.) hoc eſt, quam AB ad BE. Si igitur litera d circuli diametrum ac deſignet, litera z arcum BB, ſinum ejus verſum BE litera y, erit $\dot z : \dot y = \frac{1}{2}d : BE = d : 2BE = d : 2\sqrt{dy - y^2}$. Quare $\dot z = \frac{d\dot y}{2\sqrt{dy-y^2}}$

Vel ſi fractio $\frac{d}{2\sqrt{dy-y^2}}$ convertatur in ſeriem infinitam, $\dot z = \dot y \times \frac{1}{2}d^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3y^{\frac{3}{2}}}{16d^{\frac{1}{2}}}$ $+ \frac{5y^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{1}{2}}} + \frac{35y^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{1}{2}}} +$. Ergo $z = d^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3y^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{1}{2}}} + \frac{5y^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{1}{2}}} + \frac{35y^{\frac{9}{2}}}{1152d^{\frac{1}{2}}} +$. Quæ eſt formula generalis arcûs è dato ſinu verſo.

SIN. VERS. EX ARC. 4. Et hanc ſeriem invertendo ope Theorematis 2. Excerpti II.

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}z - \frac{1}{6d^{\frac{1}{2}}}z^3 + \frac{1}{120d^{\frac{1}{2}}}z^5 - \frac{1}{5040d^{\frac{1}{2}}}z^7 +$$

Unde, quadratice multiplicando, conficitur

$$y = \frac{1}{d}z^2 - \frac{1}{3d^3}z^4 + \frac{2}{45d^5}z^6 - \frac{1}{315d^7}z^8 +$$

Vel pro literâ d ſymbolo $2r$ ſubſtituto

$$y = \frac{1}{2r}z^2 - \frac{1}{24r^3}z^4 + \frac{1}{720r^5}z^6 - \frac{1}{40320r^7}z^8 +$$

Quæ eſt formula generalis ſinûs verſi ex arcu dato. Unde ſtatim elicitur ſinus complementi $r - y = r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} - \frac{z^6}{720r^5} + \frac{z^8}{40320r^7} +$.

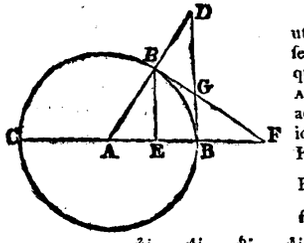
5. *Cor.* Fluxio arcûs cujuſpiam circularis ad fluxionem ſinûs complementi, ſive ſinûs ſui verſi, rationem habet quam radius ad ſinum.

SERIES GREGORIANÆ. 6. HAUD diſſimilis eſt inventio ſerierum, quibus arcûs longitudinem ex tangente datâ, et tangentis viciſſim ex arcu, Jacobus Gregorius omnium primus æſtimare docuit.

7. Ducatur enim per punctum B recta BD quæ circulum BBC in loco B contingat, rectæque BF circulum utique in B contingenti in G occurrat. Cùm igitur recta AB, circa punctum A volubilis, curvæ BB rectæque BD in locis B, B, occurrat, recta vero BG curvam in B contingat, rectæque BD in G occurrat, fluxio rectæ BD erit ad fluxionem curvæ BB ut rectangulum AD × DG ad rectangulum $AB \times BG$. (Introduct. ad Quad. Curv. § 9.) Sed propter angulos DBG, DBA, rectos, et angulum BDG triangulis duobus ADB, GDB, communem, triangula illa erunt inter ſe ſimilia, et latera eorum angulos æquales ambientia eaſdem inter ſe proportiones habebunt. Quare AD eſt ad AB, vel ad AB, ut

verſus $= \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ &c. hoc eſt, $= \frac{zz}{1\times 2r} - \frac{zz}{3\times 4rr}A -$ SINUS EX ARCU. $\frac{zz}{5\times 6rr}B - \frac{zz}{7\times 8rr}C -$ &c (k).

3. *Si*



ut GD ad GB. Rectangula igitur AD × DG, $AB \times BG$ inter ſe ſimilia ſunt. Figuræ autem ſimiles ſunt inter ſe ſicut SERIES GREGORIANÆ. quadrata è lateribus homologis. Erit igitur rectangulum AD × DG ad rectangulum $AB \times BG$ ſicut quadratum ex AD ad quadratum ex AB. Quare fluxio rectæ BD erit ad fluxionem arcûs BB ut quadratum ex AD ad quadratum ex AB. Hoc eſt, ſi litera t rectam BD deſignet, $\dot t : \dot z = t^2 + r^2 : r^2$. Ergo $\dot z = \frac{r^2}{r^2+t^2}\dot t$. Hoc eſt, fractione $\frac{r^2}{r^2+t^2}$ in ſeriem infinitam per diviſionis operam reſolutâ,

$$\dot z = \dot t - \frac{t^2\dot t}{r^2} + \frac{t^4\dot t}{r^4} - \frac{t^6\dot t}{r^6} + \frac{t^8\dot t}{r^8} - \frac{t^{10}\dot t}{r^{10}} +$$

Ergo $z = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11r^{10}} +$, ARC. EX TANG.

Et hanc ſeriem invertendo ope Theorematis 2. Excerp. II.

$$t = z + \frac{1}{3r^2}z^3 + \frac{2}{15r^4}z^5 + \frac{17}{315r^6}z^7 + \frac{62}{2835r^8}z^9 +$$ TANG. EX ARC.

(vide Commerc. Epiſt. N°. XX.)

8. *Cor.* Fluxio tangentis ad fluxionem arcûs rationem habet ſecantis ad radium duplicatam.

9. FORMULA quâ Gregorius ſecantem definivit ex arcu, ex illâ Newtoni quæ ex arcu ſinum complementi repræſentat, facilè deducenda eſt. Cùm enim horum trium, ſecantis, radii et ſinûs complementi continua ſit analogia, ad ſecantem æſtimandam id nimirum opus erit, quadratum è radio dividere complementi ſinu. Jam verò inventus eſt ſinus complementi arcûs $z = r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} -$

$\frac{z^6}{720r^5} + \frac{z^8}{40320r^7} -$. (§. 4 hujus) Quare ſecans, ſive $\frac{r^2}{r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} +}$, $= r + \frac{z^2}{2r} + \frac{5}{24r^3}z^4 +$ SEC. EX ARC.

$\frac{61}{720r^5}z^6 + \frac{277}{8064r^7}z^8 + \frac{50521}{3628800r^9}z^{10} +$; et hæc eſt formula generalis Gregoriana ſecantis ex arcu. (Vide Commercium Epiſt. N°. XX.)

10. ATQUE hæ quidem ſeries vulgò notæ ſunt, et quotidiano ferè Geometrarum uſu frequentatæ. Sunt autem aliæ quædam minùs pervagatæ, ab eodem illo Gregorio profectæ, ſubtiliſſimæ indaginis; quarum utique compendio Secantem et Tangentem arcûs cujuſque, uti loquuntur, Logarithmicam, ſive logarithmum potiùs rationis quam ſecans quæque vel tangens ad radium habeat, vir acutiſſimus generaliter definivit ex arcu. Ad harum ſerierum inventionem Theoremate Geometrico uno atque altero via nobis munienda eſt.

THEOREMA I.

11. *Fluxio ſecantis eſt ad fluxionem arcûs ut rectangulum ſub ſecante et tangente ad quadratum ex circuli radio.*

RECTA AB, circa punctum A volubili, circumflexum circuli ſcribente, ducatur recta BD, quæ circulum in B contingit, rectæque volubili, ſitum quemvis novum AB obtinenti, in D occurrat. Dico fluxionem rectæ AD eſſe ad fluxionem arcûs BB ut rectangulum AD × DB ad quadratum ex AB. Fluxio rectæ AD eſt ad fluxionem rectæ DB ut DB ad DA (Introduct. ad Quad. Curv. § 7.) ſive ut rectangulum DB × DA ad quadratum ex DA. Fluxio autem rectæ DB eſt ad fluxionem arcûs BB, ut quadratum ex DA ad quadratum ex AB. (§. 8. hujus.) Erit igitur ex æquo fluxio rectæ AD ad fluxionem arcûs BB ut rectangulum AD × DB ad quadratum ex AB. Q. E. D.

EXCERPTUM QUARTUM.

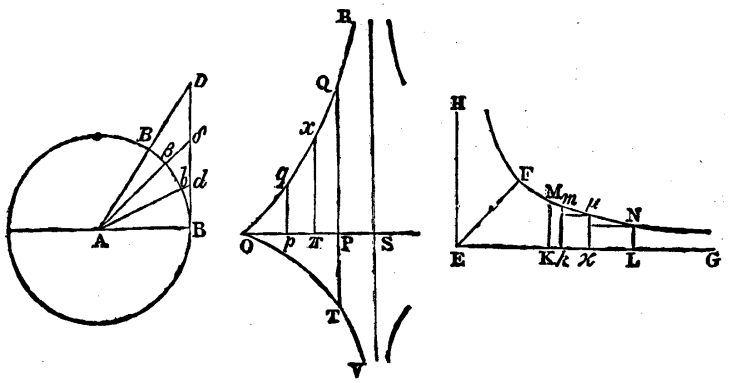
3. *Si arcus capiendus sit in ratione datâ ad alium arcum:* esto diameter

THEOREMA II.

DE SERIEBUS

12. *Sit* B*B arcus circuli, cujus centrum* A *radius* AB. *Sit hyperbola æquilatera* FMN, *cujus centrum* E, *semiaxis* EF, *asymptotæ rectæ* EG, EH *ad perpendiculum compositæ. Harum in alterutrâ, puta* EG, *capiatur* EK *radio circuli, sive rectæ* AB *æqualis; et* EL *æqualis rectæ* AD *arcûs* B*B secanti: et à punctis* K, L *educantur ad perpendiculum rectæ* KM, LN, *hyperbolam usque; cui occurrant illæ in punctis* M, N. *Sit etiam curva* OQR, *cujus ea sit natura, ut si in axe ejus,* OS, *capiatur* OP *arcui cuipiam circuli, æqualis, recta* PQ, *à puncto* P *ad perpendiculum ducta curvam usque, æqualis sit ejusdem arcûs tangenti. His positis, si* OP *capiatur in axe curvæ æqualis arcui illi* B*B, cujus secanti,* AD, *recta* EL *accepta est æqualis in asymptotâ hyperbolæ, area hyperbolica* KLMN *ad aream* OPQ *datam rationem gerit: nempe eam, quam dimidium quadrati ex* EF, *semiaxe hyperbolæ, habet ad quadratum ex circuli radio* AB.

In figurâ harum trium mediâ omissæ sunt rectæ per puncta Q, *x*, *q*, o ducendæ, ut rectangula QP × P*π*, *x π* × *π p*, *qp* × *po* perficerentur.



DIVIDATUR enim arcus B*B* in partes quotlibet, sive æquales sive inæquales B*b*, *bβ*, *β*B. Junctæ A*b*, A*β* tangenti BD in punctis *d*, *δ* occurrant. Capiantur in hyperbolæ asymptotâ EG rectæ E*k*, E*κ* secantibus A*d*, A*δ*, et in curvæ OR axe os capiantur o*p*, o*π* arcubus B*b*, B*β* æquales. Ita rectarum KL, OP in partes numero æquales divisio fiet; quarum illæ K*k*, *kκ*, κL, secantium AE, A*d*, A*δ*, AD differentiis, hæ o*p*, *pπ*, πP, arcubus B*b*, *bβ*, *β*B, ordine sumendis, æquales erunt. A divisionum punctis, *k*, κ; *p*, *π*, educantur ad perpendiculum curvas usque, illic quidem *km*, *κμ*, hîc vero *pq*, *π x*: compleantur que rectangula K*m*, *kμ*, κN; o*q*, *px*, *π*Q. Rectangulum κN ad rectangulum *π*Q rationem habet compositam è rationibus rectæ NL ad PQ rectæque κL ad *π*P; sive è rationibus rectæ NL ad rectam BD, rectæque κL ad arcum *Bβ*. Rectanguli quoque *μk* ad rectangulum *xp* composita est ratio è rationibus rectæ *μκ* ad rectam *π x* rectæque *xk* ad *πp*: hoc est, cùm recta *π x*, ex curvæ OR naturâ, tangenti B*δ* fit æqualis, è rationibus rectæ *μκ* ad tangentem B*δ*, rectæque *xk* ad arcum *βb*. Ratio denique rectanguli *m*K ad rectangulum o*q* composita est è rationibus rectæ *mk* ad tangentim E*d*, rectæque K*k* ad arcum *b*B. Jam verò si numerus arcuum B*b*, *bβ*, *β*B infinitè augeatur, magnitudinibus singulorum infinitè decrescentibus, unde partium quoque rectæ KL videlicet ipsarum K*k*, *kκ*, κL, necnon partium rectæ OP, videlicet ipsarum o*p*, *pπ*, *π*P numerus pariter infinitè crescet, magnitudinibus singularum infinitè imminutis, hoc inquam si fiat, ratio ultima evanescentis rectæ Lκ ad arcum evanescentem *Bβ*, ea erit quæ est rectanguli AD × DB ad quadratum ex AB: (per Theor. I.) nempe cùm illa Lκ secantium quidem, AD, A*δ*, fit differentia, hæc *Bβ* arcuum verò; et differentiæ quantitatum evanescentes fluxionum proportiones ultimò inter se ascîscant. (Geomet. Flux. Prop. I.) Quæ igitur è rationibus rectæ LN ad rectam BD rectæque *π*κ ad arcum *Bβ* composita est ratio, hæc inquam, rectâ Lκ arcuque *Bβ* evanescentibus, fit illi quidem ultimò æqualis, quæ componitur e rationibus rectæ LN ad rectam BD rectangulique AD × DB ad quadratum ex AB. Vel è rationibus rectanguli LN × EL, ad EL × BD vel AD × BD, ejusdemque

AD

diameter = *d*, chorda arcûs dati = *x*, & arcus quæsitus ad arcum illum ARCUS *z* EX ARCU *z*.

AD × BD ad quadratum ex AB. Ex hisce verò rectanguli LN × EL ad quadratum ex AB composita est ratio. (El. Lib. VI. Def. 5.) Quæ igitur è rationibus rectæ LN ad rectam BD, rectæque Lκ ad arcum *Bβ*, ultimò scilicet evanescente arcu illo, composita est ratio, quæ ex priùs ostensis rectangulorum evanescentium Nκ, *π*Q, ultima inter ipsa ratio est, hæc eadem rectanguli LN × EL ad quadratum ex AB est ratio. Sed è naturâ hyperbolæ æquilateræ rectangulum LN × EL, et dimidium quadrati ex EF inter se sunt æqualia. Rectanguli igitur LN × EL et dimidii quadrati ex EF ad quadratum ex AB eadem est ratio (Elem. V. 7.) Rectangulorum igitur evanescentium Nκ, QT, ea quidem inter ipsa ultima est ratio, quam dimidium quadrati ex EF habet ad quadratum ex AB. Eodemque prorsùs modo evanescentium *μk*, *xp* necnon *m*K, *qo* eadem efficietur ratio ultima communis; nimirum data illa, quæ est dimidii quadrati ex EF, semiaxe hyperbolæ, ad quadratum ex AB circuli radio. Quare et arearum KMNL, OPQ eadem inter ipsas ratio erit (De Rat. Prim. et Ult. Lem. 4.) Q. E. D.

13. *Cor.* In rectâ QP sumatur PT ad quam PQ rationem habeat quam quadratum ex AB ad dimidium quadrati ex EF, et duci intelligatur curva OTV, quam punctum T perpetuò tangat. Si OP arcui illi B*B* fit æqualis, cujus secanti AD recta EL accepta est æqualis, area OPT areæ hyperbolicæ MKLN æqualis erit. Etenim cùm duæ sint curvæ, OQR, OTV, axe communi, OS, quarum ordinatæ, binas utique conferendo ab iisdem axis punctis exeuntes, datam inter se rationem habent, areæ etiam ipsæ, OPQ, OPT, inter se datam ordinatarum rationem servant (De Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor. II. 1.) Area igitur OPT erit ad aream OPQ ut PT ad PQ; sive ut dimidium quadrati ex EF ad quadratum ex AB (ex Constructione.) sive denique ut area KLNM ad aream OPQ. Arearum igitur KLNM, OPT ad aream OPQ eadem est ratio. Areæ igitur illæ KLNM, OPT sunt inter se æquales (El. 5. 9.) Q. E. D.

14. AREA KLNM Logarithmus est rationis rectæ EL ad rectam EK, sive secantis AD ad radium AB, pro modulo $\frac{1}{2}$EF^2. Cùm igitur æquales inter se sint areæ illæ KLNM, OPT; si posterioris mensura ad formulam aliquam generalem, ex arcu *B*B tanquam radice procreatam, revocari possit, per eandem formulam logarithmus quidem ille pro modulo suo generaliter definietur ex arcu. Talem verò, areæ OPT formulam hæc ferè computatio dabit, in promptu sanè posita et leviſſimi laboris.

Literâ *z* designante arcum B*B*, vel illi æqualem rectam OP, literâ *t* tangentem BD vel illi æqualem rectam PQ, literâ *r* circuli radium AB, literâ denique B designante dimidium quadrati ex EF; cùm ex curvæ OTV naturâ PT sit ad PQ ut dimidium quadrati ex EF ad quadratum ex AB, hoc est cùm PT sit ad *t* ut B ad r^2: hinc sanè efficitur PT $= \frac{B}{r^2}t$. Et cùm semper inter se æquales sint arcus B*B* rectaque OP, fluxio quoque hujus illius fluxioni semper æqualis erit. (Geometr. Flux. Prop. II.) Hoc est $\dot{\text{OP}} = \dot{z}$. Rectangulum igitur PT × $\dot{\text{OP}}$, sive fluxio areæ OPT, $= \frac{B}{r^2}t\dot{z}$. Vel pro *t* substituendo seriem illam, $z + \frac{1}{3r^2}z^3 + \frac{2}{15r^4}z^5 +$, cujus summa, si infinitè illa producatur, rectæ *t* ultimò sit æqualis, (§. 7. hujus) fluxio areæ OPT $= \frac{B}{r^2} \times z\dot{z} + \frac{1}{3r^2}z^3\dot{z} + \frac{2}{15r^4}z^5\dot{z} + \frac{17}{315r^6}z^7\dot{z} + \frac{62}{2835r^8}z^9\dot{z} +$,

Ergo area OPT $= B \times \frac{1}{2r^2}z^2 + \frac{1}{12r^4}z^4 + \frac{1}{45r^6}z^6 + \frac{17}{2520r^8}z^8 + \frac{31}{14175r^{10}}z^{10} +$. Atque hæc est formula generalis logarithmi rationis ejus quam secans arcûs cujusvis ad radium habet pro modulo utique B. Quòd si ipsius radii logarithmus pro eodem modulo designetur literâ R, hæc erit Secantis Logarithmicæ formula generalis ex arcu, $R + \frac{B}{2r^2}z^2 + \frac{B}{12r^4}z^4 + \frac{B}{45r^6}z^6 + \frac{17B}{2520r^8}z^8$ SEC. LOG. EX ARC. $+ \frac{31B}{14175r^{10}}z^{10} +$. (Vide Commerc. Epistol. N° XX.)

15. HINC etiam formulam generalem finûs complementi logarithmici ex arcu effingere in promptu est. Nempe cùm quadratum è radio æquale sit rectangulo sub secante & sinu complementi, erit sinus complementi logarithmicus dupli logarithmi radii & secantis logarithmicæ differentia; cujus hæc erit formula generalis ex arcu: $R - \frac{B}{2r^2}z^2 - \frac{B}{12r^4}z^4 - \frac{B}{45r^6}z^6$. COSIN. LOG. EX ARC.

THE-

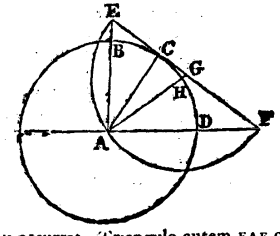
Excerptum illum datum ut n ad 1; eritque arcûs quæsiti chorda $= nx + \frac{1-nn}{\text{Quartum.}}$

THEOREMA III.

De Seriebus

16. *Tangentis arcûs cujuspiam circularis et tangentis ejusdem arcûs complementi summa quidem dimidiata secanti, differentia verò dimidiata tangenti, complementi arcûs dupli est æqualis.*

Circuli cujus centrum A, radius AB, sit arcus quispiam BC. A centro A educatur AD ad perpendiculum supra AB, quæ circulo in D occurrat. Per C ducatur recta quæ circulum in c contingat; et utrinque producta rectis AB, AD productis in punctis E, F occurrat. Recta EF media dividatur in puncto G, et jungatur AG.



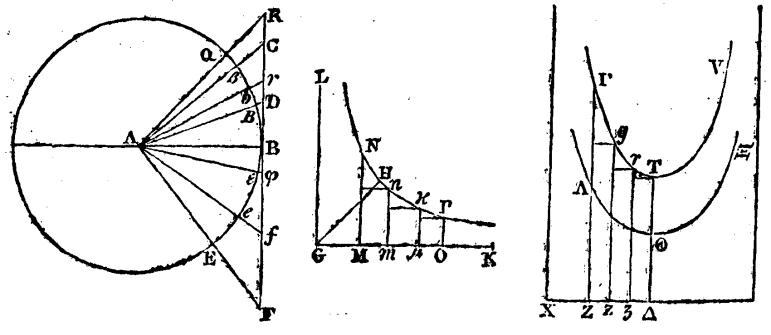
Propter angulum ad A rectum arcus ED totius circuitûs quadrans erit. Ergo arcus CD complementum erit arcûs CB, et recta CF tangens complementi arcûs BC, cùm recta CE ipsius quidem BC tangens sit. Erit igitur GE vel GF, tangentis arcûs BC et tangentis complementi ejusdem summa dimidiata; erit autem GC dimidiata earundem differentia. Dico rectam GE quidem, vel GF, secanti, rectam verò GC tangenti complementi dupli arcûs BC æqualem esse. Recta AG circulo in H occurrat. Triangulo autem EAF circumscribatur circulus. Propter angulum ad A rectum (talis enim factus est) recta EF circuli, triangulo EAF circumscripti, diameter erit. Quare punctum G, cùm medium sit rectæ EF, circuli illius centrum erit. Tres igitur GE, GA, GF inter se æquales. Propter æquales verò GA, GF, anguli GAF, GFA inter se æquales sunt. Sed propter angulos ad A, C rectos, anguli etiam CAE, CFA, vel GFA, inter se sunt æquales (El. VI. 8.) Angulus igitur GAF angulo CAE æqualis; sive angulus HAD angulo CAB. Arcus igitur HD, BC inter se æquales. Duo igitur BC, HD, simul sumpti, duplo arcûs BC æquales sunt. Tres verò BC, HD, HC quadrantem absolvunt. Ergo HC complementum est dupli arcûs BC. Est autem recta GA, cui GF, BE ostensæ sunt æquales, est, inquam, GA secans arcûs HC, recta verò GE ejusdem tangens. Ergo recta GE vel GF secanti, recta CG verò tangenti complementi dupli arcûs BC est æqualis. Q. E. D.

17. *Cor.* Rectangulum sub tangente arcûs cujuspiam, et secante complementi arcûs dupli, dimidio quadrati ex secante est æquale.

Rectangulum enim sub EC, GA æquale est *rectangulo* sub EC, EG; quod dimidium est rectanguli sub EC, EF, cui æquale est quadratum ex secante EA (El. VI. 8.) Rectangulum igitur sub EC, GA hoc est sub tangente arcûs BC et secante complementi dupli arcûs BC, dimidio quadrati ex secante EA æquale est. Q. E. D.

THEOREMA IV.

18. *Circuli, cujus centrum* A, *radius* AB, *sit arcus quilibet* Bβ. *Rectæ* BD, *circulum in* B *contingenti, juncta* AB *in* D *occurrat, ut sit* BD *tangens arcûs* BB. *Sit arcus* Bε *complementum dupli arcûs* BB, *junc-*



taque

$\frac{1-nn}{2\times 3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times 5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times 7dd}xxC + \frac{49-nn}{8\times 9dd}xxD + \frac{81-nn}{10\times 11dd}xxE +$ &c. Arcus xz ex Arcu z.

Ubi

taque AE *rectæ* DB *in* F *occurrat, ut sit recta* AF *secans complementi dupli arcûs* BB. *Sit hyperbola æqui-latera positione data,* NHP, *cujus centrum* G, *semiaxis recta* GH *datæ cujusvis longitudinis, asymptotæ rectæ* ANIS. GK, GL *positione datæ, et ad perpendiculum inter se compositæ. Harum in alterutrâ, puta in* GK *capiatur* GO *circuli radio* AB *æqualis, et* GM *æqualis rectæ* BD *arcûs* BB *tangenti; et è punctis* O, M *educantur ad perpendiculum* OP, MN *hyperbolam usque; cui illæ in punctis* P, N *occurrant. Sit etiam curva* ΓTV, *cujus ea sit natura, ut si in rectâ positione datâ,* XΔ, *à dato in eâ puncto* X *initio sumpto, capiatur* XZ *arcui cuilibet circuli æqualis, rectæ* ZΓ, *à puncto* Z *ad perpendiculum educta curvam usque, secanti complementi dupli arcûs æqualis sit. His positis, si in axe curvæ capiatur* XΔ *æqualis dimidio quadrantis,* XZ *verò æqualis arcui illi* BB, *cujus tangenti,* BD, *accepta est* GM *in asymptotâ hyperbolæ æqualis, eductis ad perpendiculum* ΔT, ZΓ, *area hyperbolica* PQMN *ad aream* ΔTΓZ *datam rationem habebit: nimirum duplicatam ejus quam semiaxis hyperbolæ* GH *habet ad circuli radium* AB.

19. Capiatur enim arcus BQ æqualis dimidio quadrantis; diviso autem arcu BQ, differentiâ utique arcûs BB et dimidii quadrantis, in partes quotlibet sive æquales sive inæquales, $Bb, b\beta, \beta Q$ junctæ Ab, $A\beta$, AQ producteque tangenti BD in punctis r, C, R occurrant. Sumantur arcus $B\varepsilon$, $B\iota$ duplorum arcuum Bb, $B\beta$ complementa; junctæque $A\varepsilon$, $A\iota$ et productæ rectæ BF in punctis f, φ, occurrant. In asymptotâ hyperbolæ GK, sumantur Gm, $G\mu$ tangentibus Br, BC; in axe verò curvæ FTV, sumantur Xz, $X\zeta$ arcubus Bb, $B\beta$ æquales. Ita rectarum OM, ΔZ in partes numero æquales divisio fiet, quarum illæ $O\mu$, μm, mM tangentium differentiis RC, cr, rD; hæ $\Delta\zeta$, ζz, zZ arcubus $Q\beta$, βb, bB æquales erunt. A divisionum punctis, μ, m; ζ, z, educantur ad perpendiculum curvas usque, illic quidem $\mu\varkappa$, $m\nu$, hic verò $\zeta\gamma$, $z\varkappa$, compleanturque rectangula $P\mu$, $\varkappa m$, νM; $T\zeta$, γz, $\varkappa Z$. Rectangulum $P\mu$ ad rectangulum $T\zeta$ rationem habet compositam è rationibus rectæ PO ad rectam ΔT, rectæque $O\mu$ ad rectam $\Delta\zeta$: vel, cùm recta ΔT, ex naturâ curvæ FTV, circuli radio AB sit æqualis, è rationibus rectæ PO ad rectam AB rectæque RC ad arcum $Q\beta$. Rectangulum quoque $m\nu$ ad rectangulum $\gamma\varkappa$ rationem habet compositam è rationibus rectæ $\nu\mu$ ad rectam $\gamma\zeta$ rectæque μm ad rectam ζz; vel è rationibus rectæ $\varkappa\mu$ ad rectam $A\varphi$ rectæque cr ad arcum βb. Recta enim $\gamma\zeta$, ex naturâ curvæ FTV, rectæ $A\varphi$ est æqualis; nempe cùm $A\varphi$ secans sit arcus $B\iota$ qui complementum est dupli arcûs $B\beta$, cui abscissa $X\zeta$ ponitur æqualis. Ratio denique rectanguli $\varkappa M$ ad rectangulum γZ composita est è rationibus rectæ $\varkappa m$ ad rectam Af, rectæque rD ad arcum bB.

Jam verò si arcuum $Q\beta$, βb, bB numerus infinitè augeatur, magnitudinibus singulorum infinitè decrescentibus, unde partium quoque rectæ OM, videlicet ipsarum $O\mu$, μm, mM; necnon partium rectæ ΔZ, videlicet ipsarum $\Delta\zeta$, ζz, zZ numerus pariter infinitè crescet, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus; hoc inquam si fiat, ratio ultima evanescentis RC ad evanescentem $Q\beta$ ea erit, quæ est quadrati ex AR ad quadratum ex AQ vel AB. (§ 8. hujus.) Quæ igitur è rationibus rectæ PO ad rectam AB rectæque RC ad arcum $Q\beta$ composita est ratio, ultimò scilicet, arcu $Q\beta$ rectâque RC evanescente, ea illi erit æqualis, quæ componitur è rationibus rectæ PO ad rectam AB et quadrati ex AR ad quadratum ex AB; sive è rationibus rectæ PO ad rectam AB numerique binarii ad unitatem. Nam propter angulum ADR rectum, et semirectum RAB, quadratum ex AR duplum est quadrati ex AB. Quæ igitur è rationibus rectæ OP ad rectam AB, rectæque RC ad arcum $Q\beta$ composita est ratio, ultimò scilicet arcu $Q\beta$ evanescente, quæ ex priùs ostensis rectanguli evanescentis $P\mu$, ad evanescens $T\zeta$ ultima est ratio, ea illi erit æqualis, quæ est duplæ rectæ PO ad rectam AB; sive dupli rectanguli PO × AB ad quadratum ex AB; sive denique (propter GO, AB inter se æquales) dupli rectanguli PO × OG ad quadratum ex AB. Sed, ex hyperbolæ æquilateræ naturâ, duplum rectanguli PO × OG quadrato ex GH est æquale. Rectanguli igitur evanescentis $P\mu$ ad evanescens $T\zeta$ ratio ultima recta GH ad circuli radium AB duplicata erit.

Rursum, ratio quæ componitur è rationibus rectæ $\varkappa\mu$ ad rectam $A\varphi$ rectæque cr ad arcum βb, ultimò scilicet arcu βb evanescente, sive rectanguli evanescentis $\varkappa m$ ad evanescens γz ratio ultima; hæc, inquam, illi erit æqualis, quæ componitur è rationibus rectæ $\varkappa\mu$ ad rectam $A\varphi$, et quadrati ex AC ad quadratum ex $A\beta$ (§ 8. hujus), vel è rationibus rectanguli $\varkappa\mu \times \mu G$ vel $\varkappa\mu \times$ EC ad $A\varphi \times$ BC et quadrati ex AC ad quadratum ex AB. Sed cùm $A\varphi$ secans fit arcûs $B\iota$, qui complementum est dupli arcûs $B\beta$, cujus tangens quidem est BC, AC verò secans, propter hæc rectangulum $A\varphi \times$ BC dimidio quadrati ex AC æquale est. (Cor. Theor. 3.) Quare rectanguli evanescentis $\varkappa m$ ad evanescens γz ratio ultima æqualis est compositæ è rationibus rectanguli $\varkappa\mu \times$ BC ad dimidium quadrati ex AC, et quadrati ex AC ad quadratum ex AB; sive compositæ è rationibus

dupli

EXCERPTUM QUARTUM.

Ubi nota, quòd cùm n est numerus impar, series desinet esse infinita,

DE SERIEBUS

duplí rectanguli $\kappa\mu \times$ BC, vel dupli $\kappa\mu \times \mu$G, ad quadratum ex AC, et quadrati ex AC ad quadratum ex AB. Sed ex lineæ compositæ est ratio dupli rectanguli $\kappa\mu \times \mu$G ad quadratum ex AB. Et è naturâ hyperbolæ æquilateræ, duplum rectanguli $\kappa\mu \times \mu$G quadrato ex GH est æquale. Ratio igitur ultimæ rectanguli evanescentis $\kappa\mu$ ad evanescens γz ea est quam quadratum ex GH habet ad quadratum ex AB, sive rectæ GH ad circuli radium AB duplicata. Ac similibus prorsus argumentis rectangulorum evanescentium πM, $g z$ eadem ratio ultima efficietur. Quare et arearum POMN, TΔZT eadem inter ipsas ratio erit. (De Rat. Prim. et Ult. Prop. IV.) Q. E. D.

20. *Cor.* In rectâ ZT capiatur ZA ad quam illa ZT rationem habeat duplicatam ejus quam AB ad GH; et duci intelligatur linea curva AΘ$\mathfrak{Z}$, quam punctum A perpetuò tangat, cui recta AT in puncto Θ occurrat. Area ΘΔZA hyperbolicæ POMN æqualis erit. (Hoc verò ad exemplum Corollarii Theor. 2. ex Corollario H. 1. Prop. IV. Tractatûs Newtoni De Rat. Prim. et Ult. demonstrandum est.)

21. Cùm igitur rationis ejus quam GO habet ad GM, hoc est, quam AB radius circuli QBE habet ad BD tangentem arcûs BB, area POMN pro modulo $\frac{1}{2}$GH^2 sit logarithmus, ad logarithmum illum generaliter definiendum opus erit aream ΘΔZA generali formulâ expressisse. Id verò hæc ferè computatio præstabit.

22. Designet litera r circuli radium AB, seu illi æqualem rectam GO: litera q quadrantem circuitûs circularis, cujus semissis, recta ΔX, symbolo $\frac{1}{2}q$ designanda erit. Designet litera z arcum BB, sive rectam XZ arcui illi æqualem; litera t arcûs BB tangentem BD, vel illi æqualem rectam GM; litera f rectam AF secantem complementi dupli arcûs BB, sive æqualem illi rectæ ZT. Designet denique litera B dimidium quadrati ex GH. Jam cùm ZT sit ad ZA ut quadratum ex AB ad quadratum ex GH, hoc est, f: ZA $= r^2$: 2B, hinc scilicet efficietur ZA $= \frac{2Bf}{r^2}$. Recta verò $\Delta z = \Delta x - zx = \frac{1}{2}q - z$. Quare fluxio rectæ $\Delta z = -\dot{z}$: et fluxio areæ ΘΔZA $= \frac{2Bf}{r^2} \times -\dot{z}$. Arcum BE designet litera y. Et cùm arcus BE is sit, quo duplus BB abest à quadrante, erit $y = q - 2z$. Ergo $\dot{y} = -2\dot{z}$, et $\frac{\dot{y}}{2} = -\dot{z}$. Substituendo igitur hoc symbolum $\frac{\dot{y}}{2}$ pro illo $-\dot{z}$, efficietur fluxio areæ ΘΔZA $= \frac{Bf}{r^2}\dot{y}$. Sed cùm f secans sit arcûs y, hujus seriei $r + \frac{y^2}{2r} + \frac{5}{24r^3}y^4 + \frac{61}{720r^5}y^6 +$, si infinitè ea producatur, summa rectæ f ultimò fit æqualis. (§ 9. hujus.) Hæc igitur series si in symbolo fluxionis areæ ΘΔZA pro literâ f substituatur, efficitur fluxio illa $= \text{B} \times \frac{\dot{y}}{r} + \frac{y\dot{y}}{2r^3} + \frac{5y^4\dot{y}}{24r^5} + \frac{61y^6\dot{y}}{720r^7} + \frac{277y^8\dot{y}}{8064r^9} + \frac{50521y^{10}\dot{y}}{3628800r^{11}} +$. Ergo area ipsa ΘΔZA $= \text{B} \times \frac{y}{r} + \frac{y^3}{6r^3} + \frac{y^5}{24r^5} + \frac{61y^7}{5040r^7} + \frac{277y^9}{72576r^9} + \frac{50521y^{11}}{3991680r^{11}} +$. Atque hæc est formula generalis logarithmi rationis ejus quam tangens arcûs cujuspiam ad radium habet, pro modulo B (vide Commerc. Epistol. N^{o} XX.) Quòd si ipsius radii logarithmus, pro eodem modulo, designetur literâ R, hæc erit Tangentis Logarithmicæ formula generalis R $\mp$ B $\times \frac{y}{r} + \frac{y^3}{6r^3} + \frac{y^5}{24r^5} + \frac{61y^7}{5040r^7} +$,

TANG. LOG. EX ARC.

signorum, +, −, hoc vel illo usurpato, prout arcus z dimidio quadrante minor majorve fuerit.

23. JAM si ex datâ Tangente Logarithmicâ Arcum definire cupias, designet litera T datam tangentem logarithmicam arcûs cujusdam, quem litera z designat. Designet autem litera τ logarithmorum R, T differentiam, sive rationis ejus logarithmum, quam tangens arcûs z ad circuli radium habet. Tum literâ y arcum eum designante quo duplus z abest à quadrante, efficitur ex iis quæ jam ostensa sunt.

$$\tau = \frac{By}{r} + \frac{By^3}{6r^3} + \frac{By^5}{24r^5} + \frac{61By^7}{5040r^7} + \frac{277By^9}{72576r^9} +.$$

24. Et hanc seriem invertendo ope Theorematis 2. Excerpti II. veniet y, sive $q - 2z$, $= \frac{r}{B}\tau - \frac{r}{6B^3}\tau^3 + \frac{r}{24B^5}\tau^5 - \frac{61r}{5040B^7}\tau^7 + \frac{277r}{72576B^9}\tau^9 -$. Unde efficietur $z = \frac{1}{2}q - \frac{r}{2B}\tau + \frac{r}{12B^3}\tau^3 - \frac{r}{48B^5}\tau^5 +$ ARC. EX. TANG. LOG. $\frac{61r}{10080B^7}\tau^7 - \frac{277r}{145152B^9}\tau^9 +$.

25. SI arcus ex secante logarithmicâ definiendus sit, designante literâ z arcum, designet litera Σ datam secantem logarithmicam; litera autem σ logarithmorum Σ, R differentiam designet; sive ejus rationis logarithmum, quam secans arcûs z ad radium habet. Tum ex iis quæ jam suprà ex secundo Theoremate ostensa sunt, hæc efficietur æquatio

$$\sigma = \frac{B}{2r^2}z^2 + \frac{B}{12r^4}z^4 + \frac{B}{45r^6}z^6 + \frac{17B}{2520r^8}z^8 +,$$

Hanc autem, ope Theorematis 2. Excerpti II. invertendo, hæc alia veniet;

$$z^2 = \frac{2r^2}{B}\sigma - \frac{2r^2}{3B^2}\sigma^2 + \frac{4r^2}{45B^3}\sigma^3 + \frac{2r^2}{315B^5}\sigma^4 +,$$

Ex hâc denique, partis utriusque radicem quadraticam extrahendo, conficietur

$$z = \frac{\sqrt{2.r}}{B^{\frac{1}{2}}}\sigma^{\frac{1}{2}} - \frac{r}{3.\sqrt{2.B^{\frac{1}{2}}}}\sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{r}{60.\sqrt{2.B^{\frac{5}{2}}}}\sigma^{\frac{5}{2}} + \frac{r}{2520.\sqrt{.2.B^{\frac{7}{2}}}}\sigma^{\frac{7}{2}},$$

ARC. EX. SEC. LOG.

quâ quidem formulâ, è logarithmo rationis ejus quam secans ad radium habeat, arcus generaliter definietur.

26. ALIAM vero arcûs formulam, è logarithmo rationis quam secans ejus ad secantem dimidii quadrantis habeat, Gregorius concinnavit. Hujus inventio nescio an ex alio fonte promptiùs arcessenda sit, quàm ex tertii Theorematis Corollario.

Literis R, B, Σ, σ, z, y eadem quæ suprà designantibus, secans logarithmica dimidii quadrantis pro modulo B designetur literâ S. Secantis autem dimidii quadrantis ad secantem arcûs z rationis logarithmus, hoc est logarithmorum S, Σ differentia, literâ l designetur: literâ denique D numeri binarii logarithmus pro modulo illo B.

Itaque cùm secans logarithmica arcûs y per hanc formulam exponatur,

$$\text{R} + \frac{B}{2r^2}y^2 + \frac{B}{12r^4}y^4 + \frac{B}{45r^6}y^6 + \frac{17B}{2520}y^8 +, \text{ (§ 14. hujus) hâc aliâ verò tangens loga-}$$

rithmica arcûs z (§ 22. hujus)

$$\text{R} - \frac{By}{r} - \frac{By^3}{6r^3} - \frac{By^5}{24r^5} - \frac{61By^7}{5040r^7} -,$$

ex harum quidem summâ conflabitur logarithmus rectanguli sub secante arcûs y et tangente arcûs z. Huic igitur logarithmo hujus seriei,

$$2\text{R} - \frac{By}{r} + \frac{B}{2r^2}y^2 - \frac{B}{6r^3}y^3 + \frac{B}{12r^4}y^4 - \frac{B}{24r^5}y^5 + \frac{B}{45r^6}y^6 - \frac{61B}{5040r^7}y^7 +,$$

si infinitè ea producatur, summa ultimò fit æqualis.

Rectangulum autem sub secante arcûs y et tangente arcûs z dimidio quadrati ex secante arcûs z æquale est (per Cor. Theor. 3.) Dimidii igitur quadrati hujus logarithmo series novissima æqualis est. Additoque illi binarii logarithmo, integri quidem quadrati logarithmus veniet, hoc est duplum ipsius secantis logarithmicæ arcûs z. Unde hæc efficitur æquatio.

$$2\Sigma = \text{D} + 2\text{R} - \frac{By}{r} + \frac{B}{2r^2}y^2 - \frac{B}{6r^3}y^3 + \frac{B}{12r^4}y^4 -,$$

Et binarii divisione,

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\text{D} + \text{R} - \frac{By}{2r} + \frac{B}{4r^2}y^2 - \frac{B}{12r^3}y^3 + \frac{B}{24r^4}y^4 - \frac{B}{48r^5}y^5 + \frac{B}{90r^6}y^6 - \frac{61B}{10080r^7}y^7 +,$$

Atqui quantitas $\frac{1}{2}$D + R est secans logarithmica dimidii quadrantis. Cùm enim ille R radii sit logarithmus, erit 2R logarithmus quadrati è radio. Ergo cùm D logarithmus sit binarii, horum summa, 2R + D, dupli quidem quadrati è radio logarithmus erit. Sed quadratum ex secante dimidii quadrantis duplum est quadrati è radio (per Elem. I. 47.) Quadrati igitur ex dimidii quadrantis

EXCERPTUM QUARTUM. multiplicandum datum angulum per iſtum numerum n (1).

4. Si

drantis ſecante ille $2R+D$ logarithmus erit. Quare illius ſemiſſis, nimirum $R+\frac{1}{2}D$, dimidii quadrantis ipſa ſecans erit logarithmica, ſive logarithmo s æqualis. Ex æquatione igitur noviſſimâ, demptis hinc inde æqualibus, s, $R+\frac{1}{2}D$, efficietur

$$-l=-\frac{By}{2r}+\frac{B}{4r^2}y^2-\frac{B}{12r^3}y^3+\frac{B}{24r^4}y^4-\frac{B}{48r^5}y^5+\frac{B}{90r^6}y^6-,$$

$$\text{Ergo } l=\frac{By}{2r}-\frac{B}{4r^2}y^2+\frac{B}{12r^3}y^3-\frac{B}{24r^4}y^4+\frac{B}{48r^5}y^5-\frac{B}{90r^6}y^6+,$$

Hujus autem inverſio, ope Theorematis 1. Excerpt. II. perficienda, hanc aliam excitabit;

$$y, \text{ ſive } q-2z,=\frac{2r}{B}l-\frac{2r}{B^2}l^2+\frac{8r}{3B^3}l^3-\frac{14r}{3B^4}l^4+\frac{28r}{3B^5}l^5-,$$

$$\text{Ergo } 2z=q-\frac{2r}{B}l+\frac{2r}{B^2}l^2-,$$

Ex hâc verò, per binarii diviſionem, exſiſtet tandem generalis arcûs formula

ARC. EX. SEC. LOG.
$$z=\tfrac{1}{2}q-\frac{r}{B}l+\frac{r}{B^2}l^2-\frac{4r}{3B^3}l^3+\frac{7r}{3B^4}l^4-\frac{14r}{3B^5}l^5+,$$

ex ejus nimirum rationis conflata logarithmo, quam ſecans arcûs z ad ſecantem dimidii quadrantis habet.

ARCUS nx EX ARCU x.

(1) CUM x chorda ſit arcûs dati, arcus datus erit

$$x+\frac{x^3}{6d^2}+\frac{3x^5}{40d^4}+\frac{5x^7}{112d^6}+$$

(per § 1. hujus Excerpti) nam arcus circularis per eandem formulam ex chordâ cum diametro definitur, atque ex ſinu recto cum radio.

Quare arcus exquirendus $=nx+\frac{nx^3}{6d^2}+\frac{3nx^5}{40d^4}+\frac{5x^7}{112d^6}+$

Subſtituatur hæc ſeries pro z in formulam chordæ ex arcu dato, & proveniet formula chordæ arcûs exquirendi è datâ x. Nempe hoc modo. Deſignet z arcum exquirendum; chorda igitur arcûs exquirendi $=z-\frac{z^3}{6d^2}+\frac{z^5}{120d^4}-\frac{z^7}{5040d^6}+$ (§ 2. hujus Excerpti)

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Sed } z=nx+\frac{nx^3}{6d^2}+\frac{3nx^5}{40d^4}+\frac{5nx^7}{112d^6}+ & \\ \text{Ergo } -\frac{z^3}{6d^2}= -\frac{n^3x^3}{6d^2}-\frac{n^2x^5}{12d^4}-\frac{37n^3x^7}{720d^6}- & \\ \text{et } +\frac{z^5}{120d^4}= +\frac{n^5x^5}{120d^4}+\frac{5n^5x^7}{720d^6} & \\ \text{et } -\frac{z^7}{5040d^6}= -\frac{n^7x^7}{5040d^6} & \end{array}\right\}$$

Quare hujus ſeriei, infinitè quidem productæ, ſumma chordæ arcûs exquirendi ultimò æqualis erit. Atque hæc ſeries, ſi coefficientium poteſtatis cujuſque ſummæ ſcitè colligantur, formam induet Newtonianam.

ALITER

2. SIT x chorda arcûs dati, y chorda arcûs exquirendi;

Erit arcus datus $=x+\frac{x^3}{6d^2}+\frac{3x^5}{40d^4}+\frac{5x^7}{112d^6}+$

Arcus autem exquirendus $=y+\frac{y^3}{6d^2}+\frac{3y^5}{40d^4}+\frac{5y^7}{112d^6}+$

Hinc rurſum arcus datus $=\frac{y}{n}+\frac{y^3}{6nd^2}+\frac{3y^5}{40nd^4}+\frac{5y^7}{112nd^6}+$

Ergo $x+\frac{x^3}{6d^2}+\frac{3x^5}{40d^4}+\frac{5x^7}{112d^6}+=\frac{y}{n}+\frac{y^3}{6nd^2}+\frac{3y^5}{40nd^4}+\frac{5y^7}{112nd^6}+$

Et radice y infinitè affectâ per formulam generalem Moivræanam extractâ

$y=$

PROBLEMA KEPLERI.

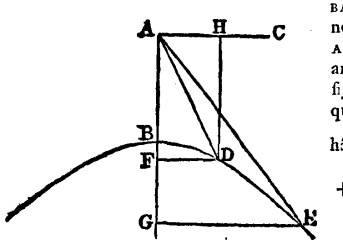
4. Si in axe alterutro AB, ellipſeos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG, occurrens

$$y=nx+\frac{n-n^3}{6d^2}x^3+\frac{9n-10n^3+n^5}{120d^4}x^5+\frac{225n-259n^3+35n^5-n^7}{5040d^6}x^7+.$$

Eâdem vero formulâ ſinus rectus arcûs exquirendi exponetur, ſi litera x dati arcûs ſinum rectum ſignificet; litera d circuli radium.

3. ILLUD verò minimè prætereundum eſt; per eandem formulam, ſignis tantummodo mutatis, Æquilateræ etiam Hyperbolæ, non arcum quidem, ſed ſectorem deliniri, qui ad datum ejuidem hyperbolæ ſectorem datam rationem habeat. Nempe hoc modo.

Centro A vertice B ſemiaxibus æqualibus AB, AC ſcriptam puta hyperbolam æquilateram BDE; cujus ſint BAD, BAE ſectores; quorum ille BAE ad alterum BAD rationem datam habeat quam n ad 1. A punctis D, E in axem AB deductis ad perpendiculum DF, EG; ſi recta DF, ſinus arcûs hyperbolici DB, cui ſectorum alter ADB inſiſtit, deſignetur literâ x, literâ r ſemiaxem AB deſignante, recta quidem EG, ſinus arcûs EB, cui inſiſtit ſector alter AEB,



hâc formula exponetur, $nx+\frac{nn-1}{2\times3\cdot r^2}xxA+\frac{nn-9}{4\times5\cdot r^2}xxB$ SECT. HYP. nx EX SECT. x.
$+\frac{nn-25}{6\times7\cdot r^2}xxC+\frac{nn-49}{8\times9\cdot r^2}xxD+\frac{nn-81}{10\times11\cdot r^2}xxE+,$

4. Hoc autem naturali quâdam nititur Hyperbolæ Æquilateræ cum Circulo cognatione, quam accuratiùs explicare haud abs re erit; præſertim cùm rem neque injucundam ſcitu neque inutilem, minimè verò difficilem, nimio calculorum apparatu apud optimos quidem ſcriptores non tam illuſtratam, quàm obrutam planè atque merſam cernimus.

5. A puncto D in axem ſecundum AC deducatur ad perpendiculum DH. Quadratum ex DH duobus ex AH et ex AC ſimul ſumptis eſt æquale (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XLI.) et recta AH $=$ DF $=x$. Quare DH $=\sqrt{r^2+x^2}$, et area hyperbolica DHAB $=rx+\frac{x^3}{6r}-\frac{x^5}{40r^3}+\frac{x^7}{112r^5}-\frac{5x^9}{1152r^7}+$ (Analyſ. per Æquat. Infinit. Cap. III. §. 5.)

Sed triangulum DHA $=\frac{1}{2}x\sqrt{r^2+x^2}=\frac{1}{2}rx+\frac{x^3}{4r}-\frac{x^5}{16r^3}+\frac{x^7}{32r^5}-\frac{5x^9}{256r^7}+$ (Analyſ. per Æquat. Infinit. Cap. III. §. 5.)

Quare ſector BAD $=$ arcæ DHAB $-$ triang. DHA $=\frac{1}{2}rx-\frac{x^3}{12r}+\frac{3x^5}{80r^3}-\frac{5x^7}{224r^5}+\frac{35x^9}{2304r^7}+.$

Hoc eſt, ſector BAD $=\frac{1}{2}r\times x-\frac{x^3}{6r^2}+\frac{3x^5}{40r^4}-\frac{5x^7}{112r^6}+\frac{35x^9}{1152r^7}.$

Atque hæc erit formula generalis ſectoris Hyperbolici ex ſinu recto ejus arcûs hyperbolæ quem ſector baſin habet: quæ à formulâ ſectoris Circularis haud aliâ re quàm ſignis diſcrepat.

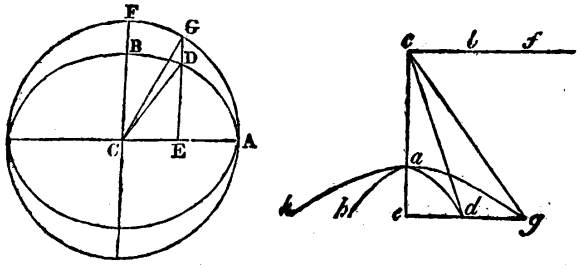
6. CUM enim arcûs circularis formula ex ſinu recto talis ſit, qualis à Newtono eſt expoſita (§. 1. hujus Excerpti) et ſector circularis æqualis ſit rectangulo ſub dimidio radii et arcu, idcirco ſectoris circularis formula ex ſinu recto hæc erit; $\frac{1}{2}r\times x+\frac{x^3}{6r^2}+\frac{3x^5}{40r^4}+\frac{5x^7}{112r^6}$ membris omnibus affirmatis; cùm in formulâ ſectoris hyperbolici alterna negata ſint; ſingulorum verò utriuſque formulæ membrorum inde ab initio eadem eſt conſtitutio.

7. NEQUE verò proprium eſt illud Hyperbolæ Æquilateræ Circulique, quòd figuræ utriuſque ſectores formulis exponantur ad omnia præter ſigna, +, −, ſimilibus, ſed ad omnes quidem Hyperbolas omneſque Ellipſes pertinet.

EXCERPTUM QUARTUM.

occurrens ellipſi in G, motu angulari feratur; & ex datâ areâ ſectoris elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ à puncto G ad axem AB normaliter demittitur: eſto BC = q, DC = r, EB = t, ac duplum

MENSURARUM ELLIPSEOS



8. Centro enim c, ſemiaxibus CA, CB, ſcriptam puta ellipſin ADE, cujus ſit ſector ACD. Centro verò c, ſemiaxibus ca, cb inæqualibus, ſcriptam puta hyperbolam dah, cujus ſector ſit acd. A puncto D ellipſeos in axem ejus CA deducatur DE ad perpendiculum; et à puncto d hyperbolæ in axem ca, qui hyperbolæ tranſverſus ſit, deducatur ad perpendiculum de; ut ſit DE ſinus arcûs elliptici AD, quem ſector ellipſeos ACD baſin habet; de ſimiliter ſinus arcûs hyperbolici ad, quem ſector hyperbolæ cad baſin habet. Centro c ellipſeos, radio CA ellipſeos ſemiaxe, ſcribatur circulus, cui recta DE in G occurrat, et jungatur CG. Centro c ſemiaxibus æqualibus ca, cf, ſcribatur hyperbola æquilatera gak, cui recta ed ad g occurrat, et jungatur cg.

9. Propter circulum et ellipſin axe AC communi, recta GE, erit ad DE ut FC ad BC, vel ut CA ad BC. Atque hæc conſtans erit rectarum GE, DE inter ipſas ratio, in omni ſitu puncti D. Areis igitur GAE, DAE inter ipſas eadem intercedet (De Rat. Prim. et ult. Prop. IV. Cor. H. 1.) Verùm eadem triangulis CGE, DCE (per El. 6. 1.) Igitur eadem ſectoribus etiam CGA, CDA (El. 5. 12.) Hoc eſt ſector circularis CGA ad ſectorem ellipſeos CDA rationem habet eam quam CA ad CB. Quare

ſector ellipſeos CDA = $\frac{CB}{CA} \times$ CGA.

Similiter cùm ſit hyperbola æquilatera gak, aliaque dah, ſemiaxe tranſverſo ca communi, erit ge ad de ut ſemiaxis tranſverſus ille communis, ca, ad cb ſemiaxem ſecundum hyperbolæ dah. Hæc vero rectarum ge, de, in omni ſitu puncti d, conſtans erit inter ipſas ratio. Areis igitur age, ade eadem intercedet. Eadem verò triangulis cge, cde. Quare eadem ſectoribus cga, cda. Hoc eſt hyperbolæ æquilateræ ſector cga, erit ad ſectorem cda alterius hyperbolæ, ut ca ad cb. Quare ſector $cda = \frac{cb}{ca} \times cga$.

Si igitur ſemiaxes ellipſeos, CA, CB; vel hyperbolæ dah, ca, cb; literæ r, a deſignent, arcûs verò circularis, GA, ſinum GE, vel arcûs hyperbolici, ga, ſinum ge, ſi litera x deſignet, cùm circuli hyperbolæque æquilateræ ſectores CGA, cga formulis exponantur quas ſuprà poſuimus, erit ſector

ellipticus CDA = $\frac{1}{2}a \times x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$,

Sector verò hyperbolicus $cda = \frac{1}{2}a \times x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} +$,

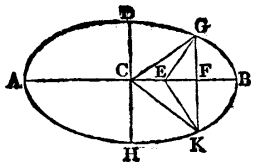
Quòd ſi litera χ deſignet DE ſinum arcûs elliptici DA, vel de ſinum arcûs hyperbolici da, cùm ſit GE : DE = CA : CB, et $ge : de = ca : cb$; hoc eſt, cùm ſit $x : \chi = r : a$, erit $x = \frac{r\chi}{a}$. Hoc igitur ſymbolo, $\frac{r\chi}{a}$, in formulas modò expoſitas pro literâ x ſubſtituto, venient formulæ ſectorum, elliptici hyperbolicique, ex ſinu cujuſque recto, ad omnia præter ſigna ſimiles.

SECT. ELL. EX SINU. Nimirum elliptici ſectoris hæc; CDA = $\frac{1}{2}r \times \chi + \frac{\chi^3}{6a^2} + \frac{3\chi^5}{40a^4} + \frac{5\chi^7}{112a^6} +$,

SECT. HYP. EX SINU. Hæc verò hyperbolici $cda = \frac{1}{2}r \times \chi - \frac{\chi^3}{6a^2} + \frac{3\chi^5}{40a^4} - \frac{5\chi^7}{112a^6} +$,

quæ, ſi ponantur r, a, æquales, in priores illas circuli hyperbolæque æquilateræ abibunt.

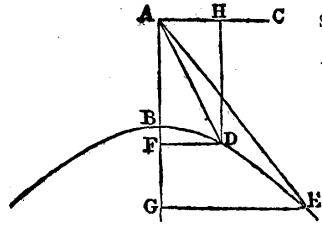
10. CÆTERUM in hyperbola æquilaterâ, ut ad illam revertamur, ſi ſector BAE ad ſectorem BAD eam rationem habeat quam n ad 1, ſi rectæ DF, EG arcuum DB, EB, quibus ſectores inſiſtunt, ſinus literis



duplum areæ BEG = z; et erit GF = $\frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 + \frac{10q^2-9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3+504q^2t-225qt^2}{5040r^6t^{10}}z^7 +$ &c. PROBLEMA KEPLERI.

Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt (m).

5. In literis x, y, deſignentur; cùm ſectorum hyperbolæ æquilateræ ea ſit ex ſinubus rectis formula, quam ſuprà ſcripſimus, erit ſector hyperbolicus BAD = $\frac{1}{2}r \times x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} +$, HYPERBOLÆQUE HARMONIA



Sector hyperbolicus BAE = $\frac{1}{2}r \times y - \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} - \frac{5y^7}{112r^6} +$,

Underurſum ſector BAD = $\frac{1}{2}r \times \frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} - \frac{5y^7}{112nr^6} +$,

Ergo $\frac{1}{2}r \times x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} -$, $= \frac{1}{2}r \times \frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} -$,

Ac propterea $x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} -$, $= \frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} -$,

Ad inveniendam igitur rectam EG, literâ y deſignatam, nacti ſumus æquationem, ejus omnia præter ſigna ſimilem, quâ è dato ſinu arcûs circularis z finum arcûs nz erpendum eſſe pridem oſtendimus. Etenim in æquatione illâ circulari ſigna in utráque parte poſitiva erunt omnia, in hâc hyperbolicâ alternè negativa ſunt utrinque. Hujus igitur, ſicut prioris, radice y infinitè affectâ per formulam generalem Moivræanam extractâ, veniet formula literæ y prioris omnia ſimilis, niſi quòd ſigna membrorum alternorum contraria habeant. Id quod coefficientium Theorematis Moivræanam compoſitionis modum attentiùs conſideranti cuivis credo manifeſtum erit. Ergo y, ſive EG = $nx + \frac{nn-1}{2\times 3 r^2}x^3\text{A} + \frac{nn-9}{4\times 5 r^2}x^5\text{B} +$. In majorem rei evidentiam calculos qui volet ſubducat.

11. Cæterùm ſi n ſit numerus impar, hæc formula, ſicut prior illa, infinita eſſe deſinet; et finitas quidem æquationes promet, ad ſectorum hyperbolicorum, hoc eſt ad logarithmorum cum numeris imparibus multiplicationes, vel diviſiones, earum omnia æquationum præter ſigna ſimiles, quibus ſimiles arcuum circularium vel angulorum multiplicationes diviſioneſque continentur. Nimirum hoc ipſum eſt, quo omnis ferè nititur mirabilis illa Angulorum Rationumque Menſurarum Harmonia, cujus contemplatione magnus ille olim Coteſius tantopere delectatus eſt. Nec immeritò ſcilicet: cùm tantam illa ſummo viro attuliſſet inventorum atque famæ frugem: utpote cujus ope tot tantaque tam eleganter perfecerat. Quorum tamen ſummam EDVARDUS WARING ὁ πάνυ, in eo contineri ſcribit "quòd æquationis $x^n \pm 1 = p$ radices invenit, ex quibus detexit fluentem fluxionis $\frac{\dot{x}}{x^{2n} \pm ax^n + 1}$ *." At verò ea eſt Coteſii laus, non quòd *æquatiunculam* illam explicaverit quidem, ſed quòd modo illo ſuo peculiari hoc effecerit; tam ſimplici, tam ſubtili, tam perſpicuo: quòd illam viâ geometricâ explicando, calculorum laborem multùm minuerit; tot tantaque problemata ad menſuras aut angulorum aut rationum revocaverit: unde factum eſt, ut ex analyſi facillimâ compoſitiones problematum elegantiſſimæ quaſi ſponte enaſcerentur; compoſitionum demonſtrationes, in eo quidem genere quod fit cum brevitate firmiſſimum, ultrò ſe offerrent. Has quidem ſtatuo magni Coteſii laudes, quas vereor ut ſatis amplè Waringius, apud æquos judices, celebraſſe exiſtimandus erit.

(m) Recta GF producta ellipſi iterum, ab alterâ parte axis, in K occurrat et jungantur CG, CK, EK. Itaque ſi litera x rectam GF deſignet, ſectori elliptico GCB hujus ſeriei, ſi infinitè ea producatur, ſumma ultimò æqualis erit; $\frac{1}{2}q \times x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$, (npt. [1] §. 9.) PROBLEMA KEPLERI.

Sector igitur GCK = 2GCE = $qx + \frac{qx^3}{6r^2} + \frac{3qx^5}{40r^4} + \frac{5qx^7}{112r^6} +$,

Sed recta CE = $q - t$. Quare duplum trianguli GEC, ſive duo triangula GEC, KEC ſimul ſumpta = q.

* Vid. Meditat. Analyt. Præfat.

ARC. ELLIP. E SINU.

5. In eâdem ellipſi, ſi ſtatuatur CD $= r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & CF $= x$: erit arcus ellipticus

(n) DG $= x + \frac{1}{6c^2}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14r^2c^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11}$ + &c.
$- \frac{1}{40c^4} - \frac{1}{28rc^5} - \frac{1}{24r^2c^6} - \frac{1}{22r^3c^7}$
$+ \frac{1}{112c^6} + \frac{1}{48rc^7} + \frac{3}{88r^2c^8}$
$- \frac{5}{1152c^8} - \frac{5}{352rc^9}$
$+ \frac{7}{2816c^{10}}$

Hìc numerales coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in muſicâ progreſſione: et numerales coefficientes omnium inferiorum in unaquâque columnâ prodeunt multiplicando continuò numeralem coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{n-3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}n-5}{6}$, $\frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$, $\frac{\frac{1}{2}n-9}{10}$, &c. Ubi n ſignificat

PROBLEMA KEPLERI. $= qx - tx$. Sed area elliptica BGEK differentia eſt ſectoris elliptici GCK, duorumque triangulorum GCE, KCE. Quare area elliptica BGEK, ſive 2GEB, ſive z, $= tx + \frac{qx^3}{6r^2} + \frac{3qx^5}{40r^4} + \frac{5qx^7}{112r^6} +$,
Et hanc ſeriem invertendo, ope Theorematis 2. Excerpti II. veniet formula rectæ GF Newtoniana, $x = \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 + \frac{10q^2-9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3-504q^2t+225qt^2}{5040r^6t}z^7 +$,

2. In coefficiente membri quarti ſigna nominum ſingulorum calculis ſuadentibus emendavi, cùm coefficientem illam Newtonus ipſe in Commercio Epiſtolico, & Joneſius hoc modo exhibuiſſent. $-\frac{80q^3+504q^2t-225qt^2}{5040r^6t^{10}}$. Vitioſè certè. Nam per Theorema ſecundum Newtoni ad regreſſiones coefficiens ille $= + \frac{504q^2t-225t^2q-280q^3}{5040r^6t^{10}} = -\frac{280q^3+225t^2q-504q^2t}{5040r^6t^{10}}$.

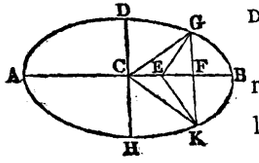
3. Credibile eſt errorem ex eo natum, quòd Newtonus formulam ſuam, primâ ſcriptione, hoc modo diſpoſuiſſet $x = \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 + \frac{q^2}{120r^4t^7}z^5 - \frac{q^3}{18r^6t^{10}}z^7 +$,
$- \frac{3q}{40r^4t^6} + \frac{q^2}{10r^6t^9} -$,
$- \frac{5q}{112r^6t} +$,

Poſtea verò cùm alia diſpoſitio magis ei placuiſſet, ut coefficientis cujuſque nomina ad denominatorem revocarentur communem, et numeratoribus ſignis +, −, algebraicè conjunctis, in unius fractionis ſpeciem coaleſcerent; hæc, inquam, formulæ ſuæ diſpoſitio cùm Newtono potior viſa eſſet, integris quidem coefficientibus ea, credo, ſigna præfixit, quæ in primâ illâ diſpoſitione ſummi ordinis nominibus à ſe præfixa inveniſſet: nominum verò inferiorum ſigna, poſitiva pro negativis, negativa pro poſitivis mutare, quoties nomen ſummum negativum eſſet, quod fieri omninò debuit, neglexit. Sed quocunque tandem modo natus fuerit error, error certè eſt. Atque mecum hâc in re ſenſiſſe video virum harum rerum peririſſimum Carolum Huttonum, qui in opere ſuo de Menſionibus Anglicè ſermone Anno 1770 edito, huic formulæ, cujus etiam inveſtigationem tradidit, ſimilem emendationem adhibuit, (Treatiſe of Menſuration, Part 3. Sect. 3. Problem VIII. Cor. 9.)

ARC. ELLIP. (n) RECTA GF deſignetur literâ y. Tum è natura ellipſeos erit CD^2 : CB^2 $=$ GF^2 : AF × FB; hoc eſt $r : c = y^2 : rc - x^2$. Ergo $y^2 = \frac{r}{c}\overline{rc-x^2}$. Ergo $\dot{y} = -\frac{rx\dot{x}}{2xy} = -\frac{rx\dot{x}}{\sqrt{}} \times \sqrt{\frac{c}{rc-rx^2}}$.

Quare

niſicat numerum dimenſionum ipſius c in denominatore iſtius ſupremi termini. E. g. ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc eſt, in 1; & prodit $\frac{1}{22}$, numeralis coefficiens termini proximè inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{1}{2}n-3}{4}$, ſive in $\frac{n-3}{4}$, hoc eſt, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{1}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in iſtâ columnâ. Atque iſta $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{1}{2}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum uſque columnis præſtari poteſt: adeoque valor ipſius DG per hanc regulam pro lubitu produci. ARCUS ELLIPTICUS



6. Adhæc, ſi BF dicatur x, ſitque r latus rectum ellipſeos, & $e = \frac{r}{AB}$; erit arcus ellipticus (°) BG $=$ EX SINU.

Quare $\dot{y}\dot{y} = \frac{r^2x^2\dot{x}\dot{x}}{c^2} \times \frac{c}{r^2c-rx^2} = \frac{rx^2\dot{x}\dot{x}}{rc^2-cx^2}$. Et $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{x}\dot{x} \times 1 + \frac{rx^2}{rc^2-cx^2}$.

Hoc eſt, ſi fractio $\frac{rx^2}{rc^2-cx^2}$, diviſionis operâ, convertatur in ſeriem infinitam,

$\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{x}\dot{x} \times 1 + \frac{x^2}{c} + \frac{x^4}{rc^3} + \frac{x^6}{r^2c^4} + \frac{x^8}{r^3c^5} + \frac{x^{10}}{r^4c^6} +$. Ergo $\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}$, ſive fluxio arcûs elliptici DG, $= \dot{x} \times \sqrt{1 + \frac{x^2}{c^2} + \frac{x^4}{rc^3} + \frac{x^6}{r^2c^4} + \frac{x^8}{r^3c^5} + \frac{x^{10}}{r^4c^6} +}$.

Vel, ſi ope formulæ noſtræ generalis, (Logiſtic. Infinit.) radix quadratica ſeriei infinitæ extrahatur, fluxio arcûs elliptici DG $=$
$= \dot{x} \times 1 + \frac{1}{2rc^2}x^2 + \frac{1}{2r^2c^3}x^4 + \frac{1}{2r^3c^4}x^6 + \frac{1}{2r^4c^5}x^8 +$
$- \frac{1}{2^2 \cdot 1 \times 2rc^4}x^4 - \frac{2}{2^2 \times 1 \times 2r^2c^5}x^6 - \frac{3}{2^2 \times 1 \times 2r^3c^6}x^8 +$
$+ \frac{2}{2^3 \times 1 \times 2 \times 3rc^6}x^6 + \frac{3 \times 3}{2^3 \times 1 \times 2 \times 3r^2c^7}x^8 +$
$- \frac{3 \times 5}{2^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4rc^8}x^8$

Et fluenti hujus ſeriei arcus ipſe DG æqualis erit. Hujus autem ſeriei fluens eſt ipſa quidem ſeries Newtoniana.

(°) DESIGNETUR enim recta GF, ut priùs, literâ y. ARC. ELLIP.
E naturâ ellipſeos CD^2 : CB^2 $=$ GF^2 : AF × FB, hoc eſt, r : AB $= y^2$: AB$x - xx$.
Ergo $y^2 = \overline{AB \times x - xx} \times \frac{r}{AB} = rx - ex^2$. Ergo $2y\dot{y} = \dot{x} \times \overline{r - 2ex}$. Et $\dot{y} = \dot{x} \times \frac{r-2ex}{2\sqrt{rx-ex^2}}$.
Ergo $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{x} \times \frac{r^2-4rex+4e^2x^2}{4x \times r-ex}$. Et $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{x}\dot{x} \times 1 + \frac{r^2-4rex+4e^2x^2}{4x \times r-ex} = \frac{\dot{x}\dot{x}}{4x} \times$
$\frac{r^2+4r}{-4re} x + \frac{+4e^2}{-4e} x^2$
$\frac{}{r-ex}$. Et, ſi fractio diviſionis operâ convertatur in ſeriem infinitam, $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} =$
$\dot{x}\dot{x}$:

Ex Sinu Verso. $\text{BG} = \sqrt{rx}\,\text{in}\,1 + 2\left\{ -\frac{3}{2}e \right\}\left\{ \begin{matrix} x \\ \frac{-}{3r} \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} +3e \\ -\frac{5}{8}e^2 \\ \hline 5r^2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x^2 \\ \frac{+}{} \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} -9e \\ +\frac{23}{4}e^2 \\ -\frac{7}{16}e^3 \\ \hline 7r^3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x^3 \\ \frac{-}{} \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} +30e \\ -\frac{123}{4}e^2 \\ +\frac{91}{8}e^3 \\ -\frac{45}{128}e^4 \\ \hline 9r^4 \end{matrix} \right\} x^4, + \text{&c.}$

7. Quare, ſi ambitus totius ellipſeos deſideretur; biſeca CB in F, & quære arcum DG, per prius Theorema, & arcum BG per poſterius.

8. Si, vice verſâ, ex dato arcu elliptico DG, quæratur ſinus ejus CF; tum dicto $\text{CD} = r$, $\frac{\text{CB}^2}{\text{CD}} = c$, & arcu illo $\text{DG} = z$; erit

(P) $\text{CF} = z - \frac{1}{6c^2}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14r^2c^4}z^7 - \text{&c.}$ Sin. Ellip. ex arc.

$+\frac{13}{120c^4} + \frac{17}{420rc^5} - \frac{493}{5040c^6}$

Ex Sin. Vers. $\frac{\dot{x}\dot{x}}{4x} \times r + \overline{4-3e}\cdot x + \frac{e^2x^2}{r} + \frac{e^3x^3}{r^2} + \frac{e^4x^4}{r^3} +$. Ergo $\sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}}$, ſive fluxio arcûs elliptici $\text{BG} = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} \times \sqrt{r + \overline{4-3e}\cdot x + \frac{e^2x^2}{r} + \frac{e^3x^3}{r^2} + \frac{e^4x^4}{r^3} +}$

Vel, ſi ope formulæ noſtræ generalis (Logiſtic. Infin.) radix quadratica ſeriei infinitæ extrahatur, extractaque dividatur quantitate $x^{\frac{1}{2}}$,

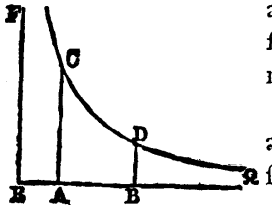
Fluxio arcûs $\text{BG} = \frac{\dot{x}}{2} \times r^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + 2\left\{ -\frac{3e}{2} \right\}\left\{ \begin{matrix} x^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-}{r^{\frac{1}{2}}} \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} +\frac{e^2}{2} \\ -\frac{16-24e+9e^2}{2^2+1\times 2} \\ \hline r^{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\} x^{\frac{3}{2}} +$

$\left. \begin{matrix} +\frac{e^3}{2} \\ -\frac{8e^2-6e^3}{2^2\times 1\times 2} \\ +\frac{\overline{4-3e}^3\times 3}{2^3\times 1\times 2\times 3} \end{matrix} \right\} x^{\frac{5}{2}} \left. \begin{matrix} +\frac{e^4}{2} \\ -\frac{8e^3-5e^4}{2^2\times 1\times 2} \\ +\frac{3\times 16e^2-24e^3+9e^4\times 3}{2^3\times 1\times 2\times 3} \\ -\frac{\overline{4-3e}^4\times 3\times 5}{2^4\times 1\times 2\times 3\times 4} \\ \hline r^{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\} x^{\frac{7}{2}}$

Hinc arcus $\text{BG} = r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 2\left\{ -\frac{3e}{2} \right\}\left\{ \begin{matrix} x^{\frac{3}{2}} \\ \frac{-}{3r^{\frac{1}{2}}} \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} +\frac{e^2}{2} \\ -\frac{16-24e+9e^2}{2^2\times 1\times 2} \\ \hline 5r^{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\} x^{\frac{5}{2}} \left. \begin{matrix} +\frac{e^3}{2} \\ -\frac{8e^2-6e^3}{2^2\times 1\times 2} \\ +\frac{\overline{4-3e}^3\times 3}{2^3\times 1\times 2\times 3} \\ \hline 7r^{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\} x^{\frac{7}{2}} +$

$= \sqrt{}$

Quæ autem de Ellipſi dicta ſunt, omnia facilè accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantùm ſignis ipſorum *c* & *e* ubi ſunt imparium dimenſionum (9).



7. Præterea, ſi ſit CD Hyperbola, cujus aſymptoti EB, EF rectum angulum BEF conſtituant; & ad EB erigantur utcunque perpendicula

$= \sqrt{rx} \times 1 + 2\left\{ -\frac{3e}{2} \right\}\left\{ \begin{matrix} x \\ \frac{-}{3r} \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} +\frac{e^2}{2} \\ -\frac{16-24e+9e^2}{2^2\times 1\times 2} \\ \hline 5r^2 \end{matrix} \right\} x^2 \left. \begin{matrix} +\frac{e^3}{2} \\ -\frac{8e^2-6e^3}{2^2\times 1\times 2} \\ +\frac{\overline{4-3e}^3\times 3}{2^3\times 1\times 2\times 3} \\ \hline 7r^3 \end{matrix} \right\} x^3 +$ Arc. Ellipt. ex Sin. Vers.

Unde, coefficientis cujuſque membris ſecundum poteſtates literæ *e* diſpoſitis, veniet ſeries Newtoniana.

(P) Formulam arcûs DG priùs inventam (§. 5. hujus Excerpti) ſi ope Theorematis 2. Excerpt. II. invertas, obtinebis formulam ſinûs CF ex arcu illo, qualis à Newtono hic deſcripta eſt.

(9) Et ad Parabolam, membris iis omnibus deletis, quæ, in formulâ arcûs ex ſinu verſo, litera *e* ingreſſa eſt; vel iis, quorum denominatores litera *r*, in aliis illis arcûs ex ſinu recto, ſinûſve ex arcu formulis. Ut hæc ſcilicet ſit formula Arcûs Parabolici ex ſinu recto

$x + \frac{1}{6c^2}x^3 - \frac{1}{40c^4}x^5 + \frac{1}{112c^6}x^7 - \frac{5}{1152c^8}x^9 + \frac{7}{2816c^{10}}x^{11} -,$ Arc. Parab. ex Sin.

Sinûs autem ex arcu

$z - \frac{1}{6c^2}z^3 + \frac{13}{120c^4}z^5 - \frac{493}{5040c^6}z^7 +,$ Sin. Parab. ex Arc.

Deſignante nimirum literâ *x* ſinum rectum; *z*, arcum; *c* ſemiparametrum parabolæ.

Arcûs etiam Parabolici ex ſinu verſo ut hæc ſit formula

$r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3r^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5r^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7r^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{9r^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{9}{2}} +,$ Arc. Par. ex Sin. vers.

Deſignante *x* ſinum verſum; *r*, parametrum parabolæ.

2. Harum verò tranſmutationum in eo poſita eſt ratio, quòd Algebræ, proprio ſermone curvarum proprietates edifferenti, Hyperbolam tanquam Ellipſin negativo axe, et viciſſim, conſiderare receptum eſt; Parabolam verò vel tanquam Ellipſin quidem illam, vel tanquam Hyperbolam, axe infinito. Hoc autem quale ſit clariùs dicam.

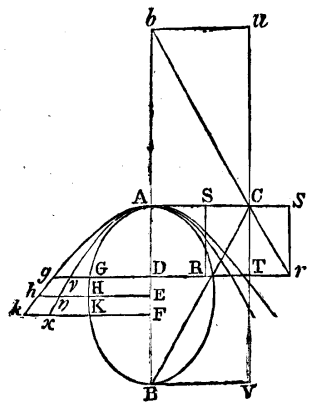
3. Sint duæ rectæ AB, AC magnitudine, et poſitione datæ et ad perpendiculum inter ſe compoſitæ. Harum in alterutrâ, puta in AB, capiantur pro arbitrio inter puncta extrema A, B, alia aliquot D, E, F. A quibus eductæ ad perpendiculum, DG, EH, FK, ejus capiantur quæque longitudinis, ut rectangula ſegmentis rectæ datæ comprehenſa, rectangula dico AD×DB, AE×EB, AF×FB, ad quadrata ex eductis, DG, EH, FK, ordine ſumendis, datam illam rationem habeant, quam recta AB ad rectam AC. Linea curva quæ per eductarum DG, EH, FK, aliarumque omnium, quæ, à punc- Qua mente Algebra

Basis Spatii

pendicula AC, BD occurrentia hyperbolæ in C & D: & EA dicatur a; AC, b; & area CADB, z;

Erit

Negativos Loquitur



tis in rectâ AB, pro arbitrio sumendis, simili lege educi poterunt, extrema transeat, Ellipsis erit; cujus axis AB, parameter AC. Juncta enim BC rectæ GD, si opus sit, producatur, in R occurrat; actisque RS, CT cum rectâ AB parallelis, actâque rectâ BV cum AC parallelâ, rectangula AR, AT, AV compleantur. Jam propter DR, AC parallelas, erit BD ad DR ut BA ad AC. Unde BD × DA ad DR × DA, hoc est ad DS, ut AB ad AC. (Elem. VI. 1.) Est autem rectangulum BD×DA ad quadratum ex DG ut AB ad AC. (Id enim posuimus.) Rectanguli igitur BD × DA ad rectangulum DS et ad quadratum ex DG eadem est ratio. Quadratum igitur ex DG rectangulo DS æquale erit. Rectangulum verò DS deficit ab illo DC, quod datâ AC abscissâque AD comprehensum est, alio illo ST, ejus nimirum quod datis AB, AC comprehensum est, AV, specie posituque simili. Punctum igitur G ad ellipsin erit, cujus axis recta AB, parameter illa AC. Similibus argumentis efficietur puncta H, K ad eandem ellipsin esse, & extremum cujusvis itidem rectæ, quæ, à puncto inter extrema illa A, B pro arbitrio sumpto, ad priorum legem educta fuerit. Linea igitur curva quæ per omnium illo modo eductarum extrema transeat, haud alia erit atque illa quam modò diximus Ellipsin.

4. Sed retrorsùm ducatur recta AB, sumaturque Ab datæ AB æqualis. Jam punctis D, E, F, non inter extrema b, A sed infra A pro arbitrio sumptis, interceptæ illæ AD, AE, AF, contratio quidem modo atque priùs ad AB se habuerunt, posituræ scilicet ratione nunc ad Ab habent; ut quæ alterius partes fuerint, eæ hujus sint additamenta. Eductæ verò ad perpendiculum Dg, Eb, Fk, si capiantur ejus quæque longitudinis, ut rectangulum datâ bA cum additamento, additamentoque comprehensum ad quadratum ex eductâ datam illam rationem habeat, quam recta Ab ad rectam AC; hoc est, si rectangula $bD \times DA$, $bE \times EA$, $bF \times FA$, ad quadrata ex eductis Dg, Eb, Fk, ordine sumendis, datam illam rationem habeant; linea curva, quæ per eductarum Dg, Eb, Fk, aliarumque omnium, quæ, à punctis infra A, pro arbitrio sumendis, simili lege educi poterunt, extrema transeat, hæc inquam curva, non jam ut priùs Ellipsis, sed Hyperbola quidem erit; parametro eâdem AC atque ellipsis habuit, et axe transverso Ab ellipseos axi AB æquali.

Juncta enim bc rectæ gD si opus sit productæ in r occurrat; aganturque rs, bu cum illis AD, AC parallelæ; quæ rectangula Ar, Au perficiant. Itaque propter parallelas Dr, AC, erit bD ad Dr ut bA ad AC. Atque idcirco $bD \times DA$ ad $Dr \times DA$, hoc est ad DS, ut bA ad AC. Est autem rectangulum $bD \times DA$ ad quadratum ex Dg ut bA ad AC (Id enim posuimus.) Rectanguli igitur $bD \times DA$ ad rectangulum DS eadem atque ad quadratum ex Dg est ratio. Quadratum igitur ex Dg rectangulo DS est æquale. Rectangulum verò DS exuperat illud DC, quod datâ AC abscissâque AD comprehensum est, alio illo TS, ejus nimirum, quod datis Ab, AC comprehensum est, Au, specie posituque simili. Punctum igitur g ad hyperbolam erit, cujus axis transversus Ab parameter AC. Similibusque argumentis de punctis b, k, omniumque adeo rectarum extremis, quæ à punctis infra A, pro arbitrio sumendis, ad priorum legem eductæ fuerint, efficietur ea omnia ad hyperbolam esse, lateribus quibus diximus, AC, Ab, recto transversoque. Linea igitur curva per eductarum extrema transiens, quæ modò Ellipsis erat nunc fit Hyperbola, parametro eâdem quam ellipsis habuit, axeque æquali quidem sed situ contrario. Et ex everso axis situ figuræ immutatæ ratio pendet. Cùm enim in priori casu recta BC, in hoc verò bc, ab eductâ qualibet, verbi gratiâ, à DG, vel Dg, partem quandam, DR, vel Dr, abscindat, quæ cum datâ abscissâ AD rectangulum claudit quadrato ex eductâ æquale, harum verò altera BC, à puncto B egressa, eductam DG medio quasi itinere objectam transeat, priusquam punctum C attingat, altera autem bc ultra locum C progrediens eductæ gD in occursum eat; horum consequens erit, duarum DR, Dr illam quidem rectâ AC minorem, hanc verò majorem esse: ac propterea quadrata ex eductis DG, Dg, à rectangulo DC, illud defectu, hoc excessu aberunt. Quod sanè cum primarium sit et præcipuum Ellipseos et Hyperbolæ

Erit AB $= \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab^2} + \frac{z^3}{6a^2b^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$ + &c. Ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus arithmeticæ

Hyperb. ex area, sive

perbolæ discrimen, ex situ axis, sicut modò diximus, everso videtur omnis figuræ fieri transmutatio. Algebra igitur, quæ contrarios linearum ductus signorum diversitate indicare solet, haud ineptè Hyperbolam tanquam Ellipsin, et viciissim, considerat, negato axe. Atque his quidem congruenter, positâ æquatione ad Ellipsin $y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$, designante nimirum literâ p parametrum, d axem, y ordinatam, x abscissam ab axe, si in æquatione illâ pro d scribatur $-d$, veniet æquatio ad Hyperbolam: $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$. E contrario, positâ æquatione ad Hyperbolam $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$, si in illâ pro d scribatur $-d$, veniet æquatio ad Ellipsin.

Curvarum Axes.

5. Cæterum manentibus ellipsi et hyperbolâ modò scriptis, axibus quidem æqualibus AB, Ab, parametro verò AC communi, eâdem parametro AC, vertice autem A, axeque rectâ AB inde ab A in infinitum protensâ, scriptam puta Parabolam Aix, cui ordinatæ DG, EH, FK in punctis ν, η, x occurrant. Hæc Parabola Ellipsin in vertice communi A contingens, eam intrà se totam continebit. Quadratum enim ex Dν rectangulo DC æquale est, propter parabolam. Quadratum autem ex DG rectangulo DS, propter ellipsin. Sed rectangulum DS rectangulo DC minus est. Quare quadratum ex DG minus erit quadrato ex Dν. Recta igitur DG minor quàm illa Dν; ac propterea, cùm punctum ν sit ad parabolam, (cujus in axe punctum D) punctum G intra parabolam erit. Eodemque modo ostendatur de alio quolibet ellipseos puncto, præter verticem communem A, intra parabolam illud esse. Quòd si manente parametro AC, axis ellipseos AB sensim augeatur, ambitus ellipseos paulatim dilatando, ductu quidem parabolæ interiorem se continebit; eum tamen, quo major axis fuerit, eo magis accedet; et, crescente infinitè axe, propiùs quidem quàm pro datâ aliquâ distantiâ. Congruunt igitur ultimò, et parabola figura ultima est ellipseos. Nam propter parallelas AC, DR, erit AC ad DR, vel AS, ut BA ad BD. Sed rectangulum DC est ad rectangulum DS ut AC ad AS. Quare BA erit ad BD ut rectangulum DC ad rectangulum DS, hoc est, ut quadratum ex Dν ad quadratum ex DG. Crescente autem axe AB, et manente abscissâ AD, rectæ BD ad majorem BA proportio perpetim fit major, usquedum illâ AB infinitè auctâ ipsam æqualium rationem, propiùs quàm pro datâ aliquâ differentiâ, assecuta fuerit. Crescente igitur axe ellipseos AB proportio quadrati ex DG ad quadratum è Dν continuò major fit, et æqualium rationem ultimò assequitur. Ipsæ igitur rectæ DG, Dν fiunt ultimò æquales, et punctum G ellipseos illud ν parabolæ sensim accedendo, ultimò attigerit. Simili modo aliud omne Ellipseos punctum, axe ejus in infinitum crescente, Parabolam ultimò deveniet.

6. Similibus prorsus argumentis efficere licet, Hyperbolam Parabolâ, cujus eadem parameter, quamque in vertice communi A contingit, exteriorem esse: eam tamen, axe transverso Ab infinitè aucto, propiùs accedere quàm pro datâ aliquâ distantiâ. Hisce verò illud etiam congruit, quòd si, reliquis manentibus, axis, literâ d designatus, infinitè usque increscere fingatur, æquatio ad ellipsin vel hyperbolam $y^2 = px \mp \frac{p}{d}x^2$, evanescente membro $\mp \frac{p}{d}x^2$, et ad nihilum ultimò redacto, in æquationem ad parabolam, $y^2 = px$, ultimò abierit.

7. Haud igitur nihil est quod dicunt Algebraici, cùm Parabolam pro Ellipsi vel Hyperbolâ haberi velint infinito axe. Nimirum, ut totius disputationis summam paucis complectar, trium illarum Sectionum Conicarum multa ita sunt communia, ut quicquid discriminis interlit, aut ex variâ axis magnitudine, aut ex situ ejus contrario natum sit. Si igitur hujusmodi aliquid, notis sibi consuetis, de utràque curvarum, Ellipsi vel Hyperbolâ, Algebra enunciaverit, illud ad alteram statim accommodatur, signo tantummodò axis, qui hyperbolæ transversus esse debet, quod quidem posituræ signum est non quantitatis, in contrarium mutato. Ad Parabolam verò idem accommodetur, si pro formulâ generali sumatur ea in quam ultimò illa abierit, axe ellipseos, vel hyperbolæ, modò hujus sit transversus, infinitè aucto. Hoc equidem principium, ut ad concinnandas formulas Algebraicas libens eo utar, utpote qui omnibus modis effugiendum putem computandi tædium, demonstrationibus tamen componendis minùs aptum judico. Quibus ut sua sive elegantia sive evidentia constet, ex eo potiùs deducendæ sunt, quod figura quæque proprium habeat, quàm ex similitudinibus quæ diversis intercedat. Quarum licet jucundissima et philosopho

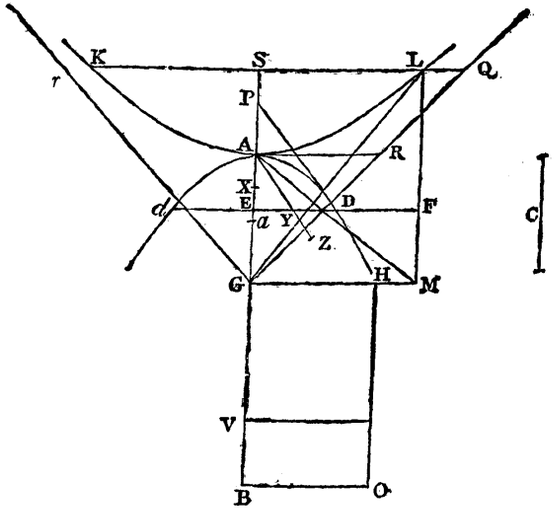
Numerus e Logarithmo. arithmeticæ progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in se continuò. Et hinc ex logarithmo dato potest numerus ei competens invenire.

8. Esto

dignissima sit contemplatio, utpote ex quâ id maximè percipiendum sit, quod quo magis quis perceperit, eo quidem acutior existimandus erit et *ingenio* pollentior, scilicet quàm sit unum illitâ omne quod verum est; eos tamen, quibus nimium illæ captari atque credi solent, sæpissimè fallunt. Nec mirum sanè. Cùm haud in aliâ re magis cernatur mentis humanæ imbecillitas, quàm in eo quòd rerum similitudines, quæ nullæ sunt, sæpissimè somniamus, quæ verè sunt eas ægrè cernimus.

8. Sed ut ad nostra revertamur; siquis, nullâ formulæ arcûs elliptici ratione habitâ, Parabolici longitudinem è naturâ ipsius parabolæ *definire velit*, is, ex eo quòd quadratum ordinatæ rectangulo *comprehenso* abscissâ ab axe et parametro æquale sit, subductis fluxionum calculis, in hanc æquationem incidet; designante nimirum literâ z arcum, y ordinatam, sive sinum arcûs rectum, p parametrum parabolæ: $\dot{z} = \frac{\dot{y}}{p}\sqrt{p^2+4y}$. Vel in hanc, $\dot{z} = \frac{\dot{x}}{z\sqrt{x}}\sqrt{p+4x}$: designante x abscissam ab axe. Hisce verò formulis, per radicum extractiones, in series infinitas resolutis, fluentium æstimationem per Regulam 3^m^. Analyst. per æquationes infinitas ineundo, formulas assequetur quas suprà exposuimus.

Cognatio Arcus Parab. 9. Cæterum ex hâc æquatione, $\dot{z} = \frac{\dot{y}}{p}\sqrt{p^2+4y}$, manifestâ fit cognatio illa, quam Arcubus Parabolicis cum Areis quibusdam Hyperbolicis intercedere, omnium credo primus Wallisius intellexit; quæ quidem talis est, ut Arcûs cujuslibet Parabolici dimensio ad quadraturam Hyperbolæ, et vicissim, revocari possit.



Sit parabola cujus axis recta infinita AB positione data, vertex, A, parameter data C. Sumatur in parabolâ punctum quodvis D. A puncto D in axem deducatur ad perpendiculum recta DE, et in ED, extrorsùm productâ, capiatur DF æqualis ordinatæ DE; ut sit EF duplo illius DE æqualis. In axe AB capiatur AG datæ C æqualis; eductâque ad perpendiculum rectâ GH, in eâ capiatur GH datæ etiam C æqualis. Semiaxe transverso GA, secundo GH, scribatur hyperbola æquilatera KAL. Per F ducatur FL, cum hyperbolæ axe transverso, GA, parallela; quæ hyperbolæ in L occurrat, axi ejus secundo in M. Ad ipsum semiaxem secundum, GH, applicetur rectangulum GO spatio hyperbolico AGML æquale. Dimidium lateris GE arcui AD æquale erit; vel, productâ DE usque dum parabolæ rursum in *d* occurrat, latus GE arcui DA *d*.

Cùm enim area AGML rectangulo GO sit æqualis, erunt etiam areæ illius et rectanguli fluxiones semper inter se æquales. (Geometr. Flux. Prop. 11.) Rectangula igitur LM × $\dot{GM}$, GH × $\dot{GB}$ inter se æqualia. Fluxio igitur rectæ GB est ad fluxionem rectæ GM ut LM ad GH. Ducatur recta DP, quæ parabolam in D contingat, axi verò ejus in P occurrat. Erunt EA, AP inter se æquales. (Hamilton.

8. Esto VDE *Quadratrix*, cujus vertex est V, existente A centro & AE semi-diametro circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: demissoque

Arcus et Area.

milton. Conic. Lib. 1. Prop. XLVII.) Quare EA semissis est rectæ EP, et EA ad EP ut ED ad EF. Jam verò cùm ED sit ad EA, ut GH ad ED (propter parabolam) et EA ad EP ut ED ad EF, erit ex æquo ED ad EP ut GH ad EF, vel GM: et quadratum ex ED ad quadratum ex EP ut quadratum ex GH ad quadratum ex GM. Invertendo et componendo, quadrata ex EP et ex ED simul sumpta ad quadratum ex ED, ut quadrata ex GM et ex GH simul sumpta ad quadratum ex GH. At verò quadratis ex EP et ex ED simul sumptis quadratum ex DP est æquale (propter angulum ad E trianguli PED rectum). Et quadratis ex GM et ex GH simul sumptis quadratum ex ML est æquale (propter hyperbolam æquilateram.) (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XXXII.) Quare quadratum ex DP erit ad quadratum ex DE, ut quadratum ex ML ad quadratum ex GH: quare et recta DP ad rectam DE ut recta ML ad rectam GH. Sed ut recta DP ad rectam DE ita est fluxio arcûs AD ad fluxionem rectæ DE. (Introduct. Quadrat. Curv. § 4.) Et ostensum est, fluxionem rectæ GB esse ad fluxionem rectæ GM ut recta ML ad rectam GH. Erit igitur fluxio arcûs AD ad fluxionem rectæ ED ut fluxio rectæ GB ad fluxionem rectæ GM. Permutando, fluxio arcûs AD ad fluxionem rectæ GB ut fluxio rectæ ED ad fluxionem rectæ GM. Rectæ autem ED ad rectam GM ratio data est, illa utique quam unitas ad binarium habet. (ex construct.) Fluxionis igitur arcûs AD ad fluxionem rectæ GB eadem data ratio, unitatis ad binarium, erit. Et cùm hæc constans sit fluxionum ratio, fluentium etiam, curvæ AD rectæquæ GB, cùm simul illæ à nihilo generari inceperint, eadem inter ipsas ratio erit. (Geom. Flux. Prop. IV.) Arcus igitur AD rectæ GB semissi; et arcus DA*d* rectæ GB æqualis erit. Q. E. D.

Cum Area Hyperb.

10. Ex hisce statim enascitur problematis, de longitudine Arcûs Parabolici inveniendâ, compositio elegantissima Cotesii. Ea verò est hæc.

MENSURA ARCUS PARABOLICI COTESIANA.

Inveniatur umbilicus parabolæ *d*AD qui sit X. A puncto A ducatur in ordinatam ED, recta AY, quæ ordinatam illam mediam dividat. Et rectæ AY addatur YZ, quæ æqualis sit ejus rationis, pro modulo, AX, logarithmo, quam triangulî AYE latera duo AY, AE, simul sumpta, ad tertium EY habent. Recta AZ arcui AD æqualis erit. (Harmon. Mensurar. Pars 1. Scholion. Generale.) Hujus demonstrationem, quam nullam quidem ipse Cotesius attulit, Theorema nostrum faciliimam suppeditat.

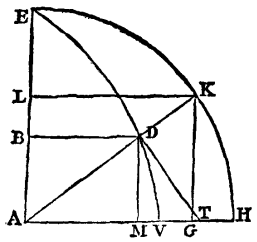
Jungantur enim GL, AM. Ad rectam GH applicetur rectangulum HV triangulo GML æquale. Sint GR, *gr* hyperbolæ KAL asymptotæ; per puncta A, L ducantur rectæ AR, LQ cum semiaxe secundo GH parallelæ; asymptotarum alteri, in punctis R, Q occurrentes. Harum illa AR hyperbolam in A continget; hæc LQ, in alio ei puncto præter L occurret. Sit occursus ille alter K. Eadem verò LQ axi transverso GA in S occurrat. Recta denique AG in puncto *a* media sit divisa. Itaque cùm DP sit ad DE ut ML ad GH (id enim in demonstrando theoremate novissimo ostendimus,) rectangula GH × DP, DE × ML erunt inter se æqualia. Rectangulum verò DE × ML triangulo GML est æquale, cùm utrumque dimidium sit rectanguli GL. Rectangulum igitur GH × DP triangulo GML est æquale. Sed eidem triangulo rectangulum HV est æquale. (Ita factum enim.) Rectangula igitur GH × DP, et HV, sive GH × GV, sunt inter se æqualia. Rectæ igitur DP, GV inter se æquales. Cùm verò rectæ EP, ED in punctis, A, Y, similiter sint divisæ, media namque earum utraque dividitur, rectæ AY, PD parallelæ erunt, et triangula EPD, EAY inter se similia. Quare AY erit ad PD ut EA ad EP; hoc est, AY semissi rectæ PD, ac propterea semissi rectæ GV, æqualis erit.

Rursùm cùm rectangulum GO spatio hyperbolico AGML sit æquale (ita enim factum est) et rectangulum HV triangulo GML (nam id quoque factum) erit rectangulum VO æquale sectori hyperbolico AGL; hoc est, logarithmo rationis rectæ AR ad LQ pro modulo $\frac{1}{2}GH^2$, sive GH × *Ga*. Harum verò trium KQ, AR, LQ continua est proportionum similitudo. (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XXXVII.) Rationis igitur illius quam KQ habet ad AR, idem erit, atque ejus quam AR habet ad LQ, logarithmus. Rectangulum igitur VO logarithmus est rationis quam KQ habet ad AR pro modulo GH × *Ga*. Recta verò AR semiaxi secundo GH est æqualis. (Hamilton. Lib. 1. Prop. XXXVIII.) rectaque KQ duabus ML, MG simul sumptis est æqualis. Nam, propter hyperbolam æquilateram, triangulum rectangulum QSG est isosceles; illi utique RAG simile. Sunt igitur QS, SG, ac proinde

QA,

QUADRATRICIS.

demiſſoque ad AE perpendiculo quovis DB, & actâ quadratricis tangente DT occurrente axi ejus AV in T: dic AV=a, & AB=x; eritque DB=$a-\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{45a^3}-\frac{2x^6}{945a^5}-$ &c. Et VT=$\frac{x^2}{3a}+\frac{x^4}{15a^3}+\frac{2x^6}{189a^5}$ + &c. Et Area AVDB=$ax-\frac{x^3}{9a}-\frac{x^5}{225a^3}-\frac{2x^7}{6615a^5}-$ &c. Et Arcus VD=$x+\frac{2x^3}{27a^2}+\frac{14x^5}{2025a^4}+\frac{604x^7}{893025a^6}+$ &c (r). Unde vicissim, ex dato BD, vel VT, aut areâ AVDB, arcuve VD, per resolutionem affectarum æquationum erui potest x, seu AB.



9. Esto denique AEB *Sphæroides*, revolutione ellipseos AEB circa axem AB genita, & secta planis quatuor, AB per axem transeunte, DG

ARC PARAB. COTES.

QS, ML, inter se æquales: et propter rectam LK ad axem transversum ordinatim applicatam, KS, LS, ac proinde KS, GM inter se æquales sunt. E duabus igitur, KS, SQ, composita illa KQ, duabus ML, MG simul sumptis, æqualis erit. Rectangulum igitur VO illius utique rationis est logarithmus, pro modulo HG×Ga, quam duæ ML, MG simul sumptæ ad GH habent; vel rationis ejus quam ad GA habent duæ MA, MG simul sumptæ. (Sunt enim AG, GH inter se æquales, factæ enim; et propter hyperbolam æquilateram, æquales etiam ML, MA.) Sed recta VB est ad rectam Ga ut rectangulum VO, vel GH×VB, ad rectangulum GH×Ga. Quare cùm rectangulum VO logarithmus sit rationis quam duæ MA, MG simul sumptæ habent ad AG, pro modulo rectangulo GH×Ga, erit recta VB ejusdem rationis logarithmus pro modulo rectâ Ga.

Porrò, cùm ED sit ad EP ut GH ad GM, id enim in demonstrando theoremate noviſſimo ostendimus, erit etiam ED ad EP, ut AG ad GM. Ac proinde EY ad EA ut AG ad GM. Anguli vero YEA, AGM inter se æquales sunt; rectus enim uterque. Triangula igitur YEA, AGM inter se similia; ac propterea duæ AY, AE simul sumptæ erunt ad YE, ut duæ illæ AM, MG simul sumptæ ad AG. Idem igitur utriusque rationis logarithmus erit. Rationis autem illius quam duæ AY, AE simul sumptæ habent ad EY, recta YZ logarithmus est pro modulo rectâ AX. Ita factum enim. Quare et illius quam duæ MA, MG simul sumptæ ad AG habent, erit eadem YZ pro modulo utique suo AX logarithmus. Ejusdem vero rationis recta VB logarithmus pro modulo rectâ Ga. Id enim ostensum. Sed datæ alicujus rationis, pro modulis diversis, logarithmi sunt inter se sicut moduli. Recta igitur VB ad rectam YZ erit ut Ga ad AX. Sed AX semissis est ipsius Ga. Nempe cùm parametri parabolæ hæc Ga semissis, illa AX pars quarta fit. Recta igitur YZ rectæ VB semissis. Sed ostensa est AY semissis rectæ GV. Recta igitur AZ, è duabus AY, YZ composita, rectæ GB, è duabus GV, VE, compositæ, semissis erit. Sed arcus parabolicus AD ejusdem GB est semissis. Recta igitur AZ arcui AD æqualis erit. Q. E. D.

Hujus problematis, de arcu parabolico dimetiendo, alia est compositio Hugenii; (De Horolog. Oscillatorio. Pars. 3. inter additamenta. Prop. 9.) quæ tamen Cotesianæ multùm elegantiâ et simplicitate cedit.

ARC. ET AREA

(r) PONATUR AE=1. AV=a. AB=x. E naturâ Quadratricis erit EA : AV=arc. KH : x. Quare arc. KH=$\frac{x}{a}$.

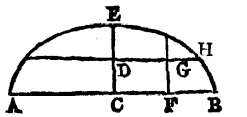
Quare etiam GK (sive sinus arcûs HK)=$\frac{x}{a}-\frac{x^3}{6a^3}+\frac{x^5}{120a^5}-\frac{x^7}{5040a^7}+$,

$GK^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{3a^4}+\frac{2x^6}{45a^6}-\frac{x^8}{315a^8}+$,

$AG=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{3a^4}-\frac{2x^6}{45a^6}+\frac{x^8}{315a^8}+}=1-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^4}{24a^4}-\frac{x^6}{720a^6}+$.

Propter

DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem, & FG parallelo CE: sitque recta CB=a, CE=c, CF=x, & FG=y. Et SEGMENTUM SPHÆROID. sphæroideos segmentum CDGF dictis quatuor planis comprehensum, erit (r) $+2cxy-\frac{x}{3c}y^3-\frac{x}{20c^3}y^5-\frac{x}{56c^5}y^7-\frac{5x}{576c^7}y^9-$ &c.
$-\frac{cx^3}{3a^2}-\frac{x^3}{18ca^2}-\frac{x^3}{40c^3a^2}-\frac{5x^3}{336c^5a^2}-$ &c.
$-\frac{cx^5}{20a^4}-\frac{x^5}{40ca^4}-\frac{3x^5}{160c^3a^4}-$ &c.
$-\frac{cx^7}{56a^6}-\frac{5x^7}{336ca^6}-$ &c.
$-\frac{5cx^9}{576a^8}-$ &c.
$-$ &c.



Ubi

Propter triangula AKG, ADM similia, KG : GA = DM : MA = AB : BD. QUADRATRICIS

Ergo BD=$\frac{AB\times GA}{GK}=\frac{x-\frac{x^3}{2a^2}+\frac{x^5}{24a^4}-\frac{x^7}{720a^6}+,}{\frac{x}{a}-\frac{x^3}{6a^3}+\frac{x^5}{120a^5}-\frac{x^7}{5040a^7}+,}=a-\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{45a^3}-\frac{2x^6}{945a^5}$.

Hinc area ABDV=$ax-\frac{x^3}{9a}-\frac{x^5}{225a^3}-\frac{2x^7}{6615a^5}-$,

Præterea $\dot{DB}=\frac{2x\dot{x}}{3a}+\frac{4x^3\dot{x}}{45a^3}+\frac{12x^5\dot{x}}{945a^5}+$,

Sed $\dot{AB}:\dot{DB}=DM:MT$. Ergo $MT=\frac{\dot{DB}\times DM}{\dot{AB}}=\frac{\dot{DB}\times x}{\dot{x}}$. Ergo $MT=\frac{2x^2}{3a}+\frac{4x^4}{45a^3}+\frac{12x^6}{945a^5}+$.

Et MV=$a-DB=\frac{x^2}{3a}+\frac{x^4}{45a^3}+\frac{2x^6}{945a^5}+$. Hinc VT=$\frac{x^2}{3a}+\frac{x^4}{15a^3}+\frac{2x^6}{189a^5}+$.

Quadratum ex $\dot{DB}=\dot{x}\dot{x}\times\left|\frac{2x}{3a}+\frac{4x^3}{45a^3}+\frac{12x^5}{945a^5}+\right|^2=\dot{x}\dot{x}\times\frac{4x^2}{9a^2}+\frac{16x^4}{135a^4}+$.

Quare $\dot{DB}^{-2}+\dot{AB}^{-2}=\dot{x}\dot{x}\times 1+\frac{4x^2}{9a^2}+\frac{16x^4}{135a^4}+$

Et $\sqrt{\dot{DB}^{-2}+\dot{AB}^{-2}}=\dot{x}\times 1+\frac{2x^2}{9a^2}+\frac{14x^4}{405a^4}+$

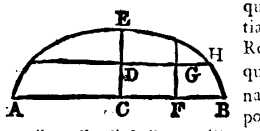
Hujus fluens=VD=$x+\frac{2x^3}{27a^2}+\frac{14x^5}{2025a^4}+$.

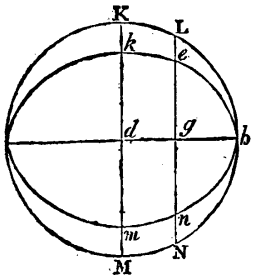
(r) FIGURA Sphæroides centro c, circumactu ellipseos cujus semiaxes CB, CE, circa axem AB, genera- SEGMENT. nerata, secari intelligatur quatuor planis. Quorum tribus positione datis, fit quartum mobile. SPHÆROID. Ex tribus positione datis, duo per centrum transeant; atque horum alterum quidem per axem AB, quod superficiem sphæroideos secando ellipsin effecerit generanti similem et æqualem. Alterum verò è duobus per centrum, illud ipsum fit, super quo axis AB ad perpendiculum est erectus; quod superficiem secando circulum effecerit, illum ipsum utique quem planetæ spheroideos, circa axem AB versatilis, Astronomi Æquinoctialem vocarent. Cum hoc verò reliquum ex planis tribus positione datis parallelum fit; ut, superficiem secando, illud etiam circulum efficiat, minorem scilicet, cum æquinoctiali parallelum. Quartum denique ex iis quibus sphæroidem secari intelligimus, quod mobile posuimus, eâ quidem lege fit mobile, ut cum illo, quod per axem AB ductum est, semper parallelum maneat. Ex quo fiet, ut quocunque loco id consistat, superficiem sphæroideos secando, ellipsin effecerit, magnitudine quidem in aliis à centro figuræ sphæroideos distantiis aliam, specie verò generantis semper similem. Hisce positis, magnitudinem segmenti figuræ

SEGMENTUM SPHÆROID. Ubi numerales coefficientes ſupremorum terminorum (2, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{20}$, $-\frac{1}{56}$, $-\frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur multiplicando primum

SEGMENTUM figuræ ſphæroideos, quatuor illis planis intercepti, generaliter definire oportet, pro omni ſitu plani mobilis.

Hunc igitur in finem puta figuram ſphæroidem jam quintùm ſecari, plano quidem per axem AB, quod ſuper illo per axem AB priùs ducto ad perpendiculum erectum ſit. Hoc igitur planum, ſicut omnia quæ per axem AB ducantur, ſuperficiem ſphæroideos ſecando, ellipſin effecerit, generanti ſimilem et æqualem, quam ellipſis quidem AEB lineationis Newtonianæ repreſentat. Idem verò planum circulum æquinoctialem ſecundum rectam CD ſecet; circulum minorem cum æquinoctiali parallelum, ſecundam rectam FG; planum denique mobile ſecundum DG. Itaque rectæ CF, DG, quas duo plana parallela tertium ſecando effecerint, inter ſe parallelæ erunt. (Elem. XI. 16.) Simili ratione duæ CD, FG erunt inter ſe parallelæ. Figura igitur CFGD parallelogramma erit. Angulus autem FCD eſt rectus (per Elem. XI. Def. 3.) Nempe cùm recta CD ſit in plano circuli æquinoctialis, ſuper quo axis AB ad perpendiculum erectus eſt. Quare rectangula eſt figura parallelogramma CFGD. Rectanguli autem CFGD latera CF, DG magnitudine data ſunt, propter rectas CD, FG poſitione datas, quibus illæ CF, DG ad perpendiculum ſunt interpoſitæ. Reliqua verò rectanguli latera, CD, FG magnitudine mutabilia ſunt, nimirum cùm CD, et illi æqualis FG, ſit plani mobilis à ſphæroideos centro mutabilis diſtantia. Rectæ CD, DG ellipſin AEB productæ in punctis E, H, ſecent. Recta CE ſemiaxis erit ellipſeos AEB, cujus ſemiaxis alter eſt CB, quem recta CE, in centro ſcilicet, ad perpendiculum inſiſtit. Exponatur recta *db* rectæ DH æqualis. Huic ad perpendiculum apponatur *dk*, ad quam *db* rationem habeat quam CB ad CE. Et ſemiaxibus *db*, *dk* ſcribatur ellipſis; quæ illi utique ſimilis et æqualis erit, quam planum mobile, ſi ad diſtantiam CD à centro ſphæroideos id conſiſterit, ſuperficiem ſecando, effecerit. Et ſi in *db* capiatur *dg* rectæ DG æqualis, et à puncto *g* educatur ad perpendiculum recta *gl*, quæ ellipſin *hkn* in *l* ſecet; tum ſi producantur *kd*, *lg*, uſquedum ellipſin utraque rurſum ſecet, hæc in *n*, illa in *m*, area *kmnl* æqualis erit ellipſeos, quam planum mobile ſuperficiem ſphæroideos ſecando effecerit, ſegmento; illi inquam hujus ellipſeos ſegmento, quod duobus planis parallelis, æquinoctialis circuli alteriuſque minoris, interceptum eſt, iſta area *kmnl* æqualis erit. Quare fluxio ſolidi, cujus magnitudo exquirenda eſt, exponetur per ſolidum quoddam, cujus altitudo erit linea recta, ſive data, ſive mutabilis, per quam fluxio rectæ CD exponitur, baſes autem parallelæ, area mutabilis *kmnl*, alteraque huic ipſi ſimilis et æqualis: cujus quidem ſolidi hoc erit ſymbolum algebraicum, $Z \times \dot{y}$; deſignante literâ Z aream mutabilem *kmnl*, literâ $\dot{y}$ rectam mutabilem CD. Ad fluentis igitur æſtimationem illud opus eſt, ut litera Z in ſeries infinitas reſolvatur à radice *y* procreatas.





Hunc in finem deſignentur rectæ datæ CB, CE, CF, literis a, c, x. Centro *d* radio *db* ſcribatur circulus, qui rectis *mk*, *ln*, in utramque partem productis, in punctis K, M, L, N occurrat. Propter ellipſin AEB, quadratum ex DH erit ad differentiam quadratorum ex CE, CD, ut quadratum ex c ad quadratum ex CE. Hoc eſt $DH^2 : c^2 - y^2 = a^2 : c^2$. Quare DH, vel *db*, $= \frac{a}{c}\sqrt{c^2-y^2}$.

Hinc ſi formula Areæ Circularis, quæ à Newtono in Analyſi per Æquationes Infinitas tradita eſt, (Cap. III. §. 6.) cum binario multiplicetur, tum in formulam multiplicatione illâ factam ſi pro a ſubſtituatur $\frac{a}{c}\sqrt{c^2-y^2}$, veniet formula generalis Areæ Circularis KLMN pro radio mutabili DH, vel *db*. Nempe

$$\text{KLMN} = \frac{2a}{c}\sqrt{c^2-y^2}.x - \frac{c}{3a\sqrt{c^2-y^2}}x^3 - \frac{c^3}{20.a^3.\overline{c^2-y^2}^{\frac{3}{2}}}x^5 - \frac{c^5}{56a^5.\overline{c^2-y^2}^{\frac{5}{2}}}x^7 - ,$$

Area verò Circularis KLMN ad Aream Ellipticam *klmn* rationem habet eam, quam *db* ad *dk*, ſive eam quam CB ad CE (per Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor. H.I.) nempe cùm hæc conſtans ſit rectarum lg, $\dot{l}g$ inter ij ſes ratio, in omni magnitudine abſciſſæ *dg*. Quare KLMN : $Z = a : c$. Ergo $Z =$

mum coefficientem 2 continuò per terminos hujus progreſſionis SPHÆROID. $-\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{1\times3}{4\times5}$, $\frac{3\times5}{6\times7}$, $\frac{5\times7}{8\times9}$, $\frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum

$$Z = \frac{c}{a}\,\text{KLMN} = 2\sqrt{c^2-y^2}.x - \frac{c^2}{3a^2.\sqrt{c^2-y^2}}x^3 - \frac{c^4}{20.a^4.\overline{c^2-y^2}^{\frac{3}{2}}}x^5 - \frac{c^6}{56a^6.\overline{c^2-y^2}^{\frac{5}{2}}}x^7 - , \qquad \text{SPHÆROID.}$$

Itaque, ſi pro poteſtatibus hujus binomii, c^2-y^2, quæ indicibus $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -$, deſignantur, ſubrogentur ſeries, in quas poteſtates illæ, per formulam generalem à Newtono in Excerpto Primo traditam, ſunt reſolvendæ; reſolvetur quidem Z in ſeries infinitas à radice *y* procreatas, vel potiùs à geminâ radice *x* et *y*. Etenim licet *x* datam poſuimus, quo calculi ſcilicet rederentur leviores, reverâ tamen *x* æquè atque *y* indefinita cenſenda eſt, cùm utraque pro arbitrio ſumenda ſit. Majoris autem evidentiæ gratiâ calculos ſubduco.

$$\sqrt{c^2-y^2} = c - \frac{y^2}{2c} - \frac{y^4}{8c^3} - \frac{y^6}{16c^5} - \frac{5y^8}{128c^7} - ,$$

$$\overline{c^2-y^2}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c} + \frac{y^2}{2c^3} + \frac{3y^4}{8c^5} + \frac{5y^6}{16c^7} + \frac{35y^8}{128c^9} + ,$$

$$\overline{c^2-y^2}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{c^3} + \frac{3y^2}{2c^5} + \frac{15y^4}{8c^7} + \frac{35y^6}{16c^9} + \frac{315y^8}{128c^{11}}$$

$$\overline{c^2-y^2}^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{c^5} + \frac{5y^2}{2c^7} + \frac{35y^4}{8c^9} + \frac{105y^6}{16c^{11}} + \frac{1155y^8}{128c^{13}}$$

$$\overline{c^2-y^2}^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{c^7} + \frac{7y^2}{2c^9} + ,$$

Hinc $2\sqrt{c^2-y^2}.x = 2cx - \frac{y^2}{c}x - \frac{y^4}{4c^3}x - \frac{y^6}{8c^5}x - \frac{5y^8}{64c^7}x$

$$\frac{c^2}{3a^2\sqrt{c^2-y^2}}x^3 = \frac{c}{3a^2}x^3 + \frac{y^2}{6a^2c}x^3 + \frac{y^4}{8a^2c^3}x^3 + \frac{5y^6}{48c^5a^2}x^3 + \frac{35y^8}{384a^2c^7}x^8 + ,$$

$$\frac{c^4}{20a^4.\overline{c^2-y^2}^{\frac{3}{2}}}x^5 = \frac{c}{20.a^4}x^5 + \frac{3y^2}{40a^4c}x^5 + \frac{3y^4}{32.a^4c^3}x^5 + \frac{7y^6}{64a^4c^5}x^6 + \frac{63y^8}{512a^4c^7}x^8 + ,$$

$$\frac{c^6}{56a^6.\overline{c^2-y^2}^{\frac{5}{2}}}x^7 = \frac{c}{56a^6}x^7 + \frac{5y^2}{112a^6c}x^7 + \frac{5y^4}{64a^6c^3}x^7 + \frac{15y^6}{128c^5a^6}x^7 + \frac{165y^8}{1024a^6c^7}x^7 + ,$$

$$\frac{5c^8}{576a^8.\overline{c^2-y^2}^{\frac{7}{2}}}x^9 = \frac{5c}{576a^8}x^9 + \frac{35y^2}{1152a^8c}x^9 + ,$$

Horum ordini ſummo inferiorum omnium ordinum ſummas auferendo, conficietur

$$\begin{aligned} Z = {} & 2cx - \frac{x}{c}y^2 - \frac{x}{4c^3}y^4 - \frac{x}{8c^5}y^6 - \frac{5x}{64c^7}y^8 - \frac{7x}{128c^9}y^{10} - , \\ & - \frac{cx^3}{3a^2} - \frac{x^3}{6a^2c}y^2 - \frac{x^3}{8a^2c^3}y^4 - \frac{5x^3}{48c^5a^2}y^6 - \frac{35x^3}{384a^2c^7}y^8 - , \\ & - \frac{cx^5}{20.a^4} - \frac{3x^5}{40a^4c}y^2 - \frac{3x^5}{32a^4c^3}y^4 - \frac{7x^5}{64a^4c^5}y^6 - , \\ & - \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{112a^6c}y^2 - \frac{5x^7}{64a^6c^3}y^4 - , \\ & - \frac{5cx^9}{576a^8} - \frac{35x^9}{1152a^8c}y^2 - , \\ & - \frac{7cx^{11}}{1408a^{10}} - , \end{aligned}$$

Nimirum ordo quiſque eo uſque produci debet, ut in membro cujuſque extremo indices literarum *x*, et *y*, ſimul ſumpti, eundem numerum conficiant. Sicut hic factum eſt. Etenim in membro extremo ordinis ſummi, index literæ *x* eſt 1, literæ *y*, 10; qui numeri ſimul ſumpti 11 conficiunt. In membro itidem extremo ordinis proximè inferioris, index literæ *x* eſt 3, literæ *y*, 8; atque hi numeri ſimul ſumpti rurſum 11 conficiunt. In membro tertii ordinis extremo index literæ *x* eſt 5, literæ *y*, 6; et hi numeri ſimul ſumpti 11 reddunt. Sic in ordinibus etiam inferioribus,

EXCERPTUM QUARTUM.

terminorum in unâquâque columnâ deſcendentium in infinitum producuntur multiplicando continuò coefficientem ſupremi termini in primâ columnâ per eandem progreſſionem, in ſecundâ autem per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, &c. in tertiâ per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}$, $\frac{5\times3}{4\times5}$, $\frac{7\times5}{6\times7}$, $\frac{9\times7}{8\times9}$, &c. in quartâ per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}$, $\frac{7\times3}{4\times5}$, $\frac{9\times5}{6\times7}$, &c. in quintâ per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}$, $\frac{9\times3}{4\times5}$, $\frac{11\times5}{6\times7}$, &c. Et ſic in infinitum.

10. Et eodem modo ſegmenta aliorum ſolidorum deſignari, & valores eorum aliquando commodè per ſeries quaſdem numerales in infinitum produci poſſunt.

11. Ex his videre eſt, quantum fines analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes ampliantur: quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pæne dixerim problemata (ſi numeralia *Diophanti* & ſimilia excipias) ſeſe extendit.

12. Non tamen omninò univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam methodos eliciendi ſeries infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad ſeries infinitas, per diviſionem vel

membrorum cujuſque extremorum indices ſimul ſumpti, 7 et 4, 9 et 2, 11 & 0, numerum eundem 11 reddunt. Hoc autem idcirco diligentiùs expoſuimus, quia in formulis hujuſmodi condendis, quæ ex ſeriebus infinitis, numero infinitis, è duplici radice procreatis conflandæ ſunt, idem ſemper tenendum eſt; nempe ut ſeries omnes ſimiliter producantur. Similiter autem produci intelligo, quarum in extremis membris indices radicum duarum, ſimul ſumpti, eundem numerum, vel eandem fortè quantitatem fractam conficiunt.

Itaque quantitate Z in ſeries infinitas, quas modò expoſuimus, reſolutâ, multiplicentur ſeries illæ omnes in fluxionem $\dot{y}$.

Ita veniet

$$Z\dot{y} = 2cx - x - \frac{x^3}{4} - \frac{x^9}{8}$$
$$- \frac{cx^3}{3a^2} - \frac{x^3}{6a^2} - \frac{x^3}{8a^2} - \frac{5x^3}{48a^2}\ y^6\dot{y}$$
$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{3x^5}{40a^4} \times \frac{y^2\dot{y}}{c} - \frac{3x^5}{32a^4} \times \frac{y^4\dot{y}}{c^3} - \frac{7x^5\dot{y}}{64a^4}$$
$$- \frac{cx^7}{56a^6} \times\dot{y} - \frac{5x^7}{112a^6} - \frac{5x^7}{64a^6} -,$$
$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - \frac{35x^9}{1152a^8} -,$$
$$- \frac{7cx^{11}}{1408a^{10}} -,$$

Cujus

vel extractionem radicum ſimplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa reductionem infinitarum ſerierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam pareiùs ſcribo, quòd hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cœperint, adeo ut ab iiſdem jam per quinque ferè annos abſtinuerim. CONSTRUCT. MECHANIC.

13. UNUM tamen addam: quòd poſtquam Problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, poſſint inde variæ Approximationes, in uſum Mechanicæ, nullo ferè negotio formari; quæ, per alias methodos quæſitæ, multo labore temporiſque diſpendio conſtare ſolent (t).

14. Cujus rei exemplo eſſe poſſunt tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadraturâ circuli. Nam, ut ex datâ arcûs chordâ, A, & demidii arcûs chordâ, B, arcum illum proximè aſſequaris; finge arcum illum eſſe z, & circuli radium r; juxtaque ſuperiora erit A (nempe duplum ſinûs dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4\times6r^2} + \frac{z^5}{4\times4\times120r^4} -$ &c (u). Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times16\times6r^2} + \frac{z^5}{2\times16\times16\times120r^4} -$ &c (x). Duc jam B in numerum fictitium n, & à producto aufer A, & reſidui ſecundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2\times16\times6r^2} + \frac{z^3}{4\times6r^2}$,) eo ut evaneſcat, pone $= 0$; indeque emerget $n=8$, et erit $8B-A = 3z* - \frac{3z^5}{64\times120r^4}$ + &c. hoc eſt $\frac{8B-A}{3} = z$; errore tantùm exiſtente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in exceſſu (y). Quod eſt Theorema *Hugenianum* (z).

Inſuper,

Cujus fluens per formulam exponetur ex ſeriebus infinitis, numero infinitis, conflatam, qualis à Newtono allata eſt.

(t) Confer Geom. Analyt. C. XI. Sect. 1.

(u) In formulam utique generalem ſinûs ex arcu ſuprà §2. traditam ſi pro illis z, z^3, z^5, z^7, hæc $\frac{1}{2}z$, $\frac{z^3}{8}$, $\frac{z^5}{32}$, $\frac{z^7}{128}$ ordine ſubſtituantur, veniet ſinûs dimidii arcûs formula generalis; $\frac{1}{2}z - \frac{z^3}{8\times6r^2} + \frac{z^5}{2\times16\times120r^4} -$; cujus membra omnia cum binario ſi multiplicaveris, veniet $z - \frac{z^3}{4\times6r^2} + \frac{z^5}{4\times4\times120r^4} -$, $= A$, atque hæc Chordæ quidem ex arcu Formula generalis erit.

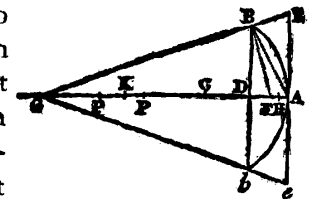
(x) Hanc æquationem ita obtinebis, ſi in formulam generalem chordæ ex arcu modò inventam, pro illis z, z^3, z^5, z^7, hæc $\frac{z}{2}$, $\frac{z^3}{8}$, $\frac{z^5}{32}$, $\frac{z^7}{128}$ ordine ſubſtitueris.

(y) In defectu potiùs; nempe rectæ eo modo inventæ arcubus minores ſunt: ſicut rectè ſtatuit Hugenius.

(z) Hugen. de Circuli Magnitudine inventâ, Prop. XII.

EXCERPTUM QUARTUM.

15. Insuper, si in arcûs, B*b*, sagittâ AD indefinitè productâ, quæratur punctum G, à quo actæ rectæ, GB, G*b*, abscindant tangentem E*e* quàm proximè æqualem arcui ifti: esto circuli centrum C, diameter AK=*d*, & sagitta AD=*x*: et erit



DB $(=\sqrt{dx-x^2}) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}}$ - &c. Et AE $(=AB)=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ $+ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ + &c (aa). Et AE − DB : AD :: AE : AG. Quare AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d}$ − vel + &c (bb). Finge ergo AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$; et viciſſim erit DG $(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x)$: DB :: DA : AE − DB. Quare AE − DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Adde DB; & prodit AE $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Hoc aufer de valore ipſius AE ſuprà habito, & reſtabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ + vel − &c. Quare in AG, cape AH quintam partem DA, et KG=HC, et actæ GBE, G*be* abſcindent tangentem E*e* quàm proximè æqualem arcui B*Ab*; errore tantùm exiſtente

(aa) Per formulam ſuprà traditam § 1. arcûs ex ſinu verſo. Quòd ſi huic æquationi prior dematur, pars ſcilicet parti, hæc tertia veniet AE − DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{28d^{\frac{5}{2}}}$ +,

(bb) Nempe ex hâc analogiâ AE − DB:AD = AE:AG, efficitur AG $= \frac{AD \times AE}{AE - DB}$.

Sed AD × AE $= x \times AE = x \times d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}$ +,

Et AE − DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{28d^{\frac{5}{2}}}$ +,

Quare AG $= \left\{ \frac{x \times d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} +,}{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} +,} = \frac{d + \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{40d} + \frac{5x^3}{112d^2} +,}{\frac{2}{3} + \frac{x}{5d} + \frac{3x^2}{28d} +,} \right.$

Unde diviſione peractâ veniet AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d}$ − vel +,

(cc) Nimirum ſi capiatur AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d}$, ablatâ AK $= d$, relinquetur KG $= \frac{1}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d} =$ CH $- \frac{12x^2}{175d}$. Sed $\frac{12x^2}{175d} = \frac{1}{5}x \times \frac{4}{5}x \times \frac{1}{7d} = \frac{3AH \times DH}{7AK}$.

(dd) Analyſ. per Æquationes numero terminorum Infinitas. Cap. III. § 7.

(ee) Immò errore hujus ferè duplo, id quod ex ſequenti computatione manifeſtum fit.

$\frac{2}{3}$ AB

iſtente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ + vel − &c. multo minore ſcilicet quàm in Theoremate *Hugenii*. Quòd ſi fiat 7 AK : 3 AH :: DH : *n*; et capiatur KG=CH−*n*, erit error adhuc multo minor (cc). CONSTRUCT. MECHANIC.

16. Atque ita, ſi Circuli ſegmentum aliquod B*Ab* per Mechanicam deſignandum eſſet: primò reducerem aream iſtam in infinitam ſeriem, puta hanc; B*bA* $= \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ − &c (dd). Dein quærerem conſtructiones Mechanicas, quibus hanc ſeriem proximè aſſequerer: cujuſmodi ſunt hæ. Age rectam AB, et erit ſegmentum B*bA* $= \frac{2}{3}$AB + BD × $\frac{4}{5}$AD proximè; exiſtente ſcilicet errore tantùm $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx}$ + &c. in defectu (ee): vel proximiùs, erit ſegmentum illud (biſecto AD in F, & rectâ actâ BF) $= \frac{4BF + AB}{15} \times 4AD$; exiſtente errore ſolummodo $\frac{x^3}{560d^2}\sqrt{dx}$ + (ff) &c. qui ſemper minor erit quàm $\frac{1}{1500}$ totius ſegmenti, etiamſi ſegmentum illud ad uſque ſemicirculum augeatur.

17. Sic et in Ellipſi B*Ab*, [*vid. fig. præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape PG $= \frac{1}{2}$AP + $\frac{19AK - 21AP}{10AK} \times$ AD. In Hyperbolâ verò, cape PG $= \frac{1}{2}$AP + $\frac{19AK + 21AP}{10AK} \times$ AD (gg). Et acta

$\frac{2}{3}$ AB $= \frac{2}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$

BD $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}}$ −,

$\frac{2}{3}$AB + BD $= \frac{5}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}}$ −,

$\frac{4}{3}$AD $= \frac{4}{3}x$

$\frac{2}{3}$AB + BD × $\frac{4}{3}$AD $= \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{10d^{\frac{3}{2}}}$ −,

Area B*b*A $= \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}}$ −,

} Differentia $= \frac{1}{10} - \frac{1}{14}\left|\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{2}{70}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}}$

(ff) Errore rurſum duplo

Nempe $BF^2 = AB^2 - AF^2 - \overline{2DF \times FA} = AB^2 - 3AF^2 = dx - \frac{3}{4}x^2$

BF $= \sqrt{dx - \frac{3}{4}x^2} = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{128d^{\frac{3}{2}}} - \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{1024d^{\frac{5}{2}}}$ −,

4BF $= 4d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{3}{2}}} - \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{5}{2}}}$ −,

AB $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$

4BF + AB $= 5d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{3}{2}}} - \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{5}{2}}}$ −,

$\frac{4AD}{15} = \frac{4x}{15}$

$\frac{4BF + AB}{15} \times 4AD = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} - \frac{9x^{\frac{9}{2}}}{64 \times 5d^{\frac{5}{2}}}$

EXCERPTUM QUARTUM.

acta recta GBE abscindet tangentem AE quàm proximè æqualem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo arcus ille non sit nimis magnus (hh).

Et

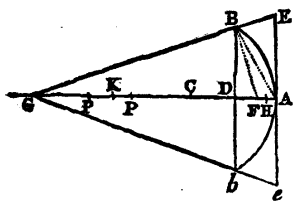
$$\text{Area } B\beta A = \tfrac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} -$$

$$\text{Error} = \overline{\tfrac{3}{40} - \tfrac{1}{14}}\left|\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}}\right. = \frac{x^3}{280d^2}\sqrt{dx}$$

2. CÆTERUM viam investigandi generalem, quâ hæc et hisce similia assequi liceat, et errores etiam, quantùm velis, imminuere, Newtonus ipse indicavit Geometriæ Analyticæ Cap. XI. § 1.

(gg) In Parabolâ capiatur PG = $\frac{1}{2}$AP + $\frac{1}{16}$AD.

(hh) NEMPE posito Problemate quàm maximè generali, ut Curvâ quâlibet AB positione datâ, inveniatur in axe ejus punctum G, unde si recta GB ad punctum quodlibet in curvâ B educatur, producta illa à rectâ AE, quæ curvam in axis vertice contingat, auferat partem AE arcui AB quàm proximè æqualem; hoc inquam Problemate ita generaliter proposito, quæcunque demum sit Curva AB, modò talis sit ut arcûs ejus AB longitudo ex finu ejus, vel recto quem vocant vel verso, per seriem infinitam exponi possit, eadem servanda erit investigandi ratio, quam Newtonus usurpabat, cùm de arcu Circulari ageretur.



Nimirum factum puta id quod efficiendum est. Sit G punctum illud quod quærimus; junctaque GB tangenti AE in E occurrat, et abscindat AE arcui AB æqualem. A puncto B in axem AG ad perpendiculum deducatur recta BD. Jam cùm arcûs AB longitudo ex utràque rectarum DB, vel DA, pura ex DA, per seriem infinitam data fit, id enim ponimus; per eandem seriem infinitam data erit rectæ AE longitudo. Sed ex curvæ naturâ data erit recta DB ex illâ DA. Symbolum igitur rectæ DB in seriem infinitam, si opus ut, resolutum auferatur serici, quâ arcus AB exponitur. Relinquetur nova series; cujus, si ea infinitè producatur, summa arcûs AB rectæque DB, hoc est rectarum AE, DB, differentiæ ultimò erit æqualis.

Jam ex analogiâ illâ AE − DB : AD = DB : GD, quæ Curvas pariter apud omnes viget, utpote quæ ex triangulorum GDB, GAE inter ipsa similitudine, non ex peculiari curvæ alicujus naturâ ortum ducat; ex hâc igitur analogiâ eliciatur series, quæ rectæ DG longitudinem exponat. Nempe hoc modo. Quantitas Algebraica, quâ rectæ DB longitudo exhibetur, dividatur à serie illâ cujus inventionem modò exposuimus, quæ rectarum AE, DB differentiam exhibeat. In serie per divisionem factâ, indices potestatum ejus literæ, quâ recta AD designata fuerit, unitate augeantur. Ita veniet nova series; cujus, si ea infinitè producatur, summa rectæ DG ultimò fit æqualis. Huic si auferatur symbolum rectæ DP, sive $p-x$, veniet tandem series, cujus, infinitè utique productæ, summa rectæ PG ultimò æqualis erit. Hujus demum ope Problema absolvendum erit. Capienda nimirum est PG ejus longitudinis, quam membra aliquot seriei novissimæ, inde ab initio ordine sumenda, algebraicè consummata præfinierint. Duo plerumque sufficerint, nisi nimia fit arcûs AB longitudo. Sed quo plura fuerint adhibita, eò veritatem propiùs accesseris.

2. HÆC etsi satis explicatè dixisse mihi videor, majoris tamen evidentiæ gratiâ, posito curvam Parabolam esse primùm, tum Ellipsin, calculos subducam.

3. SIT igitur curva AB primùm Parabola, cujus parametro recta AP sit æqualis. Rectam AP litera p designet, rectam verò AD, arcûs AB sinum versum, litera x.

Arcus igitur AB, sive recta AE, $= p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} - \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{p^{\frac{7}{2}}} -$,

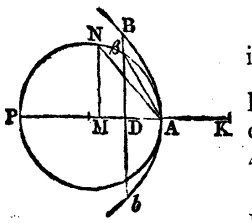
secundum formulam suprà traditam: vide not. q. § 1.

Et è naturâ parabolæ, DB $= p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$

Ergo $AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} - \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{p^{\frac{7}{2}}}$

Ergo $\frac{DB}{AE-DB} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} -} = \frac{p}{\frac{2}{3}x - \frac{2}{5p}x^2 + \frac{4}{7p^2}x^3 -} = \frac{3p}{2x} + \frac{9}{10} - \frac{261}{350p}x$

Hinc



18. Et pro areâ segmenti Hyperbolici BβA; in DP cape MD = $\frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia semicirculo super diametro AP descripto: eritque $\frac{4AN+A\beta}{15} \times 4AD = B\beta A$ proximè: vel proximiùs, erit $\frac{21AN+4A\beta}{75} \times 4AD = B\beta A$; si modò capiatur DM = $\frac{5AD^2}{7AK}$ (ii). CONSTRUCT. MECHANIC.

TRAC-

Hinc $\frac{DB \times AD}{AE-DB}$ (= DG) $= \frac{3p}{2} + \frac{9x}{10} - \frac{261}{350p}x^2 +$,

Sed DP = $p - x$

Ergo PG = (DG − DP =) $\frac{1}{2}p + \frac{19}{16}x - \frac{261}{350p}x^2$

Hinc si modicus fit arcus AB, satis erit sumpsisse PG æqualem rectæ $\frac{1}{2}$AP + $\frac{19}{16}$AD.

4. SIT jam curva AB Ellipsis, cujus axis AD literâ d designetur, parametur AP literâ p, literâ x ut priùs arcûs AB sinum versum designante.

Arcus igitur AB, sive recta AE, $= p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d}x^{\frac{7}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2} + \frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}$

(per formulam suprà traditam §. 5.)

Sed è naturâ Ellipseos, $DB = \sqrt{\frac{p}{d}dx - x^2} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}x^{\frac{7}{2}}$

Ergo $AE - DB = \frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d}x^{\frac{7}{2}} + \frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2}$

Et $\frac{DB}{AE-DB} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} - \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d}x^{\frac{7}{2}} + \frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2}}$

Hoc

Hoc eſt $\frac{BD}{AE-DB} = \frac{p - \frac{px}{2d} - \frac{px^2}{8d^2} -,}{\frac{2}{3}x - \frac{2}{5p} + \frac{4}{7p^3} -,} = \frac{3p}{2x} + \frac{9}{10} - \frac{261}{350p}x$
$+ \frac{3}{5d}x^2 - \frac{9}{7pd}x^3 +,$ $- \frac{21p}{10d} + \frac{144}{175d}x$
$+ \frac{23}{28d^3} -,$ $- \frac{51p}{350d^2}x$
$+,$

Ergo $\frac{DB \times AB}{AE-DB}$ $(=GD) = \frac{3p}{2} + \frac{9}{10} - \frac{261}{350p} \pm$
$- \frac{21p}{10d}x + \frac{144}{175d}x^2 \pm$
$- \frac{51p}{350d^2} \pm$

$DP = p - x \pm$

Ergo $PG = \frac{1}{2}p + \frac{19}{10} - \frac{261}{350p} \pm$
$- \frac{21p}{10d}x + \frac{144}{175d}x^2 \pm$
$- \frac{51p}{350d^2} \pm$
$\pm$

Hinc, ſi modicus ſit arcus AB, ſatis erit ſumpſiſſe $PG = \frac{1}{4}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK}AD.$

(ii) $A\beta = \sqrt{px}$, è naturâ Circuli. $MD = \frac{3x^2}{4d}$ (ex hypotheſi) Ergo $AM = x + \frac{3x^2}{4d}$. $AN^2 = AM \times AP$
$= px + \frac{3px^2}{4d}$. Ergo $AN = \sqrt{px + \frac{3px^2}{4d}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{d}} \times \sqrt{4dx + 3x^2}.$

Ergo $4AN = 2\sqrt{\frac{p}{d}} \times \sqrt{4dx + 3x^2}.$

Sed $\sqrt{4dx + 3x^2} = 2.d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3x^2}{4d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{64d^{\frac{3}{2}}} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{512d^{\frac{5}{2}}} -,$

Ergo $4AN = 4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2d} - \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{32d^2} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^3} -,$

Et $4AN + A\beta = 5p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2d} - \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{32d^2} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^3} -,$

Et $\frac{4.AN + AB}{15} = \frac{1}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{10d} - \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{160d^2} + \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{1280d^3} -,$

Ergo $\frac{4AN + AB}{15} \times 4AD = \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{40d^2} + \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{320d^3} -,$

Sed area hyperbolica $B\beta A = \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{14d^2} +,$ (Geometr. Analyt.)

Error $\left(\frac{3}{40} - \frac{1}{14}\right)\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{d^2} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{280d^2}$

2. PONATUR autem $MD = \frac{5AD^2}{7AK} = \frac{5x^2}{7d}$. Tum $AM = x + \frac{5x^2}{7d}$,

Et $AN^2 = AM \times AP = px + \frac{5px^2}{7d}$. Ergo $AN = \sqrt{px + \frac{5px^2}{7d}} = \sqrt{\frac{p}{7d}} \times \sqrt{7dx + 5x^2}$

Et

Et $21.AN = 3\sqrt{\frac{7p}{d}} \times \sqrt{7dx + 5x^2}$

Sed $\sqrt{7dx + 5x^2} = 7^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5.x^{\frac{3}{2}}}{2.d^{\frac{1}{2}}7^{\frac{1}{2}}} - \frac{25.x^{\frac{5}{2}}}{56.d^{\frac{3}{2}}7^{\frac{1}{2}}} + \frac{125x^{\frac{7}{2}}}{784.d^{\frac{5}{2}}7^{\frac{1}{2}}} -,$

Ergo $21AN = 21.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{15.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2.d} - \frac{75.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{375.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -,$

Sed $4A\beta = 4.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$

Ergo $21AN + 4A\beta = 25.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{15.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2.d} - \frac{75.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{375\,p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -$

Et $\frac{21AN + 4A\beta}{75} = \frac{1}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{10.d} - \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{5.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -,$

Et $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = \frac{4}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5.d} - \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{14.d^2} + \frac{5p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{196d^3} -,$

Sed area hyperbolica $B\beta A = \frac{4}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{14d^2} + \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{36d^3} -,$

Error $\left(\frac{1}{36} - \frac{5}{196}\right)\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{d^3} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{441d^3}.$

TRACTATUS

DE

QUADRATURA CURVARUM.

INTRODUCTIO

AD

QUADRATURAM CURVARUM.

QUANTITATES Mathematicas, non ut ex partibus quàm minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas, hîc conſidero. Lineæ deſcribuntur, ac deſcribendo generantur, non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum; ſuperficies per motum linearum; ſolida per motum ſuperficierum; anguli per rotationem laterum; tempora per fluxum continuum; & ſic in cæteris. Hæ Geneſes in rerum naturâ locum verè habent, & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres, ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium, geneſin docuerunt rectangulorum.

2. Conſiderando igitur, quòd quantitates æqualibus temporibus creſcentes & creſcendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ creſcunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam, determinandi quantitates, ex velocitatibus motuum vel incrementorum, quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones*, & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *annis* 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum, quâ hic uſus ſum in Quadraturâ Curvarum.

3. Fluxiones ſunt, quàm proximè, ut fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quàm minimis genita, &, ut accuratè loquar, ſunt in primâ ratione augmentorum naſcentium; exponi autem poſſunt per lineas quaſcunque, quæ ſunt ipſis proportionales (a).

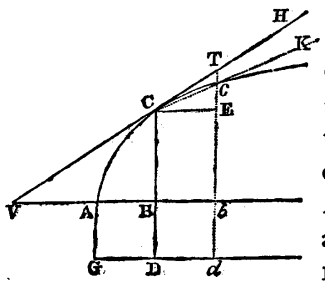
4. Ut ſi areæ ABC, ABDG ordinatis BC, BD, ſuper baſi AB uniformi cum motu progredientibus, deſcribantur; harum arearum

(a) Vide Noſtram Fluxionum Geometriam Def. 4 & 5. & Prop. 1.

fluxiones

INTRODUCTIO.

fluxiones erunt inter se ut ordinatæ describentes BC & BD, & per ordinatas illas exponi possunt, propterea quòd ordinatæ illæ sunt ut arearum augmenta nascentia.



Progrediatur ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis novum *bc*. Compleatur parallelogrammum BCE*b*, ac ducatur recta VTH, quæ curvam tangat in C, ipsisque *bc* & BA productis occurrat in T & V: & abscissæ AB, ordinatæ BC, & lineæ curvæ AC*c* augmenta modò genita, erunt B*b*, E*c* & C*c*; & in horum augmentorum nascentium ratione primâ sunt latera trianguli CET, ideoque fluxiones ipsarum AB, BC & AC sunt ut trianguli illius CET latera CE, ET & CT, & per eadem latera exponi possunt; vel, quòd perinde est, per latera trianguli consimilis VBC.

5. Eodem recidit, si sumantur fluxiones in ultimâ ratione partium evanescentium. Agatur recta C*c*, & producatur eadem ad K. Redeat ordinata *bc* in locum suum priorem BC, & coeuntibus punctis C & *c*, recta CK coincidet cum tangente CH ([b]), & triangulum evanescens CE*c*, in ultimâ suâ forma, evadet simile triangulo CET, & ejus latera evanescentia CE, E*c* & C*c* erunt ultimò inter se, ut sunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT; & propterea in hâc ratione sunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & *c* parvo quovis intervallo ab invicem distant, recta CK parvo intervallo à tangente CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat, & rationes ultimæ linearum CE, E*c* & C*c* inveniantur, debent puncta C & *c* coire, & omninò coincidere. Errores quàm minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi.

6. Simili argumento si Circulus, centro B radio BC descriptus, in longitudinem abscissæ AB ad angulos rectos, uniformi cum motu, ducatur; fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio superficiei ejus erit ut perimeter circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim. Nam quo tempore solidum

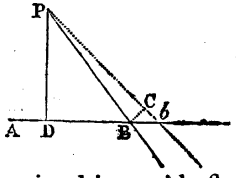
([b]) Per Lemma 6[m]. de Method. Rat. Prim. et Ult.

ABC

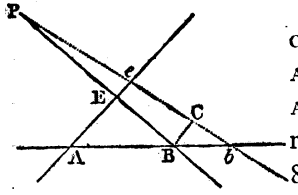
ABC generatur, ducendo circulum illum in longitudinem abscissæ AB, eodem superficies ejus generatur, ducendo perimetrum circuli illius in longitudinem curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ sequuntur. DOCTRINA FLUXIONUM.

7. *Recta* PB, *circa polum datum* P *revolvens, secet aliam positione datam rectam* AB: *quæritur proportio fluxionum rectarum illarum* AB & PB.

Progrediatur recta PB de loco suo PB in locum novum P*b*. In P*b* capiatur PC ipsi PB æqualis, & ad AB ducatur PD sic, ut angulus *b*PD æqualis sit angulo *b*BC; & ob similitudinem triangulorum *b*BC, *b*PD erit augmentum B*b* ad augmentum C*b*, ut P*b* ad D*b*. Redeat jam P*b* in locum suum priorem PB, ut augmenta illa evanescant, & evanescentium ratio ultima, id est ratio ultima P*b* ad D*b*, ea erit, quæ est PB ad DB, existente angulo PDB recto; & propterea in hâc ratione est fluxio ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.



8. *Recta* PB, *circa datum polum* P *revolvens, secet alias duas positione datas rectas* AB & AE *in* B & E: *quæritur proportio fluxionum rectarum illarum* AB & AE.



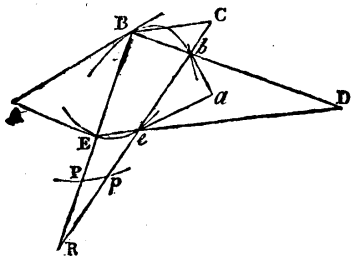
Progrediatur recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum P*b*, rectas AB, AE in punctis *b* & *e* secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur, ipsi P*b* occurrens in C; & erit B*b* ad BC ut A*b* ad A*e*, & BC ad E*e* ut PB ad PE; &, conjunctis rationibus, B*b* ad E*e* ut A*b*×PB ad A*e*×PE. Redeat jam linea P*b* in locum suum priorem PB, & augmentum evanescens B*b* erit ad augmentum evanescens E*e*, ut AB×PB ad AE×PE; ideoque in hâc ratione est fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.

9. Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis curvas, positione datas, secet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles, AB, AE, curvas illas tangant in sectionum punctis B & E: erit fluxio curvæ, quam recta AB tangit, ad fluxionem curvæ, quam recta AE tangit, ut AB×PB ad AD×PE. Id quod etiam eveniet, si recta

PB

PB curvam aliquam, positione datam, perpetuò tangat in puncto mobili P (c).

FORMULA 10. *Fluat quantitas x uniformiter, & invenienda sit fluxio quantitatis x^n.* Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x+o$, quantitas x^n evadet $\overline{x+o}^n$; id est per methodum serierum infinitarum, $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2}$ + &c. Et augmenta, o, & $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2}$ + &c. sunt ad invicem, ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ox^{n-2}$ + &c. ad unitatem, ut 1 ad nx^{n-1}: ideoque fluxio quantitatis x est ad fluxionem quantitas x^n, ut 1 ad nx^{n-1} (d).



(c) In curvas duas Bb, Ee recta BEB incidat, quæ dum quolibet motu transferatur, extremitate suâ P curvam, positione datam, pp perpetuò tangat. Per puncta B, E, ubi recta mobilis PB curvis Bb, Ee, occurrit, ducantur rectæ BA, EA quæ curvas illas contingant. Rectæ BA, EA in A concurrant. Dico fluxionem curvæ Bb esse ad fluxionem curvæ Ee, ut rectangulum AB × PB ad rectangulum AE × PE. Rectæ enim PB, ex situ PB egressæ, sit alius quivis situs *peb*. Junctæ Bb, Ee in D concurrant; necnon rectæ PE, *pb* in R. Ducatur per B recta BC cum rectâ Ee parallela. Erit igitur Bb ad BC ut Db ad De: et BC ad Ee ut BR ad RE. Ergo Bb erit ad Ee ut rectangulum Db × BR ad rectangulum De × RE. Redeunte autem rectâ *pb* in locum suum priorem, PE, anguli DBA, DEA vel imminuti usque vel usque crescentes, ultimò quidem, punctis *b*, B necnon illis *e*, E coeuntibus, aut in nihilum erunt redacti, aut in duos rectos utrosque creverint; aut altero denique in nihilum redacto in duos rectos alter creverit. Unde punctum D cum ipso A ultimò jungetur. Jungetur etiam ultimò punctum R cum ipso P, lineâ PR infinitè imminutâ. Quare subtensæ evanescentis Bb ad evanescentem Ee ea erit ratio ultima, quæ rectanguli AB × PB ad rectangulum AE × PE est ratio. Sed subtensæ arcubus suis evanescentibus ultimò sunt æquales. (Per Lemma VII. De Rat. Prim. et Ult.) Arcuum igitur et subtensarum rationes ultimæ eædem erunt. Quare curvarum Bb, Ee incrementa evanescentia erunt ultimò inter se ut rectangula AB × PF, AE × PE. Ergo et curvarum illarum fluxiones eorundem rectangulorum inter se proportionem gerent. Q. E. D.

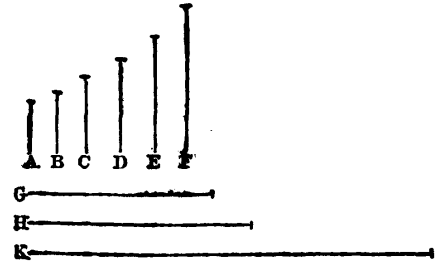
(d) Post multas jam olim evulgatas hujus Formulæ demonstrationes, quarum duas potissimùm] lurimi facio, Robinesii alteram, alteram ipsius Newtoni, quam, in secundo Principiorum Libro Lemmate 2°. à Newtono adumbratim traditam, nos in Prop. VIII. Geometriæ nostræ Fluxionum ejusque Corollariis accuratiùs expositum, post has inquam aliasque plurimas jam pridem pervagatas, alia nuper in lucem prodiit, quæ auctorem habuit Simsonum celebrem illum Glasguensium Geometram; quæ nescio sanè an omnes hactenus excogitatas simplicitate vincat. Certè dignam esse judico, quæ inter pretiosissima Geometriæ hîc reponatur, tanquam in fisco Newtoni; ita tamen si sermone reddita sit Newtoniano, quem Simsonus fine causâ, me judice, magnoperè refugiebat. Ex eo autem quòd fluxio potestatis quadraticæ, sive x^2, fit $2x\dot{x}$, et quòd rectanguli xy fluxio sit $x\dot{y}+y\dot{x}$, ad hunc modum ratiocinando Formulæ generalis veritatem Vir summus evincit.

THEOREMA.

Si sint rectæ quovis numero proportione convenientes, quarum primâ permanente reliquæ fluant; tum si fluxio penultimæ sit ad fluxionem secundæ, sicut antepenultimæ multiplex aliqua ad primam, et capiatur æquè multiplex penultimæ; fluxio ultimæ erit ad fluxionem secundæ sicut summa penultimæ et multiplicis ipsius ad primam.

Sint rectæ quovis numero proportione convenientes A, B, C, D, E, F, quarum primâ A permanente, reliquæ fluant. Harum antepenultimæ D sit recta G multiplex, et penultimæ E sit H æquè multiplex; et fluxio rectæ E ad fluxionem secundæ B eam rationem habeat quam G ad A. Dico fluxionem ultimæ F ad fluxionem secundæ B eam rationem habituram quam summa duarum E, H, ad A. Sit enim recta K ad A ut fluxio rectæ F ad fluxionem rectæ B. Cùm igitur F sit ad B ut K ad A, rectangula A × F, K × B [*notis* F, B *rectæ intelligantur designari, nempe rectarum* F, B *fluxiones sensu*

sensu Def. 5. Geomet. Flux.] erunt inter se æqualia. Rectangulum autem A × F fluxio est rectanguli A × F, cujus latus F fluit, altero A manente. Et, propter continuam rectarum A, B, C, D, E, F, proportionis convenientiam, rectangula A × F, B × E sunt inter se æqualia. Horum igitur fluxiones erunt inter se æquales. (Geom. Flux. Prop. II.) Fluxio autem rectanguli BE rectangulorum B × E, E × B summa erit. Et fluxio rectanguli A × F est ipsum rectangulum A × F. Rectangulum igitur A × F duobus B × E, E × B simul sumptis est æquale. Iisdem igitur rectangulum K × B æquale erit. Atqui B : E = A : G (sic enim posuimus.) Permutando B : A = E : G. Rectangulum igitur K × B : K × A = B × E : B × G. Et permutando K × B : B × E = K × A : B × G. Rursum K × B : E × B = K : E = K × A : A × E. Quare rectangulum K × B erit ad rectangula duo B × E, E × B simul sumpta, sicut rectangulum K × A ad rectangula duo B × G, A × E simul sumpta (24. 5. Elem.) Sed ex priùs ostensis rectangulum K × B duobus B × E, E × B simul sumptis est æquale. Ergo duobus B × G, A × E simul sumptis rectangulum K × A æquale erit. Sed cùm rectæ G, H rectarum D, E æquè sint multiplices, erit G ad H ut D ad E. Sed D ad E ut A ad B. Ergo G ad H ut A ad B. Rectangula igitur G × B, H × A erunt inter se æqualia. Et rectangulo A × E communiter addito, duo G × B, A × E simul sumpta duobus A × H, A × E simul sumptis æqualia erunt. Sed duobus G × B, A × E simul sumptis rectangulum A × K modò ostensum est æquale. Duobus igitur A × H, A × E simul sumptis idem A × K æquale. Ac propterea recta K æqualis erit rectis H, E simul sumptis. Sed recta K ad A ut F ad B. Id enim posuimus. Quare F ad B ut summa duarum H, E ad A. Q. E. D.



Hinc si litera *n* numerum designet, cujus tot sunt unitates quot sunt rectæ præter primam A proportione convenientes, ii sit F proportione convenientium ultima, E penultima, fluxio ultimæ F erit ad fluxionem secundæ B, sive F ad E, ut *n*.E ad A. Nam ob continuam rectarum A, B, C analogiam, A × C = B^2. Ergo A × C = 2BB. Ergo C : B = 2B : A. Ac proinde, propter ea quæ modò sunt ostensa, erit D : B = 2C + C : A, hoc est D : B = 3C : A. Unde rursum concludetur esse E : B = 3D + D : A. Hoc est E : B = 4D : A. Eodemque modo progrediendo obtinebitur tandem F : B = *n*.E : A.

Jam si proportione convenientium primam, quam datam ponimus, litera *a* designet, secundam *x*; tertia hoc symbolo significanda erit, $\frac{x^2}{a}$; quarta hoc alio, $\frac{x^3}{a^2}$; penultimam ultimamque symbola $\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$, $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ designabunt. Et fluxio ultimæ erit ad fluxionem secundæ, ut $n\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$ ad *a*. Hoc est ut *n*. x^{n-1} ad a^{n-1}. Vel si arithmeticè omnia æstimare libeat, ponatur $a=1$. Et si secunda proportione convenientium sit *x*, erit tertia x^2, quarta x^3 penultima x^{n-1}, ultima x^n. Et fluxio ultimæ x^n erit ad fluxionem secundæ *x* sicut *n*. x^{n-1} ad 1. Ac proinde si fluxio quantitatis *x* designetur hâc notâ $\dot{x}$, fluxio quantitatis x^n erit $nx^{n-1}\dot{x}$. Q. E. D.

Vide Librum Roberti Simsoni De Limitibus Quantitatum et Rationum Prop. X.

FLUXIONIS QUANTITATIS x^n. DEMONSTRATIO FORMULÆ FLUX. x^n.

INTRODUCTIO

ſeu curvarum, in caſibus quibuſcunque, ut & fluxiones ſuperficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitatibus analyſin ſic inſtituere, & finitarum, naſcentium vel evaneſcentium, rationes primas vel ultimas inveſtigare, conſonum eſt Geometriæ Veterum: & volui oſtendere, quòd in methodo Fluxionum non opus ſit figuras infinitè parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen poteſt analyſis, in figuris quibuſcunque, ſeu finitis, ſeu infinitè parvis, quæ figuris evaneſcentibus finguntur ſimiles; ut & in figuris quæ per methodos Indiviſibilium pro infinitè parvis haberi ſolent, modò cautè procedas.

12. Ex Fluxionibus invenire Fluentes, Problema difficilius eſt; & ſolutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de quâ ſequentia olim ſcripſi.

D E

QUADRATURA CURVARUM.

NOTATIO FLUXIONALIS.

QUANTITATES indeterminatas ut motu perpetuo creſcentes vel decreſcentes, id eſt, ut fluentes vel defluentes, in ſequentibus conſidero; deſignoque literis x, y, z, v, & earum fluxiones, ſeu celeritates creſcendi, noto iiſdem literis punctatis $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones, ſeu mutationes, magis aut minùs celeres; quas ipſarum z, y, x, v, fluxiones ſecundas nominare licet, & ſic deſignare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$; & harum fluxiones primas, ſeu ipſarum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$ fluxiones tertias, ſic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$; & quartas ſic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$. Et quemadmodum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$ ſunt fluxiones quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$, & hæ ſunt fluxiones quantitatum z, y, x, v, & hæ ſunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v: ſic hæ quantitates conſiderari poſſunt ut fluxiones aliarum, quas ſic deſignabo, $\acute{z}$, $\acute{y}$, $\acute{x}$, $\acute{v}$; & hæ ut fluxiones aliarum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$; & hæ ut fluxiones aliarum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$. Deſignant igitur $\ddddot{z}$, $\acute{z}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$, $\ddddot{z}$, &c. ſeriem quantitatum, quarum quælibet poſterior eſt fluxio præcedentis, & quælibet prior eſt fluens

fluens quantitas fluxionem habens ſubſequentem. Similis eſt ſeries $\sqrt{az-zz}$, $\sqrt{\dot{a}z-zz}$, $\sqrt{a\dot{z}-zz}$, $\sqrt{az-\dot{z}z}$, $\sqrt{az-z\dot{z}}$, $\sqrt{\ddot{a}z-zz}$, $\sqrt{a\ddot{z}-zz}$, ut & ſeries $\frac{az+zz}{a-z}$, $\frac{\dot{a}z+zz}{a-z}$, $\frac{a\dot{z}+zz}{a-z}$, $\frac{az+\dot{z}z}{a-z}$, $\frac{az+z\dot{z}}{a-z}$, $\frac{\ddot{a}z+zz}{a-z}$, $\frac{a\ddot{z}+zz}{a-z}$(e).

Et notandum eſt, quòd quantitas quælibet prior, in his ſeriebus, eſt ut Area figuræ curvilineæ, cujus ordinatim applicata rectangula eſt quantitas poſterior, & abſciſſa eſt z: uti $\sqrt{a\dot{z}-zz}$ area curvæ cujus ordinata eſt $\sqrt{az-zz}$ & abſciſſa z. Quò autem ſpectant hæc omnia patebit in propoſitionibus quæ ſequuntur.

PROP. I. PROB. I.

Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones. PROP. I.

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujuſque fluentis, quam involvit; & in ſingulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem ſuam, & aggregatum factorum omnium, ſub propriis ſignis, erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d, &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x, &c. involvens, uti $x^3-xy^2+a^2z-b^3=0$. Multiplicentur termini primò per indices dignitatum x, &, in ſingulis multiplicationibus, pro dignitatis latere, ſeu x unius dimenſionis, ſcribatur $\dot{x}$, & ſumma factorum erit $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2$. Idem fiat in y, & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur ſumma factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2-2xy\dot{y}+a^2\dot{z}=0$. Dico quòd hâc æquatione definitur relatio fluxionum.

Demonſtratio.

Nam ſit o quantitas admodum parva & ſunto $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, quantitatum z, y, x momenta; id eſt, incrementa momentanea ſyn-

(e) Vide noſtram Fluxionum Geometriam Def. 5.

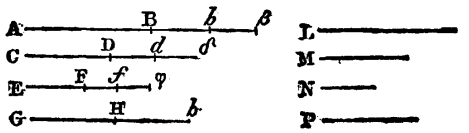
Prop. I. chrona. Et si quantitates fluentes jam sunt z, y & x, hæ, post momentum temporis, incrementis suis $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ auctæ, evadent $z+o\dot{z}$, $y+o\dot{y}$, $x+o\dot{x}$, quæ in æquatione primâ pro z, y, & x scriptæ dant æquationem $x^3+3x^2o\dot{x}+3xo^2\dot{x}\dot{x}+o^3\dot{x}^3-xy^2-oxy^2-2xo\dot{y}y-2\dot{x}o^2\dot{y}y-xo^2\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^3\dot{y}\dot{y}+a^2z+a^2o\dot{z}-b^3=0$.

Subducatur æquatio prior, & residuum divisum per o erit $3\dot{x}x^2+3\dot{x}\dot{x}ox+\dot{x}^3o^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y-2\dot{x}o\dot{y}y-xo\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^2\dot{y}\dot{y}+a^2\dot{z}=0$. Minuatur quantitas o in infinitum, & neglectis terminis evanescentibus restabit $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y+a^2\dot{z}=0$. Q. E. D. (f)

Expli-

(f) EXPLICATIO DEMONSTRATIONIS NEWTONIANÆ.

Demonstratio



Puta rectas, AB, CD, EF, motu punctorum, B, D, F, genitas magnitudines esse mutabiles, quas Newtonus literis z, y, x designari voluit, literâ a designante aliam rectam datæ longitudinis. Hæ rectæ, tempore quovis T, longitudines novas Ab, Cd, Ef sint adeptæ; ut sint, Bb, Dd, Ff incrementa rectarum simul genita. Sit GH alia recta, æquabili velocitate mutabilis, cui, tempore T, incrementum Hb accesserit. Exponatur recta P datæ cujusvis longitudinis. Sint L, M, N aliæ rectæ, ad quas P rationes habeat, quas velocitas æquabilis punncti H, rectam GH generantis, ad velocitates quibus puncta B, D, F, rectas AB, CD, EF generantia, ex suo unumquodque loco B, vel D, vel F discedunt. Erunt L, M, N magnitudines, quæ Newtono notis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$ designantur (Geom. Flux. Def. V.) Sint $B\beta$, $D\delta$, F incrementa quæ rectis, AB, CD, EF, tempore T, accessissent, si puncta B, D, F velocitabus quibuscum è locis B, D, F discedunt, totum illud tempus T æquabiliter lata essent. Jam cùm æquatio proposita, $x^3-xy^2+a^2z-b^3=0$, quantitatum mutabilium x, y, z relationes mutuas generaliter exprimat, ut quibuslibet harum magnitudinibus, quæ fluendo simul fuerint factæ, pro literis, x, y, z substitutis, æqualitas maneat; cùm præterea sint AB, CD, EF magnitudines fluendo simul factæ, et Ab, Cd, Ef aliæ simul factæ, literis z, y, x significatæ, si illas primò, tum has, pro literis z, y, x substitueris, duæ orientur æquationes

$$\overline{EF}^3-EF\times\overline{CD}^2+a^2\cdot AB-b^3=0$$
$$\overline{LF+Ff}^3-\overline{EF+Ff}\times\overline{CD+Dd}^2+a^2\times\overline{AB+Bb}-b^3=0.$$

Harum posteriori priore detractâ, tertia exsistet,

$$3\overline{EF}^2.Ff+3EF.\overline{Ff}^2+\overline{Ff}^3-2EF.CD.Dd-EF.\overline{Dd}^2-Ff.\overline{CD}^2-2CD.Ff.Dd-Ff.\overline{Dd}^2+a^2Bb=0.$$

Quæ incrementorum simul factorum, Bb, Dd, Ff, mutuas relationes significabit; idque generaliter, qualescunque fuerint illorum magnitudines. Si igitur tempore T infinitè decrescente, incrementa illa evanescant, evanescentium relationes ultimas eadem æquatio significabit. Sed cùm fluentium GH, AE, quarum fluxiones sunt P, L, incrementa simul genita sint Hb, Bb, evanescentium Hb, Eb ultima inter ipsas ratio rectarum P, L ratio erit. (Geometr. Flux. Prop. I.) Sunt autem Hb, $B\beta$ spatia eodem tempore T æquabiliter confecta velocitatibus, quæ sunt inter se ut rectæ P, L. Neque huic rationi obstant spatiorum Hb, $B\beta$ longitudines magnæ parvæve fuerint. Quare tempore T infinitè decrescente, evanescentium Hb, $E\beta$ ratio inter ipsas ultima rectarum P, L ratio erit. Evanescentis igitur Hb ad evanescentes Bb, $B\beta$ eædem erunt rationes ultimæ. Evanescentes igitur Bb, $B\beta$ erunt ultimò inter se æquales. Simili modo ostendetur evanescentes Dd, $D\delta$, necnon Ff, $F\varphi$ esse ultimè inter se æquales. Ac propterea evanescentium, $B\beta$, $D\delta$, $F\varphi$, eædem erunt ac illarum Bb, Dd, Ff relationes ultimæ; et si in æquationem noviſſimam pro his Bb, Dd, Ff, illæ $B\beta$, $D\delta$, $F\varphi$ substituantur, transmutabitur illa in alium, quæ evanescentium $B\beta$, $D\delta$, $F\varphi$ ultimas inter ipsas relationes exprimet. Nempe hoc modo. $3\overline{EF}^2F\varphi+3EF.\overline{F\varphi}^2+F\varphi^3-2EF.CD.D\delta-EF.\overline{D\delta}^2-F\varphi.\overline{CD}^2-2CD.F\varphi.D\delta-F\varphi.\overline{D\delta}^2+a^2B\beta=0$, ultimò

Jam

Explicatio plenior. Prop. I.

Ad eundem modum si æquatio esset $x^3-xy^2+a^2\sqrt{ax-yy}-b^3=0$, produceretur $3x^2\dot{x}-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y+a^2\sqrt{a\dot{x}-y\dot{y}}=0$. Ubi si fluxionem $\sqrt{a\dot{x}-y\dot{y}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax-yy}=z$, & erit $ax-y^2=z^2$, & (per hanc propositionem) $a\dot{x}-2y\dot{y}=2z\dot{z}$, seu $\frac{a\dot{x}-2y\dot{y}}{2z}=\dot{z}$; hoc est $\frac{a\dot{x}-2y\dot{y}}{2\sqrt{ax-yy}}=\sqrt{a\dot{x}-y\dot{y}}$. Et inde $3x^2\dot{x}-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y+\frac{a^3\dot{x}-2a^2y\dot{y}}{2\sqrt{ax-yy}}=0$.

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes. Sit æquatio $zy^3-z^4+a^4=0$; & fiet per operationem primam, $\dot{z}y^3+3z\dot{y}y^2-4\dot{z}z^3=0$: per secundam $\ddot{z}y^3+6\dot{z}\dot{y}y^2$

Jàm cùm Hb sit ad $B\beta$ ut P ad L, erit $B\beta=\frac{Hb\times L}{P}$; vel si recta Hb per literam o designetur, Prop. I^{a}. $B\beta=\frac{o\times L}{P}$. Similiter ostendetur $D\delta=\frac{o\times M}{P}$, necnon $F\varphi=\frac{o\times N}{P}$. Et in omnibus rectarum, $B\beta$, $D\delta$, $E\varphi$, magnitudinibus, dummodo illæ conferantur quæ simul genitæ sint, hæ æqualitates manent. Quare si in æquationem relationum ultimarum pro illis $B\beta$, $D\delta$, $F\varphi$, hæ $\frac{oL}{P}$, $\frac{oM}{P}$, $\frac{oN}{P}$ substituantur, nova exsistet hujusmodi; $\frac{3EF^2.No}{P}+\frac{3EF.N^2o^2}{P^2}+\frac{N^3o^3}{P^3}-2EF.CD.\frac{o.M}{P}-\frac{EF.o^2.M^2}{P^2}-\overline{CD}^2.\frac{o.N}{P}-\frac{2CD.N.M.o^2}{P^2}-\frac{N.M^2.o^3}{P^3}+\frac{a^2L.o}{P}=0$; ultimò scilicet. Omnibusque à quantitate $\frac{o}{P}$ divisis, factâque translatione, ut quantitates illæ omnes, quas, peractâ divisione, litera o non erit ingressa, seorsum consistant, $3EF^2.N-2EF.CD.M-\overline{CD}^2.N+a^2L=\frac{N.M^2.o^2}{P^2}+\frac{2CD.N.M.o}{P}+\frac{EF.M^2.o}{P}-\frac{N^3.o^2}{P^2}-\frac{3EF.N^2.o}{P}$ ultimò. Hoc est, duo illa multinomia hinc illinc constituta, ut sint inæqualia si tempus T datæ capiatur magnitudinis, tempore tamen T infinitè decrescente, ad æqualitatem usque tendunt; quam propiùs tandem accesserint quàm pro datâ quâvis differentiâ. Sed tempore T infinitè decrescente recta o evanescit, et unà cum tempore T ad nihilum redigetur. Quare è duobus multinomiis, quæ constituunt æquationem noviſſimam, alterum illud, cujus membra singula litera o ingressa est, evanescet; ut unà cum tempore T rectâque o in nihilum abierit. Quare et alterum $3EF^2.N-2EF.CD.M-CD^2.N+a^2L$ nihilo æquale erit. Non enim. Sed si fieri posset, æquale sit finitæ alicui magnitudini, quam litera Y designet. Multinomium igitur alterum, cujus membra singula litera o ingressa est, magnitudinem Y propiùs ultimò accesserit quàm pro datâ quâvis differentiâ; ac propterea hanc ipsam Y magnitudinem suam habebit ultimam; nec unquam propiùs quàm pro datâ illâ differentiâ Y nihilum accesserit. Non igitur unà cum tempore T rectâque o multinomium illud in nihilum abierit. Quod est absurdum. Abierit enim ex priùs demonstratis.

Multinomium igitur $3\overline{EF}^2.N-2EF.CD.M-\overline{CD}^2.N+a^2L$ nihilo est æquale. Hoc est, pro rectis CD, EF, literis y, x; et pro L, M, N notis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, substitutis, $3x^2.\dot{x}-2xy\dot{y}-y^2\dot{x}+a^2\dot{z}=0$. Q. E. D.

Ita ni fallor absolutam dedimus ac perfectam, quam Newtonus adumbrare voluit, demonstrationem; ab omni certè individuorum vel infinitè parvorum notione liberam.

Cæterùm veritas regulæ de quâ agitur è Corollariis Prop. VIII. Libri nostri de Geometriâ Fluxionum ejusdemque Libri Prop. V. satis elucescit.

Prop. I. & II. $+3\dot{z}\ddot{y}y^2+6\dot{z}\dot{y}^2y-4\ddot{z}z^3-12\dot{z}^2z^2=0$: per tertiam $\dddot{z}y^3+9\ddot{z}\dot{y}y^2+9\dot{z}\ddot{y}y^2+18\dot{z}\dot{y}^2y+3\dot{z}\dot{y}^3+18\dot{z}\ddot{y}\dot{y}y+6\dot{z}\dot{y}^3-4\dddot{z}z^3-36\ddot{z}\dot{z}z^2-24\dot{z}^3z=0$.

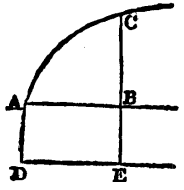
Ubi verò ſic pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare; & pro ejus fluxione primâ unitatem ſcribere, pro ſecundâ verò & ſequentibus nihil. Sit æquatio $zy^3-z^4+a^4=0$, ut ſuprà; & fluat z uniformiter, ſitque ejus fluxio unitas, & fiet per operationem primam $y^3+3z\dot{y}y^2-4z^3=0$: per ſecundam $6\dot{y}y^2+3\ddot{z}y^2+6z\dot{y}^2y-12z^2=0$: per tertiam $9\ddot{y}y^2+18\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18\dot{z}\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-24z=0$.

In hujus autem generis æquationibus concipiendum eſt, quòd fluxiones in ſingulis terminis ſint ejuſdem ordinis; id eſt, vel omnes primi ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$; vel omnes ſecundi $\ddot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}^2$; vel omnes tertii $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, $\dot{z}^3$, &c. Et ubi res aliter ſe habet, complendus eſt ordo per ſubintellectas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis. Sic æquatio noviſſima complendo ordinem tertium fit $9\dot{z}\ddot{y}y^2+18\dot{z}\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18\dot{z}\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-24z\dot{z}^3=0$ (g).

PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ Quadrari poſſunt.

Sit ABC figura invenienda, BC ordinatim applicata rectangula, & AB abſciſſa. Producatur CB ad E, ut ſit BE=1, & compleatur parallelogrammum ABED: & arearum ABC, ABED fluxiones erunt ut BC & BE. Aſſumatur igitur æquatio quævis quâ relatio arearum definiatur, & inde dabitur relatio ordinatarum BC & BE per Prop. I. Q. E. I. (h).



Hujus rei exempla habentur in propoſitionibus duabus ſequentibus (i).

(f) Vide Geomet. Analytic. Cap. IV. § 21. not. *d*.

(h) Hoc Problema Septimum eſt Geometriæ Analyticæ, ubi reſolutionem ejus, explicatiùs longè quàm hic fecit, Newtonus tradidit. Confer etiam Geometr. Analyt. C. IV. § 13.

(i) Et Tironum captui magis accommodata in Geometriâ Analyticâ, poſt Problema ſeptimum.

PROP.

PROP. III. THEOR. I.

Prop. III. & IV.

Si pro abſciſſâ AB, & areâ AE, ſeu AB×1, promiſcuè ſcribatur z; & ſi pro $e+fz^n+gz^{2n}+bz^{3n}+$ &c. ſcribatur R: ſit autem area curvæ $z^\theta R^\lambda$, erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\overline{\theta e+\theta\times fz^n+\theta\times gz^{2n}+\theta\times bz^{3n}+\text{&c.}}\times\dot{z}^{\theta-1}R^{\lambda-1}.$$
$$+\lambda\eta\qquad+2\lambda\eta\qquad+3\lambda\eta$$

Demonſtratio.

Nam ſi ſit $z^\theta R^\lambda=v$, erit (per Prop. I.) $\theta\dot{z}z^{\theta-1}R^\lambda+\lambda z^\theta\dot{R}R^{\lambda-1}=\dot{v}$. Pro R^λ, in primo æquationis termino, & z^θ, in ſecundo, ſcribe $RR^{\lambda-1}$ & $zz^{\theta-1}$; & fiet $\theta\dot{z}R+\lambda z\dot{R}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}=\dot{v}$. Erat autem $R=e+fz^n+gz^{2n}+bz^{3n}+$ &c. et inde (per Prop. I.) fit $\dot{R}=\eta\dot{z}fz^{n-1}+2\eta\dot{z}gz^{2n-1}+3\eta\dot{z}bz^{3n-1}+$ &c. quibus ſubſtitutis, & ſcriptâ BE, ſeu 1, pro $\dot{z}$, fiet

$$\overline{\theta e+\theta\times fz^n+\theta\times gz^{2n}+\theta\times bz^{3n}+\text{&c.}}\times\dot{z}^{\theta-1}R^{\lambda-1}=\dot{v}=\text{BC}.$$
$$+\lambda\eta\qquad+2\lambda\eta\qquad+3\lambda\eta$$

Q. E. D.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſi pro $e+fz^n+gz^{2n}+$ &c. ſcribatur R, & pro $k+lz^n+mz^{2n}+$ &c. ſcribatur S; ſit autem Area Curvæ $z^\theta R^\lambda S^\mu$: erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\left.\begin{array}{llll}
\theta ek+\theta\times fkz^n+\theta\times gkz^{2n}\ldots*\ldots\ldots*\ldots & & & \\
+\lambda\eta & +2\lambda\eta & & \\
+\theta\times elz^n+\theta\times flz^{2n}+\theta\times glz^{3n}\ldots*\ldots & & & \\
+\mu\eta & +\lambda\eta & +2\lambda\eta & \\
 & +\mu\eta & +\mu\eta & \\
 & +\theta\times emz^{2n}+\theta\times fmz^{3n}+\theta\times gmz^{4n} & & \\
 & +2\mu\eta & +\lambda\eta & +2\lambda\eta \\
 & & +2\mu\eta & +2\mu\eta
\end{array}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

Demonſtratur ad modum propoſitionis ſuperioris (k).

PROP.

(k) Prop. IV. explicatius enuntiata et demonstrata.

Si curvæ abſciſſæ AB ſit z, et ſi pro $e+fz^n+gz^{2n}+bz^{3n}+iz^{4n}+$, ſcribatur R, et pro $k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+pz^{4n}+$, ſcribatur S, ſitque Area curvæ $z^\theta.R^\lambda.S^\mu$: erit Ordinata BC æqualis rectæ hoc ſymbolo deſignatæ.

$\theta ek+$

Prop. V.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & pro $e + fz^{n} + gz^{2n} + hz^{3n} +$ &c. ſcribatur R: ſit autem ordinatim applicata $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} \times a + bz^{n} + cz^{2n} + dz^{3n} +$ &c. & ponatur $\frac{\theta}{n} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, $t + \lambda = v$, &c.

Erit area $= z^{\theta} R^{\lambda}$ in $+ \frac{\frac{1}{n} a}{re}$

$$+ \frac{\frac{1}{n} b - sfA}{\overline{r+1} \times e} z^{n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} c - \overline{s+1} \times fB - tgA}{\overline{r+2} \times e} z^{2n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} d - \overline{s+2} \times fc - \overline{t+1} \times gB - vbA}{\overline{r+3} \times e} z^{3n}$$

$$+ \frac{-\overline{s+3} \times fD - \overline{t+2} \times gC - \overline{v+1} \times hB}{\overline{r+4} \times e} z^{4n}$$

+ &c.

Ubi

Demonstratio.

$$\left.\begin{array}{llll} \theta ek + \theta \times fkz^{n} & + \theta \times gkz^{2n} & + \theta \times hkz^{3n} & + \theta \times ikz^{4n} \\ + \lambda\eta & + 2\lambda\eta & + 3\lambda\eta & + 4\lambda\eta \\ + \theta \times elz^{n} & + \theta \times flz^{2n} & + \theta \times glz^{3n} & + \theta \times hlz^{4n} \\ + \mu\eta & + \lambda\eta & + 2\lambda\eta & + 3\lambda\eta \\ & + \mu\eta & + \mu\eta & + \mu\eta \\ & + \theta \times emz^{2n} & + \theta \times fmz^{3n} & + \theta \times gmz^{4n} \\ & + 2\mu\eta & + \lambda\eta & + 2\lambda\eta \\ & & + 2\mu\eta & + 2\mu\eta \\ & & + \theta \times enz^{3n} & + \theta \times fnz^{4n} \\ & & + 3\mu\eta & + \lambda\eta \\ & & & + 3\mu\eta \\ & & & + \theta \times epz^{4n} \\ & & & + 4\mu\eta \end{array}\right\} \times Z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1}.$$

DEMONSTRATIO.

Ponatur $z^{\theta}.R^{\lambda}.s^{\mu} = u$. Erit igitur (Per Prop. 1.)

$$\theta \dot{z} z^{\theta-1} R^{\lambda} s^{\mu} + \lambda \dot{z} z^{\theta} R^{\lambda-1} s^{\mu} + \mu \dot{z} z^{\theta} R^{\lambda} s^{\mu-1} \dot{s} = \dot{u}.$$

Pro R^{λ} in membro æquationis primo atque tertio, pro z^{θ} in ſecundo et tertio, pro s^{μ} in primo et ſecundo, ſcribantur $R.R^{\lambda-1}$, $z.z^{\theta-1}$, $s.s^{\mu-1}$. Ita fiet $\theta \dot{z} RS + \lambda \dot{z} SR + \mu \dot{z} RS \times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.s^{\mu-1} = \dot{u}$. Erant autem $R = e + fz^{n} + gz^{2n} + hz^{3n} + iz^{4n} +$, et $s = k + lz^{n} + mz^{2n} + nz^{3n} + pz^{4n} +$. Quare (per Prop. 1.) $\dot{R} = nfz^{n-1}\dot{z} + 2ngz^{2n-1}\dot{z} + 3nhz^{3n-1}\dot{z} + 4niz^{4n-1}\dot{z} +$; et $\dot{s} = nlz^{n-1}\dot{z} + 2nmz^{2n-1}\dot{z} + 3nnz^{3n-1}\dot{z} + 4npz^{4n-1}\dot{z} +$. Ex hiſce verò per formulam generalem noſtram multiplicationis primam, in Logiſticâ Infinitorum traditam, efficietur.

$RS =$

Ubi A, B, C, D, &c. denotant totas coefficientes datas termino- Prop. V.
rum ſingulorum in ſerie cum ſignis ſuis + & −, nempe

A primi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n} a}{re}$

B ſecundi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n} b - sfA}{\overline{r+1} \times e}$

C tertii termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n} c - \overline{s+1} \times fB - tgA}{\overline{r+2} \times e}$

Et ſic deinceps.

Demonſtratio.

Sunto juxta propoſitionem tertiam.

	Curvarum Ordinatæ				Areæ
1.	$\theta eA + \theta \times fAz^{n}$	$+ \theta \times gAz^{2n}$	$+ \theta \times hAz^{3n}$ &c.	$\times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$	$Az^{\theta} R^{\lambda}$
	$+ \lambda\eta$	$+ 2\lambda\eta$	$+ 3\lambda\eta$		
2.	$+ \theta+\eta \times eBz^{n}$	$+ \theta+\eta \times fBz^{2n}$	$+ \theta+\eta \times gBz^{3n}$ &c.		$Bz^{\theta+\eta} R^{\lambda}$
		$+ \lambda\eta$	$+ 2\lambda\eta$		
3.		$+ \theta+2\eta \times eCz^{2n}$	$+ \theta+2\eta \times fCz^{3n}$ &c.		$Cz^{\theta+2\eta} R^{\lambda}$
			$+ \lambda\eta$		
4.			$+ \theta+3\eta \times eDz^{3n}$ &c.		$Dz^{\theta+3\eta} R^{\lambda}$

Et ſi ſumma ordinatarum ponatur æqualis ordinatæ $a + bz^{n} + cz^{2n}$

Prop. IV.

$$RS = \begin{array}{llll} ek & + em & + cu & + cp \\ + lf & + fl & + fm & + fn \\ & + gk & + gl & + gm \\ & & + bk & + hl \\ & & & + ik \end{array} \left.\begin{array}{l} z^{n} \\ z^{2n} \\ z^{3n} \\ z^{4n} + , \end{array}\right.$$

$$\dot{RS} = \begin{array}{lll} nfk & + nfm & + nfn \\ + 2ngk & + 2ngl & + 2ngm \\ & + 3nbk & + 3nbl \\ & & + 4nik \end{array} \left.\begin{array}{l} z^{n-1} \\ z^{2n-1} \\ z^{3n-1} \\ z^{4n-1} + , \end{array}\right. \times \dot{z}$$

$$\dot{SR} = \begin{array}{lll} nlk & + nlf & + nlg \\ + 2nme & + 2nmf & + 2nmg \\ & + 3nne & + 3nnf \\ & & + 4npe \end{array} \left.\begin{array}{l} z^{n-1} \\ z^{2n-1} \\ z^{3n-1} \\ z^{4n-1} + , \end{array}\right. \times \dot{z}$$

Et hiſce ſeriebus pro tribus illis RS, $\dot{RS}$, $\dot{SR}$, in æquationem modò expoſitam $\theta \dot{z} RS + \lambda \dot{z} RS + \mu \dot{z} SR \times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.s^{\mu-1} = \dot{u}$ ritè ſubſtitutis, efficietur

Prop. V. $cz^{2n}+dz^{3n}+$ &c. in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſumma arearum $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{n}+Cz^{2n}+Dz^{3n}+$ &c. æqualis erit areæ curvæ cujus iſta eſt ordinata. Æquentur igitur ordinatarum termini correſpondentes,

et fiet $a=\theta eA$,

$$b=\overline{\theta+\lambda\eta}\times fA+\overline{\theta+\eta}\times eB,$$
$$c=\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gA+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fB+\overline{\theta+2\eta}\times eC,$$
&c (l).

et inde $A=\frac{a}{\theta e}$

$$B=\frac{b-\overline{\theta+\lambda\eta}\times fA}{\overline{\theta+\eta}\times e}$$
$$C=\frac{c-\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gA-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fB}{\overline{\theta+2\eta}\times e}$$

Et ſic deinceps in infinitum (m).

Pone jam $\frac{\theta}{\eta}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, &c. et in areâ $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{n}+Cz^{2n}+Dz^{3n}+$ &c. ſcribe ipſorum A, B, C, &c. valores inventos, & prodibit ſeries propoſita. Q. E. D.

1. Et notandum eſt, quòd Ordinata omnis duobus modis in ſeriem reſolvitur. Nam index η vel affirmativus eſſe poteſt vel negativus.

Proponatur

$$\begin{array}{l}
\theta\times et+\theta\times el \\
+\theta\times fk \\
+\lambda\eta\times fk \\
+\mu\eta\times le
\end{array}
\begin{array}{l}
+\theta\times em \\
+\theta\times fl \\
+\theta\times gk \\
+\lambda\eta\times fi \\
+2\lambda\eta\times gk \\
+\mu\eta\times lf \\
+2\mu\eta\times me
\end{array}
\begin{array}{l}
+\theta\times en \\
+\theta\times fm \\
+\theta\times gl \\
+\theta\times bk \\
+\lambda\eta\times fm \\
+2\lambda\eta\times gl \\
+3\lambda\eta\times bk \\
+\mu\eta\times lg \\
+2\mu\eta\times mf \\
+3\mu\eta\times ne
\end{array}
\begin{array}{l}
+\theta\times ep \\
+\theta\times fn \\
+\theta\times gm \\
+\theta\times bl \\
+\theta\times ik \\
+\lambda\eta\times fn \\
+2\lambda\eta\times gm \\
+3\lambda\eta\times bl \\
+4\lambda\eta\times ik \\
+\mu\eta\times lb \\
+2\mu\eta\times mg \\
+3\mu\eta\times nf \\
+4\mu\eta\times pe
\end{array}
z^{n}\quad z^{2n}\quad z^{3n}\quad z^{4n}+,\ \times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\omega-1}\times\dot{z}$$

$=\dot{u}=BC\times\dot{z}$.

Unde omnibus ab illâ $\dot{z}$ diviſis, et ritè ordinatis, veniet ſymbolum rectæ BC, quod initio poſuimus. Q. E. D.

(l) $d=\overline{\theta+3\lambda\eta}\times bA+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times gB+\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times fC+\overline{\theta+3\eta}\times eD$.

(m) Nimirum $D=\frac{\frac{1}{\eta}d-\overline{s+2}fC-\overline{t+1}gB-\omega bA}{\overline{r+3}e}$.

Et

Proponatur Ordinata $\frac{3k-lzz}{zz\sqrt{kz-lz^{3}+mz^{4}}}$: hæc vel ſic ſcribi poteſt Prop. V. $z^{-\frac{5}{2}}\times\overline{3k-lz^{2}}\times\overline{k-lz^{2}+mz^{3}}^{-\frac{1}{2}}$; vel ſic $z^{-2}\times\overline{-l+3kz^{-2}}\times\overline{m-lz^{-1}+kz^{-3}}^{-\frac{1}{2}}$

In caſu priore eſt $a=3k$, $b=0$, $c=-l$, $e=k$, $f=0$, $g=-l$, $h=m$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=1$, $\theta-1=-\frac{5}{2}$, $\theta=-\frac{3}{2}=r$, $s=-1$, $t=-\frac{1}{2}$, $v=0$.

In poſteriore eſt $a=-l$, $b=0$, $c=3k$, $e=m$, $f=-l$, $g=0$, $h=k$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=-1$, $\theta-1=-2$, $\theta=-1$, $r=1$, $s=1\frac{1}{2}$, $t=2$, $v=2\frac{1}{2}$. Tentandus eſt caſus uterque. Et ſi ferierum alterutra, ob terminos tandem deficientes, abrumpitur ac terminatur, habebitur area curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore caſu, ſcribendo in ſerie valores ipſorum a, b, c, e, f, g, h, λ, θ, r, s, t, v, termini omnes poſt primum evaneſcunt in infinitum, & area curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k-lz^{2}+mz^{3}}{z^{3}}}$. Et hæc area ob ſignum negativum adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abſciſſæ quàm ordinatæ; negativa verò cadit ad contrarias partes ordinatæ, & adjacet abſciſſæ productæ, manente ſcilicet ſigno ordinatæ. Hoc modo ſeries alterutra, & nonnunquam utraque, ſemper terminatur, & finita evadit, ſi curva

Et ſi multinomio literâ R deſignato accedat novum nomen iz^{4n}, et multinomio $a+bz^{n}+$, novum etiam nomen $\imath z^{4n}$, erit

$$\imath=\overline{\theta+4\lambda\eta}\times iA+\overline{\theta+\eta+3\lambda\eta}bB+\overline{\theta+2\eta+2\lambda\eta}gC+\overline{\theta+3\eta+\lambda\eta}fD+\overline{\theta+4\eta}eE.$$

Et $E=\frac{\frac{1}{\eta}\imath-\overline{s+3}fD-\overline{t+2}gC-\overline{u+1}bB-\omega iA}{\overline{r+4}e}$, ſicut in ſuis etiam ad hunc locum commentariis rectè admonuit J. Stewart Abredonenſis.

Newtonus autem in numeratore coefficientis E membrum primum, $\frac{1}{\eta}\imath$, et ultimum, ωiA, omiſit.

Quod eo conſilio eum feciſſe arbitror, ut inſinuaret, formulis illis, $e+fz^{n}+gz^{2n}+$, $a+bz^{n}+cz^{2n}+$, non ſeries neceſſariò infinitas deſignari, ſed multinomia Algebraica, ſive infinita ſive finita quotvis nominum: et quando illa finita ſint, in areæ formulâ literas illas quæ nominum, illis in quibus formulæ $e+fz^{n}+$, $a+bz^{n}+$, ſubſiſtant, elatiorum coefficientes deſignarent, nihilo ſingulatim æquandas eſſe. Et cujuſque coefficientis eam quantitatem ſumendam, quæ ex membris reliquis conflatur, quæ literis illis, nihilo æquatis, non ſunt implicata. Ut ſi formulæ illæ $e+fz^{n}+$, $a+bz^{n}+$, in quarto quæque nomine ſubſiſtant; minimè quidem ex eo conſequetur, Areæ quoque formulam in nomine quarto neceſſariò terminatum iri. Quinetiam evenire poteſt, ut illa uſque proſerpat. Literæ vero $\imath$, i, et aliæ omnes, quibus formulæ utriuſque, $e+fz^{n}+$, $a+bz^{n}+$, ultra quartum nomen productæ, coefficientes indicarentur, nihilo ſingulatim ſunt æquandæ. Unde coefficiens E formam induet, quali eam Newtonus protulit, membris $\frac{1}{\eta}\imath$, ωiA è medio ſublatis. Et nominis proximi coefficiens F erit $\frac{-\overline{s+4}fE-\overline{t+3}gD-\overline{u+2}bC}{\overline{r+5}e}$.

Prop. V. geometricè quadrari poteſt. At ſi curva talem quadraturam non admittit, ſeries utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget, & aream dabit approximando; præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel nihil eſt, vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{z^n}{c}$ æqualis eſt unitati. Si $\frac{z^n}{c}$ minor eſt unitate, converget ſeries in quâ index η affirmativus eſt: ſin $\frac{z^n}{c}$ unitate major eſt, converget ſeries altera. Si in uno caſu area adjacet abſciſſæ ad uſque ordinatam ductæ, in altero adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ.

2. Nota inſuper, quòd ſi Ordinata contentum eſt ſub factore rationali

(n) Nimirum calculi ita ſient ſimpliciſſimi, ſi Ordinata QR^{π} ad eam formam revocetur, quâ latus partis irrationalis R^{π} non metiatur partem rationalem. Si igitur R metiatur Q, metiendo faciat A. Erit igitur $Q = AR$; et ordinata QR^{π} in $AR^{\pi+1}$ *migraverit*. Si R metiatur Q, metiendo faciat B. Erit $Q = B.R^2$ et ordinata $Q.R^{\pi}$ in $B.R^{\pi+2}$ migraverit. Denique ſi R metiatur Q, metiendo faciat P. Erit $Q = PR^n$ et ordinata $Q.R^{\pi}$ in $P.R^{\pi+n}$ *migraverit*.

(o) Viâ in Arithmeticâ Univerſali tradità. Cap. VII. Sect. 2.

(p) Hujus demonſtratio hâc nititur propoſitione.

THEOREMA.

De Fluxionibus Fluentium *Si quantitas fracta rationalis fluat, ejus fluxio quantitas erit fracta; cujus, minimis ſcilicet quantitatibus expoſitæ, denominator vel quadratus erit, vel ex poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis etiam, cum quadraticis compoſitus.*

Fluat quantitas fracta algebraicè rationalis $\frac{X}{Y}$, hiſce quidem, X, Y, minimis expoſita. Hujus fluxio quantitas erit fracta $\frac{\dot{Y}X - X\dot{Y}}{Y^2}$: quæ, ſi quantitates $\dot{Y}X - X\dot{Y}$, Y^2 inter ſe ſint primæ, his quidem minimis expoſita erit, et denominatorem habet Y^2 quadratum. Quantitatum autem, $\dot{Y}X - X\dot{Y}$ et Y^2, ſi non ſint inter ſe primæ, inveniatur maximus diviſor communis algebraicus, qui literâ z deſignetur. Quantitas z quantitates $\dot{Y}X - X\dot{Y}$, Y^2 dividens faciat U, S. Hiſce igitur U, S fluxio quantitatis $\frac{X}{Y}$ minimis exponetur. Nempe hoc modo $\frac{\dot{U}}{S}$. Dico denominatorem S ex poteſtatibus cubicis, vel etiam ultra-cubicis cum aliis quadraticis, compoſitum eſſe.

Quantitas z vel prima erit, vel ex primis compoſita. Sit primùm prima. Cùm igitur quantitas prima z quantitatem quadraticam Y^2 metiatur, radicem ejus Y eadem z metietur (Elem. VII. 32.) Quare z metietur $\dot{Y}X$. Sed metitur quoque hujus $\dot{Y}X$, aliuſque $X\dot{Y}$ differentiam. Quare et aliam illam $X\dot{Y}$ metitur. Sed non metietur X. Nam ſi metiatur illam, cùm oſtenſum ſit, eandem z quantitatem etiam Y metiri, duæ X, Y non erunt inter ſe primæ. Sed primas inter ſe poſuimus. Quantitas igitur prima z quæ non metitur X, cùm tamen $X\dot{Y}$ metiatur, neceſſariò metietur $\dot{Y}$ (Elem. VII. 32.) Metitur igitur z illam $\dot{Y}$. Et oſtenſum eſt metiri Y. Ponatur igitur z^n poteſtas illius z, elatiſſima earum quæ fluentem Y metiantur. Jam

rationali Q & factore ſurdo irreducibili R^{π}, & factoris ſurdi latus R non dividit factorem rationalem Q; erit $\lambda - 1 = \pi$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi}$. Sin factoris ſurdi latus R dividit factorem rationalem ſemel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+1}$: ſi dividit bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$: ſi ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$: & ſic deinceps (n). Prop. V.

3. Si Ordinata eſt fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis compoſito: reſolvendus eſt denominator in diviſores ſuos omnes primos (o). Et ſi diviſor ſit aliquis cui nullus alius eſt æqualis, curva quadrari nequit (p): ſin

cùm z^n metiatur fluentem Y, quantitatem quidem quadraticam Y^2 metietur quadratica z^{2n}, et fluxionem $\dot{Y}$ quantitas $z^{n-1}\dot{z}$ metietur. Sed oſtenſum eſt z metiri fluxionem $\dot{Y}$. Quare index ille $n-1$ non minor erit unitate, neque ſanè major. Non minor: quoniam ſi minor eſſet, quantitas $z^{n-1}\dot{z}$ non eſſet elatiſſima in poteſtatibus quantitatis z quæ fluxionem $\dot{Y}$ metirentur: neque igitur z^n elatiſſima quæ metiretur fluentem Y: quam tamen elatiſſimam poſuimus. Non major: quoniam ſi major eſſet unitate index illæ $n-1$, quantitas prima z non eſſet duarum $\dot{Y}X - X\dot{Y}$, et Y^2 maximus diviſor communis. Sed maximum poſuimus. Quare $n - 1 = 1$. Ergo $n = 2$. Et $2n = 4$. Quantitas igitur z^4 metietur quantitatem Y^2. Metiatur, et faciat T. Ut ſit $Tz^4 = Y^2$. Sed $S \times z = Y^2$. Quare $Tz^4 = S \times z$, et $Tz^3 = S$. Quantitatis igitur fractæ, $\frac{U}{S}$, denominator, S, compoſitus eſt ex poteſtate cubicâ primæ quantitatis z, cum aliâ quantitate T. Fractarum Rationalium.

Sed non ſit z quantitas prima. Ex primis igitur erit compoſita. Reſolvatur igitur z in diviſores ſui primos α, β, γ. Jam cùm α metiatur z, et z metiatur Y^2, idcirco illa α eandem Y^2 metietur. Ex eo autem quòd quantitas prima α quadraticam Y^2 metiatur, efficietur eandem α tum ſimplicem Y tum fluxionem $\dot{Y}$ metiri. Id enim iiſdem planè argumentis obtinendum erit, quibus priùs idem de quantitate z evicimus, cùm illam primam poſuiſſemus. Et pari ratione alii quantitatis z diviſores primi, β, γ, fluentem Y et fluxionem $\dot{Y}$ ſingulatim metientur. Quantitatum α, β, γ ponantur α^n, β^p, γ^q poteſtates elatiſſimæ, quæ quantitatem Y ſingulatim metiantur. Fluxionem igitur $\dot{Y}$ poteſtates, α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1}, ſingulatim metientur, neque illis ullæ quidem elatiores: quantitatem verò quadraticam Y^2 poteſtates α^{2n}, β^{2p}, γ^{2q} ſingulatim metientur. Jam cùm quantitatem Y metiantur primarum, α, β, γ, poteſtates illæ α^n, β^p, γ^q ſingulatim, factum quidem ex poteſtatum illarum omnium mutuâ in ſe multiplicatione, $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$, eandem Y metietur. (Hoc autem demonſtratione mox firmabimus.) Et factum $\alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1}$, fluxionem $\dot{Y}$ metietur, nimirum, quam illæ α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1} primarum poteſtates ſingulatim. Quantitatem denique quadraticam Y^2 factum $\alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q}$ metietur. Hinc efficitur quantitatem $\alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1}$ duarum $\dot{Y}X - X\dot{Y}$ et Y^2 communem eſſe diviſorem; et maximum quidem illum, qui ex poteſtatibus primarum α, β, γ compoſitus communis eſſe poteſt. Major enim ſi quis eſſet, eum ex elatioribus poteſtatibus componi oporteret. Ita verò fluxionem $\dot{Y}$ poteſtates quantitatum α, β, γ, elatiores quàm ſunt illæ α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1} ſingulatim metirentur. Cujus contrarium oſtendimus. Quantitatum igitur $\dot{Y}X - X\dot{Y}$, Y^2 erit illa $\alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1}$ diviſor communis maximus qui ex poteſtatibus illarum α, β, γ componi poterit. Eſt verò z duarum $\dot{Y}X - X\dot{Y}$, Y^2 diviſor maximus communis, et ex illarum α, β, γ poteſtatibus totus eſt compoſitus.

Quare z facto illi $\alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1}$ æqualis eſt. Sed cùm z dividens Y^2 fecerit S, erit

Prop. V. ſin duo vel plures ſint diviſores æquales, rejiciendus eſt eorum unus; & ſi adhuc alii duo vel plures ſint ſibi mutuò æquales, & prioribus

De Fluxionibus Fluentium

$sz = Y^2$, hoc eſt $s \times \alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1} = Y^2$. Sed illam Y^2 hæc $\alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q}$ metitur (oſtenſum enim.) Metiendo faciat T. Ut ſit $T \times \alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q} = Y^2$. Ergo $T \times \alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q} = s \times \alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1}$. Ac propterea $T \times \alpha^{n+1} \times \beta^{p+1} \times \gamma^{q+1} = s$. Quantitatis igitur fractæ $\frac{U}{s}$, quæ fluentis fractæ, $\frac{X}{Y}$, fluxio eſt, minimis expoſita; hujus denominator s compoſitus eſt ex quantitâte quâdam per literam T deſignata, et primarum α, β, γ poteſtatibus α^{n+1}, β^{p+1}, γ^{q+1}; quæ ſanè cubicis haud erunt depreſſiores. Nam cùm illæ α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1} ſint primarum α, β, γ poteſtates elatiſſimæ, quæ fluxionem $\dot{Y}$ metiantur, et oſtenſum ſit ipſas α, β, γ illam $\dot{Y}$ metiri, indicum illorum, $n-1$, $p-1$, $q-1$, nullus quidem unitate minor erit. Illorum igitur $n+1$, $p+1$, $q+1$, nullus ternario minor. Poteſtates igitur α^{n+1}, β^{p+1}, γ^{q+1} cubicis non erunt depreſſiores.

Quantitatis igitur fractæ $\frac{U}{s}$, quæ facta eſt ex illâ $\frac{\dot{Y}X - X\dot{Y}}{Y^2}$, illas $\dot{Y}X - X\dot{Y}$, Y^2 dividendo à z, quem maximum illæ communem diviſorem habent; hujus inquam quantitatis fractæ, ſic minimis expoſitæ, denominator s, in caſu utroque, ſive z prima fuerit ſive compoſita, totus erit compoſitus ex quantitate quâdam per literam T deſignatâ, et poteſtatibus quibuſdam, ſive ipſius z, ſive primorum ipſius z diviſorum, quæ cubicis non erunt depreſſiores.

Jam verò dico illam T ex poteſtatibus quadraticis totam eſſe compoſitam. Primùm enim, ſi z prima ſit, erit z^2 quantitatis z poteſtas, earum quæ Y metiantur elatiſſima (per ea quæ in caſu primo jam antè oſtenſa ſunt.) Metiatur igitur z^2 illam Y, et faciat t. Ut ſit $z^2 \times t = Y$. Erit igitur $z^4 \times t^2 = Y^2$. Sed poſitum eſt $z^4 \times T = Y^2$. Quare $T = t^2$.

In altero caſu, quando z eſt quantitas compoſita, metiatur $\alpha^n \times \ell^p \times \gamma^q$ fluentem Y et t faciat. Ut ſit $\alpha^n \beta^p \gamma^q \times t = Y$; erit igitur $\alpha^{2n} \beta^{2p} \gamma^{2q} \times t^2 = Y^2$. Sed poſitum erat $T \times \alpha^{2n} \beta^{2p}, {}^{2q} = Y^2$. Unde $T = t^2$.

In caſu igitur utroque quantitas T quadraticæ t^2 æqualis erit. Unde ſi t prima ſit nihilominus T quadratica erit. Si t non ſit prima, reſolvatur ea in diviſores ſui primos, π, ρ, σ; ut ſit $t = \pi \times \rho \times \sigma$. Erit igitur t^2 ſive T, huic facto $\pi^2 \times \rho^2 \times \sigma^2$ æqualis. Quantitas igitur T ex quadraticis tota componetur; pluribus quidem eis, ſi t ſit compoſita; ſi prima ſit t, ex unâ illa t^2.

Quantitatis igitur fractæ $\frac{U}{s}$ denominator s, quem oſtendimus ex quantitate T & poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis, totum eſſe compoſitum, is quidem ex cubicis quibuſdam, vel ultrà-cubicis, et aliis quadraticis totus componetur. Q. E. D.

2. Illud modò demonſtratione nobis firmandum eſt, quod aſſumpſimus, factum ex quantitatum primarum poteſtatibus, quæ aliam aliquam ſingulatim metiantur, id eandem metiri.

Sint igitur quantitates duæ primæ α, β quæ aliam A metiantur. Et ſint α^n, β^p illarum α, β poteſtates quæ illam A ſingulatim metiantur. Dico $\alpha^n \times \beta^p$ eandem A metiri. Metiatur enim α^n illam A, et faciat a. Ut ſit $\alpha^n \times a = A$. Jam cùm β^p metiatur A, metitur certè $\alpha^n \times a$. Sed β^p non metitur α^n, ad quam utique prima eſt (Elem. IX 13.) Metitur igitur illam a. Nam ſi duæ quantitates inter ſe multiplicatæ aliam fecerint, factam verò alia aliqua metiatur, ea, ſi ad alteram initio poſitarum prima ſit, alteram metietur. Hoc enim iiſdem planè argumentis oſtendi poſſit, quibus evincitur ſecunda à tricesimâ libri ſeptimi Elementorum. Igitur β^p, cùm illam A metiatur è duabus, α^n, a, factam, et ad α^n prima ſit, metietur alteram a. Sed $\beta^p : a = \alpha^n \beta^p : \alpha^n a$. Quare $\alpha^n \beta^p$ metietur $\alpha^n a$; hoc eſt ipſam A metietur. Q. E. D.

A
α β
a

Sint jam tres primæ quantitates α, β, γ, quarum poteſtates α^n, β^p, γ^q quantitatem A ſingulatim

prioribus inæquales, rejiciendus eſt etiam eorum unus; & ſic in aliis omnibus æqualibus, ſi adhuc plures ſint: deinde diviſor qui relinquitur, vel contentum ſub diviſoribus omnibus qui relinquuntur, Prop. V.

ſingulatim metiantur. Dico $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ eandem metiri. Metiatur α^n quantitatem A et faciat a. Fractarum Rationalium.

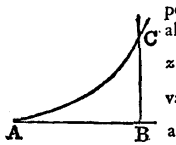
A
α β γ
a

Jam β^p metietur a, id enim ut priùs oſtendetur. Sed pari ratione γ^q eandem a metietur. Quare factum etiam $\beta^p \times \gamma^q$ metietur eandem a, per caſum priorem. Sed $\beta^p \times \gamma^q : a = \alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q : \alpha^n a$. Quare $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ metietur $\alpha^n a$; hoc eſt ipſam A metietur.

Et ſimili argumentatione, quotcunque poſitæ fuerint quantitates primæ, veritatem aſſumpti uſque probabimus. Q. E. D.

3. Propositione noſtrâ ſic tandem ex omni parte firmatâ, illius ope, veritas ejus, quod à Newtono dictum eſt, manifeſta fiet: Curvam utique, cujus ordinata ſit fracta rationalis, ſi fractæ illius, minimis expoſitæ, denominator in diviſoribus ſui primis ullum habeat, cui alius non inveniatur æqualis, eam curvam non poſſe quadrari: non poſſe utique definitâ quadraturâ, per æquationem Algebraicam, nominibus finitam, exponendâ. Nam per ſeries quidem infinitas nihil obſtat, quo minùs talis etiam curvæ area, propiùs ſaltem quàm pro differentiâ datâ, æſtimari poſſit.

4. Sit enim quantitas fracta rationalis $\frac{U}{s}$, his U, s minimis expoſita: ſignificantibus utique literis U, s, multinomia Algebraica rationalia, ex poteſtatibus ſimplicis alicujus quantitatis z compoſita. Denominator autem s in diviſoribus ſui primis habeat aliquem α, cui alius non inveniatur æqualis. Sit curva ABC, cujus abſciſſâ AB per literam z ſignificatâ, ordinata BC quantitati $\frac{U}{s}$ ſemper ſit æqualis. Dico hanc curvam, aliter ac per ſeriem infinitam non poſſe quadrari. Quadretur enim, et area ejus dicatur Q. Jam cùm Q area ſit curvæ, cujus ordinata eſt $\frac{U}{s}$, abſciſſa z, erit fluxio areæ Q æqualis huic $\frac{U}{s}\dot{z}$. Hoc eſt ſi ponatur $\dot{z} = 1$, erit $\dot{Q} = \frac{U}{s}$. Quantitas igitur Q aut fracta rationalis erit, aut ſeries infinita, ſiquidem fluxionem fractam rationalem habeat. Nam fluxio rationalis à fluente irrationali, ab unâ fluente ſimplici factâ, haud venerit: neque fracta à non fractâ rationali; niſi forte ex ſerie infinitâ. Sit igitur Q, modò eſſe poſſit, quantitas fracta rationalis. Quantitatis igitur fractæ rationalis Q, hujus eſt illa $\frac{U}{s}$, fracta rationalis, fluxio; cujus tamen, minimis quidem illis, U, s, expoſitæ, denominator s, cùm in diviſoribus ſui primis habeat quendam α, cui alius non inveniatur æqualis, certè neque quadratus ille erit, neque ex poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis aliiſque quadraticis totus quidem compoſitus. Hoc autem abſurdum eſt: pugnat enim cum propoſitione modò oſtenſâ. Non igitur fracta rationalis erit quantitas illa Q. Reſtat ut ſeries infinita ſit Q. Curva igitur ACB, niſi per ſeriem infinitam, non poteſt quadrari. Q. E. D.



5. Cæterum fluxiones fractas quaſdam rationales ex ſeriebus infinitis nonnunquam emanare, quod tacitè quidem aſſumpſimus; illud et poſſe fieri, et reverâ ſolere, ſatis ut opinor intelligatur vel hujus exemplo, $\frac{\dot{z}}{1+z}$, quæ ex hac ſerie infinitâ, $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 -$, emanârit. Hujus enim ſeriei fluxio erit, $\dot{z} - z\dot{z} + z^2\dot{z} - z^3\dot{z} + z^4\dot{z} -$, $= \frac{\dot{z}}{1+z}$. Hanc autem æquationem verè poni, ſi aliunde non ſatis notum ſit, ex eo intelligatur, quòd ſeriem $\dot{z} - z\dot{z} + z^2\dot{z} - z^3\dot{z} + z^4\dot{z} -$, in binomium $1+z$ multiplicando, illa $\dot{z}$ effecta fuerit; nominibus aliis omnibus ipſâ multiplicationis operâ deletis, ut videre eſt:

$\dot{z} - z$

Prop. V. linquuntur, ſi plures ſunt, ponendum eſt pro R; & ejus quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, (præterquam ubi contentum illud eſt quadratum vel cubus vel quadrato-quadratum, &c. quo caſu ejus latus ponendum eſt pro R, & poteſtatis index, 2 vel 3 vel 4, negativè ſumptus pro λ,) et Ordinata ad denominatorem R^2 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda (q).

4 Ut ſi Ordinata ſit $\frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis eſt, & denominatoris diviſores ſunt pares, nempe $z-1$, $z-1$, $z-1$, & $z+2$, $z+2$; rejicio magnitudinis utriuſque diviſorem unum, & reliquorum $z-1$, $z-1$, $z+2$ contentum, z^3-3z+2, pono pro R; & ejus quadrati reciprocum, $\frac{1}{R^2}$ ſeu R^{-2}, pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad denominatorem, R^2 ſeu $R^{1-\lambda}$, reduco, & fit $\frac{z^6-9z^4+8z^3}{z^3-3z+2}$, i. e. $\overline{z^3\times 8-9z+z^3\times 2-3z+z}^{-2}$. Et inde eſt $a=8$, $b=-9$, $c=0$, $d=1$, &c. $e=2$, $f=-3$, $g=0$, $b=1$, $\lambda-1=-2$, $\lambda=-1$, $\eta=1$, $\theta-1=3$, $\theta=4=r$, $s=3$, $t=2$, $v=1$. Et his in ſerie ſcriptis prodit area $\frac{z^4}{z^3-3z+2}$, terminis omnibus in totâ ſerie poſt primum evaneſcentibus.

5. Si denique Ordinata eſt fractio irreducibilis, & ejus denominator contentum eſt ſub factore rationali Q & factore ſurdo irreducibili

$$\dot{z}-z\,\dot{z}+z^2\dot{z}-z^3\dot{z}+z^4\dot{z}-\frac{}{1+z}$$
$$z\dot{z}-z^2\dot{z}+z\,\dot{z}-z^4\dot{z}+z^5\dot{z}-,$$
$$\dot{z}-z\dot{z}+z^2\dot{z}-z^3\dot{z}+z^4\dot{z}-z^5\dot{z}+,$$
$$\dot{z}\quad *\quad *\quad *\quad *\quad *$$

(q) Nempe ſi factum è diviſoribus relictis neque quadratum fuerit, neque cubus neque ullà denique poteſtas numero quopiam indicata. Sin fuerit, fit quidem poteſtas numero n indicata. Tum, facto illo dicto F, jubet **Newtonus quantitatem** R huic $F^{\frac{1}{n}}$ æqualem ſumi. Et **ordinatam ad** denominatorem R^{n+1} vult reduci. Cùm enim indices λ, $-n$ æquandos dixit, perinde eſt ac ſi hos $\lambda-1$, $-n-1$ æquandos diſſiſſet.

(r) Nempe harum præceptionum, ſicut earum quæ ſuprà traduntur (§ 2 & 3.) ea mens eſt: ut Ordinata, ſive illa rationalis ſive irrationalis ſit, ad denominatorem quàm maximè ſimplicem reducatur. Quod ita plerumque fiet, ſi quibus modis Newtonus præſcripſit, ea tractetur.

(s) Raphsoni in hoc ſymbolo ſecutus ſum emendationes, quas Stewarto quoque ſequi placuit, ſed celato Raphſoni nomine. (Vide *the Hiſtory of Fluxions, &c. by the late Mr. Joſeph Raphſon, A. M. and R. S. S.* 4to. *London*, 1715, *pag.* 42: et confer *Sir Iſaac Newton's two Treatiſes of the Quadrature of Curves and Analyſis by Equations, &c. explained by John Stewart, A. M.*

reducibili R^{π}, inveniendi ſunt lateris R diviſores omnes primi, & Prop. V. rejiciendus eſt diviſor unus magnitudinis cujuſque, & per diviſores qui reſtant, ſiqui ſint, multiplicandus eſt factor rationalis Q: & ſi factum æquale eſt lateri R, vel lateris illius poteſtati alicui cujus index eſt numerus integer, eſto index ille m, & erit $\lambda-1=-\pi-m$, & $R^{\lambda-1}=R^{-\pi-m}$ (r).

Ut ſi ordinata ſit $\frac{3q^5-q^4x+9q^3x^2-q^2x^3-6qx^4}{\overline{q^2-x^2}\times\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}^{\frac{1}{3}}}$ (s); quoniam factoris ſurdi latus, R, ſeu $q^3+q^2x-qx^2-x^3$, diviſores habet $q+x$, $q+x$, $q-x$, qui duarum ſunt magnitudinum; rejicio diviſorem unum magnitudinis utriuſque: & per diviſorem, $q+x$, qui relinquitur, multiplico factorem rationalem q^2-x^2. Et quoniam factum, $q^3+q^2x-qx^2-x^3$, æquale eſt lateri R, pono $m=1$, & inde, cùm π ſit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda-1=-\frac{4}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad denominatorem (t) $R^{\frac{4}{3}}$, & fit $x^0\times\overline{3q^6+2q^5x+8q^4x^2+8q^3x^3-7q^2x^4-6qx^5}\times\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}^{-\frac{4}{3}}$. Unde eſt $a=3q^6$; $b=2q^5$, &c. $e=q^3$; $f=q^2$, &c. $\theta-1=0$; $\theta=1=\eta$; $\lambda=-\frac{1}{3}$; $r=1$; $s=\frac{2}{3}$; $t=\frac{1}{3}$; $v=0$. Et his in ſerie ſcriptis prodit area $\frac{3q^3x+3qx^3}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}^{\frac{1}{3}}}$, terminis omnibus in ſerie totâ poſt tertium evaneſcentibus (u).

PROP.

A. M. Profeſſor of Math. in the Mariſhal College, Aberdeen, 4to. *London*, 1745, *page* 13.) Editio Princeps habuit $\frac{3q^5-q4x+9q^3xx-qqx^3-6x^3}{qq-xx\sqrt{\text{cub. }q^3+qqx-qxx-x^3}}$. Quod in pejus etiam mutatum Joneſius dedit, hoc modo, $\frac{3q^5-q^4x^4+9q^2x^2-q^2x^3-6x^3}{\overline{q^2-x^2}\times\overline{q^3+q\,x-qx^2-x^3}^{\frac{1}{3}}}$. Horum enim utrumque vitioſum eſſe, ex eo intelligere eſt, quòd neutrum quidem cum alio congruit, inferiùs expoſito, ejuſdem ordinatæ ſymbolo ad denominatorem $R^{\frac{4}{3}}$ reductæ; quod utraque editio, princeps illa, et Joneſii, uno modo protulerunt; quodque eo modo prolatum rectè ſe habere, ſigno eſt indicum ſeries ordine progrediens. Cæterùm vel ante Raphſonum, multo certè ante Stewartum, Harriſius ediderat, $\frac{3q^5-q^4x+9q^2xx-qqx^3-6qx^4}{qq-xx\sqrt[3]{q^3+qqx-qxx-x^3}}$. Rectè quidem omnia, niſi quòd indicem literæ q, in nomine numeratoris tertio, non ſatis emendaverat. (Vide *Lexicon Technicum, &c. by John Harris, D. D. &c. vol. 2. fol. London*, 1710, ſub voce *Quadrature.*)

(t) Sic emendavi, pro $R^{-\frac{4}{3}}$, quod editiones habuere ante hanc noſtram omnes, et quod ipſe quidem Raphſonus habuit.

(u) Stewarti in hoc ſymbolo emendationes ſequimur. Editio Joneſii, aliæque numeratorem habuere $3q^2x+3x^3$. Vitioſè. Nam ſi aræ exquirendæ ponatur hoc ſymbolum generale, $\frac{x}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}^{\frac{1}{3}}}\times A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+$, coefficientes hiſce æquationibus definientur. $A=3q^3$. $B=0$. $C=3q$. $D=0$. $E=0$. $F=0$.

PROP. VI.

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſcribantur R pro $e+fz^{n}+gz^{2n}+hz^{3n}+$ &c. & s pro $k+lz^{n}+mz^{2n}+nz^{3n}+$ &c. ſit autem ordinatim applicata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ in $a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+$ &c. et ſi terminorum, $e, f, g, h,$ &c. et $k, l, m, n,$ &c. rectangula ſint

$$\begin{array}{llll} ek & fk & gk & hk \ \&c. \\ el & fl & gl & hl \ \&c. \\ em & fm & gm & hm \ \&c. \\ en & fn & gn & hn \ \&c. \end{array}$$

Et ſi rectangulorum illorum coefficientes numerales ſint reſpectivè

$$\frac{\theta}{n}=r.\ r+\lambda=s.\ s+\lambda=t\ \ t+\lambda=v.\ \&c.$$

$$r+\mu=\acute{s}.\ s+\mu=\acute{t}.\ t+\mu=\acute{v}.\ v+\mu=\acute{w}.\ \&c.$$

$$\acute{s}+\mu=\acute{\acute{t}}.\ \acute{t}+\mu=\acute{\acute{v}}.\ \acute{v}+\mu=\acute{\acute{w}}.\ \acute{w}+\mu=\acute{\acute{x}}.\ \&c.$$

$$\acute{\acute{t}}+\mu=\acute{\acute{\acute{v}}}.\ \acute{\acute{v}}+\mu=\acute{\acute{\acute{w}}}.\ \acute{\acute{w}}+\mu=\acute{\acute{\acute{x}}}.\ \acute{\acute{x}}+\mu=\acute{\acute{\acute{y}}}.\ \&c.$$

Area

Hæ autem æquationes è formulâ generali Propoſitionis v. Newtonianæ veniunt, pro literis, $a, b, c,$ &c. $e, f, g,$ &c. $n, \theta, \lambda, r, s, t,$ &c. eis earum æſtimationibus in formulam illam ſubſtitutis, quas ſymbolum ordinatæ promit.

Itaque coefficiente ſecundâ, B, omnibuſque poſt tertiam c in nihilum abeuntibus, Area erit $\frac{x}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}^{\frac{1}{3}}} \times 3q^3+3qx^2 = \frac{3q^3x+3qx^3}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}^{\frac{1}{3}}}$.

(x) DEMONSTRATIO PROPOSITIONIS SEXTÆ.

Sunto juxta Propoſitionem quartam.

CURVARUM ORDINATÆ — AREÆ.

1°. $\theta ekA+\theta+\lambda n\ fkAz^{n}+\theta+2\lambda n\ gkAz^{2n}+\theta+3\lambda n\ hkAz^{3n}$
$+\theta+\mu n\ elAz^{n}+\theta+\lambda n+\mu n\ flAz^{2n}+\theta+2\lambda n+\mu n\ glAz^{3n}$ &c.
$+\theta+2\mu n\ emAz^{2n}+\theta+\lambda n+2\mu n\ fmAz^{3n}$
$+\theta+3\mu n\ enAz^{3n}$
$\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \mid Az^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$

2°.

PROP. VI.

Area curvæ erit hæc

$$z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} \text{ in } + \frac{\frac{1}{n}a}{rek}$$
$$+\frac{\frac{1}{n}b\ \begin{matrix}-ifk\\-i'el\end{matrix}\ \text{A}}{\overline{r+1}\times ek}z^{n}$$
$$+\frac{\frac{1}{n}c\ \begin{matrix}-\overline{s+1}\times fk\\-s'+1\times el\end{matrix}\ \text{B}\ \begin{matrix}-igk\\-i'fl\\-i''em\end{matrix}\ \text{A}}{\overline{r+2}\times ek}z^{2n}$$
$$+\frac{\frac{1}{n}d\ \begin{matrix}-\overline{s+2}\times fk\\-s'+2\times el\end{matrix}\ \text{C}\ \begin{matrix}-\overline{t+1}\times gk\\-t'+1\times fl\\-t''+1\times em\end{matrix}\ \text{B}\ \begin{matrix}-vhk\\-v'gl\\-v''fm\\-v'''en\end{matrix}\ \text{A}}{\overline{r+3}\times ek}z^{3n}$$
$$+ \&c.$$

Ubi A denotat termini primi coefficientem datam, $\frac{\frac{1}{n}a}{rek}$, cum ſigno ſuo + vel −; B coefficientem datam ſecundi; c coefficientem datam tertii; & ſic deinceps. Terminorum vero, $a, b, c,$ &c. $e, f, g,$ &c. $k, l, m,$ &c. unus vel plures deeſſe poſſunt.

Demonſtratur Propoſitio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hîc obtinent. Pergit autem ſeries talium Propoſitionum in infinitum, & progreſſio ſeriei manifeſta eſt (x).

DEMONSTRATIO

2°. $\overline{\theta+n}ekBz^{n}+\overline{\theta+n}+\lambda n\ fkBz^{2n}+\overline{\theta+n}+2\lambda n\ gkBz^{3n}$
$+\theta+n+\mu n\ elBz^{2n}+\theta+n+\lambda n+\mu n\ flBz^{3n}$ &c.
$+\theta+n+2\mu n\ emBz^{3n}$
$\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \mid Bz^{\theta+n}R^{\lambda}S^{\mu}$

3°. $\overline{\theta+2n}ekCz^{2n}+\theta+2n+\lambda n\ fkCz^{3n}$ &c.
$+\theta+2n+\mu n\ elCz^{3n}$
$\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \mid Cz^{\theta+2n}R^{\lambda}S^{\mu}$

4°. $\theta+3n\ ekDz^{3n}$ &c. $\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ $Dz^{\theta+3n}R^{\lambda}S^{\mu}$

Et ſi ſumma Ordinatarum ponatur æqualis ordinatæ $a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+$, $\times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1}$, ſumma arearum $z^{\theta}.R^{\lambda}.S^{\mu} \times A+Bz^{n}+Cz^{2n}+Dz^{3n}+$, æqualis erit areæ curvæ, cujus iſta eſt ordinata. Æquentur igitur ordinatarum membra homologa,

PROP. VII.

PROP. VII. THEOR. V.

Si pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$ &c. ſcribatur R ut ſuprà, & in Curvæ alicujus Ordinatâ, $z^{\theta\pm n\sigma}R^{\lambda\pm\tau}$, maneant quantitates datæ θ, η, λ, e, f, g, &c. et pro σ ac τ ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi detur Area unius ex curvis, quæ per ordinatas innumeras ſic prodeuntes deſignantur, ſi Ordinatæ ſunt duorum nominum in vinculo radicis; vel ſi dentur Areæ duarum ex curvis, ſi Ordinatæ ſunt trium nominum in vinculo radicis; vel Areæ trium ex curvis, ſi Ordinatæ ſunt quatuor nominum in vinculo radicis; & ſic deinceps in infinitum: dico quòd dabuntur Areæ curvarum omnium.

Pro nominibus hîc habeo terminos omnes in vinculo radicis, tam deficientes quàm plenos, quorum indices dignitatum ſunt in progreſſione arithmeticâ. Sic Ordinata $\sqrt{a^4-ax^3+x^4}$, ob terminos duos inter a^4 & $-ax^3$ deficientes, pro quinquinomio haberi debet. At $\sqrt{a^7+x^4}$ binomium eſt; & $\sqrt{a^4+x^4-\frac{x^5}{a^4}}$ trinomium;

PROP. VI.

et fiet $a=\theta ek_{A}$.

$$b=\overline{\theta+\lambda\eta}\times fk_{A}+\overline{\theta+\mu\eta}\times el_{A}+\overline{\theta+\eta}\times ek_{B}$$

$$c=\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gk_{A}+\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\times fl_{A}+\overline{\theta+2\mu\eta}\times em_{A}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fk_{B}+\overline{\theta+\eta+\mu\eta}\times el_{B}+\overline{\theta+2\eta}\times ek_{C}.$$

$$d=\overline{\theta+3\lambda\eta}\times hk_{A}+\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\times gl_{A}+\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}\times fm_{A}+\overline{\theta+3\mu\eta}\times en_{A}+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times gk_{B}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta+\mu\eta}\times fl_{B}+\overline{\theta+\eta+2\mu\eta}\times em_{B}+\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times fk_{C}+\overline{\theta+2\eta+\mu\eta}\times el_{C}+\overline{\theta+3\eta}\times ek_{D}.$$

Ex quibus venient

$$A=\frac{a}{\theta ek}.\quad B=\frac{b-\overline{\theta+\lambda\eta}\times fk_{A}-\overline{\theta+\mu\eta}\times el_{A}}{\overline{\theta+\eta}\times ek}.$$

$$C=\frac{c-\overline{\theta+2\eta}\,gk_{A}-\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl_{A}-\overline{\theta+2\mu\eta}\,em_{A}-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\,fk_{B}-\overline{\theta+\eta+\mu\eta}\,el_{B}}{\overline{\theta+2\eta}\times ek}.$$

$$D=\frac{d-\overline{\theta+3\lambda\eta}\,hk_{A}-\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\,gl_{A}-\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}\,fm_{A}-\overline{\theta+3\mu\eta}\,en_{A}-\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\,gk_{B}-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl_{B}-\overline{\theta+\eta+2\mu\eta}\,em_{B}-\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\,fk_{C}-\overline{\theta+2\eta+\mu\eta}\,el_{C}}{\overline{\theta+3\eta}\,ek}$$

Jam

mium; cùm progreſſio jam per majores differentias procedat. PROP. VII. Propoſitio verò ſic demonſtratur.

CASUS I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ (y) & $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, & Areæ p_{A} & q_{B}, exiſtente R quantitate trium nominum $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$. Et cùm per Prop. III. ſit $z^{\theta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata eſt $\theta e+\overline{\theta+\lambda\eta}\times fz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſubduc ordinatas & areas priores de areâ & ordinatâ poſteriori, & manebit $\overline{\theta e-p+\theta\times f-q\times z^{\eta}+\theta\times g z^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ Ordinata nova curvæ, et $z^{\theta}R^{\lambda}-p_{A}-q_{B}$ ejuſdem Area. Pone $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$ (z), & Ordinata evadet $\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & Area $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta e_{A}-\theta f_{B}-\lambda\eta f_{B}$. Divide utramque per $\theta g+2\lambda\eta g$, & aream prodeuntem dic c; & aſſumptâ utcunque r, erit rc Area curvæ, cujus Ordinata eſt $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$. Et quâ ratione ex areis p_{A} & q_{B} aream rc, ordinatæ $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem, invenimus, licebit ex areis q_{B} & rc Aream quartam, puta sD, Ordinatæ $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem, invenire; & ſic deinceps in infinitum. Et par eſt ratio progreſſionis

Jam pone $\frac{\theta}{\eta}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, $t+\lambda=u$, $u+\lambda=w$

$r+\mu=\,'s$, $s+\mu=\,'t$, $t+\mu=\,'u$, $u+\mu=\,'w$

$s'+\mu=\,''t$, $'t+\mu=\,''u$, $'u+\mu=\,''w$

$''t+\mu=\,'''u$, $''u+\mu=\,'''w$

Et in areâ $z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}\times A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+$, in membro primo pro A, in ſecundo pro B, in tertio pro C, in quarto pro D, ſcribantur literarum A, B, C, D, æſtimationes illæ, quas æquationes jam ſuprà poſitæ, ſi noviſſimarum ope transformentur, promant; ita exſiſtet Areæ formula qualis à Newtono poſita eſt. Q. E. D.

Atque hæc eſt ſextæ propoſitionis demonſtratio, ad ſuperioris exemplar confecta, quam et ante nos Stewartus, in ſuis ad hunc locum commentariis, eodem ferè modo concinnatam dedit.

(y) In hâc demonſtratione ſymbola, $\theta-1$, $\lambda-1$, ponuntur pro θ, et λ enunciationis.

(z) NIMIRUM cùm id ſemper obtineat, ſecundum omnem literarum p, q æſtimationem, ut arearum differentia area ſit curvæ, cujus ordinata ordinatarum differentiæ æqualis ſit, obtinebit etiam, ſi p, q, earum ſumantur magnitudinum, quæ efficiant, ut duo prima ordinatarum differentiæ membra in nihilum ſingulatim abeant. Hoc autem efficietur ſi ſumatur $p=\theta e$, & $q=\theta f+\lambda\eta f$. Ita enim fiet $\theta e-p=0$, & $\theta f+\lambda\eta f-q=0$. Ponatur igitur $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$, atque ea conſequentur quæ Newtonus dicit.

(aa) Hæc

Prop. VII. progreſſionis ab areis B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ, $\theta+\lambda\eta$, & $\theta+2\lambda\eta$ aliquis deficit, & ſeriem abrumpit, aſſumatur area pA, in principio progreſſionis unius, & area qB, in principio alterius, & ex his duabus areis dabuntur areæ omnes in progreſſione utrâque (aa). Et contrà, ex aliis duabus areis aſſumptis fit regreſſus, per analyſin, ad areas A & B; adeo ut ex duabus datis cæteræ omnes dentur. Q. E. O.

Hic eſt caſus Curvarum ubi ipſius z index θ augetur vel diminuitur perpetuâ additione vel ſubductione quantitatis η. Caſus alter eſt curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

C A S. II.

Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda}$ (bb) et $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$, quibus areæ pA et qB jam reſpondeant, ſi in R, ſeu $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$, ducantur, ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $\overline{pe+pfz^{\eta}+pgz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, et $qez^{\eta}+qfz^{2\eta}+qgz^{3\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et (per Prop. III.) eſt $az^{\theta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata eſt $\overline{\theta ae+\overline{\theta+\lambda\eta}\times afz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times agz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$; et $bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata eſt $\overline{\theta+\eta\times bez^{\eta}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times bfz^{2\eta}+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times bgz^{3\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et

(aa) Hæc præciſè nimis et obſcurè quidem dicta ſunt, credo tamen hâc mente dici. "Si forte eveniat ut vel θ, vel $\theta+\lambda\theta$, vel $\theta+2\lambda\eta$, hoc eſt, ut in ſymbolo illo generali $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta aA-\overline{\theta+\lambda\eta}fB=\theta+2\lambda\eta\,gc$, coefficiens cujuſlibet arearum A, B, c nihilo æqualis ſit, hoc fortè ſi eveniat, nihilo minus, per eandem inveſtigationis viam dabuntur areæ omnes utriuſque progreſſionis; ſive illius quæ, initio ab illâ pA ſumpto, infinitè uſque aſcendit, ſive alterius, quæ, ab alterâ pB incipiens, infinitè uſque deſcendit; ſive utriuſque. Hæc autem explicatiùs mox dicam, ac verè dicta eſſe oſtendam.

(bb) Rurſum ponitur $\theta-1$, pro θ enunciationis.

(cc) Nempe hoc modo.
Propter coefficientem membri ſecundi nihilo æqualem, fiet
$p=-\frac{\theta af+\lambda\eta af+\theta be+\lambda\eta be+qe}{f}$. Rurſum, $p=-\frac{\theta ag+2\lambda\eta ag+\theta bf+\eta bf+\lambda\eta bf+qf}{g}$;
propter coefficientem membri tertii nihilo æqualem. Rurſum, propter coefficientem membri quarti nihilo æqualem, $q=-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b$.
Ex his autem efficietur $b=\frac{afg}{f^2-2ge}$; et $p=\frac{2\lambda\eta age}{f^2-2ge}-\theta a-\lambda\eta a$; et $q=\frac{\theta+\eta+2\lambda\eta}{2ge-f^2}afg$.
Jam verò cùm id ſemper obtineat, ut Arearum ſumma pA $+qB+az^{\theta}R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ curvæ ſit Area, cujus

Et harum quatuor Arearum ſumma eſt pA $+qB+az^{\theta}R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$; Prop. VII. & ſumma reſpondentium Ordinatarum

$$\begin{array}{llll}\overline{\theta ae+\overline{\theta+\lambda\eta}\times afz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times agz^{2\eta}+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times bgz^{3\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}. \\ +pe+\overline{\theta+\eta}\times be & +\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times bf & +1\times qg & \\ +1\times pf & +1\times pg & & \\ +1\times qe & +1\times qf & & \end{array}$$

Si terminus primus, tertius, & quartus, ponatur ſeorſim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae+pe=0$, ſeu $-\theta a=p$; per quartum $-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b=q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f}=b$. Unde ſecundus fit $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$; adeoque ſumma quatuor Ordinatarum eſt $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, & ſumma totidem reſpondentium Arearum eſt $az^{\theta}R^{\lambda}+\frac{2ag}{f}z^{\theta+\eta}R^{\lambda}-\theta aA-\frac{\overline{2\theta+2\eta+4\lambda\eta}}{f}agB$. Dividantur hæ ſummæ per $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$; & ſi quotum poſterius dicatur D, erit D Area curvæ, cujus Ordinata eſt quotum prius, $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$. Et eâdem ratione, ponendo omnes ordinatæ terminos, præter primum, æquales nihilo, poteſt Area curvæ inveniri, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$(cc). Dicatur area iſta c; & quâ ratione ex areis A & B inventæ ſunt areæ c ac D, ex his areis, c ac D, inveniri poſſunt aliæ duæ, E & F, ordinatis $z^{\theta-1}R^{\lambda-2}$ et $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-2}$ congruentes, & ſic deinceps in infinitum. Et, per analyſin contrariam, regredi licet ab areis E & F ad areas c ac D, & inde ad

cujus Ordinata ſummæ Ordinatarum eſt æqualis, ſi ſumantur b, p, q, earum magnitudinum, quæ efficiant, ut membra omnia ſummæ ordinatatarum poſt primum in nihilum ſingulatim abeant, erit pA $+qB+az^{\theta}R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata erit $\overline{\theta a+p}\times ez^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Quare $\frac{p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}.R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}}{\theta a+p\times e}$ erit Area curvæ, cujus Ordinata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$. Hoc eſt, ſi pro p, q, b ſcribantur earum æſtimationes illæ, quas è membris Ordinatæ ſecundo, tertio atque quarto, ſingulatim nihilo æquatis elicuimus, et pro Areâ curvæ cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſcribatur c, erit

$$\overline{az^{\theta}.R^{\lambda}+\frac{afg}{f^2-2ge}z^{\theta+\eta}R^{\lambda}+\overline{\frac{2\lambda\eta ge}{f^2-2ge}-\theta-\lambda\eta}\left|a\text{A}+\overline{\frac{\theta+\eta+2\lambda\eta}{2ge-f^2}}\right|afg\text{B}}\times\frac{f^2-2ge}{4\lambda\eta age^2-f^2\lambda\eta ae}=c.$$

Hoc eſt $\frac{\overline{f^2-2ge}\left|z^{\theta}.R^{\lambda}+fgz^{\theta+\eta}R^{\lambda}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\left|2ge-\overline{\theta+\lambda\eta}\right|f^2\right|\text{A}-\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\left|fg\text{B}\right.}{4ge-f^2\times\lambda\eta e}=c$. Quali etiam formâ ſymbolum areæ c, ſimili compingendi ratione, Stewartus protulit. Symbolum, quod in Hiſtoriâ ſuâ, capite undecimo, (p. 85.) Raphſonus poſuit, vitioſum eſt.

PROP. VII. areas A & B, aliasque quæ in progressione sequuntur. Igitur si index λ, perpetuâ unitatum additione vel subductione, augeatur vel minuatur, & ex Areis, quæ Ordinatis sic prodeuntibus respondent, duæ simplicissimæ habentur; dantur aliæ omnes in infinitum. Q. E. O.

CAS. III.

Et per casus hosce duos conjunctos, si tam index θ perpetuâ additione vel subductione ipsius η, quàm index λ perpetuâ additione

PROP. VII. EQUAT. CANON.

(dd) APERTIORA quidem sunt hæc, quàm ut explicatione egeant. Illud modò nobis agendum est, ut hujus Propositionis summam formulis quibusdam exponamus ad usum computandi accommodatis.

Hunc igitur in finem, Areæ curvarum quarum Ordinatæ sunt $pz^{\theta-1}{}_R{}^{\lambda-1}$, $qz^{\theta+\eta-1}{}_R{}^{\lambda-1}$, $rz^{\theta+2\eta-1}{}_R{}^{\lambda-1}$, $sz^{\theta+3\eta-1}{}_R{}^{\lambda-1}$, $tz^{\theta+4\eta-1}{}_R{}^{\lambda-1}$, $*z^{\theta+\sigma\eta-1}{}_R{}^{\lambda-1}$, harum inquam Areæ significentur notis $\not\beta_A$, q_B, r_C, s_D, t_E, $*$, $*$, $*$, π_Z. Tum, ope Casûs Primi hujus Propositionis, hæ elicientur Æquationes, quas Canonicas vocare liceat.

Primùm quidem, si quantitas R è duobus constet nominibus

1. $B = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A}{\theta+\lambda\eta \times f}$. 2. $A = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta} \times f B}{\theta e}$.

II. SI R ex tribus constet nominibus.

1. $C = \dfrac{z^{\cdot}{}_R{}^{\cdot} - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta} f B}{\theta+2\lambda\eta \times g}$.

2. $B = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta+2\lambda\eta} \times g C}{\theta+\lambda\eta \times f}$.

3. $A = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta} f B - \overline{\theta+2\lambda\eta} \times g C}{\theta e}$.

III. SI R ex quatuor constet nominibus.

1. $D = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta} f B - \overline{\theta+2\lambda\eta} \times g C}{\theta+3\lambda\eta \times b}$.

2. $C = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta} f B - \overline{\theta+3\lambda\eta} b D}{\theta+2\lambda\eta \, g}$.

3. $B = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta+2\lambda\eta} g C - \overline{\theta+3\lambda\eta} b D}{\theta+\lambda\eta \, f}$.

4. $A = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta} f B - \overline{\theta+2\lambda\eta} g C - \overline{\theta+3\lambda\eta} b D}{\theta e}$.

DENIQUE si quantitas R ex tot constet nominibus, quot sint in numero $\sigma + 1$ unitates

1. $Z = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta} f B - \overline{\theta+2\lambda\eta} g C - \overline{\theta+3\lambda\eta} b D - * - * - * - \overline{\theta+\sigma-1}\,\lambda\eta\, y Y}{\overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\, z}$.

designante

ditione vel subductione unitatis, utcunque augeatur vel minuatur, dabuntur areæ singulis prodeuntibus ordinatis respondentes. Q. E. O. PROP. VII.

CAS. IV.

Et simili argumento, si Ordinata constat ex quatuor nominibus in vinculo radicali, & dantur tres arearum, vel si constat ex quinque nominibus & dantur quatuor arearum, & sic deinceps: dabuntur Areæ omnes, quæ, addendo vel subducendo numerum η indici θ, vel unitatem indici λ, generari possunt. Et par est ratio Curvarum ubi Ordinatæ ex binomiis conflantur, & Area una earum, quæ non sunt geometricè quadrabiles, datur (dd). Q. E. O.

PROP.

designante z denominatoris coefficientem nominis extremi quantitatis R.

2. $Y = \dfrac{z^{\zeta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta} f B - \overline{\theta+2\lambda\eta} g C - \overline{\theta+3\lambda\eta} b D - * - * - * - \overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\, z Z}{\overline{\theta+\sigma-1}\,\lambda\eta\, y}$.

$* = *$
$* = *$
$* = *$

$D = \dfrac{z^{\theta}{}_R{}^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta} f B - \overline{\theta+2\lambda\eta} g C - * - * - * - \overline{\theta+\sigma-1}\,\lambda\eta\, y Y - \overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\, z Z}{\overline{\theta+3\lambda\eta}\, b}$.

2. ATQUE harum formularum ope optimè quidem explicantur ea, quæ de alicujus è coefficientibus hisce θ, θ+λη, θ+2λη defectu Newtonus dixit; saltem quæ Newtonum dicentem mihi videor audivisse. Primùm enim existente R quantitate trium nominum, θ deficiat. Hoc est ponatur θ = o. Nihilominus si detur B, dabitur quidem C per æquationem secundæ classis primam, quæ, posito θ = o, in hanc migraverit: $C = \frac{R^{\lambda} - \lambda\eta f B}{2\lambda\eta g}$. Si verò detur C, dabitur B per æquationem secundæ classis secundam, quæ posito θ = o, in hanc migraverit; $B = \frac{R^{\lambda} - 2\lambda\eta g C}{\eta f}$. Ex datis autem duabus B, C invenietur D; et ex datis C, D, invenietur E; eodemque usque modo progredi licebit, pro θ, illis η, 2η, 3η, 4η, pro C, illis D, E, F, pro B illis, C, D, E, pro A illis, B, C, D, in primam secundæ classis æquationem ordine substitutis. Nempe hoc modo, ut exemplis res magis elucescat;

$D = \dfrac{z^{\eta}{}_R{}^{\lambda} + \pi e B - \overline{\eta+\lambda\eta} f C}{\overline{\eta+2\lambda\eta}\, g}$.

$E = \dfrac{z^{2\eta}{}_R{}^{\lambda} - 2\pi e C - \overline{2\eta+\lambda\eta} f D}{\overline{2\eta+2\lambda\eta}\, g}$.

$F = \dfrac{z^{3\eta}{}_R{}^{\lambda} - 3\pi e D - \overline{3\eta+\lambda\eta} f E}{\overline{3\eta+2\lambda\eta}\, g}$.

In hoc igitur casu dabuntur areæ omnes progressionis ejus, quæ, ab illâ A initio sumpto, infinitè usque ascendet. Ipsa autem A, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem posuimus, illa quidem infinita erit; id quod æquatio secundæ classis tertia satis indicat; quæ, posito θ = o, in hanc migraverit. $A = \frac{R^{\lambda} - \lambda\eta f B - 2\lambda\eta g C}{o}$.

Prop. VIII.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$ &c. et $k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+$ &c. ſcribantur R & S, ut ſuprà, & in Curvæ alicujus Ordinatâ $z^{\theta\pm\eta\sigma}R^{\lambda\pm\tau}S^{\mu\pm\upsilon}$ maneant quanti-

Progreſſionis autem illius, quæ, ab illâ B incipiens, infinitè deſcendit, hujus quidem areæ omnes infinitæ erunt. Primùm enim eſſe A infinitam jam oſtendimus. Deſignet autem a curvam progreſſionis deſcendentis ab illâ A proximè inferiorem, ſive eam, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-\eta}R^{\lambda-1}$. Area a, ope tertiæ æquationis ſecundæ claſſis, invenienda eſt; ſcribendo, $-\kappa$ pro θ, a pro A, A pro B, B pro C; nempe hoc modo, $a=\frac{z^{-\eta}R^{\lambda}-\overline{\lambda\eta-\eta}fA-\overline{2\lambda\eta-\eta}gB}{-\eta c}$. Ubi numerator quantitatis fractæ, propter membrum, $\overline{\lambda\eta-\eta}fA$, infinitum, cùm reliqua finita ſint, totus quidem infinitus erit. Unde, cùm denominator ſit finitus, quantitas ipſa fracta infinita erit. Ergo area a infinita. Simili modo, ſi b deſignat aream progreſſionis deſcendentis ab illâ a proximè inferiorem, oſtendetur b infinita. Eodemque uſque modo progredi licebit. Omnes igitur hujus progreſſionis areæ poſt primam B infinitæ erunt.

3. Sed deficiat $\theta+2\lambda\eta$. Hoc eſt, fit $\theta+2\lambda\eta=0$, exiſtente nimirum $\theta=-2\lambda\eta$. Nihilominus, ſi detur A, dabitur B, per æquationem ſecundæ claſſis ſecundam; quæ, poſito $\overline{\theta+2\lambda\eta}=0$, in hanc migraverit $B=\frac{z^{-2\lambda\eta}R^{\lambda}+2\lambda\eta cA}{-\lambda\eta f}$. Vel ſi detur B, dabitur A per æquationem ſecundæ claſſis tertiam; quæ, poſito $\theta+2\lambda\eta=0$, in hanc migraverit: $A=\frac{z^{-2\lambda\eta}R^{\lambda}+\lambda\eta fB}{-2\lambda\eta e}$. E duabus autem B, A datis, dabitur a, quæ, in progreſſione deſcendente, ab illâ A proximè eſt inferior; è duabus A, a, dabitur rurſum proximè inferior b; è duabus a, b dabitur c, eodemque uſque modo progredi licebit. Omnes enim a, b, c, d ope tertiæ æquationis ſecundæ claſſis inveniendæ ſunt, pro θ, illis $-2\lambda\eta-\eta$, $-2\lambda\eta-2\eta$, $-2\lambda\eta-3\eta$, peo A, illis a, b, c, d, et pro B, illis A, a, b, c, pro c illis B, A, a, b ordine ſubſtitutis.

In hoc igitur caſu dabuntur areæ omnes progreſſionis ejus, quæ, ab illâ B initio ſumpto, infinitè deſcendit. Ipſa autem c, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem poſuimus, illa quidem infinita erit. Id quod æquatio prima ſecundæ claſſis ſatis indicat; quæ, poſito $\theta+2\lambda\eta=0$, in hanc migraverit, $c=\frac{z^{-2\lambda\eta}R^{\lambda}+2\lambda\eta eA+\lambda\eta fB}{0}$.

Ac propterea progreſſionis ejus, quæ ab illâ B incipiens, infinitè aſcendit, hujus quidem, hoc in caſu, areæ omnes infinitæ erunt. Id enim eâdem plane argumentandi ratione ex æquatione primâ efficietur, quâ in priore caſu ex tertiâ efficiebatur, contrariæ progreſſionis areas omnes, poſt primam B, infinitas eſſe.

4. Denique deficiat $\theta+\lambda\eta$. Hoc eſt, fit $\theta+\lambda\eta=0$, exiſtente utique $\theta=-\lambda\eta$. Jam ſi detur A, dabitur quidem c per æquationem ſecundæ claſſis primam; quæ, poſito $\theta+\lambda\eta=0$, in hanc migraverit: $c=\frac{z^{-\lambda\eta}R^{\lambda}+\lambda\eta eA}{\lambda\eta g}$. Vel ſi detur c, dabitur A per æquationem ſecundæ claſſis tertiam; quæ, poſito $\theta+\lambda\eta=0$, in hanc migraverit: $A=\frac{z^{-\lambda\eta}R^{\lambda}-\lambda\eta gC}{-\lambda\eta e}$. Ipſa vero B, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem poſuimus, illa quidem infinita erit. Id quod æquatio ſecunda claſſis ſecundæ ſatis indicat; quæ, poſito $\theta+\lambda\eta=0$, in hanc migraverit: $B=\frac{z^{-\lambda\eta}R^{\lambda}+\lambda\eta eA-\lambda\eta gC}{0}$.

Utriuſque autem progreſſionis, tam illius quæ ab illâ B incipiens infinitè aſcendit, quàm ejus quæ ab illâ A infinitè deſcendit, areæ quidem omnes, illis, A, C exceptis, in hoc caſu infinitæ erunt. Deſcendentis enim progreſſionis infinitas eſſe areas omnes poſt A, id quidem ex tertiâ æquatione ſecundæ claſſis efficietur, Aſcendentis omnes poſt B, id verò ex primâ; ſimili prorſus argumentandi ratione, quâ in primo caſu Deſcendentis, in ſecundo Aſcendentis progreſſionis, omnes, poſt primam utriuſque, infinitæ efficiebantur. 5. In

quantitates datæ θ, η, λ, μ, e, f, g, k, l, m, &c. et pro σ, τ, & υ, Prop. VIII. ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi dentur Areæ duarum ex curvis, quæ per Ordinatas ſic prodeuntes deſignantur, ſi quanti-

5. In ſummâ ſi ponatur $\theta=0$, datâ ſive A, ſive B, dabuntur areæ omnes progreſſionis inde ab illâ A aſcendentis. Alterius, à B deſcendentis, omnes infinitæ erunt.

Si ponatur $\theta+2\lambda\eta=0$, datâ ſive A, ſive B, dabuntur areæ omnes deſcendentis inde ab illâ B progreſſionis. Alterius, à B aſcendentis, omnes infinitæ erunt.

Denique ſi ponatur $\theta+\lambda\eta=0$, ſi duarum A, C detur altera, dabitur altera quoque. Præter illas A, C, omnes utriuſque progreſſionis infinitæ erunt.

Præcisè igitur et breviter loquenti, cujus generis Newtonus nimium amans erat, dicere quodam modo liceat, è datis illis p A, q B omnes in utràque progreſſione dari. Si quidem unâ illâ inveſtigationis viâ, à Newtono traditâ, quæ omninò æſtimari poſſunt, harum juſtæ invenientur æſtimationes; quarum verò infinitas omnem æſtimationem fugiit, de iis id ipſum duntaxat innoteſcet, infinitas eas eſſe.

6. Cæterùm quæ de curvis trimonialibus diſſeruimus, ea, ſi operæ pretium eſſet, quod vix cenſeo, ad alias facilè transferrentur. Illud verò minimè nobis reticendum eſt, Æquationes Canonicas primæ & ſecundæ claſſis, Stewartum Abredonenſem ante nos protuliſſe.

7. In ſecundo Propoſitionis hujus caſu, eam ſecutus eſt Newtonus demonſtrandi rationem, quâ nulla certè vel evidentiæ plus vel firmitatis habeat; ad æquationes tamen, ſive Canonicas, ſive pro re natâ, inferendas, minùs, ut videtur, accommodatam; tum propter creſcentem uſque, quo quantitas R plurium fuerit nominum, notarum multitudinem, tum verò maximè propter non ſatis manifeſtam, ex pancis quibuſdam formulis primis, continuationis legem. Nos igitur aliam propoſitionis in hoc caſu demonſtrationem apponemus, Newtonianâ non minùs generalem; quæ per viam planè contrariam, ex datis primùm infimi ordinis, quot opus fuerit, curvarum areis, elatiorum areas pedetentim venari docet; tum, converſis formulis, ab elatioribus ad inferiores deſcenſus rationem indicat, et Æquationes Canonicas, è Newtonianis ægrè quidem eliciendas, tantùm non ſponte promit. Neque verò noſtra eſt hæc Demonſtratio, ſed Maclaurini. (Vide *Treatiſe of Fluxions by Colin Maclaurin, Edinburgh*, 1742, § 790) Prop. VIII. Cas. II. Demon-

Sint Curvæ	A	B	C	D	E
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda-1}$.
Curvæ	$\dot{A}$	$\dot{B}$	$\dot{C}$	$\dot{D}$	$\dot{E}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda}$.
Curvæ	$\dot{A}$	$\dot{B}$	$\dot{C}$	$\dot{D}$	$\dot{E}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda+1}$.
Curvæ	$\dot{A}$	$\dot{B}$	$\dot{C}$	$\dot{D}$	$\dot{E}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda+2}$.

Dico primum datâ ſerie infimâ A, B, C, D, E, &c. ſuperiores omnes $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$, $\dot{E}$, &c. $\ddot{A}$, $\ddot{B}$, $\ddot{C}$, $\ddot{D}$, $\ddot{E}$, &c. $\dddot{A}$, $\dddot{B}$, $\dddot{C}$, $\dddot{D}$, $\dddot{E}$, uſque dari.

Nam cùm $\dot{A}$ area ſit curvæ cujuſdam, cujus abſciſſa eſt z, ordinata $z^{\theta-1}R^{\lambda}$; et cùm fluxio areæ æqualis ſit rectangulo ſub ordinatâ et fluxione abſciſſæ, erit $\dot{A}=z^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda}=z^{\theta-1}\dot{z}RR^{\lambda-1}$. Hoc eſt, propter R $=e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+$, $\dot{A}=z^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}\times e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+$, $=ez^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}+fz^{\theta+\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}+gz^{\theta+2\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}+hz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}+$, Jam verò $ez^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}=e\dot{A}$. $fz^{\theta+\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}=f\dot{B}$. $gz^{\theta+2\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}=g\dot{C}$. $hz^{\theta+3\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1}=h\dot{D}$.

Quare $\ddot{A}=e\dot{A}+f\dot{B}+g\dot{C}+h\dot{D}+$,
et $\dot{A}=eA+fB+gC+hD+$,

PROP. VIII. quantitates R & s ſunt binomia, vel ſi dentur Areæ trium ex curvis, ſi R & s conjunctim ex quinque nominibus conſtant, et ſic deinceps

STRATIO MACLAURINI

Simili modo oſtendetur $B = eB + fC + gD + hE +$,
$C = eC + fD + gE + bF +$,
$D = eD + fE + gF + bG$, eodemque uſque modo.

Datâ igitur ſerie infimâ A, B, C, D, E, dabitur A, B, C, D, E, ſeries proximè ſuperior. Eodemque modo, quo hæc ex ſerie infimâ, ex hâc invenietur hâc ipſâ proximè ſuperior. Nimirum A, B, C, D, E. Datâque A, B, C, D, E, rurſum ex illâ invenietur A, B, C, D, eodem modo quo A, B, C, &c. ex infimâ.

Eodemque modo pedetentim uſque progredi licebit.

Dico præterea ex unâ areâ A, ſi quantitas R duobus tantùm conſtet nominibus, è duabus A, B, ſi tribus, è tribus A, B, C, ſi quatuor; ſemper ex areis infimæ ſeriei unâ paucioribus quàm ſunt nomina quantitatis R, areas omnes progreſſionum omnium uſque dari.

Nam ſi R duorum ſit nominum, datâ A, dabitur B et ſeries tota A, B, C, D, per caſum primum; quare reliquæ omnes dabuntur. Rurſum ſi R trium ſit nominum, datis areis duabus A, B, dabitur tertia C, et ſeries tota A, B, C, D, per caſum primum. Unde ſeries reliquæ dabuntur. Et, quotvis demum nominum ſit quantitas R, viget uſque ſimilis ratiocinatio.

Atque hæc eſt demonſtratio illa cujus fundamenta Vir ſummus Maclaurinus jecit, minùs tamen accuratè eam, quàm nos fecimus, deduxit.

8. JAM verò Æquationes Canonicæ conficientur, ſi in æquationem illam $A = eA + fB + gC + bD$, illarum B, C, D, E æſtimationes ſubſtituantur, ex Canonicis primi caſûs petendæ. Nempe, ſi R duobus conſtet nominibus

ÆQUAT. CANON PROP. VII. CAS. II.

1. $A = eA + fB = \frac{\lambda\eta eA + z^{\theta}R^{\lambda}}{\theta + \lambda\eta}$. (per Canonic. 1^m primæ Claſſis Caſûs prioris)

2. $A = \frac{\overline{\theta+\lambda\eta}\,A - z^{\theta}R^{\lambda}}{\lambda\eta e}$.

Si R tribus conſtet nominibus,

1. $A = eA + fB + gC = \frac{2\lambda\eta eA + \lambda\eta fB + z^{\theta}R^{\lambda}}{\theta + 2\lambda\eta}$. (Caſ. 1. Claſſ. 2. Can. 1.)

2. $B = \frac{\overline{\theta+2\lambda\eta}\,A - 2\lambda\eta eA - z^{\theta}R^{\lambda}}{\lambda\eta f}$.

3. $A = \frac{\overline{\theta+2\lambda\eta}\,A - \lambda\eta fB - zR^{\eta}}{2\lambda\eta e}$.

Si R quatuor conſtet nominibus.

1. $A = eA + fB + gC + bD = \frac{3\lambda\eta eA + 2\lambda\eta fB + \lambda\eta gC + z^{\theta}R^{\lambda}}{\theta + 3\lambda\eta}$. (Caſ. 1. Claſſ. 3. Can. 1.)

2. $C = \frac{-z^{\theta}R^{\lambda} - 3\lambda\eta eA - 2\lambda\eta fB + \overline{\theta+3\lambda\eta}\,A}{\lambda\eta g}$.

3. $B = \frac{-z^{\theta}R^{\lambda} - 3\lambda\eta eA - \lambda\eta gC + \overline{\theta+3\lambda\eta}\,A}{2\lambda\eta f}$.

4. $A = \frac{-z^{\theta}R^{\lambda} - 2\lambda\eta fB - \lambda\eta gC + \overline{\theta+3\lambda\eta}\,A}{3\lambda\eta e}$.

Denique ſi R tot conſtet nominibus quot ſunt in numero $\sigma + 1$ unitates.

1. $A = \frac{\sigma\lambda\eta eA + \overline{\sigma-1}\,\lambda\eta fB + \overline{\sigma-2}\,\lambda\eta gC + \overline{\sigma-3}\,\lambda\eta bD * * * + \lambda\eta yY + z^{\theta}R^{\lambda}}{\theta + \sigma\lambda\eta}$. (per Canonicam generalem Caſus prioris)

2. $Y =$

deinceps in infinitum: dico, quòd dabuntur Areæ curvarum omnium. PROP. VIII.

Demonſtratur ad modum propoſitionis ſuperioris (dd).

PROP.

2. $Y = \frac{-z^{\theta}R^{\lambda} - \sigma\lambda\eta eA - \overline{\sigma-1}\,\lambda\eta fB - \overline{\sigma-2}\,\lambda\eta gC - \overline{\sigma-3}\,\lambda\eta bD * * * + \overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\,A}{\lambda\eta y}$.

$A = \frac{-z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\sigma-1}\,\lambda\eta fB - \overline{\sigma-2}\,\lambda\eta gC - \overline{\sigma-3}\,\lambda\eta bD * * * - \lambda\eta yY + \overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\,A}{\sigma\lambda\eta e}$.

9. PER has æquationes definiuntur etiam areæ B, C, D, E. A, B, C, D, E. A, B, C, D, E, pro θ, illis $\theta+\eta$, $\theta+2\eta$, $\theta+3\eta$, pro illis A, B, C, D, illis, B, C, D, pro λ illis $\lambda+1$, $\lambda+2$, $\lambda+3$, pro A, B, C, D, E, illis A, B, C, D, E, vel A, B, C, D, E, vel A, B, C, D, E, ritè ſubſtitutis. Quæ ſi breviùs fortè dicta ſunt, ex iis tamen apertiſſimè, credo, intelligantur, quæ ad Canonicas prioris caſûs enodatè admodum diſſeruimus.

(dd) DEMONSTRATIO PROPOSITIONIS OCTAVÆ.

CAS. I.

SUNTO Curvarum trium Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, et Areæ pA, qB, rC, exiſtente R quantitate trium nominum, $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$, s duorum, $k + lz^{\eta}$. Et cùm per Prop. IV. ſit $z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}$ area curvæ, cujus ordinata eſt $\theta ek + \overline{\theta+\lambda\eta}\,fk + \overline{\theta+\mu\eta}\,el\,z^{\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gk + \overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl\,z^{2\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\,glz^{3\eta}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, ſubduc ordinatas et areas priores de areâ et ordinatâ poſteriore, et manebit $\theta ek - pl + \overline{\theta+\lambda\eta}\,fk + \overline{\theta+\mu\eta}\,el - q\,z^{\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gk + \overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl - r\,z^{2\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\,glz^{3\eta} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$ Ordinata novæ Curvæ, et $z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - pA - qB - rC$ ejuſdem Area. Et cùm hoc ſemper obtineat, in omni literarum, p, q, r, æſtimatione, ut arearum differentia ſit Area curvæ, cujus Ordinata ordinatarum differentiæ æqualis ſit; obtinebit etiam ſi p, q, r, earum ſumantur magnitudinum, quæ efficiant, ut ordinatarum differentiæ membra tria prima in nihilum ſingulatim abeant. Hoc autem efficietur, ſi ſumatur $p = \theta ek$, $q = \overline{\theta+\lambda\eta}\,fk + \overline{\theta+\mu\eta}\,el$. $r = \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gk + \overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl$. Sumantur igitur p, q, r, iſtarum magnitudinum. Itaque Ordinata evadet $\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\,glz^{3\eta} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, et Area $z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ekA - \overline{-\theta+\lambda\eta}\,fk\,B - \overline{-\theta+\mu\eta}\,el\,B - \overline{-\theta+2\lambda\eta}\,gk\,C - \overline{-\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl\,C$. Divide utramque à $\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\,gl$, et Aream diviſione factam dic D; et, aſſumtâ utcunque s, erit sD Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\eta-1}s^{\mu-1}$. Et quâ ratione ex areis pA, qB, rC aream sD ordinatæ $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$ congruentem invenimus, licebit ex areis qE, rC, sD, quartam, puta tE, ordinatæ $tz^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$ congruentem invenire; eodemque deinceps uſque modo.

Quòd ſi R, s utraque duorum tantùm nominum fuerit, vel trium utraque, pluriumve, eadem erit demonſtrandi ratio.

Hic eſt caſus Curvarum, in quibus ipſius z index θ augetur vel diminuitur perpetuâ additione, vel ſubductione, quantitatis η. Secundus caſus eſt Curvarum, in quibus index λ vel μ augetur, vel diminuitur, unitatibus.

CAS. II.

Puta indicem λ unitatibus perpetim augeri. Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda}s^{\mu-1}$, $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}s^{\mu-1}$, $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda}s^{\mu-1}$, ſi in R, ſeu $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$. ducantur, ac deinde ad R vicißim applicentur, evadunt $\overline{fe + pfz^{\eta} + pgz^{2\eta}} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, $\overline{qez^{\eta} + qfz^{2\eta} + qgz^{3\eta}} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, $\overline{rez^{2\eta} + rfz^{3\eta} + rfz^{4\eta}} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$. Et per Prop. IV. eſt $z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$; deſignantibus a, b, c, d, coefficientes è formulâ Propoſitionis IV. deſumendas. Et $bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}s^{\mu}$ Area erit curvæ, cujus Ordinata eſt $\dot{a}bz^{\eta} + \dot{b}bz^{2\eta} + \dot{c}bz^{3\eta} + \dot{d}bz^{4\eta} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$, de-

ſignantibus

DEMONSTRATIO

ſignantibus notis, $\grave{a}$, $\grave{b}$, $\grave{c}$, $\grave{d}$, coefficientes è formulâ Propoſitionis IV. deſumendas. Et harum quinque arearum ſumma eſt $pA+qB+rC+z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}+bz^{\eta}R^{\lambda}s^{\mu}$, et ſumma ordinatarum

$$\left.\begin{array}{l} a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} \\ \quad + \grave{a}bz^{\eta} + \grave{b}bz^{2\eta} + \grave{c}bz^{3\eta} + \grave{d}bz^{4\eta} \\ + pe + pfz^{\eta} + pgz^{2\eta} \\ \quad + qez^{\eta} + qfz^{2\eta} + qgz^{3\eta} \\ \quad + rez^{2\eta} + rfz^{3\eta} + rgz^{4\eta} \end{array}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}.$$

Jam ſi ſummæ ordinataram membra præter tertium omnia nihilo æquentur ſingulatim, nacti erimus quatuor æquationes, ad quatuor illas, b, q, p, r, quæ indefinitè poſitæ ſunt, definiendas. Tum ſi in ſymbolo ſummæ arearum, $pA+qB+rC+z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}+bz^{\eta}R^{\lambda}s^{\mu}$, pro p, q, r, b ponantur earum æſtimationes, quæ ex æquationibus illis quatuor venerint; habebimus Aream Curvæ, cujus Ordinata erit $\overline{c+\grave{b}b+pg+qf+re}|z^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$. Et utramque, aream dico et ordinatam, ab illâ $\overline{c+\grave{b}b+pg+qf+re}|$ dividendo, habebimus Aream curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$. Dicatur illa area F.

Simili ratione, ſi ſummæ ordinatarum membra præter ſecundum omnia nihilo æquentur, invenietur Area Curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$. Dicatur area illa E.

Atque rurſum ſi membra omnia ſummæ ordinatarum præter primum nihilo æquentur, inveniretur Area curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$. Dicatur area illa D. Et quâ ratione ex areis tribus A, B, C, inventæ ſunt areæ D, E, F, ex tribus illis D, E, F, inveniri poſſunt tres aliæ G, H, K; eodemque deinceps uſque modo.

ALITER.

Et ad computandi uſum magis accommodatè.

	A	B	C	D
SINT Curvæ				
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}s^{\mu-1}$.
Curvæ	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda}s^{\mu-1}$.
Curvæ	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+1}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+1}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+1}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+1}s^{\mu-1}$.
Curvæ	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+2}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+2}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+2}s^{\mu-1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+2}s^{\mu-1}$.

Et progreſſio infinita fit.

Dico primùm datâ ſerie infinitâ A, B, C, D, E, ſuperiores omnes uſque dari.
Erit enim $\mathcal{A} = eA + fB + gC + bD +$,
Erit etiam $\mathcal{B} = eB + fC + gD + bE +$,
$\mathcal{C} = eC + fD + gE + bF$,
Et ſimili deinceps uſque modo. Hæc enim ſimili prorſus argumentatione oſtendentur, quâ in ſuperiore propoſitione oſtenſa ſunt. Datâ igitur ſerie infinitâ A, B, C, D, E, dabitur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, proximè ſuperior. Tum hâc datâ, dabitur etiam huic proxima, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, Eodemque modo pedetentim uſque progredi licebit.

Dico præterea è duabus areis A, B, ſi quantitates R, S, duorum utraquè ſint nominum, è tribus A, B, C, ſi altera duorum altera trium fuerit, ſemper ex areis infimæ ſeriei binario paucioribus quàm ſunt nomina quantitatum, R, S, ſimul ſumpta, Areas omnes progreſſionum omnium uſque dari.

Nam ſi, R, S, duorum tantùm utraque ſit nominum, datis A, B, dabitur tota ſeries A, B, C, D, per Caſum primum. Quare et reliquæ dabuntur, per ea quæ modò ſunt oſtenſa. Rurſum ſi duarum R, S, altera duorum, altera trium nominum fuerit, datis tribus A, B, C, dabitur ſeries tota prima, per caſum primum. Unde rurſum reliquæ dabuntur. Et quotvis demum nominum quantitatum R, S hæc vel illa fuerit, vigebit uſque ſimilis ratiocinatio.

Eodem modo Propoſitionem approbare licebit, ſi index μ augeatur, vel diminuatur, unitatibus.

CAS.

CAS. III.

PROP. VIII.

Si igitur tam index μ quàm index λ, perpetuâ additione, vel ſubductione, unitatum augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis ſingulatim reſpondentes.

CAS. IV.

Caſum ſecundum cum primo conjungendo, ſi tam index θ, perpetuâ additione vel ſubductione quantitatis n, quam indicum λ vel μ alteruter, perpetuâ additione vel ſubductione unitatis, augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis ſingulatim reſpondentes.

CAS. V.

Et caſum tertium cum primo conjungendo, ſi tam index θ, perpetuâ additione vel ſubductione quantitatis n, quam uterque λ, μ, perpetuâ unitatum additione vel ſubductione, augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis ſingulatim reſpondentes.

CAS. VI.

Et univerſè, ſi dentur Areæ duabus pauciores quàm ſunt nomina quantitatum R, S ſimul ſumpta, dabuntur omnes. Nam quotcunque nominum illæ R, S, fuerint, eadem erit demonſtrandi ratio, ſicut jam antè in caſu primo monuimus.

2. Reſtat ut æquationes Cano icas deſcribamus.

CANONICÆ PRIMI CASUS.

I. Si, quantitates R, S utraque è duobus conſtent nominibus

$$1.\ C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek\,A\,\frac{-\overline{\theta+\lambda n}|fk}{-\overline{\theta+\mu n}|el}\,B}{\overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl}$$

$$2.\ B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek\,A - \overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl\,C}{\overline{\theta+\lambda n}|fk+\overline{\theta+\mu n}|el}$$

$$3.\ A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}\,\frac{-\overline{\theta+\lambda n}|fk}{-\overline{\theta+\mu n}|el}\,B\,-\overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl\,C}{\theta ek}$$

II. Si R ex tribus conſtet nominibus, S è duobus.

$$1.\ D = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek\,A\,\frac{-\overline{\theta+\lambda n}|fk}{-\overline{\theta+\mu n}|el}\,B\,\frac{-\overline{\theta+2\lambda n}|gk}{-\overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl}\,C}{\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}|gl}$$

$$2.\ C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek\,A\,\frac{-\overline{\theta+\lambda n}|fk}{-\overline{\theta+\mu n}|el}\,B\,-\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}|gl\,D}{\overline{\theta+2\lambda n}|gk+\overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl}$$

$$3.\ B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek\,A - \frac{\overline{\theta+2\lambda n}|gk}{-\overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl}\,C\,-\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}|gl\,D}{\overline{\theta+\lambda n}|fk+\overline{\theta+\mu n}|el}$$

$$4.\ A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \frac{\overline{\theta+\lambda n}|fk}{-\overline{\theta+\mu n}|el}\,B\,\frac{-\overline{\theta+2\lambda n}|gk}{-\overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl}\,C\,-\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}|gl\,D}{\theta ek}$$

III. Si R, S ex tribus utraque conſtet nominibus

$z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}$

Prop. IX.

PROP. IX. THEOR. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter ſe quarum Ordinatæ ſunt reciprocè ut fluxiones abſciſſarum(ee).

Nam contenta ſub ordinatis & fluxionibus Abſciſſarum erunt æqualia; & fluxiones arearum ſunt ut hæc contenta.

COROL. I.

Si aſſumatur relatio quævis inter abſciſſas duarum curvarum, & inde per Prop. I. quæratur relatio fluxionum abſciſſarum, & ponantur Ordinatæ reciprocè proportionales fluxionibus, inveniri poſſunt innumeræ Curvæ, quarum Areæ ſibi mutuò æquales erunt (ff).

COROL. II.

Sic enim curva omnis, cujus hæc eſt ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo

Æquat. Canon. Prop. VIII. Cas. I.

$$1.\ E = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} s^{\mu} - \theta ek A \; \overline{-\theta+\lambda n}\,fk \; B \; \overline{-\theta+2\lambda n}\,gk \; C \; \overline{-\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \; D}{\overline{-\theta+\mu n}\,el \quad \overline{-\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \quad \overline{-\theta+\mu n}\,em \quad \overline{-\theta+2\lambda n+2\mu n}\,fm}{\overline{\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm}$$

$$2.\ D = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} s^{\mu} - \theta ek A \; \overline{-\theta+\lambda n}\,fk \; B \; \overline{-\theta+2\lambda n}\,gk \; C \; \overline{-\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm \; E}{\overline{-\theta+\mu n}\,el \quad \overline{-\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \quad \overline{-\theta+2\mu n}\,em}{\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl + \overline{\theta+\lambda n+2\mu n}\,fm}$$

$$3.\ C = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} s^{\mu} - \theta ek A \; \overline{-\theta+\lambda n}\,fk \; B \; \overline{-\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \; D \; \overline{-\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm \; E}{\overline{-\theta+\mu n}\,el \quad \overline{-\theta+\lambda n+2\mu n}\,fm}{\overline{\theta+2\lambda n}\,gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl + \overline{\theta+2\mu n}\,em}$$

$$4.\ B = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} s^{\mu} - \theta ek A \; \overline{-\theta+2\lambda n}\,gk \; C \; \overline{-\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \; D \; \overline{-\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm \; E}{\overline{-\theta+\lambda n}\,fk \quad \overline{-\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \quad \overline{-\theta+2\mu n}\,fm}{\overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el}$$

$$5.\ A = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} s^{\mu} - \overline{\theta+\lambda n}\,fk \; B \; \overline{-\theta+2\lambda n}\,gk \; C \; \overline{-\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \; D \; \overline{-\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm \; E}{\overline{-\theta+\mu n}\,el \quad \overline{-\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \quad \overline{-\theta+2\mu n}\,em}{\theta ek}$$

IV. Si

ponendo $\frac{n}{\nu} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta-n}{n}} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}^{\lambda}$ (gg). Prop. IX. Cor. III & IV.

COROL. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^n+cz^{2n}+\&c.} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta-n}{n}} \times \overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}^{\lambda}$.

COROL. IV.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^n+cz^{2n}+\&c.} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda} \times \overline{k+lz^n+mz^{2n}+\&c.}^{\mu}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu} = s$, & $z^s = x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta-n}{n}} \times \overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}^{\lambda} \times \overline{k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\&c.}^{\mu}$.

IV. Si R ex quatuor conſtet nominibus, s ex duobus.

$$1.\ E = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} s^{\mu} - \overline{\theta+\lambda n}\,fk \; B \; \overline{-\theta+2\lambda n}\,gk \; C \; \overline{-\theta+3\lambda n}\,hk \; D}{\overline{-\theta+\mu n}\,el \quad \overline{-\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \quad \overline{-\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl}{\overline{\theta+3\lambda n+\mu n}\,hl}$$

(ee) Dummodo ſimul à nihilo generari inceperint. Aliter enim altera alterâ dato major erit (Geometr. Flux. Prop. II.) Arearum autem partes ſimul genitæ vel ſic etiam æquales erunt.

(ff) Vide Geometr. Analyt. Prop. VIII.

(gg) Ponatur enim $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+}^{\lambda} = y$, et ſit v Ordinata, x Abſciſſa curvæ cujuſdam, cujus Area areæ alterius, cujus Ordinata ſit y Abſciſſa z, ſemper ſit æqualis. Abſciſſarum igitur fluxiones inverſas Ordinatarum inter ſe proportiones gerunt (ex hâc Prop.) Hoc eſt $\dot{z} : \dot{x} = v : y$. Sed propter $z^s = x$, erit $\dot{x} = sz^{s-1}\dot{z}$. Quare $v : y = \dot{z} : sz^{s-1}\dot{z} = 1 : sz^{s-1}$. Quare $v = \frac{y}{sz^{s-1}} = \frac{1}{s} z^{\theta-s} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+,}^{\lambda}$. Sed propter $\frac{n}{\nu} = s$, erit $\frac{1}{s} = \frac{\nu}{n}$. Et propter $z^s = x$, erit $z = x^{\frac{1}{s}}$, et $z^{\theta} = x^{\frac{\theta}{s}} = x^{\nu\theta}$, et $z^{\theta-s} = x^{\frac{\nu\theta-n}{n}}$. Et $z^n = x^{\frac{n}{s}} = x^{\nu}$. Ergo $z^{2n} = x^{2\nu}$; $z^{3n} = x^{3\nu}$; * * *; $z^{mn} = x^{m\nu}$. Quare $\frac{1}{s} z^{\theta-s} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+,}^{\lambda} = v = \frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta-n}{n}} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+,}^{\lambda}$. Q. E. D. Demonstratio Cor. II.

Similem hujus Corollarii demonſtrationem in commentariis ſuis Stewartus attulit.

Prop. IX. Cor. V. & VI.

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}^{\lambda}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}^{\lambda}$: id eſt $\frac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda}} \times \overline{f+ex^{\eta}}^{\lambda}$, ſi duo ſunt nomina in vinculo radicis: vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda}} \times \overline{g+fx^{\eta}+ex^{2\eta}}^{\lambda}$, ſi tria ſunt nomina; & ſic deinceps.

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}^{\lambda} \times \overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}^{\mu}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}^{\lambda} \times \overline{k+lz^{-\eta}+mx^{-2\eta}+\&c.}^{\mu}$: id eſt $\frac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda+\eta\mu}} \times \overline{f+ex^{\eta}}^{\lambda} \times \overline{l+kx^{\eta}}^{\mu}$, ſi bina ſunt nomina in vinculis radicum: vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda+\eta\mu}} \times \overline{g+fx^{\eta}+ex^{2\eta}}^{\lambda} \times \overline{l+kx}^{\mu}$, ſi tria ſunt nomina in vinculo radicis prioris, ac duo in vinculo poſterioris: & ſic in aliis.

Et

Demonstratio Cor. VII.

(hh) Editionem principem cum Stewarto ſequor. Editio Joneſii habuit $\frac{\eta-\delta}{\alpha\delta-\beta\eta}$. Vitioſe.

(ii) Hujus Corollarii hanc ferè demonſtrationem Stewartus attulit.

Hæ ſunt æquationes à Newtono poſitæ, præter illam ad curvam ſcilicet cujus abſciſſa z, ordinata y.

1. $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$. 2. $x=\frac{1}{s}z^{s}$. 3. $\lambda=\frac{\eta-\delta}{\alpha\delta+\beta\eta}$.

Ex quibus has alias deducere licet.

1. $\frac{1}{s}\frac{1}{s} = z$. 2. $\frac{\beta}{s}\frac{\beta}{s} = z^{\beta}$. 3. $\frac{\delta}{s}\frac{\delta}{s} = z^{\delta}$ (ex ſecundâ poſitarum). 4. $\eta-\eta s=\delta$ (ex primâ poſitarum). 5. $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\delta+\beta} = \lambda$ (per primam et tertiam poſitarum). 6. $\frac{\alpha+\beta-s\alpha}{s} = \frac{1}{\lambda}$ (per 4^m & 5^m deductarum).

Jam cùm Area curvæ cujus Abſciſſa eſt z Ordinata y, alterius areæ ſit æqualis, cujus Abſciſſa x, Ordinata v, idcirco abſciſſarum Fluxiones inverſas ordinatarum inter ſe proportiones gerent. Hoc eſt, erit $\dot{z}:\dot{x}=v:y$. Sed, per æquationem poſitarum ſecundam, $\dot{z}:\dot{x}=1:z^{s-1}$. Ergo $v:y=1:z^{s-1}=z:z^{s}$. Sed $z:z^{s}=\frac{1}{s}\frac{1}{s}:sx$ (per æquationes deductarum primam et poſitarum ſecundam). Ergo $v:y=\frac{1}{s}\frac{1}{s}:sx$. Hinc æquationes aliæ venient. Nempe, 7. $y=\frac{s-1}{s}\frac{s-1}{s}v$. 8. $y^{n}=\frac{sn-n}{s}\frac{sn-n}{s}v^{n}$. 9. $y^{n}=\frac{2sn-n}{s}\frac{2sn-n}{s}v$. Cæterùm $\frac{sn-n}{s}=-\frac{\delta}{s}$ (per æquationem deductarum quartam.) Unde noviſſima in hanc migrabit. 10. $y^{n}=s^{-\frac{\delta}{s}}x^{-\frac{\delta}{s}}v^{n}$. Ex hâc autem et tertiâ deductarum efficietur, 11. $y^{n}z^{\delta}=v^{n}$. Ac propterea $y^{2n}z^{2\delta}=v^{2n}$. $y^{3n}z^{3\delta}=v^{3n}$. $y^{4n}z^{4\delta}=v^{4n}$, eodemque uſque modo. Jam in æquationem ad curvam, cujus abſciſſa z, ordinata y, in hujus inquam æquationem à Newtono poſitam, pro z^{β}, y^{α}, $y^{n}z^{\delta}$, ſubſtituantur earum æſtimationes, æquationibus deductarum 2^a. 8^a. et 11^a expoſitæ; et æquatio illa in hanc tranſmutabitur. $s^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+hv^{3n}+,} = s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}} \times \overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+nv^{3n}+,}$. Utramque hujus æquationis partem dividat quantitas, $x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}} \times s^{\frac{\beta}{s}} \times \overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+,}$. Fiet $s^{\frac{s\eta-\eta-\delta}{s}}v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+hv^{3n}+,} \times \overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+,}^{-1} = x^{\frac{\beta+\alpha-s\alpha}{s}}$. Hoc eſt, per æquationem deductarum 6^a. $s^{-\frac{1}{\lambda}}v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+hv^{3n}+,} \times \overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+,}^{-1} = x^{\frac{1}{\lambda}}$. Hujus denique pars utraque evehatur ad gradum illum cujus index quantitas λ; fiet $\frac{1}{s}v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+hv^{3n}+,}^{\lambda} \times \overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+,}^{-\lambda} = x$. Q. E. D.

Et nota, quòd Areæ duæ æquales, in noviſſimis hiſce duobus Corollariis, jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si area in alterutrâ Curvâ adjacet abſciſſæ, area huic æqualis, in alterâ Curvâ, adjacet abſciſſæ productæ. Prop. IX. Cor. VII. & VIII.

COROL. VII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam, y, & Abſciſſam z, definiatur per æquationem quamvis affectam hujus formæ, $y^{\alpha} \times \overline{e+fy^{n}z^{\delta}+gy^{2n}z^{2\delta}+hy^{3n}z^{3\delta}+\&c.} = z^{\beta} \times \overline{k+ly^{n}z^{\delta}+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$ hæc figura, aſſumendo $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$, $x=\frac{1}{s}z^{s}$, & $\lambda=\frac{\eta-\delta}{\alpha\delta+\beta\eta}$ (hh), migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa x, ex datâ Ordinatâ v, determinatur per æquationem non affectam; $\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda} \times \overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+\&c.}^{\lambda} \times \overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+\&c.}^{-\lambda} = x$ (ii).

COROL. VIII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam, y, & Abſciſſam, z, definitur per æquationem quamvis affectam hujus formæ, $y^{\alpha} \times \overline{e+fy^{n}z^{\delta}+gy^{2n}z^{2\delta}+\&c.} = z^{\beta} \times \overline{k+ly^{n}z^{\delta}+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.} + z^{\gamma} \times \overline{p+qy^{n}z^{\delta}+ry^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$ hæc figura, aſſumendo $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$, $x=\frac{1}{s}z^{s}$, $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta\eta}{\eta-\delta}$, & $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma\eta}{\eta-\delta}$,

Demonstratio Cor. VII.

Prop. IX. Cor. IX. migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa, x, ex datâ Ordinatâ, v, determinatur per æquationem minùs affectam; $v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+\&c.} = s^{\mu}x^{\mu} \times \overline{k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+\&c.} + s^{\nu}x^{\nu} \times \overline{p+qv^{\eta}+rv^{2\eta}+\&c}$ (kk).

COROL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata eſt $\pi z^{\theta-1} \times \overline{\nu e+\nu+\eta fz^{\eta}+\nu+2\eta gz^{2\eta}+\&c.} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}\Big|^{\lambda-1}$ in $\overline{a+b \times \overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}\Big|^{\tau}}\Big|^{\omega}$, ſi ſit $\theta=\lambda\nu$, & aſſumantur $x=\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}\Big|^{\pi}$, $\sigma=\frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta=\frac{\lambda-\pi}{\pi}$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}\Big|^{\omega}$ (ll). Et nota, quòd Ordinata prior in hoc corollario evadit ſimplicior, ponendo $\lambda=1$, vel ponendo $\tau=1$; & efficiendo, ut radix dignitatis

(kk) Hujus Corollarii veritatem cum Stewarto ſic oſtendimus.

Demonstratio Cor. VIII. Hæ ſunt æquationes à Newtono poſitæ, præter illam ad Curvam ſcilicet cujus abſciſſa z, ordinata y. 1. $s=\frac{\nu-\delta}{\eta}$. 2. $x=\frac{1}{s}z^{s}$. 3. $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta\eta}{\nu-\delta}$. 4. $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma\eta}{\nu-\delta}$. Quarum duæ primæ eædem ſunt ac duæ primæ poſitarum corollarii ſuperioris. Cæterùm quatuor illarum $\dot{z}$, $\dot{x}$, v, y eadem erit in hoc, atque in illo fuit, proportionis convenientia. Quare deductæ etiam Corollarii ſuperioris, quarum ope æquationis ad Curvam tranſmutationes efficiebantur, hæ inquam omnes, præter quintam et ſextam, in hoc etiam obtinebunt. Utpote quæ omnes, præter illas, duabus poſitarum primis, & analogiâ illâ nituntur, quam analogiam huic cum illo communem diximus. Loco autem 5^{æ} & 6^{æ} corollarii ſuperioris, venient $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\delta+\beta} = \frac{1}{\mu}$ (ex primâ et tertiâ poſitarum) et $\frac{\alpha+\beta-\alpha s}{s} = \mu$ (è noviſſimâ, et quartâ deductarum Corollarii ſuperioris).

Ex primâ autem et quartâ poſitarum elicietur $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\delta+\gamma} = \frac{1}{\nu}$: et ex hâc et quartâ deductarum Corollarii ſuperioris, $\frac{\alpha+\gamma-\alpha s}{s} = \nu$. Præterea ex ſecundâ poſitarum elicietur, $z^{\gamma} = s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}$. Jam in æquationem ad curvam cujus abſciſſa z, ordinata y, in hujus inquam æquationem à Newtono poſitam, pro y^{α}, z^{β}, $y^{\eta}z^{\delta}$ ſubſtituantur earum æſtimationes æquationibus deductarum ſuperioris 2^{a}. 8^{a}. et 11^{a}. expoſitæ; et pro z^{γ} ſubſtituatur $s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}$; et æquatio illa in hanc tranſmutabitur; $s^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}} v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+bv^{3\eta}+,} = s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}} \times \overline{k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+,} + s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}} \times \overline{p+qv^{\eta}+rv^{2\eta}+}\Big|$. Hujus pars utraque à quantitate $s^{\frac{s\gamma-\alpha}{s}}x^{\frac{s\gamma-\alpha}{s}}$ dividatur; fiet $v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+bv^{3\eta}+,} = s^{\frac{\alpha+\vartheta-s\alpha}{s}}x^{\frac{\alpha+\vartheta-s\alpha}{s}} \times \overline{k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+,} + s^{\frac{\alpha+\gamma-s\alpha}{s}}x^{\frac{\alpha+\gamma-s\alpha}{s}} \times \overline{p+qv^{\eta}+rv^{2\eta}+,}$

Unde pro illis $\frac{\alpha+\beta-s\alpha}{s}$, $\frac{\alpha+\gamma-s\alpha}{s}$ ſcriptis μ, ν, veniet tandem æquatio quantitatum v, x, ab ipſo Newtono poſita. Q. E. D.

(ll) Ostendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

tatis extrahi poſſit, cujus index eſt ω; vel etiam ponendo $\omega=-1$, Prop. IX. Cor. X. & $\lambda=1=\tau=\sigma=\pi$, ut alios caſus præteream.

COROL. X.

Pro $\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}$ $\overline{\nu ez^{\nu-1}+\nu+\eta fz^{\nu+\eta-1}+\nu+2\eta gz^{\nu+2\eta-1}+\&c.}$ $\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}$ et $\overline{\eta lz^{\eta-1}+2\eta mz^{2\eta-1}+\&c.}$ ſcribantur R, r, s, & s reſpectivè; & Curva omnis cujus Ordinata eſt $\pi sr+\phi Rs \times R^{\lambda-1}s^{\mu-1} \times \overline{as^{-\nu}+bR^{\tau}}\Big|^{\omega}$ (mm), ſi ſit $\frac{\mu-\nu\omega}{\lambda} = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$, $\frac{\lambda-\pi}{\pi}=\vartheta$, & $R^{\pi}s^{\phi}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}\Big|^{\omega}$. (nn) Et nota, quòd Ordinata prior evadit ſimplicior, ponendo unitates pro

Demonstratio Cor. IX. (ll) Ostendimus quod Newtonus dicit hoc modo.
Hæ ſunt æquationes à Newtono poſitæ 1. $\theta=\lambda\nu$. 2. $x=\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+,}\Big|^{\pi}$. 3. $\sigma=\frac{\tau}{\pi}$. 4. $\vartheta=\frac{\lambda-\pi}{\pi}$. Ponantur præterea, 5. $\overline{\nu e+\nu+\eta fz^{\eta}+\nu+2\eta gz^{2\eta}+,}\Big| = R$. 6. $\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+,}\Big| = s$. 7. $\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+}\Big| = \Sigma$. 8. $\overline{\nu ez^{\nu-1}+\nu+\eta fz^{\nu+\eta-1}+\nu+2\eta gz^{\nu+2\eta-1}+,}\Big| = \Gamma$.
Ex his æquationibus hæ aliæ deducentur.
1. $x=\Sigma^{\pi}$ (ex 2^{a} & 7^{a} poſitarum) Ergo 2. $\frac{\dot{x}}{\pi\Sigma^{\pi-1}} = \dot{\Sigma}$. 3. $\dot{\Sigma} = \Gamma\dot{z}$ (per 7^{m} et 8^{m} poſitarum) 4. $s=\frac{\Sigma}{z^{\nu}}$ (ex ſextâ et ſeptimâ poſitarum) Ex hâc autem, et eâ quæ primùm deducebatur, veniet 5. $s = x^{\frac{1}{\pi}}z^{-\nu}$.
Datæ autem curvæ Ordinata ſignificabitur hoc ſymbolo; $\pi z^{\theta-1} \times R \times s^{\lambda-1} \times \overline{a+b\Sigma^{\tau}}\Big|^{\omega}$.
Curvæ tranſmutatæ, cujus abſciſſa x, Ordinata deſignetur literâ O.
Erit igitur $\dot{x} : \dot{z} = \pi z^{\theta-1} \times R \times s^{\lambda-1} \times \overline{a+b\Sigma^{\tau}}\Big|^{\omega} : O$. Sed (per æquationes 2^{m} & 3^{m} deductarum) efficitur $\dot{x} : \dot{z} = \Gamma : \frac{1}{\pi\Sigma^{\pi-1}}$. Ergo $\pi z^{\theta-1} \times R \times s^{\lambda-1} \times \overline{a+b\Sigma^{\tau}}\Big|^{\omega} : O = \Gamma : \frac{1}{\pi\Sigma^{\pi-1}}$. Ergo $O = \frac{z^{\theta-1} \times R}{\Gamma} \times \frac{s^{\lambda-1}}{\Sigma^{\pi-1}} \times \overline{a+b\Sigma^{\tau}}\Big|^{\omega}$. Sed (per æquationem deductarum quintam) $s^{\lambda-1} = x^{\frac{\lambda-1}{\pi}}z^{-\lambda\nu}$. Et (per æquationem deductarum primam) $\Sigma^{\pi-1} = x^{\frac{\pi-1}{\pi}}$. Quare $\frac{s^{\lambda-1}}{\Sigma^{\pi-1}} = x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}}z^{-\lambda\nu}$. Et (per æquationem deductarum primam) $\Sigma^{\pi-1} = x^{\frac{\pi-1}{\pi}}$. Quare $\frac{s^{\lambda-1}}{\Sigma^{\pi-1}} = x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}}z^{-\lambda\nu} = x^{\vartheta}z^{-\theta}$ (per æquationes poſitarum 4^{m} & 1^{m}). Hinc $O = \frac{z^{\theta-1}x^{\vartheta} \times R}{\Gamma} \times \overline{a+b\Sigma^{\tau}}\Big|^{\omega}$. Sed $z^{\theta-1} \times R = \Gamma$ (per æquationes quintam et octavam poſitarum). Ergo $O = \frac{x^{\vartheta} \times \Gamma}{\Gamma} \times \overline{a+b\Sigma^{\tau}}\Big|^{\omega} = x^{\vartheta} \times \overline{a+b\Sigma^{\tau}}\Big|^{\omega}$. Sed $\Sigma^{\tau} = x^{\frac{\tau}{\pi}}$ (per æquationem deductarum primam) $= x^{\sigma}$ (per æquationem poſitarum tertiam). Ergo $O = x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}\Big|^{\omega}$. Q. E. D.

(mm) Stewarti emendationem ſequor. Editiones ipſius priores habuere $\overline{as^{\nu}+bR^{\tau}}\Big|^{\omega}$; vitioſè.

(nn) Hujus Corollarii veritatem cum Stewarto ſic oſtendimus.
Hæ ſunt æquationes à Newtono poſitæ.
1. $\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+,}\Big| = R$.

Prop. X. pro τ, υ, & λ vel μ, & faciendo, ut radix dignitatis extrahi poſſit, cujus index eſt ω; vel ponendo $\omega=-1$, vel $\mu=0$.

PROP. X. PROB. III.

Invenire figuras ſimpliciſſimas, cum quibus Curva quævis geometricè comparari poteſt, cujus Ordinatim applicata, y, per æquationem non affectam ex datâ Abſciſſâ, z, determinatur.

CAS. I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta}az^{\theta}$, ut ex Prop. v. ponendo $b=0=c=d=f=g=b$, & $e=1$, facilè colligitur.

CAS. II.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda-1}$; et ſi Curva cum figuris rectilineis geometricè comparari poteſt, quadrabitur per Prop. v. ponendo $b=0=c=d$. Sin minùs, convertetur in aliam curvam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{a}{n}x^{\frac{\theta-n}{n}}\times\overline{e+fx+gx^{2}+\&c.}^{\lambda-1}$ per Corol. 2. Prop. IX. Deinde ſi de dignitatum indicibus $\frac{\theta-n}{n}$ & $\lambda-1$ (per Prop. VII.) rejiciantur unitates, donec dignitates illæ fiant quàm minimæ, devenietur ad figuras ſimpliciſſimas, quæ hâc ratione colligi poſſunt. Dein harum unaquæque, per Corol. 5.

Demonstratio 2. $\overline{vez^{\nu-1}+\nu+\eta fz^{\nu+\eta-1}+\nu+2\eta gz^{\nu+2\eta-1}+\&c.}=r$. 3. $\overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}=s$. 4. $\overline{vlz^{\nu-1}+2\nu mz^{2\nu-1}+\&c.}=s$. 5. $\frac{\mu-\upsilon\omega}{\lambda}=\frac{\upsilon}{\tau}=\frac{\phi}{\pi}$. 6. $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$. 7. $\frac{\lambda-\pi}{\pi}=9$. 8. $R^{\tau}s^{\phi}=x$.

Ex his autem hæ aliæ deducentur. 1. $\dot{R}=r\dot{z}$. 2. $\dot{s}=s\dot{z}$. 3. $\pi R^{\pi-1}s^{\phi}\dot{R}+\phi R^{\pi}s^{\phi-1}\dot{s}=\dot{x}$. Et ex his tribus veniet. 4. $\overline{r\pi R^{\pi-1}s^{\phi}+s\phi R^{\pi}s^{\phi-1}}\times\dot{z}=\dot{x}$.

Jam Curvæ tranſmutatæ, cujus abſciſſa x, hujus Ordinata deſignetur literâ O. Et cùm Curvæ datæ cujus abſciſſa z, ordinata ſit $\overline{\pi sr+\phi Rs}\times R^{\lambda-1}\times s^{\mu-1}\times\overline{as^{-\upsilon}+bR^{\tau}}^{\omega}$, ſive $\overline{r\pi s^{\mu}R^{\lambda-1}+s\phi R^{\lambda}s^{\mu-1}}\times\overline{as^{-\upsilon}+bR^{\tau}}^{\omega}$; erit $\dot{x}:\dot{z}=\overline{r\pi s^{\mu}R^{\lambda-1}+s\phi R^{\lambda}s^{\mu-1}}\times\overline{as^{-\upsilon}+bR^{\tau}}^{\omega}:O$. Sed $\dot{x}:\dot{z}=r\pi R^{\pi-1}s^{\phi}+s\phi R^{\pi}s^{\phi-1}:1$ (per æquationem deductarum quartam). Quare $r\pi R^{\pi-1}s^{\phi}+s\phi R^{\pi}s^{\phi-1}:1=\overline{r\pi s^{\mu}R^{\lambda-1}+s\phi R^{\lambda}s^{\mu-1}}\times\overline{as^{-\upsilon}+bR^{\tau}}^{\omega}:O$.

Unde $O=\frac{r\pi s^{\mu}R^{\lambda-1}+s\phi R^{\lambda}s^{\mu-1}}{r\pi R^{\pi-1}s^{\phi}+s\phi R^{\pi}s^{\phi-1}}\times\overline{as^{-\upsilon}+bR^{\tau}}^{\omega}$. Quantitatis autem fractæ denominator numeratorem algebraicè metitur, et quantitas divisione facta erit $R^{\lambda-\pi}s^{\mu-\phi}$. Quare $O=R^{\lambda-\pi}s^{\mu-\phi}\times\overline{as^{-\upsilon}+bR^{\tau}}^{\omega}$. Sed $R^{\tau}=x^{\frac{\tau}{\pi}}\times\Sigma^{-\frac{\phi\tau}{\pi}}$ (per æquationem poſitarum octavam). Et $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$ Cor. X. (per ſextam poſitarum) et $\frac{\phi\tau}{\pi}=\upsilon$ (per quintam poſitarum). Quare $R^{\tau}=x^{\sigma}\times\Sigma^{-\upsilon}$. Et $O=R^{\lambda-\pi}s^{\mu-\phi}\times\overline{as^{-\upsilon}+bx^{\sigma}\times s^{-\upsilon}}^{\omega}=R^{\lambda-\pi}s^{\mu-\phi-\upsilon\omega}\times\overline{a+bx^{\sigma}}^{\omega}$. Sed $\mu-\upsilon\omega=\frac{\lambda\phi}{\pi}$ (per æquationem poſitarum quintam). Quare $\mu-\phi-\upsilon\omega=\frac{\lambda\phi-\pi\phi}{\pi}$. Et $\frac{\lambda\phi-\pi\phi}{\pi}=\phi\vartheta$ (per æquationem poſitarum ſeptimam). Ergo $O=R^{\lambda-\pi}\Sigma^{\phi\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}^{\omega}$. Sed $R^{\lambda-\pi}=R^{\pi\vartheta}$ (per æquationem poſitarum ſeptimam). Et $R^{\pi\vartheta}=\frac{x^{\vartheta}}{\Sigma^{\phi\vartheta}}$ (per octavam poſitarum). Quare $R^{\lambda-\pi}\Sigma^{\phi\vartheta}=\frac{x^{\vartheta}\times\Sigma^{\phi\vartheta}}{\Sigma^{\phi\vartheta}}=x^{\vartheta}$. Et $O\,(=R^{\lambda-\pi}\Sigma^{\phi\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}^{\omega})=x^{\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}^{\omega}$. Q. E. D.

Unum moneo, quod tamen leviſſimum eſt; editiones hâc noſtrâ priores pro r, s, habuiſſe $\dot{r}$, $\dot{s}$, errore ut videtur ab editione principe in omnes poſteriores propagato.

5. Prop. IX. dat aliam, quæ nonnunquam ſimplicior eſt. Et ex his, per Prop. III. & Corol. 9 & 10. Prop. IX. inter ſe collatis, figuræ adhuc ſimpliciores quandoque prodeunt. Denique ex figuris ſimpliciſſimis aſſumptis, facto regreſſu, computabitur Area quæſita. Prop. X.

CAS. III.

Sit Ordinata $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda-1}$, & hæc figura, ſi quadrari poteſt, quadrabitur per Prop. v. Sin minùs, diſtinguenda eſt Ordinata in partes, $z^{\theta-1}\times a\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda-1}$, $z^{\theta-1}\times bz^{n}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda-1}$; &c. et per Caſ. II. inveniendæ ſunt figuræ ſimpliciſſimæ, cum quibus figuræ, partibus illis reſpondentes, comparari poſſunt.

Nam Areæ figurarum, partibus illis reſpondentium, ſub ſignis ſuis + & − conjunctæ, component Aream totam quæſitam.

CAS. IV.

Sit Ordinata $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}^{\lambda-1}$ in $\overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c}^{\omega-1}$; et ſi curva quadrari poteſt, quadrabitur per Prop. VI. Sin minùs, convertetur in ſimpliciorem, per Corol. 4. Prop. IX. ac inde comparabitur cum figuris ſimpliciſſimis, per Prop. VIII. et Corol. 6, 9 & 10. Prop. IX. ut fit in Caſu 2 & 3.

Prob. X. Cor. I. II. & III.

CASUS V.

Si Ordinata ex variis partibus conſtat, partes ſingulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ ſunt, & Curvæ illæ, quotquot quadrari poſſunt, ſigillatim quadrandæ ſunt; earumque Ordinatæ de Ordinatâ totâ demendæ. Dein Curva, quam Ordinatæ pars reſidua deſignat, ſeorſim (ut in Caſu 2, 3 & 4.) cum figuris ſimpliciſſimis comparanda eſt, cum quibus comparari poteſt. Et ſumma Arearum omnium pro Areâ curvæ propoſitæ habenda eſt.

COROL. I.

Hinc etiam Curva omnis, cujus Ordinata eſt radix quadratica affecta æquationis ſuæ, cum figuris ſimpliciſſimis, ſeu rectilineis ſeu curvilineis, comparari poteſt. Nam radix illa ex duabus partibus ſemper conſtat, quæ ſeorſim ſpectatæ non ſunt æquationum radices affectæ.

Proponatur æquatio $a^2y^2+z^2y^2=2a^3y+2z^3y-z^4$, & extracta radix erit $y=\frac{a^3+z^3+a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$; cujus pars rationalis, $\frac{a^3+z^3}{aa+zz}$, & pars irrationalis, $\frac{a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$, ſunt Ordinatæ curvarum, quæ, per hanc propoſitionem, vel quadrari poſſunt, vel cum figuris ſimpliciſſimis comparari, cum quibus collationem geometricam admittunt.

COROL. II.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur, quæ per Corol. 7. Prop. IX. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc propoſitionem, ſi quadrari poteſt, vel comparatur cum figuris ſimpliciſſimis, cum quibus comparari poteſt. Et hâc ratione curva omnis quadratur, cujus æquatio eſt trium terminorum. Nam æquatio illa, ſi affecta ſit, tranſmutatur in non affectam per Corol. 7. Prop. IX ac deinde per Corol. 2 & 5. Prop. IX. in ſimpliciſſimam migrando, dat vel quadraturam figuræ, ſi quadrari poteſt, vel curvam ſimpliciſſimam quâcum comparatur.

COROL. III.

Et curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam

fectam definitur, quæ per Corol. 8. Prop. IX. in æquationem quadraticam affectam migrat; vel quadratur per hanc propoſitionem & hujus Corol. 1. ſi quadrari poteſt, vel comparatur cum figuris ſimpliciſſimis, cum quibus collationem geometricam admittit. Prop. X.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ ſunt figuræ; ad regulas haſce generales ſemper recurrere nimis moleſtum eſſet: præſtat figuras, quæ ſimpliciores ſunt & magis uſui eſſe poſſunt, ſemel quadrare, & quaduraturas in Tabulam referre; deinde Tabulam conſulere, quoties ejuſmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis ſunt Tabulæ duæ ſequentes; in quibus z denotat Abſciſſam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream curvæ quadrandæ; & d, e, f, g, b, η ſunt quantitates datæ cum ſignis ſuis + & −.

TABULA

CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ QUADRARI POSSUNT.

CURVARUM FORMÆ			CURVARUM AREÆ
I		$dz^{n-1} = y$	$\frac{d}{n} z^n = t$
II		$\frac{dz^{n-1}}{e^2 + 2efz^n + f^2 z^{2n}} = y$	$\frac{dz^n}{ne^2 + nefz^n} = t$, vel $\frac{-d}{nef + nf^2 z^n} = t$
III	1	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n} = y$	$\frac{2d}{3nf} R^3 = t$, existente $R = \sqrt{e+fz^n}$
	2	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n} = y$	$\frac{-4e+6fz^n}{15nf^2} dR^2 = t$
	3	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^n} = y$	$\frac{16e^2-24efz^n+30f^2z^{2n}}{105nf^3} dR^3 = t$
	4	$dz^{4n-1}\sqrt{e+fz^n} = y$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^n-180ef^2z^{2n}+210f^3z^{3n}}{945nf^4} dR^3 = t$
IV	1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{2d}{nf} R = t$
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{-4e+2fz^n}{3nf^2} dR = t$
	3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{16e^2-8efz^n+6f^2z^{2n}}{15nf^3} dR = t$
	4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{-96e^3+48e^2fz^n-36ef^2z^{2n}+30f^3z^{3n}}{105nf^4} dR = t$

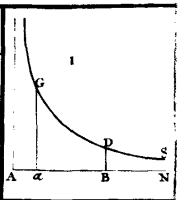
TABULA

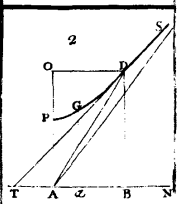
Between p. 378 and 379

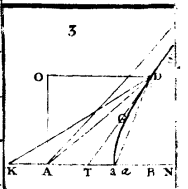
CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT.

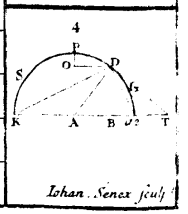
Sit jam aGD vel PGD vel GDS Sectio Conica cujus Area ad Quadraturam Curvæ propositæ requiritur, sitq; ejus Centrum A, Axis Ka, Vertex a, Semiaxis conjugatus AP, datum Abscissæ principium A vel a vel α, Abscissa AB vel aB vel $\alpha B = x$. Ordinata rectangula $BD = v$, et Area ABDP vel aBDG vel $\alpha BDG = s$, existente αG Ordinata ad punctum α. Jungantur KD, AD, aD; ducatur Tangens DT occurrens Abscissæ AB in T, & compleatur parallelogrammum ABDO. Et siquando ad quadraturam Curvæ propositæ requiruntur Areæ duarum Sectionum Conicarum, dicatur posterioris Abscissa ξ, Ordinata ν, et Area σ. Sit autem $\div$ differentia duarum quantitatum ubi incertum est utrum posterior de priori an prior de posteriori subduci debeat. Et in Forma sexta scribatur p pro $\sqrt{ff - 4eg}$.

CURVARUM FORMÆ		SECTIONIS CONICÆ: Abscissa	SECTIONIS CONICÆ: Ordinata		CURVARUM AREÆ
I.	1	$\frac{dz^{n-1}}{c+fz^n} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{c+fx} = v$	$\frac{1}{r}s = t = \frac{\alpha GDB}{r}$. Fig. 1.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{c+fz^n} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{c+fx} = v$	$\frac{d}{nf} z^n - \frac{e}{rf}s = t$.
	3	$\frac{dz^{3n-1}}{c+fz^n} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{c+fx} = v$	$\frac{d}{2nf} z^{2n} - \frac{de}{nf^2} z^n + \frac{e^2}{rf^2}s = t$.
II	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{c+fz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{c+fz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$	$\frac{2xv \div 4s}{n} = t = \frac{4}{n}$ ADGa . Fig. 3. 4.
	2	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{c+fz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{c+fz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$	$\frac{2d}{nf} z^{\frac{1}{2}n} + \frac{4cs - 2exv}{nf} = t$.
	3	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{c+fz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{c+fz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$	$\frac{2d}{3nf} z^{\frac{1}{2}n} - \frac{2de}{nf^2} z^{\frac{1}{2}n} + \frac{2e^2xv - 4e^2s}{nf^3} = t$.
III	1	$\frac{d}{z}\sqrt{c+fz^n} = y$	$\frac{1}{z^2} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$\frac{4de}{nf} \times \overline{\frac{v^3}{2ex} - s} = t = \frac{4dc}{nf}$ in aGDT, *vel in* APDB $\div$ TDB. Fig. 2. 3. 4.
		vel sic	$\frac{1}{z^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$	$\frac{8de^2}{nf^2} \times \overline{s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} + \frac{f^2v}{4e^2x}} = t = \frac{8de^2}{rf^2}$ in aGDA $+ \frac{f^2v}{4e^2x}$. Fig. 3. 4.
	2	$\frac{d}{z^{n+2}}\sqrt{c+fz^n} = y$	$\frac{1}{z^2} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$\frac{-2d}{n}s = t = \frac{2d}{n}$ APDB seu $\frac{2d}{n}$ aGDB . Fig. 2. 3. 4.
		vel sic	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{4de}{nf} \times \overline{s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{2e}} = t = \frac{4de}{nf} \times$ aGDK . Fig. 3. 4.
	3	$\frac{d}{z^{2n+2}}\sqrt{c+fz^n} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{-d}{n}s = t = \frac{d}{n} \times -$ aGDB *vel* BDPK . Fig. 4.
	4	$\frac{d}{z^{3n+2}}\sqrt{c+fz^n} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{3dfs - 2dv^3}{8ne} = t$.
IV	1	$\frac{d}{z\sqrt{c+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$\frac{4d}{nf} \times \frac{1}{2}xv \div s = t = \frac{4d}{nf}$ in PAD *vel in* aGDA . Fig. 2. 3. 4.
		vel sic	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{8de}{nf^2} \times \overline{s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e}} = t = \frac{8dc}{nf^2}$ in aGDA. Fig. 3. 4.
	2	$\frac{d}{z^{n+1}\sqrt{c+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$	$\frac{2d}{ne} \times \overline{s - xv} = t = \frac{2d}{ne}$ in POD *vel in* AODGa . Fig. 2. 3. 4.
		vel sic	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{4d}{nf} \times \frac{1}{2}xv \div s = t = \frac{4d}{nf}$ in aDGa. Fig. 3. 4.
	3	$\frac{d}{z^{2n+1}\sqrt{c+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{d}{ne} \times \overline{3s \div 2xv} = t = \frac{d}{ne}$ in 3aDGa $\div \Delta$aDB . Fig. 3. 4.
	4	$\frac{d}{z^{3n+1}\sqrt{c+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$	$\frac{10dfxv - 15dfs - 2dex^2v}{6ne^2} = t$





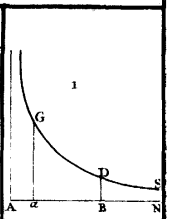


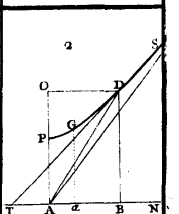


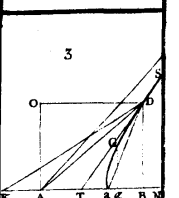
Iohan. Senex sculp.

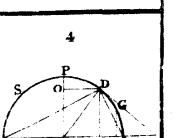
RESIDUUM TABULÆ CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT

CURVARUM FORMÆ		SECTIONIS CONICÆ: Abscissa	SECTIONIS CONICÆ: Ordinata	CURVARUM ÆREÆ
V	1	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2} = v$	$\frac{xv-2s}{n} = t$.
		vel sic	$\sqrt{\frac{dz^{2n}}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{f^2-4eg}{4e^2}x^2} = v$	$\frac{2s-xv}{n} = t$.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$, $fz^n+gz^{2n} = \xi$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2} = v$, $\frac{1}{e+\xi} = \upsilon$	$\frac{d\sigma+2fs-fxv}{2ng} = t$.
VI	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{f-p+2gz^n} = x$, $\sqrt{f+p+2gz^n} = \xi$	$\sqrt{d+\frac{-f+p}{2g}x^2} = v$, $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2g}\xi^2} = \upsilon$	$\frac{2xv-4s-2\xi\upsilon+4\sigma}{np} = t$.
	2	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{fz^n+pz^n+2e} = x$, $\sqrt{fz^n+pz^n+2e} = \xi$	$\sqrt{d+\frac{-f+p}{2e}x^2} = v$, $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}\xi^2} = \upsilon$	$\frac{4s-2xv-4\sigma+2\xi\upsilon}{np} = t$.
VII	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$, $z^{-n} = \xi$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$, $\sqrt{g+f\xi+e\xi^2} = \upsilon$	$\frac{4de^2g\upsilon+4defv-4df^2xv-2ff\upsilon v+4deg v-8de^2\sigma+4dfgs}{4neg-nff} = t$.
	2	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{d}{n}s = t = \frac{d}{n} \times$ a GDB . Fig. 2.3.4.
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{d}{3ng}v^3-\frac{df}{2ng}s = t$.
	4	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{6dgx-5df}{24ng^2}v^3+\frac{5df^2-4deg}{16ng^2}s = t$.
VIII	1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{8dgs-4dgxv-2dfv}{4neg-nf^2} = t = \frac{8dg}{4neg-nf^2} \times$ a GDB $\pm$ Δ DBA . Fig. 2.4.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{-4dfs+2dfxv+4dev}{4neg-nf^2} = t$.
	3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{3dff-4deg}{4neg^2-nf^2g}s+\frac{4deg}{4neg^2-nf^2g}xv-\frac{2defv}{4neg^2-nf^2g} = t$.
	4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$	$\frac{36dfg}{-16dg^2}s+\frac{8deg}{-24dfg}x^2v+\frac{10dff}{+36deg}xv+\frac{10def}{-16de^2g}v = t$.
IX	1	$\frac{dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{4fg}{-4h}s+\frac{2fg}{+2fh}xv+2df\frac{v}{x} = t$.
	2	$\frac{dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{4egh}{-4gg}s+\frac{2fgh}{+2fgg}xv+\frac{2}{3}dh\frac{v^3}{x^3}-2dfg\frac{v}{x} = t$.
X	1	$\frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{2xv-4s}{nf} = t = \frac{4}{nf}$ ADGa . Fig. 3.4.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2} = v$	$\frac{4gs-2gxv+2d\frac{v}{x}}{nfh} = t$.
XI	1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^{-n}} = x$, $\sqrt{h+gz^{-n}} = \xi$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2} = v$, $\sqrt{\frac{fg-eh}{g}+\frac{e}{g}\xi^2} = \upsilon$	$\frac{2dxv^2z^{-n}-4dfs-4de\sigma}{nfg-neh} = t$.
	2	$dz^{n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2} = v$	$\frac{2d}{nh}s = t$.
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2} = v$	$\frac{dhxv^3-3dfgs}{2nfh^2} = t$.









Iohan.. Senex sculp.

In Tabulis hiſce, ſeries curvarum cujuſque formæ utrinque in infinitum continuari poteſt. Scilicet in Tabulâ primâ, in numeratoribus Arearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum (2, −4, 16, −96, 768 (oo) &c.) generantur multiplicando numeros −2, −4, −6, −8, −10, &c. in ſe continuò (pp), & ſubſequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipſos gradatim; in Formâ quidem tertiâ, per $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{6}$, $-\frac{9}{8}$, $-\frac{11}{10}$, &c. in quartâ vero per $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{8}$, $-\frac{9}{10}$, &c. Et denominatorum coefficientes 3, 15, 105, &c. prodeunt multiplicando numeros 1, 3, 5, 7, 9, &c. in ſe continuè. Prop. XI.

In ſecundâ vero Tabulâ, ſeries curvarum Formæ primæ, ſecundæ, quintæ, ſextæ, nonæ, & decimæ ope ſolius diviſionis, & Formæ reliquæ ope Propoſitionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ ſeries mutando ſignum numeri η variari ſolent. Sic enim *e. g.* Curva $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$, evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}\eta+1}}\sqrt{f+ez^{\eta}}=y$ (qq).

PROP. XI. THEOR. VIII.

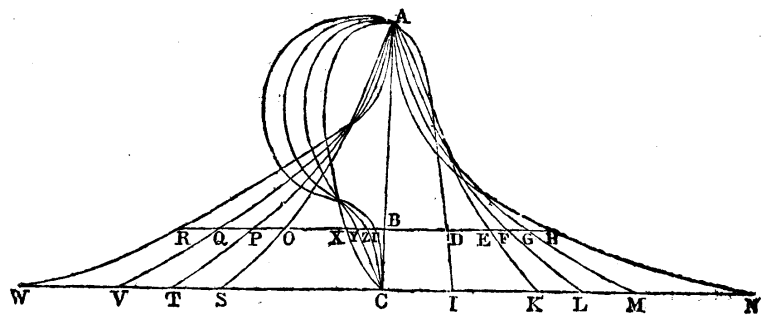
Sit ADIC Curva quævis Abſciſſam habens AB=z, & Ordinatam BD=y; & ſit AEKC Curva alia, cujus Ordinata, BE, æqualis eſt prioris areæ, ADB, ad unitatem applicatæ; & AFLC Curva tertia, cujus Ordinata, BF, æqualis eſt ſecundæ areæ, AEB, ad unitatem applicatæ; & AGMC Curva quarta, cujus Ordinata, BG, æqualis eſt tertiæ areæ, AFB, ad unitatem applicatæ; & AHNC Curva quinta, cujus Ordinata, BH, æqualis eſt quartæ areæ, AGB, ad unitatem applicatæ; & ſic deinceps in infinitum. Et ſunto *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

(oo) Editiones priores habuere 868. Vitioſè. Colſonus in Geometriâ Analyticâ hunc numerum emendatè dedit. Vid. Geometr. Analyt. C. x. Not. *a*.

(pp) Rectius ni fallor dixiſſet coefficientes illos generari multiplicando binarium in hanc ſeriem 1, −2, −4, −6, −8, −. Nimirum in Formâ tertiâ et quartâ Tabulæ primæ, coefficiens primi membri numeratoris areæ primæ binarius eſt, ſive factus è duobus, 2, 1, inter ſe multiplicatis. Areæ ſecundæ coefficiens ille numeratoris factus eſt ex tribus, 2, 1, −2; tertiæ, ex quatuor, 2, 1, −2, −4; quartæ, ex quinque 2, 1, −2, −4, −6 inter ſe multiplicatis, eodemque uſque modo progrediendum eſt.

(qq) Vide Geomet. Analyt. C. x.

Prop. XI.



&c. Areæ curvarum Ordinatas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, &c. et Abſciſſam communem z.

Detur Abſciſſa quævis AC$=t$, ſitque BC$=t-z=x$, & ſunto P, Q, R,

(r) PROPOSITIONIS XI^{æ}. DEMONSTRATIO ROBINESII.

Hujus Propoſitionis ſunt partes duæ; quarum Prima eſt hæc.

Sit Curva quæpiam ADI, cujus abſciſſa AB literâ z ſignificetur; ordinata BD, cuicuimodi ejus cum abſciſſâ ſit cognatio, literâ y. Tum, vocatâ hâc curvâ primâ, ſint aliæ curvæ AEK, AFL, AGM, AHN, quarum abſciſſa omnium quidem communis z, ſingularum ordinatæ BE, BF, BG, BH. Harum autem BE, ſecundæ curvæ ordinata, æqualis ſit areæ primæ ad unitatem applicatæ; Curvæ tertiæ ordinata BF æqualis ſit areæ ſecundæ ad unitatem applicatæ: Quartæ ordinata, BG, æqualis ſit areæ tertiæ ad unitatem applicatæ: et ſimili lege progreſſio uſque fiat.

Jam ſint aliæ etiam Curvæ, AOS, APT, AQV, ARW, eâdem abſciſſâ z, ordinatis BO, BP, BQ, BR; quarum BO, curvæ AOS ordinata, æqualis ſit quantitati zy: Ordinata BP curvæ APT æqualis ſit quantitati z^2y. Ordinata BQ curvæ AQV æqualis ſit quantitati z^3y. Ordinata BR curvæ ARW æqualis ſit quantitati z^4y. Tum literâ A deſignante aream ACI, literâ B aream ACS, literâ C aream ACT, literâ D aream ACV, literâ E Aream ACW, areæ ACI, ACK, ACL, ACM, ACN, ſic ordine erunt æſtimandæ.

Area prima ACI $=$ A

Secunda ACK $=$ $zA-B$.

Tertia ACL $=$ $\frac{z^2A-2zB+C}{2}$

Quarta ACM $=$ $\frac{z^3A-3z^2B+3zC+D}{6}$

Quinta ACN $=$ $\frac{z^4A-4z^3B+6z^2C-4zD+E}{24}$

Eodemque deinceps uſque modo.

Harum formularum ea quidem eſt conditio, ut in omnibus poſt primam, index elatiſſimæ poteſtatis literæ z ſit numerus ille, qui curvæ cujuſque à primâ diſtantiam ſignificet; index autem elatiſſimus ille unitate gradatim minuat. Membrum primum multiplicatur cum A, ſecundum cum B, tertium cum C, eodemque deinceps uſque modo. Coefficientes iidem ſunt ac poteſtatis ejus à quâlibet duorum nominum radice, quæ poteſtas pari ſit gradu cum elatiſſimâ quantitatis z. Diviſor verò factus eſt ex tot numeris (1, 2, 3, 4, 5, 6) naturali ordine ſumendis, quot ſint unitates in numero elatiſſimam poteſtatem literæ z indicante.

Vel ſi curvæ, cujus æſtimationem inire oporteat, ſi hujus à primâ diſtantiam numerus n ſignificet,

R, S, T Areæ curvarum Ordinatas habentium x, xy, x^2y, x^3y, x^4y, Prop. XI. &c. et Abſciſſam communem x.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abſciſſam totam datam AC, nec non ad Ordinatam, poſitione datam & infinitè productam, CI.

Et erit Arearum ſub initio poſitarum

Prima ADIC $= A = P$.

Secunda AEKC $= tA - B = Q$.

Tertia AFLC $= \frac{t^2A-2tB+C}{2} = \frac{1}{2}R$.

Quarta AGMC $= \frac{t^3A-3t^2B+3tC-D}{6} = \frac{1}{6}S$.

Quinta AHNC $= \frac{t^4A-4t^3B+6t^2C-4tD+E}{24} = \frac{1}{24}T$ (rr).

COROL.

ficet, Area exquirenda ita quidem invenietur, ſi quantitas $\overline{z-1}^n$ in ſeriem explicabitur, cujus membrum primum multiplicabitur cum A, ſecundum cum B, tertium cum C, quartum cum D; tum omnium ſumma dividetur numero à mutuâ horum multiplicatione facto; n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, horum utique ſerie eò uſque continuatâ, ut in unitatem definat.

Altera Pars Propoſitionis hæc eſt.

Sint curvæ prima, ſecunda, tertia, et reliquæ, quæ ſuperiùs poſitæ ſunt. Jam literâ t deſignante abſciſſam totam AC, literâ verò x, partem ejus BC, ſcribi intelligantur curvæ CXA, CYA, CZA, CΓA, eâ quidem lege, ut ex ordinatis BX, BY, BZ, BΓ, illa BX æquetur quantitati xy; illa BY quantitati x^2y; illa BZ quantitati x^3y; BΓ quantitati x^4y. His poſitis, ſi Curvarum CIDA, CXA, CYA, CZA, CΓA, prima CIDA ſignificetur literâ P, ſecunda CXA literâ Q, tertia CYA literâ R, quarta CZA literâ S, quinta CΓA literâ T, Curvarum, quæ initio poſitæ ſunt, Areæ totæ ad hunc modum ordine æſtimandæ ſunt.

Prima AIC $=$ P

Secunda AKC $=$ Q

Tertia ALC $=$ $\frac{1}{2}$R

Quarta AMC $=$ $\frac{1}{6}$S

Quinta ANC $=$ $\frac{1}{24}$T

Nimirum areæ P, Q, R, S, T à numeris horum, 1, 2, 3, 4, 5 mutuâ multiplicatione factis dividendæ, tot ex iſtâ ſerie ac priùs ordine deſumptis.

DEMONSTRATIO PARTIS PRIMÆ.

Cum Curvæ AEK, AFL, AGM, AHN, alia ex aliâ, eâ lege procreatæ ſint, ut abſciſſam z communem omnes habeant, ordinatam unaquæque prioris aream; illud nos oſtendere oportet, formularum illarum, A, $zA-B$, $\frac{z^2A-2zB+C}{2}$, unamquamque Curvæ cujuſdam Aream deſignare, cùjus Ordinatam formula præcedens deſignaverit, cùm abſciſſa ſit z.

Ponatur igitur $m = n - 1$.

6

Erunt

PROP. XI. COR.

COROL.

Unde ſi Curvæ quarum ordinatæ ſunt y, $\dot{x}y$, $\dot{x}^2y$, $\dot{x}^3y$, &c. vel

PROPOSITIONIS XI^{æ}.

$\dot{x}^mA - m\dot{x}^{m-1}B + m \times \frac{m-1}{2}\dot{x}^{m-2}C -$, $\dot{x}^nA - n\dot{x}^{n-1}B + n \times \frac{n-1}{2}\dot{x}^{n-2}C -$

Erunt igitur $\frac{}{m \times m-1 \times m-2 \times}$, et $\frac{}{n \times n-1 \times n-2}$,

erunt hæ, ex iis quas ſuprà poſuimus formulis duæ aliquæ inter ſe proximæ. Oſtendere igitur nos oportet, harum formularum poſteriorem curvæ cujuſdam Aream ſignificare, quæ ordinatam quidem à priore deſignatam habeat, abſciſſam verò x. Hujus autem areæ fluxio facta erit multiplicando illam $\dot{x}$ cum formulâ priore. Oſtendere igitur nos oportet hujus fluxionis fluentem per formulam poſteriorem deſignari. Vel, quod eodem redit, poſterioris formulæ fluxionem æqualem eſſe illi $\dot{x}$ cum formulâ priore multiplicatæ.

Formulæ poſterioris fluxio conſtat ex quantitatibus, $n\dot{x}^{n-1}\dot{x}A - n \times \overline{n-1}\,\dot{x}^{n-2}\dot{x}B + n \times \frac{n-1}{2} \times \overline{n-2}\,\dot{x}^{n-3}\dot{x}C -$, $+\dot{x}^n\dot{A} - n\dot{x}^{n-1}\dot{B} + n \times \frac{n-1}{2}\dot{x}^{n-2}\dot{C}$, ex his, inquam, cum facto, $n \times n-1 \times n-2 \times$, diviſis.

Tota quantitas dividenda è duabus conſtat partibus. Quarum prima conflata eſt è fluxionibus poteſtatum literæ x cum quantitatibus A, B, C, multiplicatis; altera ex illarum A, B, C fluxionibus in poteſtates literæ x multiplicatis. Horum autem, $\dot{x}^nA$, $\dot{x}^{n-1}B$, $\dot{x}^{n-2}C$, ex quibus partem alteram dividendæ componi diximus, horum unumquodque æquatur quantitati $\dot{x}^n\dot{x}y$; cùm ex ipſâ Curvarum procreandarum lege, quarum areæ deſignantur literis A, B, C, efficietur $\dot{A} = \dot{x}y$. $\dot{B} = \dot{x}\dot{x}y$. $\dot{C} = \dot{x}\dot{x}^2y$. Dividendæ igitur pars altera illa huic æqualis erit, $\dot{x}^n\dot{x}y \times \overline{1-1+n \times \frac{n-1}{2} - n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} + \&c.}$: vel huic, $\dot{x}^n\dot{x}y \times \overline{1-1}^n$. Nihilo igitur. Et tota fluxio huic fit æqualis $\frac{n\dot{x}^{n-1}\dot{x}A - n \times \overline{n-1}\,\dot{x}^{n-2}\dot{x}B + n \times \frac{n-1}{2} \times \overline{n-2}\,\dot{x}^{n-3}\dot{x}C - \&c.}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \&c.}$. Deleto igitur n, qui quantitatem utramque, dividentem et dividendam, metitur, et pro illis $n-1$, $n-2$, $n-3$, his m, $m-1$, $m-2$ ſubſtitutis, fluxio de quâ agitur hâc formâ comparebit; $\dot{x} \times \frac{\dot{x}^mA - m\dot{x}^{m-1}B + m \times \frac{m-1}{2}\dot{x}^{m-2}C - \&c.}{m \times m-1 \times m-2 - \&c.}$. Formulæ igitur poſterioris fluxio æqualis erit illi $\dot{x}$ in formulam priorem multiplicatæ. Unde conſequetur, quamlibet è formulis illis curvæ cujuſdam Aream deſignare, quæ formulam priorem Ordinatam habeat, cùm Abſciſſa ejus ſit x. Q. E. D.

ALTERIUS PARTIS DEMONSTRATIO.

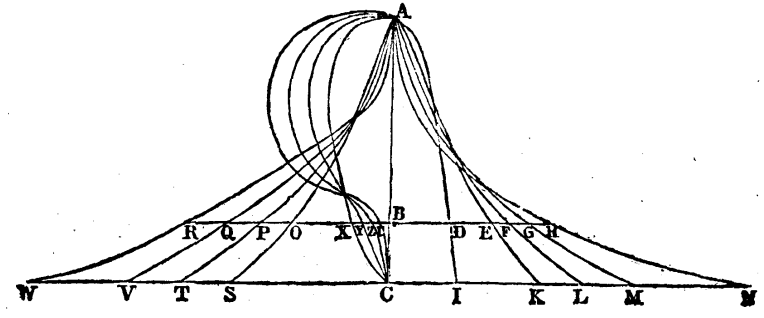
Ex Curvis initio poſitis, ADI, AEK, AFL, AGM, AHN deſumatur illa, cujus à primâ diſtantiam numerus n ſignificat. Illud jam nos oſtendere oportet; illius Aream quæ Abſciſſam habeat BC, ſeu x, Ordinatam x^ny, ſi à facto illo $\overline{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times \&c. \times 1}$ diviſa ſit, æquari deſumptæ illius Areæ, modò CB toti CA ſit æqualis, ſive x fiat t.

Areis ABD, ABO, ABP, ABQ, ABR decreſcentibus, alias illas, BCID, BCSO, BCTP, BCVQ, BCWR, augeri manifeſtum eſt. Unde conſequetur illorum decrementa, horum eſſe incrementa; illorum fluxiones negatas horum fluxiones eſſe. Hoc eſt ſi area ABD deſignetur literâ a, area ABO literâ b; area ABP, literâ c; area ABQ, litera d; area ABR, literâ e; tum area BCID, literâ α; area BCSO, literâ β; area BCTP, literâ γ; area BCVQ, literâ δ; area BCWR, literâ ϵ; erit $\dot{\alpha} = -\dot{a}$: $\dot{\beta} = -\dot{b}$: $\dot{\gamma} = -\dot{c}$: $\dot{\delta} = -\dot{d}$: $\dot{\epsilon} = -\dot{e}$.

Jam

vel y, $\dot{x}y$, $\dot{x}^2y$, $\dot{x}^3y$, &c. quadrari poſſunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AGMC, &c. et habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH, Areis curvarum proportionales. PROP. XI. COR.

Jam Curvæ cujus Abſciſſa x, Ordinata x^ny, hujus fluxio erit $\dot{x}\dot{x}^ny = \dot{x}y \times \overline{t-z}^n$, cùm ſit $x = t - z$. Vel cùm incrementa illius x decrementis ipſius z ſint æqualia, ac propterea cùm ſit $\dot{x} = -\dot{z}$, fluxio ROBINESII DEMONSTRATIO



Curvæ, quam modò diximus, huic æqualis erit, $-\dot{z}y\overline{x\overline{t-z}}^n = -\dot{z}y\overline{x}\overline{t^n - nt^{n-1}z + n \times \frac{n-1}{2}t^{n-2}z^2 - \&c.}$

$= -t^n\dot{z}y + nt^{n-1}\dot{z}zy - n \times \frac{n-1}{2}t^{n-2}\dot{z}z^2y = \overline{t^n \times -\dot{a}} - \overline{nt^{n-1} \times -\dot{b}} + n \times \frac{n-1}{2}\overline{t^{n-2} \times -\dot{c}} - \&c.$

$= t^n\dot{a} - nt^{n-1}\dot{\beta} + n \times \frac{n-1}{2}t^{n-2}\dot{\gamma} - \&c.$ Sumptiſque fluentibus, Area curvæ cujus Abſciſſa x, vel BC, Ordinata $\overline{x^ny}$, æqualis erit huic quantitati $t^n\alpha - nt^{n-1}\beta + n \times \frac{n-1}{2}t^{n-2}\gamma - \&c.$ Sed cùm x fit t, hoc eſt cùm BC æqualis evadit toti AC, areæ α, β, γ, totis illis A, B, C æquales fiunt: quod ſatis apertum eſt. Si igitur illa x eſt t, hoc eſt ſi CB eſt æqualis toti CA, Curvæ cujus Abſciſſa x, Ordinata x^ny, hujus Area huic fit æqualis, $t^nA - nt^{n-1}B + n \times \frac{n-1}{2} \times t^{n-2}C$: quæ fit ex illa $\overline{t-1}^n$ in ſeriem explicatâ, membro ſerici primo cum A multiplicato, ſecundo cum B, tertio cum C.—Sed quantitas quæ fit ex illâ $\overline{t-1}^n$ quo diximus modo, hæc ſi cum facto $n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times \&c. \times 1$ dividetur, æquabitur areæ curvæ cujus diſtantiam à primâ numerus n ſignificaverit (per Caſ. 1.) Hujus igitur areæ æquabitur illius area, cum facto $n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times \&c. \times 1$ diviſa, cujus abſciſſa x, ordinata x^ny: modò abſciſſa x toti AC ſit æqualis. Hoc eſt Q, ſive Area curvæ cujus Abſciſſa x Ordinata xy, ſi x æqualis ſit rectæ AC, æquabitur areæ ſecundæ AKC: $\frac{1}{2}$ B, ſive ſemiſis areæ cujus Abſciſſa x, Ordinata x^2y, æqualis erit areæ tertiæ ALC: $\frac{1}{6}$ S, ſive pars ſexta ejus areæ, cujus Abſciſſa x, Ordinata x^3y, æqualis erit areæ quartæ AMC: $\frac{1}{24}$ T, ſive pars viceſima quarta ejus Areæ, cujus Abſciſſa x Ordinata x^4y areæ quintæ AND æqualis; eodemque deinceps uſque modo; dummodo id in omnibus ſervetur, ut x ſit æqualis ipſi AC. Q. E. C.

Atque hæc eſt reconditiſſimæ Propoſitionis Robinefii Demonſtratio; cujus prima adumbratio anno 1727 inter Acta Philoſophicæ Societatis noſtræ Regiæ Londinenſis edita eſt; ſpecies perfectior anno 1733 in Epitome Actorum illâ, quam Viri docti concinnârunt Reid & Gray. Anglico ſermone ab auctore conſcriptam nos in Latinum convertimus. Dignam, credo, omnes judicabunt, cui id laboris noſtri nos impenderemus. Certè Stewarto Abredonenſi tantoperè eam placuiſſe video, ut in ſuos in hunc librum Commentarios transferendam judicârit, mutilam tamen ac haud in meliùs immutatam, & nullâ Robinefii mentione factâ.

SCHOL.

Scholium

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus suprà. Hæ fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium.

Ut si z^n sit quantitas fluens, & fluendo evadat $\overline{z+o}|^n$, deinde resolvatur in seriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oo z^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6} o^3 z^{n-3}$ + &c. terminus primus hujus seriei z^n erit quantitas illa fluens, secundus noz^{n-1} erit (ff) ejus incrementum primum, seu differentia prima, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima; tertius $\frac{nn-n}{2} oo z^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum, seu differentia secunda, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda; quartus $\frac{n^3-3nn+2n}{6} o^3 z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium, seu differentia tertia, cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est; & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c. *(Vide fig. pag. 380.)*

Ut si Ordinata BE $(= \frac{ADB}{1})$ sit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF $(= \frac{AEB}{1})$ si quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD.

Si BH $(= \frac{AGB}{1})$ sit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, secunda, tertia & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD respectivè.

Et hinc in æquationibus, quæ quantitates tantùm duas incognitas involvunt, quarum una est quantitas uniformiter fluens, & altera est fluxio quælibet quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa altera per quadraturam curvarum. Exponatur enim fluxio ejus per Ordinatam BD; & si hæc sit fluxio prima, quæratur area ADB = BE × 1; si fluxio secunda, quæratur area AEB

(ff) Lege, *erit* UT *ejus incrementum primum, tertius* ✱ *erit* UT *ejus incrementum secundum, quartus* ✱ *erit* UT *ejus incrementum tertium.* Hæc Emendatio ipsius quidem Newtoni est, in Recensione Controversiæ inter Leibnitsium & Keillium, &c. minimè verò Keillii, id quod Stewarto persuasum fuisse video. Ignorabat utique Stewartus Recensionem illam ab ipso Newtono profectam. Quòd si quis dubitare velit, locus hic, vel sic emendatus, sitne satis perspicuus, id quod Stewartus se dubitare dicit; eum vel meridie dubitare, sitne lux, jubebo.

(gg) Nempe

AEB = BF × 1; si fluxio tertia, quæratur area AFB = BG × 1; &c. et Generale. Area inventa erit exponens fluentis quæsitæ.

Sed & in æquationibus, quæ fluentem & ejus fluxionem primam sine alterâ fluente, vel duas ejusdem fluentis fluxiones, primam & secundam, vel secundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. sine alterutrâ fluente involvunt: inveniri possunt fluentes per quadraturam curvarum. Sit æquatio $aa\dot{v} = a\dot{v}v + v\dot{v}v$, existente v = BE, $\dot{v}$ = BD, z = AB, & $\dot{z} = 1$; & æquatio illa, complendo dimensiones fluxionum, evadet $aa\dot{v} = av\dot{z} + v\dot{v}\dot{z}$, seu $\frac{aa\dot{v}}{av+v\dot{v}} = \dot{z}$.

Jam fluat v uniformiter, & sit ejus fluxio $\dot{v} = 1$, & erit $\frac{aa}{av+vv} = \dot{z}$, & quadrando curvam, cujus Ordinata est $\frac{aa}{av+vv}$, & Abscissa v, habebitur fluens z. Adhæc sit æquatio $aa\ddot{v} = a\dot{v} + \dot{v}\dot{v}$, existente v = BF, $\dot{v}$ = BE, $\ddot{v}$ = BD, & z = AB; & per relationem inter $\ddot{v}$ & $\dot{v}$, seu BD & BE, invenietur relatio inter AB & BE, ut in exemplo superiore. Deinde, per hanc relationem, invenietur relatio inter AB & BF, quadrando curvam AEB.

Æquationes, quæ tres incognitas quantitates involvunt, aliquando reduci possunt ad æquationes, quæ duas tantùm involvunt; &, in his casibus, fluentes invenientur ex fluxionibus ut suprà. Sit æquatio $a - bx^m = cxy^n\dot{y} + dy^{2n}\dot{y}\dot{y}$: ponatur $y^n\dot{y} = \dot{v}$, & erit $a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$. Hæc æquatio, quadrando curvam cujus abscissa est x & ordinata $\dot{v}$, dat aream v (hh); & æquatio altera $y^n\dot{y} = \dot{v}$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1} y^{n+1} = v$: unde habetur fluens y.

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantùm involvunt, reduci non possunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam curvarum. Sit æquatio $\overline{ax^m + bx^n}|^p = rex^{r-1}y^t + sex^r\dot{y}y^{t-1} - fy\dot{y}^t$, existente $\dot{x} = 1$; et pars posterior, $rex^{r-1}y^t + sex^r\dot{y}y^{t-1} - fy\dot{y}^t$, regrediendo ad fluentes, fit $ex^ry^t - \frac{f}{t+1} y^{t+1}$, quæ proinde est ut Area curvæ, cujus abscissa est x & ordinata $\overline{ax^m + bx^n}|^p$; & inde datur fluens y.

(hh) Nempe per resolutionem æquationis quadraticæ $a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$ veniet $\dot{v} = \frac{\pm\sqrt{4d^2a - 4d^2bx^n + c^2x^2} - cx}{2d}$. Si igitur detur Area curvæ cujus Abscissa x, Ordinata $\frac{\sqrt{4d^2a - 4d^2bx^m + c^2x^2} - cx}{2d}$, dabitur v.

Scholium Generale. Sit æquatio $\dot{x} \times \overline{ax^m+bx^n}\rceil^p = \frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$. Et fluens, cujus fluxio eſt $\dot{x} \times \overline{ax^m+bx^n}\rceil^p$, erit ut Area curvæ, cujus abſciſſa eſt x & ordinata eſt $\overline{ax^m+bx^n}\rceil^p$. Item fluens, cujus fluxio eſt $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$, erit ut Area curvæ, cujus abſciſſa eſt y & ordinata $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$, id eſt (per Caſum 1. Formæ quartæ Tab. I.) ut Area $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^n}$. Pono ergo $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^n}$ æqualem Arcæ curvæ, cujus abſciſſa eſt x & ordinata $\overline{ax^m+bx^n}\rceil^p$, & habebitur fluens y.

Et nota quòd fluens omnis, quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis non fluente. Quæ ex fluxione ſecundâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis, cujus fluxio ſecunda nulla eſt. Quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis, cujus fluxio tertia nulla eſt. Et ſic deinceps in infinitum.

Poſtquam fluentes ex fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate concluſionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt, & cum fluxionibus, ſub initio propoſitis, comparandæ. Nam ſi prodeunt æquales, concluſio rectè ſe habet: ſin minùs, corrigendæ ſunt fluentes ſic, ut earum fluxiones fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam & fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis aſſumptæ æqualem fluxioni propoſitæ, & terminos homologos inter ſe comparando.

Et his principiis via ad majora ſternitur.

ARTIS ANALYTICÆ

SPECIMINA

VEL

GEOMETRIA ANALYTICA.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

CAP. I.	*De Seriebus infinitis.*	Pag. 391
CAP. II.	*De Affectarum Æquationum Reductione.*	p. 394
CAP. III.	*De Specioſâ Æquationum Reſolutione.*	p. 397
CAP. IV.	*Doctrina Fluxionum.*	p. 406
CAP. V.	*De Maximis et Minimis.*	p. 428
CAP. VI.	*De Tangentibus Curvarum ducendis.*	p. 430
CAP. VII.	*De Radio Curvaturæ definiendo.*	p. 443
CAP. VIII.	*De Quæſtionibus quibuſdam cognatis.*	p. 455
CAP. IX.	*De Quadraturâ Curvarum.*	p. 463
CAP. X.	*De Areis Curvarum, quæ cum Conicis comparari poſſint.*	p. 483
CAP. XI.	*De Quæſtionibus cognatis.* Sect. I. *Conſtructiones Problematum Mechanicæ.* p. 501. Sect. II. *Ex Datâ Areâ Baſem et Incedentem Lineam determinare.*	p. 502
CAP. XII.	*De inveniendis Curvarum Longitudinibus.*	p. 503

In hoc libro edendo tribus uſi ſumus MSS; in quibus et Auctoris Autographus erat. Alium, ignoti cujuſdam ſcribæ manu exaratum, nobiſcum communicavit honoratiſſimus Dominus Carolus Cavendiſh; cùm ipſe eum olim à Joneſio acceperat. Tertium de Cavendiſiano, ut videtur, propriâ manu exſcripſerat vir Doctiſſimus Jacobus Wilſon, editor ille operum Robineſii. Hunc nobis tradidit Joannes Nourſe, Bibliopola Regius, vir elegantioris Matheſeos et amantiſſimus et ipſe minimè imperitus. Diviſio Libri in Capita à nobis eſt.

GEOMETRIA ANALYTICA.

CAPUT PRIMUM.

DE SERIEBUS INFINITIS.

ANIMADVERTENTI pleroſque Geometras, poſthabitâ ferè Veterum Syntheticâ Methodo, Analyticæ excolendæ plurimùm incumbere, et ejus ope tot tantaſque difficultates ſuperâſſe; ut penè omnia, extra Curvarum Quadraturas, et ſimilia quædam nondum penitùs enodata, videantur exhauſiſſe; placuit ſequentia, quibus campi analytici terminos expandere, juxtà & Curvarum doctrinam promovere poſſem, in gratiam diſcentium breviter compingere.

2. Cùm in Numeris et Speciebus operationes computandi perſimiles ſint, neque differre videantur niſi in characteribus, quibus quantitates, in iſtis definitè, in his indefinitè deſignantur: demiror, quòd doctrinam de numeris decimalibus nuper inventam (ſi Quadraturam Hyperbolæ per N. Mercatorem demas) nemini in mentem venerit, Speciebus itidem accommodare; præſertim cùm ad præclariora viam aperiat. Hujus autem de Speciebus doctrinæ, cùm eodem modo, ad Algebram relata ſit, ac doctrina decimalium Numerorum ad vulgarem Arithmeticam; Operationes, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio et Extractio radicum, exinde addiſci poſſunt: modo Lector utriuſque, et Arithmeticæ et Algebræ vulgaris, peritus fuerit, et noverit correſpondentiam inter decimales numeros, ac terminos Algebraicos in infinitum continuatos; ſcilicet quòd ſingulis numerorum locis, proportione decimali dextrorſùm perpetuò decreſcentibus, correſpondent ſinguli ſpecierum termini, ſecundum ſeriem dimenſionum numeratorum vel denominatorum uniformi progreſſione in infinitum continuatam, prout factum in ſequentibus, ordinati. Et quemadmodum commoditas decimalium in eo conſiſtit, ut fractiones omnes et radicales,

CAPUT PRIMUM.

dicales, in eos reductæ, quodammodo naturam integrorum induant: sic etiam infinitarum specierum commoditas est, quòd per eas abstrusiorum terminorum genera, quales sunt fractiones à compositis quantitatibus denominatæ, compositarum radices, et radices affectarum æquationum, possunt ad simplicium genus reduci; ad infinitas nempe fractionum series numeratores ac denominatores simplices habentium, in quibus nullæ sunt aliorum difficultates propemodum insuperabiles. Imprimis itaque reductiones aliarum quantitatum ad hujusmodi terminos, et methodos computandi minùs obvias ostendam; dein hanc Analysin ad solutiones Problematum applicabo.

3. Reductiones per divisionem et extractionem radicum è sequentibus exemplis, cum similibus operandi modis in Arithmeticâ decimali et speciosâ collatis, elucescet.

Exempla reductionum per Divisionem.

4. Propositâ $\frac{aa}{b+x}$. Divide aa per $b+x$ ad hunc modum

$b+x) aa+\text{oo} \left(\frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \frac{a^2x^4}{b^5} - \frac{a^2x^5}{b^6}\right.$ &c.

$$\begin{array}{l} aa+\frac{a^2x}{b} \\ \hline -\frac{a^2x}{b}+\text{o} \\ -\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{b^2} \\ \hline +\frac{a^2x^2}{b^2}+\text{o} \\ +\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3} \\ \hline -\frac{a^2x^3}{b^3}+\text{oo} \\ -\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4} \\ \hline +\frac{a^2x^4}{b^4} \text{ &c.} \end{array}$$

Et prodit $\frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4}$ &c. quæ series in infinitum continuata tantùm valet ac $\frac{aa}{b+x}$. Vel posito x primo divisoris termino, hoc modo $x+b) aa($ prodibit $\frac{aa}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3} - \frac{a^2b^3}{x^4}$ &c.

5. Ad eundem modum fractio $\frac{1}{1+x^2}$ reducitur ad $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. Vel ad $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$ &c.

6. Et

DIVISIONE ET EXTRACT. RAD.

6. Et fractio $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$ ad $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c.

7. Ubi obiter notandum est, quòd usurpo x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, &c. pro $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, et $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{2}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{4}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, &c. pro $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$; et $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$, &c. pro $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, &c. Idque ob analogiam rei, quæ deprehendi potest ex hujusmodi geometricis progressionibus x^3, x^2, x^2, $x^{\frac{1}{2}}$, x, $x^{\frac{1}{2}}$, x^0, sive 1, $x^{-\frac{1}{2}}$, x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2}, &c.

Ad hunc modum pro $\frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3}$ &c. scribi potest $aax^{-1} - aabx^{-2} + aab^2x^{-3}$ &c.

Et sic vice $\sqrt{aa-xx}$ scribi potest $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$; et $\overline{aa-xx}|^2$ vice quadrati ex $aa-xx$; et $\overline{\frac{aab-y^3}{by+yy}}|^{\frac{1}{3}}$ vice $\sqrt[3]{\frac{aab-y^3}{by+yy}}$; & sic in aliis.

Unde meritò potestates distingui possunt in affirmativas et negativas, integras et fractas (a).

Exempla reductionum per Extractionem radicum.

8. Propositâ $aa+xx$, radicem ejus ut sequitur extrahas

$aa+xx(a+\frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$ &c.

$$\begin{array}{l} aa \\ \hline \text{o}+xx \\ xx+\frac{x^4}{4a^2} \\ \hline -\frac{x^4}{4a^2} \\ -\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6} \\ \hline +\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6} \\ \frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline -\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}} \text{ &c.} \\ -\frac{5x^8}{64a^6}-\frac{5x^{10}}{128a^8}+\frac{5x^{12}}{512a^{10}} \\ \hline \frac{7x^{10}}{128a^8}-\frac{7x^{12}}{512a^{10}} \\ \frac{7x^{10}}{128a^8}+\frac{7x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline -\frac{21x^{12}}{512a^{10}} \text{ &c.} \end{array}$$

(a) Vide Arithmetic. Univers. Cap. 1. Not. b.

CAPUT PRIMUM.

Et prodit $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}$ &c. Ubi notandum, quòd circa finem operis eos omnes terminos negligo, quorum dimensiones transcenderent dimensiones ultimi termini, ad quem cupio quotientem solummodo produci, puta $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

9. Potest etiam ordo terminorum inverti ad hunc modum; x^2+a^2. Et radix erit $x+\frac{a^2}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}+\frac{a^6}{16x^5}$ &c.

Sic ex a^2-x^2 radix est $a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Et ex $x-x^2$ est $x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

Et ex a^2+bx-x^2 est $a+\frac{bx}{2a}-\frac{x^2}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}-$ &c.

Et ex $\frac{1+ax^2}{1-bx^2}$ est $\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6}$ &c. Factâque insuper divisione, fit $1+\frac{1}{2}b\,x^2+\frac{3}{8}b^2\,x^4+\frac{5}{16}b^3\,x^6$ &c.

$+\frac{1}{2}a \quad +\frac{1}{4}ab \quad +\frac{3}{16}ab^2$

$-\frac{1}{8}a^2 \quad -\frac{1}{16}a^2b$

$+\frac{1}{16}a^3$

10. Operationes verò per debitam præparationem non rarò abbreviari possunt; ut in allato exemplo, ad extrahendam $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}$, si non eadem fuisset numeratioris ac denominatoris forma, utrumque multiplicassem per $\sqrt{1-bx^2}$, & sic prodiisset $\frac{\sqrt{1+a-b\,x^2+abx^4}}{1-bx^2}$; et reliquum opus perficeretur extrahendo radicem numeratoris tantùm, ac dividendo per denominatorem.

11. Ex hisce, credo, manifestum est, quo pacto radices aliæ possunt extrahi, et quælibet compositæ quantitates, quibuscunque radicibus vel denominatoribus perplexæ; ut hîc videre est, $x^3+\frac{\sqrt{x-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}}-\frac{\sqrt[4]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx-\sqrt{2x-x^2}}}$, in series infinitas simplicium terminorum reduci.

CAPUT SECUNDUM.

De affectarum Æquationum reductione.

PROPOSITIS verò affectis Æquationibus, modus, quo radices earum ad hujusmodi series possint reduci, obnixiùs explicari debet;

RESOLUTIO NUMEROSA

bet; idque cùm earum doctrina, quam hactenus in numeris exposuerunt Mathematici, per ambages (superfluis etiam operationibus adhibitis) tradatur, ut in specimen operis in speciebus non debeat adhiberi. Imprimis itaque Numerosam affectarum æquationum Resolutionem compendiosè tradam; dein Speciosam similiter explicabo.

2. Proponatur æquatio $y^3-2y-5=0$, resolvenda; et sit 2 numerus, utcunque inventus, qui minùs quàm decimâ sui parte differt à radice quæsitâ. Tum pono $2+p=y$, et pro y substituo $2+p$ in æquationem; et inde nova prodit $p^3+6p^2+10p-1=0$, cujus radix p exquirenda est, ut quotienti addatur. Nempe, neglectis p^3+6p^2 ob parvitatem, $10p-1=0$, sive $p=0{,}1$ ad veritatem proximè accedet. Scribo itaque 0,1 in quotiente, & suppono $0{,}1+q=p$, et hunc ejus fictitium valorem, ut antè, substituo, et prodit $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$. Et cùm $11{,}23q+0{,}061=0$, veritatem appropinquet, sive ferè sit $q=-0{,}0054$ (dividendo nempe 0,061 per 11,23 donec tot eliciantur figuræ quot loca primis figuris hujus et principalis quotientis exclusivè intercedunt, quemadmodum hîc duo sunt inter 2 & 0,005) scribo $-0{,}0054$, in inferiori parte quotientis, siquidem negativa sit; et supponens $-0{,}0054+r=q$, hunc ut priùs substituo. Et sic operationem ad placitum produco, pro more subjecti diagrammatis.

		$+2{,}10000000$
		$-0{,}00544852$
		$2{,}09455148$ &c.
$2+p=y$	y^3	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$-2y$	$-4-2p$
	-5	-5
Summa		$-1+10p+6p^2+p^3$
$0{,}1+q=p$	$+p^3$	$+0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0{,}06+1{,}2q+6q^2$
	$+10p$	$+1,\quad +10q$
	$-p$	$-1,$
Summa		$+0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$
$-0{,}0054+r=q$	q^3	$-0{,}000000157464+0{,}00008748r-0{,}0162r^2+r^3$
	$+6{,}3q^2$	$+0{,}00018378\quad -0{,}06804\quad +6{,}3$
	$+11{,}23q$	$-0{,}060642\quad +11{,}23$
	$+0{,}061$	$+0{,}061$
Summa		$+0{,}00054116\quad +11{,}162r$
$-0{,}00004852+s=r$		

Opus verò sub fine, præsertim in æquationibus pluriurum dimensionum, hâc methodo multùm abbreviabitur. Determinato quousque velis radicem extrahi, tot loca post primam figuram coefficientis penulti-

CAPUT SECUNDUM.

mi termini æquationum, in dextrâ parte diagrammatis resultantium, adnumera, quot supersunt loca in quotiente complenda, et subsequentes decimales neglige. In ultimo verò termino decimales post tot plura loca neglige, quot in quotiente complentur loca decimalia. Inque antepenultimo termino neglige omnes post tot pauciora loca. Et sic deinceps arithmeticè progrediendo per intervallum istud locorum; sive quod perinde est, tot figuras passim elidendo, quot in penultimo termino; modò depressissima earum loca sint in arithmeticâ progressione juxta seriem terminorum; aut circulis compleri subintelligantur, ubi res aliter eveniat. Sic in exemplo jam posito, si cupiam ut quotiens ad octavum tantùm decimalem locum compleatur; inter substituendum, $00054+r$ pro q, ubi quatuor loca decimalia in quotiente complentur, ac totidem supersunt complenda, potui figuras in inferioribus quinque locis omisisse, quas eapropter lineolâ transversim notavi; imo primum terminum r^3, etsi coefficientem, 99999 habuisset, potui tamen penitus omisisse. Expunctis itaque figuris istis, pro subsequente operatione prodit summa $0{,}00054\,17+11{,}162r$; quæ, per divisionem adusque præscriptum terminum peractam, dat $-0{,}00004852$ pro r, quod quotientem ad optatam periodum complet.

Denique negativam partem quotientis ab affirmativâ subduco, et oritur 2,09455148 quotiens absoluta.

3. Præterea notandum est, quòd, sub initio operis, si dubitarem an $0{,}1=p$ ad veritatem satis accederet, vice $10p-1=0$ finxissem $6p^2+10p-1=0$, et ejus radicis nihilo propioris primam figuram in quotiente scripsissem. Et hoc modo secundam vel etiam tertiam quotientis figuram explorare convenit, ubi in æquatione secundariâ, circa quam versaris, quadratum coefficientis penultimi termini non fit decies majus, quàm factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi. Quinimo laborem plerumque minues, præsertim in æquationibus plurimarum dimensionum, si figuras omnes quotienti addendas hoc modo (id est, extrahendo minorem radicum ex tribus ultimis terminis æquationis ejus secundariæ) quæras. Sic enim figuras duplo plures in quotiente quâlibet vice lucraberis.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

De Speciosâ Æquationum Resolutione.

HIS in numeris sic ostensis, consimiles operationes in speciebus explicandæ restant, de quibus convenit sequentia prænoscere.

I. Quòd è speciebus coefficientibus aliqua præ reliquis (si sint plures) insignienda sit, ea nempe, quæ est, aut fingi potest esse, omnium longè minima, vel maxima, vel datæ quantitati vicinissima: cujus rei causa est, ut ob ejus dimensiones, in numeratoribus vel denominatoribus terminorum quotientis, perpetim auctas, illi termini continuò minores, et inde quotiens radici propinquior evadat; sicut antè de specie x, in exemplis reductionum per divisionem et extractionem radicum, manifestum esse potest. Pro isthâc verò specie in sequentibus ut plurimùm usurpabo etiam x vel z, quemadmodum et y, p, q, r, s, &c. pro specie radicali extrahendâ.

II. Siquando fractiones complexæ, vel surdæ quantitates, in æquatione propositâ, vel pòst in operatione occurrant, tolli debent per methodos analysis satis notas. Quemadmodum si habeatur $y^3+\frac{b^2}{b-x}y^2-x^3=0$, multiplico per $b-x$, et ex facto $by^3-xy^3+b^2y^2-bx^3+x^4=0$, valorem y elicio. Vel possum fingere $y\times\overline{b-x}=v$, et sic scribendo $\frac{v}{b-x}$ pro y, orietur $v^3+b^2v^2-b^3x^3+3b^2x^4-3bx^5+x^6=0$: dein, extractâ radice v, divido quotientem per $b-x$ ut obtineatur valor y. Item si proponatur $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}=0$, fingo $y^{\frac{1}{2}}=v$, et $x^{\frac{1}{2}}=z$; et sic, scribendo v^2 pro y, et z^3 pro x, oritur $v^6-z^3v+z^4=0$; quâ æquatione resolutâ, restituo y et x. Scilicet radix invenietur, $v=z+z^3+6z^5$ &c. et, restitutis y et x, orietur $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}+x+6x^{\frac{3}{2}}$ &c. et quadrando $y=x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{5}{2}}+13x^2$ &c.

Ad eundem modum siquæ sint negativæ dimensiones ipsorum x & y, tollo, multiplicando per easdem x & y. Sic habito $x^3+3x^2y^{-1}-2x^{-1}-16y^{-3}=0$, multiplico per x & y^3; oriturque $x^4y^3+3x^3y^2-2y^3-16x=0$. Et habito $x=\frac{aa}{y}-\frac{2a^3}{y^2}+\frac{3a^4}{y^3}$, duco in y^3, et oritur $xy^3=a^2y^2-2a^3y+3a^4$. Et sic de cæteris.

III. Æquatione sic præparatâ, opus ab inventione primi termini

CAPUT TERTIUM.

mini quotientis initium ſumit; de quâ, ut et conſimili ſubſequentium terminorum inventione, hæc eſto Regula generalis, cùm ſpecies indefinita (x vel z) parva eſſe fingitur, ad quem caſum cæteri duo caſus ſunt reducibiles.

E terminis, in quibus ſpecies radicalis (y, p, q vel r, &c.) non reperitur, ſelige depreſſiſſimum reſpectu dimenſionum indefinitæ ſpeciei (x vel z, &c.) dein alium terminum, in quo ſit alia ſpecies radicalis, ſelige; talem nempe, ut progreſſio dimenſionum utriuſque præfatæ ſpeciei, à termino priùs aſſumpto ad hunc terminum continuata, quàm maximè poteſt deſcendat, vel minimè aſcendat. Et ſiqui ſint alii termini, quorum dimenſiones cum hâc progreſſione, ad arbitrium continuatâ, conveniant, eos etiam ſelige. Deinque ex his ſelectis terminis tanquam nihilo æqualibus quære valorem dictæ ſpeciei radicalis, et quotienti appone.

2. Cæterùm ut hæc Regula magis eluceſcat, placuit inſuper ope ſequentis diagrammatis exponere. Deſcripto angulo recto BAC, latera ejus BA, AC, divido in partes æquales, et inde normales erigo diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia quadrata vel parallelogramma, quæ concipio denominata eſſe à dimenſionibus ſpecierum x et y, prout vides in fig. 1. inſcriptas. Deinde cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma, ſingulis ejus terminis correſpondentia, inſignio notâ aliquâ. Et Regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis parallelogrammis applicatâ, quorum unum ſit humillimum in columnâ ſiniſtrâ juxta AB, et alia ad Regulam dextrorſum ſita, cæteraque omnia, non contingentia Regulam, ſupra eam jaceant: ſeligo terminos æquationis per parallelogramma contingentia regulam deſignatos, et inde quæro quantitatem quotienti addendam.

Fig. 1.

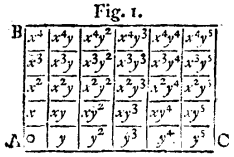
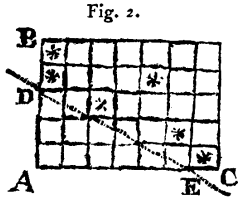


Fig. 2.



3. Sic ad extrahendam radicem y ex $y^6-5xy^5+\frac{x^3}{a}y^4-7a^2x^2y^2+6a^3x^3+b^2x^4=0$; parallelogramma, hujus terminis reſpondentia, ſigno notâ aliquâ $*$, ut vides in Schem. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem è locis ſignatis in ſiniſtrâ columnâ, eamque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio, donec alium ſimiliter, vel fortè plura, è reliquis ſignatis locis cæperit attingere; videoque loca ſic attacta eſſe x^3, x^2y^2 et y^6. E terminis itaque $y^6-7a^2x^2y^2+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (et inſuper ſi placet reductis ad $v^6-7v^2+6=0$, ponendo $y=v\sqrt{ax}$) quæro valorem y; et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$ et $-\sqrt{2ax}$: quorum quemlibet pro initio quotientis accipere liceat, prout è radicibus quampiam extrahere decretum eſt. RESOLUTIO SPECIOSA.

Sic ex $y^5-by^2+9bx^2-x^3=0$, ſeligo $-by^2+9bx^2$, et inde obtineo $+3x$ pro initiali termino quotientis.

Et ex $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$. Seligo $y^3+a^2y-2a^3$, et radicem ejus, $+a$, ſcribo in quotiente.

Et ex $x^2y^5-3c^4xy^2-c^5x^2+c^7=0$. Seligo $x^2y^5+c^7$, quod exhibet $-\sqrt[5]{\frac{c^7}{x^2}}$ pro initio quotientis. Et ſic de cæteris.

4. Cæterùm invento hoc termino, ſi is contingat eſſe negativæ poteſtatis, æquationem per eandem indefinitæ ſpeciei poteſtatem deprimo, eò, ut non opus ſit inter ſolvendum deprimere; et inſuper ut Regula de ſuperfluis terminis elidendis, mox tradenda, aptè poſſit adhiberi. Sic propoſito $8z^6y^3+az^6y^2-27a^9=0$, cujus quotiens exordiri debet à $\frac{3a^3}{2z}$, deprimo per zz; ut fiat, $8z^4y^3+az^4y^2-27a^9z^{-2}=0$, antequam ſolutionem ineo.

5. Subſequentes quotientum termini eâdem methodo ex æquationibus ſecundariis, inter operandum prodeuntibus, eruuntur; ſed ut plurimùm leviori curâ: res enim peragi ſolet, dividendo depreſſiſſimum è terminis, cum indefinitè parvâ ſpecie (x, xx, x^3, &c.) abſque ſpecie radicali (p, q, r, &c.) affectis, per quantitatem, quâcum ſpecies illa radicalis, unius tantùm dimenſionis, abſque alterâ indefinitâ ſpecie, afficitur; et exitum ſcribendo in quotiente. Sic in exemplo ſequente, termini $\frac{x}{4}$, $\frac{x^2}{64a}$, $\frac{131x^3}{512a^2}$, &c. eliciuntur dividendo a^2x, $\frac{1}{16}ax^2$, $\frac{131}{128}x^3$ &c. per $4aa$.

6. His præmiſſis, reſtat ut praxin Reſolutionis exhibeam.

Sit itaque $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, æquatio reſolvenda; et ex e- terminis $y^3+aay-2a^3=0$, æquatione fictitiâ juxta tertium è præ-

Caput Tertium.

missis, elicio $y-a=0$, et scribo $+a$ in quotiente. Deinde cùm $+a$ non accuratè valeat y, pono $a+p=y$, et pro y, in terminis æquationis in margine scriptis, subsstituo $a+p$, terminosque resultantes (p^3+3ap^2+axp &c.) rursum scribo in margine; ex quibus iterum, juxta tertium è præmissis, excerpo terminos $+4a^2p+a^2x=0$ pro æquatione fictitiâ; quæ cùm exhibeat $p=-\frac{1}{4}x$, pono $-\frac{1}{4}x$ in quotiente. Præterea cùm $-\frac{1}{4}x$ non accuratè valet p, scribo $-\frac{1}{4}x+q=p$, et pro p, in terminis marginalibus, subsstituo $-\frac{1}{4}x+q$, terminosque resultantes ($q^3-\frac{3}{4}xq^2+3aq^2$ &c.) iterum scribo in margine; ex quibus denuò, juxta Regulam præfatam, seligo terminos $4a^2q-\frac{1}{16}ax^2=0$, pro æquatione fictitiâ; quæ cùm exhibeat $q=\frac{x^2}{64a}$, scribo $+\frac{x^2}{64a}$ in quotiente. Porro cùm $\frac{x^2}{64a}$ non accurate valeat q, pono $\frac{x^2}{64a}+r=q$, et pro q, in terminis marginalibus, subsstituo $\frac{x^2}{64a}+r$, et sic opus ad placitum produco, prout indicat subjectum diagramma.

$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$

$y=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$

$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$
	$+a^2y$	$+a^3+a^2p$
	$+axy$	$+a^2x+axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x+4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2+axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	q^3	*
	$-\frac{3}{4}xq^2$	*
	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{10240}+\frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{63}{64}x^3$	$-\frac{63}{64}x^3$

$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$

7. Quòd si quotientem ad certam usque periodum produci cupiam, ut x nempe, in ultimo ejus termino, ultra datum dimensionum numerum non ascendat, terminos inter subsstituendum semper omitto, quos nulli deinceps usui fore prævideam. Cujus rei Regula esto, quòd post primum terminum, ex quâlibet quantitate in margine collaterali resultantem, non addantur plures dextrorsum, quàm istius primo

mò resultantis termini dimensio à periodicâ, sive maximâ dimensione quotientis deficit gradibus. Ut in hoc exemplo, si cupiam ut quotiens (sive x in quotiente) ad quatuor tantùm dimensiones ascendat, omitto omnes terminos post x^4, & post x^3 pono unicum tantùm. Terminos itaque post notam * delendos esse concipe: et opere sic continuato, donec ultimò ad terminos $\frac{15x^4}{4096a}-\frac{131}{128}x^3+4a^2r-\frac{1}{2}axr+\frac{9}{32}x^2r$ deveniatur, in quibus p, q, r vel s, &c. residuum radicis extrahendæ, sit unicæ tantùm dimensionis; tot terminos $\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ per divisionem elicies, quot, ad complendum quotientem, deesse videbis. Atque ita tandem obtinebitur $y=a-\frac{1}{4}x+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$. Resolutio Speciosa.

8. Plenioris illustrationis gratiâ, dedi aliud exemplum, resolvendo $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-z=0$; ubi proponitur inventio quotientis ad quintam tantùm dimensionem, terminique superflui post notam (&c.) negliguntur.

$y=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$ &c.

$z+p=y$	$+\frac{1}{5}y^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}y^4$	$-\frac{1}{4}z^4-z^3p$ &c.
	$+\frac{1}{3}y^3$	$+\frac{1}{3}z^3+z^2p+zp^2$ &c.
	$-\frac{1}{2}y^2$	$-\frac{1}{2}z^2-zp-\frac{1}{2}p^2$ &c.
	$+y$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2+q=p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$ &c.
	$-\frac{1}{2}p^3$	$-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{2}z^2q$ &c.
	$+z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$ &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4+z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3-zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2+q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$

$1-z+\frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{10}z^5\ (\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$

9. Atque ita si cupiam æquationem $\frac{63y^{11}}{2816}+\frac{35}{1152}y^9+\frac{5}{112}y^7+\frac{3}{40}y^5+\frac{1}{6}y^3+y-z=0$, adusque nonam tantùm dimensionem quotientis resolvi, ante opus initum negligo terminum $\frac{63}{2816}y^{11}$; deinde, inter operandum, negligo etiam omnes terminos post z^9, post z^7 pono unicùm, ac duos tantùm post z^5; eò quòd percipio quotientem ubique per gradus binarum unitatum (hoc modo z, z^3, z^5, &c.) debere ascendere. Tandemque prodit $y=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7+\frac{1}{362880}z^9$.

10. Et hinc patet artificium, quo æquationes in infinitum affectæ, vel utcunque multis, numerovè infinitis terminis constantes, possunt solvi. Scilicet omnes termini ante opus initum debent negligi, in quibus dimensio speciei indefinitè parvæ, non affectæ

CAPUT TERTIUM.

affectæ cum radicali ſpecie, tranſcendit maximam dimenſionem in quotiente deſideratam; vel ex quibus, ſubſtituendo pro radicali ſpecie primum terminum quotientis, ope teſſellatæ tabulæ inventum, non niſi ejuſmodi tranſcendentes termini poſſunt emergere. Sic in exemplo noviſſimo terminos omnes ſupra y^9, quamvis infinitè progrederentur, omiſiſſem. Et ſic in hâc æquatione

$$0 = \begin{cases} -8 + z^2 - 4z^4 + 9z^6 - 16z^8 \text{ &c.} \\ +y \text{ in } z^2 - 2z^4 + 3z^6 - 4z^8 \text{ &c.} \\ -y^2 \text{ in } z^2 - z^4 + z^6 - z^8 \text{ &c.} \\ +y^3 \text{ in } z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8 \text{ &c.} \end{cases}$$

ut radix cubica ad quatuor tantùm dimenſiones ipſius z extrahatur, omitto omnes in infinitum terminos poſt $+y^3$ in $z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6$, et poſt $-y^2$ in $z^2 - z^4 + z^6$, et poſt $+y$ in $z^2 - 2z^4$, et poſt $-8 + z^2 - 4z^4$. Et hanc tantùm æquationem, $\frac{1}{3}z^6y^3 - \frac{1}{2}z^4y^3 + z^2y^3 - z^6y^2 + z^4y^2 - z^2y^2 - 2z^4y + z^2y - 4z^4 + z^2 - 8 = 0$, reſolvendam ſumo, ſiquidem $2z^{-\frac{2}{3}}$ (primus nempe quotientis terminus) pro y in reliquâ æquatione, per $z^{\frac{2}{3}}$ depreſſâ, ſubſtitutus, dat plures ubique quàm quatuor dimenſiones.

11. Quæ de altioribus æquationibus dixi, ad quadraticas etiam applicari poſſunt. Quemadmodum ſi hujus

$$0 = \begin{cases} yy \\ -y \text{ in } a + x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} \text{ &c.} \\ +\frac{x^4}{4a^2} \end{cases}$$

radicem ad uſque periodum x^6 deſiderem, mitto terminos in infinitum poſt $-y$ in $a + x + \frac{x^2}{a}$; et iſthanc tantùm, $y^2 - ay - xy - \frac{x^2}{a}y + \frac{x^4}{4a^2} = 0$ (ſive id fiat hâc lege; $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2a} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^3}{2a}}$, ut ſolet, ſive expeditiùs per methodum de affectis æquationibus jam traditam) reſolvo: et exit $y = \frac{x^4}{4a^3} - \frac{x^5}{4a^4}$*, ultimo deſiderato termino exiſtente nullo.

12. Poſtquam verò radices ad convenientem periodum extractæ ſunt, poſſunt aliquando ex analogiâ ſeriei obſervatâ, ad placitum produci. Sic hanc $z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c. (radicem æquationis infinitæ $z = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ &c.) perpetuò produces, dividendo ultimum

ultimum terminum per hos ordine numeros, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. RESOLUTIO SPECIOSA. Et hanc, $z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ &c. dividendo per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, &c. Et hanc $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. multiplicando per hos $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, &c. Et ſic in aliis (b).

13. Cæterùm in inventione primi termini quotientis, et nonnunquam ſecundi tertiive, difficultas etiamnum enodanda ſupereſt. Poteſt enim valor ejus, ſecundum præcedentia quæſitus, eſſe ſurda, ſive inextricabilis, radix æquationis multipliciter affectæ. Quod cùm accidit, modò non ſit inſuper impoſſibilis, illum literâ aliquâ deſignabis, dein operabere tanquam ſi cognitum haberes. Quemadmodum in exemplo $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$, ſi radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, fuiſſet ſurda, vel ignota; finxiſſem quamlibet b pro eâ ponendam eſſe, et reſolutionem (puta ad tertiam dimenſionem quotientis) ut ſequitur perfeciſſem.

$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$. Sit $cc = 3b + a^2$.

$$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{a^6b^3x^3}{c^{10}} \text{ &c.}$$

$b+p=y$	$+y^3$	$+b^3+3b^2p+3bp^2+p^3$
	$+axy$	$+abx+axp$
	$+aay$	$+aab+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc}+q=p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^3}{c^4} \quad \frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2}+axq$
	$+cp$	$-abx+ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$

$$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}\Big) \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6}\left(\frac{a^2bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} \text{ &c.}\right.$$

Scribens b in quotiente, ſuppono $b+p=y$, & pro y ſubſtituo ut vides: unde prodit $p^3 + 3p^2b$ + &c. rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quòd b ſupponitur radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $\frac{-abx}{3b^2+a^2}$ quotienti apponendum, & $\frac{-abx}{3b^2+a^2} + q$ ſubſtituendum pro p.

(b) Vide Analyſ. per Æquat. Infinit. Cap. VIII.

CAPUT TERTIUM.

Brevitatis autem gratiâ ſcribo *cc* pro $3b^2+a^2$, cavendo tamen ut $3bb+aa$ reſtituatur, ubi terminos ſic abbreviari poſſe percipiam. Completo opere, aſſumo numerum aliquem pro a, et hanc $y^3+a^2y-2a^3=0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſuprà, reſolvo, et quemlibet ejus radicem, modò tres haberet, pro b ſubſtituo. Vel potius hujuſmodi æquationes à ſpeciebus, ut poſſum, libero, præſertim ab indefinitâ; idque pro more quam volui innuere, pag. 399, lin. 6 & 7; et pro cæteris tantùm, ſiquæ ſuperſint indelebiles, pono numeros. Sic $y^3+a^2y-2a^3=0$, liberabitur ab a dividendo radicem per a, fietque $y^3+y-2=0$, cujus inventa radix ducta in a ſubſtitui debet pro b.

14. Hactenus indefinitam ſpeciem ſuppoſui parvam eſſe. Quòd ſi datæ quantitati vicina ſupponatur, pro indefinitè parvâ differentiâ, pono ſpeciem aliquam, et hâc ſubſtitutâ, ſolvo ut antè. Quemadmodum in $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-a-x=0$, cognito vel fictо x eſſe ejuſdem propè quantitatis ac a, pono z differentiam inter ea; et ſcribendo $a+z$ vel $a-z$ pro x, orietur $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-$ vel $+z=0$, ſolvendum ut in præcedentibus.

15. Sin autem ſpecies illa ſupponatur indefinitè magna, pro reciproco ejus indefinitè parvo, pono ſpeciem aliquam; quâ ſubſtitutâ ſolvo ut antè. Sic habito $y^3+y^2+y-x^3=0$: ubi x cognoſcitur, vel fingitur eſſe valdè magnum, pro reciprocè parvo $\frac{1}{x}$ pono z; et ſubſtituto $\frac{1}{z}$ pro x, orietur $y^3+y^2+y-\frac{1}{z^3}=0$, cujus radix eſt $\frac{1}{z}-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}z+\frac{7}{81}z^2+\frac{14}{729}z^4$ &c. et x ſi placet reſtituto, fit $y=x-\frac{1}{3}-\frac{2}{9x}+\frac{7}{81x^2}+\frac{14}{729x^4}$ &c.

16. Siquando ex aliquâ harum trium ſuppoſitionum res non omnino, aut non commodè, ſuccedat, ad aliam recurri poteſt. Sic in $y^4-x^2y^2+xy^2+2y^2-2y+1=0$, cùm primus terminus obtineri deberet, fingendo $y^4+2y^2-2y+1=0$, quæ tamen nullam admittit poſſibilem radicem, tento quid fiet aliter; quemadmodum ſi fingam x parùm differre à $+2$, ſive eſſe $2+z=x$, ſubſtituendo $2+z$ vice x prodibit $y^4-z^2y^2-2zy^2-2y+1=0$, et quotiens exordietur ab $+1$. Vel ſi fingam x indefinitè magnam eſſe, ſive $\frac{1}{x}=z$, obtinebitur $y^4-\frac{y^2}{z^2}+\frac{y^2}{z}+2y^2-2y+1=0$, et $+z$ pro initio quotientis.

Et hâc ratione ſecundum varias hypotheſes procedendo, licebit variis modis extrahere, ac deſignare radices. RESOLUTIO SPECIOSA.

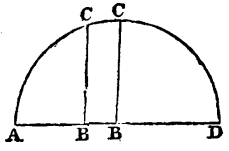
17. Quòd ſi cupias explorare, quot modis id poteſt fieri, tentabis quænam quantitates, pro indefinitâ ſpecie in æquationem propoſitam ſubſtitutæ, efficient diviſibilem per y + vel − aliquâ quantitate, vel per y ſolùm. Id quod, verbi gratiâ, in æquatione $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$, eveniet ſubſtituendo $+a$, vel $-a$, vel $-2a$, vel $-\overline{2a^3}^{\frac{1}{3}}$, &c. pro x. Atque ita poſſis commodè ſupponere quantitatem x parùm ab $+a$, vel $-a$, vel $-2a$, vel $-\overline{2a^3}^{\frac{1}{3}}$, differre, et inde radicem propoſitæ æquationis tot modis extrahere. Imo et fortaſſe tot aliis modis fingendo differentias iſtas eſſe indefinitè magnas. Quinetiam ſi aliam atque aliam è ſpeciebus radicem definientibus pro indefinitâ adhibeas, poſſis aliis adhunc fortaſſe modis propoſitum conſequi; et etiamnum aliis, ſubſtituendo valores quâcunque ratione fictos (quales ſunt $az+bz^2$, $\frac{a}{b+x}$, $\frac{a+cz}{b+z}$, &c.) pro indefinitâ ſpecie, et in æquatione reſultante operando ſicut in præcedentibus.

18. Cæterùm ut concluſionum veritas conſtet, quotientes nempe ſic extractas, dum producuntur, ita propriùs ad radicem accedere, ut minùs tandem quâvis datâ quantitate differant, adeoque in infinitum productas non omnino differre: perpende, quòd quantitates in ſiniſtrâ columnâ dextræ partis diagrammatum, ſunt ultimi termini æquationum quarum p, q, r, s, &c. exiſtunt radices; et inde quòd, ipſis evaneſcentibus, illæ p, q, r, s id eſt differentiæ inter quotientem, et quæſitam radicem ſimul evaneſcunt: adeoque quotiens tunc non differt à radice. Quamobrem ſub initio operis, ſi terminos in dictâ columnâ ſeſe omnes deſtruere videas, conclude quotientem, eatenus extractam, eſſe juſtam radicem. Sin aliter, videbis tamen terminos, in quibus indefinitè parva ſpecies eſt pauciorum dimenſionum, id eſt, longè maximos, è columnâ iſtâ perpetuò tolli; ut tandem non reſtant niſi datâ quâvis quantitate minores, et proinde non majores nihilo, cùm opus infinitè producitur. Quare Quotiens infinitè extracta fiet etiam juſta radix.

19. Etſi denique ſpecies, quas hactenus, perſpicuitatis gratiâ, ſuppoſui indefinitè parvas eſſe, quantumvis magnæ ſupponantur,

CAPUT TERTIUM.

tamen veræ erunt quotientes, ut minùs citò ad juſtam radicem convergant, quemadmodum ex analogiâ rei conſtet. Sed hîc radicum termini, maximæque et minimæ quantitates ſpectandæ veniunt: nam infinitarum cum finitis æquationibus communia ſunt hujuſmodi ſymptomata. Radix autem in his maxima fit vel minima, quando maxima vel minima eſt differentia ſummæ affirmativorum terminorum à ſummâ negativorum, ac terminatur, cùm indefinita quantitas, quam ideo parvam eſſe non immeritò finxi, non poteſt major ſumi, quin magnitudo radicis in infinitum proſiliet; hoc eſt, fiet impoſſibilis: verbi gratiâ, poſito ACD ſemicirculo ſuper diametro AD deſcripto, et BC ordinatim applicata. Dic AB=x, BC=y, AD=a. Et erit $y=(\sqrt{ax-x^2})=\sqrt{ax}-\frac{x}{2a}\sqrt{ax}-\frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax}-\frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c. ut ſuprà. Fit ergo BC, ſive y, maxima cùm $\sqrt{ax}$ maximè ſuperat omnes $\frac{x}{2a}\sqrt{ax}+\frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax}+\frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; id eſt, cùm ſit $x=\frac{1}{2}a$; terminabitur autem cùm ſit $x=a$: quia ſi ſumas x majorem quàm a ſumma omnium terminorum $-\frac{x}{2a}\sqrt{ax}-\frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax}-\frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c. erit infinita. Eſt et alius terminus, cùm ponitur $x=0$, propter impoſſibilitatem radicalis $\sqrt{-ax}$; quibus terminis correſpondent ſemicirculi limites A et D.



CAPUT QUARTUM.

Doctrina Fluxionum.

HACTENUS de modis computandi, quorum poſthac frequens erit uſus. Jam reſtat, ut, in illuſtrationem Artis Analyticæ, tradam aliquot Problematum ſpecimina, qualia præſertim natura Curvarum miniſtrabit. Sed imprimis obſervandum venit, quòd hujuſmodi difficultates poſſunt omnes ad hæc duo tantùm Problemata reduci, quæ circa ſpatium motu locali, utcunque accelerato vel retardato, deſcriptum ponere licebit.

I. Spatii longitudine continuò (ſive ad omne tempus) datâ, Celeritatem Motûs ad tempus propoſitum invenire.

II. Celeritate

DOCTRINA FLUXIONUM.

II. Celeritate Motûs continuò datâ, longitudinem deſcripti ſpatii ad tempus propoſitum invenire.

Sic in æquatione $xx=y$. Si y deſignat ſpatii longitudinem, ad quodlibet tempus quod aliud ſpatium x uniformi celeritate $\dot{v}$ creſcendo menſurat et exhibet, deſcriptam: tunc $2\dot{x}x$ deſignabit celeritatem, quâ ſpatium y, ad idem temporis momentum, deſcribi pergit; et contrà: et hinc eſt, quòd in ſequentibus conſiderem quantitates, quaſi generatæ eſſent per incrementum continuum, ad modum ſpatii quod mobile percurrendo deſcribit.

2. Cùm autem Temporis nullam habemus æſtimationem, niſi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et menſuratur, et præterea cùm quantitates ejuſdem tantùm generis inter ſe conferri poſſunt, et earum incrementi et decrementi celeritates inter ſe; eapropter ad tempus formaliter ſpectatum in ſequentibus haud reſpiciam: ſed è propoſitis quantitatibus, quæ ſunt ejuſdem generis, aliquam æquabili fluxione augeri fingam, cui cæteræ tanquam tempori referantur, adeoque cui nomen temporis analogicè tribui mereatur. Si quando itaque vocabulum Temporis in ſequentibus occurrat (quemadmodum perſpicuitatis et diſtinctionis gratiâ nonnunquam intertexui) eo nomine non Tempus formaliter ſpectatum ſubintelligi debet; ſed illa alia quantitas, cujus æquabili incremento, ſive fluxione, tempus exponitur et menſuratur.

3. Quantitates autem quas ut ſenſim creſcentes indefinitè conſidero, quo diſtinguam ab aliis quantitatibus, quæ in æquationibus quibuſcunque pro determinatis et cognitis habendæ ſunt ac initialibus literis a, b, c, &c. deſignantur, poſthac denominabo Fluentes, ac deſignabo finalibus literis v, x, y et z. Et celeritates, quibus ſingulæ à motu generante fluunt et augentur, quas poſſim fluxiones vel ſimpliciter celeritates vocitare, deſignabo literis $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, nempe pro celeritate quantitatis v ponam $\dot{v}$, et ſic pro celeritatibus aliarum quantitatum x, y et z ponam $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ reſpectivè.

4. His præmiſſis, è veſtigio rem aggredior; imprimis duorum jam modo propoſitorum Problematum ſolutionem exhibiturus.

PROB.

PROBLEMA PRIMUM. PROBLEMA PRIMUM.

Relatione quantitatum Fluentium inter ſe datâ, Fluxionum relationem determinare.

SOLUTIO.

ÆQUATIONEM, quâ data relatio exprimitur, diſpone ſecundum dimenſiones alicujus fluentis quantitatis, puta x, ac terminos ejus multiplica per quamlibet Arithmeticam progreſſionem; ac deinde per $\frac{\dot{x}}{x}$. Et hoc opus in quâlibet fluenti quantitate ſeorſim inſtitue. Dein omnium factorum ſummam pone nihilo æqualem, et habes æquationem deſideratam (c).

5. EXEMP. 1. Si quantitatum x et y relatio ſit $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, terminos primò ſecundum x, ac deinde ſecundum y diſpoſitos multiplico ad hunc modum.

Mult. $x^3 - ax^2 + axy - y^3$				Mult. $- y^3 + axy - axx + x^3$		
per $\frac{3\dot{x}}{x}$	$\frac{2\dot{x}}{x}$	$\frac{\dot{x}}{x}$	0	per $\frac{3\dot{y}}{y}$	$\frac{\dot{y}}{y}$	0
fit $3\dot{x}x^2-2\dot{x}ax+\dot{x}ay-$			*	fit $-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x$		*

Et factorum ſumma eſt $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$: æquatio quæ dat relationem inter fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{y}$. Nempe ſi aſſumas x ad arbitrium, æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ dabit y. Quibus determinatis erit $\dot{x}:\dot{y}::3y^2-ax:3x^2-2ax+ay$.

6. EXEMP. 2. Si quantitatum x, y et z, relatio ſit $2y^3+x^2y-2cyz+3yz^2-z^3=0$

Mult. $2y^3+x^2y$	$-z^3$		Mult. x^2y+2y^3			Mult. $-z^3+3yz^2-2cyz+x^2y+2y^3$			
	$-2czy$			$-2cyz$					
	$+3z^2y$			$+3yz^2$					
				$-z^3$					
per $\frac{2\dot{y}}{y}$	. 0	$-\frac{\dot{y}}{y}$	per $\frac{2\dot{x}}{x}$	. 0		per $\frac{3\dot{z}}{z}$	. $\frac{2\dot{z}}{z}$	. $\frac{\dot{z}}{z}$	. 0
fit $4\dot{y}y^2$	*	$+\frac{\dot{y}z^3}{y}$	fit $2\dot{x}xy+$	*		fit $-3\dot{z}z^2+6z\dot{y}z-2cz\dot{y}$			*

Quare fluendi celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ relatio eſt $4\dot{y}y^2+\frac{\dot{y}z^3}{y}+2\dot{x}xy-3\dot{z}z^2+6z\dot{y}z-2cz\dot{y}=0$.

(c) Vide Librum de Quad. Curv. Prop. I.

7. Cæterùm

6. Cæterùm cùm tres ſint hîc fluentes quantitates x, y & z, deberet alia inſuper æquatio dari, quâ relatio inter ipſas, ut et inter earum fluxiones, penitus determinetur. Quemadmodum ſi ponitur $x+y-z=0$; exinde fluxionum alia relatio juxta regulam erit $\dot{x}+\dot{y}-\dot{z}=0$. Confer jam haſce cum præcedentibus æquationibus, eliminando quamlibet è tribus quantitatibus, et quamlibet etiam è tribus earum fluxionibus, et reliquorum relationes penitius determinatas obtinebis. INVENTIO FLUXIONUM.

8. Siquando in æquatione propoſitâ inſint fractiones complexæ, aut ſurdæ quantitates, pro ſingulis pono totidem literas, eaſque fingens deſignare quantitates fluentes, operor ut antè. Dein ſupprimo et extermino literas aſcriptitias, ut hîc videre eſt.

9. EXEMP. 3. Si quantitatum x et y relatio ſit $yy-aa-x\sqrt{aa-xx}$: pro $x\sqrt{aa-xx}$ ſcribo z; et inde habeo duas æquationes $y^2-a^2-z=0$, et $aaxx-x^4-z^2=0$: quarum prior ut antè dabit $2y\dot{y}-\dot{z}=0$, pro relatione celeritatum $\dot{y}$ et $\dot{z}$; et poſterior dabit $2a^2\dot{x}x-4\dot{x}x^3-2z\dot{z}=0$, ſive $\frac{aa\dot{x}x-2\dot{x}x^3}{z}=\dot{z}$, pro relatione celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{z}$. Jam z ſuppreſſo, fiet $2y\dot{y}-\frac{aa\dot{x}x+2\dot{x}x^3}{z}=0$: dein reſtituto $x\sqrt{aa-xx}$ pro z, habebitur $2y\dot{y}-\frac{aa\dot{x}+2\dot{x}x^2}{\sqrt{aa-xx}}=0$, relatio inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$, quæ quærebatur.

10. EXEMP. 4. Si $x^3-ay^2+\frac{by^3}{a+y}-x^2\sqrt{ay+x^2}=0$ deſignat relationem inter x et y: pono $z=\frac{by^3}{b+y}$, et $v=x^2\sqrt{ay+x^2}$, et inde nactus ſum tres æquationes, $x^3-ay^2+z-v=0$, $az+yz-by^3=0$, et $ax^4y+x^6-vv=0$. Prima dat $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\dot{z}-\dot{v}=0$. Secunda dat $a\dot{z}+\dot{z}y+\dot{y}z-3b\dot{y}y^2=0$, et tertia dat $4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4-2\dot{v}v=0$, pro relationibus celeritatum $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$. Ipſorum vero $\dot{z}$ et $\dot{v}$ valores per ſecundam ac tertiam inventos (nempe $\frac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}$ pro $\dot{z}$, et $\frac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}$ pro $\dot{v}$) ſubſtituo in primam, et oritur $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\frac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}-\frac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}=0$. Et vice z et v reſtitutis valoribus $\frac{by^3}{a+y}$ et $x^2\sqrt{ay+xx}$, prodit æquatio quæſita, $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\frac{3ab\dot{y}y^2+2b\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2}-\frac{4a\dot{x}xy+6\dot{x}x^3+a\dot{y}xx}{2\sqrt{ay+xx}}=0$, quâ relatio celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ deſignatur.

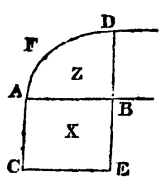
11. Quo pacto in aliis caſibus operandum eſt, quemadmodum

PROBLEMA PRIMUM. cùm in æquatione propoſitâ reperiuntur ſurdi denominatores, radicales cubicæ, radicales intra radicales, ut $\sqrt{ax+\sqrt{aa-xx}}$ aut alii ejuſmodi perplexi termini, ex his credo manifeſtum eſſe.

12. Quinimo ſi in æquatione quantitates involventur, quæ nullâ ratione geometricâ determinari et exprimi poſſunt, quales ſunt Areæ vel Longitudines curvarum; tamen relationes fluxionum haud ſecus inveſtigantur, prout in exemplo ſequente conſtabit.

Præparatio in Exempl. 5.

13. Pono BD ordinatam eſſe in angulo recto ad AB, et quòd ADH ſit Curva, quæ per relationem inter AB et BD, æquatione quâlibet exhibitam, definitur. AB vero dicatur x, et curvæ area ADB ad unitatem applicata dicatur z. Dein erige perpendiculum AC æquale unitati, et per C due CE parallelam AB et occurrentem BD in E, et concipiendo has duas ſuperficies, ADB & ACEB, genitas eſſe per motum rectæ BED, manifeſtum erit, quòd earum fluxiones (hoc eſt fluxiones quantitatum $1\times\dot z$ & $1\times\dot x$, ſive quantitatum $\dot z$ & $\dot x$) ſunt inter ſe ut BD et BE, lineæ generantes. Eſt ergo $\dot z:\dot x::$ BD : BE, ſive 1; adeoque $\dot z=\dot x\times$ BD.



14. Et hinc fit, quòd z in æquatione quâlibet deſignante relationem inter x et aliam quamvis fluentem quantitatem y involvi poteſt, et tamen fluxionum $\dot x$ & $\dot y$ relatio nihilo minùs invenire.

15. EXEMP. 5. Quemadmodum ſi proponatur $z^2+axz-y^3=0$, pro deſignandâ relatione inter x et y, ut et $\sqrt{ax-xx}=$ BD, pro curvâ determinandâ, quæ proin erit circulus: æquatio $z^2+axz-y^3=0$, ſicut in præcedentibus, dabit $2\dot z\dot z+a\dot z\dot x+a\dot x\dot z-4\dot y y^3=0$, pro relatione celeritatum $\dot x$, $\dot y$ & $\dot z$. Et præterea, cùm ſit $\dot z=\dot x\times$ BD ſive $=\dot x\sqrt{ax-xx}$, pro eo ſubſtitue hunc valorem, et orietur $2\dot x\dot z+a\dot x\dot x\sqrt{ax-xx}+a\dot x z-4\dot y y^3=0$ æquatio definiens relationem celeritatum $\dot x$ et $\dot y$.

16. DEMONSTR. Fluentium quantitatum momenta (i. e. earum partes indefinitè parvæ, quarum additamento per ſingula temporis

temporis indefinitè parva ſpatia augentur) ſunt ut fluendi celeritates. Quare ſi cujuſvis, ut x, momentum per factum ex ejus celeritate $\dot x$, et infinitè parvâ quantitate o (i. e. per $\dot x$o) deſignetur, cæterorum v, y, z momenta per $\dot v$o, $\dot y$o, $\dot z$o, deſignabuntur, ſiquidem $\dot v$o, $\dot x$o, $\dot y$o, & $\dot z$o. Sunt inter ſe ut $\dot v$, $\dot x$, $\dot y$, & $\dot z$. INVENTIO FLUXIONUM.

Jam cùm quantitatum fluentium (ut x & y) momenta (ut $\dot x$o & $\dot y$o) ſint additamenta infinitè parva, quibus illæ quantitates, per ſingula temporis infinitè parva intervalla, augentur; ſequitur, quòd quantitates illæ x et y, poſt quodlibet infinitè parvum temporis intervallum, futuræ ſunt $x+\dot x$o, et $y+\dot y$o. Et inde æquatio, quæ relationem quantitatum fluentium ad omne tempus indifferenter deſignat, æquè deſignabit relationem inter $x+\dot x$o, et $y+\dot y$o, ac inter x et y: adeo ut $x+\dot x$o et $y+\dot y$o pro quantitatibus iſtis, vice x et y, in dictam æquationem ſubſtitui poſſunt.

Detur itaque quælibet æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, et ſubſtitue $x+\dot x$o pro x, et $y+\dot y$o pro y, et emerget.

$$\left.\begin{array}{llll} x^3+3\dot x\text{o}x^2 & +3\dot x^2\text{oo}x & +\dot x^3\text{o}^3 & \\ -ax^2-2a\dot x\text{o}x- & a\dot x^2\text{oo} & & \\ +axy+ & a\dot x\text{o}x+ & a\dot y\text{o}x & +a\dot x\dot y\text{oo} \\ -y^3 & -3\dot y\text{o}y^2 & -3\dot y^2\text{oo}y & -\dot y^3\text{o}^3 \end{array}\right\}=0$$

Jam ex hypotheſi ſunt $x^3-ax^2+axy-y^3=0$; quibus deletis, et reliquis terminis per o diviſis, reſtabunt $3\dot x x^2+3\dot x^2\text{o}x+x^3\text{oo}-2a\dot x x-a\dot x\dot x\text{o}+a\dot x y+a\dot y x+a\dot x\dot y\text{o}-3\dot y y^2-3\dot y^2\text{o}y-\dot y^3\text{oo}=0$. Et inſuper, cùm o ſupponitur eſſe infinitè parvum, eò ut momenta quantitatum deſignare poſſit; termini per illud multiplicati, reſpectu cæterorum, nihil valebunt. Rejicio itaque, et reſtat $3\dot x x^2-2a\dot x x+a\dot x y+a\dot y x-3\dot y y^2=0$, ut ſuprà in Exempl. 1.

Hinc obſervare eſt, quòd termini non multiplicati per o ſemper evaneſcent, ut et illi multiplicati per o pluſquam unius dimenſionis: et quòd reliquorum terminorum, per o diviſorum, ea ſemper erit forma, quam juxta regulam habere debent. Id quod volui oſtendere.

17. Et hoc monſtrato, cætera, quæ regula involvit, facilè conſequentur; quemadmodum quòd in æquatione propoſitâ plures fluentes quantitates involvi poſſunt, et quòd termini non modò

PROBLEMA SECUNDUM. per numerum dimenſionum quantitatum fluentium, ſed per quaſlibet alias Arithmeticas Progreſſiones multiplicari poſſunt; dummodo in operatione, juxta quamlibet fluentem quantitatem, ſit eadem terminorum differentia, et progreſſio ſecundum eundem cujuſque dimenſionum ordinem diſponatur (d). Et his conceſſis, quæ præterea in exemplis 3, 4 & 5, docentur per ſe manifeſta ſunt.

PROBLEMA SECUNDUM.

18. *Expoſitâ æquatione Fluxiones quantitatum involvente relationem quantitatum inter ſe invenire.*

Solutio Particularis.

CUM hoc Problema ſit præcedentis converſum, contrario modo ſolvi debet: utpote terminos per $\dot{x}$ multiplicatos diſponendo ſecundum dimenſiones ipſius x, dividendoque per $\frac{\dot{x}}{x}$, ac dein per progreſſionem; atque idem opus in terminis per $\dot{v}$, $\dot{y}$ vel $\dot{z}$ multiplicatis inſtituendo, et reſultantium ſummam, rejectis terminis redundantibus, ponendo æqualem nihilo.

19. EXEMPL. Sic expoſitâ æquatione $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$; operor ad hunc modum.

Divido $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$	divido $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$
per $\frac{\dot{x}}{x}$ & fit $3x^3 - 2ax^2 + axy$	per $\frac{\dot{y}}{y}$ fit $-3y^3 + ayx$
dein div. per 3 . 2 . 1	div. per 3 . 1
et fit $x^3 - ax^2 + axy$	fit $-y^3 + axy$

Et ſumma $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, erit relatio deſiderata quantitatum

(d) NIMIRUM ſi Æquationem quamlibet propoſitam, puta $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, in quantitatem $x^m y^n$ multiplicaveris, tranſmutaveris in hanc aliam; $x^{m+3}y^n - ax^{m+2}y^n + ax^{m+1}y^{n+1} - x^m y^{n+3} = 0$ quæ eaſdem quas prior illa quantitatum x, y inter ipſas relationes, alio licet modo, exprimet.

Jam ex tranſmutatâ, multiplicationem membrorum cum ſeriebus illis arithmeticis, quas tranſmutatæ indices conſtituunt, inſtituendo, hanc elicies fluxionum æquationem:

$\overline{m+3}\,y^n x^{m+2}\dot{x} - \overline{m+2}.\,ay^n x^{m+1}\dot{x} + \overline{m+1}.\,ay^{n+1}x^m\dot{x} - my^{n+3}x^{m-1}\dot{x} - \overline{n+3}.\,x^m y^{n+2}\dot{y} + \overline{n+1}.ax^{m+1}y^n\dot{y} - n.ax^{m+2}y^{n-1}\dot{y} + nx^{m+3}y^{n-1}\dot{y} = 0.$

Quæ membris ejus omnibus à quantitate $x^m y^n$ diviſis, in hanc mutabitur; $\overline{m+3}.x^2\dot{x} - \overline{m+2}.ax\dot{x} + \overline{m+1}.ay\dot{x} - my^3x^{-1}\dot{x} - \overline{n+3}y^2\dot{y} + \overline{n+1}ax\dot{y} - nax^2y^{-1}\dot{y} + nx^3y^{-1}\dot{y} = 0$: quam minori quidem negotio è datâ deduxiſſes, ſi datam, ſecundum indices literæ x primùm, tum literæ y, ordinnatm, in ſeries, primùm $m+3.\ m+2.\ m+1.\ m$, tum $n+3.\ n+2.\ n+1.\ n$, multiplicâſſes, et reliqua peregiſſes ex præceptis Newtoni. Hæc autem æquatio, fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ relationes mutuas

tum x et y. Ubi obſervandum venit, quòd etſi terminus axy bis reſultavit, tamen non pono bis in hâc ſummâ, $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ ſed redundantem terminum rejicio. Et ſic ubicunque terminus aliquis bis reſultat, aut ſæpiùs, ſi de pluribus fluentibus quantitatibus agitur, ſemel tantùm in ſummâ terminorum ſcribo. INVENTIO FLUENTIUM.

20. Sunt et aliæ circumſtantiæ, quas artificis ingenio pro re natâ obſervandas eſſe remitto; nam ſupervacaneum eſſet his multa verba impendere; ſiquidem Problema non ſemper poteſt hoc artificio ſolvi. Addo tamen, quòd poſtquam artifex relationem fluentium quantitatum hâc methodo adeptus eſt, ſi juxta Prob. 1. poteſt regredi ad expoſitam æquationem fluxiones involventem, rectè operatus eſt; ſin ſecùs vitioſè. Sic in exemplo propoſito, ubi æquationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ adeptus ſum, ſi relatio inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$ ope primi Problematis viciſſim inde requiratur, obtinebitur æquatio expoſita $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. Undè conſtat æquationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, rectè inventam fuiſſe. At ſi æquatio $x\dot{x} - \dot{x}y + \dot{y}a = 0$, exponeretur, et inde præſcriptâ methodo elicerem $\frac{1}{2}x^2 - xy + ay = 0$, pro relatione inter x et y, vitioſa foret operatio; ſiquidem exinde per Prob. 1. viciſſim produceretur $\dot{x}x - \dot{x}y - \dot{y}x + \dot{y}a = 0$, quæ differt ab æquatione primò expoſitâ.

21. Hæc itaque perfunctoriè notata prætermittens, ſolutionem generalem aggredior.

Preparatio in Generalem Solutionem.

Et imprimis obſervandum eſt, quòd in expoſitâ æquatione ſymbola fluxionum, cùm ſint quantitates diverſi generis à quantitatibus quarum ſunt fluxiones, in ſingulis terminis debent ad

mutuas æquè exprimit, licet alio quidem modo, ac ſimplicior illa, quam è datâ, multiplicando in ſeries quas datæ indices conſtituunt, deducere licet; quæ hæc erit, $3x\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$.

Similiter in omni caſu, ſive in ſeries quas poteſtatum indices conſtituunt, ſive in illas quas conſtituunt iidem indices datis quibuſvis quantitatibus, m, n auctis, æquationem propoſitam multiplices, & reliqua, quæ Newtonus præcepit, exſequaris, idem planè effeceris. Æquationes varias quidem efformaveris, ſed quæ variis modis idem omnes ſignificabunt; luculentè tamen aliæ, aliæ magis obſcurè. *Colſon ad Locum.*

Cæterùm rationem hanc inutiliter implicitam, quâ initio uſus eſt, Newtonus poſtea meritò repudiavit; multiplicationibus in ſeries indicum contentus. Cùm reverà multiplicationibus illis in indices datis quantitatibus auctos vix aliud efficiatur, niſi ut æquatio fluxionalis, ex occultâ quaſi æquationis propoſitæ multiplicatione, formâ implicatiore prodeat. *Vide Wilſon. Appendix to Robins's Works.*

æque-

PROBLEMA SECUNDUM.

æque-multas dimenſiones aſcendere (c). Et ubi res aliter ſe habet; alia alicujus fluentis quantitatis Fluxio ſubintelligi debet eſſe unitas, per quam termini depreſſiores toties multiplicantur, ut in omnibus ſymbola fluxionum ad eundem dimenſionum gradum aſcendant. Quemadmodum ſi exponitur æquatio $\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-xx=0$, tertiæ alicujus fluentis quantitatis, ut z, fluxio $\dot{z}$ ſubintelligi debet eſſe unitas; per quam primus terminus $\dot{x}$ ſemel, et ultimus xx bis multiplicetur, ut fluxiones inibi ad æque-multas dimenſiones, ac in ſecundo termino, $\dot{x}\dot{y}x$, aſcendant: quaſi expoſita æquatio ex hâc $\dot{z}\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-\dot{z}\dot{z}x^2=0$ derivata fuiſſet, ponendo $\dot{z}=1$. Et ſic in æquatione $\dot{y}x=yy$ debes imaginari $\dot{x}$ eſſe unitatem, per quam terminus yy multiplicatur.

22. Æquationes autem, in quibus duæ tantùm ſunt fluentes quantitates, quæ ad æque-multas dimenſiones paſſim aſcendunt, ſemper poſſunt ad talem formam reduci, ut ex unâ parte habeatur ratio fluxionum (velut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ vel $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ &c.) et ex alterâ parte valor ejus rationis ſimplicibus terminis algebraicis deſignatus, ſicut hîc videre eſt: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=2+2x-y$. Et ubi æquationibus præcedens particularis ſolutio non ſatisfacit, requiritur ut ad hanc formam reducas.

23. Quamobrem cùm in illius rationis valore terminus aliquis à compoſitâ quantitate denominetur, vel ſit radicalis, vel ſi ratio illa ſit æquationis radix affectæ: reductio vel per diviſionem, vel extractionem radicis, vel æquationis affectæ reſolutionem, inſtitui debet; prout in ſuperioribus oſtenſum eſt.

24. Quem-

(c) NIMIRUM huic *Fluxionis* vocabulo Newtonus duas ferè res ſubjecit: magnitudinum mutabilium mutandi Celeritates, et Magnitudines cujuſcunque generis, quibus celeritates illæ geometricè exhibeantur. Priore quidem ſenſu, qui primarius eſt, Fluxiones diverſi generis ſunt res, ac quantitates illæ, quarum Fluxiones ſunt. Quæ verò poſteriore ſenſu magnitudines Geometricæ Fluxiones dici ſolent, eas ſanè in eodem genere ſumi, in quo ipſarum ſint Fluentes, nihil vetat. Quanquam verò notis fluxionum algebraicis hæ ſæpiùs ſignificari exiſtimandæ ſunt, quàm celeritates illæ, quas repræſentant; in omni tamen Æquatione Fluxionali, ex quâ Fluentium relationes eliciendæ ſint, oportet membra ſingula notis fluxionum pariter implicari: proinde ac ſi magnitudinum fluentium, atque illarum, quæ fluendi celeritates exponant, genus neceſſariò diverſum eſſet. Aliter enim æquatio relationes Fluxionum mutuas non purè exprimet; ſed permiſtè quodammodo magnitudinum quibus geometricè fluxiones exponantur, harum, inquam, permiſtè inter ipſas relationes et cum fluentibus. Ut æquatio $b^2\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-ax^2=0$, relationes quidem indicat, quæ rectis fortè x, y inter ipſas, et cum aliâ rectâ x, intercedant; minimè verò illas, quæ, nullâ tertiæ x ratione habitâ, duarum $\dot{x}$, $\dot{y}$ ſint peculiares. Itaque hujuſmodi æquatio non eſt verè Fluxionalis.

INVENTIO FLUENTIUM.

24. Quemadmodum ſi exponitur $\dot{y}a-\dot{y}x-\dot{x}a+\dot{x}x-\dot{x}y=0$: hæc imprimis reductione vel fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\frac{y}{a-x}$, vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{a-x}{a-x+y}$. Et in priori caſu, ſi terminum $\frac{y}{a-x}$, à compoſitâ quantitate $a-x$ denominatum, reduco ad infinitam ſeriem ſimplicium terminorum, $\frac{y}{a}+\frac{xy}{aa}+\frac{x^2y}{a^3}+\frac{x^3y}{a^4}$ &c. dividendo numeratorem y per denominatorem $a-x$, obtinebo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\frac{y}{a}+\frac{xy}{a^2}+\frac{x^2y}{a^3}+\frac{x^3y}{a^4}$ &c. cujus ope relatio inter x et y determinanda eſt.

25. Sic expoſitâ $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}xx$, ſive $\frac{\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{x}}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+xx$; et ulteriori reductione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$; radicem quadraticam è terminis $\frac{1}{4}+xx$ extraho; et obtineo infinitam ſeriem $\frac{1}{2}+xx-x^4+2x^6-5x^8+14x^{10}$ &c. quam pro $\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$ ſubſtituendo, prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+x^2-x^4+2x^6-5x^8$ &c. vel $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-x^2+x^4-2x^6+5x^8$ &c. prout $\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$ additur vel ſubducitur à $\frac{1}{2}$.

26. Atque ita ſi exponitur $\dot{y}^3+ax\dot{x}^2\dot{y}+a^2\dot{x}^2\dot{y}-\dot{x}^3x^3-2\dot{x}^3a^3=0$, ſive $\frac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3}+ax\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+aa\frac{\dot{y}}{\dot{x}}-x^3-2a^3=0$, extraho radicem cubicam affectam, et prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ &c. prout videre eſt Cap. III. § 6.

27. Cæterùm hîc obſervandum venit, quòd terminos ſolummodo pro compoſitis habeo, qui ex parte fluentium quantitatum componuntur. Terminos ubi nulla eſt, niſi ex parte datarum quantitatum, compoſitio, pro ſimplicibus habeo: ſiquidem ad ſimplices reduci poſſunt, fingendo æquales eſſe aliis datis. Sic

nalis. Verè quidem Fluxionalis eſſet, ſi rectarum $\dot{y}$, $\dot{x}$, eas relationes purè exprimeret, quæ ex eo illis intervenerint, quòd earum celeritatum proportiones, quibus celeritatibus rectæ mutabiles y, x mutantur, inter ſe ſemper ſervent. Has verò purè ſi exprimerit, nullam planè æquatio illa indicaret rectæ $\dot{y}$, vel $\dot{x}$, ad illam x relationem; quæ inde unde diximus nulla quidem naſci poteſt; ſiquidem Motûs celeritas et res mota genere ſint alieniſſima. At verò ex æquatione non vere fluxionali mutuas fluentium relationes eruere fruſtra aggreſſus eris, niſi artificio aliquo ad formam verè fluxionalem priùs ea revocata ſit. Sanè ſi pro æquatione, $b^2\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-ax^2=0$, hanc aliam ſumas, $b^2\dot{x}\dot{z}+b\dot{x}\dot{y}x-\frac{ax^2\dot{x}\dot{z}}{b}=0$, quæ, poſito utramque b, z unitati æqualem eſſe, in illam priorem migraverit, ex hâc quidem trium x, y, z relationes mutuas, viâ mox tradendâ, explorare liceat, et per æquationem quandam exponere. Tum ſi illius z ad illam x, vel ad illam y, vel ad duas x, y ſimul, relationes aliæ per æquationem aliam, vel datam vel pro arbitrio fingendam, exprimantur, ex duabus æquationibus tertia utique exſiſtet, quâ duæ x, y quomodo inter ſe affectæ ſint, nullâ tertiæ z ratione habitâ, indicatum erit.

quantitates

PROBLEMA SECUNDUM. quantitates $\frac{ax+bx}{c}$, $\frac{x}{a+b}$, $\frac{bcc}{ax+bx}$, $\frac{b^4}{ax^2+bx^2}$, $\sqrt{ax+bx}$ &c. pro ſimplicibus; habeo ſiquidem ad ſimplices $\frac{ax}{c}$, $\frac{x}{1}$, $\frac{bcc}{ax}$, $\frac{b^4}{ax^2}$, $\sqrt{\varepsilon x}$, ſive $\varepsilon^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ &c. reduci poſſunt, fingendo eſſe $a+b=\varepsilon$.

28. Præterea, quo fluentes quantitates à ſe invicem clariùs diſtinguantur, Fluxionem quæ, in Numeratore rationis diſponitur, ſive antecedentem rationis, haud impropriè Relatam quantitatem nominare poſſum, et alteram ad quam refertur, Correlatam; ut et fluentes quantitates iiſdem reſpectivè nominibus inſignire. Et quò ſequentia promptiùs intelligantur, poſſis imaginari Correlatam quantitatem eſſe Tempus, vel potiùs quamvis æquabiliter fluentem quantitatem, quâ tempus exponitur et menſuratur; et alteram, ſive Relatam quantitatem, eſſe Spatium, quod mobile, utcunque acceleratum vel retardatum, in illo tempore tranſigit: et quod Problematis intentio eſt, ut è celeritate motûs ad omne tempus datâ, ſpatium, in toto tempore tranſactum, determinetur.

29. Cæterùm Æquationes, reſpectu hujus Problematis, in tres ordines diſtingui convenit.

1. In quibus duæ quantitatum Fluxiones et alterutra tantùm Fluens quantitas involvuntur.

2. In quibus duæ involvuntur fluentes quantitates unà cum Fluxionibus earum.

3. Quæ plures duabus quantitatum Fluxionibus complectuntur.

Et his præmiſſis Problematis confectionem ſecundum hoſce tres caſus aggrediar.

SOLUTIONIS CASUS PRIMUS.

30. Fluentem quantitatem, quam unicè æquatio complectitur, ſuppone Correlatam eſſe, et æquatione perinde diſpoſitâ (hoc eſt faciendo ut ex unâ parte habeatur fluxionis alterius ad hujus fluxionem ratio, et valor ejus in ſimplicibus terminis ex alterâ) multiplica valorem rationis fluxionum per Correlatam quantitatem; dein ſingulos ejus terminos divide per numerum dimenſionum, quibus illa quantitas inibi afficitur; et quod oritur valebit alteram fluentem quantitatem.

31. Sic

31. Sic expoſitâ $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\ddot{y}+\dot{x}\dot{x}xz$, ſuppono x eſſe correlatam quantitatem; et, æquatione perinde reductâ, habebitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1+x^2-x^4+2x^6$, &c. Jam duco valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ in x, et oritur $x+x^3-x^5+2x^7$, &c. quos terminos ſigillatim per numerum dimenſionum divido, et exitum $x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7$, &c. pono $= y$. Et iſthâc æquatione deſiderata relatio inter x et y determinatur. INVENTIO FLUENTIUM.

32. Sic habitâ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}$, &c. prodibit $y = ax-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{192a}+\frac{1311x^4}{2048a^2}$, &c. pro determinandâ relatione inter x & y.

33. Et ſic æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^{\frac{1}{2}}}-x^{\frac{1}{2}}+x^1$, dat $y = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+2ax^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Nam valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ duc in x, et fit $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}+ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$, ſive $x^{-2}-x^{-1}+ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$. Quibus terminis per numerum dimenſionum diviſis, emergit valor aſſignatus y.

3. Ad eundem modum æquatio $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2b^2c}{\sqrt{ay^3}}+\frac{3y^2}{a+b}+\sqrt{by+cy}$ dat $x = -\frac{4b^2c}{\sqrt{ay}}+\frac{y^3}{a+b}+\frac{2}{3}\sqrt{by^3+cy^3}$. Nam valore $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ ducto in y, oritur $\frac{2b^2c}{\sqrt{ay}}+\frac{3y^3}{a+b}+\sqrt{by^3+cy^3}$, ſive $2b^2ca^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{a+b}y^3+\sqrt{b+c}\times y^{\frac{3}{2}}$. Et inde prodit valor x, dividendo per numerum dimenſionum cujuſque termini.

35. Atque ita $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = z^{\frac{2}{3}}$ dat $y=\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}$. Et $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ab}{ca^{\frac{1}{3}}}$ dat $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$. At æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ dat $y = \frac{a}{0}$. Nam $\frac{a}{x}$ ductum in x fit a; quo per numerum dimenſionum (qui nullus eſt) diviſo, prodit $\frac{a}{0}$, quantitas infinita pro valore y.

36. Quamobrem ſiquando conſimilis terminus, cujus denominator involvit correlatam quantitatem unius tantùm dimenſionis, in valore $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ reperiatur, pro correlatâ quantitate ſubſtitue ſummam vel differentiam inter eandem et aliam quamvis datam quantitatem, pro arbitrio aſſumptam. Nam quantitatum fluentium juxta prodeuntem æquationem eadem erit inter ſe fluendi relatio, ac juxta æquationem primò expoſitam; et infinita quantitas Relata hoc pacto parte infinitâ diminuetur, et evadet finita, ſed terminis tamen numero infinitis conſtans.

37. Æquatione itaque $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ expoſitâ, ſi pro x ſcribam $b+x$,

Prob. II. quantitatem b pro lubitu assumens, prodibit $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{a}{b+x}$; factâque divisione $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$, &c. Et inde Regula, ut in superioribus, dabit $y = \frac{ax}{b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$, &c. relationem inter x et y.

38. Sic etiam habitâ æquatione $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{2}{x} + 3 - xx$; si, propter terminum $\frac{2}{x}$, scribam $1+x$ pro x, emerget $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{2}{1+x} + 2 - 2x - xx$; terminoque $\frac{2}{1+x}$ in infinitam seriem, $2-2x+2x^2-2x^3+2x^4$, &c; redacto, erit $\frac{\dot y}{\dot x} = 4 - 4x + x^2 - 2x^3 + 2x^4$, &c. Adeoque juxta regulam obtinebitur $y = 4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5$, &c. relatio inter x et y.

39. Atque ita si proponitur $\frac{\dot y}{\dot x} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$, quia terminum x^{-1} (sive $\frac{1}{x}$) ineſſe video, transmuto x; quemadmodum pro eo substituendo $1-x$; et oritur $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x}$. Terminus autem $\frac{1}{1-x}$ valet $1+x+x^2+x^3$, &c. Et $\sqrt{1-x}$ valet $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$ &c. adeoque $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sive $\frac{1}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3, \&c.}$ valet $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$, (g) &c. Quamobrem (valoribus hisce substitutis) erit $\frac{\dot y}{\dot x} = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{8}x^3$, (g) &c. Et inde per regulum fit $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{32}x^4$, (g) &c. Et sic in aliis.

40. Hujusmodi etiam transmutatione Fluentis quantitatis æquatio in aliis casibus nonnunquam commodè reduci poterit. Quemadmodum si exponitur $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{c^2 x}{c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3}$; pro x scribo $c-x$; et obtineo $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{c^3 - c^2 x}{x^3}$, sive $\frac{c^3}{x^3} - \frac{c^2}{x^2}$, et inde per regulam $y = -\frac{c^3}{2x^2} + \frac{c^2}{x}$. At harum transmutationum usus in sequentibus magis eluceſcet.

SOLU-

(g) Hæc ad Calculorum fidem emendata promo: Codices MSS. habent $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x^3$ &c. $\frac{\dot y}{\dot x} = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{16}x^3$ &c. $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{64}x^4$ &c. Vitiosè quidem. Nam

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{5}{16}x^3 +,$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 +,$$

Ergo

SOLUTIONIS CASUS SECUNDUS.

Inventio Fluenti-um.

Præparatio.

41. Hæc itaque de æquationibus involventibus unicam tantùm fluentem quantitatem. Cùm verò utraque involvitur, Æquatio imprimis ad præscriptam formam redigenda est; efficiendo scilicet, ut ex unâ parte habeatur fluxionum ratio æqualis aggregato simplicium terminorum ex alterâ.

42. Et præterea siquæ sunt in æquationibus, sic reductis, fractiones, quæ denominantur à fluenti quantitate, à denominatoribus istis liberari debent, per transmutationem ejus fluentis quantitatis paulo antè commemoratam.

43. Sic expositâ æquatione $\dot y ax - \dot x aa - \dot x xy = 0$, sive $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{y}{a} + \frac{a}{x}$ (propter terminum $\frac{a}{x}$) assumo b ad arbitrium, et pro x vel scribo $b+x$, vel $b-x$, vel $x-b$. Quemadmodum si scribam $b+x$, fiet $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b+x}$. Adeoque termino $\frac{a}{b+x}$ in infinitam seriem, per divisionem, reducto, erit $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$ &c.

44. Et ad eundem modum expositâ æquatione $\frac{\dot y}{\dot x} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{x^2}$, si (propter terminos $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{x^2}$) scribam $1-y$ pro y, et $1-x$ pro x, orietur $\frac{\dot y}{\dot x} = 1 - 3y + 2x + \frac{1-x}{1-y} + \frac{2y-2}{1-2x+x^2}$. Terminus autem $\frac{1-x}{1-y}$, per infinitam divisionem, dat $1 - x + y - xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3$, &c. ac terminus $\frac{2y-2}{1-2x+xx}$, per similem divisionem, dat $2y - 2 + 4xy - 4x + 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$, &c. Quare est $\frac{\dot y}{\dot x} = -3x + 3xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3$, &c. $+ 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$, &c.

$$\text{Ergo } \frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1 - x = 2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{11}{8}x^2 + \tfrac{21}{16}x^3 +,$$
$$\text{Sed } \sqrt{1-x} = \quad 1 - \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} - \tfrac{x^3}{16} -,$$
$$\text{Ergo } \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x} = \frac{\dot y}{\dot x} = 1 + 2x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{11}{8}x^3 +,$$
$$\text{Et } y = x + x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{11}{32}x^4 +,$$

Cæterum hæ series, sicut alia nonnulla, quæ apud Colsonum et Editores cæteros mendosa sunt, rectè se habent in editione alterâ Londinensi, formâ minore, anonymo interprete; quæ tamen typothetarum erroribus tota scatet.

PROB. II.

REGULA.

45. Æquatione, cùm opus eſt, ſic præparatâ, terminos ordina juxta dimenſiones fluentium quantitatum, ponendo imprimis non affectos Relatâ quantitate; dein affectos minimâ ejus dimenſione, & ſic deinceps. Terminos etiam, in his ſingulis claſſibus, juxta dimenſiones alterius Correlatæ quantitatis pariter diſpone; eoſque in prima claſſe (i. e. quos relata quantitas non afficit) ſcribe in ſerie collaterali dextrorſum pergente, et cæteros in ſeriebus deſcendentibus in ſiniſtrâ columnâ, prout indicant ſubſequentia diagrammata. Opere ſic inſtituto, primum ſive depreſſiſſimum è terminis in primâ claſſe duc in Correlatam quantitatem, divideque per numerum dimenſionum, et in quotiente pro initiali termino valoris Relatæ quantitatis repone. Hunc deinde in æquationis terminos, in ſiniſtrâ columnâ diſpoſitos, pro relatâ quantitate ſubſtitue, et è terminis proximè depreſſiſſimis ſecundum quotientis terminum, eâdem ratione, quâ primum, elicies. Et eâdem operatione, ſæpiùs repetitâ, quotientem ad arbitrium producere poſſis. Sed res exemplo clariùs patebit.

46. EXEMPL. 1. Exponatur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$, cujus terminos, $1 - 3x + x^2$, non affectos Relatâ quantitate, y, vides in ſupremâ ſerie collateraliter diſpoſitos; cæteroſque y et xy, in ſiniſtrâ columnâ. Et imprimis terminum initialem, 1, duco in Correlatam quantitatem x, fitque x; quam per numerum dimenſionum 1 diviſum repono in ſubſcriptâ quotiente. Dein hoc termino pro y in marginalibus ſubſtituto, vice $+y$ et $+xy$, obtineo x & x^2; quos è regione dextrorſum ſcribens, ex omnibus excerpo depreſſiſſimos terminos, $-3x$ & $+x$; quorum aggregatum, $-2x$, ductum in x fit $-2x^2$, et per numerum dimenſionum, 2, diviſum dat $-x^2$ pro ſecundo termino valoris y in quotiente. Hoc proinde termino ad complendum valorem y in marginalibus $+y$ & xy adſcito, oriuntur præterea $-xx$ & $-x^3$, terminis priùs oriundis, $+x$ & $+xx$, adnectendi. Quo facto, iterum terminos proximè depreſſiſſimos, $+x^2 - x^2$ & $+x^2$, in unam ſummam, x^2, colligo; et inde, ut priùs, tertium terminum, $\frac{1}{3}x^3$, in valore y reponendum elicio.

	$+1-3x+xx$
$+y$	$*+x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5$
$+xy$	$*\ *+x^2-x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{30}x^6$
Summa	$1-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{4}{30}x^5$
$y=$	$x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$

cio. Iterumque $\frac{1}{3}x^3$ in marginalium terminorum valores adſcito, INVENTIO FLUENTIUM.
è proximè depreſſiſſimis $\frac{1}{3}x^3$ & $-x^3$, in unum aggregatis, elicio $-\frac{1}{6}x^4$ quartum terminum valoris y. Et ſic in infinitum.

47. EXEMPL. 2. Ad eundem modum, ſi relationem inter x & y, habitâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. cujus terminorum ſeries infinitè progredi ſubintelligitur, determinare oportet; pono 1 in capite, reliquoſque terminos in ſiniſtrâ columnâ, et opus deinde proſequor pro more adjuncti diagrammatis.

	$+1$
$+\frac{y}{a}$	$*+\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2}+\frac{x^3}{2a^3}+\frac{x^4}{2a^4}+\frac{x^5}{2a^5}$ &c.
$+\frac{xy}{a^2}$	$*\ *+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{2a^3}+\frac{x^4}{2a^4}+\frac{x^5}{2a^5}$ &c.
$+\frac{x^2y}{a^3}$	$*\ *\ *+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{2a^4}+\frac{x^5}{2a^5}$ &c.
$+\frac{x^3y}{a^4}$	$*\ *\ *\ *\ \frac{x^4}{a^4}+\frac{x^5}{2a^5}$ &c.
$+\frac{x^4y}{a^5}$	$*\ *\ *\ *\ *+\frac{x^5}{a^5}$ &c.
Summa	$1+\frac{x}{a}+\frac{3x^2}{2a^2}+\frac{2x^3}{a^3}+\frac{5x^4}{2a^4}+\frac{3x^5}{a^5}$ &c.
	$y=x+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{2a^2}+\frac{x^4}{2a^3}+\frac{x^5}{2a^4}+\frac{x^6}{2a^5}$ &c.

Ubi propoſitum eſt mihi elicere valorem y aduſque ſex dimenſiones x; et eâ de causâ terminos omnes, quos propoſito nihil conducere prævideo, inter operandum miſſos facio; ſicut innuit nota &c. quam ſeriebus interciſis adnexui.

48. EXEMPL. 3. Pari methodo ſi proponitur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4$ &c. $+ 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4 + 12x^5y - 12x^5$ &c. et valorem y ad uſque ſeptem dimenſiones x eruere inſtitutum eſt, terminos, ut in adjuncto diagrammate, in ordinem redigo, et operor ſicut in præcedentibus; hoc tantùm excepto, quòd cùm hîc, in ſiniſtrâ columnâ, y non tantùm unius, ſed etiam duarum ac trium dimenſionum exiſtit, vel etiam plurium, prout valorem y ultra gradum x^7 extrahere ſtatuam; ſubjicio quadratum et cubum valoris y eatenus gradatim productum, ut cùm in valoribus marginalium terminorum dextrorſum gradibus inſcribuntur, termini tot dimenſionum emergant, quot ad ſequentem operationem

	$-3x-6x^2-8x^3-10x^4-12x^5-14x^6$ &c.
$+3xy$	$*\ *-\frac{9}{2}x^3-6x^4-\frac{75}{8}x^5-\frac{147}{16}x^6$ &c.
$+6x^2y$	$*\ *\ *-9x^4-12x^5-\frac{75}{4}x^6$ &c.
$+8x^3y$	$*\ *\ *\ *-12x^5-16x^6$ &c.
$+10x^4y$ &c.	$*\ *\ *\ *\ *-15x^6$ &c.
$+y^2$	$*\ *\ *+\frac{9}{4}x^4+6x^5+\frac{147}{8}x^6$ &c.
$-xy^2$	$*\ *\ *\ *-\frac{9}{4}x^5-6x^6$ &c.
$+y^3$ &c.	$*\ *\ *\ *\ *-\frac{27}{8}x^6$ &c.
Summa	$-3x-6x^2-\frac{25}{2}x^3-\frac{91}{4}x^4-\frac{333}{8}x^5-\frac{567}{16}x^6$
	$y=-\frac{1}{2}x^2-2x^3-\frac{25}{8}x^4-\frac{91}{16}x^5-\frac{111}{16}x^6-\frac{567}{32}x^7$ &c.
	$y^2=+\frac{9}{4}x^4+6x^5+\frac{147}{8}x^6$ &c.
	$y^3=-\frac{27}{8}x^6$ &c.

Prob. II. nem requiri percipio. Et hâc methodo prodit tandem $y = -\frac{3}{2}x^2 - 6x^3 - \frac{25}{8}x^4$ &c. æquatio desiderata. Qui valor cùm sit negativus, patet alterum è quantitatibus x et y decrescere dum altera increscit. Atque idem pariter concludi debet, cùm fluxionum altera affirmativa sit, et altera negativa.

49. Exempl. 4. Haud secus cùm Relata quantitas fractis dimensionibus afficitur, possis valorem ejus extrahere.

Veluti si proponitur $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{2}y - 4y^2 + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$, ubi x in termino $2yx^{\frac{1}{2}}$ (sive $2y\sqrt{x}$) fractâ dimensione, $\frac{1}{2}$, afficitur: ejus $x^{\frac{1}{2}}$ valorem è valore x paulatim elicio, extrahendo nempe radicem quadraticam, sicut in inferiori parte diagrammatis videre est; eò ut in marginalis termini $2yx^{\frac{1}{2}}$ valorem gradatim transferri et inseri possit. Et sic tandem adipiscor æquationem $x = \frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{160}y^5$ &c. quâ x respectu y indefinitè determinatur. Et sic in aliis quibuscunque casibus operari licet.

	$+\frac{1}{2}y - 4y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$
$2yx^{\frac{1}{2}}$	$*. + y^2. * - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^4$ &c.
$-\frac{4}{5}x^2$	$*. \quad *. * \quad * \quad * - \frac{1}{10}y^4$ &c.
Summa	$+\frac{1}{2}y - 3y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} * + 4y^{\frac{7}{2}} - 4\frac{1}{10}y^4$ &c.
$x = +\frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} * + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{160}y^5$ &c.	
$x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - y^2 + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ &c.	
$x^2 = \frac{1}{16}y^4$ &c.	

50. Cæterùm dixi hasce solutiones infinitis modis præstari posse. Et hoc fiet, si non tantùm initialem quantitatem supremæ seriei, sed et aliam quamvis datam quantitatem, pro primo termino quotientis ad arbitrium assumas; ac deinde operaris ut in præcedentibus. Sic in primo præcedentium exemplorum; si pro primo termino valoris y assumas 1, et pro y, in terminis marginalibus ($+y$ et $+xy$) substituas, reliquamque operationem, cujus specimen adjunxi, sicut in præcedentibus prosequaris, ipsius y alius exurget valor $1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+1 + 2x \quad * + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.
$+xy$	$* + x + 2x^2 \quad * + x^4$ &c.
Summa	$+2 \quad * + 3x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4$
$y = 1 + 2x \quad * + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$ &c.	

51. Et sic etiam alius atque alius exurget, assumendo 2, 3, vel alium quemvis numerum pro primo ejus termino. Vel si symbolum aliquod, ut a, pro illo termino indefinitè designando usurpes, eâdem operandi methodo, quam hîc etiam designatam habes,

	$+1 - 3x + x^2$
$+y$	$+a + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$ &c.
	$+ ax + ax^2 + \frac{2}{3}ax^3$ &c.
$+xy$	$* + ax + x^2 - x^3$ &c.
	$+ ax^2 + ax^3$
Summa	$+1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$
	$+a + 2ax + 2ax^2 + \frac{5}{3}ax^3$
$y = a + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$ &c.	
$+ ax + ax^2 + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4$ &c.	

habes, elicies tandem $y = a + x + ax - x^2 + ax^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}ax^3$ &c. Quâ inventâ, possis pro a substituere, 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$, aut quemvis numerum, et sic relationem inter x et y modis infinitis obtinere. Inventio Fluentium.

52. Et nota, quòd ubi quantitas elicienda afficitur fractâ dimensione, ut in præcedentium exemplorum quarto vides, convenit plerumque unitatem, vel alium quemvis aptum numerum, pro primo ejus termino adhibere. Imo hoc necesse est, ubi radix, ad fractæ illius dimensionis valorem obtinendum, propter negativum signum, nequit aliâs extrahi; ut et ubi nulli sunt termini in primâ sive capitali classe reponendi, ex quibus initialis ille terminus eliciatur.

53. Sic tandem hoc molestissimum et omnium difficillimum Problema, ubi duæ tantùm fluentes quantitates, unà cum earum fluxionibus, in æquatione comprehenduntur, absolvi. Sed præter generalem methodum, quâ omnes difficultates complexus sum, sunt aliæ plerumque contractiores, quibus opus aliquando sublevari possit, et quarum aliqua specimina ex abundanti perstringere, fortè non erit ingratum.

54. (I) Siquando itaque quantitas elicienda sit alicubi negatæ dimensionis, non est absolutè necessarium, ut æquatio propterea ad aliam formam reducatur. Sic enim expositâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{y} - x^2$, ubi y est unius negatæ dimensionis, possim equidem ad aliam formam reducere, veluti scribendo $1 + y$ pro y; sed expeditior erit solutio, quam in annexo diagrammate designatam habes; ubi assumpto 1 pro initio valoris y, cæteros ejus terminos ut in præcedentibus extraho; et interea valorem $\frac{1}{y}$ exinde per divisionem, paulatim institutam, elicio, et infero in valorem marginalis termini.

	$* * - xx$
$\frac{1}{y}$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$ &c.
Summa	$1 - x + \frac{1}{2}xx$
$y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ &c.	
$\frac{1}{y} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2$ &c.	

55. (II) Neque semper opus est ut alterius fluentis quantitatis dimensiones sint passim affirmativæ. Nam ex æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x + 2y - \frac{yy}{x}$, absque termini $\frac{yy}{x}$ reductione præscriptâ, emerget $y = 3x - \frac{3}{4}x^2 - 4x^3$ &c.

56. Et

PROB. II.

	$-\frac{1}{xx}+\frac{1}{x}$
$-y$	$*-\frac{1}{x}$
Summa	$-\frac{1}{xx}$ o
$y=\frac{1}{x}$	

56. Et ex $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y + \frac{1}{x} - \frac{1}{xx}$, opere ad modum annexi ſpeciminis inſtituto, emerget $y=\frac{1}{x}$.

57. Ubi obiter nota, quòd inter modos infinitos quibus quælibet æquatio reſolvi poteſt, ſæpenumero contingit, aliquos eſſe, qui ad finitum valorem quantitatis eliciendæ, ſicut in allato ſpecimine, finiuntur; et quos haud difficile eſt invenire, ſi pro primo valoris termino ſymbolum aliquod aſſumatur: et, reſolutione peractâ, conſulatur de ſymboli illius quantitate; quâ valor elicitus evadat finitus.

58. (III) Porro ſi valor y ex æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$ eliciendus ſit, id ſine aliquâ reductione termini $\frac{y}{2x}$ non incommodè fiet; fingendo, pro more analytico, datum eſſe quod quæritur. Utpote pro primo termino valoris ejus effingo $2ex$, aſſumendo $2e$ pro numerali coefficiente, quæ nondum innoteſcit. Et hunc $2ex$ pro y in termino marginali $\frac{y}{2x}$ ſubſtituens, prodit e quem ſcribo ad dextram; et ſumma $1+e$ dabit $x+ex$ pro eodem primo termino valoris y, quem priùs deſignaveram termino $2ex$. Pono itaque $2ex=x+ex$ et inde elicio $e=1$. Adeoque valoris y primus terminus ($2ex$) eſt $2x$.

	$1-2x+\frac{1}{2}xx$
$\frac{y}{2x}$	$e+fx+gxx+bx^3$
Summa	$+1-2x+\frac{1}{2}x^2+bx^3$ $+e+fx+gxx$
Hypotheticè	$y=2ex+2fx^2+2gx^3+2bx^4$ &c.
Conſequenter	$y=+x-x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}bx^4$ $+ex+\frac{1}{2}fx^2+\frac{1}{3}gx^3$
Revera	$y=2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x^3$

Ad eundem modum, pro ſecundo termino deſignando, effictum $2fx^2$ uſurpo; et inde tandem eruo $-\frac{2}{3}$ pro valore f, adeoque $-\frac{4}{3}xx$ pro ſecundo termino. Et ſic effictus g in tertio termino valebit $\frac{1}{10}$, at b in quarto valebit o: et proinde, cùm nullos præterea terminos ſupereſſe video, concludo opus finitum eſſe, et y valere $2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3$ præciſè.

59. Ad eundem fere modum ſi eſſet $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3y}{4x}$, effinge $y=ex^s$, ubi e ignotam coefficientem, et s numerum dimenſionum ſimiliter ignotum denotet. Et ex^s pro y ſubſtituto, prodibit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3ex^s-1}{4}$,

$\frac{3ex^s-1}{4}$, et inde rurſus $y=\frac{3ex^s}{4^s}$. Conferantur jam valores y, et videbis eſſe $\frac{3e}{4^s}=e$, adeoque $s=\frac{3}{4}$ et e indefinitum. Quare aſſumpto utcunque e erit $y=ex^{\frac{3}{4}}$. INVENTIO FLUENTIUM.

60. (IV) Ad hæc nonnunquam opus ab altiſſimâ dimenſione æquabilis quantitatis inchoari poteſt, et ad depreſſiores continuò pergere. Veluti ſi detur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$; et ab altiſſimo termino $2x$ opus inchoetur; diſponendo capitalem ſeriem in ordine præcedentibus contrario, emerget tandem $y = xx + 4x - \frac{1}{x}$ &c. prout in appoſitâ operandi formâ videre eſt.

	$+2x+3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$
$+\frac{y}{xx}$	$*+1+\frac{4}{x}*-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}$ &c.
Summa	$2x+4-*+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}$
$y=x^2+4x*-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}$ &c.	

Et hîc in tranſitu notari poteſt, quòd inter operandum potuit inter terminos, $4x$ et $-\frac{1}{x}$, pro intermedio deficienti termino, quælibet data quantitas inſeri, et ſic valor y modis infinitis extrahi.

61. (V) Siqui præterea ſint fracti dimenſionum Relatæ quantitatis indices, ad integros reduci poſſunt, fingendo quantitatem illam, ſuâ fractâ dimenſione affectam, eſſe alii cuilibet tertiæ fluenti quantitati æqualem; et ſubſtituendo tum illam quantitatem, tum fluxionem ejus, ab illâ fictâ æquatione oriundam, pro Relatâ quantitate et ejus fluxione.

62. Quemadmodum ſi exponitur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$, ubi Relata quantitas fracto dimenſionis indice $\frac{2}{3}$ afficitur; aſſumptâ ad arbitrium fluenti quantitate z, fingo eſſe $y^{\frac{1}{3}} = z$, ſive $y=z^3$; et fluxionum relatio juxta Prob. 1. erit $\dot{y}=3z^2\dot{z}$. Quare ſubſtituto $3z^2\dot{z}$ pro $\dot{y}$, ut et z^3 pro y, ac z^2 pro $y^{\frac{2}{3}}$, emerget $\frac{3z^2\dot{z}}{\dot{x}} = 3xz^2+z^3$, ſive $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = x+\frac{1}{3}z$; ubi z ſupplet vices Relatæ quantitatis. Poſtquam verò valor z eo nomine eruitur, utpote $z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{216}x^4+\frac{1}{3240}x^5$ &c. pro z reſtitue $y^{\frac{1}{3}}$, et habebis deſideratam relationem inter x et y: nempe $y^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{216}x^4$ &c. Et cubis partium utrobique poſitis erit $y=\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{24}x^7+\frac{7}{864}x^8$ &c (h).

(h) Emendavi calculis ſuadentibus.

PROB. II. 63. Pari ratione ſi detur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy}$ ſive $= 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$; fingo $z = y^{\frac{1}{2}}$ ſive $z^2 = y$, et inde per Prob. 1. elicio $2z\dot{z} = \dot{y}$: et conſequenter $\frac{2\dot{z}z}{\dot{x}} = 2z + x^{\frac{1}{2}}z$, ſive $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Adeoque per caſum priorem hujus eſt z, $(y^{\frac{1}{2}}) = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, et partibus quadratis $y = x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Sin valorem y modis infinitis deſideres, fac $z = c + x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, aſſumpto utcunque initiali termino c; et erit y (z^2) æqualis $c^2 + 2cx + \frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Aſt hæc nimis officioſè tractare videor, ſiquidem rariſſimè uſui eſſe poſſunt.

SOLUTIONIS CASUS III.

64. Problematis, ubi tres vel plures quantitatum fluxiones æquatio complectitur, reſolutio brevi abſolvitur: ſcilicet inter duas quaſlibet iſtarum quantitatum relatio (ubi ex ſtatu quæſtionis non determinatur) quælibet effingi debet, et earum fluxionum exinde quæri; eò ut alterutra, unà cum ejus fluxione, ex æquatione expoſitâ exterminari poſſit. Quâ de causâ, ſi trium inſunt quantitatum fluxiones, unica effingenda eſt æquatio; ac duæ ſi inſunt quatuor, et ſic porro; ut expoſita æquatio in aliam tandem æquationem transformetur, cui non inſint plures duabus: et hâc deinde ut ſuprà reſolutâ, reliquarum quantitatum relationes eruentur.

65. Sic æquatione $2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$ expoſitâ; quo quantitatum x, y, et z (quarum fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ æquatio complectitur) relationes inter ſe obtineam, relationem inter duas quaſlibet ut x et y pro lubitu effingo: puta quòd ſit $x = y$, vel $2y = a + z$, vel $x = yy$ &c. Sit autem $x = yy$, et inde erit $\dot{x} = 2\dot{y}y$; quare ſcriptis $2\dot{y}y$ pro $\dot{x}$, et yy pro x, expoſita æquatio transformabitur in $4\dot{y}y - \dot{z} + \dot{y}y^2 = 0$. Et inde relatio inter y & z emerget $2yy + \frac{1}{3}y^3 = z$. Ubi ſi x pro yy, et $x^{\frac{3}{2}}$ pro y^3 viciſſim ſcribatur, prodibit etiam $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

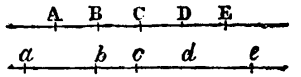
Adeoque inter modos infinitos quibus x, y et z ad invicem referuntur, unus his æquationibus, $x = yy$, $2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = z$, et $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, deſignatus inveſtigatur.

Demonſtratio.

Demonſtratio. INVENTIO FLUENTIUM.

66. Problema tandem confecimus, ſed demonſtratio ſupereſt. Et in tantâ rerum copiâ ne per nimias ambages è propriis fundamentis ſyntheticè derivetur, ſufficiat per analyſin ſic breviter indicare. Scilicet æquatione quâlibet expoſitâ, poſtquam opus ad finem perduxeris, experiri eſt, quòd ex elicitâ æquatione expoſita viciſſim (per Prob. 1.) eruetur. Et proinde quantitatum relatio in elicitâ æquatione exigit relationem fluxionum in expoſitâ, et contrâ: ſicut oſtendendum erat. Sic æquatione $\dot{y} = \dot{x}$ expoſitâ, elicietur $y = \frac{1}{2}x^2$, et inde viciſſim (per Prob. 1.) $\dot{y} = \dot{x}x$, ſive $= x$, quandoquidem $\dot{x}$ ſupponitur eſſe 1. Et ſic ex $\dot{y} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$ provenit $y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ &c (1). Et inde viciſſim (per Prob. 1) $\dot{y} = 1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{15}x^5$ &c. Qui duo valores ipſius $\dot{y}$ conveniunt, ut patet, ſubſtituendo $x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$ &c. pro y in priori.

67. CÆTERUM in æquationum reductione adhibui operationem, de quâ præterea rationem reddere oportet: eſtque tranſmutatio fluentis quantitatis per connexionem cum quantitate datâ. Sunto AE et *ae* lineæ utrinque infinitæ, per quas mobilia duo è longinquo trajiciantur, ſimul attingentia locos A et *a*, B et *b*, C et *c*, D et *d*, &c. Et ſit B punctum à cujus diſtantiâ rei mobilis in AE motus æſtimetur, ita ut $-$BA, BC, BD, BE ſucceſſivè ſint fluentes quantitates, quando mobile ſit in locis A, C, D, E. Sitque *b* conſimile punctum in alterâ lineâ: et erunt $-$BA ac $-$ *ba* contemporaneæ fluentes quantitates, ut et BC ac *bc*, BD ac *bd*, BE ac *be*, &c. Quòd ſi vice punctorum B & *b*, ſubſtituantur A & *c*, ad quæ tanquam quieſcentia motus referantur, tunc 0 & $-$ *ca*, AB & $-$ *bc*, AC & 0, AD & *cd*, AE & *ce*, &c. erunt contemporaneæ fluentes quantitates. Mutantur itaque fluentes quantitates additione et ſubtractione datarum AB & *bc*, ſed non mutantur quoad motûs celeritatem et fluxionis mutuum reſpectum: nam ejuſdem longitudinis ſunt partes contemporaneæ, AB & *ab*, BC et *bc*, CD et *cd*, DE et *de*, in utroque caſu. Et ſic in æquationibus, quibus hæ quantitates deſignantur, partes contemporaneæ



(1) Per § 46. hujus Capitis, poſitâ $\dot{x} = 1$.

Prob. II. quantitatum non ideo mutantur, quòd earum abſoluta longitudo datâ aliquâ augeatur vel minuatur. Unde conſtat propoſitum: nam Problematis hujus ſcopus propriè non alius eſt, quàm contemporaneas partes, ſive abſolutarum quantitatum (v, x, y, aut z) contemporaneas differentias, datâ fluendi ratione deſcriptas determinare. Et perinde eſt cujuſnam ſint abſolutæ longitudinis quantitates illæ, dummodo contemporaneæ ſive correſpondentes earum differentiæ cum expoſitâ fluxionum relatione conveniant.

68. Poteſt et hujus rei ratio ſic algebraicè reddi. Proponatur $\dot{y}=\dot{x}xy$, et finge $x=1+z$, eritque (per Prob. I.) $\dot{x}=\dot{z}$. Adeoque pro $\dot{y}=\dot{x}xy$ ſcribi poteſt $\dot{y}=\dot{x}y+\dot{x}zy$. Jam cùm ſit $\dot{x}=\dot{z}$, patet quantitates x et z, etſi non ſint ejuſdem longitudinis, pariter tamen fluere reſpectu ipſius y, et pares habere partes contemporaneas. Quidni itaque iiſdem ſymbolis denotem, quæ fluendi ratione conveniunt, et, ad contemporaneas differentias determinandas, vice $\dot{y}=\dot{x}xy$ uſurpem $\dot{y}=\dot{x}y+\dot{x}zy$.

69. Jam denique quo pacto partes contemporaneæ, ex æquatione quantitates involvente, inveniri poſſunt, per ſe manifeſtum eſt. E. G. Sit $y=\frac{1}{x}+x$ æquatio. Et cùm ſit $x=2$ erit $y=2\frac{1}{2}$; cùm verò ſit $x=3$, erit $y=3\frac{1}{3}$; ergo dum x fluit à 2 ad 3, y fluit à $2\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{3}$. Adeoque partes in hoc tempore tranſactæ ſunt $(3-2)$ 1, et $(3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2})\frac{5}{6}$.

Jactis hiſce ſequentium fundamentis, ad Problemata magis particularia jam tranſeo.

CAPUT QUINTUM.

PROB. III.

Determinare Maximas et Minimas.

1. QUANTITAS ubi Maxima eſt vel Minima, in illo momento nec profluit nec refluit. Nam ſi profluit, id arguit minorem fuiſſe, et ſtatim majorem fore, quàm jam eſt: et contrà ſi refluit. Quamobrem fluxionem ejus per Prob. I. quære, et pone nullam eſſe.

2. Ex-

De Maximis et Minimis.

2. EXEMPL. 1. Si maxima quantitas x in æquatione $x^3-ax^2+axy-y^3=3$ deſideretur; quantitatum x et y fluxiones quære, et prodibit, $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+ayx=0$: poſitoque $\dot{x}=0$ reſtabit, $-3\dot{y}y^2+ayx=0$, ſive $3y^2=ax$. Cujus ope poſſis alterutram, x vel y, in æquatione primariâ exterminare, et per æquationem reſtantem determinare alteram, et utramque deinde per $3y^2+ax=0$.

3. Perinde eſt hæc operatio, ac ſi multiplicàſſes terminos propoſitæ æquationis per numerum dimenſionum alterius fluentis quantitatis y. Unde prodit Huddeniana notiſſima regula, quòd ad obtinendam maximam aut minimam Relatam quantitatem, æquatio juxta dimenſiones Correlatæ quantitas diſponi debet, et per quamlibet Arithmeticam progreſſionem multiplicari. Aſt cùm neque hæc regula ad æquationes ſurdis quantitatibus affectas, neque ulla alia hactenus, quòd ſciam, evulgata, abſque prævia reductione, ſe extendat: ejus rei accipe ſequens exemplum.

4. EXEMPL. 2. Si maxima quantitas y in æquatione $x^3-ay^2+\frac{by^3}{a+y}-xx\sqrt{ay+xx}=0$ determinanda eſt; ipſarum x et y, fluxiones quære, et emerget $3\dot{x}x^2-2ay\dot{y}+\frac{3ab\dot{y}y^2+2b\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2}-\frac{4a\dot{x}xy+6\dot{x}x^3+a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}}=0$. Et cùm ex hypotheſi ſit $\dot{y}=0$, neglige terminos in $\dot{y}$ ductos, (id quod inter operandum ad minuendum laborem antea fieri potuit) cæteroſque per $\dot{x}x$ divide, et reſtabit $3x-\frac{2ay+3xx}{\sqrt{ay+xx}}=0$, factâque reductione exurget, $4ay+3xx=0$, cujus ope poſſis utramvis quantitatem x vel y ex æquatione primò propoſitâ exterminare, ac deinde ex æquatione reſultante, quæ cubica erit, valorem alterius elicere.

5. *Ex hoc Problemate ſequentium reſolutio petenda eſt.*

I. In dato Triangulo aut ſegmento cujuſvis Curvæ, maximum rectangulum inſcribere.

II. Maximam vel Minimam rectarum ducere, quæ inter datum punctum, et Curvam poſitione datam interjacent. Sive à dato puncto ad curvam ducere perpendiculum.

III. Maximam vel Minimam rectarum ducere, quæ per datum punctum,

CAPUT QUINTUM.

punctum tranſeuntes interjacent aliis duabus, ſive rectis ſive curvis lineis.

IV. A puncto intra Parabolam dato rectam ducere, quæ parabolam omnium obliquiſſimè ſecabit. Et idem in aliis curvis facere.

V. Curvarum Vertices, Maximas aut Minimas latitudines, Puncta in quibus partes circumactæ ſe decuſſant, determinare.

VI. Curvarum puncta invenire, ubi maximè aut minimè curvantur.

VII. Invenire minimum angulorum in quibus rectæ ad diametros ſuas in datâ Ellipſi ordinatim applicantur.

VIII. Ellipſium, per data quatuor puncta tranſeuntium, vel minimam definire, vel eam quæ ad formam circularem maximè accedit.

IX. Amplitudinem ſphæricæ ſuperficiei determinare, quam lux è longinquò fluens, poſtquam ab anteriori hemiſphærio refracta fluit, illuſtrat in poſteriori.

Et hujuſmodi alia permulta faciliùs excogitari poſſunt, quàm (propter computandi faſtidium) reſolvi.

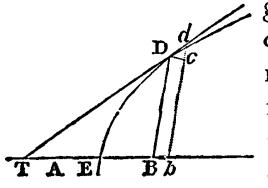
CAPUT SEXTUM.

PROB. IV.

Curvarum Tangentes ducere.

MODUS I.

1. TANGENTES pro variis relationibus curvarum ad rectas variè ducuntur. Et imprimis eſto BD recta in dato angulo ad aliam rectam, AB tanquam baſin ordinata, et ad curvam ED terminata. Et moveatur hæc ordinata, per infinitè parvum ſpatium, ad locum *bd*; ita ut momento *cd* augeatur, dum AB augetur momento B*b*, cui D*c* æqualis eſt. Jam producatur D*d*, donec cum AB in T conveniat, et hæc tanget curvam in D vel *d*: eruntque



eruntque triangula *dc*D, DBT ſimilia. Adeoque TB : BD : : D*c* : *cd*. DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

2. Cùm itaque relatio BD ad AB, in æquatione quâlibet pro curvâ determinandâ, exponitur, quære relationem fluxionum (per Prob. I.) et cape TB ad BD in ratione fluxionis AB ad fluxionem BD, ac TD tanget curvam in D.

3. EXEMPL. 1. Nominatâ AB, x; et BD y; eſto earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Et fluxionum relatio erit $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$. Adeoque $\dot{y}:\dot{x}::3xx-2ax+ay:3yy-ax::$ BD(v) : BT. Ergo BT $=\frac{3y^3-axy}{3x^2-2ax+ay}$. Dato itaque puncto D, et inde DB et AB, ſive y et x; dabitur longitudo BT, quâ tangens DT determinatur.

4. Poteſt autem hæc operandi methodus ſic concinnari. Æquationis expoſitæ terminos fac eſſe nihilo æquales: per proprium numerum dimenſionum ordinatæ quantitatis multiplica, et exitum colloca in numeratore: dein terminos ejuſdem æquationis per proprium numerum dimenſionum baſis multiplica, et exitum, per baſin diviſum, colloca in denominatore valoris BT. Et illam BT cape ad partes adverſus A, ſi valor ejus ſit affirmativus, aut verſus A ſi ſit negativus.

0 . 0 . 1 . 3

5. Sic æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, per ſuperiores numeros

3 . 2 . 1 . 0

multiplicata dat $axy-3y^3$ pro numeratore; et per inferiores multiplicata, ac diviſa per x, dat $3x^2-2ax+ay$ pro denominatore valoris BT.

6. Sic æquatio $y^3-by^2-cdy+bcd+dxy=0$ (quæ deſignat parabolam ſecundi generis, cujus beneficio Des Cartes conſtruxit æquationes ſex dimenſionum,) primâ fronte dat $\frac{3y^3-2by^2-cdy+dxy}{dy}$ ſive $\frac{3y^2}{d}-\frac{2by}{d}-c+x=$BT.

7. Et ſic $a^2-\frac{r}{q}x^2-y^2=0$ (quæ deſignat Ellipſin cujus centrum A) dat $\frac{-2yy}{-\frac{2r}{q}x}$ ſive $\frac{qy}{rx}=$BT. Et ſic in aliis.

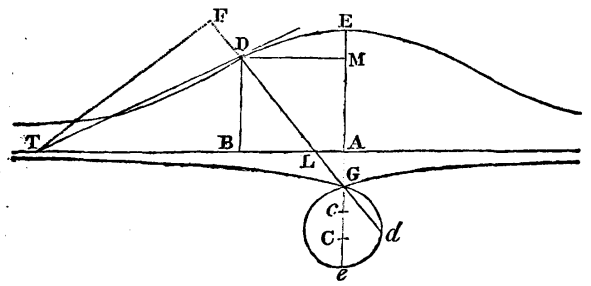
8. Et nota, quòd nihil intereſt cujuſnam quantitatis ſit angulus ordinationis ABD.

Aſt hæc regula ſe ad æquationes ſurdis quantitatibus affectas,

Prob. IV. curvaſque mechanicas non extendit. In iſtis caſibus ad fundamentalem methodum recurrendum eſt (k).

8. Exempl. 2. Eſto $x^3-ay^2+b\frac{y^3}{a+y}-x^2\sqrt{ay+x^2}=0$ æquatio deſignans relationem inter AB & BD; et per Prob. I. relatio fluxionum erit $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\frac{3a^2\dot{y}y^2+2b\dot{y}y^3}{a+2ay+y}-\frac{4a\dot{x}xy+6\dot{x}x^3+a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}}=0$. Atque adeo eſt $3x^2-\frac{4axy+6x^3}{2\sqrt{ay+x^2}}:2ay+\frac{3aby^2+2by^3}{aa+2ay+y}-\frac{axx}{2\sqrt{ay+x^2}}(::\dot{y}:\dot{x}) ::$ BD : BT.

9. Exempl. 3. Sit ED Conchoides Nichomedea, polo G, aſymptoto AT, et intervallo LD deſcripta. Sitque GA=b, LD=c, AB=x, et BD=y. Et propter ſimilia triangula DBL et DMG, erit LB:BD :: DM : MG. $\sqrt{cc-yy}:y::x:b+y$. Adeoque $\overline{b+y}\times\sqrt{cc-yy}=yx$. Nactus hanc



æquationem fingo $\sqrt{cc-yy}=z$. Et ſic duas æquationes, $bz+yz=yx$, et $zz=cc-yy$ habeo: quarum ope fluxiones quantitatum x, y et z (per Prob. I.) quæro. Et è primâ prodit $b\dot{z}+y\dot{z}+\dot{y}z=\dot{y}x+x\dot{y}$; ac è ſecundâ $2\dot{z}z=-2\dot{y}y$, ſive $\dot{z}z+\dot{y}y=0$. E quibus exterminato $\dot{z}$, oritur $-\frac{b\dot{y}y}{z}-\frac{\dot{y}y^2}{z}+\dot{y}z=\dot{y}x+x\dot{y}$. Quâ reſolutâ (l) fit $y:z-\frac{by}{z}-\frac{y^2}{z}-x(::y:x) ::$ BD : BT. Cùm ergo BD ſit y, erit BT=$z-x-\frac{by+y^2}{z}$. Hoc eſt, $-$BT=AL+$\frac{BD\times GM}{BL}$. Ubi ſignum $-$ ipſi BT præfixum denotat punctum T ad partes *adverſus* A capiendum eſſe.

SCHOLIUM.

10. Et hinc obiter inventio puncti diſterminantis concavam et convexam partem Conchoidis prodit. Nempe cum AT ſit omnium minima, erit D ejuſmodi punctum. Eſto itaque AT=v, et

(k) § 1 & 2. traditam.
(l) In Analogiam ſcilicet.

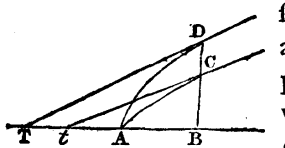
cùm

cùm ſit BT=$-z+x+\frac{by+y^2}{z}$, erit $v=-\dot{z}+2\dot{x}+\frac{by+y^2}{z}$. Ubi, ad opus abbreviandum, pro x ſubſtitue $\frac{bz+yz}{y}$ valorem è ſuperioribus erutum, et fiet $\frac{2bz}{y}+z+\frac{by+y^2}{z}=v$. Unde per Prob. I. fluxionibus $\dot{v}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ quæſitis, et per Prob. III. ſuppoſitâ $\dot{v}=0$, emerget $\frac{2b\dot{z}}{y}-\frac{2b\dot{y}z}{yy}+\dot{z}+\frac{b\dot{y}+2\dot{y}y}{z}-\frac{b\dot{z}y+\dot{z}yy}{zz}=\dot{v}=0$. In hâc denique ſubſtitue $-\frac{\dot{y}y}{z}$ pro $\dot{z}$, et $cc-yy$ pro zz, valores z et zz è ſuperioribus petendos, et, factâ reductione, obtinebitur $y^3+3by^2-2bc^2=0$. Cujus æquationis conſtructione dabitur y, ſive AM; et per M acta MD ipſi AB parallela incidet in punctum flexûs contrarii, D.

De Tangentibus Ducendis.

11. Præterea ſi Curva Mechanica eſt, cujus tangentem ducere oportet, quantitatum fluxiones, ut in Exemp. 5. Prob. I. quærendæ ſunt, cæteraque ut in præcedentibus peragenda.

12. Exempl. 4. Sunto AC et AD duæ Curvæ, quibus recta BCD, ad baſin AB in dato angulo applicata, occurrit in C et D; et (per Prob. I. præparat. ad Exemplum 5) erit $\dot{z}=\dot{x}\times$BC. Jam ſit AC Circulus, aut curva quævis nota, et ad alteram curvam, AD, definiendam, exponatur quævis æquatio, cui z intexta eſt; veluti $zz+axz=y^4$. Et, per Prob. I. erit $2\dot{z}z+ax\dot{z}+a\dot{x}z=4\dot{y}y^3$. Et ſcripto $\dot{x}\times$BC pro $\dot{z}$, fiet $2\dot{x}z\times$BC$+a\dot{x}x\times$BC$+a\dot{x}z=4\dot{y}y^3$. Adeoque $2z\times$BC$+ax\times$BC$+az:4y^3(::\dot{y}:\dot{x}) ::$ BD : BT. Quamobrem ſi ex naturâ curvæ AC detur ordinata BC, et area ACB, ſive z, dabitur punctum T, per quod tangens DT tranſibit.



13. Ad eundem modum ſi $3z=2y$ ſit æquatio ad curvam AD, erit $3\dot{z}$ (ſive $3\dot{x}\times$BC$)=2\dot{y}$. Adeoque 3CB : 2 $(::\dot{y}:\dot{x}) ::$ BD : BT. Et ſic in aliis.

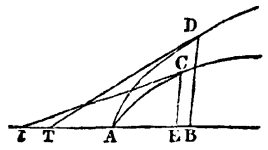
14. Exempl. 5. Sit AB=x, BD=y, ut antè; et Curvæ cujuſvis AC longitudo ſit z; ductâque ad eam tangente, ct, erit $Bt:Ct::\dot{x}:\dot{z}$ ſive $\dot{z}=\frac{\dot{x}\times Ct}{Bt}$.

15. Jam ad aliam Curvam AD, cujus tangens ducenda eſt, detur quælibet æquatio, in quâ z involvitur; puta ſi $z=y$, erit $\dot{z}=\dot{y}$.

CAPUT VI. $\dot{z}=\dot{y}$. Adeoque $ct : Bt (::\dot{y}:\dot{x}) ::$ BD : BT. Invento autem T age DT tangentem.

16. Sic posito $xz=yy$, erit $\dot{x}z+\dot{z}x=2\dot{y}y$, et pro z scripto $\frac{x\times Ct}{Bt}$, emerget $\dot{x}z+\frac{\dot{x}x\times Ct}{Bt}=2\dot{y}y$; quare est $z+\frac{x\times Ct}{Bt} : 2y ::$ BD : BT.

17. EXEMPL. 6. Sit AC Circulus aut alia quævis nota curva, quam tangat ct; et sit AD alia curva cujus tangentem DT ducere oportet, et quæ definitur assumendo AB = arcui AC, et (CE ac BD in dato angulo ad AB ordinatis) referendo BD ad CE vel AE in æquatione aliquâ. Dic ergo AB vel AC$=x$, BD$=y$, AE$=z$, & CE$=v$, et patet $\dot{v}$, $\dot{x}$ & $\dot{z}$ fluxiones ipsârum CE, AC & AE, esse inter se ut sunt CE, ct & Et. Adeoque $\dot{x}\times\frac{CE}{Ct}=\dot{v}$, & $\dot{x}\times\frac{Et}{Ct}=\dot{z}$.

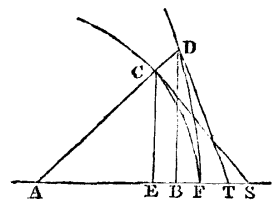


Detur jam quælibet æquatio ad definiendam curvam AD, veluti $y=z$, et erit $\dot{y}=\dot{z}$. Adeoque $Et : Ct (::\dot{y}:\dot{x}) ::$ BD : BT.

Vel detur $y=z+v-x$, et erit $\dot{y}=(\dot{z}+\dot{v}-\dot{x})=\frac{\dot{x}\times CE+Et-Ct}{Ct}$. Adeoque $CE+Et-Ct : Ct (::\dot{y}:\dot{x}) ::$ BD : BT.

Vel denique detur $ayy=v^3$, et erit $2a\dot{y}y (=3\dot{v}v^2)=3\dot{x}\times v^2\frac{CE}{Ct}$. Adeoque $3vv\times CE : 2ay\times Ct ::$ BD : BT.

18. EXEMPL. 7. Sit FC Circulus quem tangat CS; sitque FD curva, quæ definitur assumendo quamvis relationem applicatæ DB ad FC, arcum quem DA, ad centrum ducta, intercipit. Et demissâ CE in circulo applicatâ, dic AC vel AF$=1$, AB$=x$, BD$=y$, AE$=z$, CE$=v$, CF$=t$: et erit $\dot{t}z=(\dot{t}\times\frac{CE}{CS})=\dot{v}$ (m), et $-\dot{t}v (=\dot{t}\times\frac{-ES}{CS})=\dot{z}$ (n).



Ubi pono $\dot{z}$ negativè, quòd AE diminuitur dum EC augetur. Est insuper AE : EC :: AB : BD, adeoque $zy=vx$, et inde per Prob. 1. $\dot{z}y+\dot{y}z=\dot{v}x+\dot{x}v$. Et hæc, exterminatis $\dot{v}$, $\dot{z}$ & v, faciunt $\dot{y}x-\dot{t}y^2-\dot{t}x^2=\dot{x}y$.

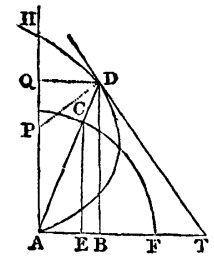
19. Definiatur jam Curva DF æquatione quâvis, à quâ valor t, hîc substituendus, deduci possit: puta sit $t=y$ (æquatio ad Primam Quadraticem) et per Prob. 1. erit $\dot{t}=\dot{y}$. Adeoque $\dot{y}x-\dot{y}y^2-\dot{y}x^2=\dot{x}y$. Unde

(m) Nempe cùm sit fluxio arcûs ad fluxionem sinûs ut radius ad sinum complementi (Excerpt. IV. ex Epist. not. (l) Cor.) cùmque propter angulos ad C, E rectos sit CS : CE = AC : AF = 1 : z.

$y : xx+yy-x (::\dot{y}:-\dot{x}) ::$ BD (y) : BT. Quare BT $=x^2+y^2-x$. Et AT $=xx+y^2=\frac{\overline{AD}^2}{AF}$. DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

20. Ad eundem modum, si sit $tt=by$, proveniet $2\dot{t}t=b\dot{y}$; et inde AT $=\frac{b}{2t}\times\frac{\overline{AD}^2}{AF}$. Et sic in aliis.

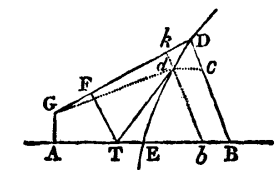
21. EXEMPL. 8. Quòd si AD sumatur æqualis arcui FC, existente ADH Spirali Archimedeâ; tum, stantibus jam positis linearum nominibus, est (propter angulum ABD rectum) $xx+yy=tt$. Et inde (per Prob. 1.) $\dot{x}x+\dot{y}y=\dot{t}t$. Est etiam AD : AC :: BD : CE, adeoque $tv=y$, et inde per Prob. 1. $\dot{t}v+\dot{v}t=\dot{y}$. Denique est fluxio arcûs FC ad fluxionem rectæ CE, ut AC ad AE, sive ut AD ad AB, hoc est $\dot{t} : \dot{v} :: t : x$, et inde $\dot{t}x=\dot{v}t$. Confer jam inventas æquationes, et videbis esse $\dot{t}v+\dot{t}x=\dot{y}$, et inde $\dot{x}x+\dot{y}y (=\dot{t}t)=\frac{\dot{y}t}{v+x}$. Atque adeo, completo parallelogrammo ABDQ, si fiat QD : QP $(::$ BD : BT $::\dot{y}:-\dot{x}) :: x : y-\frac{t}{v+x}$, hoc est, si capiatur AP $=\frac{t}{v+x}$, erit PD ad Spiralem perpendicularis.



22. Ex his opinor satis manifestum est, quo pacto Curvarum omnium Tangentes ducendæ sunt. Attamen non absre erit, si præterea confectionem problematis, ubi Curvæ aliis quibuscunque modis ad rectas referuntur, ostenderem; ut è pluribus methodis facillima et simpliciſſima semper possit adhiberi.

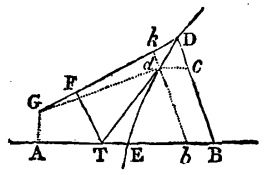
MODUS II.

23. Sit D punctum in Curvâ, à quo subtensa DG ducitur ad datum punctum G, ac DB, in dato quovis angulo, ordinatur ad basin AB. Punctum verò D per infinitè parvum intervallum, Dd, in curvâ fluat, inque GD, sumatur Gk æqualis Gd, et compleatur parallelogrammum dbBC. Et erunt Dk ac Dc contemporanea momenta ipsarum GD et BD, quibus nempe diminuuntur, dum D transfertur ad d. Jam Dd rectâ producatur, donec



(n) Nempe cùm sit fluxio arcûs ad fluxionem sinus complementi ut radius ad sinum, (Excerpt. ex Epist. not. (k) § 5.) et propter angulos ad C, E rectos sit CS : SE = AC : CE. 1 : v.

CAPUT VI.



cum AB conveniat in T; et ab iſto T ad ſubtenſam GD demittatur perpendiculum TF, et erunt trapezia $Dcdk$ ac DBTF ſimilia, adeoque DB : DF :: DC : Dk.

24. Cùm itaque relatio BD ad GD in æquatione quâlibet, pro curvâ definiendâ, exponitur, quære relationem fluxionum, et cape FD ad DB in ratione fluxionis GD ad fluxionem BD; dein ab F erige perpendiculum FT, quod cum AB concurrat in T, et acta TD curvam tanget in D. Cape autem DF verſus G ſi ſit affirmativa; ſin ſecus, cape ad contrarias partes.

25. EXEMPL. 1. Dic GD$=x$ et BD$=y$, et eſto earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Eritque fluxionum ratio $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=0$. Atque adeo $3x^2-2ax+ay : 3y^2-ax(::\dot{y}:\dot{x})::$ DB(y) : DF. Eſt ergo DF $=\frac{3y^3-axy}{3x^2-2ax+ay}$. Adeoque dato quolibet in curvâ puncto D, et inde BD et GD, ſive y et x, dabitur punctum F: unde ſi normalem FT erigas, ad ejus concurſum cum baſi AB ducta DT curvam tanget.

26. Et hinc patet Regulam perinde ac in priori caſu concinnari poſſe. Scilicet æquationis expoſitæ terminos omnes ad eaſdem partes diſpone, et ſigillatim per dimenſiones ordinatæ y multiplica, et exitum colloca in numeratore: dein terminos ejus ſigillatim per dimenſiones ſubtenſæ x multiplica, et exitum, per ſubtenſam illam x diviſum, colloca in denominatore valoris DF. Illamque DF cape ad partes contra G ſi ſit affirmativa, ſin ſecus, cape ad eaſdem partes. Et nota, quòd nihil interſit quanto intervallo punctum G diſtat à baſi AB, ſi fortè diſtat, neque quinam ſit angulus ordinationis ABD.

27. Sic æquatio ſuperior $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, primâ fronte dat $axy-3y^3$ pro numeratore, et $3x^2-2ax+ay$ pro denominatore valoris DF.

28. Sic etiam $a+\frac{b}{a}x-y=0$ (quæ æquatio eſt ad conicam ſectionem (*) dat $-y$ pro numeratore et $\frac{b}{a}$ pro denominatore valoris DF, quæ ideo erit $=-\frac{ay}{b}$.

29. Et

(*) Nimirum quæ umbilicum habeat punctum G; directricem, rectam quandam poſitione datam cum

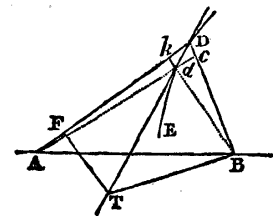
29. Et ſic in Conchoide (ubi res expeditiùs abſolvitur quàm antè) poſito GA$=b$, LD$=c$, GD$=x$ et BD$=y$, (vid. Fig. Ex. 3. Mod. 1.) erit $\begin{matrix}\text{BD}:\text{DL}::\text{GA}:\text{GL}\\ y:c::b:x-c\end{matrix}$. Adeoque $xy-cy=cb$, ſive $xy-cy-cb=0$. Quæ æquatio juxta regulam dat $\frac{xy-cy}{y}$, hoc eſt $x-c=$DF. Produc ergo GD ad F, ut ſit DF$=$LG, et ad F erige normalem FT occurrentem aſymptoto AB in T, et acta DT Conchoidem tanget. DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

30. Siquando compoſitæ quantitates in æquatione reperiantur, ad methodum generalem recurrendum eſt, niſi ubi malueris æquationem reducere.

31. EXEMPL. 2. Si detur æquatio $\overline{b+y}\times\sqrt{cc-yy}=yx$ pro relatione inter GD et BD (fig. præced.) determinandâ, fluxionum relationem juxta Prob. 1. quære. Utpote fiƈto $\sqrt{cc-yy}=z$, æquationes $bz+yz=yx$, et $cc-yy=zz$ habebis; et inde fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, relationes $b\dot{z}+y\dot{z}+\dot{y}z=\dot{y}x+y\dot{x}$, et $-2\dot{y}y=2\dot{z}z$. Et exterminatis $\dot{z}$ et z, orietur $\dot{y}\sqrt{cc-yy}-\frac{b\dot{y}y+\dot{y}y^2}{\sqrt{cc-yy}}-\dot{y}x=\dot{x}y$. Eſt ergo $y:\sqrt{cc-yy}-\frac{by+yy}{\sqrt{cc-yy}}-x(::\dot{y}:\dot{x})::$ BD(y) : DF.

MODUS III.

32. Præterea ſi Curva ad duas ſubtenſas AD et BD referatur, quæ à datis punctis A ac B ductæ ad curvam conveniunt: concipe punctum illud D per infinitè parvum ſpatium Dd in curvâ profluere. Et in AD et BD, cape Ak $=$ Ad et Bc $=$ Bd. Et erunt kD & cD contemporanea momenta linearum AD et BD. Cape jam DF ad BD in ratione momenti Dk ad momentum Dc (i. e. in ratione fluxionis lineæ AD ad fluxionem lineæ BD) et erige perpendicula BT, FT, concurrentia in T; eruntque trapezia DFTB ac Dkdc ſimilia, et perinde diagonalis DT curvam tanget.



33. Per æquationem itaque, quâ relatio inter AD et BD definitur, quære relationem fluxionum ope Prob. 1. Et cape FD ad BD in eâdem ratione.

cum rectâ AB, poſitione datâ, parallelam. Hamilton. Con. Lib. II. Prop. 11.

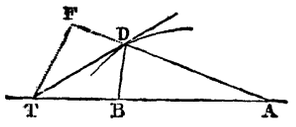
34. Ex-

CAPUT VI.

34. EXEMPL. Posito AD=x et BD=y, sit earum relatio $a+\frac{ex}{d}-y=0$, quæ æquatio est ad Ellipses secundi generis, quarum proprietates ad lucem refringendam Des-Cartes in Lib. II. Geometriæ docuit. Et fluxionum relatio erit $\frac{e\dot{x}}{d}-\dot{y}=0$. Est itaque $e:d\,(::\dot{y}:\dot{x})$ BD : DF.

35. Et pari ratione si $a-\frac{ex}{d}-y=0$, erit $e:-d::$ BD : DF. In priori casu, cape DF versus A, et ad contrarias partes in posteriori.

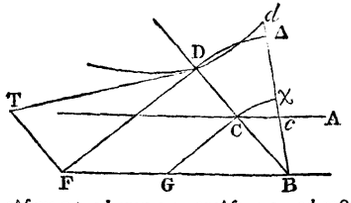
36. COROL. 1. Hinc si $d=e$ (quo casu curva evadit conica sectio) erit DF=DB. Et inde triangula DFT, DBT, æqualia, angulusque FTB à tangenti bisecabitur.



37. COROL. 2. Hinc etiam quæ Des-Cartes de his Curvis circa refractiones, haud absque circuitu, demonstravit, per se manifesta sunt: siquidem DF ac DB (quæ sunt in datâ ratione d ad e) respectu sinûs totius DT sint sinus angulorum DTF ac DTB, id est, incidentiæ radii AD in superficiem curvæ, et reflectionis vel refractionis ejus DB. Estque par ratio de refractionibus conicarum sectionum, si modò punctorum A vel B alterutrum infinitè distare concipiatur.

38. Perfacile est hanc Regulam pro more præcedentium concinnare, et pluribus exemplis donare; quinimo ubi Curvæ aliis quibuscunque modis ad rectas referuntur, et ad præcedentes formas haud commodè reduci possunt, perfacile est alias Regulas, ad harum exemplar, pro re natâ excogitare.

MODUS

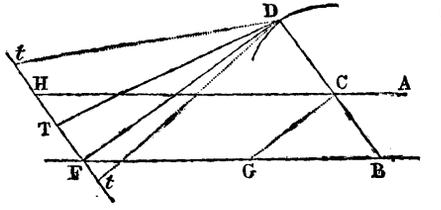


(p) PUTA rectam mobilem BCD in locum Bcd perveniſſe. Centro B radiis BC, BD ſcribantur arcus circulares cχ, DΔ qui rectæ Bd in punctis χ, Δ occurrant. Per D ductam puta rectam DT, quæ curvam illam, ad quam terminari intelligitur recta mobilis BD, in puncto D contingat; & per c ducatur CG cum rectâ DF parallela. Fluxio rectæ BD ad fluxionem rectæ BC rationem habet eam, quæ prima est naſcentis Δd ad naſcentem cχ. Sed ratio Δd ad cχ componitur è rationibus illius Δd ad arcum DΔ arcûſque DΔ, ad arcum cχ arcûſque cχ, ad rectam χc. Sed arcus DΔ est ad arcum cχ ut recta BD ad rectam BC. Quare ratio rectæ Δd ad rectam cχ componitur è rationibus illius Δd ad arcum DΔ, rectæque DB, ad CB, arcûſque cχ ad rectam χc. Naſcentis autem Δd ad arcum naſcentem DΔ prima ratio eadem est quæ rectæ FT ad rectam FD. Et arcûs naſcentis cχ ad naſcentem rectam χc prima ratio eadem est quæ rectæ GC ad rectam CB, sive rectæ FD ad DB. Naſcentis igitur dΔ ad naſcentem χc ratio prima, sive ratio fluxionis rectæ BD ad fluxionem rectæ BC, componitur è rationibus

MODUS IV.

DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

39. Quemadmodum si rectæ BD circa datum punctum B revolventis, punctum D sit ad Curvam aliquam, et C sit intersectio ejus cum rectâ AC positione datâ, habeaturque relatio inter BC et BD quâcunque æquatione designata; age BF parallelam AC, eique occurrat DF normalis ad BD. Et ad DF itidem erige normalem FT, et cape in ratione ad BC, quam habet fluxio ipsius BD ad fluxionem ipsius BC. Acta DT curvam tanget (P).



MODUS V.

40. Sin dato puncto A, æquatio relationem inter AC ac BD designat, duc CG parallelam DF, et cape FT in ratione ad BG, quam habet fluxio BD ad fluxionem AC (q).

MODUS VI.

41. Vel denique si æquatio relationem inter AC et CD definit: conveniant AC et FT in H, et cape HT in ratione ad BG quam habet fluxio CD ad fluxionem AC (r). Et sic in aliis.

tionibus rectæ FT ad rectam FD, rectæque BD ad rectam BC, rectæque FD ad rectam BD; hoc est è rationibus rectæ FT ad rectam FD, rectæque FD ad rectam BD, rectæque BD ad rectam BC. Verum ex iisdem componitur rectarum FT, BC inter ipsas ratio. Quare $\dot{BD}:\dot{BC}=\dot{FT}:\dot{BC}$. Atque ex his satis patet veritas constructionis à Newtono præscriptæ.

(q) MANENTIBUS quæ modò constructa sunt, fluxio rectæ BC ad fluxionem rectæ AC rationem habebit eam quæ prima est naſcentis χc ad naſcentem cc: sive eam quam recta BC habet ad BG. Jam cùm ex iis quæ suprà sunt ostensa, sit $\dot{BD}:\dot{BC}=\dot{FT}:\dot{BC}$, et ex mox ostensis sit $\dot{BC}:\dot{AC}=\dot{BC}:\dot{BG}$, erit ex æquo $\dot{BD}:\dot{AC}=\dot{FT}:\dot{BG}$.

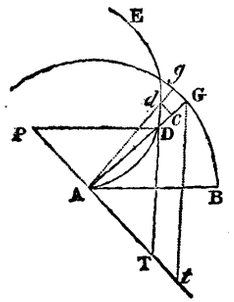
(r) CUM sit $\dot{FT}:\dot{BC}=\dot{BD}:\dot{BC}$ (not. p) et æquales sint FH, BC, erit $\dot{FT}:\dot{FH}=\dot{BD}:\dot{BC}$. Invertendo et convertendo $\dot{FH}:\dot{HT}=\dot{BC}:\dot{BC}-\dot{BD}$. Sed $\dot{BC}-\dot{BD}=\dot{CD}$. (Geometr. Flux. Th. v.) Quare $\dot{FH}:\dot{HT}=\dot{BC}:\dot{CD}$. Invertendo $\dot{HT}:\dot{FH}=\dot{CD}:\dot{BC}$. Sed $\dot{FH}:\dot{FT}=\dot{BC}:\dot{BD}$ (not. p) et $\dot{FT}:\dot{BG}=\dot{BD}:\dot{AC}$ (not. q). Quare ex æquo $\dot{HT}:\dot{BG}=\dot{CD}:\dot{AC}$.

MODUS

CAPUT VI.

MODUS VII. DE SPIRALIBUS.

42. Haud ſecus abſolvitur Problema, ubi Curvæ non ad rectas, ſed ad alias Curvas lineas, uti ſolent Mechanicæ, referuntur. Sit BG circuli peripheria, in cujus ſemidiametro AG, dum circa centrum A convolvitur, moveatur utcunque punctum D, et Spiralem ADE deſcribat. Et concipe *Dd* eſſe partem curvæ infinitè parvam, per quam D fluit; et in AD cape AC=*Ad*, et erunt *c*D ac G*g* contemporanea momenta rectæ AD et peripheriæ BG. Duc ergo A*t* parallelam rectæ *cd*, id eſt perpendicularem rectæ AD, et cum eâ tangens DT conveniat in T. Eritque *c*D : *cd* : : AD : AT. Sit inſuper G*t* parallela tangenti, et erit *cd*: G*g* (: : A*d* vel AD : AG) : : AT : A*t*.



43. Quare expoſitâ quâcunque æquatione, quâ relatio BG ad AD definitur, quære rationem fluxionum per Prob. 1; et cape A*t* in illâ ratione ad AD: eritque G*t* tangenti parallela.

44. EXEMPLUM 1. Dictis BG=*x*, et AD=*y*, ſit earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Et ope Prob. 1. emerget $3x^2-2ax+ay : 3y^2-ax$ (: : $\dot{y} : \dot{x}$) : : AD : A*t* : : AP : AG. Puncto *t* ſic invento, duc G*t* eique parallelam DT, et illa curvam tanget.

45. EXEMPL. 2. Si ſit $\frac{ax}{b}=y$ (quæ æquatio eſt ad Spiralem Archimedeam) erit $\frac{a\dot{x}}{b}=\dot{y}$. Adeoque $a : b$ (: : $\dot{y} : \dot{x}$) : : AD : A*t*. Unde obiter ſi TA producatur ad P, ut ſit AP : AB : : *a* : *b*, PD ad curvam recta erit (f).

46. EXEMPL. 3. Si $xx=by$, erit $2\dot{x}x=b\dot{y}$, adeoque $2x:b$::AD:A*t*. Et ſic Tangentes ad quaſcunque Spirales nullo negotio determinari poſſunt.

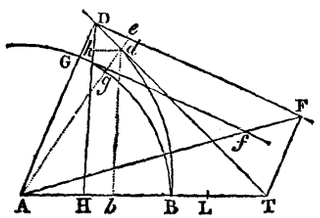
MODUS

(f) PUTA enim eductam eſſe DP ad angulos cum helice, hoc eſt, cum tangente ejus DT rectos. Et propter angulos ad A rectos, erit PA ad AD ut AD ad AT. (El. VI. 8.) Ratio autem AD ad AT componitur è rationibus illius AD ad A*t* et A*t* ad AT; ſive è rationibus *a* ad *b* et AG vel AB ad AD. Quare PA ad AD rationem habet eam, quæ componitur è rationibus *a* ad *b* et AB ad AD. Et ex iiſdem componitur ratio rectanguli *a* × AB ad rectangulum *b* × AD. (El. VI. 23.) Erit igitur PA ad AD ut rectangulum *a* × AB ad rectangulum *b* × AD. Sed PA eſt ad AD ut rectangulum *b* × PA ad rectangulum *b* × AD. (El. VI. 1.) Rectangulum igitur *b* × PA erit ad rectangulum *b* × AD ut rectangulum

MODUS VIII. DE QUADRATICIBUS.

DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

47. Ad hæc ſi Curva ſit ejuſmodi, ut per centrum A ductâ utcunque AGD, quæ circulo in G, curvæque in D occurrat; relatio inter arcum BG et rectam DH, quæ in dato angulo ad baſin AB ordinata eſt, æquatione quâvis definiatur: concipe punctum D per infinitè parvum intervallum ad *d* in curvâ moveri, et completo parallelogrammo *db*H*k*, productâque A*d* ad *e* ut ſit A*e*=AD: erunt G*g* arcûs BG, et D*k* ordinatæ DH contemporanea momenta. Produc jam D*d* rectâ ad T, ubi cum AB conveniat (t), et demitte TF in D*e* (u) perpendicularem; eruntque trapezia, D*kde*, DHTF, ſimilia: atque adeo D*k* : D*e* : : DH : DF. Et præterea ſi G*f* ad AG normalis erigatur, quæ cum AF concurrat in *f*, propter parallelas DF, G*f*, erit D*e* : G*g* : : DF : G*f*. Quamobrem ex æquo eſt DH : G*f* : : D*k* : G*g*, hoc eſt, ut momenta ſive fluxiones linearum DH et BG.



48. Per æquationem itaque quâ relatio BG ad DH definitur, quære rationem fluxionum (per Prob. 1.) et in eâ ratione cape G*f* (tangentem circuli BG) ad DH. Age DF parallelam G*f*, quæ cum A*f* productâ conveniat in F. Et ad F erige normalem FT occurrentem AB in T, et acta DT Quadratricem tanget.

49. EXEMPL. 1. Nominatis BG=*x*, ac DH=*y*, eſto $xx=by$, et (per Prob. 1.) erit $2\dot{x}x=b\dot{y}$. Adeoque $2x : b$: : ($\dot{y} : \dot{x}$) : : DH : G*f*. Et invento *f*, cætera, ut præſcriptum, eſt determinabis.

50. Cæterùm hæc Regula fortè ſic elegantior evadet; fac $\dot{x} : \dot{y}$: : AB : AL. Dein AL : AD : : AD : AT, et DT curvam tanget. Nam propter æqualia triangula AFD, ADT eſt AD × DF = AT × DH. Adeoque AT : AD (: : DF : DH, ſive $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ G*f*) : : AD : $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ AG, ſive AL (x).

51. Ex-

rectangulum *a* × AB ad rectangulum *b* × AD. (El. V. 11.) Rectangula igitur $\overline{b \times PA}$, $\overline{a \times AB}$ ſunt inter ſe æqualia. (El. V. 9.) Quare PA erit ad AB ut *a* ad *b*. (El. VI. 16.)

(t) Hoc eſt, produci intelligatur recta, quæ curvam in D contingit, uſque dum cum AB conveniat. Concurſus eſto T.

(u) Hoc eſt, in tangentem arcûs circularis centro A radio AD ſcripti.

(x) HÆC ratiocinatio magis geometricè ad hunc modum concinnari poteſt. "Propter rectangula

CAPUT VI.

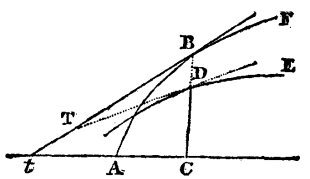
51. EXEMPL. 2. Esto $x=y$ (quæ æquatio est ad Veterum Quadraticem) et per Prob. 1. $\dot{x}=\dot{y}$. Adeoque AB : AD :: AD : AT.

52. EXEMPL. 3. Esto $axx=y^3$, et erit $2ax\dot{x}=3y^2\dot{y}$. Fac ergo $3y^2 : 2ax (:: \dot{x} : \dot{y}) ::$ AB : AL. Dein AL : AD :: AD : AT.

53. Atque ita Tangentes aliarum Quadraticum, utcunque compositarum, possis expeditè determinare.

MODUS IX.

54. Si denique ABF sit Curva quævis data, quam tangat recta Bt, et rectæ BC, in dato angulo ad basin AC applicatæ, pars BD, inter hanc et aliam curvam DE intercepta, relationem ad curvæ portionem AB in æquatione quâcunque definitam habeat: alterius curvæ tangentem DT duces, capiendo, in hujus tangente, BT in eâ relatione ad BD, quam habet fluxio curvæ AB ad fluxionem rectæ BD.



55. EXEMPL. 1. Dictis AB=x, et BD=y. Esto $ax=yy$, et per Prob. 1. erit $a\dot{x}=2y\dot{y}$. Adeoque $a : 2y (:: \dot{y} : \dot{x}) ::$ BD : BT.

56. EXEMPL. 2. Sit $\frac{a}{b}x=y$ (æquatio ad Trochoidem si modò ABF sit Circulus) et erit $\frac{a}{b}\dot{x}=\dot{y}$. Adeoque $a : b ::$ BD : BT.

57. Et nihilo difficiliùs Tangentes, ubi ipsius BD ad AC vel ad BC relatio in æquatione quâvis exprimitur, vel ubi Curvæ aliis quibuscunque modis ad rectas, aliasve curvas, referuntur, possis ducere.

58. SUNT etiam alia non pauca Problemata, quorum solutiones ex hisce fluent. Cujusmodi sunt,

I. Invenire punctum Curvæ, ubi Tangens est ad basin, vel quamvis positione datam rectam, parallela, vel perpendicularis, vel in alio quovis angulo inclinata.

II. Invenire punctum, ubi Tangens maximè miniméve ad basin, aut

gula AD × DF, AT × DH interse æqualia, erit AT ad AD ut DF ad DH. Præterea cùm AL sit ad AB ut $\dot{y}$ ad $\dot{x}$, ita enim factum est, cùm sit etiam $\dot{y}$ ad $\dot{x}$ ut DH ad Gf (id enim ostensum § 47.) erit AL ad AB ut DH ad Gf. Sed cùm AT sit ad AD ut DF ad DH, et AL ad AB ut DH ad Gf, ratio rectæ DF ad rectam Gf, quæ componitur e rationibus illius DF ad DH, et DH ad Gf, componetur illa quidem è rationibus rectæ AT ad rectam AD rectæque AL ad AB. Ex eisdem autem componitur ratio rectanguli AT × AL.

aut aliam positione datam rectam, inclinatur: hoc est invenire confinium flexûs contrarii. Hujus autem specimen in Conchoide jam antè exhibui.

III. A dato quovis, extra Curvæ perimetrum, puncto rectam ducere, quæ cum perimetro aut angulum contactûs, aut rectum angulum, aut alium quemvis datum conficiet: hoc est, Tangentes vel Perpendiculares, vel aliter ad Curvam inclinatas rectas à dato quovis puncto ducere.

IV. A dato quovis intra Parabolam puncto rectam ducere, quæ maximum minimumve, quem potest, angulum cum perimetro ejus conficiet. Et idem de aliis curvis intellige.

V. Rectam ducere, quæ duas positione datas Curvas, vel eandem Curvam (si potest) in duobus punctis tangat.

VI. Curvam quamvis sub datis conditionibus ducere, quæ aliam positione datam Curvam in dato puncto tanget.

VII. Luce in quamlibet curvam superficiem incidente, cujusvis radii refractionem determinare.

Horum et similium Problematum confectiones, ubi non obstat computandi tædium, non sunt ita difficiles ut iis explicandis immorari opus sit. Et Geometris, credo, magis gratum erit sic tantùm recensuisse.

CAPUT SEPTIMUM.

PROB. V.

Curvæ alicujus ad datum punctum Curvaturam invenire.

1. PROBLEMA cum primis elegans videtur, et ad Curvarum scientiam utile. In ejus autem constructionem generalia quædam præmittere convenit.

I. Ejusdem Circuli eadem estque undique Curvatura, et inæqualium Circulorum Curvaturæ sunt reciprocè proportionales diametris. Si alicujus diameter diametro alterius duplo minor est, ejus peripheriæ Curvatura erit duplo major; si diameter triplo minor est, Curvatura erit triplo major, &c.

AT × AL ad rectangulum AD × AB. (El. VI. 23.) Rectangulum igitur AT × AL erit ad rectangulum AD × AB ut DF ad Gf, sive ut AD ad AG vel AE; hoc est ut quadratum ex AD, ad rectangulum AD × AB. Rectangulum igitur AT × AL quadrato ex AD æquale est. (El. V. 9.) Quare AT : AD = AD : AL. (El. VI. 17.)

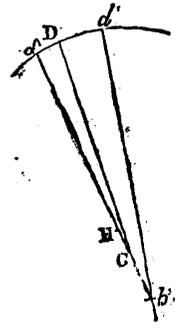
CAPUT VII. II. Si Circulus curvam aliquam ad partem concavam in dato puncto tangat, ſitque talis magnitudinis, ut alius contingens circulus in angulis contactûs proximè punctum iſtud interſcribi nequeat, Circulus ille ejuſdem eſt curvitatis ac Curva in iſto puncto contactûs. Nam circulus, qui inter curvam et alium circulum juxta punctum contactûs interjacet, minus deflectit à curvâ, ejuſque curvaturam magis appropinquat, quàm ille alius circulus: et proinde curvaturam ejus maximè appropinquat, inter quem et curvam non alius quiſquam poteſt intercedere.

III. Itaque Centrum Curvaminis, ad aliquod curvæ punctum, eſt centrum tangentis circuli æqualiter incurvati: et ſic Radius vel ſemidiameter Curvaminis eſt pars perpendiculi ad iſtud centrum terminata.

IV. Et proportio curvaminis, ad diverſa ejus puncta, è proportione curvaminis circulorum æquè curvorum, ſive è reciprocâ proportione Radiorum curvaminis innoteſcit.

2. PROBLEMA itaque ad hunc locum redit, ut Radius vel Centrum Curvaminis inveniatur.

3. Concipe ergo, quòd ad tria curvæ puncta δ, D ac *d*, ducantur perpendicula; quarum quæ ſunt ad, D et δ, conveniant in H; et quæ ad D et *d*, conveniant in *h*. Et puncto D exiſtente medio, ſi major eſt curvitas à parte Dδ quàm D*d*, erit δH minor quàm *dh*. Sed quo perpendicula δH ac *dh* propiora ſunt intermedio perpendiculo, eo minùs diſtabunt puncta H et *h*, et convenientibus tandem perpendiculis, coaleſcent. Coaleſcant autem in puncto C, et erit illud C centrum curvaminis, ad curvæ punctum D, cui perpendicula inſiſtunt. Id quod per ſe manifeſtum eſt.



4. Hujus autem C varia ſunt ſymptomata; quæ ad ejus determinationem inſervire poſſunt. Quemadmodum

I. Quòd ſit concurſus perpendiculorum hinc et inde à DC infinitè parùm diſtantium.

II. Quòd perpendiculorum finitè parum diſtantium interſectiones hinc et inde [illegible] diſterminat. Ita ut

quæ ſunt à parte curviori Dδ citeriùs, ad H, conveniant; et quæ ſunt ex alterâ minùs curvâ parte, D*d*, remotiùs conveniant, ad *h*. DE RADIO CURVATURÆ.

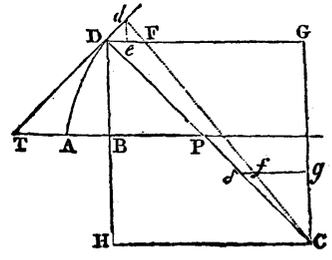
III. Si DC, dum curvæ perpendiculariter inſiſtit, moveri concipitur, illud ejus punctum C (ſi demas motum accedendi vel recedendi à puncto inſiſtentiæ D) minimè movebitur, ſed centri motionis rationem habebit.

IV. Si centro C, intervallo DC, circulus deſcribatur, non poteſt alius deſcribi circulus qui juxta contactum interjacebit.

V. Denique ſi alterius alicujus tangentis circuli centrum, ut H, vel *h*, paulatim ad hujus centrum C accedat, donec tandem conveniat, tunc aliquod è punctis, in quibus circulus ille curvam ſecavit, ſimul conveniet punctum contactûs D.

Et unumquodque horum ſymptomatum anſam præbet diverſimodè reſolvendi Problema. Nos autem primum tanquam ſimpliciſſimum eligemus.

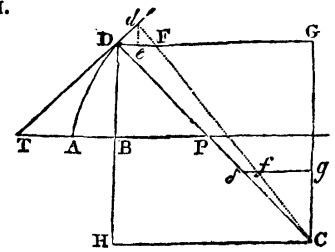
5. Ad quodlibet curvæ punctum D, eſto DT tangens, DC perpendiculum, et C centrum curvaminis, ut antè. Sitque AB baſis, ad quam DB in angulo recto applicatur, et cui DC occurrit in P. Age DG parallelam AB, et CG perpendiculum; inque eo cape C*g* cujuſlibet datæ magnitudinis; et age *g*δ perpendiculum, quod occurrat DC in δ. Eritque C*g* : *g*δ :: (TB : BD ::) fluxio baſis: fluxionem applicatæ. Concipe præterea punctum D per infinitè parvum intervallum D*d* in curvâ promoveri. Et actis *de* ad DG et C*d* ad curvam normalibus, quarum C*d* occurrit DG in F et C*g* in *f*: erit D*e* momentum baſis, *de* momentum applicatæ, ac δf contemporaneum momentum rectæ *g*δ. Eſtque $DF = De + \frac{de \times de}{De}$. Habitis itaque horum momentorum, ſive quod perinde eſt fluxionum generantium, rationibus, habebitur ratio GC ad datam *gc* (quippe quæ eſt DF ad δf) et inde punctum C determinabitur.



6. Sit ergo AB = *x*, BD = *y*, C*g* = 1. Et *g*δ = $\dot{x}$, et erit 1 : $\dot{x}$ :: $\dot{x}$: $\dot{y}$ ſeu $\dot{x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Hujus autem $\dot{x}$ momentum δf dic $\ddot{x} \times o$, factum nempe

ex

CAPUT VII.



ex velocitate et infinite parvâ quantitate. Eritque momentum DE=$\dot{x}\times o$, $de=\dot{y}\times o$ et inde DF=$\dot{x}o+\frac{\dot{y}o}{\dot{x}}$. Est ergo cg (1):CG::(df:DF)::$\dot{z}o:\dot{x}o+\frac{\dot{y}o}{\dot{x}}$. Adeoque CG=$\frac{\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}$.

7. Cùm insuper basis fluxioni $\dot{x}$ (ad quam tanquam uniformem fluxionem cæteras referre convenit) liberum sit quamcunque velocitatem tribuere: dic esse 1. Et erit $\dot{y}=z$, et CG=$\frac{1+zz}{\dot{z}}$. Et inde DG=$\frac{z+z^3}{\dot{z}}$, ac DC=$\frac{1+zz\times\sqrt{1+zz}}{\dot{z}}$ (y).

8. Expositâ itaque quâvis æquatione, quâ relatio BD ad AB pro curvâ definiendâ designetur, imprimis quære relationem inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$ per Prob. 1. et interea substitue 1 pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$. Dein ex æquatione resultante per idem Prob. 1. quære relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, et interea substitue 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$ ut antè. Atque ita per priorem operationem obtinebis valorem z, et per posteriorem obtinebis $\dot{z}$: quibus habitis, produc DB ad H versus concavam partem curvæ ut sit DH=$\frac{1+zz}{\dot{z}}$; et age HC parallelam AB et perpendiculo CD occurrentem in c, eritque C centrum curvaturæ ad curvæ punctum D. Vel cùm sit $1+z\dot{z}z=\frac{PT}{BT}$ (z), fac DH=$\frac{PT}{\dot{z}\times TB}$, vel DC=$\frac{\overline{DP^3}}{\dot{z}\times\overline{DB^3}}$ (aa).

9. EXEMPL. 1. Sic expositâ $ax+bx^2-y^2=o$ (æquatione ad Hyperbolam cujus latus rectum est a, ac transversum $\frac{a}{b}$): emerget (per Prob. 1) $a+2bx-2z\dot{y}=o$ (scriptis nempe 1 pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$ in æquatione resultante, quæ secus foret $a\dot{x}+2bx\dot{x}-2y\dot{y}=o$). Et hinc denuo prodit $2b-2z\dot{z}-2\dot{z}y=o$ scriptis iterum 1 pro $\dot{x}$ et z pro

(y) DC=$\sqrt{CG^2+DG^2}$. CG=$\frac{1+zz}{\dot{z}}$. Et DG=CG$\times z=\frac{\overline{1+zz}\times z}{\dot{z}}$.

Quare $CG^2=\frac{\overline{1+zz}^2}{\dot{z}\dot{z}}$. Et $DG^2=\frac{\overline{1+zz}\times zz}{\dot{z}\dot{z}}$. Ergo $CG^2+DG^2=\frac{\overline{1+zz}^2\times 1+zz}{\dot{z}\dot{z}}$,

Ergo $\sqrt{CG^2+DG^2}=\frac{\overline{1+zz}\times\sqrt{1+zz}}{\dot{z}}$ = DC.

(z) FB : BT = DB^2 : $BT^2=\dot{y}\dot{y}:\dot{x}\dot{x}=zz:1$.

Ergo

pro $\dot{y}$. Per priorem est $z=\frac{a+2bx}{2y}$, et per posteriorem $\dot{z}=\frac{b-zz}{y}\dot{x}$. DE RADIO CURVATURÆ. Dato itaque quovis curvæ puncto D, et per consequentiam x et y, ex his dabuntur z et $\dot{z}$; quibus cognitis, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}$=GC, vel DH, et age HC.

10. Quemadmodum si definitè sit $a=3$, et $b=1$, adeoque $3x+xx=yy$, hyperbolæ conditio: et si assumatur $x=1$, erit $y=2$, $z=\frac{5}{4}$, $\dot{z}=-\frac{9}{32}\dot{x}$, et DH=$-9\frac{1}{9}$. Invento H erige HC occurrentem perpendiculo DC priùs ducto. Vel quod perinde est, fac DH:HC(::1:z)::1:$\frac{5}{4}$, et age DC curvaminis radium.

11. Siquando computationem non admodum perplexam fore censeas, possis indefinitos valores ipsorum $\dot{z}$ et z, in $\frac{1+zz}{\dot{z}}$ valore CG substituere. Et sic in hoc exemplo, per debitam reductionem, obtinebis DH=$y+\frac{4y^3+4by^3}{aa}$, cujus tamen DH valor per calculum negativus prodit, sicut in exemplo numerali videre est. At hoc tantùm arguit DH ad partes versus B capiendam esse. Nam si fuisset affirmativus, ad contrarias partes duxisse oporteret.

12. COROL. Hinc si signum symbolo $+b$ præfixum mutetur; ut fiat $ax-bxx-yy=o$, æquatio ad Ellipsin, erit DH=$y+\frac{4y^3-4by^3}{aa}$. At posito $b=o$, ut æquatio fiat $ax-y^2=o$ ad Parabolam, erit DH=$y+\frac{4y^3}{a^2}$, indeque DG=$\frac{1}{2}a+2x$.

13. EX hisce facilè colligitur Radium curvaturæ cujusvis conicæ sectionis valere $\frac{4\overline{DP^3}}{aa}$.

14. EXEMPL. 2. Si $x^3=ay^2-xy^2$ (æquatio ad Cissoidem Diocl.) exponatur, per Prob. 1. imprimis obtinebitur $3x^2=2ax\dot{x}-2xy\dot{x}-y\dot{y}$; ac deinde $6x=2ax\dot{x}+2az\dot{z}-2z\dot{y}-2xz\dot{y}-2xzz-2zy$: adeoque $z=\frac{3xx+yy}{2xy-2ay}$, et $\dot{z}=\frac{3x-az^2+2zy+xz}{ay-xy}$. Dato itaque quolibet Cissoidis punc-

Ergo PT : BT = $1+zz$: 1. Ergo $\frac{PT}{ET}=1+zz$.

(a) DC=$\frac{1+zz\times\sqrt{1+zz}}{\dot{z}}=\frac{PT}{BT\times\dot{z}}\times\frac{\sqrt{PT}}{\sqrt{ET}}=\frac{\sqrt{PT^3}}{\dot{z}\sqrt{BT^3}}$. Sed PT : TB = PT^2 : TB · PD : PD^2 : DB^2.

Ergo $\frac{PT}{TB}=\frac{PD^2}{DB^2}$. Ergo $\frac{PT^3}{BT^3}=\frac{PD^6}{DB^6}$. Et $\sqrt{\frac{PT^3}{BT^3}}=\frac{PD^3}{DB^3}$. Quare DC=$\frac{PD^3}{DB^3\times\dot{z}}$.

CAPUT VII. to, et inde x et y, dabuntur z & $\dot{z}$. Quibus cognitis fac $\frac{1+zz}{\dot{z}} = CG$.

15. EXEMPL. 3. Si detur $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy} = xy$ æquatio ad Conchoidem, ut ſuprà; finge $\sqrt{cc-yy} = v$, et emerget $bv+yv = xy$. Jam harum prior (viz. $cc-yy = vv$) per Prob. 1. dat $-2y\dot{z} = 2\dot{v}v$ (ſcripto z pro y) et poſterior dat $b\dot{v}+y\dot{v}+\dot{z}v = \dot{y}+z\dot{x}$. Et ex his æquationibus ritè diſpoſitis determinantur $\dot{v}$ et $\dot{z}$. Ut autem $\dot{z}$ præterea determinetur, è noviſſimâ æquatione extermina fluxionem $\dot{v}$, ſubſtituendo $\frac{-yz}{v}$; et emerget $-\frac{b\dot{y}z}{v} - \frac{yyz}{v} + z\dot{v} = \dot{y} + x\dot{z}$. Æquatio quæ fluentes quantitates ſine aliquibus earum fluxionibus, prout exigit reſolutio Prob. 1.) complectitur. Hinc itaque per Prob. 1. elicies $-\frac{bz^2}{v} - \frac{b\dot{y}z}{v} + \frac{by\dot{z}v}{vv} - \frac{2yzz}{v} - \frac{y\dot{y}z}{v} + \frac{yyz\dot{v}}{vv} + z\dot{v} + \dot{z}v = 2z + x\dot{z}$; quâ æquatione in ordinem reductâ et concinnatâ, dabitur $\dot{z}$. Inventis autem z et $\dot{z}$ fac $\frac{1+zz}{\dot{z}} = CG$.

16. Si penultimam æquationem per z diviſiſſes, exinde poſtmodum, per Prob. 1. obtinuiſſes $-\frac{bz}{v} + \frac{by\dot{v}}{vv} - \frac{yz}{v} + \frac{yy\dot{v}}{vv} + \dot{v} = 2 - \frac{y\dot{z}}{zz}$, æquationem priori ſimpliciorem pro determinando $\dot{z}$.

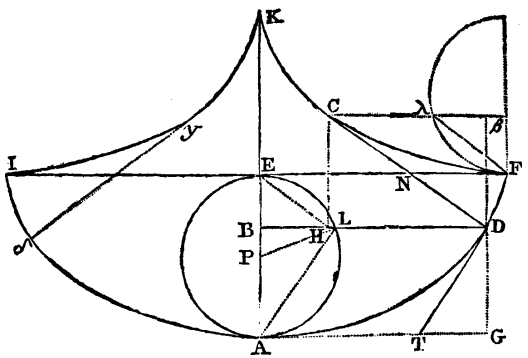
17. Dedi quidem hoc exemplum, ut modus operandi in ſurdis æquationibus conſtaret. At Conchoidis curvatura ſic breviùs inveniri potuit. Æquationis, $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy} = xy$, partibus quadratis et per yy diviſis, exurgit $\frac{bbcc}{yy} + \frac{2bcc}{y} + cc - 2by - y^2 = xx$. Et inde per $-bb$

Prob. 1. exoritur $-\frac{2b^3c^2z}{y^3} - \frac{2bc^2z}{y^2} - 2bz - 2yz = 2x$; ſive $-\frac{b^3c^2}{y^3} - \frac{bc^2}{y^2} - b - y = \frac{x}{z}$. Et hinc denuo per Prob. 1. exoritur $\frac{3b^4c^2z}{y^4} + \frac{2bc^2z}{y^3} - z = \frac{1}{z} - \frac{x\dot{z}}{zz}$. Per priorem exitum determinatur z et per poſteriorem $\dot{z}$.

18. EXEMPL. 4. Sit ADF Trochois ad circulum ALE, cujus diameter eſt AE, accommodata; et ordinatâ BD ſecante circulum in L, dic AE=a, AB=x, BD=y, BL=v, et arcum AL=t, Et imprimis, ducto PL ſemidiametro, erit fluxio baſis AB ad fluxionem arcûs AL ut BL ad PL, hoc eſt, $\dot{x}$ ſive $1 : \dot{t} :: v : \frac{1}{2}a$. Atque adeo $\frac{a}{2v} = \dot{t}$.

19. Porro

19. Porro ex naturâ circuli eſt $ax-xx = vv$, et inde per Prob. 1. $a-2x = 2v\dot{v}$ ſive $\frac{a-2x}{2v} = \dot{v}$. DE RADIO CURVATURÆ.



20. Ad hæc ex naturâ Trochoidis eſt LD= arc. AL; adeoque $v+t = y$, et inde per Prob. 1. $\dot{v}+\dot{t} = \dot{z}$.

21. Denique pro fluxionibus $\dot{v}$ & $\dot{t}$, valores hi ſubſtituantur, et emerget $\frac{a-x}{v} = z$. Unde per Prob. 1. deducitur $\frac{-a\dot{v}}{vv} + \frac{v\dot{v}}{vv} - \frac{1}{v} = \dot{z}$. Et his inventis, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}} = -DH$, et erige HC.

22. COROL. Cæterùm ex his conſectatur,

I. Quòd ſit DH=2BL, & CH=2BE, ſive quòd EF in N biſecat CD radium curvaminis. Et hoc patebit ſubſtituendo valores $\dot{z}$ et z jam inventos in æquatione $\frac{1+zz}{\dot{z}} = DH$, et exitum probè reducendo.

II. Hinc Curva FCK, in quâ centrum curvaminis indefinitè verſatur, eſt alia huic æqualis Trochois, cujus vertices ad I et F adjacent hujus cuſpidibus. Nam circulus Fλ, æqualis ALE et ſimiliter poſitus, deſcribatur, et agatur cβ parallela EF, circuloque occurrens in λ; et erit arcus Fλ (= arc. EL=NF) = cλ.

III. CD quæ recta eſt ad trochoidem IAF contingit trochoidem IKF in C.

IV. Hinc, inverſis Trochoidibus, ſi ſuperioris trochoidis cuſpidi, K, pondus ad diſtantiam KA, ſive 2EA, filo appenſum innitatur, et, undulante pondere, filum ſe applicet ad trochoidis partes KF et KI, hinc inde obſiſtentes, ne in rectam diſtendatur, et cogentes, ut ad earum normam, dum digreditur à perpendiculo, paulatim deſuper inflectatur, parte CD ſub infimo contactûs puncto manente rectâ; pondus in inferioris trochoidis perimetro movebitur, utpote cui filum CD ſemper perpendiculare eſt.

CAPUT VII.

V. Eſt itaque tota fili longitudo KA æqualis perimetro trochoidis KCF, ejuſque pars CD æqualis parti perimetri CF.

VI. Cùm filum circa mobile punctum C, tanquam centrum, undulando convolvitur; ſuperficies, per quam tota CD continuò trajicitur, erit ad ſuperficiem, per quam pars CN ſupra rectam IF ſimul trajicitur, ut $\overline{CD}^2$ ad $\overline{CN}^2$, hoc eſt ut 4 ad 1. Eſt itaque area CFN quarta pars areæ CFD, et area KCNE quarta pars areæ AKCD.

VII. Quinimo cùm ſubtenſa EL ſit æqualis et parallela CN, et circa immobile centrum, E, perinde ac CN circa mobile centrum C circumagitur, æquales erunt ſuperficies per quas ſimul trajiciuntur; nempe area CFN et circuli ſegmentum EL, et inde area NFD tripla erit ſegmenti iſtius, ac tota EADF tripla ſemicirculi.

VIII. Denique cùm pondus D attingit punctum F, totum filum circum Trochoidis perimetrum KCF flectetur, radio curvaminis CD manente nullo. Et proinde Trochois IAF ad ejus cuſpidem F curvior eſt quàm quilibet circulus, et cum tangente ſF productâ conſtituit angulum contactûs infinitè majorem, quàm circulus cum rectâ poteſt conſtituere.

23. Sunt etiam anguli contactûs Trochoidalibus infinitè majores. Et illis deinceps alii infinitè majores, et ſic in infinitum, et tamen maximi ſunt infinitè minores rectilineis. Sic $xx=ay$, $x^3=by^2$, $x^4=cy^3$, $x^5=dy^4$, &c. denotant ſeriem Curvarum, quarum quælibet poſterior cum baſi conſtituit angulum contactûs infinitè majorem, quàm prior cum eâdem baſi poteſt conſtituere; eſtque angulus contactûs, quem prima $xx=ay$ conſtituit, ejuſdem generis cum circularibus; et ille, quem ſecunda $x^3=by^2$ conſtituit, ejuſdem generis cum Trochoidalibus. Et quamvis ſubſequentium anguli angulos præcedentium perpetim infinitè ſuperant, tamen anguli rectilinei magnitudinem nunquam poſſunt aſſequi.

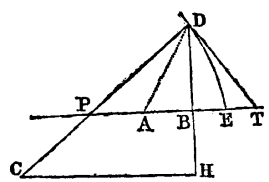
24. Ad eundem modum $x=y$, $x^2=ay$, $x^3=b^2y$, $x^4=c^3y$, &c. denotant ſeriem linearum, quarum ſubſequentium anguli ad vertices, cum baſibus confecti, ſunt angulis præcedentium perpetim infinitè minores. Quinetiam inter angulos contactûs duorum quorumlibet ex his generibus, poſſunt alia angulorum, ſe infinitè ſuperantium, intercedentia genera in infinitum excogitari.

25. Angulorum verò contactûs unum genus eſſe infinitè majus alio conſtat, cùm unius generis Curva, utcunque magna, inter rectam tangentem et alterius generis Curvam, quantumvis parvam, juxta punctum contactûs non poteſt interjacere: ſive cujus angulus contactûs neceſſariò continet alterius angulum contactûs, ut partem totius. Sic curvæ $x^4=cy^3$ angulus contactûs, quem cum baſi conſtituit, neceſſariò continet angulum contactûs curvæ $x^3=by^2$. Qui verò ſe mutuò ſuperare poſſunt anguli ſunt ejuſdem generis, uti de præfatis angulis Trochoidis et hujus Curvæ, $x^3=by^2$, contigit.

DE ANGULO CONTACTUS.

26. Ex his patet Curvas in quibuſdam punctis poſſe infinitè rectiores eſſe, vel infinitè curviores, quolibet circulo; et tamen formam curvarum non ideo amittere. Sed hæc in tranſitu (bb).

27. EXEMPL. 5. Eſto ED Quadratrix ad circulum centro A deſcriptum pertinens, ac DB ad AE normaliter demiſſâ, dic AB=x, BD=y, & AE=1. Eritque $\dot{y}x-\dot{y}y^2-\dot{y}x^2=\dot{x}y$, ut ſuprà Cap. VI. § 19: quæ æquatio, ſcriptis 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$, fit $z\dot{x}-z\dot{y}^2-z\dot{x}^2=\dot{y}$; et inde per Prob. 1. elicitur $z\dot{x}-z\dot{y}^2-z\dot{x}^2+z\dot{x}-2z\dot{x}x-2z\dot{y}y=\dot{y}$. Factâque reductione, et ſcriptis iterum 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$, exit $\dot{z}=\frac{2z^2y+2zx}{x-x^2-y^2}$. Inventis autem z et $\dot{z}$, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=$DH; et age HC ut ſuprà.



28. Si conſtructionem concinnare placet, perbrevem invenies: nempe ad DT duc normalem DP occurrentem AT in P, et fac eſſe 2AP:AE::PT:CH.

29. Scilicet eſt $z=\frac{y}{x-x^2-y^2}=\frac{BD}{-BT}$; et $zy=\frac{\overline{BD}^2}{-BT}=-BP$; et $zy+x=-AP$; et $\frac{2z}{x-x^2-y^2}$ in $zy+x=\frac{2BD}{AE\times BT}$ in $-AP=\dot{z}$. Præterea eſt $1+zz=\frac{PT}{BT}$, (utpote $=1+\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BT}^2}=\frac{\overline{DT}^2}{\overline{BT}^2}$,) adeoque $\frac{1+zz}{\dot{z}}=\frac{PT\times AE\times BT}{-2BD\times AP}$ $=$DH. Denique eſt BT:BD::DH:CH$=\frac{PT\times AE}{-2AP}$. Ubi valor negativus tantùm arguit CH capiendam eſſe ad partes DH verſus AB.

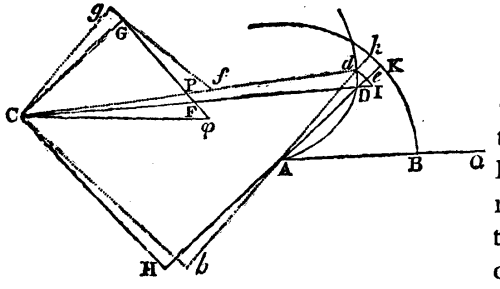
30. Eâdem methodo Spiralium, et aliarum quarumvis curvarum Curvatura calculo breviſſimo determinari poteſt.

31. Ad Curvaturam præterea, cùm Curvæ aliis modis ad rectas referuntur, ſine prævia reductione determinandam, jam potuit

(bb) Idem argumentum auctor tractavit Princip. Lib. 1. Sect. 1. Schol.

CAPUT VII. hæc methodus applicari, perinde ut in determinando tangentes factum eſt. Sed cùm omnes Geometricæ Curvæ, ut et Mechanicæ (præſertim ubi definientes conditiones ad infinitas æquationes uti pòſt oſtendam reducantur) ad rectangulas ordinatas referri poſſint, videor ſatis præſtitiſſe. Qui plura deſiderat, haud difficulter proprio marte ſupplebit. Præſertim ſi in ejus rei illuſtrationem, ex abundanti, methodum pro Spiralibus adjecero.

32. Eſto BK circulus, A centrum ejus, B punctum in circumferentiâ datum, AD*d* Spiralis, DC perpendiculum ejus, et C centrum Curvitatis ad punctum D. Ductâque ADK rectâ, et ei parallelâ et æquali CG, ut et normali GF occurrente CD in F: dic AB vel AK=1=CG, BK=x, AD=y, et GF=z. Præterea concipe punctum D per infinitè parvum ſpatium Dd in ſpirali moveri, et perinde per d agi ſemidiametrum AK, eique parallelam et æqualem cg, et normalem gf occurrentem cd in f. Cui etiam GF occurrit in P: produc GF ad φ ut ſit Gφ=gf, et ad AK demitte normalem de, et produc, donec cum CD conveniat ad I: et ipſarum BK, AD ac Gφ contemporanea momenta erunt Kk, De et Fφ; quæ proinde dicentur $\dot{x}\times o$, $\dot{y}\times o$, et $\dot{z}\times o$.



33. Jam eſt AK:Ae(AD)::kK:de=oy, ubi aſſumo $\dot{x}$=1 ut ſuprà. Item CG:GF::de:e D=yoz, adeoque $yz=\dot{y}$. Præterea, CG:CF::de:dD(=$oy\times$CF)::dD:dI=$oy\times\overline{CF}^2$. Ad hæc propter ang. PCφ (=$\angle$ GCg)=$\angle$ DAd, et $\angle$ CPφ (=$\angle$CdI=$\angle$ edD+rect.)=$\angle$ ADd, triangula CPφ et ADd ſunt ſimilia: et inde AD:Dd::CP (CF):Pφ=$o\times\overline{CF}^2$, unde aufer Fφ et reſtabit PF=$o\times\overline{CF}^2-o\times\dot{z}$. Denique demiſſâ CH normali ad AD, eſt PF:dI::CG:eH vel DH=$\frac{y\times\overline{CF}^2}{\overline{CF}^2-\dot{z}}$; vel ſubſtituto $1+zz$ pro $\overline{CF}^2$, erit HD=$\frac{y+yzz}{1+zz-\dot{z}}$.

34. Et nota, quòd in hujuſmodi computationibus quantitates (ut AD et Ae) pro æqualibus habeo, quarum ratio à ratione æqualitatis non niſi infinitè parum differt. DE RADIO CURVATURÆ.

35. Ex his autem prodit hujuſmodi Regula. Relatione inter x et y per quamlibet æquationem definitâ, quære relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$, ope Prob. 1. et ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$ et yz pro $\dot{y}$. Deinde ex æquatione prodeunte quære denuò per Prob. 1. relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, et iterum ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$. Prior exitus, per debitam reductionem, dabit $\dot{y}$ et z, et poſterior dabit $\dot{z}$: quibus cognitis fac $\frac{y+yzz}{1+zz-\dot{z}}$=DH, et erige normalem HC ſpiralis perpendiculo DC, priùs ducto, occurrentem in C; et erit C centrum curvaminis. Vel quod eodem recidit, cape CH:HD::z:1, et age CD.

36. EXEMPL. 1. Si detur $ax=y$, æquatio ad Spiralem Archimedeam: erit per Prob. 1. $a\dot{x}=\dot{y}$ ſive (ſcripto 1 pro $\dot{x}$ et yz pro $\dot{y}$) $a=yz$. Et hinc denuò per Prob. 1. erit $o=\dot{y}z+y\dot{z}$. Quare ex dato quolibet ſpiralis puncto D, et inde longitudine AD ſive y, dabuntur z $(=\frac{a}{y})$ et $\dot{z}$ $(=\frac{-a\dot{y}}{y^2}$ ſive $=\frac{-az}{y})$: quibus cognitis fac $1+zz-\dot{z}$:1+zz::DA (y):DH. Et 1:z::DH:CH.

37. Et hinc facilè deducitur hujuſmodi conſtructio. Produc AB ad Q, ut ſit AB: arc. BK:: arc. BK: BQ. Et fac $\overline{AB+AQ}$:AQ:: AD: DH (cc).

38. EXEMPL. 2. Si $ax^2=y^3$ definit relationem inter BK et AD: obtinebis (per Prob. 1.) $2a\dot{x}x=3\dot{y}y^2$, ſive $2ax=3zy^3$. Et inde rurſus $2a\dot{x}=3\dot{z}y^3+9zy^2$. Eſt itaque $z=\frac{2ax}{3y^3}$, et $\dot{z}=\frac{2a-9zzy^3}{3y^3}$. Quibus cognitis fac $1+zz-\dot{z}$:1+zz::DA:DH. Vel opere concinnato, fac $9xx+10$:$9xx+4$::AD:DH.

39. EXEMPL. 3. Ad eundem modum, ſi $ax^2-bxy=y^3$, determinat relationem BK ad AD, orietur $\frac{2ax-by}{bxy+3y^3}=z$, et $\frac{2a-2bzy-bz^2xy^2-9z^2y^3}{bxy+3y^3}=\dot{z}$. Ex quibus DH, et inde punctum C determinatur ut antè.

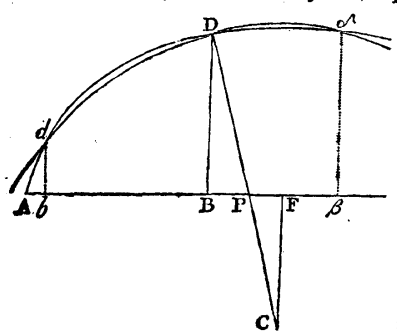
40. Et ſic aliarum quarumvis ſpiralium Curvaturam nullo negotio determinabis. Imo et ad horum exemplar Regulas pro quibuſlibet Curvarum generibus excogitare poſſis.

(cc) NIMIRUM erit DA:DH=1+$zz-\dot{z}$:1+zz (per § 33.) Verùm ex eo quòd ſit $yz+y\dot{z}=o$ (§ 36) veniet $\dot{z}=\frac{-\dot{y}z}{y}=-z^2$. Unde $1+zz-\dot{z}=1+2z^2$, et DA:DH=$1+2z^2$:$1+z^2$. Rurſum eo quòd ſit $z=\frac{a}{y}$, et $y=ax$ (§ 36.) veniet $z=\frac{1}{x}$, et $z^2=\frac{1}{x^2}$. Unde DA:DH=$1+\frac{2}{x^2}$:$1+\frac{1}{x^2}=x^2+2$:x^2+1. Scripto igitur QB×BA pro x^2, et AB^2 pro 1, et 2AB^2 pro 2, efficietur DA:DH=AQ×AB+AB^2:AQ×AB=AQ+AB:AQ. Q. E. D.

41. Ab-

CAPUT VII. 41. Absolvi tandem Problema; sed cùm methodum adhibuerim à vulgaribus operandi modis satis diversam, et ipsum problema non sit ex eorum numero, quorum contemplatio apud Geometras increbuit: in allatæ solutionis illustrationem et confirmationem non gravabor aliam solutionem attingere, magis obviam et usitatis in ducendo tangentes methodis affinem. Utpote si centro et intervallo quovis Circulus describi concipiatur, qui Curvam quamlibet in pluribus punctis secet, et circulus ille contrahatur vel dilatetur, donec duo intersectionum puncta conveniant, is Curvam ibidem tanget. Et præterea si centrum ejus accedere vel recedere à puncto contactûs fingatur, donec tertium intersectionis punctum cum prioribus in puncto contactûs conveniat, is æquè curvus ac Curva in illo puncto contactûs evadet. Quemadmodum in ultimo quinque symptomatum centri curvaminis suprà monui, è quorum singulis dixi Problema diversimodè confici potuisse.

42. Centro itaque C et radio CD describatur circulus secans Curvam in punctis *d*, D ac *δ*. Et demissis, *db*, DB, *δβ* et CF ad basin AB normalibus: dic AB=*x*, BD=*y*, AF=*v*, FC=*t* ac DC=*s*; et erit BF=*v*−*x*, ac DB+FC=*y*+*t*; quorum quadratorum aggregatum æquatur quadrato DC. Hoc est, $t^2+v^2-2vx+x^2+y^2+2ty=s^2$. Quam si placet, abbreviare possis, fingendo $v^2+t^2-ss=$ symbolo cuivis q^2, et evadet $x^2-2vx+y^2+2ty+q^2=0$. Postquam verò *t*, *v*, et q^2 inveneris, si *s* desideres, fac $=\sqrt{v^2+t^2-q^2}$.



43. Proponatur jam quælibet æquatio pro Curvâ definiendâ, cujus flexuræ quantitatem invenire oportet; et ejus ope alterutram quantitatem *x* vel *y*, extermina, et emerget æquatio cujus radices (*db*, DB, *δβ*, &c. si extermines *x*, vel A*b*, AB, A*β*, &c. si extermines *y*) sunt ad intersectionum puncta (*d*, D, *δ*, &c.) Et proinde cùm ex istis tres evadent æquales, circulus et Curvam continget, et erit ejusdem curvitatis ac Curva in puncto contactûs. Æqua-

les autem evadent, conferendo æquationem cum aliâ totidem dimensionum æquatione fictitiâ, cujus tres sunt æquales radices, ut docuit Cartesius: vel expeditiùs multiplicando terminos ejus bis per arithmeticam progressionem.

44. EXEMPL. Sit $ax=y^2$, æquatio ad Parabolam; et exterminato *x* (substituendo nempe in æquatione superiori valorem ejus $\frac{yy}{a}$) prodibit $\frac{y^4}{a^2}-\frac{2v}{a}y^2+2ty+q^2=0$; + y^2

cujus è radicibus *y* tres debent fieri æquales.

Et in hunc finem terminos per arithmeticam progressionem bis multiplico, ut hîc videre est.

4.	2.	1.	0
3.	1.	0.−	1

Et erit $\frac{12y^4}{aa}-\frac{4v}{a}y^2+2y^2=0$

Sive $v=\frac{3y^2}{a}+\frac{1}{2}a$. Unde facilè colligitur esse BF=$2x+\frac{1}{2}a$ ut suprà.

45. Quamobrem dato quovis Parabolæ puncto D, duc perpendiculum DP, et in axe cape PF=2AB, et erige normalem FC occurrentem DP in C, et erit C desideratum centrum Curvitatis.

46. Idem in Ellipsi et Hyperbolâ præstare possis, sed calculo satis molesto, et in aliis Curvis ut plurimùm fastidiosissimo.

CAPUT VIII.

De Quæstionibus quibusdam Cognatis.

1. EX hujus Problematis resolutione confectantur aliorum nonnullorum confectiones. Cujus modi sunt.

I. Invenire punctum ubi linea datam habet curvaturam.

2. Sic in Parabolâ $ax=yy$, si punctum quæratur ad quod radius curvaturæ sit datæ longitudinis *f*, è centro curvaturæ, ut priùs, invento, radium determinabis esse $\frac{z+4x}{2z}\sqrt{zz+4zx}$, quem pone æqualem *f*. Et factâ reductione emerget $x=-\frac{1}{4}a+\sqrt[3]{\frac{1}{16}aaf}$.

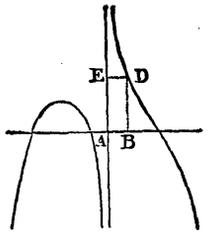
II. Invenire punctum Rectitudinis.

3. Punctum Rectitudinis voco, ad quod radius flexionis infinitus evadit, sive centrum infinitè distans: quale est ad verticem Parabolæ $ax^3=y^4$. Et hoc idem plerumque limes est flexionis contrariæ, cujus determinationem suprà posui. Sed et alia haud inelegans ex hoc Problemate scaturit. Nempe quo longior est radius.

CAPUT VIII. radius flexionis, eo minor evadit angulus DCd (fig. p. 445.) et pariter momentum $\dot{s}f$, adeoque fluxio quantitatis z unà diminuuntur, ita ut per ejus radii infinitatem prorsus evaneſcant. Quære ergo fluxionem $\dot{z}$ et ſuppone nullam eſſe.

4. Quemadmodum ſi limitem flexûs contrarii in Parabola ſecundi generis, cujus ope Carteſius conſtruxit æquationes ſex dimenſionum, determinare oportet. Ad illam curvam æquatio eſt $x^3-bx^2-cdx+bcd+dxy=0$. Et hinc per Prob. I. exit $3\dot{x}x^2-2b\dot{x}x-cd\dot{x}+d\dot{x}y+dx\dot{y}=0$. Quæ, ſcripto 1 pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$, fit $3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$: unde rurſus per Prob. I. exit $6\dot{x}x-2b\dot{x}+dy\dot{x}+d\dot{x}z+dx\dot{z}=0$. Et hæc, ſcripto iterum 1 pro $\dot{x}$, z pro $\dot{y}$, et 0, pro $\dot{z}$, fit $6x-2b+2dz=0$. Jam extermina z, ſcribendo pro dz valorem $2b-3x$ in æquatione $3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$, et proveniet $-cd+dy=0$, ſive $y=c$.

5. Quamobrem ad punctum A erige perpendiculum AE=c. Et per E duc ED parallelam AB, et punctum D, ubi Parabolæ partem convexo-concavam ſecuerit, erit in confinio flexionis contrariæ.



6. Similique methodo alia Rectitudinis puncta, quæ non interjacent partibus contrariè flexis, determinari poſſint. Veluti ſi $x^4-4ax^3+6a^2x^2-b^3y=0$ Curvam definiat, exinde per Prob. I. imprimis producetur $4x^3-12ax^2+12a^2x-b^3z=0$. Et hinc denuò $12x^2-24ax+12a^2-b^3\dot{z}=0$. Ubi ſuppone $\dot{z}=0$, et, factâ reductione, prodibit $x=a$. Quamobrem ſume AB=a et BD, normaliter erecta, curvæ in deſiderato Rectitudinis puncto occurret.

III. Invenire punctum Flexûs Infiniti.

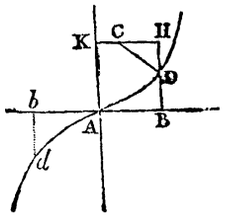
7. Quære radium curvaminis et ſuppone nullum eſſe. Sic ad Parabolam ſecundi generis, æquatione $x^3=ay^2$ definitam, erit radius ille CD=$\frac{4a+9x}{6a}\sqrt{4ax+9x^2}$; qui nullus evadit, cùm ſit $x=0$.

IV. Flexûs Maximi Minimive punctum determinare.

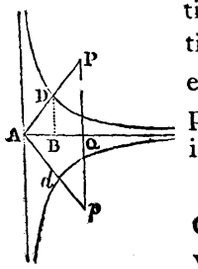
8. Ad hujuſmodi puncta radius curvaturæ aut maximus aut minimus evadit. Quare centrum Curvaturæ, ad id temporis momentum, nec verſus punctum contactûs neque ad contrarias partes movetur, ſed penitus quieſcit. Quæratur itaque fluxio radii CD: vel expeditiùs quæratur fluxio alterutrius rectæ BH vel AK et ſupponantur nulla.

PROBLEMATA DE CURVATURA.

9. Quemadmodum ſi de Parabolâ ſecundi generis, $x^3=a^2y$, quæſtio proponatur: imprimis ad Curvaturæ centrum determinandum invenies DH=$\frac{a^2+9xy}{6x}$, adeoque eſt BH=$\frac{a^2+15xy}{6x}$. Dic autem BH=v, et erit $\frac{a^2}{6x}+\frac{5}{2}y=v$; unde juxta Prob. I. educitur $-\frac{a^2\dot{x}}{6x^2}+\frac{5}{2}\dot{y}=\dot{v}$. Jam verò $\dot{v}$, ipſius BH fluxionem, ſuppone nullam eſſe: et inſuper cùm ex hypotheſi ſit $x^3=a^2y$, et inde per Prob. I. $3\dot{x}x^2=a^2\dot{y}$, poſito $\dot{x}=1$, ſubſtitue $\frac{3x^2}{a^2}$ pro $\dot{y}$, et emerget $45x^4=a^4$. Cape ergo AB=$\sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, et BD normaliter erecta occurret Curvæ in puncto Maximæ Curvaturæ. Vel quod perinde eſt fac AB:BD::$3\sqrt{5}$:1.



10. Ad eundem modum Hyperbola ſecundi generis, per æquationem $xy^2=a^3$ deſignata, maximè flectitur in punctis D, d, quæ determinabis ſumendo AQ=1 in baſi, et erigendo QP=$\sqrt{5}$, eique æqualem Qp ex alterâ parte, et agendo AP et Ap quæ Curvæ occurrent in deſideratis punctis D ac d.



V. Locum centri Curvaminis determinare, ſive Curvam deſcribere in quâ centrum iſtud perpetuò verſatur.

11. Trochoidis centrum Curvaminis in aliâ Trochoide verſari oſtenſum eſt.

12. Et ſic Parabolæ centrum iſtud in aliâ ſecundi generis, quam æquatio $axx=y^3$ definit, Parabolâ verſatur, ut inito calculo facilè conſtabit.

VI. Luce in quamlibet Curvam incidente, invenire Focum, ſive concurſum radiorum, circa quodpiam ejus punctum refractorum.

13. Curvaturam ad iſtud Curvæ punctum quære, et centro radioque curvaturæ Circulum deſcribe; dein quære concurſum radiorum à circulo circa iſtud punctum refractorum. Nam idem erit concurſus refractorum à propoſitâ Curvâ.

CAPUT VIII.

VII. His addi poteſt particularis inventio Curvaturæ ad vertices Curvarum ubi normaliter ſecant baſes. Nempe punctum in quo curvæ perpendiculum cum baſi conveniens, ipſam ultimò ſecuerit, eſt centrum Curvaturæ ejus.

14. Quamobrem habitâ relatione inter baſin x et rectangulam applicatam y, et inde (per Prob. I.) relatione inter fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{y}$, valor $\dot{y}\dot{y}$, ſi in eo ſcribas 1 pro $\dot{x}$, et fingas $y=0$, erit radius curvaturæ.

15. Sic in Ellipſi $ax-\frac{a}{b}xx=yy$, eſt $\frac{a\dot{x}}{2}-\frac{a\dot{x}x}{b}=\dot{y}\dot{y}$; qui valor $\dot{y}\dot{y}$, ſi ſupponas $y=0$, et conſequenter $x=0$, et ſcribas 1 pro $\dot{x}$, evadet $\frac{1}{2}a$ radius curvaturæ. Et ſic ad vertices Hyperbolæ et Parabolæ radius curvaturæ erit etiam dimidium lateris recti.

16. Atque ita ad Conchoiden, æquatione $\frac{b^2c^2}{xx}+\frac{2bcc}{x}+cc-2bx-bb$ $xx=yy$ definitam, valor $\dot{y}\dot{y}$ ope Prob. I. invenietur $-\frac{b^2c^2}{x^3}-\frac{bc^2}{x^2}-b-x$. Qui, ſupponendo $y=0$, et inde $x=c$, vel $-c$, evadet $-\frac{bb}{c}-2b-c$, vel $\frac{bb}{c}-2b+c$, radius curvaturæ. Fac ergo AE : EG :: EG : EC (vid. fig. p. 432) et $Ac:eG::eG:ec$, et habes curvaturæ centra, C et c, ad vertices conjugatarum Conchoidum, E et e.

PROB. VI.

Curvaturæ ad datum Curvæ alicujus punctum Qualitatem determinare.

17. Per *Qualitatem* curvaturæ intelligo formam ejus, quatenus eſt plus vel minùs inæquabilis; ſive quatenus plus vel minùs variatur in proceſſu per diverſas partes curvæ.

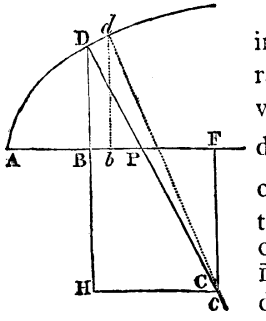
18. Sic interroganti qualis ſit Circuli curvatura, reſponderi poteſt, quòd ſit uniformis ſive invariata; et interroganti qualis ſit curvatura Spiralis, (dd) quæ deſcribitur per motum puncti D, cum acceleratâ celeritate, AD, in rectâ AK, uniformiter circa centrum A gyrante, progredientis ab A, adeo ut recta AD ad arcum BK, dato puncto, K, deſcriptum, rationem habeat numeri ad logarithmum ejus, reſponderi poteſt, quòd ſit uniformiter varia-

(dd) Vide fig. p. 430.

ta;

ta; ſive quòd ſit æquabiliter inæquabilis. Et ſic aliæ Curvæ, in ſingulis earum punctis, *aliquales* pro Curvaturæ variatione denominari poſſunt. DE QUALITATE CURVATURÆ.

19. Quæritur itaque Curvaturæ, circa aliquod Curvæ punctum, inæquabilitas ſive variatio. Quâ de causâ animadvertendum eſt, I. Quòd ad puncta in ſimilibus curvis ſimiliter poſita ſimilis eſt inæquabilitas, ſive variatio curvaturæ. II. Et quòd momenta radiorum curvaturæ ad illa puncta ſunt proportionalia contemporaneis momentis curvarum, et fluxiones fluxionibus. III. Atque adeo quòd ubi fluxiones illæ non ſunt proportionales, diſſimilis erit inæquabilitas curvaturæ. Utpote major erit inæquabilitas, ubi major eſt ratio fluxionis radii curvaturæ ad fluxionem curvæ. Adeoque fluxionum ratio illa non immeritò dici poteſt *Index inæquabilitatis ſive variationis curvaturæ.*



20. Ad Curvæ alicujus, AD, puncta D ac d infinitè parùm diſtantia, ſunto radii curvaturæ DC, ac, dc; et exiſtente Dd momento curvæ erit Cc contemporaneum momentum radii curvaturæ, et $\frac{Cc}{Dd}$ Index inæquabilitatis curvaturæ: nempe tanta dicetur inæquabilitas illa, quantam eſſe indicat rationis illius $\frac{Cc}{Dd}$ quantitas; ſive curvatura dicetur tanto diſſimilior curvaturæ circuli.

21. Demiſſis jam ad quamlibet, AB, occurrentem DC in P, rectangulis applicatis DB ac db, dic AB$=x$; BD$=y$; DP$=t$; DC$=v$; et inde B$b=\dot{x}\times o$. Eritque C$c=\dot{v}\times o$. Et BD : DP = Bb : D$d=\frac{t\dot{x}o}{y}$, ac $\frac{Cc}{Dd}=\frac{\dot{v}y}{t\dot{x}}$, ſive $=\frac{\dot{v}y}{t}$ ſuppoſito $\dot{x}=1$. Quamobrem relatione inter x et y per quamlibet æquationem definitâ, et inde, juxta Prob. IV. et V. invento perpendiculo DP ſive t, et radio curvaturæ v, ejuſque radii fluxione $\dot{v}$ per Prob. I. dabitur Index inæquabilitatis curvaturæ $\frac{\dot{v}y}{t}$.

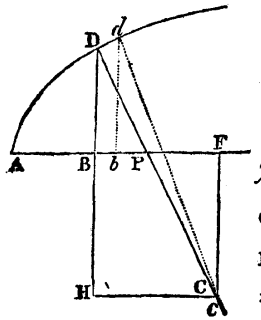
22. EXEMPL. I. Sit $2ax=yy$ æquatio ad Parabolam. Et per Prob. IV. erit BP$=a$, adeoque DP$=\sqrt{aa+yy}=t$. Item per Prob. V. (ee) HC$=a+2x$. Et PB : DP = HC : DC $=\frac{at+2tx}{a}=v$. Jam æ-

(ee) Cap. VII. § 12.

CAPUT VIII. quationes $2ax=yy$, et $aa+yy=tt$, et $\frac{at+2ix}{a}=v$, per Prob. I. dant $2a\dot{x}=2y\dot{y}=2t\dot{t}$: et $\frac{a\dot{t}+2i\dot{x}+2t\dot{x}}{a}=\dot{v}$. Quibus ordinatis, et posito $\dot{x}=1$, orientur $\dot{y}=\frac{a}{y}$; $\dot{t}=\frac{y\dot{y}}{t}=\frac{a}{t}$. Et $\dot{v}=\frac{a\dot{t}+2i\dot{x}+2t}{a}$. Et sic inventis $\dot{y}$, $\dot{t}$, et $\dot{v}$, habebitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ Index inæquabilitatis curvaturæ.

23. Quemadmodum si in numeris definiatur $a=1$, sive $2x=yy$, et $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\sqrt{2x}=1$; $\dot{y}=\frac{a}{y}=1$; $t=\sqrt{aa+yy}=\sqrt{2}$; $\dot{t}=\frac{a}{t}\sqrt{\frac{1}{2}}$; et $\dot{v}=\frac{a\dot{t}+2x\dot{t}+2t}{a}=3\sqrt{2}$ (ff). Adeoque $\frac{\dot{v}y}{t}=3$ indici inæquabilitis.

24. Sin autem definiatur $x=2$, erit $y=2$; $\dot{y}=\frac{1}{2}$; $t=\sqrt{5}$; $\dot{t}=\sqrt{\frac{1}{5}}$; et $\dot{v}=3\sqrt{5}$. Adeoque $\frac{\dot{v}y}{t}=6$ Index inæquabilitatis. Quamobrem inæquabilitas curvaturæ, ad punctum à quo ad axem demissa ordinatim applicata æquatur lateri recto Parabolæ, dupla est ejus ad punctum, à quo demissa ordinatim applicata æquatur dimidio ejusdem lateris recti: hoc est, curvatura in priori casu duplo dissimilior est curvaturæ Circuli, quàm in posteriori.



25. EXEMPL. 2. Sit $2ax-bxx=yy$, et, per Prob. IV. erit $a-bx=$ BP, et inde $aa-2abx+bbxx+yy=tt$: sive $aa-byy+yy=tt$. Item, per Prob. V. erit $DH=y+\frac{y^3-by^3}{aa}$ (gg). Ubi si pro $yy-byy$ substituas $tt-aa$, evadet $DH=\frac{tty}{aa}$. Et est $BD:DP=DH:DC=\frac{t^3}{aa}=v$. Jam, per Prob. I. æquationes $2ax-bxx=yy$; et $aa-byy+yy=tt$; et $\frac{t^3}{aa}=v$; dant $a-bx=y\dot{y}$ (hh); et $y\dot{y}-by\dot{y}=t\dot{t}$; et $\frac{3t^2\dot{t}}{aa}=\dot{v}$. Et sic invento $\dot{v}$ dabitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ Index inæquabilitatis curvaturæ.

26. Sic ad Ellipsin $2x-3xx=yy$, ubi est $a=1$, et $b=3$, si supponatur $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\frac{1}{2}$; $\dot{y}=-1$; $t=\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\dot{t}=\sqrt{2}$; $\dot{v}=3\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3}{2}$ Indici inæquabilitatis curvaturæ. Unde patet curvaturam hujus Ellipsis, ad hîc definitum punctum D, esse duplo minùs inæquabilem

(ff) Nimirum $\frac{a\dot{t}+2x\dot{t}+2t}{a}=t+\dot{t}+2t=2\times\overline{\dot{t}+t}=2\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}=2\frac{\sqrt{1}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=2\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\times 3$.

quabilem (sive duplo similiorem curvaturæ Circuli) quàm curvatura Parabolæ, ad illud ejus punctum, à quo ad axem demissa ordinatim applicata æquatur dimidio ejus lateris recti. DE QUALITATE CURVATURÆ.

27. Si conclusiones in his exemplis concinnare patet, ad Parabolam $2ax=yy$, exibit $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y}{a}$ Index inæquabilitatis. Et ad Ellipsin, $2ax-bxx=yy$, exibit Index $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y-3by}{aa}\times$ BP. Et sic ad Hyperbolam $2ax+bxx=yy$, observatâ analogiâ, erit index $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y+3by}{aa}\times$ BP. Unde patet, quòd ad diversa puncta cujusvis conicæ sectionis, seorsim spectatæ, curvaminis inæquabilitas est ut rectangulum BD × BP. Et quòd ad diversa puncta Parabolæ est ut ordinatim applicata BD.

28. Cæterùm cùm Parabola sit simpliciissima linearum inæquabili curvaturâ flexarum, ejusque curvaturæ inæquabilitas tam levi negotio determinatur, utpote cujus index sit $\frac{6\times\text{ordin. applicat.}}{\text{lat. rect.}}$; aliarum Curvarum curvaturæ ad curvaturam hujus non incommodè referri possunt. Quemadmodum si quæratur qualis sit Ellipseos $2x-3xx=yy$ curvatura, ad illud ejus punctum, quod definitur assumendo $x=\frac{1}{2}$: quoniam index ejus (ut suprà) sit $\frac{3}{2}$, responderi potest, esse similem curvaturæ Parabolæ $6x=yy$, ad illud ejus punctum, inter quod et axem recta $=\frac{3}{2}$ ordinatim applicatur.

29. Sic cùm lineæ Spiralis ADE jam ante descriptæ (ii) fluxio sit ad fluxionem subtensæ AD in datâ quâdam ratione, puta d ad e: versus partes concavas ejus erige ad AD normalem AP $=\frac{e}{\sqrt{dd-ee}}\times$ AD, et erit P centrum curvaturæ, et $\frac{AP}{AD}$, sive $\frac{\sqrt{dd-ee}}{e}$, Index inæquabilitatis ejus. Quare Spiralis hæcce curvaturam habet ubique similiter inæquabilem, ac Parabola $6x=yy$ habet in illo ejus puncto, à quo demittitur ad axem ordinatim applicata $=\frac{\sqrt{dd-ee}}{e}$.

30. Et sic Index inæquabilitatis ad quodvis Trochoidis punctum D (kk) invenietur esse $\frac{AB}{BL}$. Quare curvatura ejus ad idem D tam inæquabilis est, sive tam dissimilis curvaturæ Circuli, quàm

(gg) Cap. VII. § 12.
(hh) Nimirum posito $\dot{x}=1$.
(ii) Vide fig. p. 440.
(kk) Vide fig. p. 449.

curvatura

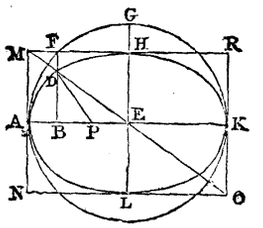
CAPUT VIII. curvatura Parabolæ cujuſvis $ax=yy$, ad illud ejus punctum ubi ordinatim applicata æquatur $\frac{1}{6}a \times \frac{AB}{BL}$.

31. Ex his credo ſenſus Problematis ſatis eluceſcet; quo benè perſpecto, non difficile erit animadvertenti ſeriem rerum ſuprà traditarum plura exempla de proprio ſuppeditare, et hujuſmodi complures alias operandi methodos, prout res exiget, concinnare. Quinetiam cognata Problemata ubi, perplexâ computatione non conteritur et fatigatur, haud majori difficultate tranſiget: Cujuſmodi ſunt,

I. Invenire punctum Curvæ alicujus, ubi vel Nullam, vel Infinitam, vel Maximam, vel Minimam, vel datam quamvis habeat Inæquabilitatem curvaturæ. Sic ad vertices conicarum ſectionum nulla eſt inæquabilitas curvaturæ; ad cuſpidem Trochoidis infinita eſt; et ad puncta Ellipſeos maxima eſt, ubi rectangulum BD × BP fit maximum; hoc eſt, ubi lineæ diagonales rectanguli parallelogrammi circumſcripti Ellipſin ſecant, cujus latera tangunt illam in principalibus verticibus ([ll]).

II. Curvam alicujus definitæ ſpeciei, puta conicam ſectionem, determinare, cujus Curvatura, ad aliquod punctum, et æqualis ſit et ſimilis curvaturæ alterius alicujus Curvæ ad datum punctum ejus.

III. Conicam ſectionem determinare, ad cujus punctum aliquod Curvatura et lineæ tangentis, reſpectu axis, poſitio ſit ſimilis Curvaturæ ac Tangentis poſitioni alterius alicujus Curvæ, ad aſſignatum punctum ejus. Et hujus Problematis uſus eſt, ut vice Ellipſium ſecundi generis, quarum refringendi proprietates Carteſius



([ll]) ELLIPSIS ADL, cujus axes, tranſverſus quidem AK, ſecundus HL, rectangulo MNOR circumſcribatur, cujus utique latera cum axibus ellipſeos erunt parallela. Sit D punctum Ellipſeos, à quo ſi deducatur DB in axem AK ordinatim, aliaque DP ad perpendiculum cum rectâ quæ curvam in D contingat, rectangulum DB × BP maximum ſit. Dico punctum D eſſe ad alterum è diagoniis parallelogrammi MO. Sit enim E centrum ellipſeos. Centro E radio EA ſcribatur circulus, cui axis ellipſeos EH in G occurrat, rectaque BD in F. Sit M angulus ille parallelogrammi circumſcripti, quem quadrans ellipſeos, AF, in quo poſitum eſt punctum D, coërexus ſpectat. Jungaturque EM. Quoniam diagoniæ parallelogrammi MNOR utraque per ellipſeos centrum, E, tranſeant, erit utique EM altera è diagoniis illis. Dico punctum D eſſe

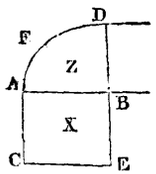
Carteſius in Geometriâ demonſtravit, conicæ ſectiones, idem in refractionibus quàm proximè præſtantes, ſubrogari poſſint. Atque idem de aliis Curvis intellige. DE QUALITATE CURVATURÆ.

CAPUT IX.

PROB. VII.

1. *Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Areæ per finitas Æquationes deſignari poſſunt.*

SIT AB baſis Curvæ, ad cujus initium A erigatur normalis AC = 1, et agatur CE parallela AB, ſit etiam BD rectangula applicata concurrens rectæ CE in E, et Curvæ AD in D. Et concipe has areas ACEB et ADB à rectis BE et BD, per AB delatis, generari. Et



earum incrementa, ſive fluxiones, perpetim erunt ut lineæ deſcribentes BE et BD ([mm]). Quare parallelogrammum ACEB ſive AB × 1, dic x, et Curvæ aream, ADC dic z: et fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{z}$ erunt ut BE et BD, adeoque poſito $\dot{x}=1=BE$, erit $\dot{z}=BD$.

Si jam ad arbitrium aſſumatur æquatio quævis, pro definiendâ relatione z ad x, exinde per Prob. 1. elicietur $\dot{z}$. Atque ita duæ habebuntur æquationes, quarum poſterior Curvam definiet, et prior Aream ejus.

3. EXEMPL. Aſſumatur $xx=z$ et inde per Prob. 1. elicietur $2\dot{x}x=\dot{z}$, ſive $2x=\dot{z}$ ſiquidem eſt $\dot{x}=1$.

Aſſumatur $\frac{x^3}{a}=z$, et inde prodibit $\frac{3x^2}{a}=\dot{z}$, æquatio ad Parabolam.

eſſe ad rectam EM. Namque rectæ BP ad BE ratio data eſt. (Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXIV.) Quare rectanguli BD × BP ad rectangulum BD × BE ratio data. Et propter rationem rectæ BD ad BF datam, rectanguli EB × BD ad rectangulum EB × BF ratio data. Rectangula igitur DB × BP, FB × BE, quorum utrumque ad tertium DB × BE rationem datam habet, hæc datam inter ſe rationem gerent. (Euclid. dat. 8.) Maximo igitur exiſtente illo DB × BP, alterum FB × BE maximum etiam erit. Maximo autem exiſtente rectangulo FB × BE, erunt EB, BF inter ſe æquales. Id enim vulgo notum eſt. Sed æqualium EB, BF ad tertiam BD eadem erit ratio. (El. V. 7.) Et è naturis ellipſeos circulique, quibus axis AK eſt communis, erit FB ad BD, ut EG vel EA ad EH vel AM. Erit igitur EB ad BD ut EA ad AM. (El. V. 11.) Punctum igitur D erit ad rectam EM. (Elem. VI. 32.) Q. E. D.

([mm]) Hoc eſt incrementorum ſimul naſcentium inter ipſa prima ratio, rectarum BE, BD ratio erit. Quæ proinde, *perpetim*, id eſt, in omni rectæ BD ſitu, fluxionum inter ipſas ratio erit.

Aſſumatur

CAPUT IX. Assumatur $ax^3=z^2$, sive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=z$; et emerget $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\dot{z}$, sive $\frac{9}{4}ax=z\dot{z}$, æquatio iterum ad Parabolam.

Assumatur præterea $a^3x=z^2$, sive $a^3x^{\frac{1}{2}}=z$; et elicietur $\frac{1}{2}a^3x^{-\frac{1}{2}}=\dot{z}$, sive $a^3=4x\dot{z}z$.

Item assumatur $\frac{a^3}{x}=z$, sive $a^3x^{-1}=z$, et elicietur $-a^3x^{-2}=\dot{z}$ sive $a^3+\dot{z}xx=0$: ubi negativus valor ipsius $\dot{z}$ tantùm denotat BD capiendam esse ad partes contra BE (nn).

Ad hæc si assumas $c^2a^2+c^2x^2=z^2$ elicies $2c^2x=2z\dot{z}$; et exterminato z, proveniet $\frac{cx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\dot{z}$.

Vel si assumas $\frac{a^2+x^2}{b}\sqrt{a^2+x^2}=z$, dic $\sqrt{a^2+x^2}=v$; et erit $\frac{v^3}{b}=z$, et inde (per Prob. I.) $\frac{3v\dot{v}^2}{b}=\dot{z}$. Item æquatio $a^2+x^2=v^2$ per Prob. I. dat $2x=2v\dot{v}$, cujus ope si extermines $\dot{v}$, fiet $\frac{3vx}{b}=\dot{z}=\frac{3x}{b}\sqrt{a^2+x^2}$.

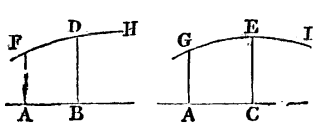
Si denique assumas $8-3xz+\frac{2}{5}z=z^2$, elicies $-3z-3x\dot{z}+\frac{2}{5}\dot{z}=2z\dot{z}$. Quare per assumptam æquationem imprimis quære Aream z; ac deinde Applicatam $\dot{z}$, per elicitam.

Atque ex Areis, qualescunque effingas, semper possis Applicatas determinare.

PROB. VIII.

3. *Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Areæ ad Aream datæ alicujus Curvæ relationem habent per finitas æquationes designabilem.*

Sit FDH data Curva, ac GEI quæsita, et earum Applicatas, DB et EC, concipe super basibus, AB et AC, erectas incedere.



Et Arearum, quas ita transigunt, incrementa (oo), sive fluxiones, erunt ut Applicatæ illæ ductæ in earum velocitates incedendi ; hoc est, in fluxiones basium. Sit ergo AB=x, BD=v, AC=z, ac CE=y. Area AFDB=s, et area AGEC=t; eritque $\dot{x}v:\dot{z}y::\dot{s}:\dot{t}$. Quare si supponatur $\dot{x}=1$ et $v=\dot{s}$, ut suprà, erit $\dot{z}y=\dot{t}$, et inde $\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=y$.

(nn) Immo, eam potius significat Curvæ speciem, cujus area, z, contigua est basi, AB, ultra ordinatam productæ.

(oo) Nascentia utique.

Assumantur itaque duæ quævis æquationes, quarum una definiat relationem Arearum s ac t, et altera relationem Basium x et z, et inde (per Prob. I.) quærantur fluxiones $\dot{t}$ et $\dot{z}$, et substituatur $\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=y$. DE CURVARUM COMPARATIONE.

4. EXEMPL. 1. Data Curva AFD sit Circulus, æquatione $ax-x^2=vv$, designatus; et quærantur aliæ Curvæ, quarum areæ adæquant aream ejus. Ex hypothesi ergo est $s=t$, et inde $\dot{s}=\dot{t}=v$. Et $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{v}{\dot{z}}$. Supereft ut $\dot{z}$ determinetur, assumendo relationem aliquam inter bases x et z.

Veluti si fingas $ax=zz$, erit per Prob. I. $a=2\dot{z}z$: quare substitue $\frac{a}{2z}$ pro $\dot{z}$, et fiet $y=(\frac{v}{\dot{z}})=\frac{2vz}{a}$. Est autem $v=(\sqrt{ax-xx}=)\frac{z}{a}\sqrt{aa-zz}$, adeoque $\frac{2zz}{aa}\sqrt{aa-zz}=y$, æquatio ad Curvam cujus area æquatur areæ Circuli.

Ad eundem modum si fingas $x^2=z$, proveniet $2x=\dot{z}$, et inde $y=(\frac{v}{\dot{z}})=\frac{v}{2x}$; et exterminato v et x, fiet $y=\frac{\sqrt{az^{\frac{1}{2}}-z}}{2z^{\frac{1}{2}}}$.

Vel si fingas $cc=xz$, proveniet $0=z+x\dot{z}$, et inde $-\frac{vx}{z}=y=-\frac{c^3}{z^3}\sqrt{az-cc}$.

Atque ita si fingas $ax+\frac{s}{1}=z$, ope Prob. I. obtinebitur $a+\dot{s}=\dot{z}$ et inde $\frac{v}{a+s}=y=\frac{v}{a+v}$, quæ Curvam Mechanicam designat.

5. EXEMPL. 2. Detur iterum Circulus $ax-x^2=vv$, et quærantur Curvæ, quarum areæ ad aream ejus habeant aliam quamlibet assumptam relationem. Veluti si assumas $cx+s=t$, et præterea fingas $ax=zz$, mediante Prob. I. elicies $c+\dot{s}=\dot{t}$, et $a=2\dot{z}z$. Quare est $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{2cz+2\dot{s}z}{a}$; et substituto $\sqrt{ax-xx}$ pro $\dot{s}$, et $\frac{z^2}{a}$ pro x, fit $y=\frac{2cz}{a}+\frac{2z^2}{a^2}\times\sqrt{a^2-z^2}$.

Quòd si assumas $s-\frac{2v^3}{3a}=t$ et $x=z$, invenies ope Prob. I. $s-\frac{2\dot{v}v^2}{a}=\dot{t}$, et $1=\dot{z}$. Adeoque $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\dot{s}-\frac{2\dot{v}v^2}{a}$, sive $=v-\frac{2\dot{v}v^2}{a}$. Jam verò pro exterminando $\dot{v}$, æquatio $ax-x^2=vv$, per Prob. I. dat $a-2x=2v\dot{v}$; et proinde est $y=\frac{2vx}{a}$, ubi si supprimas v et x, substituendo valores $\sqrt{ax-x^2}$, et z, emerget $y=\frac{2z}{a}\sqrt{az-zz}$.

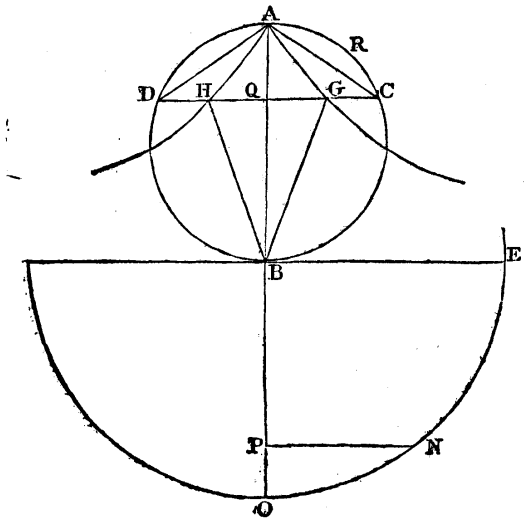
CAPUT IX. Sin assumas $ss=t$, et $x=z^2$, emerget $2\dot{s}s=\dot{t}$ et $1=2\dot{z}z$, atque adeo $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=4\dot{s}sz$; et pro $\dot{s}$ et x substitutis $\sqrt{ax-x^2}$ et zz, fiat $y=4sz^2\sqrt{a-zz}$, æquatio ad Curvam Mechanicam.

6. EXEMPL. 3. Ad eundem modum figuræ, assumptam relationem ad aliam quamvis datam figuram habentes, inveniuntur. Sic datâ Hyperbolâ $cc+xx=vv$, si assumas $s=t$, et $xx=cz$, elicies per Prob. 1. $\dot{s}=\dot{t}$, et $2x=c\dot{z}$, et inde $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{c\dot{s}}{2x}$, et substitutis $\sqrt{cc+x^2}$ pro $\dot{s}$, et $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x proveniet $y=\frac{c}{2z}\sqrt{cz+zz}$.

Atque ita si assumas $xv-s=t$, et $xx=cz$, elicies $v+\dot{v}x-\dot{s}=\dot{t}$, et $2x=c\dot{z}$. Est autem $v=\dot{s}$, et inde $\dot{v}x=\dot{t}$; quare $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{c\dot{v}}{2}$. Jam verò $cc+xx=vv$, ope Prob. 1. dat $x=\dot{v}v$. Adeoque est $y=\frac{cx}{2v}$, et substitutis $\sqrt{cc+xx}$ pro v, et $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x, fit $y=\frac{cz}{2\sqrt{cz+zz}}$.

7. EX-

COMPARATIO (pp) Nempe posito $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}=b$, fiet $\frac{ax^3-x^4}{9}=bb$. Et ex hâc æquatione, ope Prob. 1. elicietur fluxionum æquatio, $\frac{3ax^2-4x^3}{9}\dot{x}=2b\dot{b}$. Hoc est, posito $\dot{x}=1$, $\frac{3ax^2-4x^3}{9}=2b\dot{b}$.



(qq) EA est hujusmodi. Sit Circulus ACBD ad quem pertineat Cissoides GAH, cujus axis sit AB circuli diameter, Asymptota recta BE, quæ circulum ACBD in puncto B contingit. A puncto quovis Q, in axe Cissoidis, AB, pro arbitrio sumendo, eductam puta ad perpendiculum rectam DC; quæ Circulo in punctis, D, C, Cissoidi, in illis, H, G, occurrat. Jungantur BH, BG. Centro BA, radio BE, quæ rectæ AB fit æqualis, scribatur circuli quadrans ENO. Jungatur BC. Acceptâque BP æquali rectæ BC, à puncto P ad perpendiculum educatur PN, quæ arcui quadrantis in N occurrat. Sector cissoidis AHBG spatii circularis OPN triplus erit.

Nam si AB dicatur a, AQ, x; erit QC vel QD recta, quæ symbolo $\sqrt{ax-xx}$ designata est (propter circulum). Et QG vel QH erit recta quæ symbolo $\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$ designatur

7. EXEMPL. 4. Adhæc si detur Cissoides, $\frac{xx}{\sqrt{ax-x^2}}=v$, ad quam rectæ aliæ figuræ sunt inveniendæ, et eâ de causâ, assumatur $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s=t$; finge $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}=b$, et erit $b+\frac{2}{3}s=t$, et inde per Prob. 1. $\dot{b}+\frac{2}{3}\dot{s}=\dot{t}$. Æquatio autem $\frac{ax^3-x^4}{9}=bb$, per Prob. 1. dat $\frac{3ax^2-4x^3}{9}=2b\dot{b}$ (pp); ubi si extermines b, fiet $\dot{b}=\frac{3ax-4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$. Quare cùm præterea sit $\frac{2}{3}\dot{s}=(\frac{2}{3}v)=\frac{4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax-xx}}=\dot{t}$. Porro ad determinandum z et $\dot{z}$, assumatur $\sqrt{aa-ax}=z$, et ope Prob. 1. emerget $-a\dot{x}=2\dot{z}z$, sive $\dot{z}=\frac{-a\dot{x}}{2z}$; quare est $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{-zx}{\sqrt{ax-x^2}}=\sqrt{\frac{zzx}{a-x}}=\sqrt{ax})=\sqrt{aa-zz}$. Quæ æquatio cùm sit ad Circulum, habebitur ratio arearum Circuli et Cissoidis (qq).

DE CURVARUM COMPARATIONE.

Atque ita si assumpsisses $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{1}{3}s=t$, & $x=z$, prodiisset $y=\sqrt{az-zz}$. Æquatio denuò ad Circulum.

8. Haud secus si detur Curva aliqua Mechanica, possunt aliæ ad eam relatæ Curvæ Mechanicæ inveniri; sed ad eliciendum Geometricas convenit, ut è rectis, ab invicem geometricè dependentibus, aliqua pro basi adhibeatur; et ut Area ad parallelogram-

natur (propter cissoidem). Erit igitur rectangulum AQ × QC, sive illi æquale triangulum DAC, spatium symbolo $x\sqrt{ax-xx}$ significatum; et spatium Cissoidis, AHG, illud erit quod symbolum 2s significat. Præterea, propter circulum ACB, recta BC, vel illi æqualis BP, ea erit quam litera z designat. QUE. Erit igitur PN $=y$, & spatium OPN $=t$. Posito enim $\dot{x}=0$, hoc est puncto Q in A translato, ut spatium $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s$ in nihilum abeat, recta BC, vel BP, ipsi BA, vel BO æqualis evaserit, et area OPN in nihilum abierit. Unde areæ illæ, $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s$, et OPN, cùm simul à nihilo generari incipiant, et æqualibus fluxionibus usque crescant, erunt semper inter se æquales. Quare OPN $=t$.

CISSOIDIS CIRCULINIFICAT.

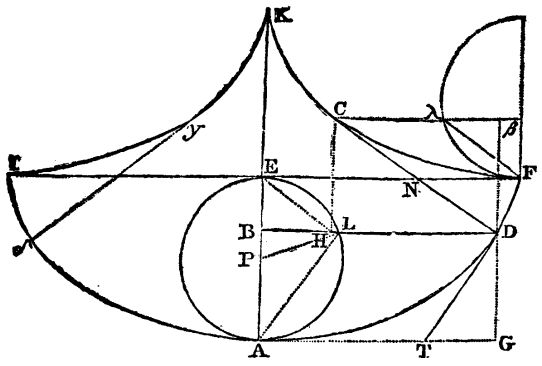
Jam propter æquationem à Newtono positam, $\frac{x}{3}\sqrt{ax-xx}+\frac{2}{3}s=t$, erit $x\sqrt{ax-xx}+2s=3t$.

Hoc est triangulum DAC, spatio HAG auctum triplum erit spatii OPN. Sed propter Cissoidem, BQ: QA = CQ: QG = DC: HG. Triangula igitur DAC, BHG inter se sunt æqualia. Triangulum igitur DAC, spatio HAG auctum, æquale erit triangulo BHG accessione ejusdem spatii HAG aucto; hoc est, sectori Cissoidis BHAG. Quare sector cissoidis BHAG areæ circularis OPN triplus erit. Et hæc est relatio cissoidis circulique, quam calculi auctoris indicant. Quæ quidem longè elegantiùs rationibus geometricis ostendi posset.

2. Posito autem $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{1}{3}s=t$, & $x=z$; efficietur $y=\sqrt{az-zz}$. Sive eam esse Cissoidis Circulique relationem, ut spatium cissoidis, ABG, segmenti ARC triplum sit.

Atque hinc efficitur spatium illud omne, quod asymptotæ BE, et brachiis cissoidis, AG, AH, infinitè protensis adjacet, circuli ACBD, ad quem cissoides pertinet, triplum esse.

CAPUT IX. mum complementalis quæratur, ſupponendo fluxionem ejus valere baſin ductam in fluxionem ordinatim applicatæ.



9. EXEMPL. 5. Sic Trochoide ADF propoſitâ, refero ad baſin AB; et completo parallelogrammo, ABDG, quæro complementalem ſuperficiem ADG, concipiendo deſcriptam eſſe per motum rectæ GD; et proinde fluxionem ejus valere illam GD in celeritatem progrediendi ductam, hoc eſt, $x \times \dot{v}$. Jam cùm AL ſit parallela tangenti DT, erit AB ad BL ut fluxio ejuſdem AB ad fluxionem applicatæ BD, hoc eſt ut 1 ad $\dot{v}$ ([rr]). Quare eſt $\dot{v} = \frac{BL}{AB}$, adeoque $x\dot{v} = BL$. Et proinde area ADG deſcribitur fluxione BL: atque adeo cùm area circularis ABL eâdem fluxione deſcribatur æquales erunt.

Pari ratione ſi concipias ADF eſſe figuram arcuum ſive ſinuum verſorum, hoc eſt, cujus applicata BD æquatur arcui AL: cùm fluxio arcûs AL ſit ad fluxionem baſis AB, ut PL ad BL, hoc eſt $\dot{v} : 1 :: \frac{1}{2}a : \sqrt{ax - x^2}$ erit $\dot{v} = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Adeoque $\dot{v}x$, fluxio areæ ADG, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Quare ſi ad ipſius AB punctum B recta

([rr]) NIMIRUM $DG : GT = \overset{\cdot}{DG} : \overset{\cdot}{GA} = \dot{x} : \dot{v}$ (Introduct. ad Quad. Curv. § 4.) Sed $DG : GT = AB : BL$ (propter triangula ABL, DGT inter ſe ſimilia et æqualia). Quare $\dot{x} : \dot{v} = AB : BL$. Quare $BL \times \dot{x} = AB \times \dot{v} = DG \times \dot{v}$. Areæ igitur ADG, ABL, cùm ſimul à nihilo generari inceperint, inter ſe æquales erunt. (De Quadrat. Curv. Prop. IX.)

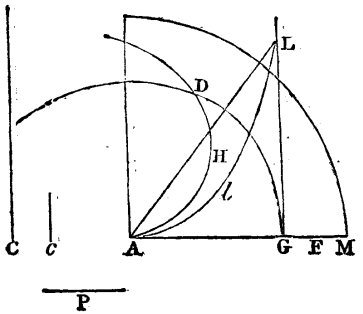
([ſſ]) Hæc et alia hujuſmodi apertiora, credo, fuiſſent, ſi auctor notam $\dot{x}$ retinuiſſet. Illa enim unitatis ſuppoſitio, licet formulis Algebraicis aliquam inducat ſimplicitatis ſpeciem, perſpicuitati tamen ſignificationis Geometricæ adeo nihil confert, ut, me judice, vel potiùs officiat. Neque profecto nihil eſt, quod magnus ille olim Vieta præcipiebat; in formulis Algebraicis condendis, quoties illud ageretur, ut ex illis Geometricæ conſtructiones inferrentur, "*omnino ſervari oportere homogeneorum legem. Cui non attendiſſe cauſam fuiſſe* dicit *multæ caliginis & cæcutiei veterum analyſtarum.*" (Iſagog. Cap. III. De Lege Homogeneorum, & Cap. V. De Legibus Zeteticès.)

Nimirum

recta æqualis $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$, in angulo recto, applicari concipiatur, illa ad Curvam quandam Geometricam terminabitur, cujus area, baſi AB adjacens, æquatur areæ ADG ([ſſ]). DE CURVARUM COMPARATIONE.

10. Et ſic aliis figuris, per arcuum Circuli, Hyperbolæ vel cujuſvis Curvæ ad arcuum iſtorum ſinus rectos vel verſos aut alias quaſvis geometricè determinabiles rectas lineas, in datis angulis applicationem, conſtitutis, æquales Geometricæ Figuræ inveniri poſſunt.

11. Circa Spiralium areas leviſſimum eſt negotium. Utpote centro convolutionis A, radio quovis AG deſcripto arcu DG occurrente AF in G, et ſpirali in D: cùm arcus ille, ad inſtar lineæ ſuper baſi AG incedentis, deſcribit Spiralis aream AHDG, ita ut ejus areæ fluxio ſit ad fluxionem rectanguli $1 \times AG$ ut arc. GD ad 1: ſi rectam GL, arcui iſti æqualem, erigas, illa, ſimiliter incedendo ſuper eâdem AG, deſcribet aream ALG æqualem areæ ſpiralis AHDG; Curvâ A/L exiſtente Geometricâ. Et præterea, ſi ſubtenſa AL ducatur, triangulum ALG $(= \frac{1}{2}AG \times GL = \frac{1}{2}AG \times GD) =$ ſectori AGD ([tt]); adeoque complementalia ſegmenta AL/, et ADH erunt etiam æqualia. Et hæc non tantùm Spirali Archimedeæ, ubi A/L evadit Parabola Apolloniana, ([uu]) ſed et aliis quibuſcunque conveniunt;



Nimirum cum ſit $\dot{v} : \dot{x} = \frac{1}{2}a : \sqrt{ax - x^2}$, erit $\dot{v} = \frac{a\dot{x}}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Ergo $\dot{v}x$, ſive fluxio areæ ADG, æqualis erit huic $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}\dot{x}$. Vel ſi pro $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$, hoc eſt, ſi pro rectâ quæ naſcitur applicando rectangulum ax ad duplam rectam quæ duarum, x, $a-x$, proportione media eſt, ſi pro rectâ, inquam, quæ naſcitur ex hâc applicatione, ſcribatur z, erunt rectangula $\dot{v}x$, $z\dot{x}$ inter ſe æqualia. Si igitur in rectâ quâdam à rectæ AB puncto B, ad perpendiculum eductâ, capiatur longitudo illi z æqualis, terminabitur illa in Curvâ quâdam Geometricâ, cujus area, baſi AB appoſita, areæ ADG æqualis erit. (Geometr. Flux. Prop. II.) Nempe cùm areæ illæ ſimul à nihilo generari inceperint, & æquales ſemper fluxiones habeant.

([tt]) Duci intelligatur recta AD quæ ſculptoris incuriâ omiſſa eſt.

([uu]) SIT AM longitudo illa, quam recta AD, polo A mobilis, perpetim creſcendo adepta ſit, quando

CAPUT IX. niunt; adeo ut omnes eodem negotio in æquales Geometricas converti poſſint.

12. Poſſem plura hujus conſtruendi Problematis ſpecimina afferre; ſed hæc ſufficiant, cùm ſint adeò generalia, ut quicquid hactenus circa Curvarum Areas inventum fuerit, vel, ni fallor, inveniri poſſit, aliquo ſaltem modo complectantur; et ut plurimùm leviori curâ ſine ſolitis ambagibus determinant.

13. Præcipuus autem hujus et præcedentis Problematis uſus eſt, ut aſſumptis conicis ſectionibus, vel quibuſlibet notæ magnitudinis Curvis; aliæ Curvæ, quæ cum his conferri poſſunt, inveſtigentur; et earum definientes æquationes in catalogum ordinatim diſponantur. Et conſtructo ejuſmodi catalogo, cùm Curvæ alicujus Area quæritur, ſi æquatio ejus definiens vel immediatè in catalogo reperiatur, vel in aliam, quam catalogus complectitur, transformari poteſt; exinde cognoſces aream ejus. Quinetiam catalogus ille determinandis Curvarum Longitudinibus, Centris Gravitatum, Solidis per convolutionem generatis, ſolidorum Superficiebus, et cuilibet fluenti quantitati, per analogam fluxionem generatæ, inſervire poteſt.

PROB. IX.

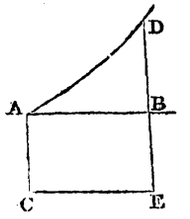
14. *Propoſitæ alicujus Curvæ Aream Determinare.*

PROBLEMATIS reſolutio in eo fundatur, ut quantitatum fluentium relatio ex relatione fluxionum (per Prob. II.) eliciatur.

Et

COGNATIO do ſemel circumacta in locum illum reverſa ſit, unde moveri inceperat. Centro A radio AM ſcribatur Circulus cujus peripheriæ æqualis ſit recta c. Peripheriæ autem circuli, centro A radio AD ſcripti, æqualis ſit recta *c*. E naturâ Helicis Archimedei, recta AD erit ad AM ut angulus MAD, ad quatuor rectos: hoc eſt, ut arcus GD ad circuitum circuli GDO, ſive ut recta GL ad rectam *c*. Sed recta GL ad rectam *c* proportionem habet compoſitam ex proportionibus rectæ GL ad rectam c rectæque c ad *c*. Et recta c ad *c* proportionem habet eam quam AM ad AG. Quare proportio rectæ GL ad rectam *c* compoſita eſt ex proportionibus rectæ GL ad c rectæque AM ad AG. Sed rectanguli GL × AM ad rectangulum C × AG ex eiſdem eſt compoſita proportio. Erit igitur AD, ſive AG, ad AM ut GL × AM ad C × AG. Quadratum igitur ex AG erit ad rectangulum AM × AG ut GL × AM ad C × AG. Eſt autem rectangulum AM × AG ad quadratum ex AM ut C × AG ad C × AM. Erit igitur ex æquo quadratum ex AG ad quadratum ex AM ut GL × AM ad C × AM. Duabus c, AM ſit P proportione tertia. Erit igitur quadratum ex AM rectangulo C × P æquale.

Et



Et imprimis ſi recta BD, cujus motu quæſita area ADB deſcribitur, ſuper baſi AB, poſitione datâ, erectè incedat; concipe, ut ſuprà, parallelogrammum ABEC à BE, unitatem æquante, interea deſcribi. Et poſitâ BE fluxione parallelogrammi, erit BDfluxio areæ quæſitæ. CURVARUM AREÆ.

Dic ergo AB = x, et erit etiam ABEC = $(1 \times x) = x$, et BE = $\dot{x}$: dic inſuper aream ADB = z, et erit BD = $\dot{z}$, ut et = $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, eo quòd ſit $\dot{x} = 1$. Et proin per æquationem definientem BD ſimul definitur fluxionum ratio $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, et exinde (per Prob. II. Caſ. I.) elicietur relatio fluentium quantitatum x et z.

15. EXEMPLA PRIMA.

Ubi BD, *ſive* $\dot{z}$, *valet ſimplicem aliquam quantitatem.*

Detur $\frac{x^2}{a} = \dot{z}$, vel = $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, æquatio nempe ad Parabolam, et (per Prob. II.) emerget $\frac{x^3}{3a} = z$. Eſt ergo $\frac{x^3}{3a}$ ſive (XX) $\frac{1}{3}$ AB × BD = areæ parabolicæ ADB.

Detur $\frac{x^3}{a^2} = \dot{z}$, æquatio ad Parabolam ſecundi generis, et (per Prob. II.) emerget $\frac{x^4}{4a^2} = z$, hoc eſt (YY) $\frac{1}{4}$ AB × BD = areæ ADB.

Detur $\frac{a^3}{x^2} = \dot{z}$, ſive $a^3x^{-2} = \dot{z}$, æquatio ad Hyperbolam ſecundi generis; et emerget $-a^3x^{-1} = z$ (ZZ) ſive $\frac{-a^3}{x} = z$; hoc eſt, AB × BD =

Et quadratum ex AG erit ad rectangulum C × P ut GL × AM ad C × AM, hoc eſt ut GL ad c, ſive ut GL × P ad C × P. Quadratum igitur ex AG rectangulo GL × P æquale erit. Recta autem P magnitudine data eſt, propter duas c, AM datas. Quare punctum L erit ad Parabolam poſitione datam, illam ſcilicet cujus vertex A, axis rectæ GL parallelus, parameter datæ P æqualis. Q.E.D. HELICIS PARABOLÆ QUÆ.

Eſt hæc eſt cognatio illa Helicis Archimedei cum Parabolâ Apollonianâ, cujus jam olim meminere Cavallerius, Torricellius, Barrovius, aliique.

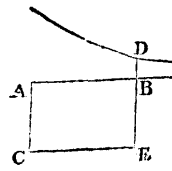
(XX) Sive $\frac{1}{2}x \times \frac{x^2}{a}$, ſive $\frac{1}{3}x \times \dot{x}$, ſive $\frac{1}{3}$ AB × BD.

(YY) $\frac{1}{4}x \times \frac{x^3}{a^2}$, ſive $\frac{1}{4}x \times \dot{z}$, ſive $\frac{1}{4}$ AB × BD.

(ZZ) $-x \times a^3x^{-2}$, ſive $-x \times \dot{z}$, ſive $-$ AB × BD $= z$.

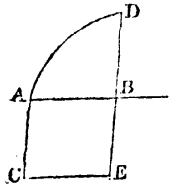
areæ

CAPUT IX.



areæ infinitè longæ HDBII ex alterâ parte applicatæ BD jacentis, ut innuit valor negativus.

Atque ita ſi detur $\frac{a^4}{x^3} = \dot{z}$, emerget $\frac{-a^4}{2x^2} = z$.



Præterea ſit $ax = \dot{z}^2$, ſive $a^1x^1 = \dot{z}$, æquatio iterum ad Parabolam, et proveniet $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = z$, hoc eſt (α), $\frac{2}{3}$ AB × BD = areæ ADB.

Sit $\frac{a^3}{x} = \dot{z}^2$, et fiet $2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} = z$, ſive 2AB × BD = ADB.

Sit $\frac{a^5}{x^3} = \dot{z}^2$, et fiet $-\frac{2a^5}{x^{\frac{1}{2}}} = z$, ſive 2AB × BD = HDBII.

Sit $ax^2 = \dot{z}^3$, et fiet $\frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}} = z$, ſive $\frac{3}{5}$ AB × BD = ADB. Et ſic in aliis.

16. EXEMPLA SECUNDA.

Ubi ż valet plures ejuſmodi connexas quantitates.

Sit $x + \frac{x^2}{a} = \dot{z}$, et fiet $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} = z$.

Sit $a + \frac{a^3}{x^2} = \dot{z}$, et fiet $ax - \frac{a^3}{x} = z$.

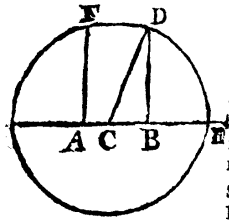
Sit $3x^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \dot{z}$, et fiet $2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{x} - 4x^{\frac{1}{2}} = z$.

17. EXEMPLA TERTIA.

Ubi prævia reductio per Diviſionem requiritur.

Detur $\frac{a^2}{b+x} = \dot{z}$, æquatio ad Hyperbolam Apollonianam; et factâ in

(α) $\frac{2}{3}x \times a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, ſive $\frac{2}{3}x \times \dot{z}$, ſive $\frac{2}{3}$ AB × BD.



(β) NEMPE hoc modo. Rectâ AB poſitione datâ, datoque in illâ puncto A, ſit AB indefinitæ longitudinis, quæ dicatur x. Rectam AB ad perpendiculum infiſtat BD, quæ dicatur $\dot{z}$. Et rectæ AB, BD eo modo inter ſe habeant atque hæc æquatio ſignificat; $\dot{z} = \sqrt{a^2 + bx - x^2}$: deſignantibus, b, a longitudines quaſdam datas. Dico punctum D eſſe ad peripheriam circuli magnitudine et poſitione dati. In rectâ AB ſumatur AC = $\frac{1}{2}b$, et jungatur CD. Sumatur etiam BE = AB. Ita erit EC = $2x - \frac{1}{2}b$. Propter angulum ad B rectum, $CD^2 = CB^2 + BD^2$. Sed $CB^2 = AB^2 - EC \times CA = x^2 - \overline{2x - \frac{1}{2}b} \times \frac{1}{2}b = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$. Et $BD^2 = a^2 + bx - x^2$ (ex hypotheſi) Quare $CB^2 + BD^2$ ſive $CD^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2$.

in infinitum diviſione, evadet $\dot{z} = \frac{a^3}{b} - \frac{a^3x}{b^2} + \frac{a^3x^2}{b^3} - \frac{a^3x^3}{b^4}$ + &c. Et inde (per Prob. II.) ut in ſecundis exemplis, obtinebitur $z = \frac{a^3x}{b} - \frac{a^3x^2}{2b^2} + \frac{a^3x^3}{3b^3} - \frac{a^3x^4}{4b^4}$ &c. CURVARUM AREÆ.

Detur $\frac{1}{1+x^2} = \dot{z}$, et per diviſionem elicietur, $\dot{z} = 1 - x^2 + x^4 - x^6$ &c. Vel etiam $\dot{z} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$ &c. Indeque (per Prob. II.) $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. = AEDB; vel $z = \frac{-1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$ &c. = HDBII.

Detur $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = \dot{z}$, et per diviſionem evadet $\dot{z} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. Et inde (per Prob. II.) $z = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3 + \frac{68}{7}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

18. EXEMPLA QUARTA.

Ubi prævia reductio per Extractionem Radicum requiritur.

Detur $\dot{z} = \sqrt{a^2 + x^2}$, æquatio nempe ad Hyperbolam. Et radice aduſque terminos infinitè multos extractâ, evadet $\dot{z} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Atque inde, ut in præcedentibus, $z = ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.

Ad eundem modum, ſi detur $\dot{z} = \sqrt{aa - xx}$, æquatio ſcilicet ad Circulum, obtinebitur $z = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.

Atque ita ſi detur $\dot{z} = \sqrt{x - x^2}$, æquatio iterum ad Circulum proveniet, extrahendo radicem, $\dot{z} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, adeoque eſt $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^7 - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Sic $\dot{z} = \sqrt{a^2 + bx - x^2}$, æquatio denuò ad Circulum, (γ) per Extractionem Radicis, dat $\dot{z} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{x^2}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}$ &c. Unde (per Prob. II.) elicitur, $z = ax + \frac{bx^2}{4a} - \frac{x^3}{6a} - \frac{b^2x^3}{24a^3}$ &c.

$a^2 + \frac{1}{4}b^2$. Datum igitur CD². Ergo CD magnitudine data. Sed punctum C datum, propter rectam AC magnitudine et poſitione datam, datumque punctum A. Ergo D ad peripheriam circuli poſitione dati. Scribatur circulus ille, cujus peripheriæ recta per A, cum ordinatis BD parallela, in F occurrat. Areæ circulari FABD ſeries Newtoniana $ax + \frac{bx^2}{4a} - \frac{x^3}{6a}$ &c. infinitè producta fit ultimò æqualis.

CAPUT IX.

Et ſic $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}} = z$, per debitam reductionem dat $z = 1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{8}b^2x^4$ &c. unde (per Prob. 1.) $z = x + \frac{1}{6}bx^3 + \frac{3}{40}b^2x^5$ &c.

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}aa$ $\quad + \frac{1}{6}a + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{40}aa$

Sic denique $z = \sqrt[3]{a^3+x^3}$, per extractionem Radicis Cubicæ, dat $z = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8}$ &c. Indeque $z = ax + \frac{x^4}{12a^2} - \frac{x^7}{63a^5} + \frac{x^{10}}{162a^8}$ &c. = ADB. Vel etiam $z = x + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{a^6}{9x^5} + \frac{5a^9}{81x^8}$ &c. Indeque $z = \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3x} + \frac{a^6}{36x^4} - \frac{5a^9}{567x^8}$ &c = HDEH (γ).

19. EXEMPLA QUINTA.

Ubi prævia reductio per æquationis affectæ reſolutionem requiritur.

Si Curva per æquationem $z^3 + a^2z + axz - 2a^3 - x^3 = 0$ definiatur, extrahe radicem, et proveniet $z = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$ (δ) &c. Unde, ut in prioribus, obtinebitur $z = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2}$ &c.

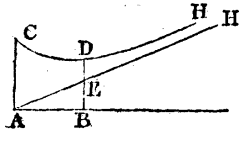
Sin $z^3 - cz^2 - 2x^2z - c^2z + 2x^3 + c^3 = 0$ ſit æquatio ad Curvam, reſolutio dabit triplicem radicem; nempe $z = c + x - \frac{x^2}{4c} + \frac{x^3}{16c^2}$ &c. Et $z = c - x + \frac{3x^2}{4c} - \frac{3x^3}{16c^2}$ &c. Et $z = -c - \frac{x^2}{2c} - \frac{x^3}{2cc} + \frac{x^5}{4c^4}$ &c. Et inde trium correſpondentium arearum valores, $z = cx + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{12c} + \frac{x^4}{64c^2}$ &c.

$z = cx - \frac{1}{2}x + \frac{x^3}{4c} - \frac{3x^4}{64c^2}$ &c.

ac $z = -cx - \frac{x^3}{6c} - \frac{x^4}{8c^2} + \frac{x^6}{24c^4}$ &c.

20. De Curvis Mechanicis hic nihil adjicio, ſiquidem reductio ad formam Geometricam poſt oſtendetur.

21. Cæterùm cùm ſic inventi valores z areis quandoque ad baſis finitam partem AB, quandoque ad partem BH infinitè verſus H productam, et quandoque ad utramque partem ſitis ſecundum

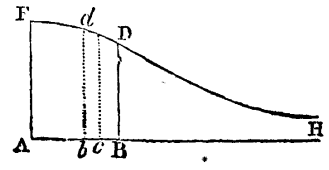


(γ) Sit CDH curva cujus naturam hæc æquatio indicat $\dot{z} = \overline{a^3+x^3}^{\frac{1}{3}}$, deſignante x indefinitam AB, quæ a dato puncto A initium ſumat, $\dot{z}$ vero deſignante BD. In BD capiatur BE = AB = x. Junctaque AE producatur. Recta AE (quæ poſitione data eſt per naturam) curvæ CDH aſymptotos erit; id enim æquatio infinita $\dot{z} = \dot{x} + \frac{a^3}{3x^2}\dot{x} - \frac{a^6}{9x^5}\dot{x}$ &c. ſatis indicat. Seriei autem infinitæ $\frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3x}$ $\frac{a^6}{36x^4}$ &c. nomen primum $\frac{x^2}{2}$ areæ trianguli rectilinearis ABE æquale eſt; nomina omnia reliqua areæ HEDH, quæ ultra ordinatam DE aſymptotæ eſt contigua. Vide Analyſin per Æquat. num. term. inf. Reg. 2. exempla tertia. Series prior $ax + \frac{x^4}{12a^2} - \frac{x^7}{63a^5}$ &c. areæ ACBD menſuram exhibet.

(δ) Vide Cap. III. § 6.

cundum diverſos eorum terminos competant: quo debitus areæ, ad quamlibet baſis portionem ſitæ, valor aſſignetur, area illa ſemper ponenda eſt æqualis differentiæ valorum z partibus baſis, ad initium et finem iſtius areæ terminatis, competentium. CURVARUM AREÆ.

22. E.G. Ad Curvam, quam æquatio $\frac{1}{1+xx} = \dot{z}$ definit, inventum eſt $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Jam ut quantitatem areæ *bd*BD, ad jacentis parti baſis B*b*, determinem, à valore z qui fit ponendo AB = x, aufero eum qui fit ponendo A*b* = x; et (diſtinctionis gratiâ

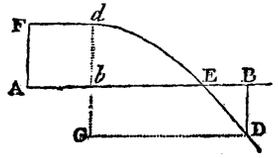


ſcriptâ X majuſculâ pro AB, et x minuſculâ pro A*b*) reſtat $X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$ &c. $- x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$ &c. valor areæ illius *bd*BD. Unde ſi A*b*, ſeu x, ponatur nullum, habebitur tota area AFDB = $X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$ &c.

Ad eandem Curvam inventum eſt etiam $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$ &c. Unde rurſus, juxta præcedentia, erit area illa *bd*DB $= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c. $- \frac{1}{X} + \frac{1}{3X^3} - \frac{1}{5X^5}$ &c. Adeoque ſi AB, ſeu X, ſtatuatur infinitum, area adjacens *bd*H, à parte H ſimiliter infinitè longa, valebit $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c. Siquidem poſterior ſeries, $- \frac{1}{X} + \frac{1}{3X^3} - \frac{1}{5X^5}$ &c. propter infinitatem denominatorum, evaneſcat.

23. Ad Curvam æquatione $a + \frac{a^3}{x^2} = \dot{z}$ deſignatam, inventum eſt $ax - \frac{a^3}{x} = z$. Unde fit $aX - \frac{a^3}{X} - ax + \frac{a^3}{x}$ = areæ *bd*DB. Hæc autem evadit infinita, ſive x fingatur nulla, ſive X infinita; et proinde utraque area AFDB, et *bd*H infinitè magna eſt, ac ſolæ partes intermediæ, qualis *bd*DB, exhiberi poſſunt. Id quod ſemper evenit, ubi baſis x cum in numeratoribus aliquorum tum in denominatoribus aliorum terminorum valoris z reperitur. Ubi verò x in numeratoribus ſolummodo, ut in primo exemplo, re-

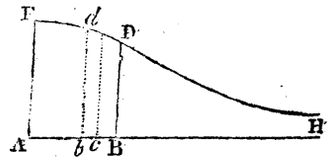
CAPUT IX. peritur; valor z competit areæ ſitæ ad AB, cis parallelè incedentem. Et ubi in denominatoribus tantùm, ut in ſecundo exemplo; valor ille mutatis omnium terminorum ſignis, competit areæ omni, ultra parallelè incedentem, infinitè productæ.



24. Si quando Curva linea ſecat baſin inter puncta b et B, puta in E, vice areæ habebitur arearum ad diverſas baſis partes differentia, bdE−BDE; cui ſi addatur rectangulum BDGb, obtinebitur area dEDG.

25. Præcipuè autem notandum eſt, quòd ubi in valore z terminus aliquis per x unius tantùm dimenſionis dividitur; area illi termino correſpondens pertinet ad Hyperbolam conicam, et proinde per infinitam ſeriem ſeorſim exhibenda eſt: quemadmodum in ſequentibus factum.

Sit $\frac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=z$, æquatio ad Curvam; et per diviſionem, fiet $z=\frac{a^2}{x}-2a+2x-\frac{2x^2}{a}+\frac{2x^3}{a^2}$ &c. Indeque $z=\left|\frac{a^2}{x}\right|-2ax+x^2-\frac{2x^3}{3a}+\frac{x^4}{2a^2}$ &c. Et area bdDB $=\left|\frac{aa}{X}\right|-2aX+X^2-\frac{2X^3}{3a}$ &c. $-\left|\frac{aa}{x}\right|+2ax-x^2+\frac{2x^3}{3a}$ &c. Ubi per notas $\left|\frac{aa}{X}\right|$ et $\left|\frac{aa}{x}\right|$ deſigno areolas terminis $\frac{aa}{X}$ et $\frac{aa}{x}$ competentes.



Jam ut $\left|\frac{aa}{X}\right|$ et $\left|\frac{aa}{x}\right|$ inveſtigetur, fingo Nb ſeu x definitam eſſe; et bB indefinitam, ſeu fluentem, lineam, quamitaque ſi dicam y, erit $\left|\frac{aa}{x+y}\right|$ = areæ uti hyperbolicæ adjacenti bB, nempe $\left|\frac{aa}{X}\right|-\left|\frac{aa}{x}\right|$. Eſt autem, factâ diviſione $\frac{aa}{x+y}=\frac{aa}{x}-\frac{aay}{x^2}+\frac{a^2y^2}{x^3}-\frac{a^2y^3}{x^4}$ &c. Adeoque $\left|\frac{aa}{x+y}\right|$ ſeu $\left|\frac{aa}{X}\right|-\left|\frac{aa}{x}\right|=\frac{aay}{x}-\frac{a^2y^2}{2x^2}+\frac{a^2y^3}{3x^3}-\frac{a^2y^4}{4x^4}$ &c. Et proinde tota area quæſita bdBD= aay

(*) Nimirum ſi curva FDH ſit ipſa Hyperbola Apolloniana.

(†) Vide

$\frac{aay}{x}-\frac{a^2y^2}{2x^2}+\frac{a^2y^3}{3x^3}$ &c. $-2aX+X^2-\frac{2X^3}{3a}$ &c. $+2ax-x^2+\frac{2x^3}{3a}$ &c. DE AREIS HYPERBOLICIS.

26. Ad eundem modum AB, ſeu x, pro definitâ lineâ adhiberi potuit, et ſic prodiiſſet $\left|\frac{aa}{X}\right|-\left|\frac{aa}{x}\right|=\frac{a^2y}{X}+\frac{a^2y^2}{2X^2}+\frac{a^2y^3}{3X^3}+\frac{a^2y^4}{4X^4}$ &c.

27. Quinetiam ſi biſecetur bB in c, et aſſumatur AC eſſe definitæ longitudinis, et cb ac CB indefinitæ: tum dicto AC$=e$, et CB vel CB$=y$, erit $bd=\frac{aa}{e-y}$ (*) $=\frac{aa}{e}+\frac{aay}{e^2}+\frac{a^2y^2}{e^3}+\frac{a^2y^3}{e^4}+\frac{a^2y^4}{e^5}$ &c. Indeque area hyperbolica parti baſis bc adjacens $\frac{a^2y}{e}+\frac{a^2y^2}{2e^2}+\frac{a^2y^3}{3e^3}+\frac{a^2y^4}{4e^4}$ &c. Erit etiam CB$=\frac{aa}{e+y}=\frac{aa}{e}-\frac{a^2y}{e^2}+\frac{a^2y^2}{e^3}-\frac{a^2y^3}{e^4}+\frac{a^2y^4}{e^5}$ &c. Et inde area alteri baſis parti CB adjacens $\frac{a^2y}{e}-\frac{a^2y^2}{2e^2}+\frac{a^2y^3}{3e^3}-\frac{a^2y^4}{4e^4}+\frac{a^2y^5}{5e^5}$ &c. Et harum arearum ſumma $\frac{2a^2y}{e}+\frac{2a^2y^3}{3e^3}+\frac{2a^2y^5}{5e^5}$ &c. valebit $\left|\frac{aa}{X}\right|-\left|\frac{aa}{x}\right|$.

28. Sic æquatione $z^3+z^2+z-x^3=0$, ad Curvam exiſtente, ejus radix erit $z=x-\frac{1}{3}-\frac{2}{9x}+\frac{7}{81x^2}+\frac{14}{729x^4}$ (§) &c. Unde fit $z=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x-\left|\frac{2}{9x}\right|-\frac{7}{81x}-\frac{14}{2187x^3}$ &c. Et area bDB$d=\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{3}X-\left|\frac{2}{9X}\right|-\frac{7}{81X}$ &c. $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\left|\frac{2}{9x}\right|+\frac{7}{81x}$ &c. hoc eſt, $=\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{3}X-\frac{7}{81X}$ &c. $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{7}{81x}$ &c. $-\frac{4y}{9e}-\frac{4y^3}{27e^3}-\frac{4y^5}{35e^5}$ &c.

29. Poteſt autem terminus iſte hyperbolicus commodè devitari, mutando initium baſis; id eſt, augendo vel minuendo eam per datam aliquam quantitatem. Quemadmodum in exemplo priore, ubi $\frac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=z$, erat æquatio ad Curvam; ſi faciam b eſſe initium baſis, et fingens Ab cujuſlibet eſſe determinatæ longitudinis, puta $\frac{1}{2}a$, pro baſis reſiduo, bB, jam ſcribam x: hoc eſt, ſi diminuam baſem per $\frac{1}{2}a$, ſcribendo $x+\frac{1}{2}a$ pro x; evadet $\frac{\frac{1}{4}a^3-a^2x}{\frac{1}{4}a^2+2ax+x^2}=z$, et per diviſionem $z=\frac{2}{3}a-\frac{28}{9}x+\frac{200x^2}{27a}$ &c. Unde fit $z=\frac{2}{3}ax-\frac{14}{9}x^2+\frac{200x^3}{81a}$ &c. = areæ bdDB.

Et ſic pro initio baſis adhibendo aliud, atque aliud ejus punctum, poteſt area cujuſvis Curvæ modis infinitis exprimi.

30. Potuit etiam æquatio $\frac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=z$, in duas ſeries infinitas re-

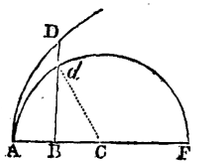
(‡) Vide Cap. III. § 15.

ſolvi,

CAPUT IX. solvi, prodeunte $z = \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$ &c. $- a + x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}$ &c (n). Ubi terminus per x unius tantùm dimensionis divisus non reperitur. Sed hujusmodi series, ubi dimensiones x in unius numeratoribus, et alterius denominatoribus, infinitè ascendunt, minùs aptæ sunt, ex quibus z per computum arithmeticum obtineri possit, cùm in ejus valore numeri pro speciebus substituuntur.

31. Instituenti computum hujusmodi numerosum, postquam valor areæ in speciebus habetur, haud aliquid difficile occurret. Tamen in præcedentem doctrinam penitiùs illustrandam, exemplum unum et alterum subjungere placuit.

QUADRATURA HYPERBOLÆ. 32. Proponatur Hyperbola AD, quam æquatio $z = \sqrt{x + x^2}$ designat, utpote cujus vertex est ad A, et uterque axis æquatur unitati. Et è præcedentibus area ejus ADB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. hoc est, $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$ &c. Quæ series infinitè producitur, multiplicando ultimum terminum continuò per succedaneos terminos hujus progressionis; $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5}x$. $\frac{-1 \cdot 5}{4 \cdot 7}x$. $\frac{-3 \cdot 7}{6 \cdot 9}x$. $\frac{-5 \cdot 9}{8 \cdot 11}x$. $\frac{-7 \cdot 11}{10 \cdot 13}x$. &c. Nempe primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \times \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5}x$ facit $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$, secundum terminum. Hic in $\frac{-1 \cdot 5}{4 \cdot 7}x$ facit $-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ tertium terminum. Hic in $\frac{-3 \cdot 7}{6 \cdot 9}x$ facit $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ quartum terminum. Et sic in infinitum. Sumatur jam AB cujuslibet longitudinis, puta $\frac{1}{4}$, et hunc numerum scribe pro x, ejusque radicem $\frac{1}{2}$ pro $x^{\frac{1}{2}}$; et primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, sive $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$ in decimalem fractionem reductus, evadit 0,08333333 &c. Hic in $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 4}$ facit 0,00625, secundum terminum. Hic in $\frac{-1 \cdot 5}{4 \cdot 7 \cdot 4}$ facit $-0,0002790178$ &c. tertium terminum. Et sic in infinitum. Terminos autem, quos sic gradatim elicio, dispono in duas Tabulas, affirmativos nempe in unam, et negativos in aliam, et addo, ut hîc vides.



(n) Quippe cum fractio $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = \frac{a^3}{x^2 + ax} - \frac{a^2}{a + x}$. Horum autem prior, $\frac{a^3}{x^2 + ax} = \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$ &c. posterior $\frac{a^2}{a + x} = a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a}$ &c. Cap. I. § 4.

Dein

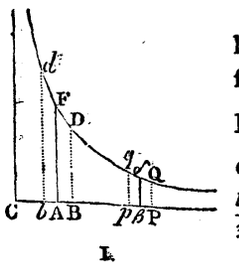
+0,0833333333333333	−0,0002790178571429
625000000000	34679066051
271267361111	834465027
51351693396	26285354
14462891 7	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	−0,0002825719389575
1	+0,0896109885646618
+0,0896109885646618	0,0893284166257043

Dein à summâ affirmativarum aufero summam negativorum, et restat 0,0893284166257043 quantitas areæ hyperbolicæ ADB, quam quærere oportuit.

QUADRATURA CIRCULI. 33. Proponatur jam circulus ADF quam æquatio $\sqrt{x - xx} = z$ LI. designat, hoc est, cujus diameter AF sit unitas, et è præcedentibus area ejus AdB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. In quâ serie cùm termini non differant à terminis seriei suprà exprimentis aream hyperbolicam, nisi in signis + et −, nihil aliud agendum restat, quàm ut eosdem numerales terminos cum aliis signis nectamus, subducendo nempe connexas ambarum præfatarum Tabularum summas 0,0898935605036193 à primo termino duplicato 0,1666666666666666, et residuum 0,0767731061630473, erit areæ circularis portio AdB; posito scilicet AB quadrante diametri. Atque ita videre est, quòd etsi areæ Circuli et Hyperbolæ non conferantur ratione geometricâ, tamen utraque eodem computo arithmetico prodit.

34. Inventâ Circuli portione AdB, exinde tota area facilè eruitur. Nempe radio dc acto duc Bd, seu $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, in BC, seu $\frac{1}{4}$; et facti dimidium $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ seu 0,0541265877365275 valebit triangulum cdB; quod adde areæ AdB, et habebitur sector Acd = 0,1308996938995748; cujus sextuplum 0,7853981633974488 est area tota.

35. Et hinc obiter exit peripheriæ longitudo 3,1415926535897932, dividendo nempe Aream per quadrantem Diametri.



36. Hisce calculum areæ inter Hyperbolam dFD et ejus asymptoton CA interceptæ subnectimus. Sit C centrum hyperbolæ, et posità CA = a, AF = b, et AB = Ab = x; erit $\frac{ab}{a + x}$ = BD et $\frac{ab}{a - x} = bd$, et inde area AFDB = $bx - \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} - \frac{bx^4}{4a^3}$ &c. Et area Afdb = $bx + \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} +$

CAPUT IX. $\frac{bx^4}{4a^3}$ &c. Ac earum ſumma bdDB$=2bx+\frac{2bx^3}{3a^2}+\frac{2bx^5}{5a^4}+\frac{2bx^7}{7a^6}$ &c.

Ponamus jam CA=AF=1, et Ab vel AB$=\frac{1}{10}$, exiſtente cb=0,9, et CB=1,1; et ſubſtituendo hos numeros pro a, b, et x, primus ſeriei terminus evadet 0,2; ſecundus 0,00066666 &c. tertius 0,000004; et ſic deinceps, ut vides in hâc Tabulâ.

0,200000000000000	
6666666666666	
40000000000	
2857:4286	
2222222	
18182	
154	
1	
Summa 0,200670695462151 11	= areæ bdDB

37. Quòd ſi areæ hujus partes Ad et AD ſeorſim deſiderentur; ſubduc minorem DA è majori dA et reſtabit, $\frac{bx^2}{a}+\frac{bx^4}{2a^3}+\frac{bx^6}{3a^5}+\frac{bx^8}{4a^7}$ &c. Ubi ſi 1 ſcribatur pro a et b, ac $\frac{1}{10}$ pro x, termini, in decimales redacti, conficient ſequentem Tabulam.

0,010000000000000	
500000000000	
3333333333	
25000000	
200000	
1667	
14	
Summa 0,010050335853501 4	= Ad − AD

38. Jam ſi hæc arearum differentia addatur et auferatur ſummæ earum priùs inventæ, aggregati dimidium 0,105360515657826 3 erit major area Ad; et reſidui dimidium 0,095310179804324 8, minor AD.

39. Per eaſdem Tabulas obtinentur etiam areæ illæ AD et Ad, ubi AB et Ab ponantur $\frac{1}{100}$, ſive CB=1,01 et cb=0,99 ſi modò numeri in depreſſiora loca debitè transferantur, ut hîc

0,020000000000000	
6666666667	
400000	
28	
Summa 0,020006666706669 5	= bdDB

0,000100000000000	
50000000	
3333	
Summa 0,000100005000333 3	= Ad − AD

videre eſt. $\frac{1}{2}$ aggregat 0,010050335853501 4=Ad; $\frac{1}{2}$ reſid. 0,009950330853168 1=AD.

40. Et ſic poſitis AB et Ab $\frac{1}{1000}$, ſeu CB=1,001, et cb=0,999, obtinebitur Ad=0,001000500333583 5, et AD=0,000999500-3330835.

41. Ad eundem modum ſi ſtantibus CA et AF=1, ponantur AB et Ab=0,2, vel =0,02, vel =0,002, eliciantur areæ illæ.

Ad=0,223143551314209 7 et AD=0,182321556793954 6
vel Ad=0,020202707317519 4 et AD=0,019802627296179 7
vel Ad=0,002002 et AD=0,001

42. Ex

42. Ex inventis hiſce areis jam facile eſt alias, per ſolam additionem et ſubductionem, derivare. Utpote cùm ſit $\frac{1,2}{0,8}$ in $\frac{1,2}{0,9}=2$, arearum pertinentium ad rationes $\frac{1,2}{0,8}$ et $\frac{1,2}{0,9}$ (hoc eſt, inſiſtentium partibus baſis 1,2−0,8 et 1,2−0,9) ſumma, 0,693147180559453, erit area AF$\delta\beta$, exiſtente cβ=2, ut notum eſt. Dein cùm ſit $\frac{1,2}{0,8}$ in 2 = 3, arearum pertinentium ad $\frac{1,2}{0,8}$, et 2 ſumma, 1,098612288668109 7, erit area AF$\delta\beta$, exiſtente cβ=3. Pariter cùm ſit $\frac{2 \text{ in } 2}{0,8}=5$, et 2 in 5=10, per debitam arearum additionem obtinebitur 1,609437912434100 4=AF$\delta\beta$, exiſtente cβ=5; et 2,302585092994045 7=AF$\delta\beta$, exiſtente cβ=10. Atque ita cùm ſit 10×10=100, et 10 in 100=1000, et $\sqrt{5}$ in 10 in 0,98=7, et 10 in 1,1=11, et $\frac{1000\times 1,001}{7\times 11}=13$, et $\frac{100\times 1,02}{2\times 3}=17$, et $\frac{1000\times 0,999}{3\times 3\times 3}$ =37, et 100×1,01=101, et $\frac{1000\times 1,002}{2\times 3}=167$, et $\frac{1000\times 0,998}{2}=499$, patet aream AF$\beta\delta$ per arearum ſuprà inventarum compoſitionem inveniri poſſe, exiſtente cβ=100; 1000; 7; aut alio quolibet è recenſitis numeris, et ſtante AB=BF=1. Id quod ſignificare volui, ut methodus conſtruendo Logarithmum canoni aptiſſima pateret; quæ areas Hyperbolicas (ex quibus logarithmi facilè deducantur) tot numeris primis correſpondentes, quaſi per binas tantùm haud moleſtas operationes determinat. Cæterùm cùm canon iſte ex hoc fonte præ cæteris feliciter depromi videatur, quid ſi conſtructionem ejus, coronidis loco, perſtringam.

AREÆ HYPERBOLICÆ.

43. IMPRIMIS itaque aſſumpto 0 pro logarithmo numeri 1, et 1 pro logarithmo numeri 10, ut ſolet, inveſtigandi ſunt logarithmi primorum numerorum, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, dividendo inventas areas hyperbolicas per 2,302585092994045 7, aream nempe correſpondentem numero 10: vel, quod eodem recidit, multiplicando per ejus reciprocum 0,434294481903251 8. Sic enim *e. g.* Si 0,693147180 &c. area correſpondens numero 2, multiplicetur per 0,434294 &c. facit 0,301029995663981 2. Logarithmum numeri 2.

LOGARITHMOTECHNIA.

44. Deinde logarithmi numerorum omnium in canone, qui ex horum multiplicatione fiunt, indagandi ſunt per additionem

CAPUT IX. eorum logarithmorum, ut ſolet: et loca vacua poſtmodum interpolanda, ope hujus Theorematis.

45. Sit n numerus logarithmo donandus, x differentia inter illum et proximos numeros hinc inde æqualiter diſtantes, quorum logarithmi habentur; ac d, ſemiſſis differentiæ logarithmorum: et quæſitus logarithmus numeri n obtinebitur addendo $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c. logarithmo minoris numeri. Nam ſi numeri exponantur per cp, $c\beta$, & CP, et exiſtente rectangulo CBD vel $c\beta\delta = 1$ ut ſuprà, ac erectis parallelè incedentibus pq & PQ: ſi n ſcribatur pro $c\beta$, et x pro βp vel βP, erit area $pqQP$, ſive $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$ &c. ad aream $pq\delta\beta$, ſive $\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3}$ &c. ut differentia inter logarithmos extremorum numerorum, ſive $2d$, ad differentiam inter logarithmos minoris et medii: quæ proinde erit $\frac{\frac{dx}{n} + \frac{dx^2}{2n^2} + \frac{dx^3}{3n^3}}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^5}{5n}}$ &c. hoc eſt, factâ diviſione, $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ (b).

46. Hujus autem ſeriei duos primos terminos, $d + \frac{dx}{2n}$, pro canone conſtruendo ſat accuratos exiſtimo, etiamſi aduſque quatuordecim, vel forte quindecim figurarum loca logarithmi producerentur: ſi modò numerus logarithmo donandus non ſit minor quàm 1000 (i). Quod ſanè calculum haud difficilem præbere poteſt, ſiquidem x ut plurimùm erit unitas, vel numerus binarius. Non opus eſt tamen omnia loca beneficio hujus regulæ interpolare. Nam logarithmi numerorum, qui prodeunt è multiplicatione

LOGARITHMOTECHNIA. (b) $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3} + \frac{7dx^5}{180n^5} + \frac{181dx^7}{7560n^7} + \frac{1903dx^9}{113400n^9}$ &c.

(i) ALIAM ſeriem acutiſſimus Halleius excogitavit, quæ in exiguis etiam numeris mirâ celeritate ad metam properat.

Sit $a + e$ numerus cujus logarithmus exquirendus eſt, datis numerorum a, $a + 2e$ logarithmis. Propter datos numerorum, a, $a + 2e$, logarithmos, data erit ſummæ illorum ſemiſſis, quæ dicatur A. Erit A numeri $\sqrt{a^2 + 2ae}$ logarithmus. Numerus autem $a + e$, numero $\sqrt{a^2 + 2ae}$ major erit; duorum ſcilicet, a, $a + 2e$, arithmeticè medius eorundem geometricè medio. Logarithmus igitur numeri $a + e$ logarithmo dato A major erit. Differentia ſit z. Erit igitur $A + z$ numeri $a + e$ logarithmus, cujus datâ parte A, ſi pars reliqua z inventa fuerit, logarithmus totus definitus erit. Eſt autem z logarithmus rationis numeri $\sqrt{a^2 + 2ae}$ ad numerum $a + e$. Ponatur $y^2 = 2 \times a \times \overline{a + 2e} + e^2 = 2a^2 + 4ae + e^2$. Erit igitur $y^2 - e^2 = 2 \times \overline{a^2 + 2ae}$; et $y^2 + e^2 = 2 \times a + \overline{a + 2e}$. Ergo $\sqrt{y^2 - e^2} : \sqrt{y^2 + e^2} = \sqrt{a^2 + 2ae} : a + e$. Quare z logarithmus erit rationis quam $\sqrt{y^2 - e^2}$ habet ad $\sqrt{y^2 + e^2}$, et $2z$ logarithmus rationis quam $y^2 - e^2$ habet ad $y^2 + e^2$. Jam ſit CA $= y^2$, AB et $Ab = e^2$.

tiplicatione vel diviſione numeri noviſſimè tranſacti, per numeros, quorum logarithmi priùs habebantur, obtineri poſſunt per additionem vel ſubductionem eorum logarithmorum. Quinetiam per differentias logarithmorum, et illarum differentiarum ſecundas differentias tertiaſque, ſi opus eſt, loca vacua expeditiùs impleri poſſunt, adhibitâ tantùm prædictâ regulâ, ubi ad obtinendum illas differentias continuatio aliquot locorum plenorum deſideratur.

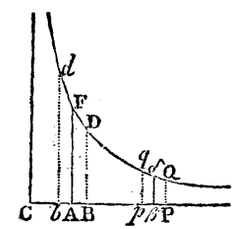
47. Eâdem methodo regulæ pro intercalatione logarithmorum inveniri poſſunt, ubi è tribus numeris dantur logarithmi minoris & medii, vel medii et majoris; idque licet numeri non ſint in arithmeticâ progreſſione.

48. Imo et hujus methodi veſtigiis inſiſtendo, regulæ, pro conſtruendis artificialium ſinuum et tangentium Tabulis, ſine adminiculo naturalium, haud difficulter depromi poſſunt. Sed hæc in tranſitu.

CAPUT DECIMUM.

1. HACTENUS Curvarum, quæ per æquationes minùs ſimplices definiuntur, quadraturam, mediante reductione in æquationes ex infinitè multis terminis ſimplicibus conſtantes, oſtendimus. Cùm vero ejuſmodi Curvæ per finitas etiam æquationes nonnunquam quadrari poſſint, vel ſaltem comparari cum aliis Curvis, quarum areæ quodammodo pro cognitis habeantur, quales ſunt ſectiones conicæ: ea propter ſequentes duos Theo-

$Ab = e^2$. Et rectangulo CA × AF exiſtente $= 1$, erit AF $= \frac{1}{y^2}$. Tum hiſce e^2, y^2, $\frac{1}{y^2}$ pro illis x, TEC a, b in ſeriem Newtonianam ſubſtitutis, efficietur area BD$d\delta = \frac{2e^2}{y^2} + \frac{2e^6}{3y^6} + \frac{2e^{10}}{5y^{10}} + \frac{2e^{14}}{7y^{14}}$ &c. Et hanc ſeriem ſi in modulum ſyſtematis Briggiani multiplicaveris, logarithmum effeceris Briggianum rationis ejus quam $c\delta$ habet ad cB, ſive ejus quam $y^2 - e^2$ habet ad $y^2 + e^2$, hoc eſt logarithmum $2z$.



Ergo $2z = \frac{2e^2}{y^2} + \frac{2e^6}{3y^6} + \frac{2e^{10}}{5y^{10}} + \frac{2e^{14}}{7y^{14}}$ &c. × 0,4342944 &c.

Ergo $z = \frac{e^2}{y^2} + \frac{e^6}{3y^6} + \frac{e^{10}}{5y^{10}} + \frac{e^{14}}{7y^{14}}$ &c. × 0,43429 &c.

Et logarithmus numeri $a + e = 0{,}43429$ &c. $\times \overline{\frac{e^2}{y^2} + \frac{e^6}{3y^6} + \frac{e^{10}}{5y^{10}}}$ &c. $\Big| + A$.

Vel ſi e ſit unitas, quod plerumque uſuveniet, logarithmus numeri $a + 1 = 0{,}43429$ &c. $\times \overline{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{3y^6} + \frac{1}{5y^{10}}}$ &c. $\Big| + A$. Q. E. I.

CAPUT X. rematum Catalogos, in illum uſum ope Propoſitionis VII[a] et VIII[a], ut promiſimus, conſtructos, jam viſum eſt adjungere.

2. Horum prior exhibet areas Curvarum quæ quadrari poſſunt; et poſterior complectitur Curvas, quarum areas cum areis conicarum ſectionum conferre liceat.

3. In utriſque literæ Latinæ *d*, *e*, *f*, *g* et *h*, datas quaſvis quantitates, *x* et *z* baſes curvarum, *v* et *y* parallelè incedentes, et *s* ac *t* areas, ut ſuprà denotant. Græcæ autem, η et θ, quantitati *z* ſuffixæ denotant ejuſdem *z* dimenſionum numerum, ſive ſit integer vel fractus, ſive affirmativus aut negativus. Veluti ſi ſit $\eta = 3$, erit $z^{\eta} = z^{3}$, $z^{2\eta} = z^{6}$, $z^{-\eta} = z^{-3}$ ſive $\frac{1}{z}$, $z^{\eta+1} = z^{4}$, et $z^{\eta-1} = z^{2}$.

4. Inſuper in valoribus arearum, abbreviandi causâ, ſcribitur R vice radicalis illius $\sqrt{e+fz^{\eta}}$, vel $\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$, quâ valor incedentis *y* afficitur.

Catalogus

Catalogus Curvarum aliquot ad Rectilineas Figuras relatarum, ope Prob. VII. *Conſtructus.*

CURVARUM ORD.			AREARUM VALORES
I		$dz^{\eta-1} = y$	$\frac{d}{\eta} z^{\eta} = t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+ffz^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{ne^{2}+nefz^{\eta}} = s$, vel $\frac{-d}{nef+nffz^{\eta}} = t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3\eta f} \mathrm{R}^{3} = t$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^{2}} d\mathrm{R}^{3} = t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{16e^{2}-24efz^{\eta}+30f^{2}z^{2\eta}}{105\eta f^{3}} d\mathrm{R}^{3} = t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^{3}+144e^{2}fz^{\eta}-180ef^{2}z^{2\eta}+210f^{3}z^{3\eta}}{945\eta f^{4}} d\mathrm{R}^{3} = t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{\eta f} \mathrm{R} = t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^{2}} d\mathrm{R} = t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16e^{2}-8efz^{\eta}+6f^{2}z^{2\eta}}{15\eta f^{3}} d\mathrm{R} = t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^{3}+48e^{2}fz^{\eta}-36ef^{2}z^{2\eta}+30f^{3}z^{3\eta}}{105\eta f^{4}} d\mathrm{R} = t$

5. His adjiciantur ſequentia magis Generalia Theoremata, quibus via ad altiora ſternitur.

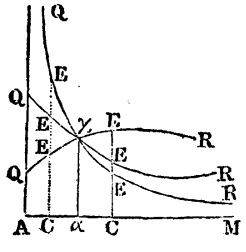
Ponatur *p* pro $\sqrt{h+iz^{\eta}}$

6. Poſſint

CAPUT X.

V	1	$2\theta ez^{\theta-1} + 2\theta f z^{\theta+\eta-1} \times \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^\eta} + 3\eta f = y$	$z^\theta{}_R{}^3 = t$
	2	$2\theta ez^{\theta-1} + 2\theta f z^{\theta+\eta-1} + 2\theta g z^{\zeta+2\eta-1}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} = y$; $+3\eta f \quad +6\eta g$	$z^\theta{}_R{}^3 = t$
VI	1	$\frac{2\theta ez^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times fz^{\zeta+\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^\eta}} = y$	$z^\theta{}_R = t$
	2	$\frac{2\theta ez^{\zeta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times fz^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times gz^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} = y$	$z^\theta{}_R = t$
VII	1	$\frac{2\theta ez^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times fz^{\theta+\eta-1}}{e+fz^\eta \text{ in } 2\sqrt{e+fz^\eta}} = y$	$\frac{z^\theta}{R} = t$
	2	$\frac{2\theta ez^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times fz^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times gz^{\theta+2\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta} \text{ in } 2\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} = y$	$\frac{z^\theta}{R} = t$
VIII	1	$\frac{2\theta ez^{\zeta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times fz^{\zeta+\eta-1}}{ee+2efz^\eta+f^2z^{2\eta}} = 2y$	$\frac{z^\theta}{R^2}$ (sive $\frac{z^\theta}{e+fz^\eta}$) $= t$
	2	$\frac{2\theta ez^{\theta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times fz^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+4\eta} \times gz^{\theta+2\eta-1}}{e^2+2efz^\eta+f^2+2eg \times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}} = 2y$	$\frac{z^\theta}{R^2}$ (sive $\frac{z^\theta}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}$) $= t$
IX		$2\theta ebz^{\theta-1} + \overline{2\theta+3\eta} \times fb\, z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+4\eta} \times fiz^{\theta+2\eta-1}$ in $\frac{\sqrt{e+fz^\eta}}{2\sqrt{b+iz^\eta}} = y$; $+\overline{2\theta+\eta} \times ei$	$z^\theta{}_R{}^3 p = t$
X		$2\theta ebz^{\theta-1} + \overline{2\theta+3\eta} fb\, z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times fiz^{\theta+2\eta-1}$ in $\frac{\sqrt{e+fz^\eta}}{b+iz^\eta \text{ in } 2\sqrt{b+iz^\eta}} = y$; $+\overline{2\theta+\eta} \times ei$	$\frac{z^\theta{}_R{}^3}{p} = t$

6. Poſſint et hujuſmodi alia adjici, ſed ad alterius generis Curvas, quæ cum conicis ſectionibus conferri poſſunt, jam tranſeo.



Et in hoc Catalogo expoſitam curvam lineâ QEχR deſignatam habes, cujus baſis principium ſit A; baſis AC, parallelè incedens CE, areæ principium αχ, et area deſcripta αχεc. Ejus autem areæ principium ſive terminus initialis (quod ut plurimùm vel baſis principio A inſiſtit, vel ad infinitam diſtantiam recedit) invenitur, quærendo baſis longitudinem, Aα, cùm areæ valor nullus eſt, et erigendo normalem αχ.

(*) Colſoni veriſſimam emendationem ſequor. Codices MSS. habent 868, Vitioſè. Confer Librum de Quad. Curv. not. (°°).

7. A

7. Ad eundem modum conicam ſectionem habes deſignatam lineâ SDG, (*Vide Librum, De Quad. Curv. Tab.* II. *fig.* 1, 2, 3, 4.) cujus centrum ſit A, vertex a, rectangulæ ſemidiametri Aa & AP: baſis principium A, vel a, vel α; baſis AB, vel aB, vel αB: ordinatim applicata BD, tangens TD occurrens AB in T, ſubtenſa aD, et inſcriptum vel aſcriptum rectangulum ABDO. DE TABULA CURVARUM SECUNDA.

8. Itaque retentis jam antè definitis literis, erit AC=z, CE=y, αχEC=t, AB vel aB=x, BD=v & ABDP vel aGDB=ſ. Et præterea, ſiquando ad alicujus areæ determinationem duæ conicæ ſectiones requiruntur, poſterioris area dicetur σ, baſis ξ, et parallelè incedens ϒ.

Catalogus Curvarum aliquot ad Conicas ſectiones relatarum ope Prob. VIII. *conſtructus.* Vide Tab. II. Libri de Quad. Curv.

9. Antequam Theoremata, in his Curvarum claſſibus tradita, exemplis illuſtrare pergam, juvabit obſervare

I. Quòd cùm quantitatum *d*, *e*, *f*, *g*, *h* & *i* ſigna omnia, in æquationibus curvas definientibus, affirmativa poſuerim; ſiquando contingant eſſe negativa, in ſubſequentibus baſis et incedentis lineæ ſectionis conicæ, necnon quæſitæ areæ valoribus mutari debent.

II. Numeralium η & θ, ubi negativæ ſunt, ſigna in arearum valoribus ſunt etiam mutanda. Quinetiam ipſarum ſignis mutatis Theoremata novam formam induere poſſunt. Sic in quartâ formâ poſterioris Catalogi, Theorema tertium, ſigno ipſius η mutato, evadit $\frac{d}{z^{-2\eta+1}\sqrt{e+fz^{-\eta}}} = y$, $\frac{1}{z^{-\eta}} = x$ &c. hoc eſt $\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{ez^{2\eta}+fz^\eta}} = y$, $z^\eta = x$, $\sqrt{fx+ex^2} = v$, $\frac{d}{\eta e}$ in $2xv-3ſ = t$, & ſic in aliis.

III. Cujuſque ordinis (ſi ſecundum prioris Catalogi demas) ſeries utrinque in infinitum continuari poteſt. Scilicet in tertii quartique ordinis ſeriebus prioris Catalogi, numeri coefficientes initialium terminorum, 2, −4, 16, −96, 768 (*) &c. generantur multiplicando numeros −2, −4, −6, −8, −10, &c. in ſe continuò (*); et ſubſequentium terminorum coefficientes ex initialibus in tertio ordine derivantur, multiplicando gradatim per $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}, -\frac{11}{10}$, &c. vel in quarto ordine, multiplicando per $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{10}$, &c. Denominatorum verò coefficientes, 1, 3, 15, 105, &c.

(*) Vide Librum de Quadratura Curvarum, not. (mm).

ex

CAPUT X. ex ductu numerorum 1, 3, 5, 7, 9, &c. in se gradatim oriuntur.

In secundo autem Catalogo series ordinum, Primi, Secundi, Quinti, Sexti, Noni & Decimi, ope solius divisionis infinitè producuntur. Sic habito $\frac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$, si divisionem ad usque convenientem periodum instituas, orietur E. g. $\frac{d}{f}z^{3\eta-1}-\frac{de}{ff}z^{2\eta-1}+\frac{de^2}{f^3}z^{\eta-1}-\frac{\frac{de^3}{f^4}z^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$. Priores tres termini sunt primi ordinis prioris Catalogi, et quartus primæ speciei hujus ordinis (*). Unde constat aream valere $\frac{d}{3\eta f}z^{3\eta}-\frac{de}{2\eta f^2}z^{2\eta}+\frac{de^2}{\eta f^3}z^{\eta}-\frac{e^3}{\eta f^3}s$; posità nempe s areâ sectionis conicæ, cujus basis x sit $=z^{\eta}$, et incedens applicata $v=\frac{d}{e+fs}$.

Tertii autem septimique ordinis series, ope duorum Theorematum in quinto ordine prioris Catalogi, per debitam additionem vel subductionem infinitè producuntur; ut et quarti octavique series, ope theorematum in subsequenti sexto ordine; ac undecimi series ope theorematis in decimo ordine ejusdem prioris catalogi. E. G. Si præfati tertii ordinis series ultrà producenda sit, finge $\theta=-4\eta$; & quinti ordinis alterius Catalogi Theorema primum evadet, $-8\eta ez^{-4\eta-1}-5\eta fz^{-3\eta-1}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{R^3}{z^{4\eta}}=t$. Est autem juxta quartum theorema hujus producendæ seriei, (scripto $-\frac{5\eta f}{2}$ pro d) $-\frac{5\eta f}{2}z^{-3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{1}{z^{\eta}}=x$. $\sqrt{fx+ex^2}=v$. & $\frac{10fv^3-15f^2s}{12e}=t$. Quare subductis prioribus ipsarum y, ac t, valoribus, restabunt $4\eta ez^{-4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. et $\frac{10fv^3-15f^2s}{12e}-\frac{R^3}{z^{4\eta}}=t$. Ipsisque in $\frac{d}{4ne}$ ductis, et pro $\frac{R^3}{z^{4\eta}}$ scripto si placet xv^3, emerget quintum producendæ seriei Theorema, $\frac{d}{z^{4\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{1}{z^{\eta}}=x$. $\sqrt{fx+exx}=v$, & $\frac{10dfv^3-15df^2s}{48ne^2}-\frac{dxv^3}{4ne}=t$.

IV. Horum ordinum nonnulli ex aliis etiam possunt aliter derivari: utpote in posteriori Catalogo Tertius, Quartus, Septimus et Undecimus, ab Octavo, ac Nonus à Decimo. Adeo ut omisisse potuissem, nisi quòd usui esse possint, quamvis non prorsus necessarii. Nonnullos tamen ordines omisi, quos à primo et secundo,

(*) Intellige, primæ speciei primi ordinis posterioris Catalogi.

cundo, nec non à nono decimoque derivasse potuissem; utpote qui denominatoribus magis compositis afficiuntur, & proinde vix ulli unquam usui esse possunt. DE TABULA CURVARUM SECUNDA.

V. Si Curvæ alicujus definiens æquatio ex pluribus æquationibus diversorum ordinum, vel diversarum specierum ejusdem ordinis componatur, ejus aream ex areis correspondentibus componere oportet: cavendo tamen ut signis + et − rectè connectantur. Nam parallelè incedentes parallelè incedentibus, et areæ correspondentes correspondentibus areis non semper sunt simul addendæ, vel simul subducendæ; sed aliquando harum summa, et illarum differentia sumenda est pro novâ lineâ incedente, et areâ correspondente, constituendâ. Et hoc fieri debet, cùm constituentes areæ positæ sunt ad diversam partem parallele incedentis. Ut autem hoc incommodum cauti promptiùs devitare possint, singulis arearum valoribus propria signa, etiamsi nonnunquam negativa, ut fit in posterioris Catalogi tertio quartoque ordine præfixi.

VI. De arearum signis observandum est præterea, quod $+s$ vel denotat aream conicæ sectionis, basi adjacentem, esse reliquis quantitatibus in valore t addendam (vide Exem. 1. sequ.) vel aream ex alterâ parte ordinatim applicatæ esse subducendam. Et contrà, $-s$ ambiguè denotat aream, basi adjacentem, esse subducendam, vel aream, ex alterâ parte ordinatim applicatæ, esse addendam; prout commodum videbitur. Deinde valor ipsius t, si affirmativus prodierit, designat aream Curvæ propositæ adjacentem basi ejus; et contrà, si fuerit negativus, designat aream ex alterâ parte ordinatim applicatæ.

VII. Cæterùm ut area illa certiùs definiatur, prospiciendum est de limitibus ejus. Et quidem limitum ad basin, parallelè incedentem, et Curvæ perimetrum, nulla potest esse incertitudo: sed limes initialis, sive principium à quo incipit descriptio ejus, varias positiones obtinet. In sequentibus exemplis vel est ad initium basis, vel ad infinitam distantiam; vel in concursu Curvæ cum basi ejus. Sed potest alibi locari. Et ubicunque sit, invenies quærendo illam basis longitudinem, ad quam valor ipsius t evadit nullus; et parallelè incedentem erigendo. Nam erecta illa linea erit limes quæsitus.

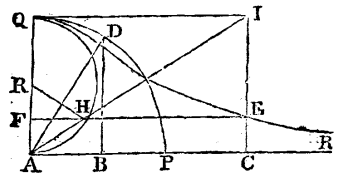
(*) Vide Analysin per Æquationes numero terminorum infinitas, C. II. § 6.

CAPUT X. VIII. Siqua pars areæ infra baſin poſita ſit, t deſignabit differentiam ejus et partis ſupra baſin.

IX. Siquando dimenſiones terminorum in valoribus x, v & t nimis altæ vel nimis depreſſæ obvenerint, ad juſtum gradum liceat reducere, dividendo vel multiplicando toties per datam quamvis quantitatem, quæ vices unitatis gerere fingitur, quoties dimenſiones illæ ſint juſto altiores, vel depreſſiores.

X. Præter præcedentes Catalogos poſſunt etiam catalogi Curvarum ad alias curvas, in ſuo genere ſimpliciſſimas, (ut ad $\sqrt{e+fx^3}=v$, vel ad $x\sqrt{e+fx^3}=v$, vel ad $\sqrt{e+fx^4}=v$, &c.) relatarum conſtrui; eò ut Curvæ cujuſlibet propoſitæ aream ex origine ſimpliciſſimâ poſſimus derivare, et cum quibus Curvis affinitatem habeat cognoſcere. Cæterùm præcedentes tandem Exemplis aliquot illuſtremus.

10. EXEMPL. 1. Sit QER ejuſmodi Conchoidalis, ut, ſemicirculo QHA deſcripto, et ad diametrum AQ erecto AC perpendiculo; ſi compleatur parallelogrammum QACI, et agatur diagonalis AI ſemicirculo occurrens in H, et ab H demittatur ad IC normalis HE, punctum E incidat in Curvam; et quæratur area ACEQ.



Dic itaque AQ=a, AC=z, CE=y; et propter continuè proportionales AI, AQ, AH, EC, erit EC, ſive $y=\frac{a^3}{a^2+z^2}$.

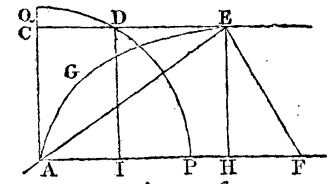
Jam ut hæc induat formam æquationum in Catalogis, finge $\eta=2$, & pro z^2 in denominatore ſcribe z^η, ac $a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}$ pro a^3, ſive a^3z^{1-1}, in numeratore, et emerget $y=\frac{a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}}{a^2+z^\eta}$, æquatio primæ ſpeciei ſecundi ordinis poſterioris Catalogi; collatiſque terminis, fiet $d=a^3$, $e=a^2$ & $f=1$. Adeoque $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+z^2}}=x$, $\sqrt{a^3-a^2x^2}=v$, & $xv-2s=t$.

Ut autem inventi valores x & v, ad juſtum dimenſionum numerum reducantur: ſelige datam quamlibet quantitatem, velut a; per quam, tanquam unitatem, ſemel multiplicetur a^3 in valore x, et in valore v dividatur a^3 ſemel, et a^2x^2 bis; et hoc pacto obtinebis $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+x^2}}=x$, $\sqrt{a^2-x^2}=v$, & $xv-2s=t$. Quorum conſtructio eſt ejuſmodi. Centro

Centro A intervallo AQ, deſcribe quadrantem circuli QDP. In AC cape AB=AH. Erige normalem BD quadranti occurrentem in D, et age AD; et ſectoris ADP duplum æquabitur areæ quæſitæ ACEQ. Eſt enim $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+z^2}}$ (=$\sqrt{AQ\times EC}$ = HA) = AB ſive x: et $\sqrt{a^2-x^2}$ (=$\sqrt{AD^2-AB^2}$) = BD ſive v; et $xv-2s=2\Delta ADB-2ABDQ$; vel etiam $=2\Delta ADB+2BDP$, hoc eſt, vel=$-2QAD$, vel=$2DAP$: quorum valorum affirmativus 2DAP competit areæ ACEQ citra EC, et negativus 2QAD competit areæ RECR, ultra EC, in infinitum protenſæ. Curvæ cum Conicis Comparandæ.

11. Solutiones problematum ſic inventæ nonnunquam concinnari poſſunt. Sic in hoc caſu, actâ RH circuli QHA ſemidiametro, propter arcus QH, DP æquales, erit ſector QRH dimidium ſectoris DAP; atque adeo pars quarta ſuperficiei ACEQ. Nam ſi à puncto D demittatur perpendicularis ad AQ erit iſta ſinus anguli QAD in quadrante QDP. Erit etiam, ob parallelas DB, QA, æqualis AB=AH chordæ ang. (ξ) Conſequenter arcus QD in quadrante = arcui AH in ſemicirculo: unde conſtat arcus QH, DP æquales eſſe.

12. EXEMPL. 2. Sit AGE Curva, quam normæ, AEF, punctum angulare, E, deſcribit, dum crurum alterum, AE, interminatum continuò tranſit per datum punctum A, & alterum EF, datæ longitudinis, ſuper rectâ AF, poſitione datâ, prolabitur. Demitte EH ad AF normalem, et comple parallelogrammum AHEC, ac dictis AC=z, CE=y, & EF=a, propter HF, HE, HA continuò proportionales, erit HA ſive $y=\frac{z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

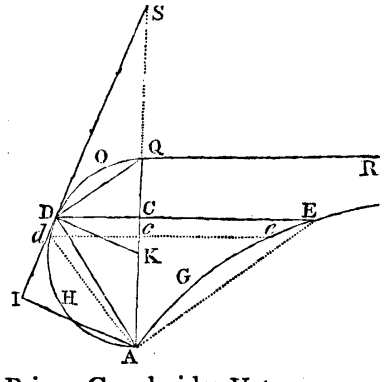


Jam ut innoteſcat area AGEC, finge $z^2=z^\eta$ ſive $2=\eta$; et inde fiet $\frac{z^{\frac{3}{2}\eta-1}}{\sqrt{a^2-z^\eta}}=y$. Ubi cùm z ſit fractæ dimenſionis in numeratore, deprime valorem y, dividendo per $z^{\frac{1}{2}\eta}$, et fiet $\frac{z^{\eta-1}}{\sqrt{a^2z^{-\eta}-1}}=y$: æquatio ſecundæ ſpeciei quarti ordinis poſterioris Catalogi. Ac terminis collatis evadet $d=1$, $e=-1$ et $f=a^2$. Adeoque z^2 ($=\frac{1}{z^{-\eta}}$) $=x^2$. $\sqrt{a^2-x^2}=v$, & $s-xv=t$. Cùm itaque x et z æquentur, et ſit $\sqrt{a^2-x^2}=v$, æquatio ad circulum cujus diameter eſt a: centro A intervallo a, ſive EF, deſcribatur circulus PDQ, cui occurrat CE

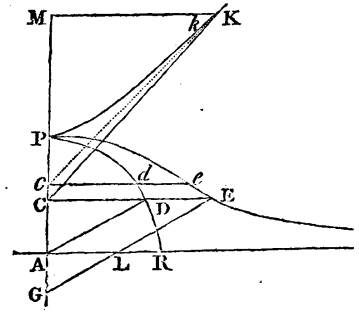
(ξ) Anguli QHA in ſemicirculo QHA.

CAPUT X. in D, et compleatur parallelogrammum ACDI; eritque AC=z, CD=v & area quæsita AGEC (=$s-xv$=ACDP−ACDI) = IDP.

13. EXEMPL. 3. Sit AGE Cissois, ad circulum ADQ, diametro AQ descriptum, pertinens. Agatur DCE diametro normalis, et Curvis occurrens in D et E. Et nominatis AC=z, CE=y, & AQ=a; propter CD, CA, CE continuè proportionales, erit CE, sive $y=\frac{zz}{\sqrt{az-zz}}$; ac dividendo per z, fit $y=\frac{z}{\sqrt{az^{-1}-1}}$. Est itaque $z^{-1}=z^n$ sive $-1=\eta$; et inde $y=\frac{z^{-2\eta-1}}{\sqrt{az^n-1}}$; æquatio tertiæ speciei quarti ordinis posterioris Catalogi. Collatisque terminis fit $d=1$, $e=-1$, & $f=a$. Adeoque $z\,(=\frac{1}{z^n})=x$, $\sqrt{ax-xx}=v$, & $3s-2xv=t$. Quare est AC = x, CD=v, et inde AEDH=s, adeoque 3ACDH−4ΔADC ($=3s-2xv=t$) = areæ cissoidali ACEGA. Vel quod perinde est, 3 segment. ADHA = areæ ADEGA, sive 4 segment. ADHA=areæ AHDEGA.



14. EXEMPL. 4. Esto PE Prima Conchoides Veterum, centro G, asymptoto AL, et intervallo LE descripta; age GAP axem ejus, ac demitte EC ordinatim applicatam: dictisque AC=z, CE=y, GA=b &, AP=c; propter proportionales AC:CE−AL::GC:CE, erit CE sive $y=\frac{b+z}{z}\sqrt{c^2-z^2}$(π). Jam ut ejus area PEC exhinc inveniatur, partes applicatæ CE, seorsim considerandæ sunt. Et quidem si illa CE ita dividatur in D, ut fit CD=$\sqrt{c^2-z^2}$, ac DE=$\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ erit CD ordinatim applicata circuli centro A et intervallo AP descripti: adeoque pars areæ PDC innotescet, et restabit pars altera DPED invenienda.



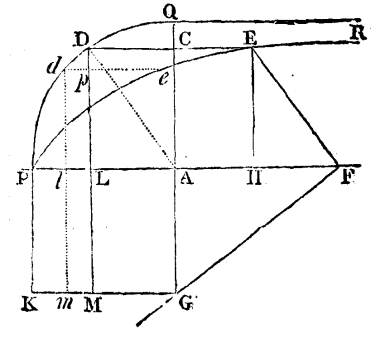
Cùm

(π) Propter EL : EG = AC : CG, erit EG = $\frac{EL\times CG}{AC}$, hoc est EC = $c\times\frac{b+z}{z}$. Quare EG²=

Cùm itaque DE (pars applicatæ quâcum describitur) valeat $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ suppone $2=\eta$, et evadet $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^n}=$DE, æquatio primæ speciei tertii ordinis posterioris Catalogi. Collatisque terminis fiet $d=b$, $e=c^2$ et $f=-1$. Atque adeo $\frac{1}{z}=\sqrt{\frac{1}{z^n}}=x$; $\sqrt{-1+c^2x^2}=v$, et $2bc^2s-\frac{bv^3}{x}=t$. His inventis, redige ad justum dimensionum numerum, multiplicando terminos nimis depressos, ac dividendo nimis altos per datam quamvis quantitatem. Id quod si fiet per c, prodibit $\frac{c^2}{z}=x$, $\sqrt{-c^2+x^2}=v$, et $\frac{2bs}{c}-\frac{bv^3}{cx}=t$. Et horum constructio est ejusmodi. CURVÆ CUM CONICIS COMPARANDÆ.

Centro A, vertice principali P & parametro 2AP Hyperbolam PK describe: deinde à puncto C age rectam CK quæ tangat hyperbolam in K, et erit ut AP ad 2AG ita area CKPC ad aream quæsitam DPED.

15. EXEMPL. 5. Normâ GFE ita circa polum G rotante, ut ejus punctum angulare F super rectâ AF, positione datâ, continuò prolabatur: concipe Curvam PE à puncto quolibet E in crure EF sito describi. Jam ut inveniatur hujus area, demitte GA & EH ad rectam AF perpendiculares; et, completo parallelogrammo AHEC, dic AC=z, CE=y, AG=b & EF=c: et propter proportionales HF:EH:: AG:AF, erit AF=$\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$: adeoque CE, sive $y=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}-\sqrt{c^2-z^2}$. Cùm autem $\sqrt{c^2-z^2}$ sit ordinatim applicata circuli, semidiametro c descripti circa centrum A, describe talem circulum PDQ; eique CE producta occurrat in D, et erit DE=$\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$; cujus æquationis operestat area PDEP, vel DERQ, determinanda. Supponatur ergo $\eta=2$ et evadet DE=$\frac{bz^{n-1}}{\sqrt{c^2-z^n}}$ æquatio primæ speciei quarti ordinis prioris Catalogi: et collatis terminis fiet $b=d$, $c^2=e$ & $-1=f$; adeoque $b\sqrt{c^2-z^2}\,(=-b\text{R})=t$.



EG²=$\left|\frac{b+z}{z}\right|^2\times c^2$. Sed CG²=$\left|\frac{b+z}{z}\right|^2\times z^2$. Quare CE²=EG²−CG²=$\left|\frac{b+z}{z}\right|^2\times c^2-z^2$. Et CE=$\frac{b+z}{z}\sqrt{c^2-z^2}$.

Jam

CAPUT X. Jam cùm valor t negativus exiſtat, et inde area per t deſignata jaceat ultra lineam DF, ut ejus limes initialis inveniatur, quære illam ipſius z longitudinem, quâ t evadit nulla: et invenies eſſe c. Quare produc AC ad Q ut ſit AQ$=c$, et erige applicatam QR, et erit DQRED area illa cujus valor jam inventus eſt $=-b\sqrt{c^2-z^2}$. Quòd ſi quantitatem areæ PDE juxta baſin AC poſitæ, et cum eâ coextenſæ deſideres, poſſis, ignoto limite QR, ſic determinare. A valore quem t ad baſis longitudinem AC ſortita eſt, ſubduc valorem ejus ad initium baſis hoc eſt, $a-b\sqrt{c^2-z^2}$ ſubduc$-bc$, et proveniet quantitas $bc-b\sqrt{c^2-z^2}$ quam quæris. Comple ergo parallelogrammum PAGK, et ad AP demitte normalem DM, quæ cum GK occurrat in M, et erit parallelogrammum PMNK æquale areæ PDE.

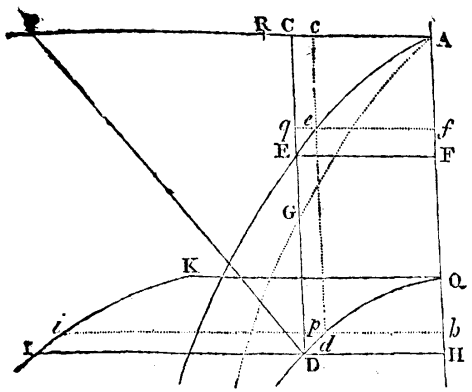
16. Siquando æquatio Curvam aliquam definiens non reperiatur in Catalogis, neque ad ſimpliciores terminos ope diviſionis, vel alio pacto, reduci poſſit, transformanda eſt in alias affinium Curvarum æquationes, pro more in Prob. VIII. oſtenſo; donec tandem obvenerit aliqua, cujus area ex catalogis innoteſcat. Et conatibus omnimodò inſtitutis, ſi nulla talis obveniat, certum eſt Curvam propoſitam neque cum figuris rectilineis, neque cum conicis ſectionibus, comparari poſſe.

17. AD eundem modum cùm de Curvis Mechanicis agitur, illæ imprimis transformandæ ſunt in æquales Geometricas, prout in eodem Prob. VIII. oſtenſum fuit, ac deinde Geometricarum areæ ex Catalogis eliciendæ. Cujus rei accipe ſequens exemplum.

18. EXEMPL. 6. Proponatur figura arcuum cujuſvis conicæ ſectionis ad ſinus rectos applicatorum determinanda. Utpote ſit A centrum conicæ ſectionis, AQ et AR ſemiaxes, CD ordinatim applicata ad axem AR, et PD perpendiculum ad punctum D. Sit etiam AE dicta figura mechanica occurrens CD in E, et ex ejus naturâ præfinita erit CE$=$ arcui QD. Quæritur itaque area AEC, vel parallelogrammo ACEF completo, quæritur exceſſus AEF. In quem finem ſit a latus rectum conicæ ſectionis et b latus tranſverſum ſive 2AQ; ſit etiam AC$=z$ & CD$=y$ eritque $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}=y$

(o) Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXIV.

æquatio



æquatio ad conicam ſectionem, ut notum eſt. Erit etiam PC $=\frac{b}{a}z$ (o) et inde PD $=\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^2}$. CURVÆ CUM CONICIS COMPARANDÆ.

Atque adeo cùm ſit fluxio arcûs QD ad fluxionem baſis AC, ut PD ad CD, ſi fluxio baſis ſupponatur 1, erit arcûs illius QD ſive applicatæ CE fluxio $=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}}$. Hanc duc in FE, ſive z, et proveniet $z\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{aa}z^2}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}}$ fluxio areæ AEF; adeoque ſi in applicatâ DC capias CG $=z\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}}$, area AGC, quam illa CG ſuper AC incedens deſcribet, æquabitur areæ AEF; et erit AG Curva Geometrica. Quæritur itaque area AGC. Et in hunc finem ſubſtituatur z^n pro z^2 in æquatione noviſſimâ, et evadet $z^{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^n}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^n}}$ $=$ CG; æquatio ſecundæ ſpeciei undecimi ordinis poſterioris Catalogi. Et collatis utrobique terminis, fit $d=1$, $e=\frac{1}{4}b^2=g$, $f=\frac{b^2+ab}{a^2}$, et $b=\frac{b}{a}$; adeoque $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{v}{a}z^2}=x$ et $\sqrt{-\frac{b^2}{4a}+\frac{a+b}{a}x^2}=v$ & $\frac{a}{b}s=t$. Hoc eſt CD$=x$, DP$=v$ et $\frac{a}{b}s=t$. Et inventorum talis eſt conſtructio.

Ad Q erige QK perpendicularem et æqualem QA, et huic parallelam, æqualem verò DP, age HI per punctum D. Et linea KI, in quam HI terminatur, erit ſectio conica, areaque comprehenſa HIKQ ad aream quæſitam AEF, ut b ad a, ſive ut PC ad AC.

19. Nota

CAPUT X.

19. Nota ſi mutes ſignum *b*, ſectio conica cujus arcui recta CG æquatur, evadet Ellipſis: et præterea ſi fiat $b=-a$ Ellipſis evadet Circulus: in quo caſu linea KI fit recta parallela AQ.

20. POSTQUAM Curvæ alicujus area ſic inventa fuerit, de conſtructionis demonſtratione conſulendum eſt, quâcum ſine computo algebraico, quantùm liceat, contextâ ornetur Theorema, ut evadat publicæ notitiæ dignum (ε). Eſtque demonſtrandi methodus generalis, quam ſequentibus exemplis illuſtrare conabor.

21. *Demonſtratio conſtructionis in Exemplo* 5.

In arcu PQ (vide fig. p. 493.) ſume punctum *d* proximum ad D, et age *dc* ac *dm* parallelas DE ac DM, et occurrentes DM et AP in *p* et *l*: et erit DE*ed* momentum areæ PDEP, et LM*ml* momentum areæ LMKP. Age ſemidiametrum AD, et concipe indefinitè exiguum arcum D*d* eſſe inſtar rectæ, et triangula D*pd* et ALD erunt ſimilia: adeoque D*p* : *pd* : : AL : LD. Eſt autem HF : EH : : AG : AF; hoc eſt, AL : LD : : ML, DE. Et proinde D*p* : *pd* : : ML : DE. Quare D*p* × DE = *pd* × ML. Hoc eſt, momentum DE*ed* æquale momento LM*ml*. Et cùm hoc de quibuſlibet contemporaneis momentis indeterminatè demonſtratur, patet ſingula momenta areæ DPEP eſſe ſingulis contemporaneis momentis areæ PLMK æqualia, adeoque totas areas ex iſtis momentis compoſitas æquari. Q. E. D.

22. *Demonſtratio conſtructionis in Exemplo* 3.

Eſto DE*ed* momentum ſuperficiei AHDE ac A*d*DA contem-

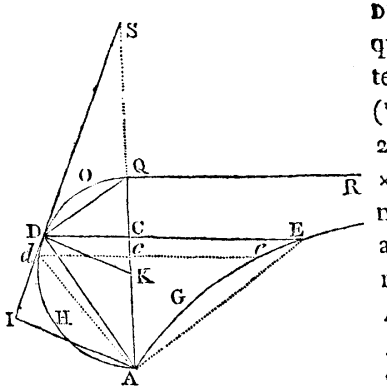
(ε) " Et verò non omnis effectio geometrica concinna eſt. Singula enim Problemata ſuas habent elegantias: verùm ea cæteris antefertur, quæ compoſitionem operis non ex æqualitate, ſed æqualitatem ex compoſitione arguit, et demonſtrat; ipſa verò ſe ipſam. Itaque artifex Geometra, quanquam analyticam edoctus, illud diſſimulat; & tanquam de opere efficiendo cogitans profert ſuum ſyntheticum problema, et explicat: deinde, Logiſtis auxiliaturus, de proportione vel æqualitate in eo agnitâ concipit et demonſtrat Theorema." *Vieta. Iſagog. Cap.* VII. *De Officio Rheticés.*

" Monemus tantùm Viros Clariſſimos, ut, ſepoſitis tantiſper ſpeciebus analyſeos, problemata Geometrica viâ Euclideanâ et Apollonianâ exequantur; ne pereat paulatim elegantia et conſtruendi et demonſtrandi, cui præcipuè operam dediſſe Veteres innuunt ſatis et Data Euclidis, & alii à Pappo enumerati Analyſeos Libri." *Fermatius in Epiſtolâ quâdam ſuâ ad Kenelm Digby*, quæ ſeptima eſt à quadrageſimâ in Commercio Epiſtolico Wallisii.

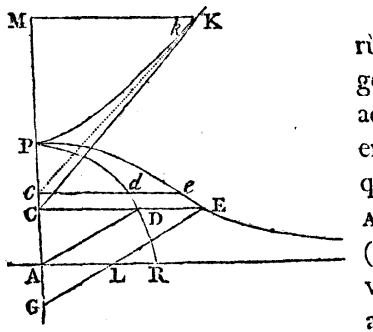
poraneum

poraneum momentum ſegmenti ADH. Age ſemidiametrum DK, et *de* occurrat AQ in *c*, erit-que cc : D*d* : : DC : DK (σ). Præterea eſt DC : QA (2DK) : : AC : DE (τ). Adeoque cc : 2D*d* (: : DC : 2DK) : : AC : DE; et cc × DE = 2D*d* × AC. Jam ad peripheriæ momentum D*d* rectâ productum, i.e. ad tangentem circuli, demitte normalem AI, et erit AI æqualis AC (υ), adeoque 2D*d* × AC = 2D*d* × AI = 4 triangulis AD*d*. Quare 4 triang. AD*d* = cc × DE = momento DE*ed*. Spatii ergo AHDE ſingula momenta ſunt quadrupla momentorum contemporaneorum ſegmenti ADH, et proinde totum illud ſpatium quadruplum totius ſegmenti. Q. E. D.

DE COMPONENDIS DEMONSTRATIONIBUS.



23. *Demonſtratio conſtructionis in Exemplo* 4.



Parallelam CE age indefinitè parùm diſtantem *cc*, et hyperbolæ tangentem c*k*, ac demitte KM rectam ad AP: et ex Hyperbolæ naturâ erit AC : AP : : AP : AM (φ). Adeoque AG^q : GL^q (: : AC^q : LE^q ſive AP^q) : : AP^q : AM^q : ac diviſim AG^q : AL^q (DE^q) : : AP^q : AM^q − AP^q (MK^q) et inverſè (χ) AG : AP : : DE : MK. Eſt autem areola DE*ed* ad triangulum

(σ) Excerpt. ex Epiſt. not. (κ) § 5.

(τ) E naturâ Ciſſoideos QC : CD = CA : CE. Quare QA : DE = QC : CD. (El. v. 12.) Sed propter angulos QDA, QCD rectos, QC : CD = CD : CA. Quare QA : DE = CD : AC. (El. v. 11.) Permutando QA : CD = DE : AC. Invertendo CD : QA = AC : DE.

(υ) Namque angulus ADI angulo AQD æqualis eſt (El. III. 32.) et angulus AQD æqualis eſt angulo ADC. (El. VI. 8.) Anguli igitur ADI, ADC inter ſe æquales ſunt. Sed et ACD, AID inter ſe æquales. Rectus enim uterque. Et triangulis ADC, AID latus AD eſt commune. Quare et reliqua eorum latera ſingulatim inter ſe æqualia erunt; eà nempe lege, ut æqualia latera æqualibus angulis obverſa ſint. (El. I. 26.) Quare latera AI, AC inter ſe æqualia. Q. E. D.

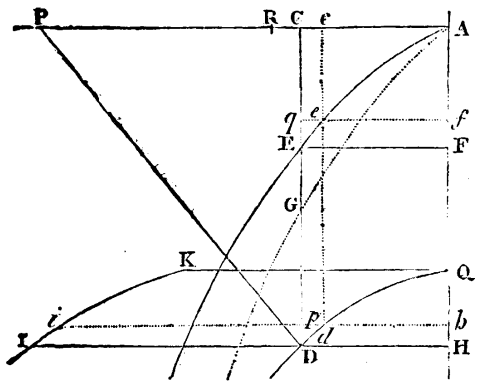
(φ) Hamilton. Conic. I. 49.

(χ) *Permutando* potiùs.

CAPUT X. CKc, ut altitudo DE ad ſemiſſem altitudinis KM: hoc eſt, ut AG ad $\frac{1}{2}$AP. Quare omnia ſpatii PDE momenta ad omnia contemporanea momenta ſpatii PKC ſunt ut AG ad $\frac{1}{2}$AP. Et proinde tota illa ſpatia ſunt in eâdem ratione. Q. E. D.

24. *Demonſtratio conſtructionis in Exemplo* 6.

Parallelam & proximam CD age *cd* occurrentem Curvæ AE in



e. Age *hi* et *fe* occurrentes DC in *p* et *q*. Et erit ex hypotheſi D*d*=E*q*: et ex ſimilitudine triangulorum D*pd*, DCP, erit D*p*: D*d*(E*q*):: CP: PD(HI). Adeoque D*p* × HI = E*q* × CP; et inde D*p* × HI (moment. HI*ih*): E*q* × AC (moment. EF*fe*):: E*q* × CP : E*q* × AC :: CP : AC. Quare cùm PC et AC ſint in datâ ratione lateris tranſverſi ad latus rectum conicæ ſectionis QD(ψ), et arearum HIKQ et AEF momenta, HI*ih* et EF*fe*, in illâ ratione, erunt ipſæ areæ in eâdem ratione. Q. E. D.

25. In hujuſmodi demonſtrationibus obſervandum eſt, quòd quantitates pro æqualibus habeo, quarum ratio eſt æqualitatis. Et ratio æqualitatis cenſenda eſt, quæ minùs differt ab æqualitate quàm quælibet inæqualis ratio poteſt aſſignari. Sic in poſtremâ demonſtratione, poſui rectangulum E*q* × AC ſive FE*qf* æquale ſpatio FE*ef*; quia, propter differentiam E*qe* infinitè minorem ipſis, ſive reſpectu

(ψ) Hamilton Conic. (ω) Indiviſibilium.

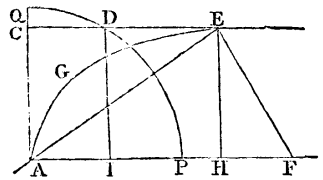
(αα) Et per § 4. Introduct. ad Quadrat. Curv.

(ββ) Junctâ enim AD, cùm triangula duo rectangularia, AID, FHE, hypotenuſas AD, FE inter ſe æquales habeant, necnon latera EH, ID inter ſe æqualia, erunt et tertia eorundem latera AI, HF inter ſe æqualia. Quare FH : HE = AI : ID. Sed propter angulos AEF, AHE rectos, FH : HE = HE : AH vel CE. (El. VI. 8.) Quare AI : ID = HE vel ID : CE.

(γγ) NIMIRUM ad demonſtrationes ex fluxionum doctrinâ componendas nil conferunt lineæ illæ

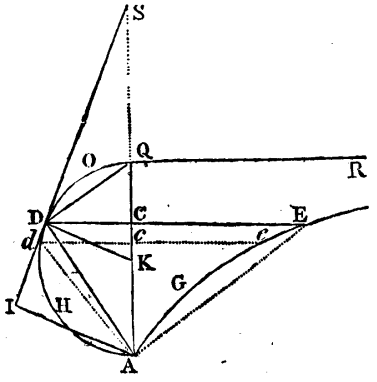
reſpectu ipſarum nullam, non habent rationem inæqualitatis. Et eâdem de cauſâ, poſui D*p* × HI = HI*ih*, et ſic in aliis. DE COMPONENDIS DEMONSTRATIONIBUS.

26. Hâc methodo probandi Curvas, per æqualitatem vel datam rationem momentorum, æquales eſſe, vel datam rationem habere, hic uſus ſum, quòd cum methodis in his rebus uſitatis (*) affinitatem habeat. Sed magis naturalis videtur, quæ geneſi ſuperficierum ex fluendi motu innititur. Sic ſi conſtructio in



Exemplo 2, demonſtranda ſit: Ex naturâ circuli (αα) eſt fluxio rectæ ID ad fluxionem rectæ IP ut AI ad ID: eſtque AI : ID :: ID : CE, ex naturâ curvæ AGE (ββ). Et proinde CE × flux. ID = ID × flux. IP. Sed CE × flux. ID = fluxioni areæ ACEG; et ID × flux. IP = fluxioni areæ PDI. Et propterea areæ illæ, æqualiter fluendo genitæ, æquales erunt. Q. E. D.

27. Plenioris illuſtrationis gratiâ, adjiciam demonſtrationem conſtructionis, quâ Ciſſoidis area in Exemplo 3, determinatur.



Lineæ punctis notatæ in ſchemate deleantur (γ), et agatur DQ, et Ciſſoidis aſymptotos QR. Et ex naturâ circuli, eſt DQ^q = AQ × CQ. Et inde per Prob. I. 2DQ × flux. ipſius DQ = AQ × flux. CQ. Adeoque AQ : DQ = 2 flux. DQ : flux. CQ. Eſt et ex naturâ Ciſſoidis ED : AD = AQ : DQ (δδ). Quare ED : AD :: 2 flux. DQ : flux. CQ. Et ED × flux. CQ = AD × 2 flux. DQ, ſive 4 × $\frac{1}{2}$AD × flux. DQ. Jam cùm DQ perpendicularis ſit ad terminum ipſius AD

illæ viciniſſimæ, ſine quibus nihil unquam moliri auſa eſt *Indiviſibilium*, quæ dicitur, Geometria. Meliùs autem ſine illis rem agi, cùm ex illis demonſtrationibus, quæ in notis noſtris ad quartum Excerptorum ex Epiſtolis poſuimus, ſatis pateat, tum plurimarum exemplis, quas ad varia PRINCIPIORUM loca brevi proferemus, clariùs etiam eluceſcet.

(δδ) Nam è naturâ Ciſſoidis CE : CA = CA : CD. Junctâ igitur EA, angulus EAD rectus erit. Atque ideirco ED : DA = DA : DC. (El. VI. 8.) Sed propter angulos ADQ, ACD rectos DA : DC = AQ : QD. (El. VI. 8.) Quare ED : DA = AQ : QD.

CAPUT X. circa A gyrantis, eſt $\frac{1}{2}$AD × flux. DQ = fluxioni generanti aream ADOQ. Eſt et ejus quadruplum, ED × flux. CQ, = fluxioni generanti ciſſoidalem aream QREDO. Et proinde area illa infinitè longa QREDO generatur quadrupla alterius ADOQ. Q. E. D.

SCHOLIUM.

28. Per præcedentes Catalogos non tantùm areæ Curvarum, ſed et aliæ cujuſcunque generis quantitates, analogâ fluendi ratione generatæ, è fluxionibus derivari poſſunt. Idque mediante hoc Theoremate. *Quòd quantitas cujuſcunque generis ſit ad unitatem congeneram, ut area curvæ ad unitatem ſuperficialem; ſi modò fluxio quantitatem illam generans ſit ad unitatem ſui generis, ut fluxio generans aream ad unitatem ſui generis; hoc eſt ut linea ſuper baſi normaliter incedêns, quâ area illa deſcribitur, ad unitatem linearem.* Et proinde ſi fluxio qualiſcunque exponatur per ejuſmodi lineam incedentem, quantitas, ab illâ fluxione generata, exponetur per aream ab illâ incedente deſcriptam. Vel ſi fluxio per eoſdem terminos algebraicos cum incedente lineâ exponatur, quantitas generata exponetur per eoſdem cum areâ deſcriptâ. Æquatio itaque, quæ fluxionem cujuſcunque generis exhibet, quærenda eſt in primâ columnâ Catalogorum, et valor t, in ultimâ columnâ, indicabit quantitatem generatam.

29. Quemadmodum ſi $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ fluxionem cujuſcunque generis exhibeat, pone æqualem y; et ut ad formam æquationum in Catalogis reducatur, ſubſtitue z^n pro z: ſic enim evadet $z^{n-1}\sqrt{1+\frac{9z^n}{4a}}=y$, æquatio primæ ſpeciei tertii ordinis prioris Catalogi. Et collatis terminis, fiet $d=1$; $e=1$; $f=\frac{9}{4a}$: et inde $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}\,(=\frac{2d}{3nf}\,R^3)=t$. Eſt itaque $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ quantitas, quæ generatur fluxione $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$.

30. Atque ita ſi $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ deſignet fluxionem, per debitam reductionem (extrahendo $z^{\frac{1}{3}}$ è radicali, et ſcribendo z^n pro $z^{\frac{1}{3}}$) habebitur

habebitur $\frac{1}{z^{n-1}}\sqrt{z^n+\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}}=y$, æquatio ſecundæ ſpeciei tertii ordinis poſterioris Catalogi. Et collatis terminis fit $d=1$; $e=\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}$; et $f=1$. Adeoque $z^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{z^n}=xx$; $\sqrt{1+\frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}}=v$; et $3s=\frac{-2d}{n}s=t$. Quibus inventis, quantitas per fluxionem $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ generata innoteſcet, ponendo eſſe ad unitatem ſui generis ut area $3s$ ad unitatem ſuperficialem. Vel quod eodem recidit, ponendo quantitatem t non ampliùs ſuperficiem ſignificare, ſed alterius generis quantitatem, quæ eſt ad unitatem ejuſdem generis ut ſuperficies illa ad unitatem ſuperficialem. Sic poſito quòd $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ deſignet fluxionem linearem, imaginor t non ampliùs ſuperficiem ſed lineam jam ſignificare; eam nempe, quæ ad unitatem linearem eſt ut area, quam t juxta Catalogos deſignat, ad unitatem ſuperficialem; hoc eſt, eam quæ producitur applicando aream illam ad linearem unitatem. Quâ ratione, ſi linearis unitas ſtatuatur e, longitudo, per præfatam fluxionem generata, erit $\frac{3s}{e}$. Et hoc fundamento Catalogi illi, ad longitudines Curvarum, contenta Solidorum, et alias quaſcunque quantitates, æquè ac areas Curvarum, determinandas, applicari poſſunt.

De Usu Catalogorum.

CAPUT XI.

De Quæſtionibus cognatis.

SECT. I.

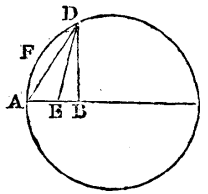
Curvarum areas per Mechanicam approximare (a).

1. METHODUS eſt, ut duarum pluriumve rectilinearum figurarum valores ita componantur inter ſe, ut valorem areæ Curvæ quàm proximè conſtituant. Sic ad circulum AFD quem æquatio $x-xx=rr$ deſignat, poſtquam inventus eſt areæ AFDB valor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quærendi ſunt aliquot rectangulorum valores, quales

Constructiones Mechanicæ.

(a) Vide Excerpt. IV. ſub fin.

CAPUT XI. quales ſunt ipſius BD × AB valor $x\sqrt{x-xx}$, ſive $x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}}$ &c. ac ipſius AD × AB valor $x\sqrt{x}$, ſive $x^{\frac{3}{2}}$. Dein hi valores per literas quaſlibet diverſas, quæ numeros indefinitè deſignent, multiplicandi ſunt et addendi; ſummæque termini cum correſpondentibus terminis valoris areæ AFDB comparandi; ut quantùm liceat evadant æquales. Quemadmodum ſi per e & f multiplicentur, fiet ſumma $+\frac{e}{f}\ x^{\frac{3}{2}}-\frac{e}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{e}{8}x^{\frac{7}{2}}$ &c; cujus terminis cum terminis hiſce $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ &c. collatis, prodit $e+f=\frac{2}{3}$; et $-\frac{e}{2}=-\frac{1}{5}$; ſive $e=\frac{2}{5}$, et $f=\frac{2}{3}-e=\frac{4}{15}$. Adeoque eſt $\frac{2}{5}$BD × AB + $\frac{4}{15}$AD × AB = areæ AFDB proximè. Scilicet $\frac{2}{5}$BD × AB + $\frac{4}{15}$AD × AB valet $\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quod ab areâ AFDB ſubductum relinquit ſolummodò errorem $\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{90}x^{\frac{9}{2}}$ &c.



2. Sic biſectâ AB in E, rectanguli AE × DE valor erit $x\sqrt{x-\frac{3}{4}xx}$, ſive $x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{9}{128}x^{\frac{7}{2}}-\frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et hoc collatum cum rectangulo AD × AB dat $\frac{8DE+2AD}{15}\times AB$ = areæ AFDB, errore tantùm exiſtente $\frac{1}{560}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{5760}x^{\frac{9}{2}}$ &c. qui ſemper minor eſt quàm $\frac{1}{1500}$ totius areæ, etiamſi AFDB ponatur quadrans circuli. Hoc autem Theorema ſic enunciari poteſt. *Ut* 3 *ad* 2 *ita rectangulum* AB *in* DE *plus quintâ parte differentiæ inter* AD *ac* DE *ad aream* AFDB *proximè.*

3. Atque ita conferendo duo rectangula AB × ED et AB × BD, vel omnia tria rectangula inter ſe, vel adhibendo adhuc alia rectangula, poſſunt aliæ regulæ excogitari, eæque tanto exactiores quo plura rectangula adhibentur. Et idem de areâ Hyperbolæ ac aliarum Curvarum intelligendum eſt. Imo et per unicum tantùm rectangulum area plerumque commodè exhiberi poteſt: ut in prædicto Circulo, ſi capiatur AE ad AB ut $\sqrt{10}$ ad 5, rectangulum AB × ED erit ad aream AFDB ut 3 ad 2, errore tantùm exiſtente $\frac{1}{175}x^{\frac{7}{2}}+\frac{11}{1250}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

SECT. II.

Ex Datâ Areâ, Baſem et Incedentem Lineam determinare (§§).

1. Ubi area per finitam æquationem exhibetur, nihil occurrit

(§§) Vide Analyſ. per Æquat. Infinit. C. VII. Sect. 1.

diffi-

difficultatis. Ubi verò per infinitam exhibetur, affecta radix extrahenda eſt, quæ baſem deſignat. Sic ad Hyperbolam, quam æquatio $\frac{ab}{a+x}=y$ deſignat; poſtquam inventum eſt $z=bx-\frac{bxx}{2a}+\frac{bx^3}{3aa}$ &c. ut ex datâ areâ, z, viciſſim innoteſcat baſis, x, extrahe radicem affectam, et proveniet $x=\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6ab^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+\frac{z^5}{96a^4b^5}$ &c. Et præterea ſi incedens, y, deſideretur; divide ab per $a+x$, hoc eſt per $a+\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^2}$ &c. et emerget $y=b-\frac{z}{a}+\frac{zz}{2aab}-\frac{z^3}{6a^3bb}+\frac{z^4}{24a^3b^3}$ &c. BASIS EX AREA.

2. Sic ad Ellipſin, quam æquatio $ax-\frac{a}{c}xx=yy$ deſignat; poſtquam inventa fuerit area $z=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c}-\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{28cc}-\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{72c^3}$ &c. ſcribe v^3 pro $\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, ac t pro $x^{\frac{1}{2}}$, et evadet $v^3=t^3-\frac{3t^5}{10c}-\frac{3t^7}{56cc}-\frac{t^9}{48c^3}$ &c. Et, extractâ radice, $t=v+\frac{v^3}{10c}+\frac{81v^5}{1400cc}+\frac{1171v^7}{25200c^3}$ &c. Cujus quadratum, $vv+\frac{v^4}{5c}+\frac{22v^6}{175cc}+\frac{823v^8}{7875c^3}$ &c. valet x. Et hoc valore pro x in æquatione, $ax-\frac{a}{c}xx=yy$, ſubſtituto, et extractâ radice, proveniet $y=a^{\frac{1}{2}}v-\frac{2a^{\frac{1}{2}}v^3}{5c}-\frac{38a^{\frac{1}{2}}v^5}{175cc}-\frac{407a^{\frac{1}{2}}v^7}{2250c^3}$ &c. Adeoque ex datâ areâ z, et inde v, ſive $\sqrt{\text{cub.}}\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, dabitur Baſis x et Incedens y. Quæ omnia ad Hyperbolam etiam accommodantur, ſi modò ſignum quantitatis c ubique mutetur, ubi exiſtit imparium dimenſionum.

CAPUT XII.

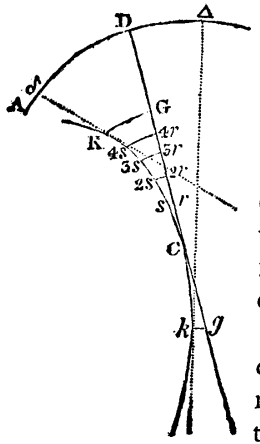
PROBLEMA X.

Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Longitudines per finitas Æquationes deſignari poſſunt.

AD hujus reſolutionem via per ſequentes poſitiones ſtermitur.

1. Si recta DC, in Curvam quamvis AD perpendiculariter inſiſtens, moveri concipiatur; ſingula ejus puncta G, g, r, &c. deſcribent

CAPUT XII.



describent alias æquidistantes sibique perpendiculares curvas GK, *gk*, *rs*, &c.

2. Si recta illa hinc inde indefinitè producatur, ejus extremitates movebuntur ad contrarias plagas; et punctum quod distinguit inter contrarios motus, quodque ideo dici potest centrum Motionis, idem est cum centro Curvaturæ, quam Curva AD habet ad punctum D, ut suprà diximus. Istud autem punctum esto C.

3. Si lineam AD non circularem esse, sed difformiter incurvatam supponamus, puta magis curvam in δ, et minùs in Δ; illud centrum continuò mutabitur, propiùs accedens ad partes magis curvas, ut in K, et longiùs recedens à partibus minùs curvis, ut in *k*: eoque pacto lineam aliquam, qualis KC*k*, describet.

4. Hanc à centro Curvaturæ descriptam lineam recta DC continuò tanget. Nam si rectæ illius punctum D moveat versus δ, ejus punctum C, quod interea transit ad K et situm est ad eandem partem centri C, movebit versus eandem plagam (per positionem secundam). Deinde si idem D moveat versus Δ, punctum *g*, quod interea transit ad *k*, et situm est ad contrariam partem centri C, movebit ad contrariam, hoc est ad eandem plagam ad quam G in priori casu movebat, dum transit ad K. Et proinde K et *k* jacent ad eandem partem rectæ DC. Quare cùm K et *k* indeterminatè pro quibuslibet punctis sumantur, patet totam illam Curvam jacere ad eandem partem rectæ DC, proindeque ab illâ non secari, sed tangi tantùm.

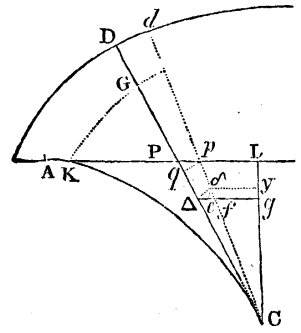
Hîc supponitur lineam δDΔ magis curvam esse à parte δ continuò, et minùs à parte Δ. Quòd si maxima minimave Curvatura fuerit ad ipsum D, tunc recta DC secabit curvam KC, sed in angulo tamen qui sit quovis rectilineo minor: quod perinde est ac si tangere dicatur. Imo punctum C, in hoc casu, terminus est instar cuspidis, ad quem partes Curvæ, obliquissimo concursu desinentes, se mutuò contingunt; proindeque à recta DC, quæ angulum illum contactûs dividit, rectiùs dicatur tangi quàm secari.

5. Recta CG æquatur Curvæ CK. Nam concipe rectæ illius singula

singula puncta *r*, 2*r*, 3*r*, 4*r*, &c. describere Curvarum arcus *rs*, 2*r*2*s*, 3*r*3*s*, &c. interea dum per motum rectæ illius accedant ad Curvam CK; et arcus illi, cùm (per positionem primam) sint perpendiculares ad rectas quæ (per posit. 4.) tangunt Curvam CK, erunt etiam perpendiculares ad Curvam illam. Quare partes illius CK, inter arcus illos interjectæ, quæ propter infinitam parvitatem pro rectis haberi possint, æquantur intervallis eorundem arcuum, hoc est (per posit. 1) totidem partibus rectæ CG. Et, additis utrinque æqualibus, tota CK æquabitur toti CG. Inventio CURVARUM quæ Evolutæ sint cognitæ.

6. Idem constare potest, imaginando singulas partes rectæ CG, inter movendum, successivè applicari ad singulas partes Curvæ CK, easque mensurare: perinde ut rotæ, super planum per gyros promoventis, circumferentia distantiam metitur, quam punctum contactûs transigit.

7. Ex his pateat Problema resolvi posse, assumendo pro lubitu Curvam quamvis AδDΔ, et inde determinando alteram Curvam KC*k*, in quâ assumptæ centrum curvaturæ versatur.



Ad rectam itaque quamvis positione datam, AB, demissis perpendiculis, DB, CL, et in AB sumpto quovis puncto A, dictisque AB = *x*, et BD=*y*, pro Curvâ AD definiendâ assumatur relatio quævis inter *x* et *y*, et inde (per Prob. v.) elicietur punctum C, quo et Curva CK et ejus longitudo GC determinatur.

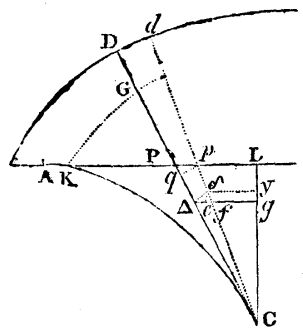
8. EXEMPL. Sit $ax=y^2$ æquatio ad Curvam AD, Parabolam nempe Apollonianam. Et per Prob. v. invenientur AL = $\frac{1}{2}a+3x$, CL = $\frac{4y^3}{aa}$, ac DC = $\frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2+ax}$. Quibus habitis, Curva KC determinatur per AL ac LC, et longitudo ejus per DC: utpote cùm liberum sit ubivis in Curvâ KC assumere puncta K & C, supponamis K esse centrum curvaturæ Parabolæ ad verticem; et positis perinde AB & BD, seu *x* & *y*, nullis, evadit DC=$\frac{1}{2}a$: estque hæc longitudo AK, vel DG, quæ, subducta à superiori indefinito valore DC, relinquit GC, seu KC, =$\frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2+ax}-\frac{1}{2}a$.

9. Jam si qualis sit hæc Curva, quantaque ejus longitudo, non

CAPUT XII. amplius habitâ ratione ad Parabolam, ſcire deſideratur: dic KL=z, et LC=v; et erit $z=(AL-\frac{1}{2}a)=3x$; ſeu $\frac{1}{3}z=x$, et $\frac{az}{3}(=ax)=y^2$; adeoque $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}}(=\frac{4y^3}{aa}=CL)=v$, ſive $\frac{16z^3}{27a}=v^2$. Quod indicat Curvam KC eſſe Parabolam ſecundi generis. Et pro ejus longitudine prodit $\frac{3a+4z}{3a}\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{3}az}-\frac{1}{2}a$, ſcribendo $\frac{1}{3}z$ pro x in valore CG.

9. Poteſt etiam Problema reſolvi per aſſumptionem æquationis, quæ relationem inter AP et PD (poſitâ nempe P interſectione baſis et perpendiculi) definiant.

10. Nam dictis AP=x, et PD=y, concipe CPD per ſpatium quàm minimum moveri; puta ad locum cpd: inque CD & cd ſumpto $c\Delta$, et $c\delta$, ejuſdem cujuſvis datæ longitudinis, puta 1, et ad CL demiſſis Δg, δy perpendiculis, quorum Δg (quod dic z) occurrat cd in f, et completo parallelogrammo $gy\delta\varepsilon$; erit $\Delta e:\Delta f(::\overline{\Delta e}^2:\overline{\Delta\delta}^2::\overline{cg}^2:\overline{c\Delta})::\frac{\overline{Cg}^2}{C\Delta}:c\Delta$. Et $\Delta f:Pp::c\Delta:CP$. Et ex æquo $\Delta e:Pp::\frac{\overline{Cg}^2}{C\Delta}:CP$. Eſt autem Pp momentum baſis AP, cujus additamento evadit Ap; ac Δe contemporaneum momentum perpendiculi Δg, cujus ablatione evadit δy: adeoque Δe et Pp ſunt ut fluxiones linearum Δg (z) et AP (x), hoc eſt, ut $\dot z$ et $\dot z$. Quare $\dot z:\dot x::\frac{\overline{Cg}^2}{C\Delta}:CP$. Et proinde cùm ſit $\overline{cg}^2(=c\Delta-\overline{\Delta g}^2)=1-zz$; et $c\Delta=1$; erit $CP=\frac{\dot x-\dot x z^2}{\dot z}$. Et inſuper cùm è tribus $\dot x$, $\dot y$ et $\dot z$ quamlibet pro uniformi fluxione, ad quam cæteræ referantur, habere liceat; ſi iſta ponatur $\dot x$ ejuſque quantitas unitas, evadet $CP=\frac{1-zz}{\dot z}$.



11. Præterea eſt $c\Delta(1):\Delta g(z)::CP:PL$; et $c\Delta(1):cg(\sqrt{1-zz})::CP:CL$; adeoque fit $PL=\frac{z-z^3}{\dot z}$, et $CL=\frac{1-zz}{\dot z}\sqrt{1-zz}$. Ac denique actâ pq parallelâ arcui infinitè parvo Dd, ſeu perpendiculari DC, erit Pq momentum ipſius DP, cujus additamento evadit dp, ſimul ac AP evadit Ap. Et idcirco Pp & Pq ſunt ut fluxiones ipſarum AP (x) et PD (y), hoc eſt ut 1 & $\dot y$. Atque adeo cùm propter

propter ſimilia triangula Ppq et $c\Delta g$, $c\Delta$ ac Δg, ſeu 1 & z, ſint in eâdem ratione, erit $\dot y=z$. Unde talis evadit Problematis reſolutio. Inventio Curvarum quæ Exhibitum ſint capaces.

12. E propoſitâ æquatione, quæ relationem inter x et y deſignat, quære relationem fluxionum $\dot x$ et $\dot y$ (per Prob. 1.) Et poſito $\dot x=1$ habebitur valor $\dot y$, cui z æquatur. Dein ſubſtituto z pro $\dot y$, ope æquationis noviſſimæ, quære relationes fluxionum $\dot x$, $\dot y$ et $\dot z$ (per idem Prob. 1.) et iterum ſubſtituto 1 pro $\dot x$, obtinebitur valor z. Quibus habitis, fac $\frac{1-\dot y\dot y}{\dot z}=CP$; $z\times CP=PL$; et $CP\times\sqrt{1-\dot y\dot y}=CL$, et erit C ad Curvam, cujus pars quævis, KC, æquatur rectæ CG, differentiæ nempe tangentium ductarum à punctis C et K perpendiculariter ad Curvam Dd.

13. EXEMPL. Sit $ax=yy$ æquatio quæ relationem inter AP et PD deſignet, et per Prob. 1. primò erit $a\dot x=2y\dot y$, ſeu $a=\frac{2y\dot y}{\dot x}=2yz$. Deinde $0=2\dot yz+2y\dot z$, ſeu $\frac{-zz}{y}=\dot z$. Indeque fit $CP=(\frac{1-\dot y\dot y}{\dot z}=y-\frac{4y^3}{aa}$; $PL=(z\times CP=)\frac{1}{2}a-\frac{2yy}{a}$; et $CL=\frac{aa-4yy}{2aa}\sqrt{4yy-aa}$. Et à CP ac PL ablatis y et x, reſtat $CD=-\frac{4y^3}{aa}$, et $AL=\frac{1}{2}a-\frac{3yy}{a}$. Aufero autem y et x, quòd CP et PL, ubi valores habent affirmativos, cadant ad partes puncti P verſus D et A, et tunc diminui debent auferendo affirmativas quantitates PD et AP. Ubi verò negativos valores obtinent, cadunt ad contrarias partes puncti P; et tunc augeri debent: id quod etiam fit auferendo affirmativas quantitates PD et AP.

14. Jam ut Curvæ, in quâ punctum C locatur, longitudo inter duo quævis puncta, K et C, noſcatur; quæro longitudinem tangentis ad punctum K, & aufero à CD. Quemadmodum ſi K ſit punctum, ad quod tangens terminatur, ubi $c\Delta$ et Δg, ſeu 1 & z, ponuntur æquales, quodque proinde in ipſâ baſi AP ſitum eſt; ſcribe 1 pro z in æquatione $a=2yz$, & prodit $a=2y$. Quare pro y ſcribe $\frac{1}{2}a$ in valore CD, nempe in $-\frac{4y^3}{aa}$, et oritur $-\frac{1}{2}a$. Eſtque hæc longitudo tangentis ad punctum K, ſive ipſius DG; inter quam et ſuperiorem indefinitum valorem CD differentia, $\frac{4y^3}{aa}-\frac{1}{2}a$, eſt GC, cui Curvæ pars KC æquatur.

15. Ut inſuper pateat qualis ſit hæc Curva, ab AL (mutato priùs ſigno ut evadat affirmativa) aufer AK, quæ erit $\frac{1}{4}a$; et reſtabit $KL=\frac{3yy}{a}-\frac{3}{4}a$, quam dic t; et in valore lineæ CL, quam dic v, ſcribe $\frac{4at}{3}$

CAPUT XII. pro $4yy-aa$, & prodibit $\frac{2t}{3a}\sqrt{\frac{4}{3}at}=v$, seu $\frac{16t^3}{27a}=vv$, æquatio ad Parabolam secundi generis, ut suprà.

16. Siquando relatio inter t & v minùs commodè ad æquationem redigi possit, sufficit investigasse tantùm longitudines PC & PL. Quemadmodum si pro relatione inter AP & PD [vid. fig. p. 506] assumatur æquatio $3a^2x+3a^2y-y^3=0$. Inde (per Prob. 1.) primò prodit $a^2\dot{x}+a^2\dot{z}-y^2\dot{z}=0$; deinde $a^2\dot{z}-2y\dot{z}^2-y^2\dot{z}=0$. Adeoque est $\dot{z}=\frac{aa}{y-a}$, & $\dot{z}=\frac{2y\dot{z}^2}{a^2-y^2}$. Unde dantur PC$=\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$, & PL$=\dot{z}\times$PC; quibus punctum C, quod ad Curvam situm est, determinatur. Et longitudo Curvæ inter duo ejusmodi puncta è differentiâ correspondentium duarum tangentium DC, sive PC$-y$, innotescit.

EX. GR. Si ponatur $a=1$, et ad determinandum aliquod Curvæ punctum C, sumatur $y=2$; evadet AP seu x $(=\frac{y^3-3a^2y}{3aa})=\frac{2}{3}$; $\dot{z}=\frac{1}{3}$; $\dot{\dot{z}}=-\frac{4}{9}$, PC$=-2$, & PL$=-\frac{2}{3}$. Deinde ad aliud punctum determinandum, si sumatur $y=3$, evadet AP$=6$; $\dot{z}=\frac{1}{8}$; $\dot{\dot{z}}=\frac{-3}{256}$; PC$=-84$, & PL$=-10\frac{1}{2}$. Quibus habitis, si auferatur y à PC, restabit -4 in priori casu, et -87 in secundo casu, pro longitudinibus DC; quarum differentia, 83, est longitudo Curvæ inter inventa duo puncta C et c.

Hæc ita intelligenda sunt, ubi Curva inter puncta duo C & c vel K & C continuatur, sine termino quem cuspidi assimilavimus. Sed ubi unus vel plures ejusmodi termini interjacent istis punctis (qui termini inveniuntur, per determinationem Maximæ aut Minimæ PC vel DC) longitudines singularum partium Curvæ, inter illos et puncta C vel K, seorsim investigari debent & addi.

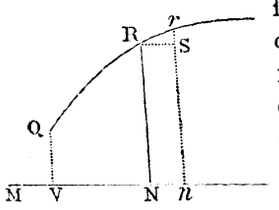
PROBLEMA XI.

17. *Curvas invenire quotascunque, quarum Longitudines cum propositæ alicujus Curvæ Longitudine, vel cum Aread ejus ad datam Lineam applicatâ, ope finitarum Æquationum, comparari possunt.*

18. Peragitur, involvendo longitudinem areamve propositæ Curvæ in æquatione, quæ in præcedente Problemate assumitur ad determinandam relationem inter AP & PD. Sed ut $\dot{z}$ et $\dot{\dot{z}}$ inde per Prob. 1. eliciantur, fluxio longitudinis vel areæ illius priùs investigari debet.

19. Fluxio

19. Fluxio longitudinis ejus determinatur ponendo æqualem radici quadraticæ summæ quadratorum à fluxionibus basis & perpendiculariter incedentis. Sit RN linea perpendiculariter incedens super basi MN, et QR Curva proposita ad quam RN terminatur. Dictisque MN$=s$, NR$=t$ & QR$=v$; concipe lineam NR ad locum quàm proximum, nr, promoveri; et demisso ad nr perpendiculo RS, erunt RS, sr & Rr, contemporanea momenta linearum MN, NR, & QR, quorum additamentis evadunt Mn, nr, & Qr. Et cùm hæc sint inter se ut earundem linearum fluxiones, ac propter angulum rectum RSr sit $\sqrt{\overline{RS^2}+\overline{sr^2}}=Rr$, erit $\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2}=\dot{v}$.



COMPARARE CURVARUM LONGITUDINES.

20. Ad determinandas autem fluxiones $\dot{s}$ & $\dot{t}$, duæ requiruntur æquationes; una, quæ definiat relationem inter MN & NR, seu s & t: unde relatio inter fluxiones $\dot{s}$ & $\dot{t}$ eruenda est: et alia, quæ definiat relationem inter MN vel NR ad datam figuram, et AP seu x ad quæsitam; unde relatio fluxionis $\dot{s}$, vel $\dot{t}$, ad fluxionem $\dot{x}$, seu 1, innotescit.

21. Invento $\dot{v}$, fluxiones $\dot{y}$ et $\dot{z}$ per assumptam tertiam æquationem, quâ longitudo PD sive y definitur, investigandæ sunt; & capienda PC$=\frac{1-\dot{y}^2}{\dot{z}}$; PL$=\dot{y}\times$PC; ac DC$=PC-y$, ut in præcedente Problemate.

22. EXEMPL. 1. Sit $as-ss=tt$, æquatio ad datam Curvam QR, utpote circulum; $xx=as$ relatio inter lineas AP et MN; et $\frac{2}{3}v=y$ relatio inter longitudinem datæ Curvæ, QR, et rectæ PD. Per primam, fit $a\dot{s}-2s\dot{s}=2t\dot{t}$, seu $\frac{a-2s}{2t}\dot{s}=\dot{t}$. Et inde $\frac{as}{2t}(\sqrt{\dot{s}\dot{s}+\dot{t}\dot{t}})=\dot{v}$. Per secundam fit $2x=a\dot{s}$: adeoque est $\frac{x}{t}=\dot{v}$. Et per tertiam fit $\frac{2}{3}\dot{v}=\dot{y}$, hoc est $\frac{2x}{3t}=\dot{z}$, dein hinc fit $\frac{2}{3t}-\frac{2x\dot{t}}{3t^2}=\dot{\dot{z}}$. Quibus inventis, capienda sunt PC$=\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$; PL$=\dot{y}\times$PC; ac DC$=PC-y$, sive PC$-\frac{2}{3}$QR; ubi patet longitudinem datæ Curvæ QR inveniri non posse, quin simul innotescat longitudo rectæ DC, indeque longitudo Curvæ ad quam punctum C cadit. Et contrà.

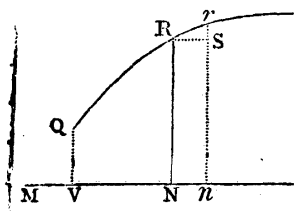
23. EXEMPL. 2. Stante $as-ss=tt$, ponatur $x=s$, & $vv-4ax=4ay$.

Perque

CAPUT XII. Perque primam invenietur $\frac{a\dot{s}}{2t} = \dot{v}$, ut suprà. Per secundam verò $1 = \dot{s}$; atque adeo $\frac{a}{2t} = \dot{v}$. Et per tertiam $2\dot{v}v - 4a = 4a\dot{y}$, seu (eliminato $\dot{v}$) $\frac{v}{4t} - 1 = \dot{x}$; dein hinc $\frac{\dot{v}}{4t} - \frac{v\dot{t}}{4tt} = \dot{z}$.

24. EXEMPL. 3. Ponantur tres æquationes $aa = st$; $a + 3s = x$; et $x + v = y$. Et per primam (quæ Hyperbolam denotat) evadit $0 = \dot{s}t + t\dot{s}$, seu $-\frac{\dot{s}t}{s} = \dot{t}$: et inde $\frac{\dot{s}}{s}\sqrt{ss+tt}\,(=\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2}) = \dot{v}$. Per secundam evadit $3\dot{s} = 1$; adeoque est $\frac{1}{3s}\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2} = \dot{v}$. Et per tertiam fit $1 + \dot{v} = \dot{y}$, sive $1 + \frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt} = \dot{x}$. Dein hinc fit $\dot{\varphi} = \dot{x}$, positâ scilicet $\dot{\varphi}$ fluxione radicalis $\frac{1}{3s}\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2}$; quæ si fingatur æqualis ϕ, sive $\frac{1}{9} + \frac{tt}{9s^2} = \phi\phi$, proveniet inde $\frac{2t\dot{t}}{9ss} - \frac{2tt\dot{s}}{9s^3} = 2\phi\dot{\phi}$. Et substituto imprimis $-\frac{\dot{s}t}{s}$ pro $\dot{t}$, deinde $\frac{1}{3}$ pro $\dot{s}$, factâque divisione per 2ϕ, habebitur $\frac{-2t^2}{27\phi s^3} = (\dot{\phi} =)\dot{x}$. Inventis $\dot{y}$ & $\dot{x}$ cætera peraguntur ut in Exemplo Primo.

25. Quòd si à quovis Curvæ puncto Q, perpendiculum QV ad MN demittatur, et Curva invenienda sit, cujus longitudo ex longitudine,



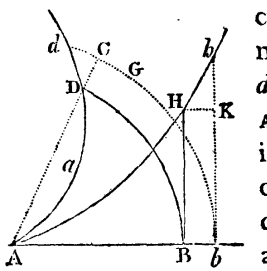
quæ oritur applicando aream QRNV ad datam aliquam lineam, innotescat: ponatur illa data linea E; longitudo $\frac{QRNM}{E}$, quæ ex applicatione oritur, v. Et cùm fluxio areæ QRNV sit ad fluxionem areæ parallelogrammi rectanguli super VN ad altitudinem E constituti ut incedens linea NR, seu t, quâ hæc describitur, ad incedentem lineam E, quâ illud eodem tempore describitur; et longitudinum, quæ oriuntur applicando areas illas ad datam E, hoc est, linearum v et VN, seu s, fluxiones $\dot{v}$ et $\dot{s}$ sint in eâdem ratione, erit $\dot{v} = \frac{\dot{s}t}{E}$. Per hanc itaque Regulam valor $\dot{v}$ inquirendus est, cæteraque ut in præcedentibus Exemplis peragenda.

26. EXEMPL. 4. Sit QR Hyperbola quam æquatio $aa + \frac{ass}{c} = tt$ definit, et inde juxta Prob. 1. evadet $\frac{ass}{c} = tt$, sive $\frac{a\dot{s}s}{ct} = \dot{t}$. Dein, si pro aliis duabus æquationibus assumantur $x = s$, & $y = v$, prior dabit $1 = \dot{s}$; unde fit $\dot{v}\ (= \frac{\dot{s}t}{E}) = \frac{t}{E}$; et posterior dabit imprimis $\dot{y} = \dot{v}$, sive

$\dot{x} = \frac{t}{E}$; dein hinc $\dot{z} = \frac{\dot{t}}{E}$; et substituto $\frac{a\dot{s}s}{ct}$, sive $\frac{as}{t\dot{t}}$, pro $\dot{t}$, evadet $\dot{z} = \frac{as}{Ett}$. Inventis $\dot{y}$ et $\dot{z}$, fac $\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = $ CP, & $\dot{y} \times$ CP = PL, ut in præcedentibus; et inde punctum c, adeoque Curva, in quam omnia ejusmodi puncta cadunt, determinabitur: cujus Curvæ longitudo ex longitudine DC, quæ valet CP $- v$, innotescat, uti satis ostendimus. COMPARARE CURVARUM LONGITUDINES.

27. Est et alia methodus quâ Problema resolvitur, quærendo nempe Curvas, quarum fluxiones vel æquentur fluxioni Curvæ propositæ, vel ex illius et aliarum linearum fluxionibus componantur. Et hæc aliquando usui esse potest, præsertim in convertendo Mechanicas Curvas, in æquales Geometricas, cujus rei insigne est exemplum in Spiralibus.

28. Sit AB recta positione data; BD arcus super AB tanquam basi incedens, ac interea retinens A pro centro; AD*d* Spiralis, ad quam arcus ille perpetim terminatur; *bd* arcus quàm proximus, sive locus in quem arcus BD, dum incedit, proximè movetur; DC perpendicularis ad arcum *bd*; *d*G differentia arcuum; AH alia Curva Spirali AD æqualis; BH recta super AB normaliter incedens ac terminata ad curvam AH; *bb* locus quàm proximus in quem recta illa incedit; et HK perpendicularis ad *bb*. Et in triangulis infinitè parvis D*d*C ac H*b*K, cùm DC & HK æqualia sint eidem tertio B*b*, indeque sibi mutuò æqualia; ac D*d* & H*b* ex hypothesi sint correspondentes partes æqualium Curvarum, et inde etiam æqualia; nec non anguli ad C & K recti; tertia etiam latera, *d*C & *b*K, æqualia erunt. Quare cùm insuper



sit AB : BD :: A*b* : *b*C :: A*b* − AB (B*b*) : *b*C − BD (CG); adeoque $\frac{BD \times Bb}{AB}$ = CG; si hoc auferatur à *d*G, restabit *d*G $- \frac{BD \times Bb}{AB}$ (= *d*C) = *b*K. Dic itaque AB = z, BD = v, & BH = y, et cùm B*b*, *d*G, & HK sint earundem contemporanea momenta quorum additamentis evadunt A*b*, *bd*, & *bb*, et proinde inter se sint ut fluxiones, ideo pro momentis in æquatione novissimâ substituantur fluxiones, juxta et notæ pro lineis, et emerget $\dot{v} - \frac{v\dot{z}}{z} = \dot{y}$. Ubi si è fluxionibus $\dot{z}$ pro æquabili

Capvt XII. quabili habeatur & ſupponatur unitas eſſe, ad quam cæteræ referantur, evadit $\dot{v} - \frac{v}{z} = \dot{y}$.

Quamobrem datâ per æquationem aliquam relatione inter AB & BD (ſive x et v) quâ Spiralis definiatur, dabitur (per Prob. I.) fluxio $\dot{v}$, et inde etiam fluxio $\dot{y}$, ponendo æqualem $\dot{v} - \frac{v}{z}$. Atque hæc per Prob. II. dabit lineam y, ſive BH, cujus eſt fluxio.

29. Exempl. 1. Si detur $\frac{zz}{a} = v$ æquatio nempe ad Spiralem Archimedeam, inde (per Prob. I.) elicietur $\frac{2z}{a} = \dot{v}$. A quo aufer $\frac{v}{z}$, ſive $\frac{z}{a}$, et reſtabit $\frac{z}{a} = \dot{y}$, et inde per Prob. II. fit $\frac{zz}{2a} = y$. Quod indicat Curvam AH, cui hæc Spiralis AD æquatur, eſſe Parabolam Apollonianam, cujus latus rectum exiſtit $2a$, ſive cujus incedens, BH, perpetuò æquatur ſemiſſi arcûs BD.

30. Exempl. 2. Si proponatur Spiralis, quam æquatio $z^3 = av^2$, ſive $v = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ definit, emerget, per Prob. I. $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{v}$. A quo ſi auferatur $\frac{v}{z}$, ſeu $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, reſtabit $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$, et inde per Prob. II. producetur $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} = y$. Hoc eſt $\frac{1}{3}$BD = BH, exiſtente AH Parabolâ ſecundi generis.

31. Exempl. 3. Si ad Spiralem ſit $z\sqrt{\frac{t+z}{c}} = v$. Exinde per Prob. I. elicietur $\frac{2a+3z}{2\sqrt{ac+cz}} = \dot{v}$. A quo ſi auferatur $\frac{v}{z}$, ſive $\sqrt{\frac{a+z}{c}}$, reſtabit $\frac{z}{2\sqrt{ac+zc}} = \dot{y}$. Jam cùm quantitas hâc fluxione $\dot{y}$ generata nequeat inveniri per ea quæ in Prob. II. habentur, niſi fiat reſolutio in infinitam ſeriem, juxta tenorem Scholii Prob. IX. reduco ad formam æquationum in primâ columnâ Catalogorum, ſubſtituendo z^n pro z; et evadit $\frac{z^{2-1}}{2\sqrt{ac+cz^n}} = y$: æquatio nempe ſecundæ ſpeciei quarti ordinis prioris Catalogi. Et conferendo terminos fit $d = \frac{1}{2}$; $e = ac$; & $f = c$: adeoque $\frac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz}\ (=t) = y$, quæ æquatio eſt ad Curvam Geometricam AH, cui Spiralis AD æquatur.

PROB.

PROBLEMA XII.

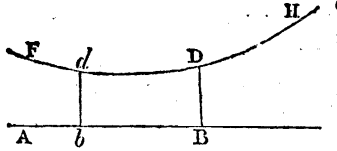
Curvarum Longitudines.

Curvarum Longitudines determinare.

33. Fluxionem Curvæ lineæ in ſuperiore Problemate oſtendimus æqualem eſſe radici quadraticæ ſummæ quadratorum à fluxionibus baſis et perpendiculariter incedentis. Et proinde ſi baſis fluxionem pro uniformi ac determinatâ menſurâ, nimirum unitate, ad quam cæteræ fluxiones referantur, habeamus; et inſuper per æquationem, quæ Curvam definit, quæramus fluxionem Incedentis, habebitur fluxio Curvæ lineæ, à quâ longitudo ejus per Prob. II. elicienda eſt.

34. Exempl. 1. Proponatur Curva FDH, quam æquatio $\frac{z^3}{aa} + \frac{aa}{12z} = y$ definit; poſito ſcilicet z = baſi AB, ac y = incedenti DB. Et ex æquatione illâ per Prob. I. elicietur $\frac{3zz}{aa} - \frac{aa}{12z^2} = \dot{y}$, exiſtente nimirum I fluxione ipſius z. Dein additis fluxionum quadratis, fit ſumma $\frac{9z^4}{a^4} + \frac{1}{2} + \frac{a^4}{144z^4} = \dot{t}\dot{t}$; et extractâ radice, $\frac{3zz}{aa} + \frac{aa}{12zz} = \dot{t}$, indeque per Prob. II. $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} = t$.

35. Itaque ſi cujuſvis portionis Curvæ hujus, puta dD, longitudo deſideretur; à punctis d ac D demitte ad AB perpendicula db ac DB, et in valore t ſubſtitue quantitates Ab et AB ſeorſim pro z, ac differentia productorum erit longitudo quæſita dD. Quemadmodum ſi ſit A$b = \frac{1}{2}a$, et AB $= a$, ſcripto $\frac{1}{2}a$ pro z, evadet $t = -\frac{a}{24}$. Dein ſcripto a pro z, evadet $t = \frac{11a}{12}$: à quo ſi prior valor auferatur, reſtabit $\frac{23a}{24}$ pro longitudine dD. Vel ſi Ab tantùm definiatur eſſe $\frac{1}{2}a$, et AB ſpectetur indefinitè, reſtabit $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} + \frac{a}{24} = d$D.



36. Quòd ſi cupias noſcere portionem Curvæ quam t deſignat, finge valorem t æquari nihilo; et evadet $z^4 = \frac{a^4}{12}$, ſive $z = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$; adeoque

CAPUT XII. si sumatur $Ab = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$, et erigatur bd, longitudo arcûs dD erit t, sive $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z}$. Et hæc de aliis Curvis generaliter intelligenda sunt.

37. Ad eundem modum, quo hujus longitudinem determinavimus, si pro aliâ Curvâ definiendâ proponatur æquatio $\frac{z^4}{a^3} + \frac{a^3}{3zz} = y$, proveniet $\frac{z^4}{a^3} - \frac{a^3}{3zz} = t$. Vel si proponatur $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = y$, proveniet $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = t$. Vel generaliter si sit $cz^\theta + \frac{z^{2-\theta}}{4\theta c - 8c} = y$, ubi θ pro quolibet numero, sive integro, sive fracto, designando adhibetur, erit $cz^\theta - \frac{z^{2-\theta}}{4\theta c - 8c} = t$.

38. EXEMPL. 2. Proponatur Curva, quam æquatio $\frac{2a^2+2z^2}{3a^2}\sqrt{a^2+z^2} = y$ definit: et per Prob. I. obtinebitur $\dot{y} = \frac{4a^4z + 8a^2z^3 + 4z^5}{3a^4y}$; sive exterminato y, $\dot{y} = \frac{2z}{aa}\sqrt{a^2+z^2}$: cujus quadrato adde 1, et summa erit $1 + \frac{4zz}{aa} + \frac{4z^4}{a^4}$; ejusque radix $1 + \frac{2z^2}{aa} = \dot{t}$, unde per Prob. II. obtinetur $z + \frac{2z^3}{3aa} = t$.

39. EXEMPL. 3. Proponatur Parabola secundi generis, ad quam æquatio est $z^3 = ay^2$, seu $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = y$: et inde (per Prob. I.) elicietur $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}\dot{z} = \dot{y}$; adeoque est $\sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}(\sqrt{1+\dot{y}\dot{y}}) = \dot{t}$. Jam cùm longitudo per fluxionem $\dot{t}$ generata nequeat inveniri per Prob. II. absque reductione in infinitam seriem simplicium terminorum, consulo Catalogos ad Prob. VIII. et juxta ea quæ in Scholio ejus habentur, prodit $t = \frac{8a+18z}{27} \times \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}$.

40. Et sic Parabolarum $z^5 = ay^4$, $z^7 = ay^6$, $z^9 = ay^8$, &c. longitudines inveniri possunt.

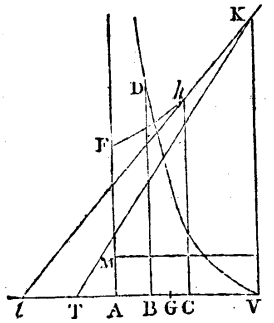
41. EXEMPL. 4. Proponatur Parabola, ad quam æquatio est $z^4 = ay^3$, sive $\frac{z^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = y$; et inde per Prob. I. orietur $\frac{4z^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}}\dot{z} = \dot{y}$. Adeoque $\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}(=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+1})\dot{z} = \dot{t}$. Quo invento, consulo Catalogos juxta Scholium prædictum, et factâ collatione cum secundo Theoremate tertii ordinis posterioris catalogi, prodit $z^{\frac{1}{3}} = x$; $\sqrt{1 + \frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}} = v$,

et $3x = t$. Ubi x designat basem, y ordinatim applicatam, & t aream Hyperbolæ, atque t longitudinem quæ oritur applicando aream $3x$ ad unitatem linearem. CURVARUM LONGITUDINES.

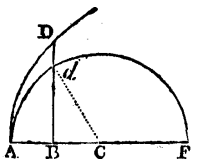
42. Eâdem methodo Parabolarum $z^6 = ay^5$, $z^8 = ay^7$, $z^{10} = ay^9$, &c. longitudines etiam per aream Hyperbolæ determinantur.

43. EXEMPL. 5. Proponatur Cissois Veterum; et existente ad eam æquatione $\frac{aa - 2az + zz}{\sqrt{az - zz}} = y$, inde per Prob. I. elicietur $\frac{-a-z}{2z}\sqrt{az - zz}\dot{z} = \dot{y}$: et consequenter $\frac{a}{2z}\sqrt{\frac{a+3z}{z}}(=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+1})\dot{z} = \dot{t}$; quæ, scribendo z^n pro $\frac{1}{z}$ seu z^{-1}, evadit $\frac{a}{2z}\sqrt{az^n + 3}\dot{z} = \dot{t}$, æquatio primæ speciei tertii ordinis posterioris Catalogi. Et collatis terminis fit $\frac{a}{z} = d$, $3 = e$, et $a = f$; adeoque $z\,(=\frac{1}{z^n}) = x^n$, $\sqrt{a + 3x^n} = v$, & $6x - \frac{2v^3}{x}\,(=\frac{4de}{nf}\text{ in }\frac{v^3}{2exx} - x) = t$. Et adhibitâ a pro unitate, per cujus multiplicationem vel divisionem hæ quantitates ad justum dimensionum numerum reducantur, evadit $az = xx$, $\sqrt{aa + 3xx} = v$, & $\frac{6x}{a} - \frac{2v^3}{ax} = t$. Quorum hæc est constructio.

44. Existente VD Cissoide, AV diametro circuli ad quam aptatur,



AF asymptoto ejus, ac DB perpendiculari ad AV; cum semiaxe AF = AV, & semiparametro AG = $\frac{1}{3}$AV, describatur Hyperbola FkK: et inter AB & AV sumptâ AC mediâ proportionali, erigantur ad C & V perpendicula ck & VK, et agantur kt & KT rectæ tangentes Hyperbolam in k et K, et occurrentes AV in t ac T; et ad AV constituatur rectangulum VM æquale spatio $TKkt$; et Cissoidis VD longitudo erit sextupla altitudinis AM.

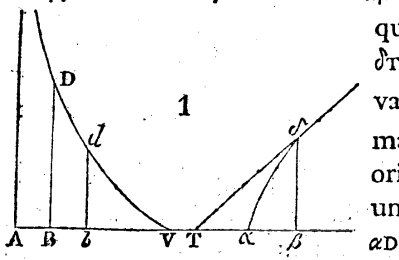


45. EXEMPL. 6. Existente Ad Ellipsi, quam æquatio $\sqrt{az - 2zz} = y$, definit: proponatur Curva Mechanica AD, talis ut si Bd, seu y, producatur donec huic Curvæ ad D occurrat, sit BD æqualis arcui elliptico Ad. Jam quo hujus longitudo determinetur, æquatio $\sqrt{az - 2zz} = y$, dabit $\frac{a-4z}{2\sqrt{az-2zz}} = \dot{y}$. Cujus quadrato si 1 addatur, prodit $\frac{a^2 - 4az + 8z^2}{4az - 8z^2}$ quadratum fluxionis arcûs

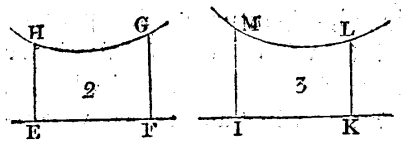
CAPUT XII. *Ad.* et huic si iterum addatur 1, provenit $\frac{aa}{4az-8zz}$; cujus radix $\frac{a}{2\sqrt{az-2zz}}$ est fluxio Curvæ lineæ AD. Ubi si è radicali extrahatur z, & pro z^{-1} scribatur z^n, habebitur $\frac{a}{2z\sqrt{az^n-2}}$ fluxio primæ speciei quarti ordinis posterioris Catalogi. Collatisque terminis exibunt $d=\frac{1}{2}a$, $e=-2$, & $f=a$: adeoque $z\,(=\frac{1}{z^n})=x$, $\sqrt{ax-2x^2}=v$, & $\frac{8s}{a}-\frac{4rv}{a}+v\,(=\frac{8de}{nff}$ in $s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e})=t$.

46. Quorum constructio est, ut ad Ellipsis centrum D actâ rectâ dc, constituatur super AC parallelogrammum æquale sectori ACd, et duplum altitudinis ejus ponatur esse longitudo Curvæ AD.

47. EXEMPL. 7. Existente $\alpha\beta=\varphi$, & $\alpha\delta$ Hyperbolâ ad quam æquatio sit $\sqrt{-a+b\varphi\varphi}=\beta\delta$, actâque δT tangente ejus: proponatur Curva, vdD, cujus basis AB sit $\frac{1}{\varphi\varphi}$, & normaliter incedens, BD, longitudo, quæ oritur applicando aream $\alpha\delta$Tα ad unitatem linearem. Jam ut hujus αD longitudo determinetur, quæro fluxionem areæ $\alpha\delta$Tα, cùm AB uniformiter fluit; & invenio esse $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, positâ AB$=z$, & fluxione ejus unitate. Nam est



αT$=\frac{a}{b\varphi}=\frac{a}{b}\sqrt{z}$; ejusque fluxio $\frac{a}{2b\sqrt{z}}$: cujus dimidium ductum in altitudinem $\beta\delta$, seu $\sqrt{-a+\frac{b}{z}}$, est fluxio areæ αTδ descriptæ per tangentem δT. Quare fluxio illa est $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, atque hæc applicata ad unitatem fit fluxio incedentis BD. Hujus quadrato $\frac{aab-a^3z}{16b^2z^2}$ adde 1, quadratum fluxionis ipsius AB, et prodit $\frac{a^2b-a^3z+16b^2z^2}{16b^2z^2}$; cujus radix $\frac{1}{4bz}\sqrt{a^2b-a^3z+16b^2z^2}$ est fluxio curvæ VD. Est autem hæc fluxio primæ speciei septimi ordinis posterioris Catalogi. Collatisque terminis exeunt $\frac{1}{4b}=d$, $aab=e$, $-a^3=f$, $16b^2=g$; adeoque $z=x$, & $\sqrt{a^2b-a^3x+16b^2x^2}=v$ (æquatio ad unam conicam sectionem, puta GH, (fig. 2) cujus area EFGH sit s, existente



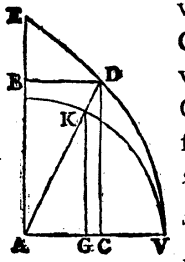
existente EF$=x$, & FG$=v$). Item $\frac{1}{z}=\xi$, et $\sqrt{16b^2-a^3\xi+ab\xi^2}=\Upsilon$ (æquatio ad aliam conicam sectionem, puta ML (fig. 3) cujus area IKLM sit σ, existente IK$=\xi$, & KL$=\Upsilon$) Denique $\frac{2aabb\xi\Upsilon-a^3b\Upsilon-a^4v-4a^2b^2\sigma-32abbs}{64b^4-a^4}=t$. CURVARUM LONGITUDINES.

48. Quare ut Curvæ VD portionis cujuscunque, Dd, longitudo noscatur; demitte db normalem ad AB, fingeque AB$=z$, & exinde per jam inventa quære t: dein finge BA$=z$, & exinde etiam quære t: & horum duorum t differentia erit longitudo Dd.

49. EXEMPL. 8. Proponatur Hyperbola, ad quam æquatio est $\sqrt{aa+bzz}=y$; et inde (per Prob. 1.) elicietur $\dot{y}=\frac{bz}{y}$, seu $\frac{bz}{\sqrt{aa+bzz}}$. Cujus quadrato adde 1, & summæ radix erit $\sqrt{\frac{aa+bzz+blzz}{aa+bzz}}=\dot{t}$. Hanc fluxionem, cùm non reperiatur in Tabulis, reduco in infinitam seriem: & primò, per divisionem, evadit $\dot{t}=\sqrt{1+\frac{b^2z^2}{a^2}-\frac{b^2z^4}{a^4}+\frac{b^3z^6}{a^6}-\frac{b^4z^8}{a^8}}$ &c. dein per extractionem radicis $\dot{t}=1+\frac{b^2z^2}{2a^2}-\frac{4b^3+b^4}{8a^4}z^4+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{16a^8}z^6$ &c. Et hinc per Prob. II. obtinetur t, seu longitudo Hyperbolæ $=z+\frac{b^2}{6a^2}z^3-\frac{4b^3+b^4}{40a^4}z^5+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{112a^6}z^7$ &c.

50. Quòd si Ellipsis, $\sqrt{aa-bzz}=y$, proponatur; debet signum ipsius b ubique mutari: & habebitur $z+\frac{b^2}{6a^2}z^3+\frac{4b^3-b^4}{40a^4}z^4+\frac{8b^4-4b^5+b^6}{112a^6}z^5$ &c. pro longitudine ejus. Et positâ insuper unitate pro b, emerget $z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}$ &c. pro longitudine Circuli: cujus seriei numerales coefficientes in infinitum inveniuntur, multiplicando continuò terminos hujus progressionis, $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, $\frac{9\times9}{10\times11}$, &c.

51. EXEMPL. 9. Proponatur denique Quadratrix, VDE, cujus vertex est V, existente A centro, et AV semidiametro Circuli interioris ad quam aptatur, atque angulo VAE recto. Actâ jam rectâ quâlibet AKD secante Circulum istum in K et Quadraticem in D, demissisque ad AV, AE normalibus KG, DB; dic AV, a; KG, z; VK, x; & BD, y; eritque ut in superiore exemplo, $x=z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}$ &c. Extrahe radicem z, et emerget $z=x-\frac{x^3}{6a^2}+\frac{x^5}{120a^4}-\frac{x^7}{5040a^6}$ &c. Cujus quadratum



CAPUT XII. dratum aufer de $\overline{AK}^2$, et reſidui radix $a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} - \frac{x^6}{720a^5}$ + &c. erit AG. Jam cùm ex naturâ Quadratricis ſit AB=VK=x, ſitque etiam GK:AG::AB:BD (y), divide AB×AG per GK, et orietur $y = a - \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}$ &c. Et inde per Prob. I. $\dot{y} = -\frac{2x}{3a} - \frac{4x^3}{45a^3} - \frac{4x^5}{315a^5}$ &c. Cujus quadrato adde 1, et ſummæ radix erit $1 + \frac{2x^2}{9a^2} + \frac{14x^4}{405a^4} + \frac{604x^6}{127575a^6}$ &c. $= \dot{t}$; unde per Prob. II. obtinetur t ſeu Quadratricis arcus VD=$x + \frac{2x^3}{27a} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^5}{893025a^6}$ &c.

FINIS GEOMETRIÆ ANALYTICÆ.

METHODUS

METHODUS

DIFFERENTIALIS.

METHODUS DIFFERENTIALIS.

PROP. I.

Si figuræ curvilineæ Abſciſſa componatur ex quantitate quâvis datâ A, *& quantitate indeterminatâ x, & Ordinata conſtet ex datis quotcunque quantitatibus b, c, d, e, &c. in totidem terminos hujus progreſſionis geometricæ x, x^2, x^3, x^4, &c. reſpectivè ductis, & ad Abſciſſæ puncta totidem data erigantur ordinatim applicatæ: dico quòd Ordinatarum differentiæ primæ dividi poſſint per earum intervalla; & differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum binarum intervalla; & harum differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum ternarum intervalla; & ſic deinceps in infinitum.*

ETENIM ſi pro Abſciſſæ parte indeterminatâ, x, ponantur quantitates quævis datæ p, q, r, s, t, &c. ſucceſſivè, & ad Abſciſſarum ſic datarum terminos erigantur Ordinatæ α, β, γ, ε, δ, &c. Hæ Abſciſſæ & Ordinatæ & ordinatarum differentiæ diviſæ per Abſciſſarum differentias (quæ utique ſunt Ordinatarum intervalla) & quotorum differentiæ diviſæ per Ordinatarum alternarum differentias, & ſic deinceps, exhibentur per Tabulam ſequentem.

Prop. II.

Abſciſſæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Diviſor. Diff. Ord.	Quoti per diviſionem prodeuntes.
$p-q)\ \alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\ \beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qq+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\ \gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\ \delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+e\times\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\varkappa$
$p-r)\ \zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\ \eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\ \theta-\varkappa$	$c+d\times\overline{r+s+t}+e\times\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s)\ \lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi.$
$q-t)\ \mu-\nu$	$d+e\times\overline{q+r+s+t}=\pi$
$p-t)\ \xi-\pi$	$e=\sigma$

PROP. II.

Iiſdem poſitis, & quòd numerus terminorum b, c, d, e, &c. ſit finitus, dico quòd Quotorum ultimus æqualis erit ultimo terminorum b, c, d, e, &c. et quòd per quotos reliquos dabuntur termini reliqui b, c, d, e, &c. et his datis dabitur Linea Curva generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium terminos tranſibit.

Etenim in Tabulâ ſuperiore quotus ultimus, σ, æqualis erat termino ultimo e. Et hic terminus ductus in ſummam datam $\overline{p+q+r+s}$, & ablatus de quoto ξ relinquit terminum penultimum d. Et quantitates jam datæ $d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}$, ſi auferantur de quoto λ, relinquunt terminorum antepenultimum c. Et quantitates jam datæ $c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+ppq+pqq+q^3}$, ſi auferantur de quoto ζ, relinquunt terminum b. Et ſimili computo, ſi plures eſſent termini, colligerentur omnes per quotorum ordines totidem. Deinde quantitates datæ $bp+cpp+dp^3+ep^4$, ſi ſubducantur de Ordinatâ primâ α, relinquunt Abſciſſæ terminum primum A. Et quantitas $A+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$ &c. eſt Ordinata Curvæ generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium datarum terminos tranſibit, exiſtente Abſciſſâ $A+x$.

Ex his Propoſitionibus quæ ſequuntur facilè colligi poſſunt.

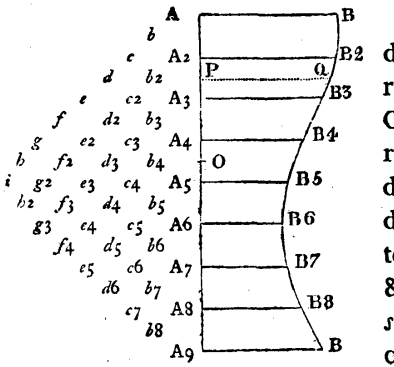
PROP.

PROP. III.

Prop. III.

Si recta aliqua AA9 *in æquales quotcunque partes* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta diviſionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. tranſibit.*

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære differentias Primas, b, $b2$, $b3$, &c. Secundas c, $c2$, $c3$, &c. Tertias d, $d2$, $d3$, &c. et ſic deinceps uſque dum veneris ad ultimam differentiam, quæ hîc ſit i.



Tunc incipiendo ab ultimâ differentiâ excerpe medias differentias in alternis Columnis vel Ordinibus differentiarum; & Arithmetica media inter duas medias reliquarum, ordine pergendo uſque ad ſeriem primorum terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. ſint hæc k, l, m, n, o, p, q, r, s, &c. quorum ultimus ſignificet ultimam differentiam; penultimus medium arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum differentiarum, & ſic deinceps uſque ad primum, quod erit vel medius terminorum A, A2, A3, &c. vel arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit ubi numerus terminorum A, A2, A3, &c. eſt impar; poſterius ubi par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A5B5 iſte medius terminus, hoc eſt, A5B5 $=k$; $\frac{b4+b5}{2}=l$; $c4=m$; $\frac{d3+d4}{2}=n$; $e3=o$; $\frac{f2+f3}{2}=p$; $g2=q$; $\frac{b+b2}{2}=r$; $i=s$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, dic A5P$=x$; & duc terminos hujus progreſſionis $1\times\frac{x}{1}\times\frac{x}{2}\times\frac{x^2-1}{3x}\times\frac{x}{4}\times\frac{x^2-4}{5x}\times\frac{x}{6}\times$

PROP. III. $\frac{x^2-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{x^2-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{x^2-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{x^2-36}{13x}$ &c. in ſe continuò; & orientur termini $1.\ x.\ \frac{x^2}{2}.\ \frac{x^3-x}{6}.\ \frac{x^4-x^2}{24}.\ \frac{x^5-5x^3+4x}{120}.\ \frac{x^6-5x^4+4x^2}{720}$ $\frac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{5040}$ &c. per quos ſi termini ſeriei k, l, m, n, o, p, &c. reſpectivè multiplicentur, aggregatum factorum $k+xl+\frac{x^2}{2}m+\frac{x^3-x}{6}n+\frac{x^4-x^2}{24}o+\frac{x^5-5x^3+4x}{120}p+$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

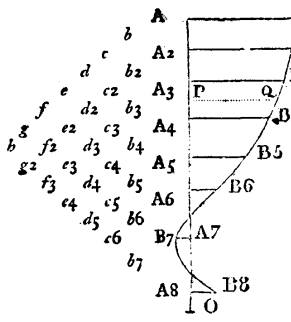
In Caſu poſteriori, ſint A4B4, A5B5 duo medii termini; hoc eſt, ſit $\frac{A_4B_4+A_5B_5}{2}=k$; $b4=l$; $\frac{c3+c4}{2}=m$; $d3=n$; $e2+e3=o$; $f2=p$; $\frac{g+g^2}{2}=q$; & $b=r$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, biſeca A4A5 in o, & dicto OP=x, duc terminos hujus progreſſionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx-\frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx-\frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx-\frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx-\frac{49}{4}}{8x}$, &c. in ſe continuò; et orientur termini $1.\ x.\ \frac{4xx-1}{8}.\ \frac{4x^3-x}{24}.\ \frac{16x^4-40x^2+9}{384}$. &c. per quos ſi termini ſeriei k, l, m, n, o, p, q, &c. reſpectivè multiplicentur, aggregatum factorum $k+xl+\frac{4x^2-1}{8}m+\frac{4x^3-x}{24}n+\frac{16x^4-40x^2+9}{384}o+$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

Sed hîc notandum eſt, quòd intervalla AA2, A2A3, A3A4, &c. hîc ſupponantur eſſe unitates, & quòd differentiæ colligi debent auferendo inferiores quantitates de ſuperioribus, A2B2 de AB, A3B3 de A2B2, $b2$ de b, &c. et faciendo ut ſint AB−A2B2=b, A2B2−A3B3=$b2$, $b-b2=c$, &c. adeoque quando differentiæ illæ hoc modo prodeunt negativæ, ſigna earum mutanda ſunt.

PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta diviſionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. invenire Curvam Geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. tranſibit.*

Sunto puncta data B, B2, B3, B4, B5, B6, B7, &c. et ad Abſciſſam quamvis, AA7, demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B2A2, &c.



Et fac $\frac{AB-A_2B_2}{AA_2}=b$, $\frac{A_2B_2-A_3B_3}{A_2A_3}=b2$, PROP. IV. $\frac{A_3B_3-A_4B_4}{A_3A_4}=b3$, $\frac{A_4B_4-A_5B_5}{A_4A_5}=b4$, $\frac{A_5B_5-A_6B_6}{A_5A_6}=b5$, $\frac{A_6B_6-A_7B_7}{A_6A_7}=b6$, $\frac{-A_7B_7-A_8B_8}{A_7A_8}=b7$. Deinde $\frac{b-b_2}{AA_3}=c$, $\frac{b_2-b_3}{A_2A_4}=c2$, $\frac{b_3-b_4}{A_3A_5}=c3$, &c. Tunc $\frac{c-c_2}{AA_4}=d$, $\frac{c_2-c_3}{A_2A_5}=d2$, $\frac{c_3-c_4}{A_3A_6}=d3$, &c. Et $\frac{d-d_2}{AA_5}=e$, $\frac{d_2-d_3}{A_2A_6}=e2$, $\frac{d_3-d_4}{A_3A_7}=e3$, &c.

Sic pergendum eſt ad ultimam differentiam.

Differentiis ſic collectis & diviſis per intervalla ordinatim applicatarum; in alternis earum columnis, ſive ſeriebus vel ordinibus, excerpe medias, incipiendo ab ultimâ; & in reliquis columnis excerpe media arithmetica inter duas medias, pergendo uſque ad ſeriem primorum terminorum, AB, A2B2, &c. Sunto hæc k, l, m, n, o, p, q, r, &c. quorum ultimus terminus ſignificet ultimam differentiam; penultimus medium arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus k erit media ordinatim applicata, ſi numerus datorum punctorum eſt impar; vel medium arithmeticum inter duas medias, ſi numerus eorum eſt par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A4B4 iſta media ordinatim applicata; hoc eſt, ſit A4B4=k; $\frac{b_3+b_4}{2}=l$; c3=m; $\frac{d_2+d_3}{2}=n$; $e2=o$; $\frac{f+f_2}{2}=p$; $g=q$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, & in baſi AA5 ſumpto quovis puncto o, dic OP=x, & duc in ſe gradatim terminos hujus progreſſionis, $1 \times \overline{x-OA4} \times \overline{x-\frac{OA_3+OA_5}{2}} \times \frac{\overline{x-OA_3} \times \overline{x-OA_5}}{\overline{x-\frac{1}{2}OA_3+OA_5}} \times \overline{x-\frac{OA_2+OA6}{2}} \times$ &c. et ortam progreſſionem aſſerva; vel quod perinde eſt, duc terminos hujus progreſſionis $1 \times \overline{x-OA4} \times \overline{x-OA3} \times \overline{x-OA5} \times \overline{x-OA2} \times \overline{x-OA6} \times \overline{x-OA} \times \overline{x-OA7} \times$ &c. in ſe gradatim; & terminos exinde ortos duc reſpectivè in terminos hujus progreſſionis, $1.\ x-\frac{+OA_3+OA_5}{2}.\ x-\frac{+OA_2+OA6}{2}.\ x-\frac{+OA+OA_7}{2}$, &c. et orientur termini;

Prop. IV. termini intermedii, totâ progreſſione exiſtente 1. $x-OA4$. $x^2-\frac{+OA3+2OA4+OA5}{2}x+\frac{OA3+OA5}{2}\times OA4$, &c.

Vel dic $OA=\alpha$; $OA2=\beta$; $OA3=\gamma$; $OA4=\delta$; $OA5=\varepsilon$; $OA6=\zeta$; $OA7=\eta$: $\frac{OA3+OA5}{2}=\vartheta$; $\frac{OA2+OA6}{2}=\chi$; $\frac{OA+OA7}{2}=\lambda$. Et ex progreſſione $1\times x-\delta\times x-\gamma\times x-\varepsilon\times x-\zeta\times x-\alpha\times x-\eta$ &c. collige terminos. Quibus multiplicatis per 1. $x-\vartheta$, $x-\chi$, $x-\lambda$, &c. collige alios terminos intermedios; totâ ſerie prodeunte 1, $x-\delta$, $x^2-\delta+\vartheta x+\delta\vartheta$, $x^3-\delta+2\vartheta x^2+\gamma\varepsilon+2\delta\vartheta x-\gamma\delta\varepsilon$, &c. per cujus terminos multiplica ſeries k, l, m, n, o, &c. Et aggregatum productorum $k+x-\delta\times l+x^2-\delta+\vartheta x+\delta\vartheta\times m+$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Caſu poſteriori, ſint A4B4, A5B5 duæ mediæ ordinatim applicatæ; hoc eſt, $\frac{A4B4+A5B5}{2}=k$; $b4=l$; $\frac{c3+c4}{2}=m$; $d3=n$; $\frac{e2+e3}{2}=o$; $f2=p$; &c. Et alternorum k, m, o, q, &c. coefficientes orientur ex multiplicatione terminorum hujus progreſſionis in ſe; $1\times x-OA4\times x-OA5\times x-OA3\times x-OA6\times x-OA2\times x-OA7\times x-OA\times x-OA8$ &c. Et reliquorum coefficientes ex multiplicatione horum per terminos hujus progreſſionis; $x-\frac{+OA4+OA5}{2}$, $x-\frac{+OA3+OA6}{2}$, $x-\frac{+OA2+OA7}{2}$, $x-\frac{+OA+OA8}{2}$, &c. Hoc eſt, erit $k+x-\frac{+OA4+OA5}{2}\times l+x^2-OA4+OA5x+OA4\times OA5\times m$ &c. ordinatim applicata PQ. Vel PQ=

$$\begin{array}{lllllllll} k+ & x\times l+ & x\times+ & x\times m+ & x\times+ & x\times+ & x & \times n \text{ &c.} \\ -\frac{1}{2}OA4 & -OA4 & -OA5 & -OA4 & -OA5 & -\frac{1}{2}OA3 & & \\ -\frac{1}{2}OA5 & & & & & -\frac{1}{2}OA6 & & \end{array}$$

Sive dic $x-\frac{+OA4+OA5}{2}=\pi$, $x-OA4\times x-OA5=\varrho$,

$\varrho\times x-\frac{+OA3+OA6}{2}=\sigma$, $\varrho\times x-OA3\times x-OA6=\tau$,

$\tau\times x-\frac{+OA2+OA7}{2}=\upsilon$, $\tau\times x-OA2\times x-OA7=\varphi$,

$\varphi\times x-\frac{+OA+OA8}{2}=\chi$, $\varphi\times x-OA\times x-OA8=\psi$,

Et erit $k+\pi l+\varrho m+\sigma n+\tau o+\upsilon p+\varphi q+\chi r+\psi s=PQ$.

PROP. V.

Prop. V & VI.

Datis aliquot terminis ſeriei cujuſcunque ad data intervalla diſpoſitis, invenire terminum quemvis intermedium quamproximè.

Ad rectam poſitione datam erigantur termini dati in dato angulo, interpoſitis datis intervallis, & per eorum puncta extima, per propoſitiones præcedentes, ducatur Linea Curva generis Parabolici. Hæc enim continget terminos omnes intermedios per ſeriem totam.

PROP. VI.

Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproximè, cujus Ordinatæ aliquot inveniri poſſunt.

Per terminos Ordinatarum ducatur Linea Curva generis Parabolici, ope propoſitionum præcedentium. Hæc enim figuram terminabit, quæ ſemper quadrari poteſt, et cujus area æquabitur areæ figuræ propoſitæ quamproximè.

SCHOLIUM.

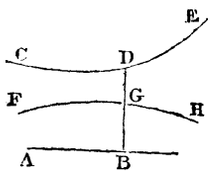
Utiles ſunt hæ Propoſitiones ad tabulas conſtruendas per interpolationem ſerierum, ut & ad ſolutiones Problematum quæ à quadraturis Curvarum dependent; præſertim ſi Ordinatarum intervalla & parva ſint & æqualia inter ſe, & Regulæ computentur, & in uſum reſerventur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut ſi quatuor ſint Ordinatæ ad æqualia intervalla ſitæ, ſit A ſumma primæ & quartæ, B ſumma ſecundæ & tertiæ, & R intervallum inter primam & quartam; & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B-A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A+3B}{8}$ R.

Et nota, quòd ubi Ordinatæ ſtant ad æquales ab invicem diſtantias, ſumendo ſummas Ordinatarum quæ ab Ordinatâ mediâ hinc inde æqualiter diſtant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova, cujus area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis eſt areæ Curvæ prioris, quam invenire oportuit. Quinetiam ſi pro Ordinatis novis ſumantur ſumma Ordinatæ primæ & ſecundæ,

Scholium. ſecundæ, et ſumma tertiæ & quartæ, & ſumma quintæ & ſextæ, & ſic deinceps; vel ſi ſumantur ſumma trium primarum Ordinatarum, & ſumma trium proximarum, & ſumma trium quæ ſunt deinceps; vel ſi ſumantur ſummæ quaternarum Ordinatarum, vel ſummæ quinarum; Area Curvæ novæ æqualis erit areæ Curvæ primò propoſitæ. Et ſic habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quotcunque, quadratura ejus ad quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per data verò puncta quotcunque non ſolùm Curvæ lineæ generis Parabolici, ſed etiam Curvæ lineæ innumeræ diverſorum generum duci poſſunt.

Sunto CDE, FGH Curvæ duæ Abſciſſam habentes communem



AB, et Ordinatas in eâdem rectâ jacentes BD, BG; & relatio inter has Ordinatas definiatur per æquationem quamcunque. Dentur puncta quotcunque, per quæ Curva CDE tranſire debet, & per æquationem illam dabuntur puncta totidem nova, per quæ Curva FGH tranſibit. Per propoſitiones ſuperiores deſcribatur Curva FGH generis Parabolici, quæ per puncta illa omnia nova tranſeat; & per æquationem eandem dabitur Curva CDE, quæ per puncta omnia primò data tranſibit.

ENUMERATIO

LINEARUM TERTII ORDINIS.

ARGUMENTI CAPITUM HUJUS LIBRI.

CAP. I.	*Linearum Ordines.*	Pag. 531
CAP. II.	*Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis superiorum Generum.*	p. ibid.
CAP. III.	*Reductio Curvarum omnium generis secundi ad Æquationum casus quatuor.*	p. 534
CAP. IV.	*Enumeratio Curvarum.*	p. 537
CAP. V.	*Genesis Curvarum per Umbras.*	p. 555
CAP. VI.	*De Curvarum punctis duplicibus.*	p. 556
CAP. VII.	*De Curvarum descriptione Organicâ.*	p. ibid.
CAP. VIII.	*Constructio Æquationum per descriptionem Curvarum.*	p. 558

ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS.

CAPUT PRIMUM.

Linearum Ordines.

LINEÆ Geometricæ secundum numerum dimensionum æquationis, quâ relatio inter Ordinatas & Abscissas definitur, vel (quod perinde est) secundum numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ secari possunt, optimè distinguuntur in Ordines. Quâ ratione linea Primi Ordinis erit recta sola; eæ Secundi sive quadratici Ordinis erunt Sectiones Conicæ & Circulus; & eæ Tertii sive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Cissois Veterum, & reliquæ quas hîc enumerare suscepimus. Curva autem primi generis (siquidem recta inter curvas non est numeranda) eadem est cum lineâ secundi ordinis; & Curva secundi generis eadem cum lineâ ordinis tertii. Et linea ordinis infinitesimi, ea est quam recta in punctis infinitis secare potest; qualis est Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & linea omnis quæ per radii, vel rotæ, revolutiones infinitas generatur.

CAPUT SECUNDUM.

Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis superiorum generum.

SECTIONUM conicarum proprietates præcipuæ à Geometris passim traduntur. Et consimiles sunt proprietates Curvarum secundi generis, & reliquarum, ut ex sequenti proprietatum præcipuarum enumeratione constabit.

CAPUT II. 1. *De Curvarum ſecundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ, & ad Conicam Sectionem utrinque terminatæ, ducantur, recta duas earum biſecans biſecabit alias omnes, ideoque dicitur *Diameter* figuræ; & rectæ biſectæ dicuntur *Ordinatim Applicatæ* ad diametrum; & concurſus omnium diametrorum eſt *Centrum* figuræ; & interſectio Curvæ & Diametri *Vertex* nominatur; & diameter illa *Axis* eſt, cui ordinatim applicatæ inſiſtunt ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis ſecundi generis, ſi rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: recta, quæ ita ſecat has parallelas, ut ſumma duarum partium, ex uno ſecantis latere ad Curvam terminatarum, æquetur parti tertiæ ex altero latere ad Curvam terminatæ, eodem modo ſecabit omnes alias his parallelas, Curvæque in tribus punctis occurrentes rectas; hoc eſt, ita ut ſumma partium duarum, ex uno ipſius latere, ſemper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes, quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim Applicatas*; & rectam ſecantem, cui ordinatim applicantur, *Diametrum*; & interſectionem diametri & Curvæ, *Verticem*; & concurſum duarum diametrorum, *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad ordinatas rectangula, ſi modò aliqua ſit, etiam *Axis* dici poteſt; & ubi omnes diametri in eodem puncto occurrunt, iſtud erit *Centrum Generale*.

2. *De Aſymptotis & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Aſymptotos*, ea ſecundi tres, ea tertii quatuor & non plures habere poteſt, & ſic in reliquis. Et quemadmodum partes lineæ cujuſvis rectæ, inter Hyperbolam Conicam & duas ejus Aſymptotos, ſunt hinc inde æquales: ſic in Hyperbolis ſecundi generis, ſi ducatur recta quævis ſecans tam Curvam quàm tres ejus Aſymptotos in tribus punctis, ſumma duarum partium iſtius rectæ, quæ à duobus quibuſvis Aſymptotis in eandem plagam ad duo puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ, quæ à tertiâ Aſymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. *De*

3. *De Lateribus Rectis & Tranſverſis.* DE CURVARUM ANALOGIA.

Et quemadmodum in Conicis Sectionibus non Parabolicis, quadratum ordinatim applicatæ, hoc eſt, rectangulum Ordinatarum, quæ ad contrarias partes diametri ducuntur, eſt ad rectangulum partium diametri, quæ ad vertices Ellipſeos vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam linea, quæ dicitur *Latus Rectum*, ad partem diametri, quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus Tranſverſum*: ſic in Curvis non Parabolicis ſecundi generis, parallelepipedum ſub tribus ordinatim applicatis eſt ad parallelepipedum ſub partibus diametri, ad ordinatas & tres vertices figuræ abſciſſis, in ratione quâdam datâ: in quâ ratione ſi ſumantur tres rectæ ad tres partes diametri, inter vertices figuræ ſitas, ſingulæ ad ſingulas, tunc illæ tres rectæ dici poſſunt *Latera Recta* figuræ; & illæ partes diametri inter vertices, *Latera Tranſverſa*. Et ſicut in Parabolâ Conicâ, quæ ad unam & eandem diametrum unicum tantùm habet verticem, rectangulum ſub ordinatis æquatur rectangulo ſub parte diametri, quæ ad ordinatas & verticem abſcinditur, & rectâ quâdam datâ, quæ *Latus Rectum* dicitur: ſic in Curvis ſecundi generis, quæ non niſi duos habent vertices ad eandem diametrum, parallelopipedum ſub ordinatis tribus æquatur parallelopipedo ſub duabus partibus diametri, ad ordinatas & vertices illos duos abſciſſis, & rectâ quâdam datâ, quæ proinde *Latus Rectum* dici poteſt.

4. *De Ratione contentorum ſub parallelarum ſegmentis.*

Denique ſicut in Conicis Sectionibus, ubi duæ parallelæ ad Curvam utrinque terminatæ ſecantur à duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima à tertiâ, & ſecunda à quartâ, rectangulum partium primæ eſt ad rectangulum partium tertiæ ut rectangulum partium ſecundæ ad rectangulum partium quartæ: ſic ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ ſecundi generis, ſingulæ in tribus punctis, parallelopipedum partium primæ rectæ erit ad parallelopipedum partium tertiæ, ut parallelopipedum partium ſecundæ ad parallelopipedum partium quartæ.

5. *De*

CAPUT III. 5. *De Cruribus Hyperbolicis & Parabolicis & eorum plagis.*

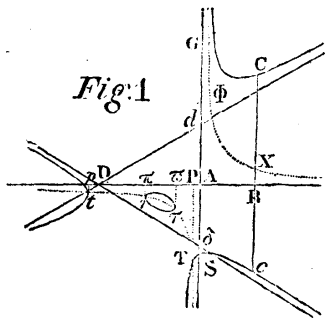
Curvarum ſecundi & ſuperiorum generum, æquè atque primi, crura omnia, in infinitum progredientia, vel *Hyperbolici* ſunt generis vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco, quòd ad Aſymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicum*, quod Aſymptoto deſtituitur. Hæc crura ex tangentibus optimè dignoſcuntur. Nam ſi punctum contactûs in infinitum abeat, tangens cruris Hyperbolici cum Aſymptoto coincidet, & tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evaneſcet, & nullibi reperietur. Invenitur igitur Aſymptotos cruris cujuſvis, quærendo tangentem cruris illius ad punctum infinitè diſtans. Plaga autem cruris infiniti invenitur, quærendo poſitionem rectæ cujuſvis, quæ tangenti parallela eſt, ubi punctum contactûs in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

CAPUT TERTIUM.

Reductio curvarum omnium generis ſecundi ad æquationum caſus quatuor.

1. LINEÆ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, ſeptimi & imparis cujuſque, duo habent ad minimum crura in infinitum verſus plagas oppoſitas progredientia. Et lineæ omnes Tertii ordinis duo habent ejuſmodi crura in plagas oppoſitas progredientia, in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabolâ *Carteſianâ*) tendunt.

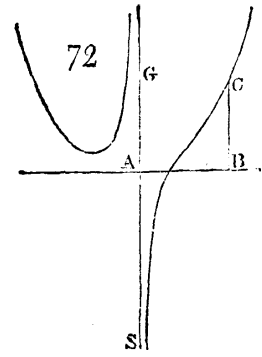
CAS. I.



Si crura illa ſint Hyperbolici generis, ſit GAS eorum Aſymptotos; & huic parallela agatur recta quævis, CBc, ad Curvam utrinque (ſi fieri poteſt) terminata, eademque biſecetur in puncto X; & locus puncti illius X erit Hyperbola Conica, puta XΦ, cujus una Aſymptotos eſt AG. Sit ejus altera Aſymptotos AB; & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur,

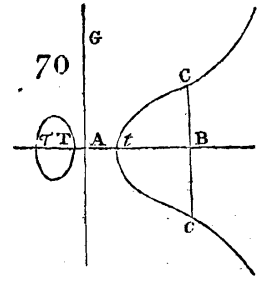
finitur, ſi AB dicatur x, & BC y, ſemper induet hanc formam, $xyy+ey=ax^3+bxx+cx+d$. Ubi termini, e, a, b, c, d, deſignant quantitates datas, ſignis ſuis + & − affectas; quarum quælibet deeſſe poſſunt, modò ex earum defectu figura in ſectionem conicam non vertatur. Poteſt autem Hyperbola illa Conica cum aſymptotis ſuis coincidere, id eſt punctum x in rectâ AB locari: & tunc terminus + ey deeſt.

CAS. II.



At ſi recta illa CBc non poteſt utrinque ad Curvam terminari, ſed Curvæ in unico tantùm puncto occurrit: age quamvis poſitione datam rectam, AB, Aſymptoto AS occurrentem in A; ut & aliam quamvis, BC, Aſymptoto illi parallelam, Curvæque occurrentem in puncto c: & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam, $xy=ax^3+bx^2+cx+d$.

CAS. III.

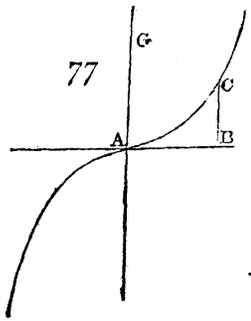


Quòd ſi crura illa oppoſita Parabolici ſint generis, recta CBc ad Curvam utrinque, ſi fieri poteſt, terminata in plagam crurum ducatur, & biſecetur in B: & locus puncti B erit linea recta. Sit iſta AB, terminata ad datum quodvis punctum A; & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam, $yy=ax^3+bx^2+cx+d$.

CAS. IV.

At verò ſi recta illa CBc in unico tantùm puncto occurrat Curvæ,

77



væ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non poſſit: ſit punctum illud c, & incidat recta illa, ad punctum B, in rectam quamvis aliam poſitione datam, & ad datum quodvis punctum A terminatam, AB: & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam, $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Nomina formarum.

2. Enumerando Curvas horum caſuum, Hyperbolam vocabimus *Inſcriptam*, quæ tota jacet in Aſymptoton angulo, ad inſtar Hyperbolæ Conicæ; *Circumſcriptam*, quæ Aſymptotos ſecat, & partes abſciſſas in ſinu ſuo applectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inſcribitur, & altero circumſcribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate ſuâ ſe invicem reſpiciunt, & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate ſuâ ſe invicem reſpiciunt, et in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa ſunt, & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo & cruribus divergentibus ad Aſymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ flexibus contrariis Aſymptoton ſecat, & utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decuſſat; *Nodatam*, quæ ſeipſam decuſſat, in orbem redeundo; *Cuſpidatam*, cujus partes duæ in angulo contactûs concurrunt, & ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet Ovalem infinitè parvam, id eſt punctum; & *Puram*, quæ per impoſſibilitatem duarum radicum, Ovali, Nodo, Cuſpide & Puncto Conjugato privatur. Eodem ſenſu Parabolam quoque *Convergentem, Divergentem, Cruribus Contrariis præditam, Cruciformem, Nodatam, Cuſpidatam, Punctatam* & *Puram* nominabimus.

3. In caſu primo ſi terminus ax^3 affirmativus eſt, figura erit Hyperbola triplex cum ſex cruribus Hyperbolicis, quæ juxta tres Aſymptotos, quarum nullæ ſunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Aſymptoti ſi terminus bx^2 non deeſt, ſe mutuò ſecabunt in tribus

 punctis,

punctis, triangulum $Dd\delta$ inter ſe continentes; ſin terminus bx^2 deeſt, convergent omnes ad idem punctum. In priori caſu, cape AD $=\frac{-b}{2a}$, & AD $=A\delta=\frac{b}{2\sqrt{a^3}}$, ac junge Dd, $D\delta$; & erunt Ad, Dd, $D\delta$ tres Aſymptoti. In poſteriori, duc ordinatam quamvis BC, ordinatæ principali AG parallelam, & in eâ utrinque productâ cape hinc inde BF & Bf ſibi mutuò æquales, & in eâ ratione ad AB quam habet $\sqrt{a}$ ad 1; jungeque AF, Af: & erunt AG, AF, Af tres Aſymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum hyperbolicorum ſectiones conicas ſuperat. GENERA LINEARUM TERTII ORDINIS.

4. In Hyperbolâ omni Redundante, ſi neque terminus ey deſit, neque ſit $bb-4ac$ æquale $\pm ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit diametrum; ſin eorum alterutrum accidit, Curva habebit unicam diametrum, & tres ſi utrumque. Diameter autem ſemper tranſit per interſectionem duarum Aſymptoton, & biſecat rectas omnes, quæ ad Aſymptotos illas utrinque terminantur, & parallelæ ſunt Aſymptoto tertiæ. Eſtque abſciſſa AB diameter figuræ, quoties terminus ey deeſt. *Diametrum* vero abſolutè dictam, hîc & in ſequentibus, in vulgari ſignificatu uſurpo; nempè pro Abſciſſâ, quæ paſſim habet Ordinatas binas æquales ad idem punctum hinc inde inſiſtentes.

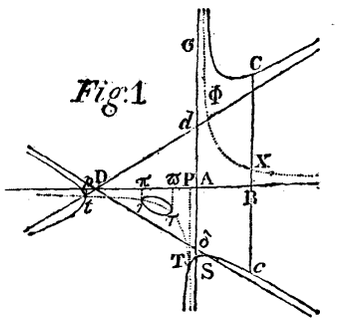
CAPUT QUARTUM.

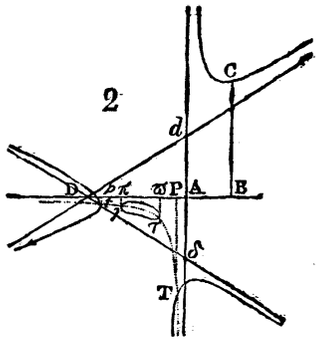
Enumeratio Curvarum.

I. *De Hyperbolis novem Redundantibus, quæ diametro deſtituuntur, & tres habent Aſymptotos triangulum capientes.*

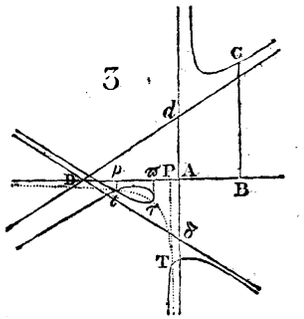
1. SI Hyperbola Redundans nullam habet diametrum, quærantur æquationis hujus $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=y$ radices quatuor, ſeu valores ipſius x. Eæ ſunto AP, Aϖ, Aτ, Ap. Erigantur Ordinatæ PT, $\varpi\tau$, $\pi\rho$, pt, & hæ tangent Curvam in punctis totidem T, τ, ρ, t, & tangendo dabunt limites Curvæ, per quos Species ejus innoteſcet.

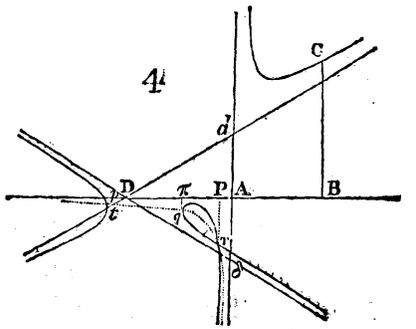
2. Nam ſi radices omnes AP, Aϖ, Ap, (fig. 1, 2) ſunt reales, ejuſdem ſigni, et inæquales, Curva conſtat ex tribus Hyperbolis, (Inſcriptâ, Circumſcriptâ & Ambigenâ) cum *Ovali*. Hyperbolarum una jacet verſus D; altera verſus d; tertia verſus δ; & Ovalis ſemper jacet intra triangulum $Dd\delta$, atque etiam inter medios limites ρ & τ, in quibus utique tangitur ab Ordinatis $\pi\rho$ & $\varpi\tau$. Et hæc eſt *ſpecies prima*.





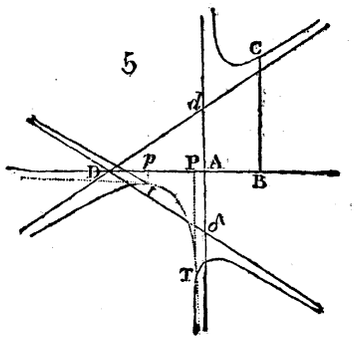
3. Si è radicibus duæ maximæ $A\pi$, Ap, (fig. 3) vel duæ minimæ AP, $A\varpi$, (fig. 4) æquantur inter ſe, & ejuſdem ſunt ſigni cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola Circumſcripta ſibi

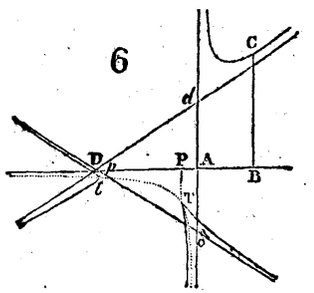




invicem junguntur, coeuntibus earum punctis contactûs, ϛ & *t*, vel τ & τ; & crura Hyperbolæ, ſeſe decuſſando, in Ovalem continuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *ſpecies* eſt *ſecunda*.

4. Si è radicibus tres maximæ Ap, $A\pi$, $A\varpi$, (fig. 5) vel tres

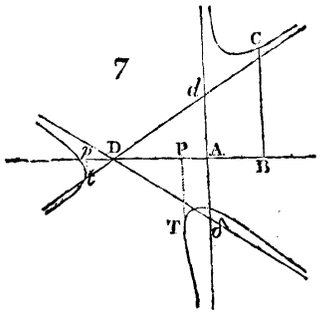


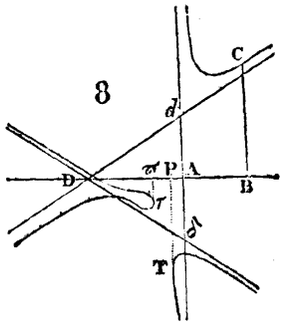


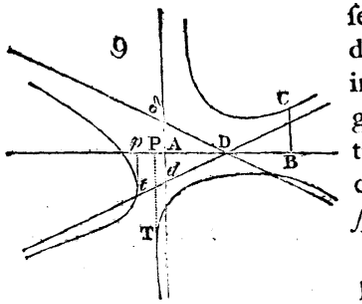
minimæ

minimæ $A\pi$, $A\varpi$, AP (fig. 6) æquentur inter ſe, Nodus in *Cuſpidem* acutiſſimum convertetur. Nam crura duo Hyperbolæ Circumſcriptæ ibi in angulo contactûs concurrent, & non ultrà producentur. Et hæc eſt *ſpecies tertia*. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

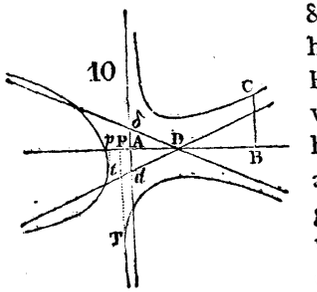
5. Si è radicibus duæ mediæ $A\varpi$ & $A\pi$ (fig. 7) æquentur inter





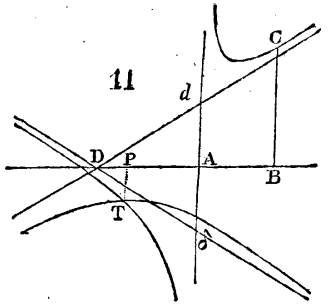


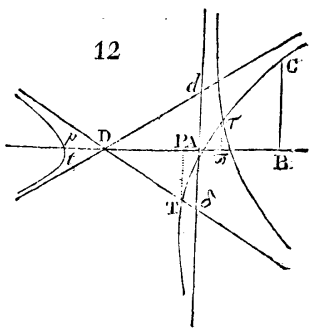
ſe, puncta contactûs τ & ϛ coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in punctum evanuit; & conſtat figura ex tribus Hyperbolis, Inſcriptâ, Circumſcriptâ, & Ambigenâ, cum *puncto* conjugato. Quæ eſt *ſpecies quarta*.

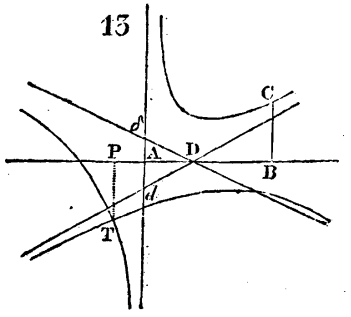


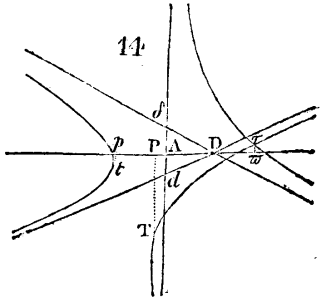
6. Si duæ ex radicibus ſunt impoſſibiles, & reliquæ duæ inæquales, & ejuſdem ſigni (nam ſigna contraria habere nequeunt), *Puræ* habebuntur Hyperbolæ tres, ſine Ovali vel Nodo vel Cuſpide vel puncto conjugato: & hæ Hyperbolæ vel ad latera trianguli ab Aſymptotis comprehenſi, vel ad angulos ejus jacebunt; & perinde *ſpeciem* vel *quintam* (fig. 7, 8) vel *ſextam* (fig. 9, 10) conſtituent.

7. Si è radicibus duæ ſunt æquales, & alteræ duæ vel impoſſibiles ſunt (fig. 11. 13) vel reales (fig. 12. 14) cum ſignis quæ à ſignis æqualium radicum diverſa ſunt, figura *Cruciformis* habebitur:



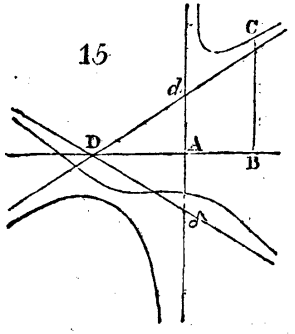


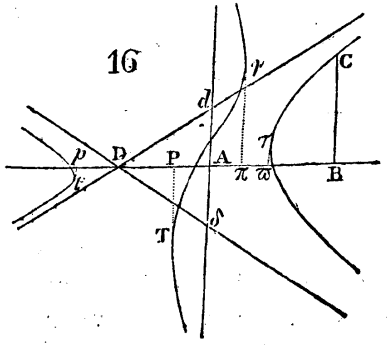




bebitur: nempe duæ ex Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt, idque vel ad verticem trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 13, 14) vel ad ejus baſem (fig. 11, 12). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *ſeptima* & *octava*.

8. Si denique radices omnes ſunt impoſſibiles (fig. 15) vel ſi





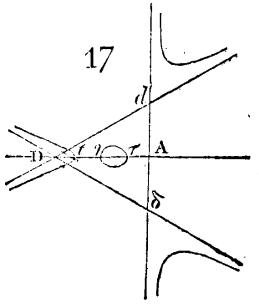
omnes

omnes ſunt reales & inæquales (fig. 16) & earum duæ ſunt affirmativæ, & alteræ duæ negativæ; tunc duæ habebuntur Hyperbolæ, ad angulos oppoſitos duarum Aſymptoton, cum Hyperbolâ *Anguineâ* circa Aſymptoton tertiam. Quæ *ſpecies* eſt *nona*. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

9. Et hi ſunt omnes radicum caſus poſſibiles. Nam ſi duæ radices ſunt æquales inter ſe, & aliæ duæ ſunt etiam inter ſe æquales, figura evadet Sectio Conica cum lineâ rectâ.

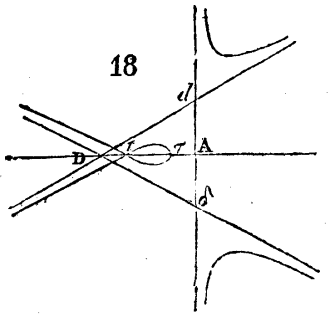
II. *De Hyperbolis duodecim Redundantibus unicam tantùm diametrum habentibus.*

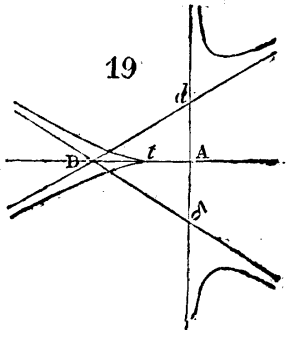
1. Si Hyperbola Redundans habet unicam tantùm diametrum, ſit ejus diameter Abſciſſa AB, & æquationis hujus $ax^3+bx^2+cx+d=0$ quære tres radices, ſeu valores x.



2. Si radices illæ ſunt omnes reales & ejuſdem ſigni, figura conſtabit ex *Ovali* intra triangulum D$d\delta$ (fig. 17) jacente, & tribus Hyperbolis ad angulos ejus; nempe Circumſcriptâ ad angulum D, & Inſcriptis duabus ad angulos d & δ. Et hæc eſt *ſpecies decima*.

3. Si radices duæ majores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni, crura Hyperbolæ jacentis verſus D (fig. 18) ſeſe decuſſabunt in formâ *Nodi*, propter contactum Ovalis. Quæ *ſpecies* eſt *undecima*.

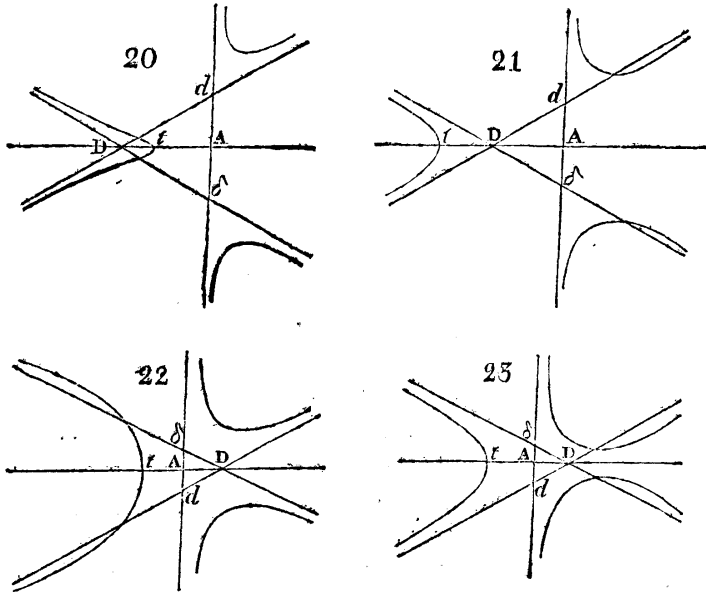




4. Si tres radices ſunt æquales, Hyperbola iſta fit *Cuſpidata* ſine Ovali (fig. 19). Quæ *ſpecies* eſt *duodecima*.

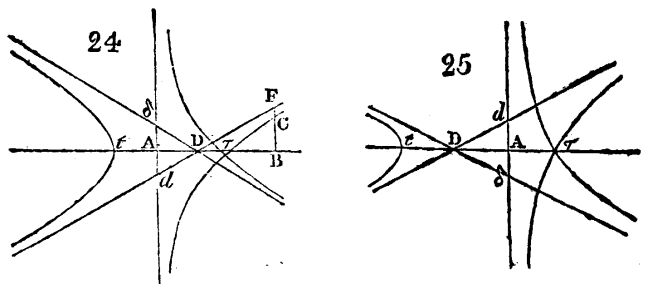
CAPUT IV. 5. Si radices duæ minores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni, Ovalis in *punctum* evanuit (fig. 20). Quæ *ſpecies* eſt *decima tertia*.

6. In ſpeciebus quatuor noviſſimis, Hyperbola, quæ jacet verſus D, Aſymptotos in ſinu ſuo amplectitur; reliquæ duæ in ſinu Aſymptoton jacent.

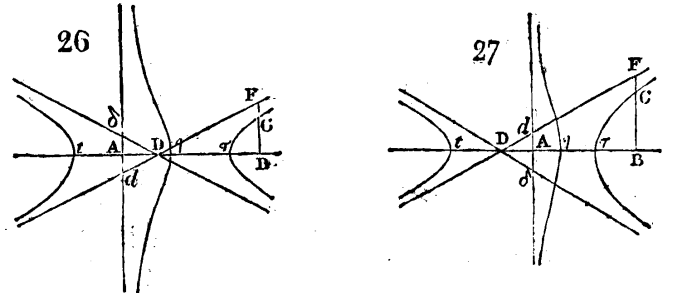


7. Si duæ ex radicibus ſunt impoſſibiles, habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ* ſine Ovali, Decuſſatione, vel Cuſpide. Et hujus caſûs *ſpecies* ſunt quatuor: nempe *decima quarta* ſi Hyperbola Circumſcripta jacet verſus D (fig. 20), & *decima quinta* ſi Hyperbola Inſcripta jacet verſus D (fig. 21), *decima ſexta* ſi Hyperbola Circumſcripta jacet ſub baſi $d\delta$ trianguli $D d\delta$ (fig. 22), & *decima ſeptima* (fig. 23) ſi Hyperbola Inſcripta jacet ſub eâdem baſi.

8. Si



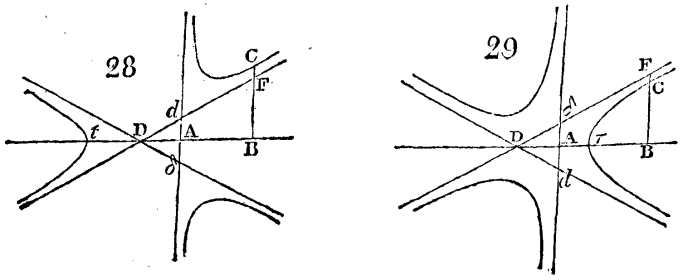
8. Si duæ radices ſunt æquales, & tertia ſigni diverſi, figura erit *Cruciformis*. Nempe duæ ex tribus Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt, idque vel ad verticem trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 24) vel ad ejus baſem (fig. 25). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *decima octava*, & *decima nona*.



9. Si duæ radices ſunt inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni diverſi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppoſitis angulis duarum Aſymptoton, cum *Conchoidali* intermediâ. *Conchoidalis* autem vel jacebit ad eaſdem partes Aſymptoti ſuæ cum triangulo ab Aſymptotis conſtituto (fig. 26) vel ad partes contrarias (fig. 27). Et hi duo caſus conſtituunt *ſpeciem vigeſimam* & *vigeſimam primam*.

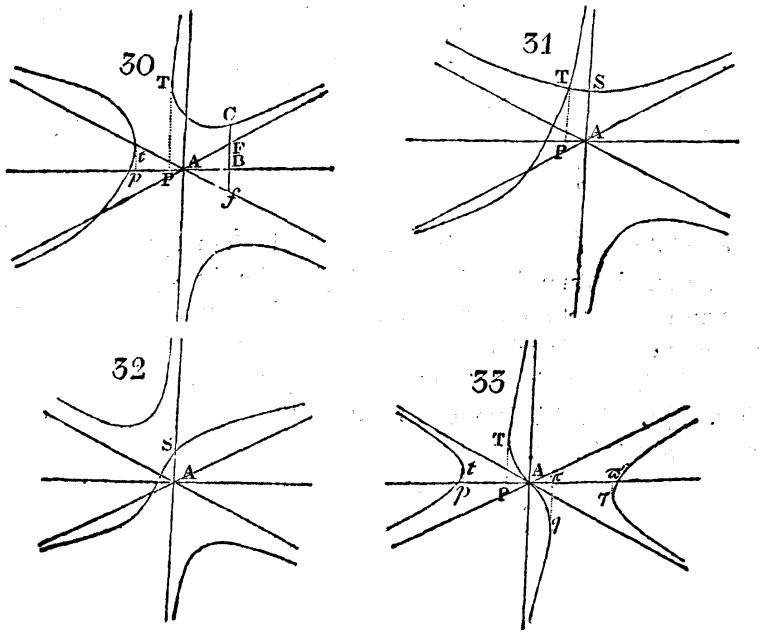
III. De

III. *De Hyperbolis duabus Redundantibus cum tribus diametris.*



1. Hyperbola Redundans quæ habet tres diametros, conſtat ex tribus Hyperbolis in ſinubus Aſymptoton jacentibus; idque vel ad angulos trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 28) vel ad ejus latera (fig. 29). Caſus prior dat *ſpeciem vigeſimam ſecundam*, & poſterior *ſpeciem vigeſimam tertiam.*

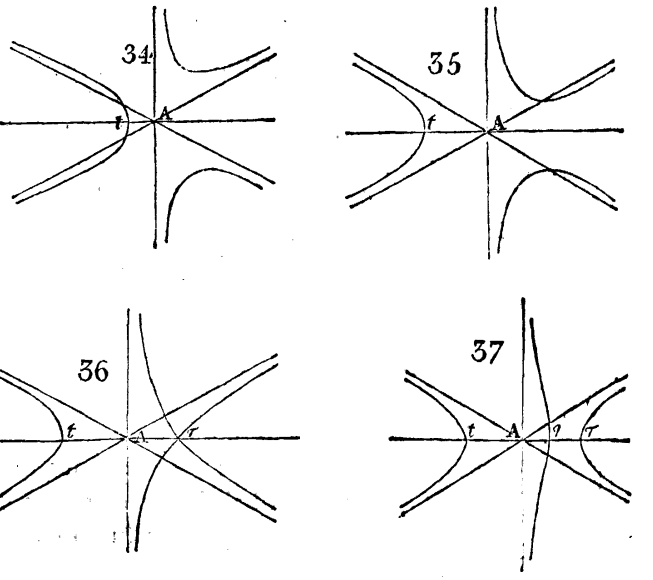
IV. *De Hyperbolis novem Redundantibus cum Aſymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.*



1. Si

1. Si tres Aſymptoti in puncto communi ſe mutuo decuſſant, vertuntur ſpecies quinta & ſexta in *vigeſimam quartam* (fig. 30), ſeptima & octava in *vigeſimam quintam* (fig. 31), & nona in *vigeſimam ſextam* (fig. 32), ubi Anguinea non tranſit per concurſum Aſymptoton; & in *vigeſimam ſeptimam* ubi tranſit per concurſum illum (fig. 33), quo caſu termini *b* ac *d* deſunt, & concurſus Aſymptoton eſt Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppoſitis æqualiter diſtans. Et hæ quatuor ſpecies diametrum non habent. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

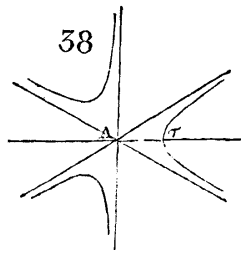
2. Vertuntur etiam *ſpecies* decima quarta ac decima ſexta in



vigeſimam octavam (fig. 34); decima quinta ac decima ſeptima in *vigeſimam nonam* (fig. 35); decima octava & decima nona in *triceſimam* (fig. 36), & vigeſima cum vigeſimâ primâ in *triceſimam primam* (fig. 37). Et hæ ſpecies unicam habent diametrum.

3. Ac denique ſpecies vigeſima ſecunda & vigeſima tertia ver-

 tuntur

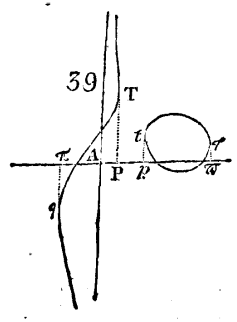


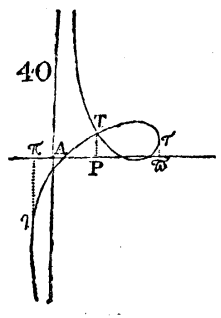
tuntur in *ſpeciem triceſimam ſecundam*, cujus tres ſunt diametri per concurſum Aſymptoton tranſeuntes (fig. 38).

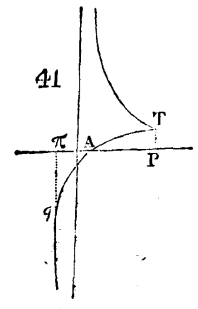
4. Quæ omnes converſiones facillimè intelliguntur, faciendo ut triangulum ab Aſymptotis comprehenſum diminuatur donec in punctum evaneſcat.

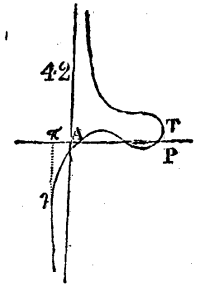
V. *De Hyperbolis ſex Defectivis diametrum non habentibus.*

1. Si in primo æquationum caſu terminus ax^3 negativus eſt, figura erit Hyperbola Defectiva unicam habens Aſymptoton & duo tantùm crura hyperbolica, juxta Aſymptoton illam, in plagas contrarias infinitè progredientia. Et Aſymptotos illa eſt ordinata









prima & principalis AG. Si terminus *ey* non deeſt, figura nullam habebit diametrum; ſi deeſt, habebit unicam. In priori caſu ſpecies ſic enumerantur.

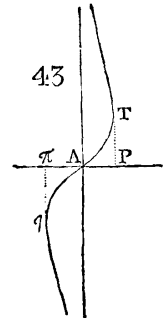
2. Si æquationis hujus $ax^4=bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee$ radices omnes Aπ, AP, A*p*, Aϖ, (fig 39) ſunt reales & inæquales, figura erit Hyperbola Anguinea, Aſymptoton flexu contrario amplexa, cum *Ovali* conjugatâ. Quæ *ſpecies* eſt *triceſima tertia*.

3. Si radices duæ mediæ AP & A*p* (fig. 40) æquentur inter ſe, Ovalis & Anguinea junguntur, ſeſe decuſſantes in formâ *Nodi*. Quæ eſt *ſpecies triceſima quarta*.

4. Si

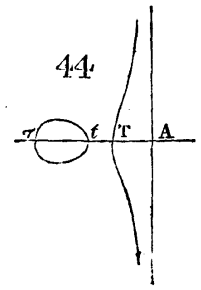
4. Si tres radices ſunt æquales, Nodus vertetur in *Cuſpidem* acutiſſimum in vertice Anguineæ (fig. 41). Et hæc eſt *ſpecies triceſima quinta*.

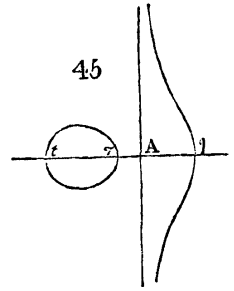
5. Si è tribus radicibus ejuſdem ſigni duæ maximæ A*p* & Aϖ (fig. 43) ſibi mutuò æquantur, Ovalis in *punctum* evanuit. Quæ *ſpecies* eſt *triceſima ſexta*.

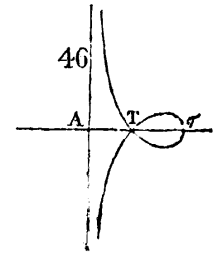


6. Si radices duæ quævis imaginariæ ſunt, ſola manebit Anguinea *Pura* ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide vel puncto conjugato. Si Anguinea illa non tranſit per punctum A (fig. 42), *ſpecies* eſt *triceſima ſeptima*; ſin tranſit per punctum illud A (id quod contingit ubi termini *b* ac *d* deſunt), punctum illud A erit Centrum figuræ, rectas omnes per ipſum ductas & ad Curvam utrinque terminatas biſecans (fig. 43). Et hæc eſt *ſpecies triceſima octava*.

VI. *De Hyperbolis ſeptem Defectivis diametrum habentibus.*



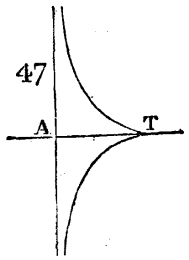




1. In altero caſu ubi terminus *ey* deeſt, & propterea figura diametrum habet, ſi æquationis hujus $ax^3=bx^2+cx+d$ radices omnes AT, A*t*, Aτ, (fig. 44) ſunt reales, inæquales & ejuſdem ſigni, figura erit Hyperbola Conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ eſt *ſpecies triceſima nona*.

2. Si duæ radices ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni contrarii, *Ovalis* jacebit ad Concavitatem conchoidalis (fig. 45). Eſtque *ſpecies quadrageſima*.

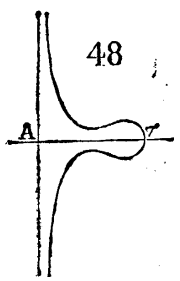
3. Si radices duæ minores AT, A*t*, (fig. 46) ſunt æquales, &

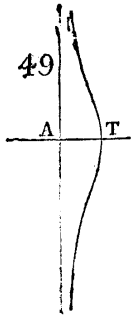


tertia AT eſt ejuſdem ſigni, Ovalis & Conchoidalis jungentur, ſeſe decuſſando in modum *Nodi*. Quæ *ſpecies* eſt *quadrageſima prima*.

4. Si tres radices ſunt æquales, Nodus mutabitur in *Cuſpidem*, & figura erit *Ciſſois Veterum* (fig. 47). Et hæc eſt *ſpecies quadrageſima ſecunda*.

5. Si radices duæ majores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni, Conchoidalis habebit *punctum* conjugatum ad convexitatem ſuam (fig. 49). Eſtque *ſpecies quadrageſima tertia*.

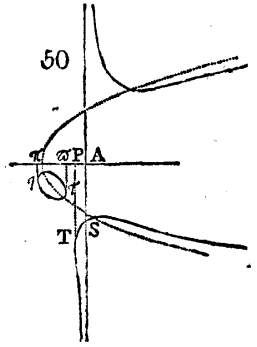


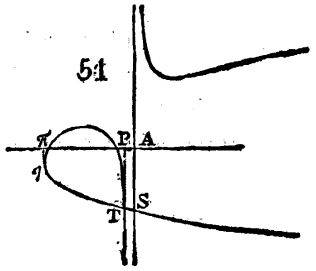


6. Si radices duæ ſunt æquales, & tertia eſt ſigni contrarii, Conchoidalis habebit *punctum* conjugatum ad concavitatem ſuam (fig. 49). Eſtque *ſpecies quadrageſima quarta*.

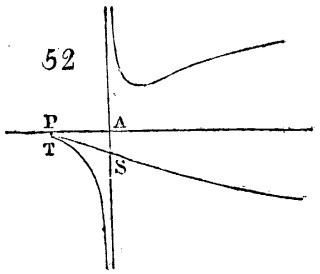
7. Si radices duæ ſunt impoſſibiles, habebitur Conchoidalis *Pura* ſine Ovali, Nodo, Cuſpide vel puncto conjugato (fig. 48, 49). Quæ *ſpecies* eſt *quadrageſima quinta*.

VII. *De Hyperbolis ſeptem Parabolicis diametrum non habentibus.*





1. Siquando in primo æquationum caſu terminus ax^3 deeſt, & terminus



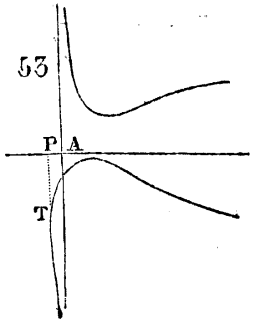
terminus bx^2 non deeſt, figura erit Hyperbola Parabolica, duo habens crura Hyperbolica ad unam Aſymptoton SAG, & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si terminus ey non deeſt, figura nullam habebit diametrum; ſin deeſt, habebit unicam. In priori caſu ſpecies ſunt hæ. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

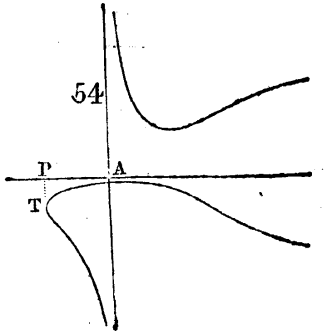
2. Si tres radices AP, Aϖ, Aπ (fig. 50) æquationis hujus $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, figura conſtabit ex *Ovali* & aliis duabus Curvis, quæ partim Hyperbolicæ ſunt & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cruribus Hyperbolicis ſibi proximis. Et hæc eſt *ſpecies quadrageſima ſexta*.

3. Si radices duæ minores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni, Ovalis & una Curvarum illarum hyperbolo-parabolicarum junguntur, & ſe decuſſant in formam *Nodi* (fig. 51). Quæ *ſpecies* eſt *quadrageſima ſeptima*.

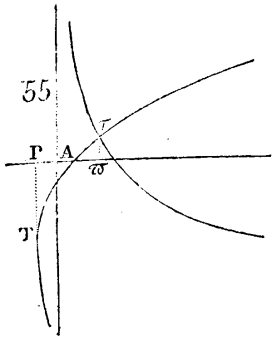
4. Si tres radices ſunt æquales, Nodus ille in Cuſpidem vertitur (fig. 52). Eſtque *ſpecies quadrageſima octava*.

5. Si radices duæ majores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni, Ovalis in *punctum* conjugatum evanuit (fig. 53). Quæ *ſpecies* eſt *quadrageſima nona*.



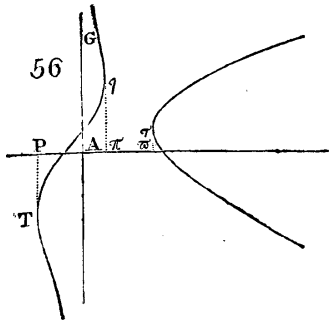


6. Si



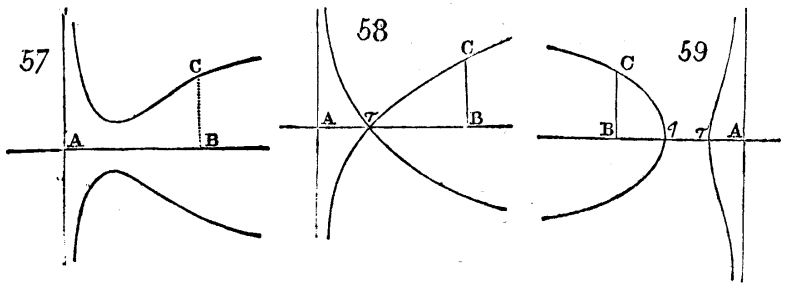
6. Si duæ radices ſunt impoſſibiles, manebunt *Puræ* illæ duæ Curvæ hyperbolo-paraboliçæ ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide vel puncto conjugato; & *ſpeciem quinquageſimam* conſtituent (fig. 53, 54.)

7. Si radices duæ ſunt æquales, & tertia eſt ſigni contrarii, Curvæ illæ hyperbolo-parabolicæ junguntur, ſeſe decuſſando in morem crucis (fig. 55). Eſtque *ſpecies quinquageſima prima.*



8. Si radices duæ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni contrarii, figura evadet Hyperbola Anguinea circa Aſymptoton AG (fig. 56), cum Parabolâ conjugatâ. Et hæc eſt *ſpecies quinquageſima ſecunda.*

VIII. *De Hyperbolis quatuor Parabolicis diametrum habentibus.*



1. In altero caſu ubi terminus *ey* deeſt, & figura diametrum habet, ſi duæ radices æquationis hujus $bx^2+cx+d=0$ ſunt impoſſibiles, duæ habentur figuræ hyperbolo-parabolicæ à diametro AB (fig. 57) hinc inde æqualiter diſtantes. Quæ *ſpecies* eſt *quinquageſima tertia.*

2. Si

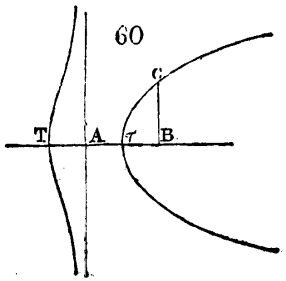
2. Si æquationis illius radices duæ ſunt impoſſibiles, figuræ hyperbolo-paraboliçæ junguntur, ſeſe decuſſantes in morem crucis; & *ſpeciem quinquageſimam quartam* conſtituunt (fig. 58).

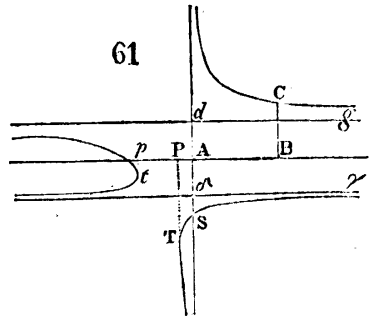
3. Si radices illæ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabolâ ex eodem latere Aſymptoti (fig. 59). Eſtque *ſpecies quinquageſima quinta.*

4. Si radices illæ ſunt ſigni contrarii, habetur Conchoidalis cum Parabolâ ad alteras partes Aſymptoti (fig. 60). Quæ *ſpecies* eſt *quinquageſima ſexta.*

IX. *De quatuor Hyperboliſmis Hyperbolæ.*

1. Siquando in primo æquationum caſu terminus uterque ax^3 & bx^2 deeſt, figura erit Hyperboliſmus ſectionis alicujus conicæ. Hyperboliſmum figuræ voco, cujus Ordinata prodit applicando contentum ſub Ordinatâ figuræ illius & rectâ datâ ad Abſciſſam communem. Hâc ratione linea recta vertitur in Hyperbolam Conicam, & Sectio omnis Conica vertitur in aliquam figurarum, quas hîc Hyperboliſmos ſectionum conicarum voco. Nam æquatio ad figuras de quibus agimus, nempe $xy^2+ey=cx+d$, dat





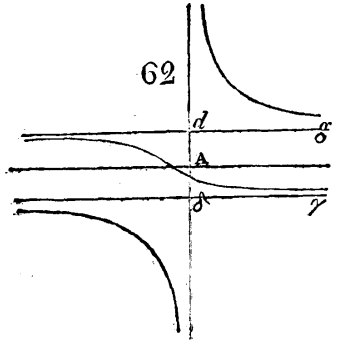
$y=\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2x}$, quæ generatur applicando contentum ſub Ordinatâ ſectionis conicæ $\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2m}$ & rectâ datâ m, ad Curvarum Abſciſſam communem x. Unde liquet, quòd figura genita Hyperboliſmus erit Hyperbolæ, Ellipſeos vel Parabolæ, perinde ut terminus *ex* affirmativus eſt, vel negativus, vel nullus.

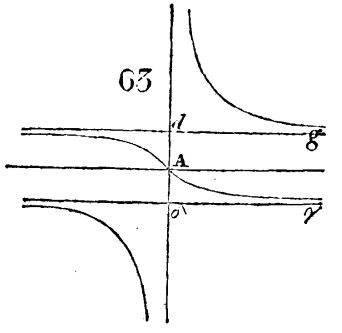
2. Hyper-

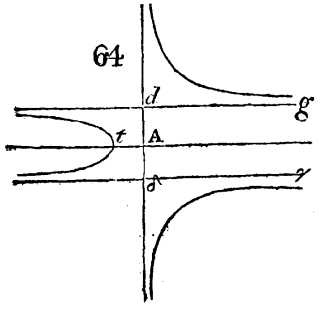
CAPUT IV.

2. Hyperboliſmus Hyperbolæ tres habet Aſymptotos; quarum una eſt Ordinata prima & principalis Ad, alteræ duæ ſunt parallelæ Abſciſſæ AB, ab eâdem hinc inde æqualiter diſtantes. In Ordinatâ principali Ad, cape Ad, Aδ hinc inde æquales quantitati $\sqrt{c}$; & per puncta d ac δ age dg, $\delta\gamma$ Aſymptotos abſciſſæ AB parallelas.

3. Ubi terminus ey non deeſt, figura nullam habet diametrum. In hoc caſu, ſi æquationis hujus $cx^3+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices duæ AP, Ap (fig. 61) ſunt reales & inæquales (nam æquales eſſe nequeunt niſi figura ſit Conica Sectio) figura conſtabit ex tribus Hyperbolis ſibi oppoſitis, quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ duæ jacent extrà. Et hæc eſt *ſpecies quinquageſima ſeptima*.





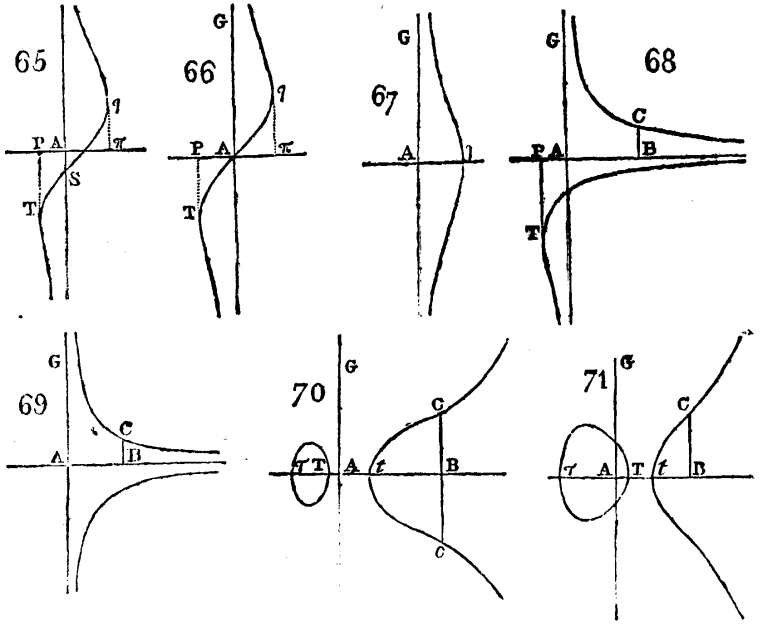


4. Si radices illæ duæ ſunt impoſſibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppoſitæ, extra Aſymptotos parallelas, & Anguinea Hyperbolica intra eaſdem. Hæc figura duarum eſt ſpecierum. Nam centrum non habet ubi terminus d non deeſt (fig. 62); ſed ſi terminus ille deeſt, punctum A eſt ejus centrum (fig. 63). Prior *ſpecies* eſt *quinquageſima octava*, poſterior *quinquageſima nona*.

5. Quòd ſi terminus ey deeſt, figura conſtabit ex tribus Hyperbolis oppoſitis; quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ

alteræ duæ jacent extrà, ut in ſpecie quinquageſimâ quartâ; & præterea diametrum habet, quæ eſt abſciſſa AB (fig. 64). Et hæc eſt *ſpecies ſexageſima*. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

X. *De tribus Hyperboliſmis Ellipſeos.*



1. Hyperboliſmus Ellipſeos per hanc æquationem definitur; $xy^2+ey=ex+d$: & unicam habet Aſymptoton, quæ eſt Ordinata principalis Ad (fig. 65). Si terminus ey non deeſt, figura eſt Hyperbola Anguinea ſine diametro; atque etiam ſine centro, ſi terminus d non deeſt. Quæ *ſpecies* eſt *ſexageſima prima*.

2. At ſi terminus d deeſt, figura habet centrum ſine diametro, & centrum ejus eſt punctum A (fig. 66). *Species* verò eſt *ſexageſima ſecunda*.

3. Et ſi terminus ey deeſt, & terminus d non deeſt, figura eſt Conchoidalis ad Aſymptoton AG (fig. 67) habetque diametrum ſine centro, & diameter ejus eſt abſciſſa AB. Quæ *ſpecies* eſt *ſexageſima tertia*.

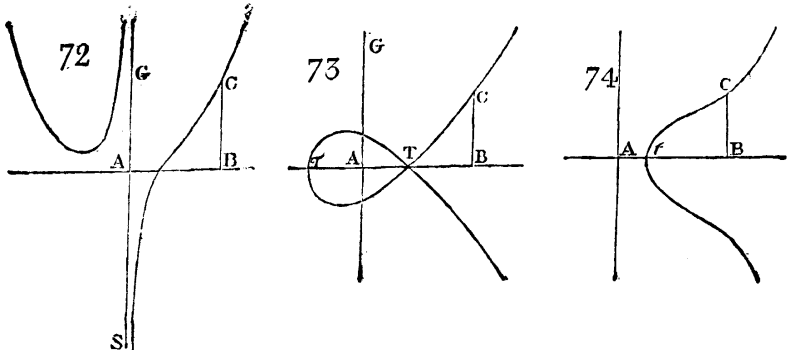
XI. *De duobus Hyperboliſmis Parabolæ.*

Hyperboliſmus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2+ey=d$;

Caput IV. $ey=d$; & duas habet Aſymptotos, Abſciſſam AB & Ordinatam primam & principalem AG. Hyperbolæ vero in hâc figurâ ſunt duæ, non in aſymptoton angulis oppoſitis, ſed in angulis qui ſunt deinceps, jacentes; idque ad utrumque latus abſciſſæ AB, & vel ſine diametro, ſi terminus ey habetur (fig. 68), vel cum diametro ſi terminus ille deeſt (fig. 69). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *ſexageſima quarta* & *ſexageſima quinta*.

XII. *De Tridente.*

In Secundo æquationum caſu habebatur æquatio $xy=ax^3+bx^2+cx+d$. Et figura in hoc caſu habet quatuor crura infinita; quorum duo ſunt Hyperbolica, circa Aſymptoton AG (fig. 72) in contrarias partes tendentia, & duo Parabolica, convergentia, & cum



prioribus ſpeciem Tridentis ferè efformantia. Eſtque hæc figura Parabola illa, per quam *Carteſius* æquationes ſex dimenſionum conſtruxit. Hæc eſt igitur *ſpecies ſexageſima ſexta*.

XIII. *De Parabolis quinque Divergentibus.*

1. In Tertio caſu æquatio erat $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$, & Parabolam deſignat, cujus crura divergunt ab invicem, & in contrarias partes infinitè progrediuntur. Abſciſſa AB eſt ejus diameter, & Species ejus ſunt quinque ſequentes.

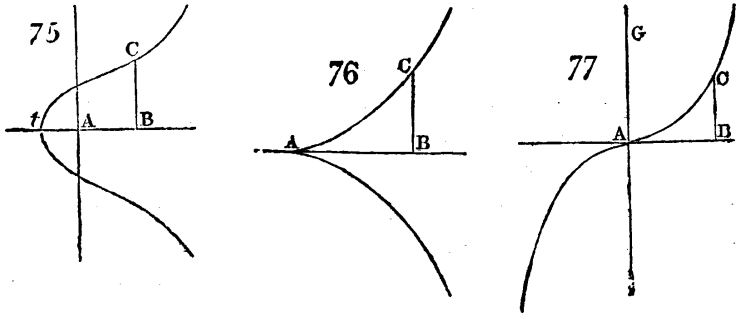
2. Si æquationis $ax^3+bx^2+cx+d=0$, radices omnes AT, AT, At ſunt reales & inæquales, figura eſt Parabola Divergens Campaniformis, cum *Ovali* ad verticem (fig. 70, 71). Et *ſpecies* eſt *ſexageſima ſeptima*.

3. Si

3. Si radices duæ ſunt æquales, Parabola prodit vel *Nodata* contingendo Ovalem (fig. 73), vel *Punctata* ob Ovalem infinitè parvam (fig. 74). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *ſexageſima octava* & *ſexageſima nona*.

4. Si tres radices ſunt æquales Parabola erit *Cuſpidata* in vertice (fig. 76). Et hæc eſt Parabola *Neiliana*, quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et eſt *ſpecies ſeptuageſima*.

5. Si radices duæ ſunt impoſſibiles, habetur Parabola *Pura* Campaniformis (fig. 74, 75) *ſpeciem ſeptuageſimam primam* conſtituens.



XIV. *De Parabolâ Cubicâ.*

In Quarto caſu æquatio erat $y=ax^3+bx^2+cx+d$: & hæc æquatio Parabolam deſignat, quæ crura habet contraria, & *Cubica* dici ſolet (fig. 77). Et ſic *Species* omnino ſunt *ſeptuaginta duæ*.

CAPUT QUINTUM.

Geneſis Curvarum per Umbras.

1. SI in planum infinitum, à puncto lucido illuminatum, umbræ figurarum projiciantur, umbræ Sectionum Conicarum ſemper erunt Sectiones Conicæ; eæ Curvarum ſecundi generis ſemper erunt Curvæ ſecundi generis; eæ Curvarum tertii generis ſemper erunt Curvæ tertii generis, & ſic deinceps in infinitum.

2. Et quemadmodum Circulus, umbram projiciendo, generat Sectiones omnes Conicas; ſic Parabolæ quinque divergentes umbris ſuis generant & exhibent alias omnes ſecundi generis Curvas:

CAPUT VI & VII. & ſic Curvæ quædam ſimpliciores aliorum generum inveniri poſſunt, quæ alias omnes eorundem generum Curvas, umbris ſuis à puncto lucido in planum projectis, formabunt.

CAPUT SEXTUM.

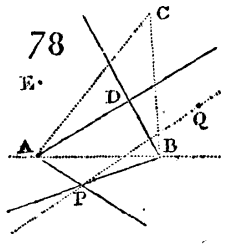
De Curvarum Punctis duplicibus.

DIXIMUS Curvas ſecundi generis à lineâ rectâ in punctis tribus ſecari poſſe. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut cùm recta per Ovalem infinitè parvam tranſit; vel per concurſum duarum partium Curvæ, ſe mutuò ſecantium vel in Cuſpidem coeuntium, ducitur. Et ſiquando rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantùm puncto ſecant, (ut fit in Ordinatis Parabolæ *Carteſianæ* & Parabolæ Cubicæ, nec non in rectis Abſciſſæ Hyperboliſmorum Hyperbolæ & Parabolæ parallelis) concipiendum eſt, quòd rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam diſtantiam ſita (ut ita dicam) tranſeunt. Hujuſmodi interſectiones duas coincidentes, ſive ad finitam ſint diſtantiam ſive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem, quæ habent punctum duplex, deſcribi poſſunt per ſequentia Theoremata.

CAPUT VII.

De Curvarum deſcriptione Organicâ.

THEOR. I.



SI anguli duo magnitudine dati, PAD, PBD, circa polos poſitione datos, A, B, rotentur; & eorum crura, AP, BP, concurſu ſuo, P, percurrant lineam rectam; crura duo reliqua, AD, BD, concurſu ſuo, D, deſcribent Sectionem Conicam per polos A, B tranſeuntem: præterquam ubi linea illa recta tranſit per polorum alterutrum, A vel B, vel anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt; quibus in caſibus punctum D deſcribet lineam rectam.

THEOR. II.

Si crura prima, AP, BP, concurſu ſuo, P, percurrant Sectionem Conicam

Conicam per polum alterutrum A tranſeuntem, crura duo reliqua, AD, BD concurſu ſuo, D, deſcribent Curvam ſecundi generis per polum alterum B tranſeuntem, & punctum duplex habentem in polo primo A, per quem ſectio conica tranſit: præterquam ubi anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt; quo caſu punctum D deſcribet aliam Sectionem Conicam per polum A tranſeuntem. DESCRIPTIONES ORGANICÆ.

THEOR. III.

At ſi Sectio Conica, quam punctum P percurrit, tranſeat per neutrum polorum A, B; punctum D deſcribet Curvam ſecundi vel tertii generis, punctum duplex habentem. Et punctum illud duplex in concurſu crurum deſcribentium, AD, BD, invenietur, ubi anguli BAP, ABP ſimul evaneſcunt. Curva autem deſcripta ſecundi erit generis, ſi anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt; aliàs erit tertii generis, & alia duo habebit puncta duplicia in polis A & B.

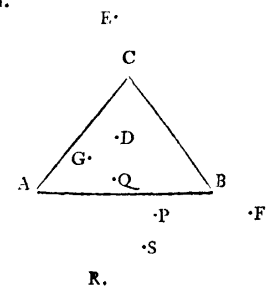
2. *Sectionum Conicarum deſcriptio per data quinque puncta.*

Jam Sectio Conica determinatur ex datis ejus punctis quinque, & per eadem ſic deſcribi poteſt. Dentur ejus puncta quinque, A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & trianguli ABC rotentur anguli duo quivis, CAB, CBA, circa vertices ſuos A & B; & ubi crurum AC, BC interſectio c ſucceſſivè applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat interſectio crurum reliquorum, AB & BA, in puncta P & Q. Agatur, & infinitè producatur recta PQ, & anguli mobiles ita rotentur, ut interſectio crurum, AB, BA, percurrat rectam PQ, & crurum reliquorum interſectio, C, deſcribet propoſitam Sectionem Conicam per Theorema primum.

3. *Curvarum ſecundi generis Punctum Duplex habentium deſcriptio per data ſeptem puncta.*

Curvæ omnes ſecundi generis Punctum Duplex habentes determinantur ex datis earum punctis ſeptem, quorum unum eſt Punctum illud Duplex, & per eadem puncta ſic deſcribi poſſunt. Dentur Curvæ deſcribendæ puncta quælibet ſeptem A, B, C, D, E, F, G, quorum A eſt punctum duplex. Jungantur punctum A, & alia duo quævis è punctis, puta B & C; & trianguli ABC rotetur

CAPUT VII.



R.

tetur tum angulus CAB circa verticem ſuum A, tum angulorum reliquorum alteruter, ABC, circa verticem ſuum B. Et ubi crurum AC, BC concurſus, C, ſucceſſivè applicatur ad puncta quatuor reliqua D, E, F, G incidat concurſus crurum reliquorum, AB & BA, in puncta quatuor P, Q, R, S. Per puncta illa quatuor & quintum A deſcribatur ſectio conica, & anguli præfati CAB, CBA ita rotentur ut crurum, AB, BA, concurſus percurrat ſectionem illam conicam, & concurſus reliquorum crurum, AC, BC, deſcribet Curvam propoſitam per Theorema ſecundum.

Si vice puncti C datur poſitione recta BC, quæ Curvam deſcribendam tangit in B, lineæ AD, AP coincident; & vice anguli DAP habebitur linea recta circa polum A rotanda.

Si Punctum Duplex A infinitè diſtat, debebit recta ad plagam puncti illius perpetuò dirigi, & motu parallelo ferri, interea dum angulus ABC circa polum B rotatur.

Deſcribi etiam poſſunt hæ Curvæ paulo aliter per Theorema tertium, ſed deſcriptionem ſimpliciorem poſuiſſe ſufficit.

Eâdem methodo Curvas tertii, quarti & ſuperiorum generum deſcribere licet; non omnes quidem, ſed quotquot ratione aliquâ commodâ per motum localem deſcribi poſſunt. Nam Curvam aliquam ſecundi vel ſuperioris generis, punctum duplex non habentem, commodè deſcribere, Problema eſt inter difficiliora numerandum.

CAPUT OCTAVUM.

Conſtructio æquationum per deſcriptionem Curvarum.

CURVARUM uſus in Geometriâ eſt, ut per earum interſectiones Problemata ſolvantur. Proponatur æquatio conſtruenda dimenſionum novem, $x^9 * + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$.

Ubi

Ubi b, c, d, &c. ſignificant quantitates quaſvis datas, ſignis ſuis + & − affectas. Aſſumatur æquatio ad Parabolam Cubicam $x^3 = y$; & æquatio prior, ſcribendo y pro x^3, evadet $y^3 + bxy^2 + cy^2 + dx^2y + exy + my + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$, æquatio ad Curvam aliam ſecundi generis. Ubi m vel f deeſſe poteſt, vel pro lubitu aſſumi. Et per harum Curvarum deſcriptiones & interſectiones dabuntur radices æquationis conſtruendæ. Parabolam Cubicam ſemel deſcribere ſufficit. CONSTRUCTIO ÆQUATIONUM.

Si æquatio conſtruenda per defectum duorum terminorum ultimorum, hx & k, reducatur ad ſeptem dimenſiones; Curva altera, delendo m, habebit punctum duplex in principio Abſciſſæ, & inde facilè deſcribi poteſt, ut ſuprà.

Si æquatio conſtruenda per defectum terminorum trium ultimorum, $gx^2 + hx + k$, reducatur ad ſex dimenſiones, Curva altera, delendo f, evadet Sectio Conica.

Et ſi per defectum ſex ultimorum terminorum æquatio conſtruenda reducatur ad tres dimenſiones, incidetur in conſtructionem *Wallifianiam* per Parabolam Cubicam & lineam rectam.

Conſtrui etiam poſſunt æquationes per Hyperboliſmum Parabolæ cum diametro. Ut ſi conſtruenda ſit hæc æquatio dimenſionum novem termino penultimo carens, $a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0$; aſſumatur æquatio ad Hyperboliſmum $+m$

illum $x^2y = 1$: & ſcribendo y pro $\frac{1}{xx}$, æquatio conſtruenda vertetur in hanc, $ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + mx^2y + g + hx + kx^2 + lx^3 = 0$: quæ Curvam ſecundi generis deſignat, cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hîc deeſſe poteſt, vel pro lubitu aſſumi.

Per Parabolam Cubicam & Curvas tertii generis conſtruuntur etiam æquationes omnes dimenſionum non pluſquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti generis conſtruuntur omnes dimenſionum non pluſquam quindecim; et ſic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti & ſuperiorum generum deſcribi ſemper poſſunt, inveniendo eorum puncta per Geometriam planam. Ut ſi conſtruenda ſit æquatio, $x^{12} * + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + kx + l = 0$, & deſcripta habeat Pa-

CAPUT VIII. rabola Cubica; ſit æquatio ad Parabolam illam Cubicam $x^3=y$, & ſcribendo y pro x^3, æquatio conſtruenda vertetur in hanc,

$$\begin{array}{cccccc} y^4 & +axy^3 & +cx^2y^2 & +fx^2y & +ix^2=0, \\ & +b & +dx & +gx & +kx \\ & & +e & +h & +l \end{array}$$

quæ eſt æquatio ad Curvam tertii generis, cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Deſcribi autem poteſt hæc Curva, inveniendo ejus puncta per Geometriam planam, propterea quòd indeterminata quantitas, x, non niſi ad duas dimenſiones aſcendit.

LOGISTICA INFINITORUM.

AUCTORE S. HORSLEY, LL. D. ET R. S. S.

LOGISTICA INFINITORUM.

IN exſequendo per ſeries infinitas Problematum analyſin, haud rarò uſuvenit ut in ſeries ipſas inſtituendæ ſint operationes arithmeticæ; non modò faciles illæ Additionis et Subductionis, verum etiam moleſtiſſimæ Multiplicationis et Diviſionis, utriuſque quidem cum ſimplicis tum climacticæ: quæ ſanè computationes experti nôrunt quanti ſunt laboris: hujus minuendi gratiâ formulas ſequentes trado.

PROBLEMA I. MULTIPLICATIO.

Seriem infinitam $ax^{\mu} + bx^{\mu+\alpha} + cx^{\mu+2\alpha} + dx^{\mu+3\alpha} + ex^{\mu+4\alpha}$ &c.
Series infinita $ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha}$ &c. Multiplicet.

Fiet $$\begin{array}{llll} aax^{\mu+\nu} & +ca & +da & +ea \\ +ba & +bb\ x^{\mu+\nu+2\alpha} & +cb\ x^{\mu+\nu+3\alpha} & +db \\ +ab & +ac & +bc & +cc\ x^{\mu+\nu+4\alpha}\ \&c. \\ & & +ad & +bd \\ & & & +ae \end{array}$$

Poſitis igitur $\mu+\nu = \pi$, ſeries multiplicatione facta hanc formam induet

$$Ax^{\pi} + Bx^{\pi+\alpha} + Cx^{\pi+2\alpha} + Dx^{\pi+3\alpha} + Ex^{\pi+4\alpha}\ \&c.$$

Cujus coefficientium conſtitutio hujuſcemodi erit.

$A = aa$. $B = ab + ba$. $C = ac + bb + ca$. $D = ad + bc + cb + da$. $E = ae + bd + cc + db + ca$.

PROBLEMA II. DIVISIONIS I.

Seriem infinitam ſerie infinitâ dividere

Sit ſeries dividenda $Ax^{\pi} + Bx^{\pi+\alpha} + Cx^{\pi+2\alpha} + Dx^{\pi+3\alpha} + Ex^{\pi+4\alpha}$ &c.
Series dividens ſit $ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha}$ &c.

Tum

Tum positis $\pi - \nu = \mu$, series divisione facta hujusce formæ erit

$$ax^{\mu} + bx^{\mu+\alpha} + cx^{\mu+2\alpha} + dx^{\mu+3\alpha} + ex^{\mu+4\alpha} \text{ &c.}$$

Cujus Coefficientes hisce æquationibus definiuntur: $a = \frac{A}{a}$. $b = \frac{B - ab}{a}$. $c = \frac{C - ac - bb}{a}$, $d = \frac{D - ad - bc - cb}{a}$. $e = \frac{E - ae - bd - cc - db}{a}$. $f =$ &c. Patet ex Problemate primo.

PROBLEMA III. DIVISIONIS 2.

2. Unitatem dividere à serie infinità $ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha}$.

Factum puta, et sit $\frac{1}{ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha} +} = Ax^{\pi} + Bx^{\pi+\alpha} + Cx^{\pi+2\alpha} + Dx^{\pi+3\alpha} + Ex^{\pi+4\alpha}$ &c. Series divisione facta cum serie dividente multiplicata seriem faciat $Ax^{\pi} + Bx^{\pi+\alpha} + Cx^{\pi+2\alpha} + Dx^{\pi+3\alpha} + Ex^{\pi+4\alpha}$ &c. Hujus summa unitati æqualis erit. Ergo

$$\frac{Ax^{\pi}}{-1} + Bx^{\pi+\alpha} + Cx^{\pi+2\alpha} + Dx^{\pi+3\alpha} = 0.$$

Hoc autem ut semper fiat, juxta quamlibet literæ x æstimationem, necesse est ut π sit 0, $A = 1$, & ut reliqui coefficientes B, C, D, E evadant singuli nihilo æquales.

Sed per Problema primum $\pi = \mu + \nu$. $A = aa$. $B = ab + ba$. $C = ac + bb + ca$. &c. Ergo $\mu = -\nu$.

Series igitur divisione facta hanc formam induet

$$ax^{-\nu} + bx^{\alpha-\nu} + cx^{2\alpha-\nu} + dx^{3\alpha-\nu} + ex^{4\alpha-\nu} \text{ &c.}$$

& Coefficientes hisce æquationibus definientur. $a = \frac{1}{a}$. $b = -\frac{ab}{a}$. $c = -\frac{ac + bb}{a}$. $d = -\frac{ad + bc + cb}{a}$. $e = -\frac{ae + bd + cc + db}{a}$. f &c.

PROBLEMA IV. Multiplicatio et Divisio Climactica.

Seriei infinitæ potestates formulâ generali exhibere.

Exhibenda sit potestas, indice λ, seriei infinitæ $a + bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu} + ex^{4\mu} + fx^{5\mu} + gx^{6\mu} + hx^{7\mu} + kx^{8\mu} + lx^{9\mu}$ &c.

Summa nominum omnium seriei propositæ post primum dicatur α. Omnium post secundum, β. Omnium post tertium, γ; post quartum, δ; post quintum, ε; post sextum, ζ; &c. Ita erit. $a + bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu}$ &c. $= a + \alpha$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= bx^{\mu} + \beta \\
\alpha^2 &= b^2x^{2\mu} + 2b\beta x^{\mu} + \beta^2 \\
\alpha^3 &= b^3x^{3\mu} + 3b^2x^{2\mu}\beta + 3bx^{\mu}\beta^2 + \beta^3 \\
\alpha^4 &= b^4x^{4\mu} + 4b^3x^{3\mu}\beta + 6b^2x^{2\mu}\beta^2 + 4bx^{\mu}\beta^3 + \beta^4 \\
\alpha^5 &= b^5x^{5\mu} + 5b^4x^{4\mu}\beta + 10b^3x^{3\mu}\beta^2 + 10b^2x^{2\mu}\beta^3 + 5bx^{\mu}\beta^4 + \beta^5 \\
\alpha^6 &= b^6x^{6\mu} + 6b^5x^{5\mu}\beta + 15b^4x^{4\mu}\beta^2 + 20b^3x^{3\mu}\beta^3 + 15b^2x^{2\mu}\beta^4 + 6bx^{\mu}\beta^5 + \beta^6. \\
\alpha^7 &= b^7x^{7\mu} + 7b^6x^{6\mu}\beta + 21b^5x^{5\mu}\beta^2 + 35b^4x^{4\mu}\beta^3 + 35b^3x^{3\mu}\beta^4 \text{ &c.} \\
\alpha^8 &= b^8x^{8\mu} + 8b^7x^{7\mu}\beta + 28b^6x^{6\mu}\beta^2 \text{ &c.} \\
\alpha^9 &= b^9x^{9\mu} + 9b^8x^{8\mu}\beta \text{ &c.} \\
&\text{&c.}
\end{aligned}$$

$\beta =$

$$\begin{aligned}
\beta &= cx^{2\mu} + \gamma \\
\beta^2 &= c^2x^{4\mu} + 2cx^{2\mu}\gamma + \gamma^2 \\
\beta^3 &= c^3x^{6\mu} + 3c^2x^{4\mu}\gamma + 3cx^{2\mu}\gamma^2 + \gamma^3 \\
\beta^4 &= c^4x^{8\mu} + 4c^3x^{6\mu}\gamma + 6c^2x^{4\mu}\gamma^2 + 4cx^{2\mu}\gamma^3 + \gamma^4 \\
\beta^5 &= c^5x^{10\mu} \text{ &c.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= dx^{3\mu} + \delta \\
\gamma^2 &= d^2x^{6\mu} + 2dx^{3\mu}\delta + \delta^2 \\
\gamma^3 &= d^3x^{9\mu} + 3d^2x^{6\mu}\delta \text{ &c.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta &= ex^{4\mu} + \varepsilon \\
\delta^2 &= e^2x^{8\mu} + 2ex^{4\mu}\varepsilon + \varepsilon^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= fx^{5\mu} + \zeta \\
\varepsilon^2 &= f^2x^{10\mu} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta &= gx^{6\mu} + \eta \\
\eta &= hx^{7\mu} + \vartheta \\
&= kx^{8\mu} + \iota \\
\iota &= lx^{9\mu} + \varkappa
\end{aligned}$$

Et denotante λ quantitatem quamvis, seriei propositæ potestas illa cujus index λ, sive $\overline{a + bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu} \text{ &c.}}|^{\lambda} = \overline{a + \alpha}|^{\lambda}$.

Sed ex formulâ generali Newtonianâ potestatum binomii, $\overline{a + \alpha}|^{\lambda} = a^{\lambda} + \lambda a^{\lambda-1}\alpha + \lambda \times \frac{\lambda - 1}{2} a^{\lambda-2}a^2 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2}. \times \frac{\lambda-2}{3} a^{\lambda-3}a^3$ &c.

Hoc est, si pro $\lambda a^{\lambda-1}$ scribatur $\mathbf{A}$

pro $\lambda \times \frac{\lambda-1}{2} a^{\lambda-2}$, $\mathbf{A}$

pro $\lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} a^{\lambda-3}$, $\mathbf{A}$

pro λ. $\frac{\lambda-1}{2}. \frac{\lambda-2}{3}. \frac{\lambda-3}{4} a^{\lambda-4}$, $\mathbf{A}$

atque idem semper fiat, $\overline{a + \alpha}|^{\lambda} = a^{\lambda} + \mathbf{A}.a + \mathbf{A}.a^2 + \mathbf{A}.a^3 + \mathbf{A}.a^4 + \mathbf{A}.a^5 + \mathbf{A}.a^6 + \mathbf{A}.a^7 + \mathbf{A}.a^8 + \mathbf{A}.a^9$. &c.

Ex singulis membris hujus progressionis, ope æquationum $\alpha = bx^{\mu} + \beta$, $\alpha^2 = b^2x^{2\mu} +$ &c. $a^3 =$ &c. exterminetur primò α. Tum ex membris singulis seriei transformatæ, ope æquationum $\beta = cx^{2\mu} + \gamma$, $\beta^2 = c^2x^{4\mu} +$ &c. $\beta^3 =$ &c. exterminetur β. Et ex membris singulis seriei denuò transformatæ, ope æquationum $\gamma = dx^{3\mu} + \delta$, $\gamma^2 = d^2x^{6\mu} +$ &c. $\gamma^3 =$ &c. exterminetur γ. Si hoc continuò fiat, colligentur tandem $\mathbf{A}.\alpha = \mathbf{A}. \times bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu} + ex^{4\mu}$ &c.

$$\mathbf{A}\alpha^2 = \mathbf{A} \times \left\{ \begin{array}{r} b^2.x^{2\mu} + 2b.cx^{3\mu} + 2bd\ x^{4\mu} + 2bex^{5\mu} + 2bfx^{6\mu} + 2bgx^{7\mu} + 2bhx^{8\mu} + 2bkx^{9\mu} \\ + \ c^2x^{4\mu} + 2cdx^{5\mu} + 2cex^{6\mu} + 2cfx^{7\mu} + 2cgx^{8\mu} + 2chx^{9\mu} \\ + \ d^2x^{6\mu} + 2dex^{7\mu} + 2dfx^{8\mu} + 2dgx^{9\mu} \\ + \ e^2x^{8\mu} + 2efx^{9\mu} \text{ &c.} \end{array} \right.$$

$\mathbf{A}\alpha^3 =$

$$\mathbb{A}\alpha^3=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l} b^3.x^{3\mu}+3b^2c.x^{4\mu}+3b^2.dx^{5\mu}+3b^2\ \ ex^{6\mu}+3b^2.\ fx^{7\mu}+3b^2\ \ gx^{8\mu}+3b^2\ hx^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad +3b.c^2x^{5\mu}+3b.2cdx^{6\mu}+3b.\ 2cex^{7\mu}+3b.\ 2cfx^{8\mu}+3b.2cgx^{9\mu}\\ \qquad\qquad\qquad +3b.\ d^2x^{7\mu}+3b.\ 2dex^{8\mu}+3b.2dfx^{9\mu}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +3b.\ e^2x^{9\mu}\\ \qquad\qquad +\ c^3.\ x^{6\mu}+3c^2\ \ dx^{7\mu}+3c^2.\ \ ex^{8\mu}+\ 3c^2fx^{9\mu}\\ \qquad\qquad\qquad +3c.\ d^2x^{8\mu}+3c.2dex^{9\mu}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\ \ d^3x^{9\mu}\ \&c.\\ \&c.\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\alpha^4=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l} b^4.x^{4\mu}+4b^3.cx^{5\mu}+4b^3.d\ x^{6\mu}+4b^3.\ ex^{7\mu}+4b^3\ \ fx^{8\mu}+4b^3\ \ gx^{9\mu}\\ \qquad\qquad +6b^2.c^2x^{6\mu}+6b^2.2cdx^{7\mu}+6b^2.2cex^{8\mu}+6b^2.\ 2cfx^{9\mu}\\ \qquad\qquad\qquad +6b^2.\ d^2x^{8\mu}+6b^2.2dex^{9\mu}\\ \qquad\qquad +4b.\ c^3.x^{7\mu}+4b.3c^2dx^{8\mu}+4b.3c^2ex^{9\mu}\\ \qquad\qquad\qquad +4b.3cd^2x^{9\mu}\\ \qquad\qquad +\ c^4.\ \ x^{8\mu}+4c^3d.\ \ x^{9\mu}\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\alpha^5=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l} b^5.x^{5\mu}+5b^4cx^{6\mu}+\ \ 5b^4dx^{7\mu}+\ 5b^4\ \ ex^{8\mu}+\ 5b^4.\ \ fx^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad +10b^3c^2x^{7\mu}+10b^3.2cdx^{8\mu}+10b^3.\ 2cex^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad\qquad +10b^3\ \ d^2x^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad +10b^2.\ c^3x^{8\mu}+10b^2.3c^2dx^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad\qquad +\ 5b\ \ \ c^3x^{9\mu}\ \&c.\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\alpha^6=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l} b^6x^{6\mu}+6b^5.cx^{7\mu}+\ \ 6b^5dx^{8\mu}+\ 6b^5\ \ ex^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad +15b^4c^2x^{8\mu}+15b^4.2cdx^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad\qquad +20b^3\ \ c^3x^{9\mu}\ \&c.\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\alpha^7=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l} b^7x^{7\mu}+7b^6.cx^{8\mu}+\ \ 7b^6dx^{9\mu}\ \&c.\\ \qquad\qquad +21.b^5.c^2x^{9\mu}\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\ \alpha^8=\ \ \mathbb{A}\times b^8x^{8\mu}+8b^7cx^{9\mu}\ \&c.$$

$$\mathbb{A}\ \alpha^9=\ \ \mathbb{A}\times b^9x^{9\mu}\ \&c.$$

Jam hiſce omnibus ſecundum indices poteſtatum literæ x diſpoſitis, conſit hæc formula generalis:

FORMULA.

MULTIPLICATIONIS ET DIVISIONIS CLIMACTICÆ.

$$\alpha^\lambda+\mathbb{A}\,bx^\mu+\mathbb{A}.cx^{2\mu}\ \ +\mathbb{A}.dx^{3\mu}\ \ +\mathbb{A}.ex^{4\mu}\ \ +\mathbb{A}.fx^{5\mu}\ \&c.$$

$$+\mathbb{A}.b^2\qquad +\mathbb{A}.2bc\qquad +\mathbb{A}.2bd+c^2\qquad +\mathbb{A}.2be+2cd$$

$$+\mathbb{A}.b^3\qquad +\mathbb{A}.3b^2c\qquad +\mathbb{A}.3b^2.d+3bc^2\qquad +\mathbb{A}.3b^2e+3bd^2+6bcd+c^3$$

$$+\mathbb{A}.b^4\qquad +\mathbb{A}.4b^3c\qquad +\mathbb{A}.4b^3d+6b^2c\qquad +\mathbb{A}.4b^3e+12b^2cd+4bc^2+2d^2$$

$$+\mathbb{A}.5b^4c\qquad +\mathbb{A}.5b^4d+10b^3c^2\qquad +\mathbb{A}.5b^4e+20b^3cd+10b^2c^2+10bd^2$$

$$+\mathbb{A}.6b^5\qquad +\mathbb{A}.6b^5c\qquad +\mathbb{A}.6b^5d+15b^4c^2\qquad +\mathbb{A}.6b^5e+30b^4cd+20b^3c^2+30b^2d^2+60bce+60cd^2$$

$$+\mathbb{A}.b^6\qquad +\mathbb{A}.b^6c\qquad +\mathbb{A}.b^6d+6b^5c\qquad +\mathbb{A}.b^6e+12b^5d+15b^4c\qquad +\mathbb{A}.12b^5e+30b^4d+60b^3c+60b^2e+120bde+60c^2d$$

$$+\mathbb{A}.b^7\qquad +\mathbb{A}.7b^6c\qquad +\mathbb{A}.b^7d+7b^6c\qquad +\mathbb{A}.b^7e+14b^6d+21b^5c\qquad +\mathbb{A}.14b^6e+42b^5d+105b^4c+210b^3e+420b^2de+210c^2e+210cd^2$$

$$+\mathbb{A}.b^8\qquad +\mathbb{A}.b^8c\qquad +\mathbb{A}.b^8d+8b^7c\qquad +\mathbb{A}.b^8e+16b^7d+28b^6c\qquad +\mathbb{A}.16b^7e+56b^6d+168b^5c+420b^4e+1120b^3de+840c^2e+1680bcde+420d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^9\qquad +\mathbb{A}.b^9c\qquad +\mathbb{A}.b^9d+9b^8c\qquad +\mathbb{A}.b^9e+18b^8d+36b^7c\qquad +\mathbb{A}.18b^8e+72b^7d+252b^6c+756b^5e+2520b^4de+2520c^2de+1260bcde+630d^3$$

$$+\mathbb{A}.k\qquad +\mathbb{A}.l+\mathbb{A}.2bk+2ch+2dg+2ef\qquad +\mathbb{A}.3b^2k+3b.2cg+3b.2df+3bc^2+3c^2f+3c.2de+d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{10}\qquad +\mathbb{A}.b^{10}c\qquad +\mathbb{A}.b^{10}d+10b^9c\qquad +\mathbb{A}.b^{10}e+20b^9d+45b^8c\qquad +\mathbb{A}.20b^9e+90b^8d+360b^7c+1260b^6e+5040b^5de+6300c^2de+3150bcde+1575d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{11}\qquad +\mathbb{A}.b^{11}c\qquad +\mathbb{A}.b^{11}d+11b^{10}c\qquad +\mathbb{A}.b^{11}e+22b^{10}d+55b^9c\qquad +\mathbb{A}.22b^{10}e+110b^9d+495b^8c+1980b^7e+9240b^6de+13860c^2de+6930bcde+3465d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{12}\qquad +\mathbb{A}.b^{12}c\qquad +\mathbb{A}.b^{12}d+12b^{11}c\qquad +\mathbb{A}.b^{12}e+24b^{11}d+66b^{10}c\qquad +\mathbb{A}.24b^{11}e+132b^{10}d+660b^9c+2772b^8e+13860b^7de+27720c^2de+13860bcde+6930d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{13}\qquad +\mathbb{A}.b^{13}c\qquad +\mathbb{A}.b^{13}d+13b^{12}c\qquad +\mathbb{A}.b^{13}e+26b^{12}d+78b^{11}c\qquad +\mathbb{A}.26b^{12}e+156b^{11}d+858b^{10}c+3696b^9e+20020b^8de+48048c^2de+24024bcde+12012d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{14}\qquad +\mathbb{A}.b^{14}c\qquad +\mathbb{A}.b^{14}d+14b^{13}c\qquad +\mathbb{A}.b^{14}e+28b^{13}d+91b^{12}c\qquad +\mathbb{A}.28b^{13}e+182b^{12}d+1092b^{11}c+4928b^{10}e+30030b^9de+84084c^2de+42042bcde+21021d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{15}\qquad +\mathbb{A}.b^{15}c\qquad +\mathbb{A}.b^{15}d+15b^{14}c\qquad +\mathbb{A}.b^{15}e+30b^{14}d+105b^{13}c\qquad +\mathbb{A}.30b^{14}e+210b^{13}d+1365b^{12}c+6435b^{11}e+45045b^{10}de+140140c^2de+70070bcde+35035d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{16}\qquad +\mathbb{A}.b^{16}c\qquad +\mathbb{A}.b^{16}d+16b^{15}c\qquad +\mathbb{A}.b^{16}e+32b^{15}d+120b^{14}c\qquad +\mathbb{A}.32b^{15}e+240b^{14}d+1680b^{13}c+8008b^{12}e+64064b^{11}de+224224c^2de+112112bcde+56056d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{17}\qquad +\mathbb{A}.b^{17}c\qquad +\mathbb{A}.b^{17}d+17b^{16}c\qquad +\mathbb{A}.b^{17}e+34b^{16}d+136b^{15}c\qquad +\mathbb{A}.34b^{16}e+272b^{15}d+2040b^{14}c+10010b^{13}e+88088b^{12}de+320320c^2de+160160bcde+80080d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{18}\qquad +\mathbb{A}.b^{18}c\qquad +\mathbb{A}.b^{18}d+18b^{17}c\qquad +\mathbb{A}.b^{18}e+36b^{17}d+153b^{16}c\qquad +\mathbb{A}.36b^{17}e+306b^{16}d+2448b^{15}c+12376b^{14}e+116688b^{13}de+457457c^2de+228228bcde+114114d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{19}\qquad +\mathbb{A}.b^{19}c\qquad +\mathbb{A}.b^{19}d+19b^{18}c\qquad +\mathbb{A}.b^{19}e+38b^{18}d+171b^{17}c\qquad +\mathbb{A}.38b^{18}e+342b^{17}d+2907b^{16}c+15067b^{15}e+150348b^{14}de+646646c^2de+323323bcde+161161d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{20}\qquad +\mathbb{A}.b^{20}c\qquad +\mathbb{A}.b^{20}d+20b^{19}c\qquad +\mathbb{A}.b^{20}e+40b^{19}d+190b^{18}c\qquad +\mathbb{A}.40b^{19}e+380b^{18}d+3420b^{17}c+18240b^{16}e+190760b^{15}de+912912c^2de+456456bcde+228228d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{21}\qquad +\mathbb{A}.b^{21}c\qquad +\mathbb{A}.b^{21}d+21b^{20}c\qquad +\mathbb{A}.b^{21}e+42b^{20}d+210b^{19}c\qquad +\mathbb{A}.42b^{20}e+420b^{19}d+4010b^{18}c+21945b^{17}e+240540b^{16}de+1276275c^2de+638138bcde+319319d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{22}\qquad +\mathbb{A}.b^{22}c\qquad +\mathbb{A}.b^{22}d+22b^{21}c\qquad +\mathbb{A}.b^{22}e+44b^{21}d+231b^{20}c\qquad +\mathbb{A}.44b^{21}e+462b^{20}d+4686b^{19}c+26334b^{18}e+300675b^{17}de+1771770c^2de+885885bcde+442442d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{23}\qquad +\mathbb{A}.b^{23}c\qquad +\mathbb{A}.b^{23}d+23b^{22}c\qquad +\mathbb{A}.b^{23}e+46b^{22}d+253b^{21}c\qquad +\mathbb{A}.46b^{22}e+506b^{21}d+5429b^{20}c+31395b^{19}e+370370b^{18}de+2453450c^2de+1226725bcde+613613d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{24}\qquad +\mathbb{A}.b^{24}c\qquad +\mathbb{A}.b^{24}d+24b^{23}c\qquad +\mathbb{A}.b^{24}e+48b^{23}d+276b^{22}c\qquad +\mathbb{A}.48b^{23}e+552b^{22}d+6210b^{21}c+37145b^{20}e+450225b^{19}de+3364360c^2de+1682180bcde+841841d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{25}\qquad +\mathbb{A}.b^{25}c\qquad +\mathbb{A}.b^{25}d+25b^{24}c\qquad +\mathbb{A}.b^{25}e+50b^{24}d+300b^{23}c\qquad +\mathbb{A}.50b^{24}e+600b^{23}d+7084b^{22}c+43700b^{21}e+546250b^{20}de+4594590c^2de+2297295bcde+1148648d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{26}\qquad +\mathbb{A}.b^{26}c\qquad +\mathbb{A}.b^{26}d+26b^{25}c\qquad +\mathbb{A}.b^{26}e+52b^{25}d+325b^{24}c\qquad +\mathbb{A}.52b^{25}e+650b^{24}d+8008b^{23}c+51376b^{22}e+663000b^{21}de+6216200c^2de+3108100bcde+1554050d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{27}\qquad +\mathbb{A}.b^{27}c\qquad +\mathbb{A}.b^{27}d+27b^{26}c\qquad +\mathbb{A}.b^{27}e+54b^{26}d+351b^{25}c\qquad +\mathbb{A}.54b^{26}e+702b^{25}d+9009b^{24}c+59826b^{23}e+801450b^{22}de+8314020c^2de+4157010bcde+2078505d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{28}\qquad +\mathbb{A}.b^{28}c\qquad +\mathbb{A}.b^{28}d+28b^{27}c\qquad +\mathbb{A}.b^{28}e+56b^{27}d+378b^{26}c\qquad +\mathbb{A}.56b^{27}e+756b^{26}d+10080b^{25}c+69264b^{24}e+964440b^{23}de+10855440c^2de+5427720bcde+2713860d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{29}\qquad +\mathbb{A}.b^{29}c\qquad +\mathbb{A}.b^{29}d+29b^{28}c\qquad +\mathbb{A}.b^{29}e+58b^{28}d+406b^{27}c\qquad +\mathbb{A}.58b^{28}e+812b^{27}d+11172b^{26}c+79576b^{25}e+1151730b^{24}de+13884360c^2de+6942180bcde+3471090d^3$$

$$+\mathbb{A}.b^{30}\qquad +\mathbb{A}.b^{30}c\qquad +\mathbb{A}.b^{30}d+30b^{29}c\qquad +\mathbb{A}.b^{30}e+60b^{29}d+435b^{28}c\qquad +\mathbb{A}.60b^{29}e+870b^{28}d+12324b^{27}c+90480b^{26}e+1357200b^{25}de+17383860c^2de+8691930bcde+4345965d^3$$

$$=a+bx^\alpha+cx^{2\mu}+dx^{3\mu}+ex^{4\mu}+fx^{5\mu}\ \&c.$$

Si formulæ hujuſce membra ſingula cum quantitate x^ν multiplices, hoc eſt ſi indices poteſtatum literæ x quantitate $\nu\lambda$ augeas, efficietur formula generalis poteſtatum ſeriei $ax^\nu+bx^{\nu+\mu}+cx^{\nu+2\mu}+dx^{\nu+3\mu}+ex^{\nu+4\mu}$ &c. ſive formula generalis harum quantitatum $ax^\nu+bx^{\nu+\mu}+cx^{\nu+2\mu}+dx^{\nu+3\mu}+ex^{\nu+4\mu}$ &c.$\Big\}^\lambda$. Quæ denique pro ſymbolis $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$, &c. hiſce ordine reſtituti, $\lambda\alpha^{\lambda-1}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}\alpha^{\lambda-2}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}\alpha^{\lambda-3}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}.\frac{\lambda-3}{4}\alpha^{\lambda-4}$, in formulam generalem Moivræanam migraveris.

SAMUELIS HORSLEII

DE

GEOMETRIA FLUXIONUM

LIBER SINGULARIS.

SIVE ADDITAMENTUM TRACTATUS NEWTONIANI

DE METHODO RATIONUM PRIMARUM ET ULTIMARUM.

GEOMETRIA FLUXIONUM.

DEFINITIONES.

I.

NASCI dicuntur magnitudines motu genitæ, dum ſenſim creſcunt.

II.

Evaneſcere, dum ſenſim minuuntur.

III.

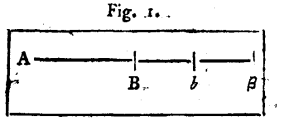
Communi verbo *fluere* dicuntur, quæ vel naſcuntur, vel evaneſcunt.

IV.

Magnitudinum fluentium velocitates creſcendi vel decreſcendi vocantur *fluxiones*.

Cæterùm hoc ipſum, velocitas creſcendi decreſcendive, quo ſenſu dicitur, exemplis declarandum eſt.

Fig. 1.

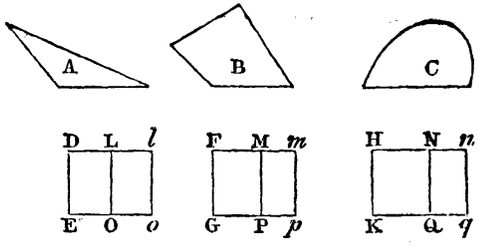


Puta rectam AB motu puncti B verſus *b*, *β* generari, ac perpetim augeri; velocitas creſcendi rectæ AB, cùm aſſignatam quamvis longitudinem, puta A*b*, adepta ſit, ea ipſa eſt quâ punctum mobile B è loco *b* egreditur. Et ſi regreſſu puncti B à locis *β*, *b* verſus A, recta AB perpetim decreſcat, velocitates receſſûs puncti B à locis *β*, *b* velocitates erunt decreſcendi rectæ AB, cùm è majore aliquâ longitudine in illas A*β*, A*b* decreverit. Fluxio igitur rectæ AB eſt velocitas, quâ punctum B, ſive progrediendo, ſive recedendo è loco B diſcedit. Et fluxio ejuſdem rectæ jam factæ A*b*, ea eſt, quâ punctum mobile B, progrediendo ſive recedendo, è loco *b* diſcedit. Et velocitas puncti B ex alio quovis loco *β* diſceſſuri, fluxio eſt rectæ AB longitudinem A*β* adeptæ.

Superficierum fluentium velocitates creſcendi vel decreſcendi ita æſtimantur, ſi ad longitudinem aliquam datam, hoc eſt, pro arbitrio ſumendam, ſed quæ ſemel ſumpta non debet mutari, ſuperficies quæ fluant ſemper applicentur. Cujuſque enim velocitas creſcendi vel decreſcendi eadem eſt,

Definitiones.

eſt, ac lateris ex perpetuâ applicatione oriundi.



Puta ſuperficies A, B, C latarum incrementis vel decrementis perpetim augeri, vel minui. Exponatur recta DE datæ alicujus magnitudinis, et rectæ DE æquales exponantur aliæ FG, HK. Sint A, B, C, ſuperficierum fluentium, A, B, C, magnitudines, quæ vel initio fluxûs fuere, vel fluendo ſimul extiterunt. Et ad rectam DE applicetur rectangulum EL ſpatio A æquale. Ad rectam verò FG applicetur rectangulum GM ſpatio B æquale. Ad rectam denique HK, applicatum puta rectangulum KN ſpatio C æquale. Ad eaſdem rectas DE, FG, HK, applicata puta rectangula E*l*, G*m*, K*n*, aliis ſuperficierum fluentium A, B, C magnitudinibus, fluendo ſimul factis, æqualia. Atque hoc ſemper fieri intelligatur, ut ſuperficiebus A, B, C creſcentibus vel decreſcentibus, rectangula E*l*, G*m*, K*n* ſimul ac pariter cum illis fluant. Fluunt igitur latera ex applicationibus orta. Rectæ inquam DL, FM, HN fluunt. Harum verò rectarum atque ſuperficierum fluentium creſcendi decreſcendive velocitates eædem cenſendæ ſunt; nimirum ſuperficiei A, rectæque DL; ſuperficiei B, rectæque FM; ſuperficiei C, rectæque HN.

Solidorum fluentium creſcendi decreſcendive velocitates ad ſimilem modum æſtimare licet. Nimirum, ſi ad ſuperficiem aliquam datam, hoc eſt, pro arbitrio ſumendam, ſed quæ ſemel ſumpta mutari non debet, Solidorum, quotquot fluant, applicatio fiat. Cujuſque enim creſcendi decreſcendive eadem eſt velocitas, ac lateris ex perpetuâ applicatione oriundi.

Quantitatum Algebraicarum, quæ trinam dimenſionem, uti loquuntur Algebraiſtæ, excedunt, velocitates creſcendi decreſcendive æſtimantur, adhibendo interpretationem ſymbolorum Geometricam. Verbi causâ, ſi quantitatem Algebraicam *xyzus*, è fluentibus *x*, *y*, *z*, *u*, *s* factam, hoc modo ſcribas, $\frac{xyzus}{1}$; tum pro unitate eam rectæ alicujus datæ poteſtatem ſubſtituas, quæ quantitatem $\frac{xyzus}{1}$ ad Solidi, Superficiei, vel Rectæ ordinem deprimat; cujus velocitatem creſcendi decreſcendive eo, quo tradidimus modo, æſtimare liceat.

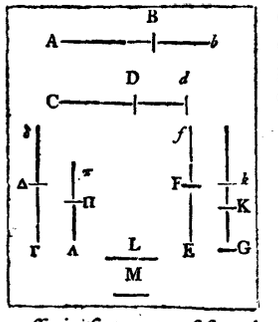
V.

Fluxionum nomine veniunt non modò velocitates illæ creſcendi decreſcendive, quarum illud maximè proprium eſt; verùm etiam, ex tranſlatione, magnitudines Geometricæ cujuſcunque generis, quæ velocitatum illarum inter ſe rationes ſervant.

Fluant

Fluant rectæ duæ AB, CD. Sint aliæ rectæ EF, GK, quarum EF ſit ad GK, ut velocitas quâ punctum B, quod motu ſuo rectam AB generat, è loco A egreditur, ad velocitatem quâ punctum D, cujus motu recta altera CD generatur, egreditur è loco C. Tum creſcere vel decreſcere intelligantur rectæ EF, GK, eâ quidem lege, ut fluentibus AB, CD, EF, GK, ſi capiantur punctorum mobilium B, F loca quælibet, *b*, *f*, quæ ſimul ea appulerint, item mobilium D, K, loca quæ ſimul ea appulerint *d*, *k*; EF ſit ad E*f*, ut velocitas motûs puncti B è loco primo A, ad velocitatem motûs ejuſdem puncti B è loco *b*; ſimiliter ſit GK ad G*k*, ut velocitas motûs puncti D è loco ſuo primo C ad velocitatem motûs ejuſdem puncti è loco *d*. Ita verò neceſſario fiet, ut E*f* ſit etiam ad G*k*, ut velocitas motûs puncti B è loco *b* ad velocitatem motûs puncti D è loco *d*.

Fig. 3.



Rectæ E*f*, G*k*, ad hunc modum mutabiles, fluxiones dicuntur rectarum A*b*, c*d*, atque omnium adeo quantitatum, quarum velocitates creſcendi decreſcendive earum inter ſe rationes induant. Sunt enim illæ rectæ fluxionum, quarum inter ſe proportiones ſervant, ſymbola quaſi Geometrica. Ac pari jure aliæ quævis magnitudines Geometricæ, quæ ita creſcunt vel diminuuntur, ut rectarum E*f*, G*k* proportiones inter ſe ſemper ſervent, illis utique fluentium magnitudinibus inter ſe collatis, quæ ſimul fluendo exfiſtunt, rectarum A*b*, c*d*, aliarumque omnium magnitudinum, quæ pariter cum hiſce A*b*, c*d* fluunt, fluxiones ſunt dicendæ. Hujuſcemodi verò magnitudines notis $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Newtonus deſignavit, literis *x*, *y*, *z* fluentes deſignantibus.

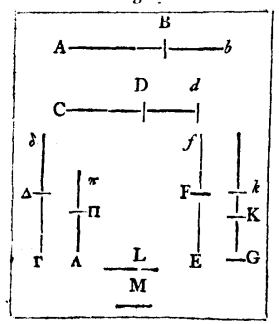
Ex his autem liquet, magnitudinum fluentium fluxiones, quæ ſenſu definitionis quintæ eo nomine vocantur, magnitudines eſſe Geometricas, quæ vel quantitate ſint fixâ et permanente, vel ipſæ fluant. Fixâ quidem quantitate manent, quarum fluentes æquabili velocitate fluunt. Sin fluenti velocitas creſcendi vel decreſcendi utcunque ſit mutabilis, in hoc caſu fluxio ipſa fluet; et creſcendo quidem, ſi velocitas fluentis creſcat, decreſcendo, ſi illa ſenſim minuatur. Sic enim ſi puncti B, rectam AB generantis, velocitates motûs è locis A, *b* æquales ſint, æquales erunt rectæ EF, E*f*, quæ velocitatum illarum inter ſe proportiones ſervant. Ac ſi velocitas motûs puncti B ex alio quovis loco rectæ AB eadem maneat, rectæ etiam EF magnitudo fixa manet. Sin velocitas motûs puncti B è loco *b* quàm è loco A major ſit, recta E*f* rectâ EF major erit. Et ſi velocitas motûs puncti B, longiùs à loco A progredientis, ſenſim augeatur, recta quoque EF ſenſim creſcet. E contrario decreſcet recta EF, ſi velocitas motûs puncti B, progrediente puncto illo, ſenſim minuatur.

Puta igitur rectas AB, CD motu inæquabili punctorum B, D hanc et illam generari. Fluent igitur rectæ EF, GK; atque harum velocitates creſcendi decreſcendive aliis rectis, L, M, exponi poterunt. Rectæ autem

L, M,

Definitiones. L, M, atque aliæ omnes magnitudines Geometricæ, quæ ita creſcant vel diminuantur, ut harum rectarum inter ſe proportiones ſervent, rectarum EF, GK, ſenſu definitionis quintæ, fluxiones erunt. Hujuſmodi verò quantitates, ad fluentes primas referendo, fluxiones ſecundas Newtonus nominavit, et ſymbolis $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ deſignari juſſit. Rurſum magnitudines illæ $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ vel quantitate ſint fixâ quæque et permanente, vel ipſæ fluant; prout quantitates $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ velocitate unaquæque æquabili fluat, vel utcunque mutabili. Si fluant magnitudines $\dot{x}$, $\dot{z}$, $\dot{y}$, erunt et harum fluxiones, ſenſu definitionis quintæ; magnitudines nimirum Geometricæ, quæ velocitatum, quibuſcum magnitudines $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ creſcunt vel decreſcunt, proportiones inter ſe, fluendo vel permanendo, ſervent. Tales autem magnitudines fluentium x, y, z fluxiones tertias Newtonus nominavit, atque ſymbolis $\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$ deſignari voluit. Fluxionum quarti, quinti, cujuſvis demum ordinis, ſimilis eſt interpretatio.

Fig. 1.



Jam verò ſint ΓΔ, ΑΠ magnitudines Geometricæ, quæ eâ lege fluant, ut velocitates quibuſcum illæ creſcunt vel decreſcunt, magnitudinum fluentium AB, CD inter ſe proportiones ſervent, eis utique fluentium quantitatibus inter ſe collatis, quæ fluendo ſimul exiſtunt. Sunt igitur magnitudines AB, CD magnitudinum ΓΔ, ΑΠ, ſenſu definitionis quintæ, fluxiones. E diverſo ſunt hæ illarum fluentes, quas ſymbolis $\grave{x}$, $\grave{y}$ Newtonus deſignavit, literis x, y, magnitudines AB, CD deſignantibus.

Rurſum magnitudines Geometricæ quarum velocitates creſcendi decreſcendive magnitudinum ΓΔ, ΑΠ proportiones inter ſe ſervant, iis utique fluentium quantitatibus, quæ fluendo ſimul exiſtunt inter ſe collatis, rectarum ΓΔ, ΑΠ fluentes ſunt, rectarum verò AB, CD fluentes ſecundæ vocandæ, et more Newtoniano ſymbolis $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ deſignantur.

In ſummâ, ex quâvis magnitudine fluente (puta x) tanquam radice, fluentium et fluxionum in utramque partem infinita eſt progreſſio, $\dddot{x}-\ddot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x, $\grave{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddot{\dddot{x}}-\ddot{x}$, quæ tamen omnes vi definitionis quintæ ad magnitudines Geometricas revocantur.

VI.

Similiter, vel *eodem modo* fluere dicuntur quantitates, quæ ſingulæ ſimul naſcuntur, vel ſimul evaneſcunt.

VII.

Contrariè fluere dicuntur, quarum naſcente alterâ, altera evaneſcit.

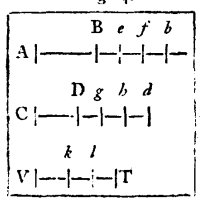
THE-

THEOREMA PRIMUM. Theor. I.

Magnitudinum, quæ fluunt, Fluxiones inter ſe proportiones habent, quæ incrementorum naſcentium ſunt primæ, vel evaneſcentium ultimæ.

Sint lineæ primò magnitudines quæ fluunt. Fluant igitur lineæ AB, CD, et fluendo longitudines illas AB, CD ſint adeptæ. Fluendo autem perſeverantes, dato quovis tempore longitudines novas A*b*, C*d* adipiſcantur, ut ſint B*b*, D*d* incrementa linearum fluentium, fluendo ſimul facta. Dico fluxionem rectæ AB ad fluxionem rectæ CD proportionem habere, quæ prima eſt naſcentis incrementi B*b* ad incrementum naſcens D*d*; vel, ſi regreſſu punctorum B, D verſus A, C lineæ illæ decreſcant, quæ ultima eſt evaneſcentis incrementi B*b* ad D*d* ſimul evaneſcens.

Fig. 4.

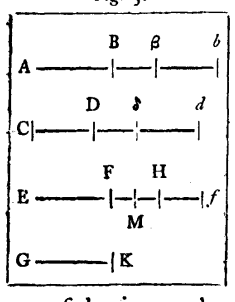


Rectæ AB, CD vel utraque fluunt velocitate æquabili, vel altera quidem æquabili, mutabili altera; vel utraque denique mutabili. Fluant primò velocitate utraque æquabili. Spatia igitur B*b*, D*d* velocitatibus æquabilibus eodem tempore confecta, erunt inter ſe ut velocitates. Et ſi dividatur B*b* in partes quot voſueris æquales B*e*, *ef*, *fb*, tum ſi D*d* in partes totidem æquales dividatur D*g*, *gh*, *hd*; erunt B*e*, D*g* rectarum AB, CD incrementa, incrementis B*b*, D*d* minora, fluendo ſimul facta. Nam ſi dividatur tempus totum V*T*, quo ſpatia B*b*, D*d* ſunt confecta, in particulas V*k*, *kl*, *l T* inter ſe æquales, numero autem totidem quot ſunt partes in quas linearum B*b*, D*d* utraque diviſa eſt, erit B*b* ad B*e*, ut tempus V*T* ad tempus V*k*. Erit etiam D*d* ad D*g*, ut tempus V*T* ad tempus V*k*. Spatia verò, velocitatibus æquabilibus deſcripta, ſunt inter ſe ut tempora, quibus confecta ſunt. Eſt igitur B*b* ad B*e* ut ſpatium puncto mobili B, datâ velocitate lato, tempore V*T* confectum, ad ſpatium eodem puncto eâdem velocitate tempore V*k* confectum. Eſt autem B*b* illud ipſum ſpatium, quod punctum B tempore V*T* confecit. Erit igitur B*e* illud ipſum ſpatium, quod punctum B tempore V*k* confecerit. Simili ratione concludetur eſſe D*g* ſpatium, quod punctum D, datâ velocitate ſuâ latum, eodem tempore V*k* confecerit. Sunt igitur B*e*, D*g* rectarum AB, CD incrementa fluendo ſimul facta, ſive ſpatia punctis B, D ſimul confecta. Erunt igitur inter ſe ut punctorum velocitates. Neque huic rationi officiet temporis V*k* magnitudo, magna illa parvave fuerit. Numero igitur particularum V*k*, *kl*, *l T* in infinitum creſcente, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus, ſi rectarum B*b*, D*d*, ac temporis V*T* diviſiones ſimiles ſemper fiant (ex quo ſcilicet numerus partium B*e*, *ef*, *fb*, necnon D*g*, *gh*, *hd* infinitè augebitur, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus) manebit rectarum B*b*, D*d* partibus ſimul genitis, B*e*, D*g* data velocitatum ratio, quibuſcum punc-

Theor. I. ta B, D æquabiliter feruntur. Quare data illa velocitatum ratio naſcentium *Be*, *Dg* prima erit, vel evaneſcentium ultima. In hoc caſu igitur velocitates motuum punctorum B, D, hoc eſt, fluxiones rectarum AB, CD inter ſe proportionem habent incrementorum naſcentium primam, vel evaneſcentium ultimam. Q. E. D.

Cas. 2. Sed fluat AB velocitatemutabili, fluente CD æquabiliter. Velocitas puncti B progredientis vel ſenſim augetur, vel ſenſim langueſcit. Primò augeatur. Exponatur recta EF datæ cujuſvis longitudinis. Sit alia *Ef* ad quam EF proportionem habeat, quam velocitas motûs puncti B è loco B egredientis ad velocitatem motûs ejuſdem puncti B è loco aliquo *b* ulteriori. Sit etiam GK recta, ad quam EF proportionem habeat velocitatis motûs puncti B, è loco B, ad velocitatem æquabilem puncti C rectam CD generantis. Jam *Bb* major erit, quàm ut habeat ad *Dd* proportionem quam EF ad GK; minor verò, quàm ut habeat ad eandem *Dd* proportionem quam *Ef* ad GK. Nam ſi punctum B, id omne temporis quo rectam *Bb* generavit, cum velocitate illâ, quâ è loco B primùm egreſſum eſt, æquabiliter latum eſſet, rectam utique generâſſet illâ *Bb* minorem; quæ quidem ad *Dd* rationem habuiſſet quam EF ad GK. Sin punctum B cum majore illâ velocitate, quâ è loco *b* egreditur, è loco B exiiſſet, tempus, quo *Bb* reverâ generavit, motu æquabili perſeverans, majorem generâſſet; quæ ad *Dd* rationem habuiſſet quam *Ef* ad GK. Major igitur eſt *Bb* quàm ut habeat ad *Dd* rationem rectæ EF ad GK, ſed minor eadem, quàm quæ rationem ad eandem habeat quam *Ef* ad GK. Regredientibus autem punctis B, D à locis *b*, *d* verſus B, D, ratio evaneſcentis *Bb* ad evaneſcentem *Dd* ſenſim minuet; et rationem rectæ EF ad GK, quam ſemper ſuperat, propiùs tamen acceſſura eſt, quàm pro datâ quâvis differentiâ. Non enim. Erit igitur ratio aliqua minoris quidem quàm rectæ *Ef* ad GK, majoris verò quàm EF ad GK, quâ ratio evaneſcentis *Bb* ad evaneſcentem *Dd* non minor fiet. Ejuſmodi ſit ratio rectæ EH ad GK. Recta igitur EH minor eſt quàm *Ef*, major autem eadem quàm EF. Jam cùm puncti B velocitas, è loco B progredientis, ſenſim creſcat; ſi detur velocitas major quidem quàm illa, quæ eſt motûs puncti B è loco B, minor verò quàm illa, quæ eſt motûs puncti B è loco *b*; erit locus aliquis locorum B, *b* intermedius, ex quo motûs puncti B velocitas datâ illâ minor erit. Detur igitur velocitas, quæ habeat ad velocitatem puncti D rectam CD generantis, proportionem quam EH ad GK. Hæc major erit velocitate quæ eſt motûs puncti B è loco B, minor verò illâ quæ eſt motûs puncti B è loco *b*. Sit β locus locorum B, *b* intermedius, ex quo velocitas motûs puncti B datâ minor ſit. Sit $D\delta$ ſpatium puncto D confectum, dum punctum B ſpatium $B\beta$ abſolvat. Sit EM recta, quæ habeat ad GK rationem, quam velocitas motûs puncti B è loco β ad velocitatem motûs puncti D æquabilem. Erit illa EM minor quàm ut habeat ad GK rationem quam EH ad GK. Omnino igitur minor quàm ut habeat ad GK rationem quam $B\beta$ ad $D\delta$; cùm ratio illius $B\beta$ ad $D\delta$ ratione EH ad GK minor eſſe nequeat (id enim poſuimus).

Fig. 5.



Quare

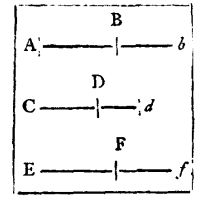
Quare $B\beta$ major eſt, quàm ut habeat ad $D\delta$ rationem quam EM ad GK. Theor. I. Sunt autem $B\beta$, $D\delta$ rectarum AB, CD incrementa, fluendo ſimul facta, quorum illud velocitate generatum eſt creſcente, hoc æquabili. Sunt etiam rectæ EF, EM ad rectam GK, ſicut velocitates motûs puncti E è locis B, β ad velocitatem æquabilem puncti D. Ergo recta $B\beta$ major quidem erit, quàm ut ſit ad $D\delta$ ut EF ad GK, ſed minor eadem quàm ut ſit ad $D\delta$ ut EM ad GK. Sed major jam oſtenſa eſt $B\beta$ quàm pro hâc ratione. Simul utique major et minor. Quod eſt abſurdum.

Non igitur eſt ratio ulla minoris quidem quàm *Ef* ad GK, majoris verò quàm EF ad eandem GK, quâ ratio evaneſcentis *Bb* ad evaneſcentem *Dd* non ſit minor; quæ tamen rationem EF ad GK ſemper exſuperat. Quare ratio EF ad GK, quæ eſt fluxionis rectæ AB ad fluxionem rectæ CD, evaneſcentis *Bb* ad evaneſcentem *Dd* erit ultima, eademque naſcentium prima.

Quòd ſi velocitas motûs puncti B progredientis ſenſim langueſcat, ſimilis erit et in hoc caſu Theorematis demonſtratio.

Cas. 3. Sed fluant AB, CD velocitate utraque mutabili. Sic etiam dico fluxionem rectæ AB ad fluxionem rectæ CD proportionem habere, quæ prima eſt naſcentis incrementi *Bb* ad naſcens *Dd*, vel ultima evaneſcentis *Bb* ad *Dd* ſimul evaneſcens. Fluat enim tertia aliqua recta EF æquabiliter. Et ſit *Ef* incrementum quod recta EF acceperit, quo tempore rectis AB, CD acceſſerint *Bb*, *Dd*. Tum (per Caſ. præc.) erit *Bb* ad *Ef* ultimò, ut fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ EF, et *Ef* ad *Dd* ultimò, ut fluxio rectæ EF ad fluxionem rectæ CD. Quare ex æquo erit *Bb* ad *Dd* ultimò, ut fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ CD. Q. E. D.

Fig. 6.



CASUS GENERALIS SECUNDUS.

Sint jam Superficies magnitudines quæ fluant. Fluant igitur ſuperficies A, B (vid. fig. Def. 4.) Exponantur rectæ æquales DE, FG; ad quas ſuperficierum fluentium fiat applicatio, ut ſint rectangula EL, GM, magnitudinibus quibuſvis fluentium, fluendo ſimul factis, æqualia, item rectangula *El*, *Gm* aliis quibuſvis earundem fluentium magnitudinibus, fluendo ſimul factis. Jam fluxiones ſuperficierum fluxionibus laterum ex applicatione oriundorum, linearum inquam DL, FM fluxionibus ſunt æquales. (Vid. Def. 4 & 5.) Rectarum verò DL, FM fluxiones inter ſe proportiones habent, quæ primæ ſunt incrementorum naſcentium *Ll*, *Mm* (per Caſ. Gen. 1.) Hoc eſt, quæ ſunt primæ rectangulorum naſcentium *Ol*, *Pm*, vel eorundem evaneſcentium ultimæ. Hiſce verò rectangulis ſuperficierum fluentium incrementa, fluendo ſimul facta, ſemper ſunt æqualia. Eædem igitur erunt naſcentium rationes primæ, vel evaneſcentium ultimæ. Fluentibus igitur ſuperficiebus A, B, fluxiones inter ſe rationes habent, quæ primæ ſunt incrementorum naſcentium, vel evaneſcentium ultimæ. Q. E. D.

THEOR. II.

CASUS GENERALIS TERTIUS.

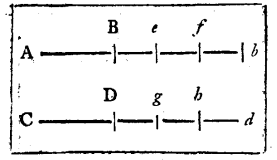
Si Solida ſint magnitudines, quæ fluunt, ſimilis erit et in hoc caſu propoſitionis probatio, Solidorum fluxionibus ad Rectarum fluxiones revocatis.

COR. Hæc ita ſe habent, ſi magnitudines ſimiliter fluant. Sed et contrariè fluentium fluxiones inter ſe rationem habent, quæ prima eſt naſcentis incrementi magnitudinis creſcentis ad decrementum naſcens magnitudinis decreſcentis. Quod iiſdem planè argumentis effici poteſt.

THEOREMA II.

Magnitudides inter ſe æquales ſi fluant, et fluendo æqualitatem, quam initio fluxûs habuere, inter ſe ſemper ſervent, harum fluxiones ſemper erunt inter ſe æquales. Viciſſim, quarum magnitudinum fluxiones ſemper ſunt æquales, hæ, dummodo homogeneæ ſint, et ſimiliter fluant, vel ſemper inter ſe æquales erunt, vel altera alterâ major erit datâ; utique ſi conferantur fluentium quantitates, quæ fluendo ſimul exſiſtunt.

Fig. 7.

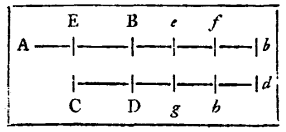


Sint magnitudines æquales AB, CD, quæ fluant, et fluendo æqualitatem inter ſe ſemper ſervent. Dico harum fluxiones ſemper eſſe inter ſe æquales. Sint B*b*, D*d* magnitudinum fluentium incrementa quæ ſimul fluendo exſiſtunt, tempore quovis finito genita. Erunt igitur A*b*, C*d* inter ſe æquales. Et propter æquales AB, CD, erunt etiam B*b*, D*d* inter ſe æquales. Nec huic rationi officient incrementorum B*b*, D*d* magnitudines, magna ea parvave fuerint, dummodo fluendo ſimul exſiſtant. Quare et naſcentium inter ipſa prima, vel evaneſcentium ultima ratio æqualitas erit. Sed incrementorum naſcentium ratio inter ipſa prima, vel evaneſcentium ultima eſt fluxionum ratio. Fluxiones igitur ſunt inter ſe æquales. Q. E. D.

Jam verò magnitudinum fluentium AB, CD fluxiones ſemper ſint æquales, et ſint fluentes magnitudines homogeneæ, et ſimiliter fluant. Dico fluentes vel ſemper inter ſe æquales eſſe, vel alterâ alteram datâ majorem, ſi quantitates, quæ fluendo ſimul exſiſtunt, conferantur. Sint AB, CD magnitudines quas initio fluxûs fluentes habuerunt, ſive priuſquam fluere inceperint. Sint B*b*, D*d* incrementa ſimul genita. Horum utrumque in partes quotvis dividas, numero æquales, temporibus iiſdem ordine genitas; nempe B*b* in partes B*e*, *ef*, *f b*; D*d* in partes totidem D*g*, *gh*, *hd*. Jam ſi partium utriuſque numerus infinitè augeatur, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus, erunt partium ſimul genitarum rationes naſcentium primæ, ſive evaneſcentium ultimæ, eædem quæ fluxionum rationes (per Theor. I. hujus). Hoc eſt, erit B*e* ad D*g* ultimò ut fluxio magnitudinis AB ad fluxionem magnitudinis CD. Et *ef* ad *gh* ultimò ut fluxio magnitudinis A*e* ad fluxionem magnitudinis C*g*. Et *f b* ad *hd* ultimò ut fluxio magnitudinis A*f* ad fluxionem magnitudinis C*h*. Eſt autem æqualitas fluxionum fixa ratio (id enim poſuimus) Quare partium B*e*, *ef*, *f b* ad partes D*g*, *gh*, *hd* naſcentium

naſcentium ad naſcentes, vel evaneſcentium ad evaneſcentes, eſt æqualitas ratio prima, vel ultima, communis. Ergo magnitudines totæ B*b*, D*d* ſunt inter ſe æquales (per Cor. Lem. IV. Newton. de Rat. Prim. et Ult.) Datæ autem AB, CD (datas enim ſemper intelligo fluentium initio fluxûs magnitudines, quod ſemel monuiſſe ſatis eſto) datæ inquam AB, CD vel æquales ſunt inter ſe, vel inæquales. Si æquales ſint, erunt A*b*, C*d* inter ſe æquales. THEOR. III.

Fig. 8.

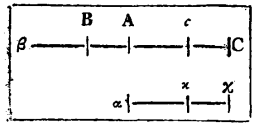


Si inæquales ſint AB, CD, altera ex illis major erit. Sit AB major, et auferatur BE minori CD æqualis. Ergo data erit AE, et E*b*, C*d* inter ſe æquales erunt. Ergo A*b* datâ major eſt quàm C*d*. Sunt igitur A*b*, C*d* vel æquales inter ſe, vel altera alterâ eſt datâ major. Q. E. D.

THEOREMA III.

Si duæ magnitudines eâ lege fluant, ut ſimul ſumptæ, jungendo utique quæ ſimul fluendo exſiſtunt, datæ cuidam æquales ſint, fluxiones earum æquales quidem, ſed contrariæ erunt. Et ſi duarum fluentium fluxiones inter ſe ſemper æquales ſed contrariæ ſint, fluentium ſumma, jungendo utique quæ ſimul fluendo exſiſtunt, datæ cuidam æqualis erit.

Fig. 9.



Duæ magnitudines, quæ initio fluxûs ſint AB, AC, junctæque ſummam efficiant BC, eâ lege fluant, ut datæ BC earum ſumma ſemper ſit æqualis. Dico earum fluxiones inter ſe æquales, ſed contrarias eſſe. Et contrarias quidem eſſe fluentium AB, AC fluxiones, hoc eſt, magnitudines illas contrariè fluere, manifeſtum eſt; ſiquidem earum ſummæ ſua conſtet magnitudo. Nam ſi earum altera, puta AB, creſcat, opus eſt decreſcat altera, ne creſcente utrâque ſumma creſcat. Viciſſim, ſi altera, puta AB, decreſcat, opus erit creſcat altera, ne utrâque decreſcente ſumma decreſcat. Fluunt igitur AB, AC modis inter ſe contrariis. Dico earum fluxiones inter ſe æquales eſſe. Nam quo tempore AB fluendo facta eſt Aβ, contrariè fluendo altera AC fiat A*c*. Duarum igitur Aβ, A*c* ſumma βc datæ BC æqualis erit. Ablatâque communi B*c*, erunt βB, C*c* inter ſe æquales. Hoc eſt, illud quo aucta eſt AB æquale erit ei quo imminuta eſt AC, vel viciſſim. Neque huic rationi officiet illarum Bβ, C*c* magnitudines, magnæ parvæve fuerint, dummodo fluendo ſimul genitæ. Quare et naſcentium Bβ, C*c* prima inter ipſas ratio æqualitas erit. Quæ verò naſcentibus Bβ, C*c* inter ipſas eſt prima, eadem magnitudinum AB, AC fluxionibus inter ipſas ratio erit. (Th. I. Cor.) Quare et fluxiones illæ inter ſe æquales erunt. Q. E. D.

Rurſum magnitudinum duarum AB, AC contrariè fluentium, ut creſcente alterâ, altera decreſcat, intelligantur fluxiones ſemper inter ſe æquales. Dico fluentium ſummam, jungendo utique quæ ſimul fluendo exſiſtunt, datæ cuidam æqualem eſſe; ei nimirum, quam magnitudines initio

fluxûs

THEOR. III & IV. fluxûs compositæ conficiebant. Sint enim $A\beta$, Ac fluentium quantitates quævis, quæ simul fluendo exsistunt. Dico harum summam βc magnitudini BC æqualem esse. Sit enim αx magnitudo quædam, quæ eâ lege fluat, ut fluenti $A\beta$ addita, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, summam reddat datæ BC æqualem. Fluentium igitur $A\beta$, αx fluxiones contrariæ quidem, sed inter se æquales erunt; per ea quæ modò ostendimus. Fluentium autem $A\beta$, Ac fluxiones sunt inter se æquales; sic enim posuimus. Quare fluentium Ac, Ax fluxiones inter se æquales erunt. Et fluentes illæ, cùm utraque earum contrario modo fluat atque $A\beta$, similiter utique fluunt. Quum verò αx eâ semper lege fluat, ut fluenti $A\beta$ addita summam reddat datæ BC æqualem, si $A\beta$ refluendo fiat AB, illa autem αx refluendo simul fiat $\alpha\chi$, erunt $\alpha\chi$, AC inter se æquales. Magnitudines igitur AC, $\alpha\chi$, quarum similiter fluentium fluxiones semper sunt inter se æquales; hæ, cùm initio fluxûs inter se æquales sint, manebunt semper quidem inter se æquales, si conferantur utique earum quantitates quæ fluendo simul exsistunt (Th II) At simul fluendo exsistunt Ac, αx, nempe cùm earum utraque simul cum $A\beta$ fluendo exsistat. Sunt igitur Ac, αx inter se æquales. Additâque communiter $A\beta$, duæ $A\beta$, Ac simul sumptæ duabus $A\beta$, αx simul sumptis æquales erunt. Sed duæ $A\beta$, Ac simul sumptæ summam efficiunt βc. Et duæ $A\beta$, Ax simul sumptæ datæ BC æquales sunt. Id enim posuimus. Quare βc datæ BC est æqualis. Q. E. D.

SCHOLIUM.

Quantitatum contrariè fluentium fluxiones algebraicè hoc modo designari solent: $\dot{x} = -\dot{y}$. Et quoties calculis artificioſè subductis, istiusmodi tandem æquatio evaserit, indicio est, quantitatem $x + y$ permanenti cuidam æqualem esse.

THEOREMA IV.

Magnitudines, quæ datam inter se rationem habent, si fluant, et fluendo rationem datam, quam initio fluxûs habuere, inter se semper servent, harum fluxiones datam fluentium suarum rationem inter se semper habent. Vicissim, quarum magnitudinum fluxiones datam inter se rationem semper servant, hæ dummodo homogeneæ sint, et similiter fluant, vel datam fluxionum suarum rationem inter se semper habent, vel altera alterâ major erit datâ quàm pro fluxionum ratione; utique si conferantur fluentium quantitates illæ, quæ fluendo simul exsistunt.

Demonstratur hæc Propositio ad modum secundæ, imò iisdem planè verbis, si in illius demonstratione pro *ratione æqualitatis ratio data* ubique supponatur.

THEOREMA V.

Fluentibus magnitudinibus homogeneis, fluxionum summa summæ erit fluxio, differentiâ differentiæ.

Fluant magnitudines homogeneæ AB, CD. Fluat tertia EF cum prioribus homogenea, eâ lege ut EF duarum AB, CD summæ semper sit æqualis, nimirum si conferantur fluentium magnitudines fluendo simul factæ. Rursum fluat alia GH cum prioribus etiam homogenea, eâ lege ut GH duarum AB, CD differentiæ semper sit æqualis, si magnitudines fluendo simul factæ conferantur. Dico fluxionum AB, CD summam magnitudinis EF fluxionem esse, earundem verò fluxionum differentiam magnitudinis GH esse fluxionem. Sint enim P, Q magnitudinum AB, CD fluxiones, et S fluxio magnitudinis EF. Sint AB, CD, EF magnitudines fluendo simul factæ; et sint Bb, Dd, Ff magnitudinum fluentium AB, CD, EF incrementa fluendo simul facta. Habet igitur S ad P rationem nascentis Ff ad nascens Bb primam (per Prop. I. hujus). Habet quoque S ad Q rationem nascentis Ff ad nascens Dd primam. Habet igitur S ad duas P, Q simul sumptas rationem eam, quæ prima est nascentis Ff ad nascentia Bb, Dd simul sumpta. Quoniam verò AB, CD simul sumptæ magnitudini EF æquales sunt, et Ab, Cd simul sumptæ magnitudini Ef, erunt incrementa Bb, Dd simul sumpta incremento Ff æqualia. Neque huic rationi officient incrementorum magnitudines, magna illa parvave fuerint. Quare et nascentis Ff ad nascentia Bb, Dd simul sumpta æqualitas prima ratio erit. Sed prima illa ratio magnitudinis est S ad duas P, Q simul sumptas; ex priùs ostensis. Magnitudo igitur S duabus P, Q simul sumptis est æqualis. Hoc est, fluxio magnitudinis EF summæ fluxionum AB, CD.

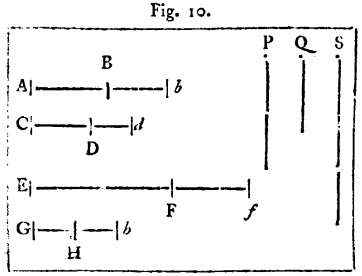
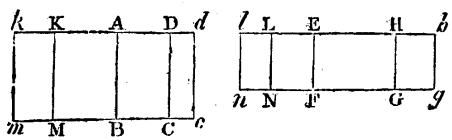


Fig. 10.

Et simili prorsus argumento concludetur fluxionem magnitudinis GH duarum P, Q differentiæ esse æqualem. Q. E. D.

THEOREMA VI.

Si rectangulis fluentibus unum tantummodò latus unicuique fluat, arearum fluxiones inter se rationem habent compositam è ratione datâ laterum permanentium, et è ratione fluxionum laterum quæ fluunt, vel datâ vel mutabili.



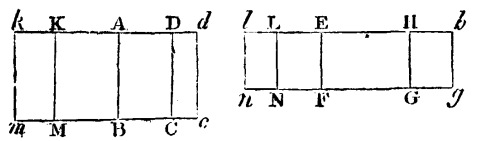
Rectangulorum ABCD, EFGH intelligantur latera AB, EF permanere, alteris AD, EH fluentibus. Dico fluxionem rectanguli AC ad fluxionem rectanguli EG rationem habere compositam è ratione datâ datæ AB ad datam EF, et ratione fluxionis rectæ AD ad fluxionem rectæ EH; quæ vel data erit vel mutabilis, prout rectarum AD, EH vel utriusque vel alterius tantùm fluxus sit æquabilis. Rectarum AD, EH longitudines, dato quovis tempore, ex illis

AD,

THEOR. V & VI.

Theor. VI & VII.

AD, EH in alias A*d*, E*h* mutentur; ut ſint D*d*, H*h* incrementa rectarum fluentium fluendo ſimul facta. Erunt igitur rectangula D*c*, H*g* incrementa arearum fluentium fluendo ſimul facta. Arearum igitur fluxiones eam inter ſe rationem habebunt, quæ rectangulorum D*c*, H*g* vel naſcentium prima eſt, vel evaneſcentium ultima. Hoc eſt, quæ compoſita eſt è ratione datâ rectæ AB ad rectam EF, cum illâ quæ rectæ D*d* ad rectam H*h*, naſcentis ad naſcentem, vel evaneſcentis ad evaneſcentem, prima ultimave erit. Sed ratio quæ rectis D*d*, H*h* vel naſcentibus inter ipſas prima, vel evaneſcentibus erit ultima, ea rectarum AD, EH fluxionum ratio eſt. Arearum igitur fluentium AC, EG fluxiones inter ſe rationem habent compoſitam è ratione datâ rectæ AB ad rectam EF, et ratione fluxionum laterum quæ fluunt, AD, EH, vel datâ vel mutabili.



Cor. In rectis DA, HE capiantur AK, EL, quæ ſint inter ſe ſicut veloeitates, quibus puncta A, E, quorum motu rectæ AD, EH generantur, è locis ſuis primis A, E egrediuntur. Et fluentibus rectis AD, EH, rectæ AK, EL vel permaneant, vel fluant; eâ quidem lege, ut velocitatum fluendi rectarum AD, EH rationes inter ſe, vel permanendo vel fluendo, ſervent. Si punctorum A, E, K, L, capiantur loca quæ ſimul ea appulerint, *d*, *h*, *k*, *l*, erunt A*k*, E*l* fluxiones rectarum A*d*, E*h*, ſenſu definitionis quintæ; et ſi rectangula A*m*, E*n* compleantur, erunt rectangula illa rectangulorum A*c*, E*g* eodem ſenſu fluxiones; ut ex hoc Theoremate ſatis patet. Jam ſi rectas datas AB, EF literæ *a*, *b* deſignent, mutabiles autem A*d*, E*h* literæ *x*, *y*; rectangulorum *ax*, *by*, erunt rectangula *ax*, *by* fluxiones; notis utique $\dot{x}$, $\dot{y}$ rectas A*k*, E*l* deſignantibus, vel datas quidem illas vel mutabiles, prout ratio fluendi rectarum AD, EH poſtulaverit.

THEOREMA VII.

Parallelopipedis rectangulis, ſi, fluentibus altitudinibus, baſes permaneant, Solidorum fluxiones inter ſe rationem habent è ratione datâ baſium permanentium, et ratione fluxionum altitudinum, ſive datâ, ſive mutabili, componendam. Sin altitudinibus permanentibus baſes fluant, Solidorum fluxiones rationem inter ſe habebunt è ratione altitudinum datâ, et ratione fluxionum baſium, ſive datâ, ſive mutabili, componendam.

Demonſtratur caſus uterque ad exemplum præcedentis, colligendo rationes primas incrementorum ſolidorum naſcentium, ſive evaneſcentium eorundem ultimas.

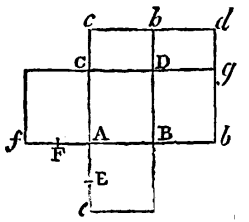
Cor. Parallelopipedorum rectangulorum *abx*, *cdy* ſunt parallelopipeda *ab*$\dot{x}$, *cd*$\dot{y}$ fluxiones, adhibitâ ſimili atque in præcedentibus notarum interpretatione.

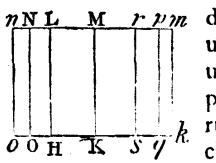
THEOREMA

THEOREMA VIII.

Theor. VIII.

Si rectanguli latus utrumque fluat, et ſumantur rectæ, quæ, ſenſu definitionis quintæ, laterum ſint fluxiones; rectangulorum ſub latere utroque et alterius lateris fluxione ſumma, ſiquidem latus utrumque eodem modo fluat, ſin latera contrariè fluant, horum rectangulorum differentia, rectanguli fluxio erit.





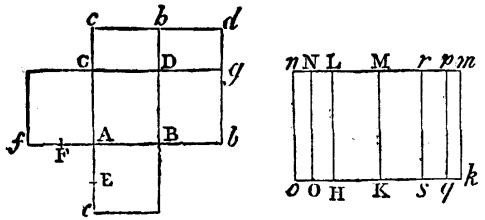
Rectanguli AD latera AB, AC fluant, ac primùm quidem eodem modo, hoc eſt, ut vel creſcat utrumque, vel utrumque decreſcat. Capiantur rectæ AF, AE, quarum AF ſit ad AE, ut velocitas, quâ punctum generans rectam AB è loco A egreditur, ad velocitatem quâ punctum generans rectam AC ex eodem loco A decedit. Progredientibus autem punctis B, C, rectæ AF, AE vel permaneant, vel eâ lege fluant, ut velocitatum fluendi rectarum AB, AC, rationes inter ſe, vel permanendo, vel fluendo, ſervent. Si capiantur punctorum B, C, F, E loca quævis B, C, *f*, *e*, quæ ſimul ea appulerint, erunt A*f*, A*e* rectarum AB, AC, ſenſu definitionis quintæ, fluxiones. Completiſque rectangulis AD, C*f*, B*e*, dico rectangula C*f*, B*e*, ſimul ſumpta, rectanguli AD eſſe fluxionem.

Exponatur recta LH datæ cujuſvis magnitudinis, cui recta LM ad perpendiculum inſiſtens eâ lege fluat, ut rectangula AD, LHKM ſemper ſint inter ſe æqualia, ſi ſumantur punctorum B, C, M loca illa quæ ſimul ea appulerint. In rectâ ML capiatur LN, quæ habeat ad AF, AE rationes eas quas velocitas, quâ punctum L, rectam LM generans, è loco L egreditur, ad velocitates, quibus puncta rectas AB, AC generantia è loco A diſcedunt. Et LN aut permaneat, aut eâ lege ſemper fluat, ut rectæ LN longitudines ſint inter ſe ut puncti M velocitates, ſi capiantur punctorum M, N loca, quæ ſimul ea appulerint, M, *n*. Erit igitur L*n*, ſenſu definitionis quintæ, fluxio rectæ LM. Completoque rectangulo H*n*, erit rectangulum H*n* fluxio rectanguli LK (per Th. VI. Cor.) Rectangulorum autem LK, AD fluxiones ſemper ſunt inter ſe æquales, ſi capiantur punctorum B, C, M loca quæ ſimul ea appulerint (per Th. II. hujus). Rectangulum igitur H*n* rectanguli AD fluxioni æquale erit.

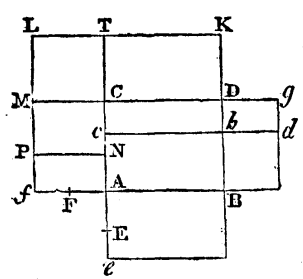
Sint *b*, *c*, *m* punctorum B, C, M loca quævis, quæ ſimul ea appulerint, prioribus B, C, M ulteriora, et compleantur rectangula A*d*, L*k*. Rectanguli verò A*d* lateribus *bd*, *cd*, occurrant CD, BD productæ in *g*, *h* punctis. Rectangulum H*n* ad rectangulum C*f* rationem habet è rationibus HL ad AC et L*n* ad A*f* compoſitam. Sed cùm L*n*, A*f* fluxiones ſint rectarum LM, AB, quarum M*m*, B*b* ſunt incrementa fluendo ſimul facta; ratio L*n* ad A*f*, naſcentis M*m* ad naſcentem B*b* prima erit (per Th. I. huj.) Rectangulum igitur H*n* ad rectangulum C*f* rationem habet è ratione datæ HL ad AC,

 ſive

THEOR. VIII.



five MK ad BD, naſcentiſque *Mm* ad naſcentem B*b* primâ compoſitam. Sed ratio ex hiſce compoſita prima eſt rectanguli naſcentis *Mk* ad rectangulum naſcens B*g*. Rectangulum igitur H*n* ad rectangulum C*f* rationem habet, quæ prima eſt naſcentis *Mk* ad naſcens B*g*. Simili argumento concludetur, rectangulum H*n* ad rectangulum B*e* rationem habere, quæ naſcentis *Mk* ad naſcens D*c* prima eſt. Rectangulum igitur H*n* ad rectangula duo C*f*, B*e* ſimul ſumpta rationem habet, quæ prima eſt naſcentis *Mk* ad duo naſcentia B*g*, D*c* ſimul ſumpta (Elem. V. 24.) hoc eſt, ſi ad rectam MK applicetur MK*qp* duobus B*g*, D*c* ſimul ſumptis æquale, quæ prima eſt naſcentis *Mk* ad naſcens *Mq*. A rectangulo *Mq* auferatur MK*sr* rectangulo D*c* æquale. Jam cùm rectangula L*k*, A*d* ſint inter ſe æqualia, necnon LK, AD (id enim poſuimus) rectangulum *Mk* gnomoni B*bdc*C æquale erit. Ablatiſque æqualibus M*s*, D*c*, rectangula *rk*, B*d* erunt inter ſe æqualia. Rurſum cùm rectangulum *Mq* duobus B*g*, D*c* ſimul ſumptis ſit æquale, ablatis æqualibus M*s*, D*c*, erunt *rq*, B*g* inter ſe æqualia. Quare *rk* erit ad *rq* ut B*d* ad B*g*. (El. V. 7.) Atque inter omnes rectangulorum *rk*, *rq*, B*d*, B*g* magnitudines, quæ ſimul fluendo exſiſtunt, hæc analogia obtinebit. Quare et naſcentium *rk*, *rq* prima inter ipſa ratio eadem erit, quæ naſcentium B*d*, B*g* prima. Sed naſcentibus B*d*, B*g* prima inter ipſa ratio eſt æqualitas. Naſcentibus igitur *rk*, *rq* eſt ipſa æqualitas prima inter ipſa ratio. Additoque communiter M*s*, naſcentium *Mk*, *Mq* ratio inter ipſa prima æqualium erit. Sed naſcentis *Mk* ad naſcens *Mq* prima ratio, rectanguli eſt H*n* ad duo rectangula C*f*, B*e* ſimul ſumpta (ex prius oſtenſis). Rectangulum igitur H*n* æquale eſt duobus rectangulis C*f*, B*e* ſimul ſumptis. Idem verò rectangulum H*n* fluxioni rectanguli AD jam olim oſtenſum fuit æquale. Quare eidem fluxioni rectangula duo C*f*, B*e* ſimul ſumpta ſunt æqualia. Q. E. D.



CAS. 2. Si creſcente latere uno, puta AB, latus alterum AC decreſcat, ſit T punctum in rectâ AC datum, ex quo punctum C rectâ verſus A movere incipiat, quo tempore punctum A rectam AB generans è loco ſuo primo A diſcedit. Sumantur rectæ AF, AE, quarum AF ſit ad AE, ut velocitas, quâ punctum A è loco A diſcedit, ad velocitatem quâ punctum C, verſus A movendo, egreditur è loco T. Progredientibus autem punctis B, C, rectæ AF, AE vel quibus ſint longitudinibus permaneant, vel eâ quidem lege fluant, ut velocitatum fluendi rectarum AB, AC rationes, permanendo vel fluendo, inter ſe ſemper ſervent. Si capiantur punctorum B, C, F, E loca quævis B, C, *f*, *e*, quæ ſimul ea appulerint, erunt

A*f*, A*e* rectarum AB, AC fluxiones. Completiſque rectangulis AD, C*f*, B*e*, THEOR. VIII. dico rectangulorum C*f*, B*e* in hoc caſu differentiam, rectanguli AD fluxionem eſſe. Compleantur enim rectangula TB, AL. Rectangulum AD duorum TB, TD differentia eſt. Fluxio igitur rectanguli AD differentia eſt fluxionum duorum TB, TD. (Th. V.) Sed cùm AT data ſit, et A*f* rectæ AB fluxio, rectangulum T*f* fluxio erit rectanguli TB (Th. VI. Cor.) Rurſum cùm rectæ TK, AB, oppoſita utique parallelogrammi latera, ſemper ſint inter ſe æquales; creſcente hâc, illa quoque paribus incrementis creſcet. Et cùm motus puncti C verſus A quicquid rectæ AC detraxerit, id omne rectæ TC apponet, decreſcente AC recta TC creſcet, atque ita quidem, ut inter ſe ſemper ſint æquales hujus et illius fluxiones. Rectis igitur AB, AC contrariè fluentibus, rectæ TK, TC eodem modo fluunt. Et fluentis TK eſt A*f* vel illi æqualis TL fluxio, fluentis autem TC fluxio A*e*. Rectangulorum igitur CL, B*e* ſumma eſt rectanguli TD fluxio; hoc eſt, ſi ad CM applicetur rectangulum CP rectangulo B*e* æquale, ut ſit TP duorum CL, B*e* ſumma, hoc ipſum TP fluxio erit rectanguli TD (per Caſ. 1. huj.) Quare duorum TP, T*f* differentia, hoc eſt AP, rectanguli AD fluxio erit. Sed cùm CP, B*e* ſint inter ſe æqualia (id enim factum) erit AP duorum C*f*, B*e* differentia. Duorum igitur C*f*, B*e* differentia fluxio eſt rectanguli AD. Q. E. D.

COR. 1. Rectanguli xy, ſi latera, x, y, eodem modo fluant, fluxio erit $x\dot{y}+y\dot{x}$. Sin latera contrariè fluant, ut creſcente x, y decreſcat, erit $y\dot{x}-x\dot{y}$ rectanguli fluxio; negatâ nimirum illâ fluxionis parte, quæ ex fluxione lateris decreſcentis provenerit.

COR. 2. Si laterum x, y magnitudines quæ fluendo ſimul exſiſtunt, ſemper ſint æquales, rectangulum xy ſit quadratum ex x, et fluxio ſit $2x\dot{x}$, quadrati fluxio.

COR. 3. Si rectanguli, lateribus fluentibus, magnitudo manet, latera contrariè fluunt, et eorum fluxiones ipſorum laterum inter ſe rationem gerunt. Vel ſi rectanguli latera contrariè fluant, et tali lege ut eorum fluxiones ipſorum laterum inter ſe rationem gerant, hujus rectanguli magnitudo manebit.

Rectangulum xy, lateribus x, y fluentibus, dato ſpatio æquale maneat. Dico latera x, y, modis contrariis fluere, et $\dot{x}$ eſſe ad $\dot{y}$ ſicut x ad y. Ac primùm latera x, y modis contrariis fluere manifeſtum eſt, ne ſimiliter illis fluentibus rectangulum ipſum, quod manere poſuimus, fluat. At verò lateribus rectanguli xy contrariè fluentibus, fluxio rectanguli rectangulorum $\dot{x}y$, $y\dot{x}$ differentiæ æqualis erit (Th. VIII. Caſ. 2). Sed rectanguli, cujus magnitudo manet, fluxio nulla eſt. Nulla igitur rectangulorum $\dot{x}y$, $y\dot{x}$ differentia. Rectangula igitur illa inter ſe æqualia. Unde $\dot{x}$ erit ad $\dot{y}$ ut x ad y. (El. VI.) Q. E. D.

E contrario, ſi rectarum x, y contrariè fluentium fluxiones rationem inter ſe rectarum ipſarum ſervent, dico rectanguli xy magnitudinem manere. Cùm enim ſit $\dot{x}$ ad $\dot{y}$ ut x ad y rectangula $y\dot{x}$, $x\dot{y}$ erunt inter ſe æqualia. Quare nulla erit horum differentia. Rectanguli igitur xy fluxio nulla. Cujus autem magnitudinis fluxio nulla, ea utique manet. Q. E D.

COROLLARIA. COR. 4. Parallelopipedi rectanguli axy, si latera x, y eodem modo fluant, tertio a permanente, solidorum duorum axy, ayx summa fluxio erit. Sit enim z recta eâ lege mutabilis, ut rectangula az, yx semper sint inter se æqualia, si conferantur illorum magnitudines quæ fluendo simul exsistunt. Solida igitur az, ayx semper erunt inter se æqualia. Ergo et horum fluxiones semper inter se æquales (Th. II.) Solidi autem a^2z solidum $a^2\dot{z}$ fluxio erit (Th. VII. Cor.) Idem igitur solidi ayx fluxio. Est autem rectangulum $a\dot{z}$ fluxio rectanguli az (Th. VI. Cor.) et rectangulorum az, yx fluxiones sunt semper inter se æquales (Th. II.) Et rectanguli yx est $y\dot{x} + x\dot{y}$ fluxio (Th. VIII.) Quare $a\dot{z} = y\dot{x} + x\dot{y}$. Solidum igitur $aa\dot{z}$ duobus solidis $ay\dot{x}$, $ax\dot{y}$ simul sumptis æquale est. Ergo $ay\dot{x} + ax\dot{y}$ solidi axy fluxio erit.

Sin crescente x, y decrescat, erit $ay\dot{x} - ax\dot{y}$ solidi axy fluxio. Quod simili argumento ex casu secundo propositionis novissimæ licet concludere. Q. E. D.

COR. 5. Parallelopipedi rectanguli xyz, cujus latera x, y, z eodem modo fluunt, solidorum trium $xy\dot{z}$, $xz\dot{y}$, $yz\dot{x}$ summa fluxio erit.

Designet litera a rectam quamvis datam; u aliam, eâ lege mutabilem, ut rectangula xy, au semper sint inter se æqualia, si conferantur magnitudines eorum, quæ fluendo simul exsistunt. Solida igitur auz, xyz erunt semper inter se æqualia: unde horum fluxiones inter se æquales (Th. II.) Solidi autem auz fluxio est duorum $au\dot{z}$, $az\dot{u}$ summa (per Cor. præc.) hoc est, duorum $xy\dot{z}$, $az\dot{u}$ summa. Et rectangulum $a\dot{u}$ fluxio est rectanguli au (Th. VI. Cor.) fluxioni igitur rectanguli xy æquale; hoc est, $o\dot{u} = x\dot{y} + y\dot{x}$. Ergo $az\dot{u} = xz\dot{y} + yz\dot{x}$; additoque utrinque solido $xy\dot{z}$, $xy\dot{z} + az\dot{u}$, hoc est fluxio solidi auz, sive solidi xyz, $= xy\dot{z} + xz\dot{y} + yz\dot{x}$. Q. E. D.

Sin latera x, y, z, modis diversis fluant, solidi fluxio ex iisdem partibus constabit; sed negatis iis, quæ ex fluxionibus laterum decrescentium factæ fuerint. Nempe, si crescentibus x, y, tertium z decrescat, erit $xz\dot{y} + yz\dot{x} - xy\dot{z}$ solidi xyz fluxio. Si crescente x, duo y, z decrescant, erit $yz\dot{x} - xy\dot{z} - xz\dot{y}$ solidi xyz fluxio.

COR. 6. Si laterum x, y, z magnitudines semper sint inter se æquales parallelopipedon xyz fit cubus ex x, et fluxio fit $3x^2\dot{x}$, quæ proinde cubi fluxio erit.

COR. 7. Solidi $\frac{xyzu}{a}$, si quatuor x, y, z, u eodem modo fluant, fluxio erit $\frac{xyz\dot{u} + xyu\dot{z} + xzu\dot{y} + yzu\dot{x}}{a}$.

Sit s recta aliqua eâ lege mutabilis, ut rectæ $\frac{xy}{a}$ semper sit æqualis. Tum $xy = as$, et $\frac{xyzu}{a} = szu$. Horum igitur fluxiones sunt inter se æquales. Solidi verò szu fluxio est $sz\dot{u} + su\dot{z} + zu\dot{s}$ (per Cor. 4.) hoc est $\frac{xyz\dot{u} + xyu\dot{z} + azu\dot{s}}{a}$. Sed propter rectangula as, xy inter se æqualia erit $a\dot{s} = x\dot{y} + y\dot{x}$, & $\dot{s} = \frac{x\dot{y} + y\dot{x}}{a}$; unde $zu\dot{s} = \frac{xzu\dot{y} + yzu\dot{x}}{a}$; additisque utrinque $\frac{xyz\dot{u} + xyu\dot{z}}{a}$, fit $\frac{xyz\dot{u} + xyu\dot{z}}{a} + zu\dot{s} = \frac{xyz\dot{u} + xyu\dot{z} + xzu\dot{y} + yzu\dot{x}}{a}$. Sed horum prius solidi szu, sive $\frac{xyzu}{a}$, fluxioni jam suprà ostensum est æquale. Ergo et posterius. Q. E. D. Jam

Jam si horum æstimatio Arithmetica ineunda sit, posito $a = 1$, fluxio quantitatis $xyzu$ erit $xyz\dot{u} + xyu\dot{z} + xzu\dot{y} + yzu\dot{x}$; notis nimirum x, y, z, u, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ non jam lineas rectas, aliasve magnitudines Geometricas, designantibus, sed Geometricarum per numeros æstimationes ex datâ mensurâ lineari a. COROLLARIA.

Si illarum quatuor x, y, z, u magnitudines fluendo simul factæ semper sint inter se æquales, quantitas $xyzu$ potestas fit biquadratica à radice x, et fluxio fit $4x^3\dot{x}$, quæ proinde potestatis biquadraticæ fluxio erit.

COR. 8. Simili modo concludetur esse $5x^4\dot{x}$ fluxionem quantitatis x^5. Et cùm similium Theorematum infinita sit progressio, fluxio quantitatis x^n erit $nx^{n-1}\dot{x}$.

COR. 9. Fluxio quantitatis $x^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \dot{x}$. Ponatur enim $x^{\frac{m}{n}} = s$. Harum igitur fluxiones sunt inter se æquales, hoc est $\dot{x^{\frac{m}{n}}} = \dot{s}$. (Th. II.) Sed quantitatum æqualium, $x^{\frac{m}{n}}$, s, potestates homologæ erunt inter se æquales. Ergo $x^m = s^n$, et $\frac{x^m}{s}$, sive $x^{m-\frac{m}{n}} = s^{n-1}$. Duarum autem x^m, s^n, quæ semper inter se æquales sunt, fluxiones erunt inter se æquales (Th. II.) hoc est $mx^{m-1}\dot{x} = ns^{n-1}\dot{s}$ (per Cor. præc.) vel pro s^{n-1} subrogato $x^{m-\frac{m}{n}}$, $mx^{m-1}\dot{x} = nx^{m-\frac{m}{n}}\dot{s}$. Æquationis autem novissimæ parte utrâque cum quantitate $x^{\frac{m}{n}-m}$ multiplicatâ, proveniet $mx^{\frac{m-n}{n}}\dot{x} = n\dot{s}$. Ergo $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \dot{x} = \dot{s} = \dot{x^{\frac{m}{n}}}$. Q. E. D.

COR. 10. Quantitatibus x^n, y^m eodem modo fluentibus, quantitatis $x^n y^m$ fluxio erit $ny^m x^{n-1}\dot{x} + mx^n y^{m-1}\dot{y}$. Sin contrariè fluant quantitates x^n, y^m, ut crescente x^n, y^m decrescat, quantitatis $x^n y^m$ quantitas $ny^m x^{n-1}\dot{x} - mx^n y^{m-1}\dot{y}$ fluxio erit. Primùm eodem modo fluant. Ponatur $x^n = z$, et $y^m = u$. Erit $nx^{n-1}\dot{x} = \dot{z}$, et $my^{m-1}\dot{y} = \dot{u}$ (Th. II.) Erit etiam $\dot{x^n y} = \dot{zu}$, et $\dot{x^n y^m} = u\dot{z} + z\dot{u} = ny^m x^{n-1}\dot{x} + mx^n y^{m-1}\dot{y}$. Q. E. D. Et alterius casus similis erit demonstratio, ex eo scilicet, quod $\dot{x^n y^m}$ æquabitur $u\dot{z} - z\dot{u}$.

COR. 11. Quantitatis fractæ $\frac{x^n}{a}$, cujus, denominatore permanente, numerator fluit, quantitas fracta $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{a}$ fluxio erit. Quantitas enim x^n ad quantitatem $\frac{x^n}{a}$ rationem datam habet quantitatis a ad unitatem. Ergo fluxio quantitatis x^n ad fluxionem quantitatis $\frac{x^n}{a}$ eandem datam rationem habet

Corollaria. habet quantitatis a ad unitatem (Th. IV.) hoc eſt $nx^{n-1}\dot{x} : \frac{\dot{x^n}}{a} = a : 1$.

Ergo $\frac{\dot{x^n}}{a} = \frac{nx^{n-1}\dot{x}}{a}$. Q. E. D.

Cor. 12. Quantitatis fractæ $\frac{a}{y^m}$, cujus, numeratore permanente, denominator fluit, quantitas fracta $\frac{-may}{y^{m+1}}$ fluxio erit; ſigno — id nimirum ſignificante, contrariis ſemper modis fluere quantitatem fractam et denominatorem ejus; nempe decreſcere $\frac{a}{y^m}$ ſi y^m creſcat, ſi hæc decreſcat, illam creſcere.

Ponatur $\frac{a}{y^m} = s$. Tum $a = y^m s$. Quantitas igitur $y^m s$, ex fluentibus y^m, s, mutuâ multiplicatione facta, datæ ſemper æqualis eſt, vel quod perinde eſt, eadem ſemper manet. Hoc autem fieri nequit, niſi contrariè fluentibus illis y^m, s, quantitates $msy^{m-1}\dot{y}$, $y^m\dot{s}$ inter ſe æquales ſint. Sint enim inæquales, et inæqualium ſit z differentia. Erit igitur z fluxio quantitatis $y^m s$, è duabus y^m, s, contrariè fluentibus, mutuâ multiplicatione factæ (per Cor. 10). Fluet igitur quantitas y s, ſiquidem fluxionem habeat. Non igitur eadem manet. Quod eſt abſurdum, cùm manere oſtenſa ſit. Duæ igitur $msy^{m-1}\dot{y}$, $y^m\dot{s}$ non ſunt inæquales. Æquales igitur. Duæ igitur, $\frac{ms}{y}\dot{y}$, $\dot{s}$, inter ſe æquales. Hoc eſt, ſi pro s ſcribatur $\frac{a}{y^m}$, $\frac{ma}{y^{m+1}}\dot{y} = \dot{s}$. Q. E. D.

Cor. 13. Quantitatis fractæ $\frac{x^n}{y^m}$, cui fluunt numerator et denominator, quantitas fracta $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}}$ fluxio erit; modò quantitas ipſa fracta $\frac{x^n}{y^m}$ eodem modo quo denominator ejus fluat.

Ponatur $\frac{x^n}{y^m} = z$. Quantitatum igitur, $\frac{x^n}{y^m}$, z, fluxiones erunt inter ſe æquales, hoc eſt $\frac{\dot{x}}{y^m} = \dot{z}$.

Propter æquales autem $\frac{x}{y^m}$, z, erunt x^n, zy^m inter ſe æquales. Et æqualium x^n, zy^m fluxiones erunt inter ſe æquales. Ergo $nx^{n-1}\dot{x} = mzy^{m-1}\dot{y} + y^m\dot{z}$; modò y^m & z eodem modo fluant.

Ergo $nx^{n-1}\dot{x} - mzy^{m-1}\dot{y} = y^m\dot{z}$.

Ergo $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mz\dot{y}}{y} = \dot{z}$.

Hoc eſt, ſi pro z reſtituatur $\frac{x^n}{y^m}$, $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}} = \dot{z} = \frac{\dot{x^n}}{y^m}$.

Sin contrariè fluant quantitas ipſa fracta $\frac{x^n}{y^m}$ et denominator ejus, erit $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} + \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}}$ quantitatis fractæ fluxio.

Cor.

Cor. 14. Si quantitas P ex quantitatibus quotvis fluentibus A, B, C, D, &c. mutuâ multiplicatione facta ſit, quantitas fracta $\frac{P}{P}$ quantitatum fractarum $\frac{A}{A}$, $\frac{B}{B}$, $\frac{C}{C}$, $\frac{D}{D}$ ſummæ æqualis erit. Corollaria.

Cùm enim P quantitati $A \times B \times C \times D$ æqualis ſit, erit $\dot{P} = BCD \times \dot{A} + ACD \times \dot{B} + ABD \times \dot{C} + ABC \times \dot{D}$ (per Cor. 7.)

Sed $BCD = \frac{P}{A}$, et $ACD = \frac{P}{B}$, et $ABD = \frac{P}{C}$, et $ABC = \frac{P}{D}$.

Ergo $\dot{P} = \frac{P\dot{A}}{A} + \frac{P\dot{B}}{B} + \frac{P\dot{C}}{C} + \frac{P\dot{D}}{D}$.

Ergo $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$. Q. E. D.

Cor. 15. Si P quantitati fractæ æqualis ſit, cujus numerator ex quantitatibus quotcunque fluentibus A, B, C, D mutuâ multiplicatione factus eſt, denominator ex quantitatibus quotcunque fluentibus, G, H, K, L; erit $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D} - \frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$.

Sit $Q = P \times G \times H \times K \times L$.

Ergo $\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L}$ (per Cor. præc.)

Sed cùm $P = \frac{A \times B \times C \times D}{G \times H \times K \times L}$, erit $P \times G \times H \times K \times L$, hoc eſt $Q = A \times B \times C \times D$.

Ergo $\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$ (per Cor. præc.)

Quare $\frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$; et eadem utrinque auferendo, $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D} - \frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$. Q. E. D.

Corollariis duobus noviſſimis expoſita ſunt Maclaurini Theoremata duo, quorum uſus in computationibus fluentium Algebraicis latè patet. (*Maclaurin, Treatiſe of Fluxions, Book* II. *C.* I. *Prop.* IV & V.)

Ita demum formulas, quarum ope, quantitatum omnium quæ ſub generali *Genitarum* (*) nomine Newtono ſunt comprehenſæ, Algebraicè æſtimari fluxiones ſolent, ex paucis illis doctrinæ fluxionalis deduximus principiis, quæ octo utique Theorematis concluſa, demonſtrationibus confirmavimus Newtonianis; hoc eſt, è Newtonianâ Rationum Primarum et Ultimarum Geometriâ arceſſitis. Ex quo genere rationum concluſiones, modò peritè ſint deductæ, nec ipſis Archimedeis, meo equidem judicio, aut evidentiâ aut venuſtate cedunt. Nec dubito tamen fore multos, qui noſtram in hiſce condendis diligentiam, ut nimiam, reprehendent. Sed ii

(*) Vide Princip. Lib. II. Lemma 2.

potiſſimùm

COROLLARIA.

potiſſimùm erunt, qui cùm ea quæ tradimus ipſi ſint conſecuti, aliorum conditionis immemores, ſupervacanea putant quibus ipſi non egent; vel quorum judicia parùm reformido, homines haud indocti quidem illi ſed incurioſi et inelegantes, qui cùm omnia feſtinanter ipſi arripuerint, utpote minùs ſcilicet ingenii perpolitionem, qui potiſſimus eſt doctrinæ fructus, quàm inanem quandam ſcientiæ famam ex ſtudiis captantes, conciſum ſcribendi genus ipſi ſummoperè affectant, alios explicatiùs differentes ægrè ferunt. Qui proprias ſcriptiones non tam verborum brevitate, quàm rerum prætermiſſione et tranſcurſu contrahunt. Ac veluti ſapiente nihil magis indignum exiſtimarent, quàm clarè et apertè loqui, Theoremata Geometrica ſub involucris ſymbolorum proferunt, dicam, an occultant. Horum demonſtrationes plerumque ſtudioſè celant. Aut ſi forte benigniùs agere velint, argumentorum vice, computationes edunt; ex quibus nulla certè probatio efficitur, niſi ei qui ad calculos ratiocinia revocaverit. Quem ſane nimium laborem, niſi in rebus maximis, nemo cordatior ſubierit. Vel ſiquando, in re aliquâ difficiliore, Geometricè edifferendi facultatem atque artem oſtentare libeat, tum verò, cùm infenſam ſibi noverint Graiorum Geometriam, quam votis nunquam placavere, ad præſtigiatricem *Indiviſibilium*, quam vocant, diſciplinam confugere coacti, ſanioris Geometriæ cultoribus miſerè ſe irridendos præbent; pro veris demonſtrationibus demonſtrationum ſimulacra quædam venditantes, qualia ferè inſaniens illa ſapientia ſuppeditare ſolet. Cujus quidem individua, quæ ſemper illis ſunt in ore, quid ſint, quæ, cùm ipſa magnitudinis ſint expertia, juncta tamen magnitudines abſolvant, nondum natus eſt Oedipus, qui mortalibus expediat.

FINIS TOMI PRIMI.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CUORE
BIBLIOTECA
numero 100532
dono
cambio
data

CORRIGENDA

IN TEXTU.

P. 60, lin. 2, pro *unum*, lege *unam*.
P. 65, lin. 9, pro IV, lege V.
P. 73, lin. penult. pro *x*, lege *z*.
P. 246, lin. 11 & 12, delendæ ſunt voces *datam aliquam inter ipſas proportionem ſervantibus*.
P. 249, lin. 12, pro *duplicatâ*, lege *triplicatâ*

IN NOTIS.

P. 237, not. (*) lin. 2, pro *fit*, lege *ſit*.
——— lin. 6, pro *abiit*, lege *abſit*.
P. 379, not. (∞), lin. 2, pro *Not.* a, lege *Not.* x.
P. 383, lin. 21, pro *Philoſophicæ*, lege *Philoſophica*.

To the Book-binder.

Put the two Half-ſheets of Copper-plate between Page 378 and 379.



FA 7 A 222-II

OPERUM NEWTONI

TOMUS SECUNDUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

LONDINI:

EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXIX.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

IN HOC TOMO CONTINENTUR

Principiorum Libri Priores duo, De Motu Corporum.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

SECULI GENTISQUE NOSTRÆ DECUS EGREGIUM.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet, horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem quâ cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus Aſtronomo numerorum frœna recuſet;
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,

Obvia conſpicimus, nubem pellente Matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperûm penetrare domos, atque ardua cæli
Scandere, ſublimis genii conceſſit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantùm ſolamina vitæ.
Jam verò ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate camœnis,
Vos ô cælicolûm gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO

AD

LECTOREM.

CUM Veteres Mechanicam *(uti auctor eſt* Pappus) *in rerum naturalium inveſtigatione maximi fecerint*; *& Recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc tractatu* Matheſin *excolere, quatenus ea ad* Philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *verò duplicem Veteres conſtituerunt:* rationalem, *quæ per demonſtrationes accuratè procedit, &* practicam. *Ad* practicam *ſpectant artes omnes manuales, à quibus utique* Mechanica *nomen mutuata eſt. Cùm autem artifices parùm accuratè operari ſoleant, fit ut* Mechanica *omnis à* Geometriâ *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* Geometriam *referatur, quicquid minùs accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non ſunt artis, ſed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior eſt Mechanicus, & ſi quis accuratiſſimè operari poſſet, hic foret Mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam & linearum rectarum & circulorum deſcriptiones, in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* Geometria *non docet, ſed poſtulat. Poſtulat enim ut tiro eaſdem accuratè deſcribere priùs didicerit, quàm limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata ſolvantur, docet; rectas & circulos deſcribere Problemata ſunt, ſed non Geometrica. Ex* Mechanicâ *poſtulatur horum ſolutio, in* Geometriâ *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* Geometria *quòd tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi mechanicâ, & nihil aliud eſt quàm* Mechanicæ univerſalis *pars illa, quæ artem menſurandi accuratè proponit ac demonſtrat. Cùm autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè verſentur, fit*

ut Geometria *ad Magnitudinem*, Mechanica *ad Motum vulgò referatur. Quo ſenſu* Mechanica Rationalis *erit ſcientia Motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & Virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accuratè propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* Mechanicæ *à Veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cùm potentia manualis non ſit) vix aliter quàm in ponderibus per potentias illas movendis conſiderárunt. Nos autem non Artibus ſed Philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maximá tractamus, quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elaſticam, Reſiſtentiam Fluidorum, & ejuſmodi vires, ſeu attractivas, ſeu impulſivas, ſpectant: et ea propter, hæc noſtra tanquam* Philoſophiæ Principia Mathematica *proponimus. Omnis enim Philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut à phænomenis motuum inveſtigemus vires Naturæ, deinde ab vis viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant Propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractivamus. In libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem Syſtematis Mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœleſtibus, per Propoſitiones in libris prioribus mathematicè demonſtratis, derivantur vires Gravitatis, quibus corpora ad Solem & Planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propoſitiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis mechanicis, eodem argumentandi genere, derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ, per cauſas nondum cognitas, vel in ſe mutuò impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentárunt. Spero autem quòd vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutiſſimus & in omni Literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum typothetarum ſphalmata correxit, & ſchemata incidi curavit, ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cùm demonſtratam à me figuram Orbium Cœleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde*

hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At poſtquam motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem, quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliárum virium, & figuras à corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad orbes Cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant (imperfecta cùm ſint) in Corollariis Propoſitionis LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quàm pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſerò inventa locis minùs idoneis inſerere malui, quàm numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur, & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benignè ſuppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, è Collegio
S. Trinitatis, Maii 8, 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc ſecundâ Principiorum editione multa ſparſim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In Libri Primi Sectione II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In Libri Secundi Sectione* VII. *Theoria Reſiſtentiæ Fluidorum accuratiùs inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In Libro Tertio Theoria Lunæ & Præceſſio Æquinoctiorum ex principiis ſuis pleniùs deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis comfirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28, 1713.

IS. NEWTON.

COTESII

COTESII PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ Philoſophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque deſideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philoſophiæ.

Quæ Phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus Qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ Scholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ. Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cúmque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, Philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperârunt, rejectâ vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam univerſam Homogeneam eſſe, omnem verò Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidam progreſſio inſtituitur à ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit Natura. Verùm ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus: quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglectâ rerum conſtitutione verâ: quæ ſanè fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari

gari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab Hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges Mechanicas accuratiſſime procedant; fabulam quidem, elegantem forte & venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Reliquitur adeo tertium genus, qui Philoſophiam ſcilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem Principii loco aſſumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in Phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, Analyticâ & Syntheticâ. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longè optima, quam præ cæteris merito amplectendam ce ſuit celeberrimus Auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, Mundani nempe Syſtematis explicationem è Theoriâ Gravitatis feliciſſimè deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille & ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: tibi potius, benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti ſumatur exordium à ſimpliciſſimis & proximis; diſpiciamus pauliſper qualis ſit in Terreſtribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Celæſtia, longiſſimè à ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in Terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas Relativa, non eſt vera Levitas, ſed apparens ſolummodò; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitent in Terram, ita Terra viciſſim in corpora æqualitater gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur Terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro Terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires

vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quòd in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublatâ ſcilicet Aëris reſiſtentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cùm corpora in Terram & Terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis quâ corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque Terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium actionibus conflari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia Terreſtria ſe mutuò trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis ſit in Cælis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; Naturæ lex eſt ab omnibus recepta Philoſophis. Inde verò ſequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter à Tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſimè demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, quæque radio ducto ad punctum, vel quieſcens vel utcunque motum, deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cùm igitur in confeſſo ſit apud Aſtronomos, Planetas primarios circum Solem, ſecundarios verò circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, quâ perpetuo detorquentur à Tangentibus rectilineis, & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur, quæ ſita ſunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, Centripeta; reſpectu autem corporis centralis, Attractiva; à quàcunque demum cauſâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematicè demonſtrantur: ſi corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt Circulis ſimilima, & quieſcant orbitarum Apſides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata

drata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in Planetis universis consentiunt Astronomi. Itaque vires centripetæ Planetarum omnium sunt reciprocè ut quadrata distantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat Planetarum, & Lunæ præsertim, Apsides non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse, quòd vis centripetæ proportio aberret aliquantum à duplicatâ, aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse & planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc verò sexaginta ferè vicibus propius accedet quàm ad triplicatam. Sed verior erit responsio, si dicamus hanc Apsidum progressionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonstratur in hâc Philosophiâ. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt versus Solem & secundarii versus primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat Planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versus orbitarum centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eâdem proportione qua diminuitur quadratum distantiæ, diminui in eâdem proportione quâ distantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione institutâ inter Planetarum vires centripetas & vim Gravitatis, annon ejusdem fortè sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demissis dato tempore sub ipso motûs initio describuntur, ubi à viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripetæ Lunæ in orbitâ suâ revolvens, ad vim Gravitatis in superficie Terræ, ut spatium, quod tempore quàm minimo describeret Luna, descendendo per vim centripetam versus Terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium, quod eodem tempore quàm minimo describet grave corpus in viciniâ Terræ, per vim Gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcûs, à Lunâ per idem tempus descripti, sinui verso; quippe qui Lunæ translationem de Tangente, factam à vi centripetâ, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum Lunæ tempore periodico, tum distantiâ ejus à centro Terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta Lunæ, in orbitâ suâ revolventis, ad vim Gravitatis in superficie Terræ, erit ut quadratum semidiametri Terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta Lunæ, in orbitâ suâ revolventis, ad vim Lunæ centripetam prope Terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ superficiem æqualis est vi Gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque

atque eadem: si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quàm ex vi solâ Gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ Luna perpetuò de Tangente vel trahitur vel impellitur, & in orbitâ retinetur, ipsam esse vim Gravitatis terrestris ad Lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est, ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cùm nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutuâ, Terra vicissim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hâc Philosophiâ, ubi agitur de Maris Æstu & Æquinoctorum Præcessione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirum lege vis Gravitatis decrescat in majoribus à Tellure distantiis. Nam cùm Gravitatis non diversa sit à vi centripetâ Lunari, hæc verò sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ; diminuetur & Gravitas in eâdem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & secundariorum circa Jovem & Saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versus centrum Solis, secundariorum versus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta versus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centris, quemadmodum vis Lunæ est ut quadratum distantiæ à Terræ: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra vicissim in Lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in Solem, & Sol vicissim in primarios.

Igitur Sol in Planetas universos gravitat, & universi in Solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum Solem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipsos. Secundarios verò Planetas in Solem gravitare, abunde insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam Theoriam, admirandâ sagacitate patefactam, in Tertio hujus Operis Libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoversum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissimè colligi potest ex motu Cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipsum proximè accedunt, ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantùm non contingere videantur. Horum Theoriam, ab Astronomis antehac fruſtra quæsitam, nostro tandem seculo feliciter inventam & per observationes certissimè demonstratam præstantissimo nostro Auctori debemus. Patet igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phænomenis manifestum est & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem, &

esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantùm ad corpora Planetarum, in datis distantiis, & in eodem ferè plano collocata, sed etiam ad Cometas, in diversissimis cælorum regionibus & in diversissimis distantiis positos, pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, Planetas & Cometas universos se mutuò trahere, & in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognitâ, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriundâ; quin & ex motu illo lentissimo Apsidum, qui suprà memoratus est, quique à causâ consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cælestia, quæ Solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum suprà de Terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicatâ ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hâc lege trahentibus componi debere globos eâdem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse Causas, & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravitas sit causa descensûs lapidis in *Europâ*, quin eadem sit causa descensûs in *Americâ?* Si Gravitas mutua fuerit inter lapidem & Terram in *Europâ*; quis negabit mutuam esse in *Americâ?* Si vis attractiva lapidis & Terræ componatur, in *Europâ*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *Americâ?* Si attractio Terræ ad omnia corporum genera, & ad omnes distantias, propagetur in *Europâ*; quidni pariter propagari dicamus in *Americâ?* In hâc Regulâ fundatur omnis Philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde verò non nisi per hanc Regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia sint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint Extensa, Mobilia & Impenetrabilia; ita nulla concipe debere, quæ non sint Gravia. Corporum Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non nisi per experimenta innotescunt: eodem planè modo Gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, Extensa sunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, Extensa esse & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt

(*) Profecto si illud velit Cotesius, Gravitatem naturali quâdam necessitate corporibus omnibus quâ corpora sunt inesse, sicut horum quidque, extendi, moveri posse, penetrari (ut plerique existimant)

sunt Gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, Gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cùm hæ Fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est viribus? inter primarias qualitates corporum universorum vel Gravitas habebit locum; vel Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et Natura Rerum vel rectè explicabitur per corporum Gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum Extensionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem (*).

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet Occultum esse quid, perpetuò argutari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas à Philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed his solùm quarum occulta est & ficta existentia, nondum verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cælestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverâ existere. Hi potius ad occultas fugiunt causas; qui nescio quos Vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur è Philosophiâ, quòd causa ipsius Gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem Philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent à compositis ad simpliciora; ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes, & quæ ab illis porro pendent, usque dum à causis omnibus vacua fuerit & probè purgata Philosophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam esse dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cùm in Physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa Philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt, quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus, atque adeo ex causis Mechanicis, originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura Philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota Physica celestis vel ideo minùs placet,

existimant) non posse naturali necessitate, quâ corpora, illis inest, illud vult quod à mente Newtoni alieniissimum est. (Vide Præfationem in Editionem Opticés Secundam. *To shew that I do not take Gravity for an essential Property of Bodies, I have added one Question concerning its Cause.)*

quòd

quèd cum *Carteſii* dogmatibus pugnare, & vix conciliari poſſe videatur. His ſuâ licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem, quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque Philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per phænomena comprobatas, potius quàm fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis verè exiſtentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit ſummus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut à pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex quâ verè atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in Philoſophia verâ. In Horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenſo Pondere, vel ab intus concluſo Elatere, oriri poteſt. Quòd ſi oblatum Horologium reverâ ſit inſtructum Pondere; ridebitur qui finget Elaterem, & ex hypotheſi ſic præproperè confictâ motum indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motûs propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de Philoſophis illis, qui materiâ quâdam ſubtiliſſimâ cælos eſſe repletos, hanc autem in Vortices indefinentur agi voluerunt. Nam ſi Phænomenis vel accuratiſſimè ſatisfacere poſſent ex hypotheſibus ſuis; veram tamen Philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has reverâ exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum Attractionem habere verum locum in Rerum Naturâ; quinetiam oſtenſum fuerit, quâ ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per Vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maximè conceſſerimus. Non autem concedimus. Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore noſtro abunde quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomnis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porro commentis ornando, infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eâdem velocitate, eâdemque curſûs determinatione moveri, & eandem habere denſitatem, vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat verò Planetas & Cometas, dum verſantur in iiſdem regionibus cælorum, velocitatibus variis variâque curſûs determinatione moveri. Neceſſario itaque ſequitur, ut Fluidi cæleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias à Sole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas, cum diverſis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint Planetæ; aliâ, ut tranſire poſſint Cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cæleſtia non deferri à materiâ vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque vortice, ſed à pluribus, qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium Soli circumjectum pervadant.

Si

Si plures Vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuò penetrare, motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui ſunt ſummè regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, quî fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur, nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſecula quicquam perturbentur. Sanè ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus Planetarum & Cometarum; fruſtra mihi videntur in Philoſophiam recipi: omnis enim cauſa debet eſſe effectu ſuo ſimplicior. Conceſſâ fabularum licentiâ, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmoſphæris, adinſtar Telluris noſtræ; quæ quidem hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur, quàm hypotheſis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmoſphæras, ex naturâ ſuâ, circa Solem moveri & Sectiones conicas deſcribere; qui ſane motus multo faciliùs concipi poteſt, quàm conſimilis motus vorticum ſe invicem permeantium. Denique Planetas ipſos & Cometas circa Solem deferri ab Atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, &, ob repertas motuum cæleſtium cauſas, triumphum agat. Quiſquis autem hanc fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quàm hypotheſis Atmoſphærarum hypotheſi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti, & in Parabolâ moti, deflexionem à curſu rectilineo oriri à Gravitate lapidis in Terram, ab occultâ ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris, Philoſophus cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus, quæ proximè contingunt Telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas deſcribere contendet. Deinde verò lapidis deflexionem pulchrè ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo ſubtili natat, & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem una ſemitam deſcribere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabolâ moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce Philoſophi ingenium, ex cauſis Mechanicis, materiâ ſcilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è Philoſophiâ feliciter excluſas, denuò revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant. Moventur in orbibus Conicis; hi orbes ſunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, & Planetarum regiones liberrimè pertranſeunt, & ſæpe contra ſignorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certiſſimè confirmantur ex Obſervationibus Aſtronomicis: & per Vortices nequeunt explicari. Imo, ne quidem cum vorticibus Planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus è cælis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem à Vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque Planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac Planeta; uti ſuprà dictum eſt. Itaque materia illa omnis, quæ contigua eſt orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus denſitatem: quæ verò jacet intra orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio vorticis permanere poſſit, debent partes minùs denſæ centrum occupare, magis denſæ longius à centro abire. Cùm enim Planetarum tempora periodica ſint in ratione ſuſquiplicatâ diſtantiarum à Sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde verò ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minùs denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedant vi majori, quâ partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minùs denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina Fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut Fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omnino dicendum eſt, denſiores vorticis partes, majore vi centrifugâ, petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, denſitatem habebit, atque adeo vim inertiæ, pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm denſitas & vis inertiæ Telluris: inde verò Cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valdè admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus ſiſtere atque abſorbere poſſe merito videatur. Conſtat autem ex motu Cometarum prorſus regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati, quæ vel minimum ſentiri poteſt; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis inertiæ. Nam reſiſtentia Mediorum oritur vel ab inertiâ materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; & ſane vix obſervari poteſt in Fluidis vulgo notis, niſi valde tenacia fuerint adinſtar Olei & Mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in Aëre, Aquâ, Hydrargyro, & hujuſmodi Fluidis non tenacibus, ferè tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente Fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quemadmodum clariſſimè demonſtratum eſt ab Auctore noſtro in peregregiâ Reſiſtentiarum Theoriâ, quæ paulo nunc accuratiùs exponitur, hâc ſecundâ vice, & per Experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus verò communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut Fluidi denſitas; ergo retardatio, ſeu Reſiſtentia, erit ut eadem Fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi à Fluido, ad partes corporis poſticas recurrente, reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio Fluidi

in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in Fluidum ad partes anticas; hoc eſt, niſi velocitas relativa, quâ Fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in Fluidum; id eſt, niſi velocitas abſoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit, quàm velocitas abſoluta Fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt Fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ex eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cæleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cùm nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim quâ motus communicetur, cùm nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim quâ mutatio quælibet vel corporibus ſingulis, vel pluribus, inducatur, cùm nulla ſit vis quâ motus communicetur; nullam eſſe omnino efficaciam, cùm nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypotheſin, quæ fundamento plane deſtituitur, quæque Naturæ Rerum explicandæ ne minimum quidem inſervit, ineptiſſimam vocarè liceat, & Philoſopho prorſus indignam. Qui cælos materiâ fluidâ repletos eſſe volunt, hanc verò non inertem eſſe ſtatuunt; hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cùm hujuſmodi materia fluida ratione nullâ ſecerni poſſit ab inani ſpatio; diſputatio tota ſit de rerum nominibus, non de naturis. Quòd ſi aliqui ſint adeo uſque dediti materiæ, ut ſpatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quò tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab Æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex Cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa Mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant Fato univerſa regi, non Providentiâ; materiam ex neceſſitate ſuâ ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinatâ aliquâ velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſâ velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrimâ formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanârunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed obſervando atque experiendo addiſcere debemus. Qui veræ Phyſicæ principia legeſque rerum, ſolâ mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere Mundum ex neceſſitate fuiſſe, Legeſque

propositas ex eâdem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo Naturæ, se tamen, homuncionem miserum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minùs grata sint futura. His vel Miracula vel Qualitates Occultæ dicantur, quæ displicent: verùm nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere Philosophiam in Atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda Philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro illustrissimi nostri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis, ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicunque paulo profundiùs in hisce rebus versati sunt. Claustris ergo reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis Mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit, & penitius perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc reviviscceret, Rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in eâ desideraret. Itaque Naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, & dulcissimâ contemplatione frui; Conditorem verò ac Dominum universorum impensiùs colere & venerari, qui fructus est Philosophiæ multo uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI Opus adversus Atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicunde feliciùs, quàm ex hâc pharetrâ, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglicè latinéque editis, primus egregiè demonstravit Vir in omni Literarum genere præclarus, idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi sui & Academiæ nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* Magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cùm à longo tempore celeberrimi Auctoris amicitiâ intimâ frueretur (quâ etiam apud Posteros censeri non minoris æstimat, quàm propriis scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cùm exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coëmenda supereslent; suasit ille crebris efflagitationibus, & tantùm non objurgando perpulit denique Virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem,

nem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur. Mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quàm posset emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12, 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus*.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM TERTIAM.

IN Editione hâcce Tertiâ, quàm Henricus Pemberton, M. D. *vir harum rerum peritiſſimus curavit, nonnulla in Libro Secundo de Reſiſtentiâ Mediorum paulò fuſiùs explicantur quàm antea, & adduntur Experimenta nova de Reſiſtentiâ gravium quæ cadunt in Aëre. In Libro Tertio argumentum, quo Lunam in orbe ſuo per Gravitatem retineri probatur, paulo fuſiùs exponitur: & novæ adduntur Obſervationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam obſervationes aliquot Cometæ illius qui anno* 1680 *apparuit, à D.* Kirk *menſe Novembri in* Germaniâ *habitæ, quæ nuper ad manus noſtras venerunt, & quarum ope conſtet quàm propè orbes Parabolici motibus Cometarum reſpondent. Et orbita Cometæ illius, computante* Halleio, *paulo accuratiùs determinatur quàm antea, idque in Ellipſi. Et oſtenditur Cometam in hâc orbitâ Ellipticâ, per novem cælorum ſigna, non minus accuratè curſum peregiſſe, quàm ſolent Planetæ in orbitis Ellipticis per Aſtronomiam definitis moveri. Orbis etiam Cometæ qui anno* 1723 *apparuit, à D.* Bradleio *Aſtronomiæ apud* Oxonienſes *Profeſſore computatus adjicitur.*

Dabam *Londini*,
Jun. 12, 1725-6.

IS. NEWTON.

ARGU-

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI PRIMI PRINCIPIORUM.

	Definitiones.	Pag. 1
	Axiomata, ſive Leges Motus.	13
SECT. I.	*De Methodo Rationum Primarum & Ultimarum.*	30
SECT. II.	*De inventione Virium Centripetarum.*	41
SECT. III.	*De motu corporum in Conicis Sectionibus eccentricis.*	68
SECT. IV.	*De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.*	87
SECT. V.	*De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.*	94
SECT. VI.	*De inventione Motuum in Orbibus datis.*	124
SECT. VII.	*De corporum Aſcenſu & Deſcenſu rectilineo.*	139
SECT. VIII.	*De inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.*	153
SECT. IX.	*De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Aſidum.*	161
SECT. X.	*De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.*	175
SECT. XI.	*De Motu corporum viribus centripetis ſe mutuò petentium.*	190
SECT. XII.	*De corporum Sphæricorum Viribus Attractivis.*	219
SECT. XIII.	*De corporum non Sphæricorum Viribus Attractivis.*	238
SECT. XIV.	*De Motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*	254

ARGU-

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI SECUNDI PRINCIPIORUM.

SECT. I. *De Motu corporum quibus reſiſtitur in ratione Velocitatis.* Pag. 262

SECT. II. *De Motu corporum quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatis.* 273

SECT. III. *De Motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ.* 306

SECT. IV. *De corporum Circulari motu in Mediis reſiſtentibus.* 319

SECT. V. *De denſitate & compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtaticâ.* 333

SECT. VI. *De Motu & Reſiſtentiâ corporum Funependulorum.* 348

SECT. VII. *De Motu Fluidorum & Reſiſtentiâ Projectilium.* 381

SECT. VIII. *De Motu per Fluida propagato.* 431

SECT. IX. *De Motu Circulari Fluidorum.* 447

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius denſitate et magnitudine conjunctim.

AER denſitate duplicatâ, in ſpatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de nive & pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimodè condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine Corporis, vel Maſſæ, in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque

Definitiones. pondus: nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas motûs est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideoque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, quâ corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertiâ massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de statu suo, vel quiescendi, vel movendi, difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione statûs sui per vim aliam, in se impressam, factâ; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: Resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; Impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt, quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem permanet

net in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripetâ. Definitiones.

DEFINITIO V.

Vis centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis est gravitas, quâ corpora tendunt ad centrum terræ; vis magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & vis illa, quæcunque sit, quâ planetæ perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in fundâ circumactus, à circumagente manu abire conatur; & conatu suo fundam distendit, eoque fortiùs quo celeriùs revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuò retrahit, & in orbe retinet, quoniam in manum, ceu orbis centrum, dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia à centris orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in lineâ rectâ abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur à cursu rectilineo, & in terram perpetuò flectitur; idque magis vel minùs pro gravitate suâ & velocitate motûs. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minùs deviabit à cursu rectilineo & longiùs perget. Si globus plumbeus, datâ cum velocitate secundum lineam horizontalem, à montis alicujus vertice, vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in lineâ curvâ ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic duplâ cum velocitate quasi duplo longiùs pergeret, & decuplâ cum velocitate quasi decuplo longiùs: si modò aëris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia, in quam projiceretur, & minui

DEFINITIONES. curvatura lineæ, quam deſcriberet; ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem, vel triginta, vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret; vel denique ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eâdem ratione, quâ projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet, & terram totam circuire; poteſt & luna, vel vi gravitatis, ſi modò gravis ſit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi ſemper à curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & ſine tali vi luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret lunam de curſu rectilineo: ſi juſto minor, plus ſatis flecteret, ac de orbe terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri poſſit; & viciſſim invenire viam curvilineam, in quam corpus, è dato quovis loco datâ cum velocitate egreſſum, à datâ vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ quantitas abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro efficaciâ cauſæ eam propagantis à centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix eſt ipſius menſura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantiâ, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis à globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quòd corpora omnia cadentia

(gravia an levia, magna an parva) ſublatâ aëris reſiſtentiâ, æqualiter accelerat. DEFINITIONES.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix eſt ipſius menſura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas eſt corporis totius *Centripetentia*, ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, quâ deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates, brevitatis gratiâ, nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratiâ referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compoſitum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad centrum, tanquam cauſâ aliquâ præditum, ſine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non appareat. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus: nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motûs ex celeritate & ex quantitate materiæ; & vis motrix, ex vi acceleratrice & ex quantitate ejuſdem materiæ conjunctim. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix, ſeu vis gravitans, in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix, ſeu pondus, eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi

DEFINITIONES. gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis, duplo vel triplo minoris, erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulſûs, vel propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuò promiſcuè uſurpo; has vires non phyſicè ſed mathematicè tantùm conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis, cauſamve aut rationem phyſicam, alicubi definire; vel centris (quæ ſunt puncta mathematica) vires verè & phyſicè tribuere; ſi fortè aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minùs notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Tempus, Spatium, Locus & Motus, ſunt omnibus notiſſima. Notandum tamen, quòd vulgus quantitates haſce non aliter quàm ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in Abſolutas & Relativas, Veras & Apparentes, Mathematicas & Vulgares diſtingui.

I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ, ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur, ut hora, dies, menſis, annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt Spatii hujus menſura, ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aërii vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi terra, verbi gratiâ, moveatur, ſpatium aëris noſtri, quod relativè & reſpectu terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam aër tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat; eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non ſitus corporis, vel ſuperficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; ſuperficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; ſitus verò propriè loquendo quantitatem non habent, neque tam ſunt loca quàm affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſummâ motuum partium; hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſummâ tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſummâ locorum partium, & propterea internus & in corpore toto. DEFINITIONES.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum; Relativus, de relativo in relativum. Sic in navi, quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navigii regio illa, in quâ corpus verſatur; ſeu cavitatis totius pars illa, quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione, vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti, in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis, movetur. Unde ſi terra verè quieſcat, corpus, quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate, quâ navis movetur in terrâ. Sin terra etiam moveatur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in terrâ. Et ſi corpus etiam moveatur relativè in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus, tum navis in terrâ, tum corporis in navi: & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terrâ. Ut ſi terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus Abſolutum à Relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales,

DEFINITIO-NES.

les, qui vulgo tanquam æquales pro menſurâ temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis, quo tempus accuratè menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc à menſuris ſuis ſenſibilibus meritò diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per æquationem aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis phænomenis neceſſitas, tum per experimentum horologii oſcillatorii, tum etiam per eclipſes ſatellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium ſpatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In tempore quoad ordinem ſucceſſionis, in ſpatio quoad ordinem ſitûs, locantur univerſa. De illorum eſſentiâ eſt, ut ſint loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur Abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt Abſoluti Motus.

Verùm quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum à corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur; nec incommodè in rebus humanis: in philoſophicis autem abſtrahendum eſt à ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum reverâ quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem quies & motus abſoluti & relativi ab invicem per proprietates ſuas & cauſas & effectus. Quietis proprietas eſt, quòd corpora verè quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cùm poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longè ultrà, quieſcat abſolutè; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad lon-

longinquum illud datam poſitionem ſervet necne; quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit. DEFINITIO-NES.

Motûs proprietas eſt, quòd partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motûs, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolùm tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam verè quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; &, ſublatâ illa tranſlatione, non verè quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de viciniâ corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quòd moto loco movetur unà locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ ſuprà memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſuprà retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt, ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolùm corpora, ad quæ fit relatio; ut iis cedenti-

 bus

Definitiones.

tibus mutetur relatio illa, in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus à viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessariò. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur, ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus, ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minimè consistit.

Effectus, quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motûs circularis. Nam in motu circulari nudè relativo, hæ vires nullæ sunt; in vero autem & absoluto, majores vel minores pro quantitate motûs. Si pendeat situla à filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum à contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, & unà cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitaneâ agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibiliter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim à medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motûs, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea verò, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuò crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet à translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes

lationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi, pro variis relationibus ad externa, innumeri sunt; &, relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in systemate eorum, qui cœlos nostros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas secum deferre; singulæ cœlorum partes, & planetæ, qui relativè quidem in cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unáque cum cœlis delati participant eorum motus, &, ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur. Definitiones.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus, loco quantitatum mensuratarum, utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motûs propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; & sermo erit insolens & purè mathematicus, si quantitates mensuratæ hîc intelligantur. Proinde vim inferunt sacris literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minùs contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quòd partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ; partim ex viribus, quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret, ex tensione fili, conatus globorum recedendi ab axe motûs, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, simul imprimerentur; innotesceret, ex auctâ

Definitiones. vel diminutâ fili tenſione, augmentum vel decrementum motûs; & inde tandem inveniri poſſent facies globorum, in quas vires imprimi deberent, ut motus maximè augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motûs. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motûs hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile, quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua, datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt ſtellæ fixæ in regionibus cœlorum: ſciri quidem non poſſet, ex relativâ globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum, & deprehenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe, quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum, ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motûs colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contrà ex motibus, ſeu veris ſeu apparentibus, eorum cauſas & effectus, docebitur fuſiùs in ſequentibus. Hunc enim in finem tractatum ſequentem compoſui.

AXIOMATA,

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud à viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

PROJECTILIA perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus à reſiſtentiâ aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt ſeſe à motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum & cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares, in ſpatiis minùs reſiſtentibus factos, conſervant diutiùs.

Axiomata, sive

LEX II.

Mutationem motûs proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

LEX III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuò semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

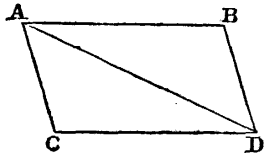
Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis, utrinque distentus, eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius, quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutatæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc lex in attractionibus, ut in scholio proximo probabitur.

COROL.

Leges Motus.

COROL. I.

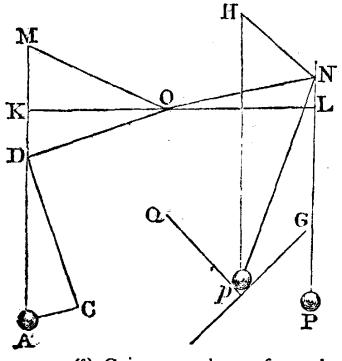
Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.



Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco A impressâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; & vi solâ N in eodem loco impressa, ferretur ab A ad C; compleatur parallelogrammum ABDC, & vi utrâque feretur corpus illud, eodem tempore, in diagonali ab A ad D. Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis, per legem II, nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD, à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD, sive vis N imprimatur, sive non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ BD. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ CD: & idcirco in utriusque lineæ concursu, D, reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D, per legem I.

COROL. II.

Et hinc patet compositio vis directæ, AD, *ex viribus quibusvis obliquis,* AB & BD; *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ,* AD, *in obliquas quascunque,* AB & BD. *Quæ quidem compositio & resolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*

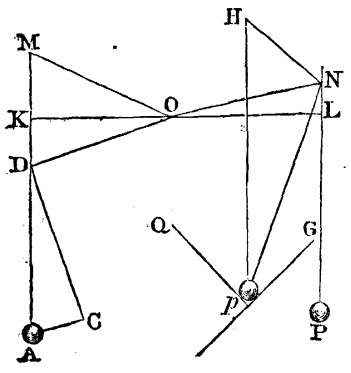


Ut si de rotæ alicujus (a) centro, O, exeuntes radii inæquales, OM, ON, filis MA, NP sustineant pondera A & P, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum O agatur recta KOL, filis perpendiculariter occurrens in K & L; centroque O, & intervallorum OK, OL majore OL, describatur circulus occurrens filo MA in D: & actæ rectæ OD parallela

(a) Cujus rotæ planum super plano horizontis ad perpendiculum erectum sit.

Axiomata, sive rallela sit AC, & perpendicularis DC. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, K, L, D, affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur à punctis K & L, vel D & L. Ponderis autem A exponatur vis tota per lineam AD, & hæc resolvetur in vires AC, CD: quarum AC, trahendo radium OD directe à centro, nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet, ac si perpendiculariter traheret radium OL ipsi OD æqualem; hoc est, idem atque pondus P, si modò pondus illud sit ad pondus A, ut vis DC ad vim DA, id est (ob similia triangula ADC, DOK), ut OK ad OD, seu OL. Pondera igitur A & P, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi, OK & OL, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis, & Axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hâc ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quòd si pondus p, ponderi P æquale, partim suspendatur filo Np, partim incumbat plano obliquo pG (b): agantur pH, NH, prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis; & si vis ponderis, p, deorsum tendens, exponatur per lineam pH, resolvi potest hæc in vires pN, HN. Si filo pN perpendiculare esset planum aliquod pQ, secans planum alterum pG in lineâ ad horizontem parallelâ (c); & pondus p his planis pQ, pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN, HN, perpendiculariter; nimirum planum pQ vi pN, & planum pG vi HN. Ideoque si tollatur planum pQ, ut pondus tendat filum; quoniam filum, sustinendo



(b) Quod planum rotæ ad perpendiculum secare intelligendum est.

(c) Planum pQ secare planum pG secundum rectam cum plano horizontis parallelam hoc modo ostendimus.

Cùm recta Np, quæ jacet in plano rotæ, planum pQ ad perpendiculum insistat, planum rotæ idem planum pQ ad perpendiculum secabit. (El. XI. 18.) Sed planum rotæ planum etiam pG ad perpendiculum secat (id enim positum est). Planorum igitur pG, pQ communis intersectio planum rotæ ad perpendiculum insistit. (El. XI. 19.) Rursùm cùm planum horizontis & planum pG rotæ planum ad perpendiculum utrumque insistant, communis illorum intersectio

tinendo pondus, jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eâdem vi pN, quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN, ut pN ad pH. Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione, quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum filorum suorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH ad pN; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo se mutuo sustinebunt; ut quilibet experiri potest. Leges Motus.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet Cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires Cunei & Mallei innotescunt: utpote cùm vis quâ pondus p urget planum pQ sit ad vim, quâ idem, vel gravitate suâ vel ictu mallei, impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, quâ urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ Cuneus est à Vecte impulsus. Usus igitur corollarii hujus latissimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota, ab auctoribus diversimodè demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tensis & ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis mechanicis componi solent, ut & vires tendinum ad animalium ossa movenda.

COROL. III.

Quantitas motûs quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per legem III, ideoque per legem II æquales in motibus efficiunt muta-

tersectio rotæ planum ad perpendiculum insistet. (El. XI. 19.) Planorum igitur, pG, pQ communis intersectio cum communi plani pG & horizontis intersectione parallela erit. Nempe cùm, ex iis quæ ostendimus, utraque planum rotæ ad perpendiculum insistat. Atque idcirco communis planorum pG, pQ interfectio cum plano horizontis parallela erit. Nam si occurreret ea plano horizontis, cùm in plano pG tota jaceat, concursus ejus cum horizontis plano ad communem plani horizontis cum plano illo pG intersectionem necessariò esset. Atque ita concurrerent rectæ, quas parallelas esse inter se ostendimus; quod absurdum esset. Atque hinc conficitur Theorema haud inutile, neque indignum quod in elementis Geometriæ solidæ reponatur. "Si tria plana, quorum duo non sunt inter se parallela, super quarto quodam ad perpendiculum erecta sint, duorum quorumlibet ex erectis communis intersectio cum tertio parallela erit."

Axiomata, sive tiones versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur motui corporis insequentis, sic ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius A sit ad motum ipsius B, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus A lucretur motûs partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem; ideoque perget corpus A post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & B cum partibus septem vel sex vel quinque; existente semper summâ partium sexdecim, ut prius. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progredietur, amissis partibus novem; vel quiescet, amisso motu suo progressivo partium decem; vel cum unâ parte regredietur, amisso motu suo & (ut ita dicam) unâ parte ampliùs; vel regredietur, cum partibus duabus, ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17−1, & 18−2, semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum antè. Ut in casu ultimo, ubi corporis A motus erat partium sex ante reflexionem, & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motûs partes sex ante reflexionem ad motûs partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quòd si corpora, vel non sphærica, vel diversis in rectis moventia

ventia incidant in se mutuò obliquè, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs: dein corporis utriusque motus (per Corol. II.) distinguendus est in duos; unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quòd corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt, sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ priùs. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare. Leges Motus.

COROL. IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum, vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motûs vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuò agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ recta. Hoc postea in lemmate XXIII ejusque corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eâdem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd linea horum corporum centra, in rectis uniformiter progredientia, jungens dividitur, ab hoc centro communi, in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd ab eo dividitur distantia centri communis corporum duo-

AXIOMATA, SIVE

rum & centri corporis tertii, in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quòd ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione; & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum, quæ actionibus in ſe invicem, aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis, omnino vacant, ideoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cùm diſtantiæ centrorum utriuſque à communi gravitatis centro ſint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud, vel ad eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur, nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuò agentium commune gravitatis centrum, ob actionem illam, nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur, à communi corporum omnium centro, in partes ſummis totalibus corporum, quorum ſunt centra, reciprocè proportionales; ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt, quòd commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter ſe, nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem, in ſtatu motûs ejus vel quietis, nunquam inducunt. Quare cùm centrum illud, ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in rectâ aliquâ progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi à viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur

turbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motûs vel quietis. Motus enim progreſſivus, ſeu corporis ſolitarii, ſeu ſyſtematis corporum, ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet. LEGES MOTUS.

COROL. V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus, quibus corpora ſe mutuò feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe, in uno caſu, æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modò ſe habent in navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROL. VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & à viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

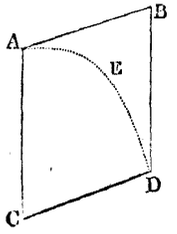
Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II, ideoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

Scholium.

Hactenus principia tradidi à Mathematicis recepta, & experientiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum gravium eſſe in duplicatâ ratione

Axiomata, sive

ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabolâ; conspirante experientiâ, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente, gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo, imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit, & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates & tempora conjunctim; id est, in duplicatâ ratione temporum. Et corpore sursum projecto, gravitas uniformis vires imprimit, & velocitates aufert, temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim; seu in duplicatâ ratione velocitatum. Et corporis, secundum rectam quamvis projecti, motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur.



Ut si corpus A motu solo projectionis, dato tempore, describere posset rectam AB; & motu solo cadendi, eodem tempore, describere posset altitudinem AC: compleatur parallelogrammum ABDC, & corpus illud, motu composito, reperietur in fine temporis in loco D; & curva linea AED, quam corpus illud describet, erit Parabola, quam recta AB tangit in A, & cujus ordinata BD est ut ABq. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de temporibus

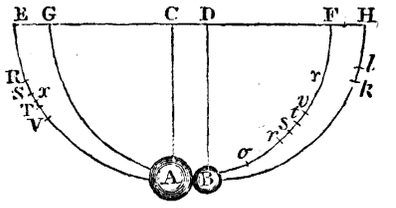
(d) Sub finem Anni 1668. Vide Acta Philosophica.

(e) Hanc doctrinam Wallisius, brevibus primùm scriptis cum Societate Regiâ communicatam, postea in libro suo *De Motu*, anno 1671 in lucem edito, capite decimo tertio, fusè exposuit. Hugenius autem eleganter eandem & accuratè pertractavit in libro *de Motu Corporum ex percussione*, quem post mortem auctoris, anno 1703, cum Dioptricâ ac scriptis quibusdam aliis, in lucem emiserunt viri docti Burcherus de Volder & Bern Fullenius, quibus id negotii Hugenius testamento demandaverat.

(f) Nempe cùm RV sit retardatio tota, quam motus corporis penduli, ex aëris renixu, oscillatione geminâ subierit; retardatio, quam vis eadem renitentis aëris, simplicis oscillationis spatio, corporis motui intulerit, hæc illius RV semissis erit. Sed simplicis illius oscillationis initium neque à puncto altissimo R sumendum est, unde corpus pendulum primùm demissum est, neque ab infimo V, quod post unam oscillationem redeundo illud attigerit; sed à puncto aliquo duorum R, V intermedio: quia majorem motûs retardationem, arcum oscillationis primæ ampliorem quàm angustiorem secundæ percurrendo, corpus subierit. Punctum autem illud intermedium proximè saltem ita definieris, si arcûm ST, quartæ parti arcûs RV æqualem, in medio arcûs RV ita collocaveris, ut punctum arcûs ST medium ipsius RV medium occupet; unde ea fiet arcûs RT, in punctis S, T divisio, quam Newtonus fieri jussit. Arcum enim utrumque RV, ST punctum x medium dividat: et

Leges Motus.

bus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientiâ quotidianâ. Ex his iisdem, & lege tertiâ, *Christophorus Wrennus* eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Christianus Hugenius*, ætatis superioris Geometrarum facilè principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore (d) cum *Societate Regiâ* communicârunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt (e). Sed & veritas comprobata est à *Wrenno*, coram *Regiâ Societate*, per experimentum pendulorum: quod etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cum resistentiæ aëris, tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphærica A, B filis parallelis & æqualibus AC, BD, à centris C, D. His centris & intervallis describantur semicirculi EAF, GBH, radiis CA, DB bisecti. Trahatur corpus A ad arcûs EAF punctum quodvis R, &, subducto corpore B, demittatur inde; redeatque, post unam oscillationem, ad punctum V. Est RV retardatio ex resistentiâ aëris (f). Hujus RV fiat ST pars quarta sita in medio; ita scilicet ut RS & TV æquentur, sitque RS ad ST ut 3 ad 2. Et ista ST exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quàm proximè. Restituatur corpus B in lo-



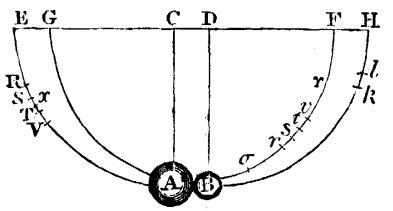
et sit Y punctum arcûs AF, quod primâ oscillatione, corpus pendulum, à puncto R demissum attigerit. Arcus tres RA, AY, AV, erunt quàm proximè arithmetici: arcus autem tres RA, Ax, AV arithmetici: arcus igitur Ax, AY inter se æquales erunt, cùm uterque duorum RA, AV simul sumptorum semissis sit. Præterea cùm RA, AV simul sumpti duplo arcûs AY æquales sint, si addatur illis duplus arcus AY, efficietur quadruplum arcûs AY. Ergo arcus AY vel illi æqualis Ax, duorum RY, YV simul sumptorum pars quarta erit. Duorum igitur RY, YV, quos oscillatione geminâ corpus pendulum, ab R demissum, absolverit, horum inquam parte quartâ arcus SA paulo major, arcus TA paulo minor erit. Corpus igitur pendulum, à puncto S demissum, motûs retardationem, per arcum SA descendendo, parte quartâ retardationis RV paulo majorem subierit; & per arcum ipso TA angustiorem ad contrarias partes ascendendo, ejusdem RV parte quartâ tantundem fere minorem. Unde spatio oscillationis integræ, à puncto illo S inchoatæ, dimidiam ipsius RV retardationem corpus pendulum subierit. Et quanquam hujus dimidiâ, sive parte quartâ totius RV, major sit pars illa quæ lapsu per arcum SA impressa fuerit, ut minor sit corporis penduli in loco A velocitas quàm si de loco T per inane illud decidisset, tantilla tamen differentia erit, ut nullius prorsus sit momenti. Q. E. D.

Axiomata, sive

cum ſuum. Cadat corpus A de puncto S, & velocitas ejus in loco reflexionis A, ſine errore ſenſibili, tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco T. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs TA. Nam velocitatem penduli, in puncto infimo, eſſe ut chordam arcûs, quem cadendo deſcripſit, propoſitio eſt Geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus A ad locum *s*, & corpus B ad locum *k*. Tollatur corpus B; & inveniatur locus *v*, à quo ſi corpus A demittatur, & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio; ita videlicet ut *rs* & *tv* æquentur: & per chordam arcûs *t*A exponatur velocitas, quam corpus A proximè poſt reflexionem habuit in loco A. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A, ſublatâ aeris reſiſtentiâ, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus B aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcûs TA, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A, proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs *t*A, ut habeatur motus ejus in loco A proximè poſt reflexionem. Et ſic corpus B ducendum erit in chordam arcûs B*l*, ut habeatur motus ejus proximè poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſque tam ante, quàm poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quàm æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper, ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuò directè occurrebant, æquales eſſe mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatas, atque ideo actionem & reactionem ſemper eſſe æquales. Ut ſi corpus A incidebat in corpus B quieſcens cum novem partibus motûs, & amiſſis ſeptem partibus pergebat, poſt reflexionem, cum duabus; corpus B reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam

obviam ibant, A cum duodecim partibus & B cum ſex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius A ſubducantur partes duodecim, & reſtabit nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis B, partium ſex, ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quòd ſi corpora ibant ad eandem plagam, A velociùs cum partibus quatuordecim, & B tardius cùm partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, factâ tranſlatione partium novem de A in B. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motûs, quæ ex ſummâ motuum conſpirantium, & differentiâ contrariorum, colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accuratè. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere, ſic ut corpora in ſe mutuò impingerent in loco infimo AB; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Leges Motus.



Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolutè dura eſſe, vel ſaltem perfectè elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo, quòd experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æquè ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui, in certâ proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſûs. Certiùs id affirmabitur de perfectè elaſticis (g). In imperfectè elaſticis velocitas

(g) Hisce credo Newtonus inſinuare voluit, aliud eſſe corporum duritiem, aliud vim reſiliendi;

AXIOMATA, SIVE

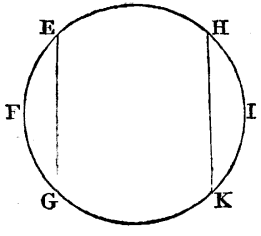
tas reditûs minuenda eſt ſimul cum vi elaſticâ; propterea quòd vis illa (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur) certa ac determinata ſit, quantum ſentio, faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſûs in datâ ratione (h). Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primùm demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſûs ut 5 ad 9 circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia, quoad ictus & reflexiones, per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ planè congruit.

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis A, B ſe mutuò trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur verſus corpus alterum B, quàm illud alterum B in prius A, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis A, quàm preſſione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus B, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum; proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis

ac propterea quæ Wrennus & Hugenius de duris pronunciârunt, cum eadem illi reſilientia intelligerent quæ dura, de iis potiùs affirmanda eſſe, quæ maximâ vi reſiliendi prædita ſint. Nimirum Newtonus cum Walliſio id *Durum* appellat "quod ictui nequaquam cedit: Id *Molle*, quod ictui ita cedit, ut priſtinam figuram amittat; ut Lutum, Cera, Plumbum, aliaque ſimilia quæ ictu deformantur: Id *Elaſticum*, quod utut ictui aliquantum cedat, ſe tamen in priſtinam formam ſuopte marte reſtituit" (Wallis, De Motu, Cap. XI. Prop. I. Schol.) Si igitur id ſit durum, quod ictui nequaquam cedat, hoc eſt cujus partes nullâ vi impreſſâ aut flecti aut ſeparari poſſint; certè potentiâ illâ inſitâ, quâ res, vi ſubitâ deformatæ, figuris ſuis reſtituuntur, & inter ſe colliſæ reſiliunt;

propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aquâ ſtagnante juxtà fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent. LEGES MOTUS.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra FI, plano quovis EG, in partes duas EGF & EGI: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuò. Nam ſi plano alio HK, quod priori EG parallelum ſit, pars major EGI ſecetur in partes duas, EGHK & HKI, quarum HKI æqualis ſit parti priùs abſciſſæ EFG: manifeſtum eſt, quòd pars media EGKH, pondere proprio, in neutram partium extremarum propendebit; ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema HKI toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF; ideoque vis, quâ partium HKI & EGKH ſumma, EGI, tendit verſus partem tertiam EGF, æqualis eſt ponderi partis HKI, id eſt ponderi partis tertiæ EGF. Et propterea pondera partium duarum EGI, EGF in ſe mutuò ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota, in libero æthere fluitans, ponderi majori cederet; &, ab eo fugiendo, abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciprocè ut vires inſitæ: ſic, in movendis inſtrumentis mechanicis, agentia idem pollent, & conatibus contrariis ſe mutuò ſuſtinent, quorum velocitates, ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ, oſcillante librâ, ſunt reciprocè ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi rectâ aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt

unt; hâc, inquam, quod durum eſt prorſus carebit: adeoque, cùm nihil ſine cauſâ fiat, corporum durorum, ſi concurrerint, nulla videtur poſſe fieri reflexio. *Vide Le Sœur, & Jacquier ad locum.*

(h) FIGURIS utique corporum ſpecie & magnitudine datis. In diverſis corporum magnitudinibus, quorum figuræ inter ſe ſint ſimiles; differentiæ, quibus velocitates relativæ poſt congreſſum aberunt ab eâ quæ antè fuerat, laterum homologorum inter ſe proportiones ſervant: ſicut ſuadere exiſtimantur experimenta quædam Rizetti, quæ in Commentariis Academiæ Bononienſis memorantur. Hæc autem fide doctiſſimorum Patrum Le Sœur & Jacquier ipſe refero.

Axiomata, sive

reciprocè ut punctorum, à quibus ſuſpenduntur, diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis, aliiſve admotis obſtaculis, impedita aſcendunt vel deſcendunt obliquè; æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochleâ, ſeu Polyſpaſto, vis manûs funem directè trahentis, quæ ſit ad pondus, vel directè, vel obliquè aſcendens, ut velocitas aſcenſûs perpendicularis ad velocitatem manûs funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In Horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſunt reciprocè ut velocitates partium rotularum, in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuò. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii, eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires, quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi, ſunt ad vim Mallei in cuneum, ut progreſſus cunei, ſecundum determinationem vis à malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contrà: unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi datâ ſuperandi. Nam ſi machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & reſiſtentis ſint reciprocè ut vires; agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certè ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quàm ex continuorum, & ab invicem ſeparandorum cohæſione, & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni eâ reſiſtentiâ, vis redundans accelerationem motûs ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Cæterùm Mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantùm oſtendere, quàm late pateat quámque certa ſit lex tertia motûs. Nam ſi æſtimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate

conjunctim; & ſimiliter reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum, & ultimò imprimitur in corpus omne reſiſtens; ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

Leges Motus.

D E

DE

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propriùs ad invicem accedunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

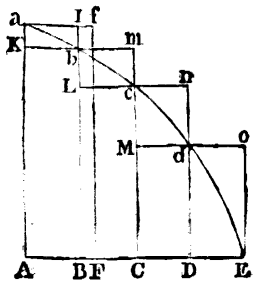
SI negas; fiant ultimò inæquales, & ſit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypotheſin (a).

(a) Vide Tom. I. p. 237.

LEMMA

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis AACE, *rectis* Aa, AE *& curvâ* ACE *comprehenſâ, inſcribantur parallelogramma quotcunque,* Ab, Bc, Cd, *&c. ſub baſibus* AB, BC, CD, *&c. æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, *&c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* AKbI, bLcm, cMdn, *&c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico, quòd ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem figura inſcripta* AKbLcMdD, *circumſcripta* AaIbmcndoE, *& curvilinea* Aabcde, *ſunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum KI, Lm, Mn, Do; hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi Kb & altitudinum ſummâ Aa, id eſt, rectangulum ABIa. Sed hoc rectangulum, eo quòd latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) figura inſcripta & circumſcripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. E. D.

LEMMA II.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum FAaf. Hoc erit majus quàm differentia figuræ inſcriptæ et figuræ circumſcriptæ; at, latitudine ſuâ AF in infinitam diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab, bc, cd,* &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol.

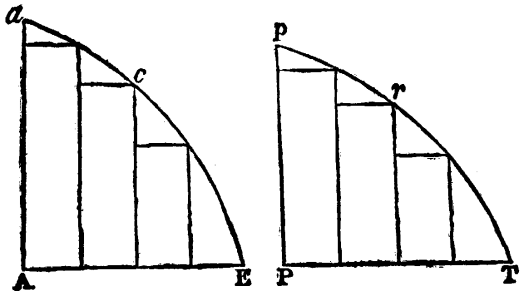
De Motu Corporum.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta, quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *ace*), non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

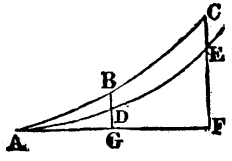
Si in duabus figuris AACE, PPRT, *inſcribantur (ut ſuprà) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus; & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico, quòd figuræ duæ* AACE, PPRT, *ſunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad ſummam priorem, & figurâ poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D (b).

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem

(b) *Cor. H.* 1. Si duæ Curvæ (ABC, ADE) axem habeant communem (AF) hujus autem curvæ ordinatæ ad ordinatas alterius datam aliquam rationem gerant, binas utique ſemper conferendo, quæ ex eodem axis puncto eductæ ſint; areæ curvarum AFC, AFE, datam ordinatarum inter ſe rationem habebunt. Nempe hoc dico; à puncto G, in axe curvarum, AF, pro lubitu aſſumpto, eductâ ad perpendiculum rectâ GB, quæ curvis duabus, ABC, ADE, illi in puncto B, huic in puncto D, occurrat; ſi rectis BG, DG, data aliqua ratio intercedat, quæ eadem obtineat à quocunque demum axis puncto ordinata educatur, eadem Arearum etiam, AFC, AFE, inter ipſas ratio erit.



Cor.

Liber Primus.

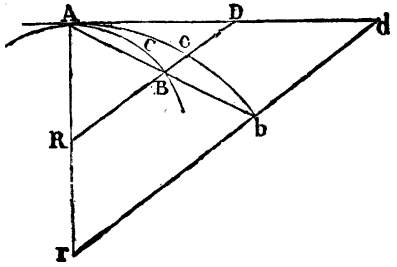
invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultimâ ratione partis ad partem (c).

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuò reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quàm rectilinea; & areæ ſunt in duplicatâ ratione laterum.

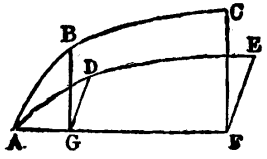
LEMMA VI.

Si arcus quilibet poſitione datus, ACB, *ſubtendatur chordâ* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ* (d), *tangatur à rectâ, utrinque productâ,* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant, & coeant; dico, quòd angulus* BAD, *ſub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum, & ultimò evaneſcet.*



Nam ſi angulus ille non evaneſcit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypotheſin.

Cor. H. 2. Quòd ſi recta GB non ad perpendiculum, ſed cum datâ quâvis ad axem communem AF inclinatione educatur, idem obtinebit.

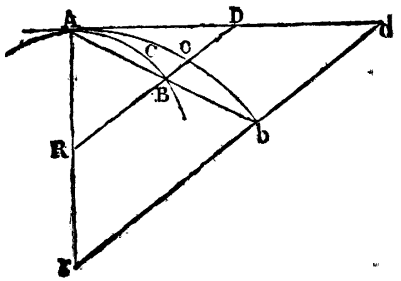


Cor. H. 3. Si verò Curvæ duæ ABC, ADE, eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut rectæ, GB, GD, à puncto aliquo G in axe communi, AF, ordinatim eductæ, datis quidem ſed diverſis ad axem illam inclinationibus, datam inter ſe rationem gerant; quæ eadem obtineat, à quocunque demum axis puncto ordinatæ illæ educantur; vel ſic etiam aeris ABCF, ADEF, data quædam ratio intercedet; ea nimirum, quam rectæ à punctis B, D in axem AF ad perpendiculum demiſſæ inter ſe habent.

(c) Vide Tom. I. p. 240. (d) Vide Tom. I. p. 242.

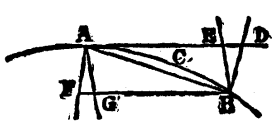
LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quòd ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.



Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB & AD ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti BD parallela agatur *bd*. Sitque arcus A*cb* semper similis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus *dAb*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ A*b*, A*d*, & arcus intermedius A*cb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuò secans in F, hæc BF ultimò ad arcum evanescentem ACB rationem habebit æqualitatis; eo quòd completo parallelogrammo AFDB rationem semper habet æqualitatis ad AD.



Corol. 2. Et si per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, secantes tangentem AD & ipsius paralellam BF; ratio ultima abscissarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcûs AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR (e) *cum arcu* ACB, *chordâ* AB, *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico, quòd ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis. (Vide fig. Lemm.* VII.)

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur

(e) Intellige rectam AR positione datam; rectam verò BR ea lege mobilem, ut cum aliâ aliquâ, positione datâ, semper ea parallela maneat.

semper

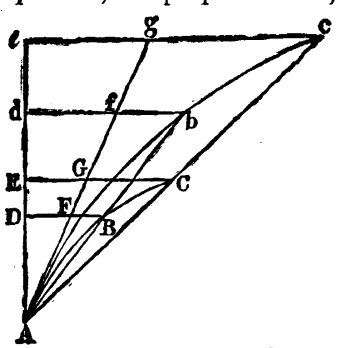
semper AB, AD, AR ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* producí, ipsique RD parallela agi *rbd*, & arcui ACB similis semper sit arcus A*cb*. Et coeuntibus punctis A, B, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *r*A*b*, *r*A*cb*, *r*A*d* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia RAB, RACB, RAD fient ultimò sibi invicem similia & æqualia. Q. E. D. Liber Primus.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuò secent in angulo dato,* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico, quòd areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimò ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua *d* & *e*; ut sint A*d*, A*e* ipsis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis



DB, EC parallelæ, quæ occurrant ipsis AB, AC productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva A*bc* ipsi ABC similis, tum recta A*g*, quæ tangat curvam utramque in A, & secet ordinatam applicatas DB, EC, *db*, *ec* in F, G, *f*, *g*. Tum, manente longitudine A*e*, coeant puncta B, C cum puncto A; &, angulo *c*A*g* evanescente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce* cum rectilineis A*fd*, A*ge*; ideoque (per Lemma V.) erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*: sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE (f). Ergo & areæ ABD, ACE sunt ultimò in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q. E. D.

(f) Vide Tom. I. p. 244.

LEMMA X.

Spatia, quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur, vel continuò diminuatur; sunt, ipso motûs initio, in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, (*Vide fig. Lem.* IX.) & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis descriptæ (g), hoc est, ipso motûs initio (per Lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc facilè colligitur, quòd corporum, similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium, errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus, sine viribus istis, pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quàm proximè.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis, generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis, quæ corpora, urgentibus diversis viribus, describunt. Hæc sunt, ipso motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motûs initio, descripta directè, & quadrata temporum inversè.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè, & vires inversè.

SCHOLIUM.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus est, quòd prior augetur vel diminuitur in

(g) Vide Tom I. p. 244.

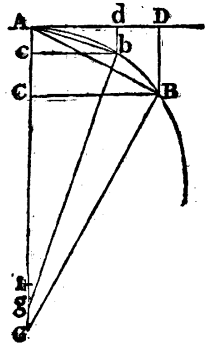
eâdem

eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè vel inversè: sensus est, quòd prima augetur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ, vel aliarum reciprocæ, augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & C directè & D inversè: sensus est, quòd A augetur, vel diminuitur, in eâdem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$; hoc est, quòd A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactûs, in Curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs habentibus, est ultimò in ratione duplicatâ subtensæ arcûs contermini.

Casus 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactûs ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcûs AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, occurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitque J intersectio linearum BG, AG ultimò facta, ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est, quòd distantia GJ



minor esse potest quàm assignata quævis. Est autem (ex naturâ circulorum per puncta ABG, A*bg* transeuntium) AB *quad.* æquale AG × BD, & A*b quad.* æquale A*g* × *bd*; ideoque ratio AB *quad.* ad A*b quad.* componitur ex rationibus AG ad A*g* & BD ad *bd*. Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest, ut ratio AG ad A*g* minùs differat à ratione æqualitatis, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ; ideoque ut ratio AB *quad.* ad A*b quad.* minùs differat à ratione BD ad *bd* quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima AB *quad.* ad A*b quad.* eadem cum ratione ultimâ BD ad *bd*. Q. E. D.

Casus 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem

De Motu Corporum

dem ſemper erit ratio ultima BD ad *bd* quæ priùs, ideoque eadem ac AB *quad.* ad A*b quad.* Q. E. D.

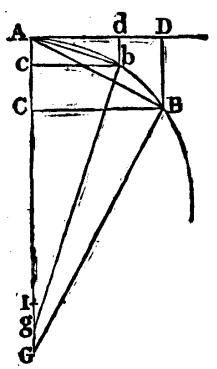
Caſ. 3. Et quamvis angulus D non detur, ſed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege conſtituatur; tamen anguli D, *d*, communi lege conſtituti, ad æqualitatem ſemper vergent; & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ, ideoque ultimò æquales erunt, per Lem. I; & propterea lineæ BD, *bd* ſunt in câdem ratione ad invicem ac priùs. Q. E. D.

Corol. 1. Unde cùm tangentes AD, A*d*, arcus AB, A*b*, & eorum ſinus BC, *bc* fiant ultimò chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimò ut ſubtenſæ BD, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimò ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant, & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ BD, *bd* ([h]).

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, A*db* ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD, A*d*, inque ſeſquiplicatâ laterum DB, *db*; utpote in compoſitâ ratione laterum AD & DB, A*d* & *db* exiſtentia.



Sic & triangula ABC, A*bc* ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum BC, *bc*. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.

Corol. 5. Et quoniam DB, *db* ſunt ultimò parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum AD, A*d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, A*db* (ex naturâ Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, A*db*; & ſegmenta AB, A*b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc ſegmenta erunt in tripliçatâ ratione tum tangentium AD, A*d*, tum chordarum & arcuum AB, A*b*.

([h]) Vide Tom I. p. 248.

SCHOL-

Liber Primus.

SCHOLIUM.

Cæterùm in his omnibus ſupponimus angulum contactûs nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam; ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum A, inter tangentem AD & curvam AB, duci poteſt, proindeque angulus contactûs erit infinitè minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactûs, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries, utrinque in infinitum pergens, angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinitè major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum, ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem ([i]).

Quæ de curvis lineis, deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facilè applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas, & contenta. Præmiſi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minùs geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere;

([i]) Vide Keil. Introduct. ad Veram Phyſicam, Lect. 4. & Newtoni Geometr. Analyt. Cap. VII. §. 23—26.

&

De Motu Corporum

& propterea limitum illorum demonſtrationes, quâ potui brevitate, præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quòd quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima; ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æquè contendi poſſet, nullam eſſe corporis, ad certum locum ubi motus ſiniatur pervenientis, velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam; ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cùm attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum, & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes, quem velocitas in fine motûs attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cúmque hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt verè geometricum, eundem determinare. Geometrica verò omnia, in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis, legitimè uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quòd ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contrà quàm Euclides de incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verùm hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ

Liber Primus.

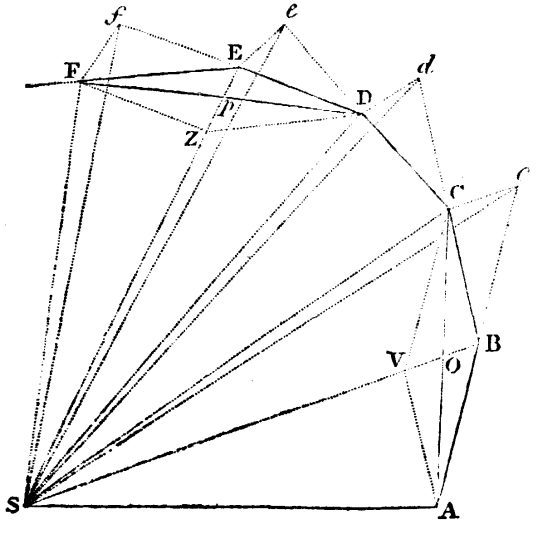
timæ rationes illæ, quibuſcum quantitates evaneſcunt, reverà non ſunt rationes quantitatum ultimarum; ſed limites, ad quos quantitatum, ſine limite decreſcentium, rationes ſemper appropinquant; & quas propiùs aſſequi poſſunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò tranſgredi; neque priùs attingere, quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data eſt differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis; nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ, ſeu maximæ, quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſiquando, facili rerum conceptui conſulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROP. I. THEOR. I.

Areas, quas corpora in gyros acta, radiis ad immobile centrum virium ductis, deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales; & primâ temporis parte deſcribat corpus, vi inſitâ, rectam AB. Idem ſecundâ temporis parte, ſi nil impediret, rectâ pergeret ad *c*, (per Leg. I.) deſcribens lineam Bc æqualem ipſi AB; adeo ut radiis AS, BS, *c*S ad centrum actis, confectæ forent æquales

De Motu Corporum

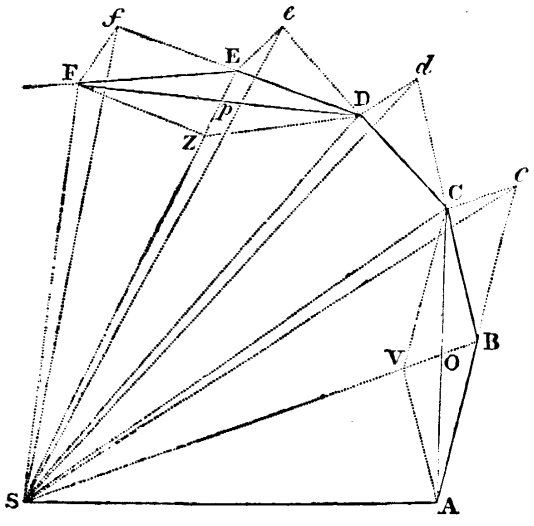
quales areæ ASB, BS*c*. Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno; efficiatque, ut corpus de rectâ B*c* declinet, & pergat in rectâ BC. Ipſi BS parallela agatur *cc*, occurrens BC in c; & completâ ſecundâ temporis parte, corpus (per Legum corol. 1.) reperietur in c, in eodem plano cum triangulo ASB. Junge sc; & triangulum SBC, ob parallelas SB, *cc*, æquale erit triangulo S*Bc*, atque ideo etiam triangulo SAB. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſivè agat in c, D, E, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipſi SCD, & SEF ipſi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis SADS, SAFS inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: ideoque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus Curvæ perpetuò retrahitur, aget indeſinenter; Areæ verò quævis deſcriptæ, SADS, SAFS, temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt, in ſpatiis non reſiſtentibus, reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut ſunt baſes æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ baſes ſunt reciprocè ut perpendicula in ipſas demiſſa.

Corol. 2. Si arcuum duorum, æqualibus temporibus, in ſpatiis non reſiſtentibus, ab eodem corpore ſucceſſivè deſcriptorum chordæ, AB, BC, compleantur in parallelogrammum ABCV, & hujus diagonalis BV, in eâ poſitione quam ultimò habet, ubi arcus illi

(a) Agatur enim à puncto c recta cv cum B*c* parallela, quæ cum rectâ SB in v concurrat, & jungatur AV. Cùm rectæ *cc*, BV inter ſe ſint parallelæ, necnon B*c*, CV; figura CV*Bc* parallelogramma erit. Erunt igitur B*c*, CV inter ſe æquales. (El. I. 34.) Sed BA, B*c* inter ſe æquales. Id enim oſtenſum. Quare CV, BA inter ſe æquales erunt. Sunt autem inter ſe parallelæ; quare CB, AV inter ſe æquales & parallelæ erunt. (El. I. 33.) Figura igitur CBAV eſt parallelogramma, ſub chordis AB, BC; & hujus diagonios erit recta BV, quæ vergit ad centrum virium.

(b) Junctæ



illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium(a).

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus, in ſpatiis non reſiſtentibus, deſcriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma ABCV, DEFZ; vires in B & E ſunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BV, EZ, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum corol. 1.) ex motibus B*c*, BV, & E*f*, FZ: atqui BV & EZ, ipſis *cc* & F*f* æquales, in demonſtratione propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in B & E; ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet, in ſpatiis non reſiſtentibus, à motibus rectilineis retrahuntur, ac detorquentur in orbes curvos, ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant, ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio (b).

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas, horizonti perpendiculares, arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

(b) Junctæ CA, DF, rectis BV, EZ in O, *p*, occurrant. Arcus per puncta tria A, B, C, atque alius per alia tria, D, E, F æqualibus temporibus conficiuntur. Atque horum chordæ ſunt rectæ AC, DF quas ſagittæ BO, E*p* medias dividunt; ſunt autem ſagittæ illæ rectarum BV, EZ, ſemiſſes. Nimirum cùm rectæ CA, BV; FD, EZ; parallelogrammorum CBAV, FEDZ ſint diagoniæ, atque omnis parallelogrammi diagoniæ medias ſe mutuò dividant.

De Motu Corporum

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROP. II. THEOR. II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, & radio ducto ad punctum, vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quàm minima SAB, SBC, SCD, &c. *(fig. p. 43.)* circa punctum immobile S, temporibus æqualibus, æqualia deſcribere, agit in loco B ſecundum lineam parallelam ipſi *c*C (per Prop. XXXIX. lib. 1. Elem. & Leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam BS (c); & in loco C ſecundum lineam ipſi *d*D parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam SC, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. Q. E. D.

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in quâ corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ deſcriptâ, & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modò arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur,

(c) Nempe productâ AB in *c*, ut ſit BC rectæ AB æqualis, junctiſque C*c*, S*c*; corpus, ſi in illud nulla egiſſet vis externa, quo tempore in locum C pervenerit, eo tempore locum *c* rectæ AC attigiſſet. Vis autem illa quæ ictu ſuo, in loco B impreſſo, id effecerit, ut corpus, quod vis inſita movendi per rectam AB, certo quodam temporis puncto, ad locum *c* appulliſſet, eo ipſo temporis puncto ſit in C; hæc inquam vis corpus in B impulerit ſecundum rectam cum rectâ C*c* parallelam (per Leg. II. cor. 2.) Sed cùm triangula SBA, SBC, inter ſe æqualia ſint (id enim poſitum erat) et

acceleratur, virium directiones declinant à concurſu radiorum verſus plagam, in quam fit motus. Liber Primus.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus à vi centripetâ compoſitâ ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quòd vis illa, quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. Porro ſi vis aliqua agat perpetuò ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet, ut corpus deflectatur à plano ſui motûs: ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

PROP. III. THEOR. III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius, utcunque moti, ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſitâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum L, & corpus alterum T: & (per Legum corol. VI.) ſi vi novâ, quæ æqualis & contraria ſit illi quâ corpus alterum T urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum, L, deſcribere circa corpus alterum, T, areas eaſdem ac priùs: vis autem, quâ corpus alterum T urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum, T, ſibimet ipſi jam relictum, vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum L, urgente differentiâ virium, id eſt, urgente vi reliquâ, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum T deſcribere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum T ut centrum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum, L, radio ad alterum T ducto, deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus juxta legum corollarium ſecun-

et triangula SBA, S*b*C inter ſe æqualia (id enim efficitur per El. I. 38.) erunt triangula S*b*C, S*b*C, quibus baſis S*b* communis, inter ſe æqualia. Rectæ igitur C*c*, B*b* inter ſe parallelæ. (El. I. 39.) Recta igitur B*b* a puncto B educta eſt cum rectâ C*c* parallela. Vis igitur centripeta in loco B ſecundum rectam B*b* corpus impulit. Simili argumento efficietur vim centripetam in loco C ſecundum rectam C*c*, ſecundum D*d* in loco D, ſecundum E*e* in E, & in omni Curvæ puncto ſecundum rectam à puncto illo verſus centrum virium eductam corpus impulſiſſe. Q. E. D.

dum

De Motu Corporum

dum compoſitâ), quâ corpus prius L urgetur, ſubducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, quâ corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproximè.

Corol. 3. Et vice verſâ, ſi vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus L, radio ad alterum corpus T ducto, deſcribit areas, quæ, cum temporibus collatæ, ſunt valdè inæquales; & corpus illud alterum, T, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ, ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla eſt, vel miſcetur, & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: viſque tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; ſi modò vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

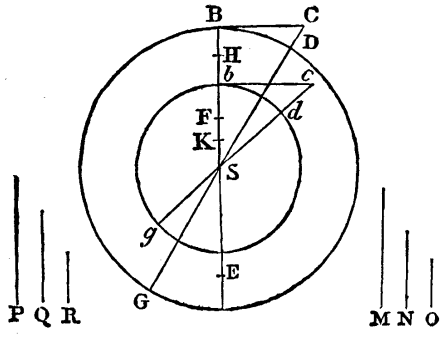
Scholium.

Quoniam æquabilis arearum deſcriptio index eſt centri, quod vis

(d) Hoc eſt, Vires centripetæ inter ſe proportionem gerunt, quæ componitur è ratione duplicatâ arcuum, qui corporum motu ſimul ſunt confecti, & ratione radiorum contrariâ.

(e) Demonstratio Newtoni explicatior facta.

In circulorum BDG, *bdg*, quorum centrum S, peripheriis corpora duo, B, *b*, motu unumquodque æquabili intelligantur circumagi. Propter motum corporis B æquabilem, arcus circuli BD, motu corporis B confecti, temporum, quibus fuerint confecti, proportiones inter ſe ſervabunt. Sectores autem cujuſlibet circuli ſunt inter ſe, ut arcus quibus inſiſtunt. Sectores igitur circuli BD, motu corporis B deſcripti, temporum, quibus ſunt deſcripti, inter ſe proportiones ſervant. Vis igitur centripeta quâ corpus B motu recto detorquetur, & in circumflexu circuli BD continetur, in circuli illius centrum perpetim agit (per Th. II.) Simili argumento efficietur vim aliam centripetam, quâ corpus *b* motu recto detorquetur



Liber Primus.

vis illa reſpicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbitâ ſuâ retinetur; quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

PROP. IV. THEOR. IV.

Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & eſſe inter ſe, ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios (d).

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. & Corol. 2. Prop. I. & ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus quàm minimis deſcriptorum ſinus verſi per Corol. 4. Prop. I. hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII. & propterea, cùm hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. E. D (e).

Corol. 1. Cùm arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione ſimplici radiorum inverſè.

Corol. 2. Et, cùm tempora periodica ſint in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inverſè; vires

torquetur & in circuli *bd* circumflexu continetur, in centrum illius circuli perpetim agere. Corporum igitur, quæ circulos diverſos, BD, *bd*, motibus æquabilibus deſcribunt, vires centripetæ ad centra circulorum tendunt. Quæ prima pars eſt propoſitionis Newtonianæ.

Dico præterea virium illarum inter ipſas proportionem compoſitam eſſe è ratione duplicatâ arcuum, qui ſimul deſcribuntur, & ratione radiorum contrariâ. Sint BD, *bd* duo quilibet arcus ſimul confecti. Ducantur tangentes BC, *bc*, quibus junctæ SD, *sd* et productæ in punctis c, *c* occurrant. Propter motus corporum æquabiles, arcus BD, *bd*, datam aliquam inter ſe proportionem ſervabunt; quæ ea ſit quam recta M, pro arbitrio ſumenda, habeat ad rectam aliam N. Eandem verò habeat N ad tertiam O. Dico vim centripetam, quâ corpus B perpetim urgetur, ad vim centripetam aliam, quâ perpetim urgetur corpus *b*, proportionem habere quæ componitur è proportione rectæ M ad O, & ratione rectarum SB, *sb* contrariâ; ſive eam, quam habet rectangulum M × *sb* ad rectangulum O × SB. Rectæ enim SD, *sd* circulis iterum in punctis G, *g* occurrant. Si arcus BD, *bd* infinitè minuantur; vires centripetæ, quibus urgentur corpora B, *b*, in locis B, *b*, inter ſe rationem gerent, quæ rectarum evaneſcentium CD, *cd* ultima erit. (Prop. I. Cor. 4.) Oſtendendum igitur harum evaneſcentium ultimam inter ipſas rationem eam eſſe, quam rectangulum M × *sb* habet ad rectangulum O × SB. Id autem oſtendimus hoc modo. Rectangula GC × CD, *gc* × *cd*, quadratis ex BC, *bc* ſingulatim ſunt æqualia. (El. III. 36.) Et evaneſcentibus arcubus BD, *bd*, tangentes BC, *bc* arcubus illis BD, *bd* fiunt ultimò æquales (per Lem. VII.) Tangentes igitur BC, *bc* evaneſcentes,

De Motu Corporum

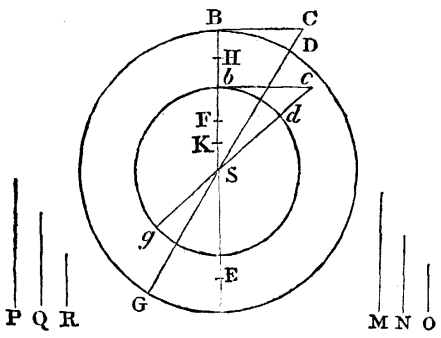
vires centripetæ ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inverſè (f).

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquentur, & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contrà.

Corol. 4. Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contrà (g).

Corol.

neſcentes, arcuum evaneſcentium ultimò inter ſe rationem habent; hoc eſt, datam rectarum M, *n* inter ipſas rationem. Quare quadrata ex BC, *bc* evaneſcentibus, quadratorum ex M, N, ſive rectarum M, O, ultimò inter ſe proportionem induent. Quare rectangulis quoque GC × CD, *gc* × *cd* evaneſcentibus proportio ultima ea erit, quæ eſt rectæ M ad rectam O. Rectangula autem GC × CD, *gc* × *cd* evaneſcentia evaneſcentibus GD × DC, *gd* × *dc* ultimò æqualia fiunt; ac proinde evaneſcentium SD × DC, *sd* × *dc*, ultimò illa dupla fient. Rectangula igitur GC × CD, *gc* × *dc* evaneſcentia cum evaneſcentibus SD × DC, *sd* × *dc* proportione ultimò convenient. Rectangula igitur SD × DC, *sd* × *dc* evaneſcentia datam ultimò rectarum M, O inter ſe proportionem gerent, ſive rectangulorum M × *sd*, O × *sd* datam. Sed rectangulum *sd* × *dc* eſt ad rectangulum SD × *dc* ut rectangulum O × *sd* ad rectangulum O × SD. Neque huic rationi officiet rectæ *cd* magnitudo, magna illa parvave fuerit. Ex æquo igitur rectangula evaneſcentia SD × DC, SD × *dc*, hoc eſt rectæ CD, *cd* evaneſcentes, rectangulorum M × *sd*, O × SD ſive M × *sb*, O × SB ultimò inter ſe proportionem gerent. Atque eadem viribus centripetis inter ipſas ratio intercedet. Q. E. D.



Cor. H. Si capiatur SE ejus longitudinis, ut SB habeat ad illam SE, proportionem illam, quam M ad O; vis centripeta, quâ urgetur corpus B, erit ad vim centripetam, quâ urgetur corpus *b*, ut *sb* ad SE. Nam ratio rectæ *sb* ad illam SE componetur è rationibus ejuſdem *sb* ad SB, & SB ad SE; hoc eſt, è rationibus *sb* ad SB, & M ad O. Et ex eiſdem compoſita eſt ratio rectanguli M × *sb* ad rectangulum O × SB. Quare *sb* erit ad SE ut M × *sb* ad O × SB, hoc eſt (ex modò oſtenſis) ut vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b*. Q. E. D.

(f) Primum quod aſſumpſit Newtonus, "Tempora periodica habere inter ſe rationem è ratione radiorum cum velocitatum contrariâ compoſitam," id nos oſtendimus hoc modo. Habeat recta P, pro arbitrio ſumenda, ad rectam aliam Q proportionem eam quam tempus converſionis corporis B ad tempus converſionis corporis *b*. Dico rectam P ad rectam Q rationem habere eam, quæ componitur è ratione SB ad *sb*, & ratione velocitatum contrariâ, ſive contrariâ rectarum M, N; nimirum cùm rectæ illæ M, N ſint ut velocitates. Vel quod idem eſt, dico P eſſe ad Q ut rectangulum SB × N ad rectangulum *sb* × M. Sunt enim circuitus circulorum ſpatia à corporibus B, *b*, converſionum temporibus, quæ tempora ſunt inter ſe ut P, Q, ſingulatim confecta. Atqui circuitus circulorum proportione conveniunt cum radiis. Radii igitur SB, *sb* erunt inter ſe ut ſpatia, temporibus, quæ ſunt ut P, Q, motibus æquabilibus confecta. Et rectæ M, N ſunt inter ſe ut velocitates quibus ſpatia illa conficiuntur. Quare rectangulum SB × N erit ad rectangulum *sb* × M ſicut P ad Q (per Theorema v^m. Galilæi *De Motu Æquabili*). Q. E. D.

Hoc autem oſtenſo, conſequetur illud quod Newtonus affirmavit, vires centripetas rationem inter ſe habere ex radiorum ratione cum duplicatâ temporum contrariè ſumptâ compoſitam. Hoc eſt ſi capiatur R, quæ proportione cum duabus P, Q tertia utique conveniat, erit vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b* ut rectangulum SB × R ad rectangulum *sb* × P.

Liber Primus.

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii (h): & contrà.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ; vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contrà (i).

Corol.

Nam cùm P ad Q rationem habeat è rationibus rectæ N ad M rectæque SB ad *sb* compoſitam, quadratum ex illâ P ad quadratum ex Q rationem habebit, quæ componitur è rationibus quadrati ex N ad quadratum ex M & quadrati ex SB ad quadratum ex *sb*. Hoc eſt, ſi capiatur SF cum duabus SB, *sb* proportione tertia, cùm ſit P : R = P² : Q²; & SB : SF = SB² : *sb*²; & præterea O ad M ut N² ad M²; habebit P ad R rationem è rationibus O ad M et SB ad SF compoſitam. Eſt autem O ad M ut SE ad SB (conſtruct. Cor. H.) Habebit igitur P ad R rationem è rationibus SE ad SD, & SB ad SF compoſitam. Ex eiſdem autem compoſita eſt ratio ipſius SE ad SF. Erit igitur P ad R ut SE ad SF. Ratio igitur rectæ SE ad *sb*, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ SE ad SF, rectæque SF ad *sb*; ea componetur è rationibus rectæ P ad R rectæque SF ad *sb*. Hoc eſt, è rationibus rectæ P ad R rectæque *sb* ad SB. (Tres enim SB, *sb*, SF proportione conveniunt. Ita enim factum eſt.) Erit igitur SE : *sb* = P × *sb* : R × SB. Invertendo *sb* : SE = SB × R : *sb* × P. Eſt autem *sb* ad SE ut vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b*. (Cor. H.) Erit igitur vis centripeta corporis B ad vim centripetam corporis *b*, ut rectangulum SB × R ad rectangulum *sb* × P. Q. E. D.

(g) Capiatur SH duarum SE, *sb* proportione media. Et ſit P ad Q ut SB ad SH. Dicit Newtonus vires centripetas corporum B, *b* æquales eſſe. Erit enim P² : Q² = SB² : SH². Ergo P : R = SB : *sb*. Rectangula igitur, P × *sb*, R × SE inter ſe æqualia. Vires igitur centripetæ, quæ ſunt ut rectangula illa (per Cor. 2.) inter ſe æquales. E contrario, ſi æquales ſint vires centripetæ, erit P ad Q, necnon M ad N, ut SE ad SH. Æquatis enim viribus centripetis, rectangula SE × R, *sb* × P inter ſe æqualia erunt (Cor. 2.) Ergo P : R = SB : *sb*; P² : Q² = SB² : SH²; & P : Q = SB : SH. Jam verò, cùm P ſit ad Q ut SB ad SH, erit (per Cor. 2.) SB × N : *sb* × M = SB : SH = SB × N : SH × N. Quare *sb* × M = SH × N. Ergo M : N = SH : *sb* = SB : SH. Q. E. D.

(h) Per Cor. 1.

(i) Capiatur SK ad quam SF proportionem habeat eam quam *sb* ad SF; ut quatuor illarum SB, *sb*, SF, SK continua ſit analogia. Ratio igitur rectæ SB ad SK triplicata erit ejus, quam SB habet ad *sb*. Et ratio rectæ P ad R duplicata eſt ejus, quam recta P habet ad O; ſive ejus, quam tempus converſionis corporis B habet ad tempus converſionis corporis *b*. Dicit Newtonus, ſi ratio duplicata temporum eadem ſit, quæ ratio triplicata radiorum; hoc eſt, ſi P ſit ad R ut SB ad SK, fore ut ratio velocitatum eadem ſit, quæ radiorum ſubduplicata contrariè ſumpta; ſive ut M ſit ad N ut SH ad SB: ac præterea fore ut virium contripetarum ratio eadem ſit quæ radiorum duplicata contrariè ſumpta; ſive ut *sb* ſit ad SE ut *sb*² ad SB². E contrario, ſi eadem ponatur virium centripetarum ratio, quæ radiorum duplicata eſt contrariè ſumpta; hoc eſt, ſi ponatur eſſe *sb* ad SE ut *sb*² ad SB²; dicit Newtonus, fore ut eadem ſit temporum duplicata, quæ radiorum triplicata ratio; ſive fore ut P ſit ad R ut SB ad SK.

Primum verò quod dixit Newtonus, poſito P : R = SB : SK, fore ut ſit M : N = SH : SB, id nos oſtendimus hoc modo. Ratio rectæ P ad R compoſita eſt è rationibus rectæ SB ad SF rectæque O ad M; id enim in demonſtrando corollario ſecundo nos oſtendimus. Erit igitur P ad R ut rectangulum SB × O ad rectangulum SF × M. Sed P eſt ad R, ut SB ad SK (id enim poſitum). Rectangulum igitur SB × O erit ad rectangulum SF × M ut SB ad SK, ſive ut rectangulum SB × O ad rectangulum SK × O. Rectangula igitur SF × M, SK × O erunt inter ſe æqualia. Quare M : O = SK : SF = *sb* : SB. Sed M : O = M² : N². Quare M² : N² = *sb* : SB = *sb*² : SH² = SH² : SB². Ac propterea M : N = SH : SB. Q. E. D.

Jam quod alterum dixit Newtonus, poſito P : R = SB : SK, fore ut ſit *sb* : SE = *sb*² : SB², illud quoque nos oſtendimus hoc modo. Cùm ſit P : R = SB : SK erit rectangulum P × *sb* ad rectangulum R × *sb* ut rectangulum R × SB ad rectangulum R × SK. Permutando P × *sb* : R × SB = R × *sb* :

De Motu Corporum

Corol. 7. Et universaliter, si tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet R^n, & propterea velocitas reciprocè ut radii potestas R^{n-1}; erit vis centripeta reciprocè ut radii potestas R^{2n-1}: & contrà (k).

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum à centris pro radiis usurpando.

Corol. 9. Ex eâdem demonstratione consequitur etiam; quòd arcus,

R × SK = sb : SK = SB : SF = SB^2 : sb^2. Invertendo SB × R : sb × P = sb^2 : SB^2. Sed SB × R : sb × P = sb : SE (Cor. 2.) Ergo sb : SE = sb^2 : SB^2. Q. E. D.

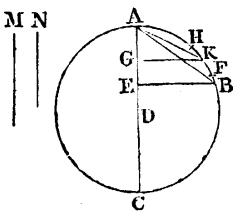
E contrario, si ponatur sb : SE = sb^2 : SB^2, ostendimus fore quod Newtonus dixit, ut sit P : R = SB : SK.

Cùm enim sit sb : SE = SB × R : sb × P (Cor. 2.) si ponatur sb : SE = sb^2 : SB^2 erit SB × R : sb × P = sb^2 : SB^2 = SF : SB = SK : sb = R × SK : R × sb. Permutatis igitur rectangulis, SE × R : SK × R = sb × P : sb × R. Quare SB : SK = P : R. Q. E. D.

(k) Cum sit P : Q = SB × N : sb × M (Cor. 2.) si igitur sit P : Q = SB^n : sb^n, erit SB^n : sb^n = SR × N : sb × M. Quare SB × N × sb^n = sb × M × SB^n. Et utramque quantitatem cum rectangulo sb × SB dividendo, fiet N × sb^{n-1} = M × SB^{n-1}. Ergo M : N = sb^{n-1} : SB^{n-1}. Ac præterea cùm sit M : O = M^2 : N², erit M : O = sb^{2n-2} : SB^{2n-2}. Rectangula igitur M × sb, O × SB sunt inter se ut quantitates sb^{2n-1}, SB^{2n-1}. Atqui vires centripetæ corporum B, b, sunt ut hæc rectangula. (Cor. 1.) Erunt igitur vires illæ ut quantitates SB^{2n-1}, sb^{2n-1} contrariè sumptæ. Q. E. D.

E contrario, si vires centripetæ corporum B, b, sint inter se ut quantitates SB^{2n-1}, sb^{2n-1} contrariè sumptæ, erit P : Q = SB^n : sb^n. Nam vires centripetæ corporum B, b sunt inter se ut rectangula SB × R, sb × P (Cor. 2.) Quare si vires illæ sint ut quantitates SB^{2n-1}, sb^{2n-1} contrariè sumptæ, erit SB × R : sb × P = sb^{2n-1} : SB^{2n-1}. Ac propterea SB^{2n} × R = sb^{2n} × P. Quare P : R = SB^{2n} : sb^{2n}. Sed P : R = P^2 : Q^2. Quare P^2 : Q^2 = SB^{2n} : sb^{2n}. Et P : Q = SB^n : sb^n. Q. E. D.

(l) Per circuitum circuli ABC, cujus centrum D, ferri intelligatur corpus quoddam motu æquabili, urgente datâ vi centripetâ quæ ad circuli centrum D tendat. Ac interea, eâdem vi centripetâ corpus quoddam aliud incitatum recto casu feratur secundum rectam AD infinitè productam. Sint E, F, loca, quæ corpora illa duo, è loco A simul egressa, eodem temporis puncto appulerint. Dicit Newtonus, arcum circuli AF, diametri illius AC rectæque AE proportione medium esse. Quod idem est, ac si rectâ EB à puncto E ad perpendiculum cum diametro AC eductâ, quæ cum circuli circuitu in B concurreret, junctâque AB, dixisset arcum AF rectæ AE æqualem esse. Id nos ostendimus hoc modo.



Sint G, H alia loca, quæ duo corpora mobilia simul appulerint. Eductâque ad perpendiculum rectâ GK, jungatur AK. Sint rectæ M, N, arcubus AF, AH singulatim æquales. Tum cùm rectæ AE, AG sint spatia, casu corporis, è loco A, æquabiliter accelerato confectâ (data enim vis centripeta æquabilem motûs accelerationem corpori cadenti necessariò afferet) idcirco rectæ illæ AE, AG rationem inter se habebunt temporum, quibus sunt confectæ, duplicatam

arcus, quem corpus in circulo, datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo, tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis, eâdem datâ vi, eodemque tempore, cadendo confectum (l).

Scholium.

Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus (m), (ut orsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* (n) & *Halleius*; & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicatâ ratione distantiarum à centris, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio,

duplicatam (per Theor. II. Galilæi *De Motu Naturaliter Accelerato)* sive temporum, quibus arcus AF, AH æquabili motu conficiuntur, duplicatam; hoc est, arcuum ipsorum AF, AH duplicatam; sive rectarum M, N duplicatam, quæ rectæ arcubus AF, AH positæ sunt æquales. Erunt igitur rectæ AE, AG inter se ficut quadrata è rectis M, N. Sunt autem rectæ AE, AG, inter se, ficut quadrata è rectis AB, AK (propter circulum). Quadrata igitur è rectis M, N cum quadratis ex AB, AK proportione convenient. Hoc est M^2 : N^2 = AB^2 : AK^2. Quare M : N = AB : AK. Permutando M : AB = N : AK. Neque huic rationi officient rectarum N, AK longitudines, magnæ parvæve fuerint. Regrediantur igitur puncta G, H versus A: eâ tamen lege, ut loca, quæ duo corpora mobilia simul attigerint, punctis illis semper denotentur. Et manente rectâ M arcui AB æquali, recta N eâ lege fluat, ut arcui AH fluenti semper illa sit æqualis & simul cum illo evanescat. Jam cùm recta N semper sit ad rectam AK ut recta M ad rectam AB, id enim modò ostensum est, idcirco ratio ultima evanescentis rectæ N ad evanescentem AK ea erit quam recta M habet ad rectam AB. Evanescente autem arcu AK, temporum proportio, quibus arcus AK, motu æquabili, rectaque AG, casu recto, urgente datâ vi centripetâ, conficiuntur, æqualitatem propiùs accedit quàm pro datâ aliquâ differentiâ. Sed in omni positione punctorum G, H, arcus quidem AH motu æquabili eodem tempore conficitur, quo recta AG casu recto (id enim posuimus). Arcus igitur evanescentes AH, AK temporibus, quæ ultimò æqualia sunt, eodem motu æquabili conficiuntur; ac proinde fiunt arcus illi ultimò inter se æquales. Sed arcui AH semper est æqualis recta N (id enim positum). Et arcui evanescenti AK evanescens chorda AK fit ultimò æqualis (per Lemma VII.) Quare rectæ N, AK evanescentes fiunt ultimò æquales. Cùm igitur recta M ad rectam AB rationem habeat eam quæ ultima est rectæ evanescentis N ad evanescentem AK (id enim ostensum est), idcirco illæ M, AB sunt inter se æquales. Sed recta M arcui AF posita est æqualis. Arcus igitur AF æqualis erit rectæ AB. Q. E. D.

(m) Vide Kepleri Harmonicen Mundi, Lib. V. C. III. § 8. Et Epitomen Astronomiæ Copernicanæ, p. 501.

(n) Narratio quædam ex notis mss Davidis Gregorii.

"—Hookius] immo si Hookio fidendum, ille omnis hujus Philosophiæ fundamenta jecit, & cum "Newtono communicavit. Verum res ita se habet, ut Candidiss. Newtonus mihi narravit. "Cùm forte inter alia Newtonus Hookio scriberet, tantum abesse ut Grave è summitate Turris "decidens ex motu diurno terræ, ad occidentem à pede turris erectæ caderet, ut è contra ad "orientem à pede turris terram subjectam attingeret (scilicet ob majorem impetum lapidi ad "summitatem communicatum) et casu Curvam manuduceret à lapide inter cadendum descriptam; hanc que Curvam infra terræ superficiem, ad modum spiralis, in centro terminatam describeret; rescripsit Hookius, verum quidem esse quod [Grave] ad orientem terram attingeret, "sed quòd non centrum peteret, sed illud præterlapsum & Ellipticam curvam describens, rursus "in altum reverteretur ad summitatem Turris. Atque hoc illud est, quod se Newtono primum ostendisse jactat, & Newtoni Philosophiam huic soli esse superstructam."

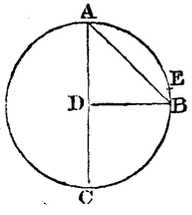
De Motu Corporum

colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam; qualis eſt ea gravitatis. Nam ſi corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem, ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus Corol. 9 (°). Et hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo tractatu *de Horologio Oſcillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus in polygoni lateribus, datâ cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos à circulo reflectatur; vis, quâ ſingulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque ſumma virium, in dato tempore, erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejuſdem ad circuli prædicti radium; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, ſi polygonum, lateribus infinitè diminutis, coincidat cum circulo, ut quadratum arcûs dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis eſt vis contraria, quâ circulus continuò repellit corpus centrum verſus.

PROP.

(°) Per circuitum circuli ABC magnitudine dati, cujus centrum D, ferri intelligatur corpus quoddam motu æquabili; urgente ſcilicet vi quâdam centripetâ, quæ centrum circuli D reſpiciat, & vi datæ Gravitatis apud nos æqualis fit. Ducatur diameter circuli ADC; & à centro D, ad perpendiculum cum diametro AC, educatur recta DB, quæ cum circuli circumflexu in B concurrat. Junctæ AB capiatur arcus AE æqualis. Conficietur arcus AE, motu corporis in circulo æquabili, eodem temporis ſpatio, quo, caſu corporis recto, conficeretur ſpatium radio AD æquale (per Cor. 9.) Sed propter circuli radium magnitudine datum, datum erit tempus, quo corpus grave ſpatium illi radio æquale caſu recto conficeret. Tempus igitur, quo corpus in circulo confecerit arcum AE, datum erit. Hujus autem temporis ad tempus converſionis integræ ratio data eſt; ea ſcilicet, quam habet arcus magnitudine AE, ſive recta data AE, ad integrum circuli circuitum. Tempus igitur converſionis integræ datum erit. Q. E. I.



Cor. H. Tempus converſionis integræ eſt ad tempus caſûs recti per radium ut totius circuli circuitus ad chordam quadrantis.

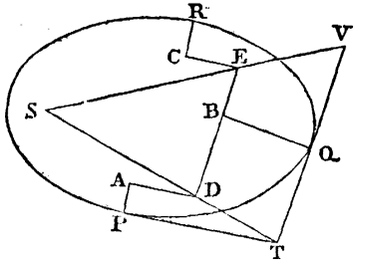
(°) Nam rectæ à puncto D in tangentes AT, QT ad perpendiculum deductæ rectis AP, BQ æquales

Liber Primus.

PROP. V. PROB. I.

Datâ quibuſcunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam, viribus ad commune aliquod centrum tendentibus, deſcribit, centrum illud invenire.

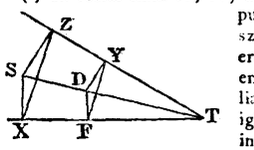
Figuram deſcriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id eſt, ita ut ſit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P; & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, CE, concurrentes in D & E: et actæ TD, VE concurrent in centro quæſito S.



Nam perpendicula à centro S in tangentes PT, QT demiſſa (per Corol. 1. Prop. I.) ſunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis P & Q; ideoque, per conſtructionem, ut perpendicula AP, BQ directè; id eſt, ut perpendicula à puncto D in tangentes demiſſa (P). Unde facilè colligitur quòd puncta S, D, T ſunt in unâ rectâ (9). Et ſimili argumento puncta S, E, V ſunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum S in concurſu rectarum TD, VE verſatur. Q. E. D.

quales erunt. (El. 1. 34.)

(9) In rectas enim TP, TV, deducantur ad perpendiculum, à puncto quidem, S rectæ SX, SZ, à puncto autem D rectæ DF, DY; & XZ, FY jungantur. Rectæ SX, SZ cum rectis DF, DY parallelæ erunt. Anguli igitur XSZ, FDY erunt inter ſe æquales. Quare cùm SX ſit ad SZ, ut DF ad DY (id enim oſtenſum à Newtono) idcirco triangula SXZ, DFY inter ſe ſimilia erunt, & anguli SXZ, DFY inter ſe æquales. (El. VI. 6.) Anguli igitur TXZ, TFY, quibus æquales illi SXZ, DFY à rectis abſunt, inter ſe æquales erunt; ac proinde rectæ FY, XZ inter ſe parallelæ (El. 1. 28.) & triangula TFY, TXZ inter ſe ſimilia erunt. Quare TF erit ad TX ut FY ad XZ. Sed propter ſimilitudinem triangulorum DFY, SXZ; FY eſt ad XZ ut FD ad XS. Ergo FD erit ad XS ut TF ad TX. (El. V. 11.) Ac proinde puncta T, D, S, ad rectam erunt; quod ex ſecundâ Libri ſexti Elementorum facilè efficitur. Nam ſi T, D, S ad rectam non ſint, juncta TS rectæ DF in puncto *a* occurrat. Et propter rectas F*a*, XS inter ſe parallelas, erit XS ad F*a* ut TX ad TF. (El. VI. 2) Sed XS ad FD ut TX ad TF, ex modò oſtenſis. Recta igitur XS ad inæquales FD, F*a* eandem proportionem habet. Quod eſt abſurdum (El. V. 9.) Sunt igitur ad rectam puncta T, D, S. Et ſimili argumentatione efficietur puncta V, E, S, ad rectam eſſe. (Eadem ferè ad locum patres doctiſſimi Le Sœur & Jacquier.)



PROP.

De Motu Corporum

PROP. VI. THEOR. V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente, circa centrum immobile, in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quàm minimo deſcribat, & ſagitta arcûs duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcûs, ut ſagitta directè, & tempus bis inverſè.

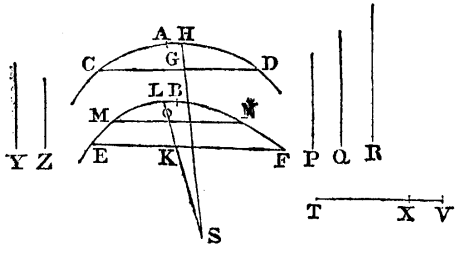
Nam ſagitta, dato tempore, eſt ut vis (per Corol. 4. Prop. I.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione, ſagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per Corol 2 & 3, Lem. XI.) ideoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directè & tempus bis inverſè. Q. E. D (r).

Idem facile demonſtratur etiam per Corol. 4. Lem. X.

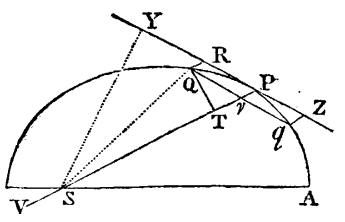
Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S deſcribat lineam curvam APQ; tangat verò recta ZPR Curvam illam in puncto

(r) Demonstratio Newtoniana explicatior facta.

Corpora A, B, urgentibus viribus centripetis quæ centrum S reſpiciant, ferri intelligantur in orbitis CAD, EBF. Sint CAD, EBF orbitarum arcus quilibet; hujus autem EBF medium ſit punctum B; illius CAD, punctum A. Habeat recta P, pro arbitrio ſumenda, ad aliam Q proportionem eam, quam tempus, quo conficitur arcus DAC motu corporis A, ad tempus, quo conficitur arcus FBE motu corporis B. Ducantur CD, EF, arcuum CAD, EBF chordæ; quas puncta G, K medias dividant: junctæque SG, SK Curvis in punctis H, L occurrant. Jam intelligantur arcus CAD, EBF (manentibus punctis mediis, A, B) infinitè minui; eâ tamen lege, ut temporibus, quibus illi conficiuntur, maneat ſemper mutua rectarum P, Q, ratio; dicit Newtonus vim centripetam in loco A ad vim centripetam in loco B proportionem habere, quæ componitur ex eâ quæ ultima eſt ſagittæ evaneſcentis GH ad ſagittam evaneſcentem KL, cum eâ, quæ rectarum P, Q duplicata eſt, contrarie ſumptâ; vel cum eâ, quam R habet ad P, ſi illa R duarum, P, Q, proportione ſit tertia. Hoc eſt, ſi exponatur recta quædam, TV, quæ ad datam P rationem habeat eam, quam ſagitta KL ad ſagittam GH; tum, arcubus CAD, EBF infinitè decreſcentibus, ſi recta TV eâ lege fluat, ut ſemper ſit ad datam P ſicut ſagitta KL ad ſagittam GH (illas utique ſagittarum, GH, KL, rectæque TV magnitudines conferendo quæ ſimul fiunt), & ſi TX ſit ultima rectæ TV longitudo, quam, arcubus CAD, EBF jamjam in nihilum abituris, propiùs illa acceſſerit quàm pro datâ quâvis differentiâ; hæc inquam ſi fiant, dicit Newtonus, vim centripetam in loco A ad vim centripetam in loco B proportionem habere eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ R ad P, rectæque P ad TX; hoc eſt eam quam recta R habet ad rectam TX. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo



Arcubus



to quovis P, & ad tangentem, ab alio quovis curvæ puncto Q, agatur QR diſtantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad diſtantiam illam SP: vis centripeta erit reciprocè ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modò ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimò fit, ubi coeunt puncta P & Q. Nam QR æqualis eſt ſagittæ dupli arcûs QP, in cujus medio eſt P (r). Et duplum trianguli SQP ſive $SP \times QT$, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciprocè ut ſolidum $\frac{SY_q \times QP_q}{QR}$; ſi modò SY perpendiculum ſit à centro virium in orbis tangentem PR demiſſum. Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur (t).

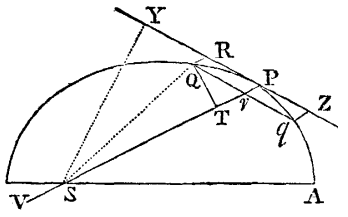
Arcubus CAD, EBF infinitè imminutis puncta H, L in loca A, B ultimò devenient; & ſi MBN fit arcus orbitæ EBF, qui, motu corporis B, eodem tempore conficitur, quo arcus CAD motu corporis A, atque arcus MBN eum præterea ſitum obtineat, ut à puncto B, arcûs EBF medio, medius ipſe ſit diviſus; vis centripeta in loco A ad vim centripetam in loco B rationem habebit eam, quæ, arcubus CAD, MBN infinitè imminutis, ſagittarum evaneſcentium HG, LO, quæ chordas eorum medias dividant, & ad S virium centripetarum centrum tendant, ultima inter ipſas erit. Hoc eſt, ſi recta V, pro arbitrio ſumenda, habeat ad aliam Z, proportionem eam, quam vis centripeta in loco A ad vim centripetam in loco B, erit HG ad LO ultimò ut V ad Z. (Prop. I. Cor. 4.) Arcubus autem MBN, EBF infinitè diminutis, ſagittarum evaneſcentium LO, LK ratio inter ipſas ultima, duplicata erit ejus, quæ arcuum inter ipſos ultima eſt (Lemma XI. Cor. 2.) Hoc eſt, cùm arcus illi ſint ultimò inter ſe ut ſpatia, velocitate illâ, quæ eſt corporis in loco B, temporibus, quæ ſunt ut P, Q, æquabiliter confecta; idcirco ratio ultima evaneſcentium LO, LK, temporum quibus conficiuntur arcus MBN, EBF, ſive rectarum P, Q, duplicata erit. Hoc eſt, cùm R duarum P, Q proportione ſit tertia, erit LO ad LK ultimò ut P ad R. Et oſtenſum eſt HG eſſe ultimò ad LO ut V ad Z. Quare ratio ultima evaneſcentis HG ad evaneſcentem LK componetur è rationibus rectæ V ad Z rectæque P ad R; ſive ea erit, quam rectangulum $Y \times P$ habet ad rectangulum $Z \times R$. Evaneſcentis autem HG ad evaneſcentem LK ratio ultima ea eſt, quam recta P habet ad rectam TX (per conſtruct.) Erit igitur $P : TX = Y \times P : Z \times R$. Ac propterea $P \times Z : TX \times Z = Y \times P : Z \times R$. Permutando $P \times Z : P \times Y = Z \times TX : Z \times R$. Ac propterea $Z : Y = TX : R$. Invertendo $Y : Z = R : TX$. Q. E. D.

(r) Quod ſic oſtendo. In tangente capiatur PZ æqualis rectæ PR. Agatur Zq cum rectâ SP parallela, & Curvæ illa Zq in q occurrat. Junctæ Qq rectæ SP in v occurrat. Evaneſcentibus arcubus PQ, Pq, erit QR ad Zq ultimò ſicut quadratum ex RP ad quadratum ex PZ. (Lemma XI. Cor. 2.) Quadrata autem è rectis æqualibus PR, PZ ſunt inter ſe æqualia. Ergo RQ, Zq fient ultimò inter ſe æquales. Quare cùm ſint etiam inter ſe parallelæ, fiet Qq ultimò parallela cum RZ (El. I. 33.) & figura $RQqZ$ ultimò parallelogramma erit. Quare & Rv. vZ ultimò parallelogrammæ. Ac propterea QR fiet ultimò æqualis ipſi Pv, & duæ etiam Qv, vq duabus RP, PZ æqualibus ultimò æquales fient; ac proinde ultimò inter ſe æquales. Erit igitur Pv evaneſcentis arcûs QPq (qui evaneſcentis QP duplus eſt) ſagitta, quæ chordam ejus mediam dividet, & ad S centrum virium tendet. Et huic Pv oſtenſa eſt QR ultimò æqualis.

(t) Ultimò ſcilicet, arcu QP infinitè decreſcente.

Corol.

Corol. 3. Si orbis vel circulus eſt, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè ſecat, id eſt, angulum contactûs, aut ſectionis, cum circulo quàm minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & ſi PV chorda ſit circuli hujus, à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut ſolidum $SYq \times PV$. Nam PV eſt $\frac{QPq}{QR}$.



Corol. 4. Iiſdem poſitis, eſt vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inverſè. Nam velocitas eſt reciprocè ut perpendiculum SY per Corol. 1. Prop. 1.

Corol. 5. Hinc ſi detur figura quævis curvilinea APQ, & in eâ detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuò dirigitur; inveniri poteſt lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P, à curſu rectilineo perpetuò retractum, in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo deſcribet. Nimirum computandum eſt vel ſolidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$, vel ſolidum $SYq \times PV$, huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis ſequentibus (u).

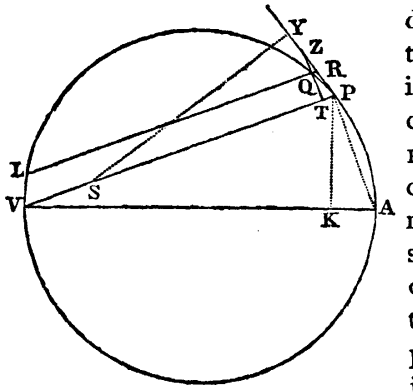
PROP. V. PROB. II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Eſto circuli circumferentia VQPA; punctum datum, ad quod vis

(u) *Cor. H.* Ex horum Corollariorum tertio (id quod ad locum rectè monuere patres doctiſſimi Le Sœur & Jacquier) facilè deducenda eſt lex illa vis centripetæ, quam viri præclari, Joannes Bernouillius, Abrahamus Moivræus & Guido Grandus tradiderunt. Nimirum ſi litera R ſignificet radium circuli cujus curvaturæ curvatura orbitæ in loco P æqualis ſit; vis centripeta in P erit contrariè ut ſolidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Nam diameter circuli illius erit ad chordam PV ut SP ad SY. Hoc eſt $SP : SY = 2R : PV$. Permutando $SP : 2R = SY : PV$. Quare $SP : 2R = SY^3 : SY^2 \times PV$. Quare $\frac{SY^3 \times 2R}{SP} = SY^2 \times PV$. Erit igitur $\frac{SY^3 \times R}{SP}$ ut $SY^2 \times PV$, hoc eſt, ut vis centripeta contrariè (per Cor. 3.)

(x) Triangula VPA, ZTP idcirco inter ſe ſunt ſimilia, quia rectâ PZ tangente circulum APV, quem



vis ceu ad centrum ſuum tendit, S; corpus in circumferentiâ latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; & actâ circuli diametro VA, jungatur AP; & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z; ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipſi SP parallela ſit, & occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et ob ſimilia triangula ZQR, ZTP, VPA (x), erit RP *quad.* hoc eſt QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus ſcribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$; id eſt (ob datum AV *quad.*) reciprocè ut quadratum diſtantiæ ſeu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. Q. E. I.

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: & ob ſimilia triangula SYP, VPA (y); erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale SY *quad.* $\times$ PV. Et propterea (per Corol. 3 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$; hoc eſt, ob datam AV, reciprocè ut $SPq \times PV$ *cub.* Q. E. I.

Corol. 1. Hinc ſi punctum datum S, ad quod vis centripeta

quem recta PV ſecat, anguli ZPT, PAV inter ſe æquales ſunt (per El. III. 32.) Angulus autem VPA rectus, propter ſemicirculum: recto igitur ZTP æqualis. Quare & reliqui triangulorum ZTP, VPA, anguli, PZT, AVP, inter ſe æquales, & triangula inter ſe ſimilia erunt. (El. VI. 4.) Q. E. D.

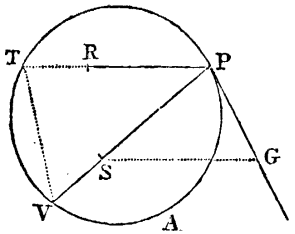
(y) Anguli SPY, PAV, ut modò oſtenſum eſt, inter ſe æquales. Rectus autem SYP, recto VPA æqualis. Quare & PSY, AVP inter ſe æquales, & triangula, SYP, VPA inter ſe ſimilia. (El. VI. 4.)

ſemper

De Motu Corporum

semper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad v; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo APTV circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, quâ corpus idem P, in eodem circulo & eodem tempore periodico (z) circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut RP *quad.* × SP ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro, S, ad orbis tangentem, PG, ducitur, & diſtantiæ corporis à ſecundo virium centro parallela eſt. Nam, per conſtructionem hujus propoſitionis, vis prior eſt ad vim poſteriorem ut $RPq \times PT$ *cub.* ad $SPq \times PV$ *cub.* id eſt, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PT\ cub.}$, ſive (ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad SG *cub.* (aa)



Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $SP \times RPq$, contentum utique ſub diſtantiâ corporis à primo virium centro, S, & quadrato diſtantiæ ejus à ſecundo virium centro, R, ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. Nam vires in hoc orbe, ad ejus punctum quodvis P, eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ.

PROP.

(z) Nimirum idem ponendum eſt tempus periodicum, ut areis, circum centra diverſa deſcriptis, temporum, quibus deſcribuntur, proportio maneat. Corollaria enim Propoſitionis ſextæ, quibus nititur hæc Propoſitio, commune illud omnia fundamentum habent; ſervari inter areas temporum proportiones. Atque hoc poſito, omnia illa corollaria de viribus centripetis, quæ vel diverſa centra, vel idem reſpiciant, æquè vigent.

(aa) Propter TP, SG parallelas, anguli TPV, PSG inter ſe æquales. (El. I. 29.) Et cùm recta PG tangat circulum TPV, quem VP ſecat, idcirco anguli PTV, SPG inter ſe æquales. (El. III. 32.) Angulus igitur PVT angulo SGP æqualis, & triangula VPT, GSP inter ſe ſimilia, & PV:PT = SG:SP. (El. VI. 4.) Quare $\frac{SP \times PV}{PT} = SG$. Et $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3} = SG^3$. Q. E. D. *(Eadem ferè Patres doctiſſimi Le Seur & Jacquier.)*

(bb) Ad axem utique

LEMMA II.

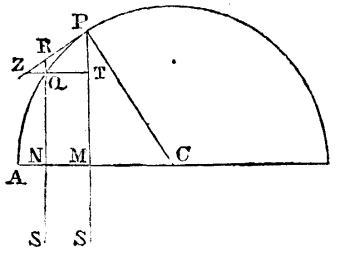
(cc) Sit Ellipſis vel Hyperbola cujus centrum C, ſemiaxis tranſverſus CA, ſecundus CB. Si recta

Liber Primus.

PROP. VIII. PROB. III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum,* S, *ut lineæ omnes,* PS, RS, *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A ſemicirculi centro C agatur ſemidiameter CA parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in M & N, & jungatur CP. Ob ſimilia triangula CPM, PZT, & RZQ; eſt CPq ad PMq ut PRq ad QTq: &, ex naturâ circuli, $\overline{PRq}$ æquale eſt rectangulo $QR \times RN + QN$; ſive, coeuntibus punctis P & Q, rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt CPq ad PM *quad.* ut $QR \times 2PM$ ad QT *quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$. Eſt ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$, hoc eſt (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciprocè ut PM *cub.* Q. E. I.



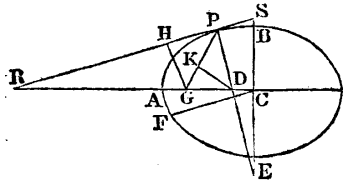
Idem facilè colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

Scholium.

Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in Ellipſi, vel etiam in Hyperbolâ vel Parabolâ, vi centripetâ, quæ ſit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ (bb) ad centrum virium maximè longinquum tendentis (cc).

PROP.

recta PR curvam in puncto P contingat, rectaque PD, à puncto P ad perpendiculum cum contingente educta, axi tranſverſo in D occurrat, ſecundo in E; recta PD ad dimidium parametri principalis rationem habebit eam, quam ſemidiameter, quæ cum contingente eſt parallela, ad ſemiaxem ſecundum. Eademque rectæ PE ad dimidium axis tranſverſi ratio erit.



Ducatur per centrum C ſemidiameter CF cum contingente PR parallela. Dico primum, PD eſſe ad dimidium parametri principalis ut CF ad CB.

Inveniatur ſectionis conicæ umbilicus, G. Ab illo G in contingentem PR deducatur ad perpendiculum recta GH. Jungatur GP, & in GP, à puncto D, deducatur ad perpendiculum recta DK. Anguli recti ad, H, K, inter ſe æquales ſunt. Et propter parallelas, GH, PD, anguli HGP, KPD inter ſe æquales (El. I. 29.) Quare HPG, KDP inter ſe æquales, & triangula HGP, KPD inter ſe ſimilia erunt. Erit igitur GP ad GH ut PD ad PK. Sed GP eſt ad GH ut CF ad CB, (Hamilton.

De Motu Corporum

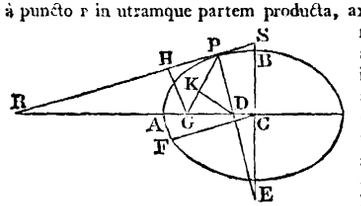
PROP. IX. PROB. IV.

Gyretur corpus in ſpirali PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*

Detur angulus indefinitè parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura SPRQT. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\text{ quad.}}{QR}$ ut QT, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut SP. Mutetur

Conic. Lib. II. 31.) & PK æqualis eſt dimidio parametri principalis (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Erit igitur PD ad dimidium parametri principalis ut CF ad CB. Quod primum demonſtrandum erat.

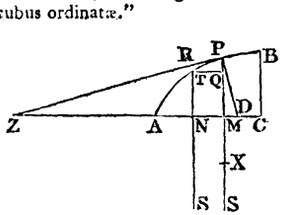
Dico ſecundo eandem eſſe rectæ PE ad CA rationem: ſive PE eſſe ad CA ut CF ad CB. Recta PR, à puncto P in utramque partem producta, axibus, ſi opus ſit, productis, in punctis R, S, occurrat. Propter angulos rectos RPD, RCS, angulumque ad R triangulis duobus SRC, DRP communem, reliqui illorum anguli RDP, RSC inter ſe æquales erunt. Rectus autem, RPD, recto EPS æqualis. Triangula igitur RPD, EPS, inter ſe ſimilia, & RP : PD = EP : PS. (El. VI. 4.) Rectangula igitur RP × PS, EP × PD inter ſe æqualia. Rectangulum autem RP × PS quadrato ex CF æquale eſt. (Hamilton. Conic. Lib. I. 51.) Rectangulum igitur EP × PD quadrato ex CF æquale erit. Ac propterea rectangulum EP × PD erit ad quadratum ex PD, hoc eſt, EP erit ad PD, ut quadratum ex CF ad quadratum ex PD. (El. V. 7.) Sed, per partem primam hujus Lemmatis, quadratum ex CF eſt ad quadratum ex PD ut quadratum ex CB, dimidio axis ſecundi, ad quadratum ex dimidio parametri principalis; hoc eſt ut CA, dimidium axis tranſverſi, ad dimidium parametri principalis. Erit igitur EP ad PD ut CA ad dimidium parametri principalis. (El. V. 11.) Sed, per partem primam, PD eſt ad CF ut dimidium parametri principalis ad CB. Erit igitur ex æquo EP : CF = CA : CB, & permutando EP : CA = CF : CB. Q. E. D.



Cor. 1. Rectangulum ſub EP, PD æquale eſt quadrato è dimidio diametri, quæ cum contingente PR parallela eſt.

Cor. 2. EP eſt ad PD ut axis tranſverſus ad parametrum principalem.

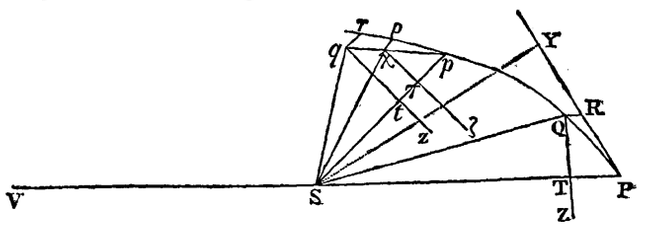
Ex his facilis erit demonſtratio ejus quod Newtonus dicit, "Vim, quâ corpus retineatur in orbe conico, ſi illa agat ſecundum rectas ad axem orbis ordinatim applicatas, eſſe contrariè ut cubus ordinatæ."



Sit BPA ſectio conica, cujus axis CA; & per Curvam PA ferri intelligatur corpus mobile, urgente vi quâdam, quæ ſecundum rectas ad axem CA ordinatim applicatas corpus perpetim impellat. Recta PR contingat curvam BPA in P, productaque axi CA in puncto Z occurrat. A puncto P ducatur recta PM ad axem CA ordinatim, rectaque PD ad perpendiculum cum contingente, quæ axi CA in D occurrat. Denique ab alio quovis curvæ puncto, T, agantur TRN, TQ; illa cum rectâ PM, hæc cum axe CA parallela. Erit igitur, propter rectas RN, PM inter ſe parallelas, RP : MN vel QT = ZP : ZM. (El. VI. 2.) Et propter triangula PZM, DPM inter ſe ſimilia, ZP : ZM = DP : PM. (El. VI. 31.) Quare RP : QT = DP : PM (El. V. 11.) ac propterea $RP^2 : QT^2 = DP^2 : PM^2$. Jam ſi ſectio conica PTA Ellipſis ſit vel Hyperbola, & axis CA ſi tranſverſus ille ſit; ſit recta MX æqualis dimidio lateris recti principalis; & per partem primam Lemmatis, erit quadratum è rectâ MX ad quadratum ex PD, ut quadratum ex axe ſecundo ad quadratum è diametro quæ parallela eſt cum contingente PR; hoc eſt, ut rectangulum $TR \times \overline{RN + TN}$ ad quadratum ex PR. (Hamilton. Conic. Lib. I. 31 & 40.)

Hoc

Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR, angulum con- Liber Primus.



tactûs QPR ſubtendens, mutabitur (per Lemma XI.) in duplicatâ ratione ipſius PR, vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\text{ quad.}}{QR}$ eadem quæ

Hoc eſt punctis Q, P coeuntibus ut $\overline{TR \times 2.PM}$, ad quadratum ex PR. Erit inquam $MX^2 : PD^2 = \overline{TR \times 2.PM} : PR^2$; ultimò ſcilicet, arcu TP, cum rectis PR, TR, QT, evaneſcente. Quamobrem cùm oſtenſum ſit eſſe $PD^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $MX^2 : PM^2 = TR \times 2PM : QT^2$; ultimò, arcu TP evaneſcente. Ac propterea $\frac{2.PM^3}{MX^2} = \frac{QT^2}{TR}$. Ac proinde $\frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò, arcu TR evaneſcente. Neque huic æqualitati obſtabit rectæ SP longitudo, magna illa parvave fuerit: quin & infinitè rectâ SP auctâ æquatio illa ſtabit. Erit igitur $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut $\frac{PM^3 \times SP^2}{MX^2}$; hoc eſt, ſi SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ conſtans fiet, neglecta illâ ratione conſtante, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ut PM^3. Quare vis, quæ eſt contrariè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$, erit contrariè etiam ut PM^3. Q. E. D.

Si verò CA ſemiaxis ſecundus ſit Ellipſeos vel Hyperbolæ PTA; ſit CB ejuſdem ſemiaxis tranſverſus. Et per partem ſecundam Lemmatis, quadratum ex CB erit ad quadratum ex DP ut quadratum ex axe ſecundo ad quadratum ex diametro quæ parallela eſt cum contingente PR; hoc eſt ut rectangulum Z ad quadratum ex PR: deſignante literâ Z rectangulum ſub ſegmentis rectæ à puncto R in axem CB ordinatim deductæ, ipſo puncto R curvâque interceptis. Erit inquam $CB^2 : DP^2 = Z : PR^2$. Quamobrem cùm oſtenſum ſit eſſe $DP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $CB^2 : PM^2 = Z : QT^2$. Invertendo $PM^2 : CB^2 = QT^2 : Z$. Sed $CA^2 : CB^2$, vel, ſi MX duarum CA, CB proportione tertia ſit, $CB^2 : MX^2 = Z : TR \times \overline{RN + TN}$. Quare ex æquo $PM^2 : MX^2 = QT^2 : TR \times \overline{RN + TN}$. Vel ultimò, arcu PT evaneſcente $PM^2 : MX^2 = QT^2 : TR \times 2PM$. Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{MX^2}$ ultimò. Et $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{MX^2}$ ultimò. Ac propterea $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ erit ultimò, arcu QP evaneſcente, ut $\frac{PM^3 \times SP^2}{MX^2}$; hoc eſt, ſi SP infinitè augeatur, quo pacto ratio $\frac{SP^2}{MX^2}$ conſtans fiet, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM^3. Erit igitur vis ut PM^3 contrariè. Q. E. D.

Quòd ſi Parabola ſit ſectio conica PTA, erit DZ dimidium parametri diametri illius quæ per P tranſit, et DM dimidium parametri principalis. (Hamilton. Conic. Lib. II. 25.) Erit igitur $DM : DZ = TR \times \overline{RN + TN} : PR^2$ (Hamilton. Conic. Lib. II. 3. Cor. 3.) Vel evaneſcente arcu PT, erit $DM : DZ = TR \times 2PM : PR^2$ ultimò. Sed propter angulos ad P & M rectos, erit $DM : DP = DP : DZ$. (El. VI. 31.) Atque idcirco $DM^2 : DP^2 = DM : DZ$. Erit igitur $DM^2 : DP^2 = TR \times 2PM : PR^2$. Quamobrem cùm oſtenſum ſit eſſe $DP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, erit ex æquo $DM^2 : PM^2 = TR \times 2PM : QT^2$. Quare $\frac{QT^2}{TR} = \frac{2PM^3}{DM^2}$ ultimò. Unde $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR} = \frac{SP^2 \times 2PM^3}{DM^2}$. Ac propterea ſi SP infinitè augeatur, ut ratio illa $\frac{SP^2}{DM^2}$ conſtans fiat, erit $\frac{SP^2 \times QT^2}{TR}$ ultimò ut PM^3. Ergo vis erit ut PM^3 contrariè. Q. E. D.

priùs,

De Motu Corporum

priùs, hoc eſt ut SP (dd). Quare $\frac{QT_q \times SP_q}{QR}$ eſt ut SP *cub.* ideoque (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Perpendiculum SY in tangentem demiſſum, & circuli, ſpiralem concentricè ſecantis, chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus (ee); ideoque SP *cub.* eſt ut $SY_q \times PV$, hoc eſt (per Corol. 3 & 5. Prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ Ellipſeos vel Hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta eſſe inter ſe æqualia.

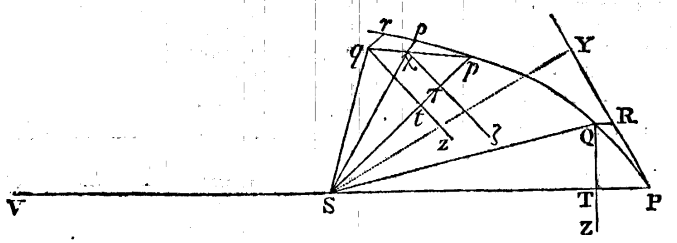
Conſtat ex conicis (ff).

PROP. X. PROB. V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſeos.

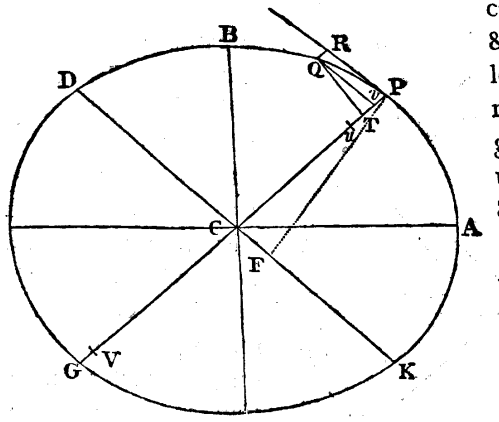
Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ;

(dd) Ad vim hujus demonſtrationis explicandam, ponantur SPQ, *spq* eſſe areæ, quas corpus in ſpirâ angulorum æqualium, circum centrum S circumactum, temporibus æqualibus deſcripſerit. Agantur rectæ PR, *pr*, quæ ſpiram in punctis P, *p* contingant; rectæ QR, *qr* cum radiis SP, *sp*, parallelæ; rectæque QT, *qt* ad perpendiculum cum illis radiis. Vis centripeta in loco P ad vim centripetam in loco *p* rationem habebit eam quæ arcubus, PQ, *pq*, evaneſcentibus, ſolidi $\frac{SP \times QT^2}{QR}$



ad ſolidum $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ ultima erit (Prop. VI. Cor. 1.) Hoc eſt ſi capiantur QZ, *qz*, quarum illa quidem cum duabus QR, QT, hæc verò cum duabus *qr*, *qt* proportione ſit tertia, vis centripeta in loco P ad vim centripetam in loco *p* rationem habebit eam, quæ ultima ſit ſolidi $SP^2 \times qz$ ad ſolidum $SP^2 \times QZ$. Dicit autem Newtonus hanc eſſe eam, quæ eſt cubi ex *sp* ad cubum ex SP. Fiat angulus psx angulo PSQ æqualis; & agantur $x\varrho$, $x\tau$ cum rectis *qr*, *qt* parallelæ; & capiatur $x\zeta$ cum duabus $x\rho$, $x\tau$ proportione tertia. Evaneſcentibus autem arcubus PQ, *pq*, arcus px eâ lege fluat, ut anguli PSQ, psx ſemper ſint inter ſe æquales. Sectores igitur SPQ, *spx*, è naturâ curvæ, erunt inter ſe ſimiles; trapezia quoque PTQR, $p\tau x\varrho$ inter ſe ſimilia erunt. Erit igitur QR ad QT ut $x\varrho$ ad $x\tau$. Ergo & $QR^2 : QT^2 = x\varrho^2 : x\tau^2$. Sed $QR^2 : QT^2 = QR : QZ$, & $x\rho^2 : x\tau^2 = x\rho : x\zeta$ (ita factum enim). Ergo $QR : QZ = x\varrho : x\zeta$. (El. V. 11.) Permutando $QR : x\varrho = QZ : x\zeta$. Sed $QR : x\varrho = SP : sp$ (ob ſimilitudinem figurarum SPRQT, $spx\tau$). Ergo $QZ : x\zeta = SP : sp$. (Et hoc eſt quod dicit Newtonus, datâ ſpecie figuræ SPRQT, eſſe $\frac{QT^2}{QR}$ ut QT, hoc eſt ut SP.) Evaneſcentibus

gatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; *qv* ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum QVPR, erit (ex conicis) rectangulum PVG ad *qv quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula QVT, PCF (gg) *qv quad.* eſt ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* Et conjunctis rationibus, rectangulum PVG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, VG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CD_q \times PF_q}{PC_q}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) 2PC pro VG, & ductis extremis & mediis in ſe mutuò, fiet $\frac{QT\ quad. \times PC_q}{QR}$ æquale $\frac{2BC_q \times CA_q}{PC}$. Eſt ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BC_q \times CA_q}{FC}$; id eſt (ob datum $2BC_q \times CA_q$) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directè ut diſtantia PC. Q. E. I.



Liber Primus.

tibus autem arcubus px, pq, ratio ultima evaneſcentis $x\varrho$ ad evaneſcentem rq ea erit, quæ eſt quadrati ex $p\varrho$ ad quadratum ex pr. (Lemma XI. Cor. 1.) Sunt autem $p\varrho$, pr inter ſe ficut rectæ à punctis ϱ, r in rectam *sp* ad perpendiculum demiſſæ: ac demiſſæ illæ ſunt inter ſe ut $x\tau$, qt, quibus ſunt æquales. (Nimirum cùm rectæ px, rq parallelæ ſint cum rectâ *ps*, rectæque $x\tau$, qt, in eandem *sp* ad perpendiculum ſint demiſſæ.) Quadrata igitur ex illis $p\varrho$, pr ſunt inter ſe ficut quadrata ex illis $x\tau$, qt. Erit igitur $x\varrho$ ad qr ultimò ut quadratum ex $x\tau$, ad quadratum ex qt; hoc eſt, cùm quadrata ex $x\tau$, qt, rectangulis $x\varrho \times x\zeta$, $qr \times qz$ ſint æqualia, erit $x\varrho$ ad qr ultimò ut $x\rho \times x\zeta$ ad $qr \times qz$. Eſt autem $x\varrho$ ad qr ficut rectangulum $x\rho \times x\zeta$ ad rectangulum $qr \times x\zeta$. Ac proinde $x\varrho \times x\zeta$ erit ad $qr \times x\zeta$ ultimò, ut $x\varrho \times x\zeta$ ad $qr \times qz$. Sunt igitur rectangula $qr \times x\zeta$, $qr \times qz$ ultimò inter ſe æqualia. Ac propterea rectæ $x\zeta$, qz ultimò inter ſe æquales. (Et hoc eſt quod dicit Newtonus, mutato utcunque angulo PSQ manere $\frac{QT^2}{QR}$ eandem quæ priùs fuerat.) Quare cùm oſtenſum ſit, eſſe $SP : sp = QZ : x\zeta$, erit ultimò $QZ : qz = SP : sp$. Quamobrem ſolidorum $SP^2 \times QZ$, $sp^2 \times qz$ ratio ultima cuborum ex SP, *sp* inter ipſos ratio erit. Nimirum cùm ratio utraque, ultima illa, & cuborum inter ipſos, ex eiſdem componatur. Q. E. D.

(ee) Nam, propter angulum ad P datum, chorda PV erit ut radius circuli; & radius circuli, ob mutuam partium figuræ ſimilitudinem, erit ut SP (*Emerſonus ad locum.*)

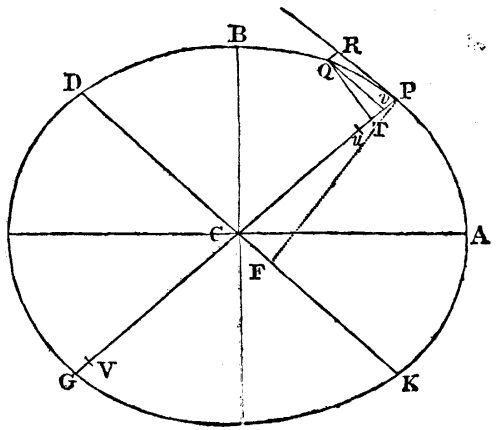
(ff) Hamilton. Conic. Lib. IV. 1.

(gg) Propter illas QV, CK inter ſe parallelas, anguli QVT, PCF erunt inter ſe æquales. (El. I. 29.) Anguli etiam recti QTV, PFC inter ſe æquales. Reliquus igitur TQV reliquo FPC æqualis, & triangula QVT, PCF inter ſe ſimilia erunt (El. VI. 4.)

Idem

Idem aliter.

In rectâ GP, ab alterâ parte puncti T, ſumatur punctum *u*, ut T*u* ſit æqualis ipſi T*v*; deinde cape *u*V, quæ ſit ad *v*G ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex conicis eſt Q*v* *quad.* ad P*v*G ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Q*v* *quad.* æquale P*v* × *u*V. Adde rectangulum *uPv* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs PQ æquale rectangulo V*Pv* (hh); ideoque circulus,



qui tangit ſectionem conicam in P & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum v. Coeant puncta P & Q, & ratio *u*V ad *v*G, quæ eadem eſt cum ratione DC*q* ad PC*q*, fiet ratio PV ad PG ſeu PV ad 2PC;

(hh) Cum ſit ex conicis quadratum ex Q*v* ad rectangulum P*v*G ut quadratum ex DC ad quadratum ex PC, quadratum autem ex DC ad quadratum ex PC ut *u*V ad *v*G (ex conſtructione) erit quadratum ex Q*v* ad rectangulum P*v*G ut *u*V ad *v*G (El. v. 11.) hoc eſt, ut rectangulum P*v* × *u*V ad rectangulum P*v*G. Quadratum igitur ex Q*v* rectangulo P*v* × *u*V æquale erit. (El. v. 9.) Quare ſi utrique addatur rectangulum *u*P*v*, duo illa, quadratum ex Q*v* & rectangulum *u*P*v*, ſimul ſumpta duobus rectangulis *u*V × P*v*, *u*P × P*v*, ſimul ſumptis, hoc eſt (El. II. 1.) rectangulo VP*v*, æqualia erunt. Sed, propter angulum ad T rectum, angulus Q*v*P recto major erit. (El. I. 16.) Ac propterea quadratum ex QP, quadratis è duabus Q*v*, *v*P, & duplo rectanguli T*v* × *v*P, tribus illis ſimul ſumptis, æquale erit. (El. II. 12.) Rurſum propter rectam *uv*, rectæ T*v* duplam (ex conſtructione) rectangulum *uv* × *v*P rectanguli T*v* × *v*P duplum erit. Duplum igitur rectanguli T*v* × *v*P cum quadrato ex *v*P, rectangulo *uv* × *v*P cum quadrato ex *v*P, hoc eſt, (El. II. 3.) rectangulo *u*P*v*, æquale erit. Et quadrato ex Q*v* communiter addito, fient tria illa, quadrata ex Q*v* et *v*P, & duplum rectanguli T*v*P, hæc inquam tria, quibus quadratum ex QP modò oſtendimus æquale, duobus, quadrato ex Q*v* & rectangulo *u*P*v*, ſimul ſumpta ſimul ſumptis, æqualia erunt. Sed quadratum ex Q*v* cum rectangulo *u*P*v* rectangulo VP*v* oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex QP rectangulo VP*v*, ſicut pronunciavit Newtonus, æquale erit.

(ii) Recta enim à centro virium c in tangentem PR ad perpendiculum demiſſa rectæ PF æqualis erit. Nempe cùm oppoſita ſint illæ parallelogrammi latera.

(kk) Corpora duo, urgentibus viribus quæ centrum commune c reſpiciant, ferri intelligantur in orbibus ellipticis ABD, TFE, quorum idem centrum c. Dicit Newtonus converſionum tempora inter ſe æqualia eſſe. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

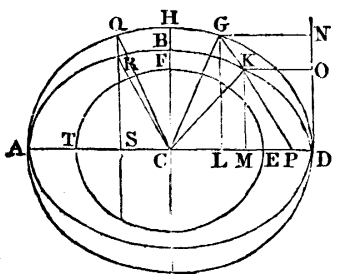
Sint AD, TE ellipſeon ABD, TFE axes tranſverſi; ſint CB, CF ſecundi earum ſemiaxes. Et axe tranſverſo AD, centro C, ſcriptam puta ellipſin AHD ellipſeos TFE ſimilem, & hujus AHD ſit CH ſecundus ſemiaxis. Urgentibus autem viribus quæ centrum idem c reſpiciant, ferri intelligatur tertium corpus per ellipſin DHA. Sint DCK, DCG areæ ellipſeon DBA, DHA motu corporum eodem tempore deſcriptæ. A punctis G, K ducantur GL, KM ad axem AD ordinatim. Tempus converſionis integræ in ellipſi ABD erit ad tempus quo ſimul deſcribuntur areæ DCK, DCG, ut area tota

2PC; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DC^2q}{PC}$. Proinde vis, quâ corpus in ellipſi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DC^2q}{PC}$ in PF*q* (ii) (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc eſt (ob datum 2DC*q* in PF*q*) directè ut PC. Q.E.I. Liber Primus.

Corol. 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis à centro ellipſeos: & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in ellipſi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo, in quem utique ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum, in ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum, periodica tempora. Nam tempora illa, in ellipſibus ſimilibus, æqualia ſunt (per Corol. 3 & 8. Prop. IV.) in ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut ellipſeon areæ totæ directè, & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſè; id eſt, ut axes minores directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſè; hoc eſt, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverſè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis (kk).

Scholium.

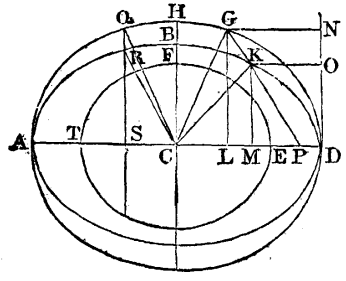


tota ellipſeos ABD ad aream DCK. Atque tempus illud, quo ſimul deſcribuntur areæ DCK, DCG, erit ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA ut area DCG ad aream totam ellipſeos DHA. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione ellipſeos DBA ad ſectorem DCK, ſectoriſque DCG ad ellipſin DHA; hoc eſt, quæ compoſita eſt è ratione ellipſeos DBA ad ellipſin DHA, ſectoriſque DCG ad ſectorem DCK. Sed area ellipſeos DBA erit ad aream ellipſeos DHA, cùm axem tranſverſum illæ communem habeant, ſicut illius ſemiaxis minor, CB, ad hujus ſemiaxem minorem CH. (Lemma IV. Cor. H. 1.) Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ CB ad rectam CH, ſectoriſque DCG ad ſectorem DCK. Neque huic rationi officient arearum DCG, DCK magnitudines, magnæ parvæve illæ fuerint, modò corporum motu ſimul fuerint deſcriptæ. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ componetur è ratione rectæ CB ad rectam CH, cum eâ, quæ, arcubus DG, DK infinitè imminutis, evaneſcentis ſectoris DCG ad evaneſcentem DCK ultima erit. Hæc autem ratio ultima, rectarum quoque GL, KM evaneſcentium ultima inter ipſas erit. Nimirum cùm ſectores DCG, DCK triangulis CGL, CKM fiant ultimò æquales, et hæc triangula, propter baſes CL, CM ultimò æquales, ſint ultimò ut GL, KM evaneſcentes ipſorum altitudines. At ſi juncta GK axi AD producta in P occurrat, rectarum GL, KM ratio ultima illarum GP, PK ultima quoque inter ipſas erit. Tempus igitur converſionis integræ in ellipſi DBA, ad tempus converſionis integræ in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione datâ rectæ CB ad CH, cum eâ quæ rectarum evaneſcentium GP, PK ultima inter ipſas erit. Ducatur DT, quæ ellipſes in illarum vertice communi, D, contingat. Et à punctis G, K, ducantur GN, KO cum axe AD parallelæ, quæ contingenti DT in punctis N, O, occurrant. Jam cùm motu corporum in ellipſibus DHA, DBA, areæ DCK, DCG ſimul deſcribantur; areis illis infinitè imminutis, rectæ evaneſcentes GN, KO erunt inter ſe ultimò ut vires centripetæ, quibus corpora, in loco D, verſus cen-

De Motu Corporum

Scholium.

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hâc Parabolâ; & vis, ad centrum infinitè diſtans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutatâ) vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripetâ in centrifugam verſâ ([ll]). Et quemadmodum in circulo vel ellipſi, ſi vires tendunt ad centrum figuræ

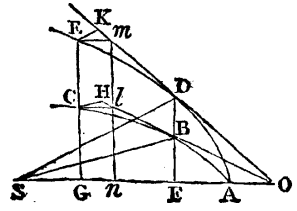


trum C trahuntur. (Prop. I. Cor. 4.) Quamobrem, cùm eâdem vi centripetâ, in loco D, corpus utrumque urgeatur, rectæ illæ GN, KO erunt ultimò inter ſe æquales. Recta igitur GK erit ultimò ſaltem cum contingente DN parallela, ac proinde ad axem AD ordinata. Evaneſcentium igitur GP, PK ratio inter ipſas ultima ea erit, quæ eſt ordinatarum inter ipſas quibus abſciſſa eſt communis. Atque hæc eſt, axium CH, CB inter ipſos data ratio. Tempus igitur converſionis in ellipſi DBA ad tempus converſionis in ellipſi DHA rationem habebit eam, quæ compoſita eſt è ratione rectæ CB ad CH, rectæque CH ad CD. Tempora igitur converſionum in ellipſibus DBA, DHA erunt inter ſe æqualia. Ellipſes autem DHA, EFT, cùm ſint inter ſe ſimiles, & corpora in ellipſibus illis retineantur viribus, quæ commune illarum centrum C reſpiciant; idcirco vires illæ, ſecundum propoſitionem X, erunt ubique ut diſtantiæ corporum à centro; & converſionum in his ellipſibus tempora erunt inter ſe æqualia. (Prop. IV. Cor. 3 & 8.) Hoc eſt tempus converſionis in EFT tempori converſionis in DHA æquale. Huic autem tempus converſionis in DBA oſtenſum eſt æquale. Tempora igitur converſionum in ellipſibus DBA, EFT inter ſe æqualia. Q. E. D.

Cor. H. Si ad axem AD, qui ellipſium DBA, DHA tranſverſus eſt communis, agatur quævis QS ordinatim, quæ ellipſes in punctis R, Q, fecet; junctis CR, CQ, ſectores elliptici DCR, DCQ motu corporum ſimul deſcribuntur. Ac proinde recta QR, quæ puncta illa ellipſium, DHA, DBA, jungit, quæ corpora mobilia, ſi è loco D ſimul fuerint egreſſa, ſimul appulerint, recta inquam QR quæ hæc puncta jungit, non modo ultimò, ſed ſemper quidem ad axem ellipſium communem AD ordinata erit. Sectores enim DCR, DCQ erunt inter ſe ut CB ad CH, hoc eſt ut areæ totæ ellipſium quarum ſunt ſectores. (Lemma IV. *Cor. H.* I.) Permutando, area tota ellipſeos DBA, ad ſectorem DCR ut area tota ellipſeos DHA ad ſectorem DCQ. Eſt autem area tota ellipſeos DBA ad ſectorem DCR ut tempus converſionum in ellipſibus DBA, DHA ad tempus quo deſcribitur ſector DCR. (Prop. I.) Et area tota ellipſeos DHA ad ſectorem DCQ ſicut idem tempus converſionum in ellipſibus DBA, DHA ad tempus quo deſcribitur ſector DCQ. Tempus igitur converſionum in ellipſibus ad tempora quibus deſcribuntur ſectores DCR, DCQ eandem rationem habet. (El. V. 11.) Quare tempora quibus ſectores illi deſcribuntur inter ſe æqualia erunt. (El. V. 9.) Sectores igitur illi ſimul deſcribentur, ſi corpora mobilia è loco D ſimul egreſſa fuerint. Q. E. D.

([ll]) Vide Tom I. (Excerp. ex Epiſt. IV. Not. 9.)

([mm]) Sint Curvæ ABC, ADE axe communi AS, quæ eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut ordinatis quibuſvis, ab eodem axis puncto exeuntibus, data quædam ratio intercedat; unde illud etiam conſequetur, ut areis curvarum totis, ſi ex earum quidem genere ſint quæ in orbem redeant, vel partibus earum ad communem quamlibet ordinatam terminatis, eadem data ratio intercedat. (Lemma *Cor. H.* I.) In his Curvis ferri intelligantur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe communi poſitum reſpiciant, ſollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora converſionum integra, ſi Curvæ ex earum genere ſint quæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora, quibus abſolvuntur



Liber Primus.

ræ in abſciſſâ poſitum; hæ vires, augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro, ſi modò tempora periodica maneant æqualia; ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires, ad centrum quodcunque in abſciſſâ poſitum tendentes, in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro ([mm]).

SECTIO

abſolvuntur ſectores quidam quibus abſciſſa eſt communis, inter ſe æqualia ſint. Agatur quævis DF ad axem SA ordinatim, quæ axi illi in puncto F, curvis in B, D, occurrat. Jungantur SB, SD. Dicit Newtonus vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB, ad SD. Nos autem oſtendimus quod Newtonus dicit hoc modo.

Ducatur aliâ quævis EG ad axem AS ordinatim, quæ axi in G, curvis in punctis C, E occurrat. Jam cùm tempora, vel converſionum tota, ſi curva utraque in orbem redeat; vel, ſi in orbem neutra redeat, tempora tamen quibus abſolvuntur ſectores quidam, quibus abſciſſa eſt communis, ſint inter ſe æqualia; ex eo conſequetur, tempora, quibus quilibet ſectores quorum abſciſſa eſt communis abſolvuntur, eſſe etiam inter ſe æqualia. Id enim eâdem argumentatione obtinebimus, quâ corollarium noſtrum è corollario Newtoni ſecundo demonſtravimus. Junctis igitur, SC, SE ſectores ASB, ASD, quorum communis eſt abſciſſa AF, ſimul deſcribentur, ſi corpora ſimul loco A exierint; necnon ſectores ASC, ASE quorum abſciſſa AG eſt communis. Corpora igitur, cùm ad loca B, D ea ſimul appulerint, atque rurſum ad loca C, E ſimul, ſectores BSC, DSE ſimul deſcripſerint. Ducatur recta BO, quæ curvam ABC in B contingat. Hæc axi SA in O occurrat, et jungatur OD. Propter datam ordinatarum, FB, FD, inter ipſas rationem, ordinatæ illæ cum fluxionibus ſuis proportione convenient (Geometr. Flux. Prop. IV.) hoc eſt $FD:FB = \dot{FD}:\dot{FB}$. Et cùm OB curvam ABC in B contingat, erit $FE:FO = \dot{FB}:\dot{AF}$. Erit igitur ex æquo $FD:FO = \dot{FD}:\dot{AF}$. Quare recta OD curvam ADE in D continget. Actis igitur à punctis C, E rectis CH, EK cum illis SB, SD parallelis, quæ rectis OB, OD in punctis H, K occurrant, vis centripeta in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ ſectoribus BSC, DSE infinitè imminutis, evaneſcentium CH, EK ultima inter ipſas erit. Oſtendendum igitur hanc rationem ultimam eam eſſe, quæ eſt rectæ SB ad SD. Agatur *cl* cum axe SA parallela, quæ contingenti OB in *l* occurrat. Per *l* ducatur *mln* cum ordinatis ad axem SA parallela, quæ axi in *n*, contingenti OD in *m*, occurrat; & jungatur *Em*. Propter rectas duas CH, *cl* cum duabus SB, SO parallelas, triangula HC*l*, BSO inter ſe ſimilia erunt, & CH erit ad *cl* ut SB ad SO. Propter rectas FD, *mn* inter ſe parallelas, erit *ln* ad *lm* ut FB ad BD. Eſt autem, propter illam quæ poſita eſt curvarum ad ſe mutuò affectionem, FB ad BD ut GC ad CE. Ergo *nl* erit ad *lm* ut GC ad CE. (El. V. 11.) Sunt autem *nl*, GC inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi *n*C adverſa inter ſe ſint latera. Erunt igitur & *lm*, EC inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sunt autem ex conſtructione inter ſe parallelæ. Quare *Em*, *cl* parallelæ etiam inter ſe & æquales erunt. (El. I. 33.) Et *Em*, cùm ea ſit parallelo cum *cl*, parallela erit cum axe SO. (El. I. 30.) Duæ igitur EK, EM, cum duabus SD, SO ſunt parallelæ. Unde conſequetur, triangula EK*m*, DSO inter ſe ſimilia eſſe, atque EK eſſe ad E*m*, vel illi æqualem *cl*, ut SD ad SO. Sed *cl* eſt ad CH ut SO ad SB. Id enim jam antè oſtenſum eſt. Ex æquo igitur EK erit ad CH ut SD ad SB. Et invertendo $CH:EK = SB:SD$. Neque huic rationi officiet ſectorum BSC, DSE magnitudines, magni illi parvive fuerint. Sectoribus igitur illis, regreſſu punctorum E, C, ad manentia D, B, infinitè imminutis, rectis evaneſcentibus CH, EK eadem inter ipſas ratio, quæ eſt rectis SB, SD, vel ultimò manebit. Quamobrem & vis centripeta in loco E erit ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Q. E. D.

Verùm dicit Newtonus idem obtinere, etiamſi angulus ordinationis utcunque mutetur. Hoc autem verè dici rationibus ex iiſdem fere fontibus derivatis facile erit oſtendere, modò priùs quâ mente dictum eſt paulo enodatiùs expoſuerim.

De Motu Corporum

SECTIO III.

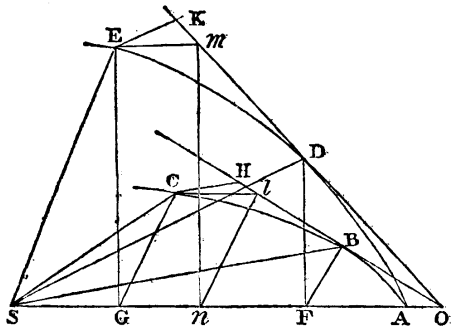
De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.

PROP. XI. PROB. VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipſeos.

Eſto ellipſeos umbilicus S. Agatur SP ſecans ellipſeos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in *x*, & compleatur parallelogrammum QxPR. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi majori AC; eo quòd, actâ ab altero ellipſeos umbilico, H, lineâ HI ipſi EC parallelâ, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI, adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI; id eſt (ob parallelas HI, PR, & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum 2AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\ quad.}{AC}$) dicto L, erit L×QR ad L×Pv ut QR ad Pv, id eſt, ut PE ſeu AC ad

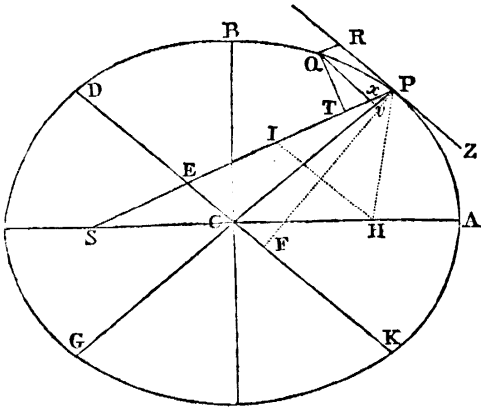
Sint igitur duæ Curvæ ABC, ADE, axe communi AS, quæ eo modo ad ſe mutuò ſint affectæ, ut ſi à quolibet axis puncto, puta F, educantur datis, ſed diverſis, ad axem AS inclinationibus rectæ FB, FD, quæ Curvis in punctis B, D occurrant, habeat FB, ad FB rationem quandam datam. Unde illud etiam conſequetur, ut areis curvarum totis, ſi ſint illæ ex earum genere quæ in orbem redeant, vel partibus earum quæ ordinatis quibuſlibet conjugatis intercipiantur, data quædam ratio intercedat: ea nimirum, quam rectæ, à punctis B D in axem AF ad perpendiculum demiſſæ, inter ſe habent. (Lemma IV. *Cor. H.* 3.) Conjugatas autem ordinatas eas voco, quæ in hujuſmodi curvis ab eodem axis communis puncto eductæ ſunt. Jam per has curvas ABC, ADE ferri intelligantur corpora, viribus centripetis, quæ centrum S in axe curvarum communi poſitum reſpiciant, ſollicitata; atque eâ quidem lege, ut tempora converſionum integra, ſi curvæ in orbem redeant; aliter verò, ut tempora quibus abſolvuntur ſectores quidam, quibus abſciſſa eſt communis, inter ſe æqualia ſint. A quovis axis puncto educantur ordinatæ conjugatæ FB, FD, & SB, SD jungantur. Jam quod dicit Newtonus hoc eſt. Vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Oſtendimus autem quod Newtonus dicit hoc modo.



Ab alio quovis axis puncto, G, educantur ordinatæ conjugatæ, GC, GE, cum prioribus utique FB, FD parallelæ; junctiſque SC, SE corpora mobilia, ſi è loco A ſimul ea fuerint egreſſa, ſectores orbitæ unumquodque ſuæ, BSC, DSE ſimul deſcripſerint. Hoc enim eâdem argumentatione ac priùs obtinebimus. Ductâ autem rectâ BO, quæ curvam ABC in B contingat, ſi hæc axi AS in O occurrat, junctâ OD curvam alteram ADE continget in D. Id enim eiſdem prorſus verbis, quibus antea uſi ſumus, oſtendere licet. Actis igitur à punctis C, F, rectis CH, EK cum illis SB, SD parallelis, quæ rectis OE, OD, in punctis H, K occurrant; vis centripeta in loco B ad vim centripetam in loco D rationem habebit eam, quæ, ſectoribus BSC, DSE infinitè imminutis, evaneſcentium CH, EK ultima inter ipſas erit. Oſtendendum igitur hanc rationem ultimam eam eſſe, quæ eſt rectæ SB ad SD. Acta *cl* ut priùs, cum axe SA parallela, contingenti OB in *l* occurrat. Per *l* ducatur *le* cum FB parallela; & à puncto *n*, ubi illa *le* axem ſecat, agatur *nm* parallela cum FD, & occurrat illa *nm* contingenti OD in *m*. Jungatur autem *Em*. Propter rectas *nl*, FB inter ſe parallelas, erit *nl* ad FB ut *no* ad OF. Atque rurſum propter rectas *nm*, FD inter ſe parallelas, erit *no* ad OF ut *nm* ad FD. Quare *nl* erit ad FB ut *nm* ad FD. (El. V. 11.) Permutando *nl* ad *nm* ut FB ad FD. Eſt autem, propter illam quæ poſita eſt curvarum ad ſe mutuò affectionem, FB ad FD ut GC ad GE. Erit igitur *nl* ad *nm* ut GC ad GE. (El. V. 11.) Sunt autem *nl*, GC inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi *nc* ex adverſo ſint latera. Erunt igitur & *nm*, GE inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sunt autem parallelæ ex conſtructione. Quare & *Em*, *Gn* parallelæ inter ſe & æquales erunt. Propter duas igitur EK, *Em* cum duabus SD, SO parallelas, triangula KE*m*, DSO, ut priùs, inter ſe ſimilia erunt, & EK erit ad *Em* ut SD ad SO. Verùm cùm illa *Em* æqualis ſit rectæ *Gn*, etiam illi *cl* æqualis erit. Quare EK erit ad *cl* ut SD ad SO. Sed propter duas CH, *cl* cum duabus SB, SO parallelas, triangula illa HC*l*, BSO, ut priùs, inter ſe ſimilia erunt, & *cl* ad CH ut SO ad SB. Ex æquo igitur EK erit ad CH, ut SD ad SB. Ex quo eodem prorſus modo ac antè colligetur vim centripetam in loco B eſſe ad vim centripetam in loco D ut SB ad SD. Q. E. D.

(a) Sunt QR, *xP* inter ſe æquales, utpote quæ parallelogrammi PxQR adverſa inter ſe ſint latera. Quare QR:Pv = Px:Pv. Sed propter rectas QT, DC inter ſe parallelas, triangula Pxv, PLC erunt inter ſe ſimilia, & Px:Pv = PE:PC.

(b) Angulus rectus QTx, recto PFE æqualis. Sed propter rectas Qx, EF inter ſe parallelas, anguli QxT, PEF inter ſe æquales erunt. (El. I. 29.) Triangula igitur QTx, PFE, inter ſe ſimilia, et Qx:QT = PE:PF. (El. VI. 4.) Quare $Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF^2$. (El. VI. 22.)



ad PC (a); & L×Pv ad GvP ut L ad Gv; & GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus eſt ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* (b) id eſt, ut CA *quad.* ad PF *quad.* ſive (per Lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, L×QR fit ad QT *quad.* ut AC×L×PC*q*×CD*q*, ſeu 2CB*q*×PC*q*×CD*q* ad PC×Gv×CD*q*×CB*q*, ſive ut 2PC ad Gv. Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur 2PC & Gv. Ergo & his proportionalia L×QR & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,q}{QR}$, & fiet L×SP*q* æquale $\frac{SP\,q \times QT\,q}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis

Liber Primus.

De Motu Corporum

centripeta reciprocè eſt ut $L \times SP^q$, id eſt, reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Cùm vis ad centrum ellipſeos tendens, quâ corpus P in ellipſi illâ revolvi poteſt, ſit (per Corol. 1. Prop. X.) ut CP diſtantia corporis ab ellipſeos centro C; ducatur CE parallela ellipſeos tangenti PR; & vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipſeos punctum S revolvi poteſt, ſi CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SP^q}$ (c) (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus ellipſeos, ideoque PE detur, ut SP^q reciprocè. Q. E. I.

Eâdem brevitate, quâ traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hîc facere: verùm ob dignitatem problematis, & uſum ejus in ſequentibus, non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

PROP. XII. PROB. VII.

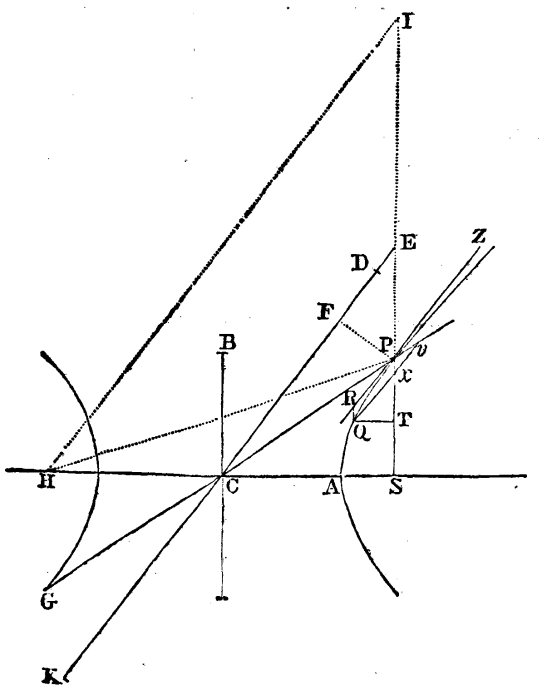
Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB ſemiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC; eo quòd, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ HI ipſi EC parallelâ, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut EP

(c) Nimirum ſi corpora duo, quorum alterum vi quâdam centrum C, alterum aliâ vi centrum S reſpiciente perpetim urgeatur, orbem ellipticum ABG eodem tempore abſolvant, erit in quovis orbitæ puncto P vis illa quæ centrum C reſpicit ad vim alium, punctum S reſpicientem, ut $CP \times SP^2$ ad EP^3. (Prop. VII. Cor. 3.) Sit Y recta, ad quam ſemiaxis AC rationem habeat eam, quam vis illa quæ centrum C reſpicit, in vertice A, ad vim alteram in dato loco P. Et mutato loco P, recta Y eâ ſemper lege fluat, ut ad ſemiaxem CA ea ſemper rationem habeat, quam vis punctum S reſpiciens, in loco P, ad vim quæ centrum C reſpicit in loco A. Ita vis illa quæ reſpicit punctum S ſemper erit ut recta Y. Jam cùm vis illa quæ centrum C reſpicit in loco A, ad vim alteram centrum S reſpicientem in loco P, rationem habeat eam, quæ compoſita eſt è ratione, quam vis centrum C in loco A reſpiciens habet ad vim idem centrum C reſpicientem in loco P, cum eâ, quam vis centrum C reſpiciens in loco P habet ad vim alteram centrum S reſpicientem in eodem loco P, ideireo habebit

Liber Primus.

EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum 2AC adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BC^q}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, ſeu Px ad Pv, id eſt (ob ſimilia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, ſeu AC ad PC (d). Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex naturâ conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QTq ut EPq ad PFq (e), id eſt, ut CAq ad PFq, ſive (per Lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$, ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2PC$



bebit AC ad Y rationem ex eiſdem compoſitam. Harum verò prior ea eſt, quam AC habet ad PC (Prop. X. Cor. 1.) poſterior autem ea eſt, quam ſolidum $CP \times SP^2$ habet ad cubum ex EP (Prop. VII. Cor. 3.) hoc eſt, ſi S umbilicus ſit ellipſeos, ad cubum ex CA. Habet igitur CA ad Y rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ CA ad CP, ſolidique $CP \times SP^2$ ad CA^3; ſive eam, quæ componitur è rationibus ſolidi $CA \times SP^2$ ad $CP \times SP^2$, ſolidique $CP \times SP^2$ ad CA^3. Verùm ſolidi $CA \times SP^2$ ad CA^3 ex eiſdem compoſita eſt ratio. Quare CA erit ad Y ut $CA \times SP^2$ ad CA^3; hoc eſt ut SP^2 ad CA^2. Ergo $Y \times SP^2 = CA^3$. Et $Y = \frac{CA^3}{SP^2}$. Erit igitur Y, ob datum CA^3, ut SP^2 contrariè. Q. E. D.

(d) Vide Not. a.

(e) Vide Not. b.

ad

De Motu Corporum

ad Gv. Sed, punctis P & Q coeuntibus, æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ SP. Q. E. I.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc distantiæ CP proportionalis. Inde verò (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (f), hoc est, ob datam PE, reciprocè ut SPq. Q. E. I.

Eodem modo (g) demonstratur, quòd corpus, hâc vi centripetâ in centrifugam versâ, movebitur in hyperbolâ oppositâ.

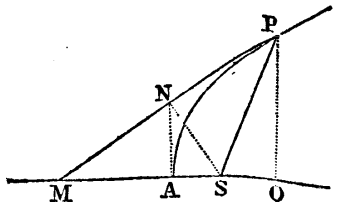
LEMMA XIII.

Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis (h).

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactûs & à vertice principali figuræ.



Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactûs, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem.

(f) Vide Not. c.
(g) Immo eisdem verbis.
(h) Hamilton. Conic. Lib. II. Prop. XXV. et Cor.

gentem. Jungatur AN; &, ob æquales MS & SP, MN & NP, MA & AO, parallelæ erunt rectæ AN & OP; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A, & simile triangulis æqualibus SNM, SNP: ergo PS est ad SN ut SN ad SA. Q. E. D (k). Liber Primus.

Corol. 1. Psq est ad SNq ut PS ad SA.

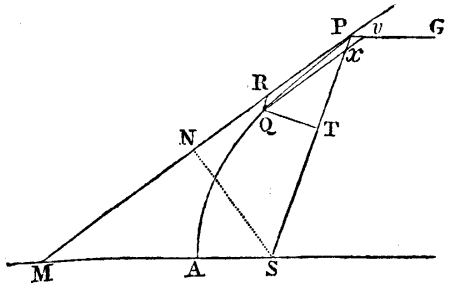
Corol. 2. Et, ob datam SA, est SNq ut PS.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum rectâ SN, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN, quæ parabolam tangit in vertice principali.

PROP. XIII. PROB. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis; sitque P corpus in perimetro Parabolæ, & à loco Q, in quem corpus proximè movetur, age ipsi SP parallelam QR, & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum distantiæ SP in x. Jam ob similia triangula Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px, seu QR, & Pv. Sed, ex conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv, id est (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in casu æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QTx, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc est (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id est, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5. Prop.



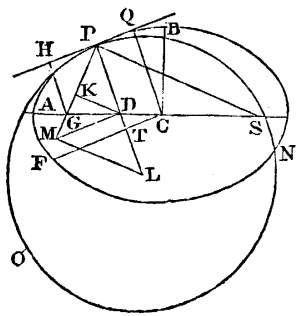
(k) Est hæc Propositio tricesima Libri secundi Conicorum Hamiltoni.

De Motu Corporum

VI.) vis centripeta eſt reciprocè ut SPq × 4SA; id eſt, ob datam 4SA reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ SP. Q. E. I.

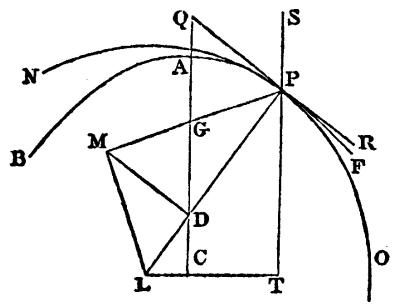
Corol. I. Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quòd ſi corpus quodvis P ſecundum lineam quamvis rectam FR quâcunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripetâ, quæ ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſimul

(l) LEMMA II. (H.)



Sit ſectio quævis conica APB, quam in P puncto circulus OPN oſculetur. Hujus circuli centrum ſit L; junctaque LP axi ſectionis conicæ, CA, tranſverſo quidem ſi ſectio Ellipſis ſit vel Hyperbola, in puncto D occurrat. Sit G umbilicus ſectionis conicæ, & in junctam PG, à puncto L, deducatur ad perpendiculum recta LM. Denique jungatur MD. Dico hanc MD illam LP ad perpendiculum inſiſtere; hoc eſt, angulos MDP, MDL rectos eſſe. Si curva FAB Ellipſis ſit vel Hyperbola, ſit C ejus centrum, et CB dimidium axis ſecundi; ab umbilico G in rectam PH, quæ curvam FAB, circulumque NPO in puncto P contingit, agatur ad perpendiculum recta GH. A puncto D in rectam PG agatur ad perpendiculum recta DK. Per C centrum ſectionis conicæ agantur CQ, CF cum rectis DP, PH parallelæ; quarum illa CQ rectæ PH in Q, altera CF rectæ DP in T, ſectioni conicæ in F, occurrat. Rectangulum LP × CQ quadrato ex CF æquale eſt (Hamilton. Conic. Lib. V. 18. Cor.) et rectangulum DP × CQ quadrato ex CB eſt æquale. (Hamilton. Conic. Lib. ii. 22.) Erit igitur quadratum ex CF ad quadratum ex CB ut rectangulum LP × CQ ad DP × CQ, hoc eſt ut LP ad PD. Sed quadratum ex CF eſt ad quadratum ex CB ut quadratum ex GP ad quadratum ex GH (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) Et quadratum ex GP eſt ad quadratum ex GH ut quadratum ex DP ad quadratum ex PK. (Eſſe enim GP ad GH ut DP ad PK id in Lemmate noſtro primo demonſtrando jam antè oſtendimus.) Quare LP erit ad PD ut quadratum ex DP ad quadratum ex PK (El. V. 11.) Sed propter angulos DKP, LMP rectos, rectæ DK, LM erunt inter ſe parallelæ. Quapropter quadratum ex DP erit ad quadratum ex PK ut quadratum ex LP ad quadratum ex PM. Erit igitur LP : PD = LP^2 : PM^2 (El. V. 11.) Ac propterea LP : PM = PM : PD. Triangula igitur LPM, MPD inter ſe ſimilia erunt, angulique LMP, PDM inter ſe æquales (El. VI. 6.) Sed angulus LMP rectus; talis enim factus eſt. Quare & MDP rectus. Q. E. D.

Si Parabola ſit ſectio conica FAB, axis ejus CA productus contingenti PR in Q occurrat, & per P ducatur TPS diameter parabolæ. Anguli QPG, QPS ſunt inter ſe æquales (Hamilton. Conic. Lib. II. 15.) Quare & angulus GPD, qui cum illo QPG rectum conficit, æqualis erit angulo DPT, qui cum TPR, illi QPS æquali, rectum etiam conficit. A puncto L in diametrum PT ad perpendiculum demittatur LT. In triangulis rectangulis LMP, LTP, anguli acuti MPL, TPL (GPD, TPD) oſtenſi ſunt inter ſe æquales. Quare & acuti reliqui, MLP, PLT, inter ſe æquales erunt. Sed latus LP, acutis contiguum, duobus triangulis commune eſt. Quare reliqua hujus latera reliquis alterius æqualia erunt, ea utique ſingulatim conferendo, quæ anguli æquales ex adverſo ſpectant. Quare rectæ PM, PT erunt inter ſe æquales. Sed PT æqualis eſt dimidio parametri ad diametrum PT pertinentis; nempe cùm ex circuli naturâ, PT ſemiſſis ſit partis illius diametri SP quam circulus



Liber Primus.

ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contrà. Nam datis umbilico, & puncto contactûs, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit (l). Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis (m): & orbes duo ſe mutuò tangentes eâdem

NPO abſcindit; quæ pars diametri SP parametro illi æqualis eſt. (Hamilton. Conic. Lib. V. 17.) Recta igitur PM ſemiſſis erit parametri ad diametrum SPT pertinentis, ac proinde rectæ DQ æqualis. (Hamilton. Conic. Lib. II. 25.) Sed triangulis duobus MPD, QDP latus PD eſt commune. Latera igitur duo MP, PD, duobus QD, DP æqualia. Angulus autem illius MPD, hujus angulo QDP eſt æqualis. Nam propter rectas DQ, TP parallelas, angulus QDP æqualis eſt angulo TPD (El. I. 29.) cui etiam MPD oſtenſus eſt æqualis. Reliqui igitur triangulorum illorum MPD, QDP anguli inter ſe æquales erunt, conferendo utique quos latera æqualia ex adverſo ſpectant. Angulus igitur MDP angulo QPD æqualis. Rectus autem QPD. Quare & MDP rectus. Q. E. D.

DE PARABOLA ALITER.

Circulus, centro D, radio DP ſcriptus, parabolam in duobus punctis contingeret. Nimirum in P, & in alterâ extremitate rectæ à puncto illo P ad axem ordinatim ductæ. Quare cùm MP dimidio parametri, ad diametrum SP pertinentis, æqualis ſit, erit LP ad PM ut PM ad PD (Hamilton. Conic. Lib. V. 17. Cor.) Triangula igitur LPM, MPD inter ſe ſimilia erunt, et angulus MDP angulo LMP æqualis. Rectus igitur MDP, cùm LMP factus fuerit rectus. Q. E. D.

His autem oſtenſis, facilis erit demonſtratio ejus quod Newtonus dixit, "Datis umbilico, & puncto contactûs & poſitione tangentis, deſcribi poſſe ſectionem conicam, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit."

Circulus enim magnitudine & poſitione datus NPO, ſectionem quandam conicam ABP, cujus umbilicus G detur, in dato puncto P oſculetur; dico ſectionem conicam ABP poſitione datam eſſe. Sit L centrum circuli NPO, CA axis ſectionis conicæ ABP, qui, ſi ſectio illa Ellipſis ſit vel Hyperbola, tranſverſus ſit. Jungantur LP, GP, quarum LP axi CA in D occurrat. Ab L in rectam GP ad perpendiculum deducatur LM, & MD jungatur. Jam propter puncta P, G data, recta PG poſitione data eſt. Et propter circulum NPO magnitudine & poſitione datum, centrum ejus L datum eſt. Recta igitur LM, à dato puncto L in rectam PG poſitione datam ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur (Dat. 30.) Punctum igitur M datum (Dat. 25.) Sed angulus MDP rectus eſt (Lemma II. H.) Recta igitur MD, à dato puncto M in rectam poſitione datam PL ad perpendiculum deducta, poſitione ipſa dabitur (Dat. 30.) Punctum igitur D datum (Dat. 25.) Sed G datum. Id enim poſitum eſt. Recta igitur GD, quæ eſt axis ſectionis conicæ, poſitione data eſt (Dat. 26). Actaque PH, quæ datum circulum NPO in dato puncto P contingat, poſitione dabitur, & ſectionem conicam in puncto P continget. Jam ſi Parabola ſit ſectio conica, quam circulus NPO in loco P oſculetur, cùm umbilicus ejus datus ſit, & axis poſitione datus, et cùm rectam poſitione datam in dato puncto ea contingat, poſitione ipſa data erit. Id enim ex elementis conicis ſatis patet. Quòd ſi ſectio illa, quam circulus NPO in P oſculetur, Ellipſis ſit vel Hyperbola, ſit S umbilicus ejus alter, & jungatur PS. Anguli GPH, SPQ, quos rectæ PG, PS ad umbilicos ductæ cum contingente HPQ faciunt, inter ſe æquales erunt. (Hamilton. Conic. Lib. II. 16 & 17.) Quare anguli DPG, DPS, qui cum æqualibus illis rectos ſingulatim conficiunt, inter ſe æquales ſunt. Sed, propter rectas GP, PD poſitione datas, angulus GPD datus eſt. Quare DPS datus. Recta igitur PS, quæ à dato puncto P, datâ inclinatione ad rectam PD poſitione datam eſt educta, hæc PS poſitione & ipſa dabitur. (Dat. 29.) Sed recta GD poſitione data. Quare punctum S datum. (Dat. 25.) Sectionis igitur conicæ ABP umbilicus uterque datus, & recta PH, poſitione datam, in dato puncto illa tangit. Poſitione igitur & ipſa data eſt Q. E. D.

(m) Ea ſit corporis velocitas in dato loco P, quâ, dato quodam tempore, rectam magnitudine & poſitione datam PQ conficeret; & ea in loco P ſit vis centripeta, quâ corpus eodem temporis ſpatio æquabiliter incitatum, motu accelerato ſpatium datum QA conficeret, dummodo recta QA cum directione vis centripetæ in loco P parallela ſit. Et ducatur parabola BAP, cujus diametri

De Motu Corporum

dem vi centripetâ eâdemque velocitate deſcribi non poſſunt.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, quâ lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ deſcribi poſſit; & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium QR: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò fit, ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad Ellipſin; & caſum excipio, ubi corpus rectâ deſcendit ad centrum.

PROP. XIV. THEOR. VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico, quòd orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

Nam (per Corol. 2. Prop. XIII.) latus rectum L æquale eſt quantitati

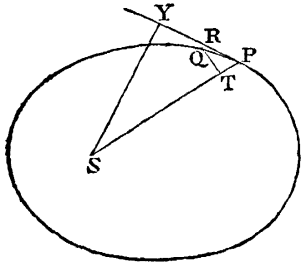
cum rectâ QA ſint parallelæ, quæque rectam PQ in P contingat, & per datum punctum A tranſeat. Hæc parabola poſitione dabitur; & cùm corpus è loco P cum velocitate illâ, quam poſuimus, diſcedens, per hanc parabolam incederet, ſi vis centripeta eadem maneret, & ſecundum rectas cum illâ QA parallelas ſemper ageret; idcirco hujus parabolæ eadem erit, quæ orbitæ, per quam corpus fertur, in loco P curvatura. Hoc eſt idem circulus curvam utramque, parabolam & orbitam, in loco P oſculabitur. Circulus autem, qui parabolam ABF poſitione datam, in dato puncto P oſculatur, magnitudine & poſitione ipſe datus erit. Circulus igitur qui orbitam in loco P oſculatur magnitudine & poſitione datus. Q. E. D. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier.)*

(n) Demonstratio Newtoni explicatior facta.

Corpora duo ferri intelligantur circa centrum commune S, urgentibus viribus quæ centrum illud S reſpiciant, quæque ſint ſemper inter ſe ut quadrata diſtantiarum à centro illo contrariè ſumpta. Corpora igitur in orbibus conicis ferentur, quorum S umbilicus erit. Sint orbes illi APB, *apb*, et ſint PSQ, *psq* orbium ſectores quidam, qui motu corporum ſimul deſcribuntur. Dicit Newtonus orbium APB, *apb* latera recta rationem inter ſe habere, arearum PSQ, *psq* duplicatam. Sint L, *l*, orbium APB, *apb*, latera recta. Cùm ſectores PSQ, *psq*, ſimul deſcribantur; propter æquabilem arearum circa centrum S deſcriptionem, eadem ſemper ſectoribus illis inter ipſos ratio erit, quæcunque fuerint illorum magnitudines. Eadem igitur illis ſemper manet, quæ naſcentium prima fuit. Prima autem naſcentium fuit, quæ rectangulorum SP × QT, *sp* × *qt* naſcentium prima. Oſtendendum igitur L ad *l* rationem habere eam, quæ compoſita eſt è ratione quadrati ex SP ad quadratum ex *sp*, & ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*. Sed per Corollarium 2. Prop. XIII. coeuntibus punctis Q, P, $QT^2 = L \times QR$; & coeuntibus punctis *q*, *p*, $qt^2 = l \times qr$. Quare $L \times QR : l \times qr = QT^2 : qt^2$, ultimò ſcilicet, arcubus PQ, *pq* infinitè imminutis. Sed $l \times qr : l \times QR = qr : QR$. Quare ex æquo $L \times QR$ ad $l \times QR$, ſive L ad *l*, rationem habet eam, quæ compoſita eſt è ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*, & ratione naſcentis *qr* ad naſcentem QR. Sed cùm ſectores PSQ, *psq*, ſimul deſcribuntur, ea erit naſcentis *qr* ad naſcentem QR prima ratio, quæ vis centripetæ in loco *p* ad vim centripetam in loco P; ſive quæ quadrati ex SP ad quadratum ex *sp*. Ratio igitur L ad *l* compoſita

quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimò fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per hypotheſin) reciprocè ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eſt ut $QT q \times SPq$; hoc eſt, latus rectum L in duplicatâ ratione arcæ $QT \times SP$ (n). Q. E. D.

Liber Primus.



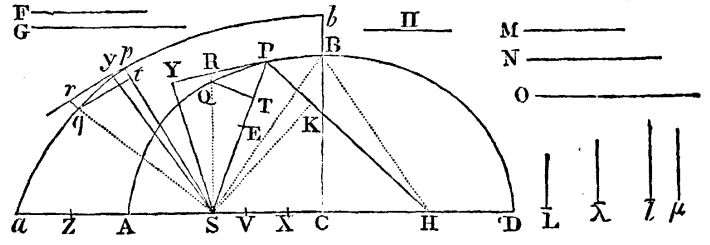
Corol. Hinc Ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum (o).

PROP. XV. THEOR. VII.

Iiſdem poſitis, dico quòd tempora periodica in Ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicatâ majorum axium (P).

Namque axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum; atque ideo rectangulum ſub axibus eſt in

compoſita eſt è ratione primâ quadrati è naſcente QT ad quadratum è naſcente *qt*, & ratione qua-



drati ex SP ad quadratum ex *sp*. Atque hæc eſt arearum quæ ſimul conficiuntur duplicata ratio. Q. E. D.

(o) Orbes conici APB, *apb* Ellipſes ſint, quarum centrum C, ſemiaxes tranſverſi CA, *ca*, ſecundi CB, *cb*. Ellipſeos APB area ſignificetur literâ A; alterius *apb*, literâ *a*. Sint rectæ M, N, quarum M habeat ad N proportionem eam, quam tempus converſionis in Ellipſi APB ad tempus converſionis in Ellipſi *apb*: & capiatur λ, quæ laterum rectorum, L, *l* proportione media ſit. Dicit Newtonus eſſe A ad *a*, ut $M \times L$ ad $N \times \lambda$.

Capiatur recta Π, quæ ſit ad M ut tempus quo conficiuntur ſectores PQS, *pqs*, ad tempus converſionis in ellipſi APB. Eadem Π erit ad N ut tempus quo conficiuntur ſectores illi PQS, *pqs* ad tempus converſionis in ellipſi alterâ *apb*. Jam area A erit ad ſectorem PQS ut M ad Π, ſive ut $M \times L$ ad $\Pi \times L$ (Prop. I.) Sed ſector PQS ad ſectorem *pqs* ut L ad λ (per Prop. XIV.) ſive ut $\Pi \times L$ ad $\Pi \times \lambda$. Et ſector *pqs* ad aream *a* ut Π ad N (Prop. I.) ſive ut $\Pi \times \lambda$ ad $N \times \lambda$. Ex æquo igitur area A ad aream *a* ut $M \times L$ ad $N \times \lambda$. Q. E. D.

(P) Sive rationem axium majorum triplicatam temporum duplicatam eſſe.

ratione

De Motu Corporum

ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ſeſquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per Corol. Prop. XIV.) eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique ſubduplicata ratio lateris recti, & manebit ſeſquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. Q. E. D (q).

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipſibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipſeon.

PROP. XVI. THEOR. VIII.

Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico, quòd velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, & velocitas corporis P erit reciprocè in ſubduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SY\sqrt{q}}{L}$. Nam velocitas illa eſt ut arcus quàm minimus PQ in datâ

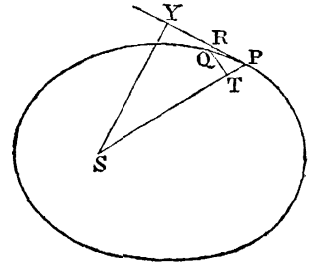
(q) Demonstratio Newtoni explicatior facta.

Capiatur O cum duabus M, N, proportione tertia; capiantur etiam CV, CX, ut CA habeat ad CV, & CV ad CX rationem quam C*a* ad CA. Oſtendendum eſt eſſe O ad M ut C*a* ad CX. Capiatur μ, ad quam λ proportionem habeat quam M ad N. Jam cùm ſit M : N = λ : μ, erit rectangulum M × L ad rectangulum N × L ut λ ad μ. Sed rectangulum N × L eſt ad rectangulum N × λ ut L ad λ. Erit igitur ex æquo perturbatè, M × L ad N × λ ut L ad μ. Sed M × L : N × λ = CA × CB : C*a* × C*b* (Prop. XIV. Cor.) Ergo CA × CB : C*a* × C*b* = L : μ. Hoc eſt, ratio rectæ L ad μ componitur è rationibus rectæ CA ad C*a*, rectæque CB ad C*b*. Quare quadratum ex L ad quadratum ex μ rationem habebit eam, quæ componetur è ratione quadrati ex CA ad quadratum ex C*a*, quadratique ex CB ad quadratum ex C*b*. Sed propter continuam rectarum C*a*, CA, CV analogiam, erit quadratum ex CA ad quadratum C*a* ut CV ad C*a*. Et quadratum ex CB eſt ad quadratum ex C*b* ut rectangulum CA × L ad rectangulum C*a* × *l*. (Nam hæc rectangula quadratorum illorum dupla ſunt). Quadratum igitur ex L ad quadratum ex μ rationem habebit eam, quæ componetur è rationibus rectæ CV ad C*a* rectangulique CA × L ad rectangulum C*a* × *l*; five eam, quæ eſt ſolidi CV × CA × L ad ſolidum C*a*^{2} × *l*. Eſt autem quadratum ex L ad quadratum ex μ, ut ſolidum L^2 × *l* ad ſolidum μ^2 × *l*. Quare L^2 × *l* : μ^2 × *l* = CV × CA × L : C*a*^{2} × *l*. Permutando, rectangulum L × *l* ad rectangulum CV × CA ut quadratum ex μ ad quadratum ex C*a*. Hoc eſt, cùm L × *l* = λ^2, λ^2 : CV × CA = μ^2 : C*a*^{2}. Permutando λ^2 : μ^2 = CV × CA : C*a*^{2}. Sed λ^2 : μ^2 = M^2 : N^2 = M : O (ex conſtruct.) Quare M habet ad O proportionem eam, quam rectangulum CV × CA ad quadratum ex C*a*; five eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ CV ad C*a* rectæque CA ad C*a*; five è rationibus rectæ CX ad CA (eſt enim CV : C*a* = CX : CA ex conſtruct.) rectæque CA ad C*a*. Sed ratio rectæ CX ad C*a* ex eiſdem eſt compoſita. Quare M : O = CX : C*a*. Invertendo O : M = C*a* : CX. Q. E. D.

(r) Demonstratio Newtoni explicatior facta.

Sint rectæ F, G, quarum F ſit ad G ut velocitas corporis in orbe APB lati, in loco P, ad velocitatem

datâ temporis particulâ deſcriptus, hoc eſt (per Lem. VII.) ut tangens PR; id eſt, ob proportionales PR ad QT & SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, Liber Primus.



ſive ut SY reciprocè & SP × QT directè; eſtque SP × QT ut area dato tempore deſcripta, id eſt (per Prop. XIV.) in ſubduplicatâ ratione lateris recti. Q. E. D (r).

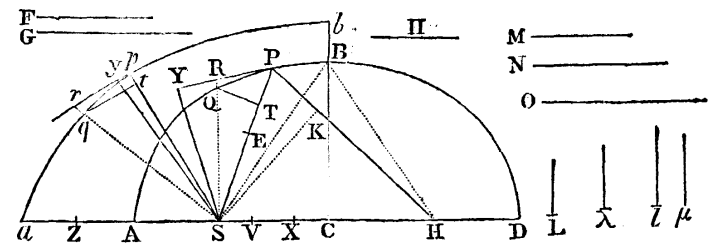
Corol. 1. Latera recta principalia ſunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum (r).

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione diſtantiarum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ (t).

Corol.

tem corporis in orbe altero *apb* lati, in loco *p*. In tangentes PY, *py* demiſſis ad perpendiculum rectis SY, *sy*, dicit Newtonus F eſſe ad G ut L × *sy* ad λ × SY. Nam cùm ſectores PSQ, *psq* ſimul deſcribantur, erit F ad G ut PQ ad *pq*; ultimò utique, arcubus PQ, *pq* infinitè imminutis. Erit autem PQ ad *pq* ut PR ad *pr* ultimò (Lemma VII.) Quare F : G = PR : *pr* ultimò. Ac proinde F × SY : G × *sy* = PR : *pr* = SY × PR : SY × *pr* ultimò.

Sed G × SY : G × *sy* = SY : *sy* = SY × *pr* : *sy* × *pr*. Ex æquo igitur F × SY : G × *sy* = SY × PR : *sy* × *pr*;



ultimò ſcilicet arcubus QP, *qp* infinitè imminutis. Sed illa SY × PR, *sy* × *pr*, illis SP × QT, *sp* × *qt* ultimò ſunt æqualia. Quare F × SY : G × *sy* = SP × QT : *sp* × *qt* ultimò. Et SP × QT : *sp* × *qt* ultimò = L : λ (Prop. XIV.) Quare F × SY : G × *sy* = L : λ = L × SY : λ × *sy*. Et G × *sy* : G × SY = *sy* : SY = λ × *sy* : λ × SY. Quare ex æquo F : G = L × *sy* : λ × SY: Q. E. D.

(t) Nam oſtenſum eſt eſſe F × SY : G × *sy* = L : λ. Habet igitur L ad λ rationem eam, quæ componitur è ratione rectæ F ad G rectæque SY ad *sy*. Quadratum igitur ex L ad quadratum ex λ rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex F ad quadratum ex G, & quadrati ex SY ad quadratum ex *sy*. Et ratio rectæ L ad *l*, cùm eadem ſit illa quæ quadrati ex L ad quadratum ex λ, ex eiſdem utique componetur. Ratio igitur rectæ L ad *l* componetur è rationibus quadrati ex F ad quadratum ex G, quadratique ex SY ad quadratum ex *sy*. Q. E. D.

(u) Punctis utique P, *p* in puncta A, *a*, qui vertices ſunt orbium, tranſlatis, rectæ SY, *sy* illis SA,

De Motu Corporum

Corol. 3. Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantiâ, est ad velocitatem in Circulo, in eâdem à centro distantiâ, in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam (u).

Corol. 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates, in mediocribus distantiis ab umbilico communi, sunt eædem, quæ corporum gyrantium in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. IV.) reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio subduplicata distantiarum inversè (x).

Corol. 5. In eâdem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciprocè ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol.

SA, *sa* singulatim evadunt æquales. Igitur, quando hoc evenerit, cùm sit semper, F : G = L × *sy* : λ × SY, erit F : G = L × *sa* : λ × SA.

(u) Puta orbem conicum *apb (vide fig. text. p. 85)* in alium mutari; qui, manente umbilico S, orbem APB in vertice communi, A, contingat. Ita æquales fient *sa*, SA; & cum F semper sit ad G ut L × *sa* ad λ × SA, (modò illæ F, G inter se rationem gerant, quam velocitates corporum in orbium conicorum verticibus) idcirco æquatis jam *sa*, SA, fiet F : G = L : λ. Et qualiscunque sit orbis ille conicus, quem alterum APB in vertice A contingere posuimus, dummodo umbilicum S verticemque A utrumque cum orbe APB communem ille habeat, manebit ea quæ exposita est proportionum similitudo; F : G = L : λ. Circulus igitur sit orbis ille conicus, qui orbem APB in A contingat, cui circulo centrum sit S, radius SA. Circulus ille pro Ellipsi haberi potest, cujus umbilicus S, latus autem rectum *l* transversum 2SA æquale. Jam verò, vi formulæ generalis, F erit ad G ut L ad λ. Sed cùm illa λ duarum L, *l* proportione sit media, quarum *l* jam sit æqualis illi 2SA, erit λ duarum L, 2SA proportione media. Quare F ad G proportionem habet, quam L ad eam quæ duarum L, 2SA proportione est media; sive proportionem duarum L, 2SA subduplicatam. Q. E. D.

(x) Sint APB, *apb* Ellipses, *(vide fig. text. p. 85)* quarum semiaxes secundi CB, *cb*: punctisque P, *p* ad B, *b*, vertices axium secundorum translatis, SY, *sy*, semiaxibus CB, *cb* æquales fient. Ac proinde, cùm sit semper F : G = L × *sy* : λ × SY, fiet F : G = L × *cb* : λ × CB. Quadratum igitur ex F ad quadratum ex G rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus quadrati ex L ad quadratum ex λ, quadratique ex *cb* ad quadratum ex CB. Harum autem prior ea est, quam L habet ad *l*, sive rectangulum *ca* × L ad rectangulum *ca* × *l*; posterior, quam rectangulum *ca* × *l* habet ad rectangulum CA × L. Ex his autem rationibus rectanguli *ca* × L ad rectangulum CA × L, sive rectæ *ca* ad rectam CA, composita est ratio. Quadrati igitur ex F ad quadratum ex G ex eisdem illis ac rectæ *ca* ad rectam CA composita est ratio. Quare $F^2 : G^2 = ca : CA = sb : SB$. Hoc est F ad G rationem habebit ipsarum *sb*, SB subduplicatam. Manebit autem semper hæc proportionum similitudo, quæcunque fuerint Ellipseon APB, *apb* vel species, vel magnitudines. Manebit igitur si Ellipseon altera, puta *apb*, in Circulum migraverit, centro utique S, radio SB, scriptum. Ita verò *sb*, SB æquales fient. Quare & F, G inter se æquales. Eædem igitur in Ellipsibus, in mediocribus distantiis, quæ in Circulis, ad easdem distantias, velocitates. Q. E. D.

(y) Ha-

Liber Primus.

Corol. 6. In Parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipsi magis variatur, in Hyperbolâ minùs quàm in hâc ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in subduplicatâ ratione distantiæ. In Hyperbolâ perpendiculum minùs variatur, in Ellipsi magis (y).

Corol. 7. In Parabolâ velocitas corporis, ad quamvis ab umbilico distantiam, est ad velocitatem corporis revolventis in Circulo, ad eandem à centro distantiam, in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbolâ major quàm in hâc ratione. Nam per hujus corollarium secundum (z) velocitas in vertice Parabolæ est in hâc ratione, & per corollaria sexta hujus & propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiis (aa). Hinc etiam in Parabolâ velocitas ubique æqualis

(y) Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXXI. Cor. 2.

(z) Tertium potius.

(aa) Puta orbem conicum APB Parabolam esse. Hanc Circulus, centro S, radio SA scriptus, in vertice A contingat *(vide fig. text, p. 85)*. Et fit F ad G ut velocitas corporis in Parabolâ lati, in vertice ejus, ad velocitatem corporis in hoc Circulo circumacti. Sit L latus rectum Parabolæ, & sumatur λ, duarum L, 2SA proportione media. Erit F : G = L : λ (Cor. 3.) Sed L = 4SA (Hamilton. Conic. Lib. II. Def. 3.) Quare L : 2SA = 4 : 2 = 2 : 1. Hoc est, $L^2 : \lambda^2 = 2 : 1$. Et $L : \lambda = \sqrt{2} : 1$. Habet igitur F ad G, sive velocitas corporis in Parabolâ lati in vertice A, ad velocitatem corporis in Circulo ad distantiam SA circumacti, rationem binarii ad unitatem subduplicatam. Velocitas autem corporis in Parabolâ lati, in vertice A, ad velocitatem corporis ejusdem in alio quovis Parabolæ loco, P, rationem habet rectæ SP ad SA subduplicatam (Cor. 6.) Et corporum, quæ, circum idem centrum S, ad distantias SA, SP, in Circulis circumagantur, eadem erit velocitatum ratio; modò corpora illa in Circulo unumquodque suo eisdem viribus centrum S respicientibus, quibus corpus prius in Parabolâ, retineantur (Prop. IV. Cor. 6.) Quare velocitas in Parabolâ in loco P ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum S, ad distantiam SP circumacti, eandem rationem habebit, quam velocitas in vertice Parabolæ A ad velocitatem corporis in Circulo circum centrum S, ad distantiam SA circumacti; sive eam, quæ binarii ad unitatem subduplicata est.

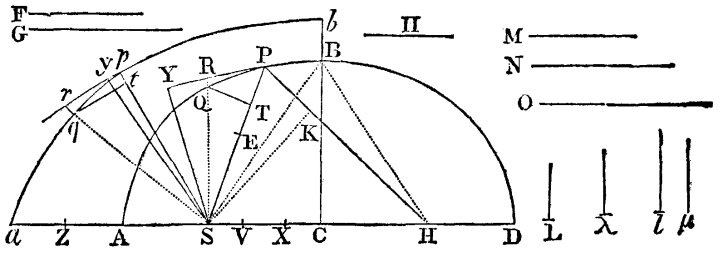
Jam verò Ellipsis sit orbis APB, quam Circulus, centro S, radio SA scriptus, in vertice A contingat. Et sit F ad G ut velocitas corporis in Ellipsi in vertice A ad velocitatem in Circulo; & sit L latus rectum Ellipseos; λ, duarum L, 2SA proportione media. Erit igitur F : G = L : λ (Cor. 3.) Sed L minor erit quàm 4SA (Hamilton. Conic. Lib. II. 9 et 26.) Quare L minor erit, quàm ut habeat ad 2SA rationem eam quam 4 ad 2, vel 2 ad 1. Ac proinde quadratum ex L minus, quàm ut habeat ad quadratum ex λ rationem eam quàm 2 ad 1. Unde rursum L minor quàm ut habeat ad λ rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1. Quare & F minor, quàm ut habeat ad G rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1. Jam capiatur punctum quodvis in Ellipsi, P; & sit *f* ad F ut velocitas corporis per Ellipsin, circum umbilicum S, circumacti, in loco P, ad velocitatem ejusdem corporis in vertice A. Et sit *g* ad G ut velocitas corporis, quod, circum centrum S, ad distantiam SP, in circulo circumagatur, ad velocitatem corporis circum S ad distantiam SA in circulo circumacti; viribus utique eisdem corpora in Ellipsi & in Circulis retinentibus. Ita erit *f* ad *g* ut velocitas in Ellipsi, in loco P, ad velocitatem corporis circum centrum S, ad distantiam SP, in Circulo circumacti. Jam *f* minor erit, quàm ut habeat ad F rationem rectæ SA ad SP subduplicatam. (Cor. 6.) Sed *g* ad G proportio-

De Motu Corporum

æqualis eſt velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbolâ major ([bb]).

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quâvis conicâ eſt ad velocitatem gyrantis in Circulo, in diſtantiâ dimidii lateris recti principalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. Patet per corollarium quintum ([cc]).

Corol. 9. Unde cùm (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyran-



tis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum ; fiet, ex æquo, velocitas gyrantis in conicâ ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo

nem illam ſubduplicatam habet. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare *f* minor erit, quàm ut habeat ad F proportionem eam quam *g* ad G. Permutando *f* minor erit, quàm ut habeat ad *g* proportionem eam quam F ad G. Sed oſtenſa eſt F minor, quàm quæ ad G proportionem haberet binarii ad unitatem ſubduplicatam. Quare *f* multo minor erit, quàm ut habeat ad *g* proportionem binarii ad unitatem ſubduplicatam. Q. E. D.

Simili argumentatione, ſi ponatur APB Hyperbola, ex eo quòd L major erit quàm 4SA, oſtendatur F major quàm quæ ad G, & multo magis *f* major quàm quæ ad *g*, proportionem habeat binarii ad unitatem ſubduplicatam. Q. E. D.

([bb]) " NAM velocitas in circulo, cujus radius ½SP, eſt ad velocitatem in circulo, cujus radius " SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1 (Cor. 6. Prop. IV) Et velocitas etiam in Parabolâ, ad diſtantiam SP, eſt ad ve- " locitatem in Circulo, cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1. Velocitas igitur in Parabolâ ad diſtantiam " SP æquatur velocitati in circulo cujus radius ½SP (El. V. 9.)" [*Le Sœur & Jacquier ad Locum.*]

Similiter velocitas in Ellipſi, ad diſtantiam quamvis SP, cùm minor illa ſit quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1, velocitate in Circulo ad diſtantiam ½SP, minor erit. (El. V. 10) Verùm in Hyperbolâ velocitas, ad diſtantiam quamvis SP, cùm ſit major quàm quæ habeat ad velocitatem in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, rationem eam quam $\sqrt{2}$ ad 1, velocitate in Circulo ad diſtantiam ½SP, illa quidem major erit. (El. V. 10.) Q. E. D.)

([cc]) NAM cùm dupla diſtantia ſit latus rectum Circuli, circulus utique & orbis ille alter conicus latera recta æqualia habebunt.

([dd]) VELOCITAS in ſectione conicâ APB, in loco P, eſt ad velocitatem in circulo, ad diſtantiam ½L, ut ½L ad SY (Cor. 8.) Et velocitas in circulo, ad diſtantiam ½L, eſt ad velocitatem in circulo ad diſtantiam SP, ut SP ad $\sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$. (Prop. IV. Cor. 6.) Quare, ex æquo, velocitas in orbe conico APB, in loco P, erit ad velocitatem in circulo ad diſtantiam SP, ut $\overline{SP \times \frac{1}{2}L}$ ad $SY \times \sqrt{SP \times \frac{1}{2}L}$, ſive ut

culo in eâdem diſtantiâ, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum ([dd]).

Liber Primus.

PROP. XVII. PROB. IX.

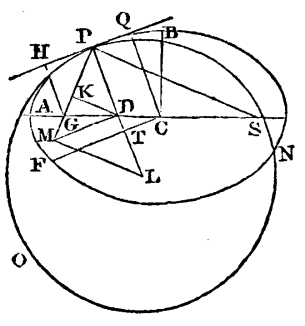
Poſito quòd vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quòd vis illius quantitas abſoluta ſit cognita ; requiritur linea, quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea ſit, quâ corpus *p* in orbitâ quâvis datâ, *pq*, gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*. De loco P ſecundum lineam PR exeat corpus P cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni ſectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua *pr* orbitam *pq* in *p* ; & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale coni ſectionis ad latus rectum prin-

ut $\sqrt{\frac{1}{2}L \times SP}$ ad SY. Q. E. D.

Cor. H. " In Ellipſi vel Hyperbolâ, velocitas, ad quamvis ab umbilico diſtantiam, ad velocitatem in Circulo, ad eandem à centro diſtantiam, rationem habebit diſtantiæ ab umbilico altero ad dimidium axis tranſverſi ſubduplicatam."

Sit G umbilicus quem vires centripetæ reſpiciant. Dico velocitatem in Ellipſi vel Hyperbolâ, in loco P, ad velocitatem corporis, circum centrum G in circulo ad diſtantiam GP circumacti, rationem habere rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Nempe cùm illa PK ſemiſſis ſit lateris recti orbis conici APB (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) velocitas in orbe illo, in loco P, erit ad velocitatem in circulo cujus radius GP, ut $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH. (Cor. 9.) Verùm rectangulum $GP \times PK$ eſt ad quadratum ex GP ut PK ad GP ; hoc eſt, ut rectangulum $SP \times PK$ ad rectangulum $SP \times GP$. Quadratum autem ex GP eſt ad quadratum ex GH ut quadratum ex CF ad quadratum ex CB. (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) hoc eſt ut rectangulum $SP \times GP$ ad rectangulum $CA \times PK$. (Nam quadratum ex CF æquale eſt rectangulo $SP \times GP$; Hamilton. Conic. Lib. II. 19 ; & quadratum ex CB æquale eſt rectangulo $\overline{CA \times PK}$.) Quare cùm ſit $GP \times PK : GP^2 = SP \times PK : SP \times GP$, & $GP^2 : GH^2 = SP \times GP : CA \times PK$; erit ex æquo $GP \times PK : GH^2 = SP : CA$. Quapropter $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habebit rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Sed $\sqrt{GP \times PK}$ ad GH rationem habet, quam velocitas in orbe conico APB, in loco P, ad velocitatem in circulo cujus radius GP, ficut ſuprà oſtenſum eſt. Velocitas igitur illa ad hanc velocitatem rationem habet rectæ SP ad CA ſubduplicatam. Q. E. D. Propoſitio hæc elegantiſſima à patribus doctiſſimis Sœurio & Jacquiero eſt profecta, qui tamen longè aliâ ratione eam demonſtraverunt.



De Motu Corporum

cipale orbitæ in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. Sit L coni sectionis latus rectum. Datur præterea ejusdem coni sectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur positione linea PH, in quâ umbilicus alter H locatur (cc). Demisso ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC, & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq$ (ff) $= 4CHq = 4BHq - 4BCq = SP + PH$: *quad.* $- L \times SP + PH = SPq + 2SPH + PHq - L \times SP + PH$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times SP + PH$, & fiet $L \times SP + PH = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quàm positione (gg). Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quàm $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum lineâ PS; ideoque figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas, ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit Parabola axem habens SA parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quòd si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda

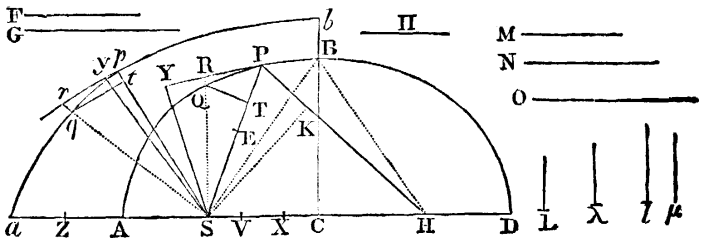
(cc) Hamilton. Conic. Lib. II. 15, 16, & 17.
(ff) El. II. 13.

(gg) Datis enim punctis S, P, recta SP magnitudine & positione data est. Præterea recta SK, à dato puncto S in rectam PH, positione datam, ad perpendiculum deducta, positione ipsa dabitur. (Dat. 30.) Punctum igitur K datum (Dat. 25.) Recta igitur PK magnitudine & positione data (Dat. 26.) Duæ igitur SP, PK simul sumptæ magnitudine datæ (Dat. 3.) & 2SP, 2PK simul sumptæ magnitudine datæ (Dat. 2.) Sed L magnitudine data. Ratio igitur rectæ L ad $2SP \times 2PK$ data (Dat. 1.) Quare ratio rectæ PH ad $SP \times PH$ data; &, dividendo, ratio PH ad SP data. Sed SP magnitudine data. Quare & PH (Dat. 2.) Et ostensa est jam antè PH positione data. Magnitudine igitur & positione.

ALITER.

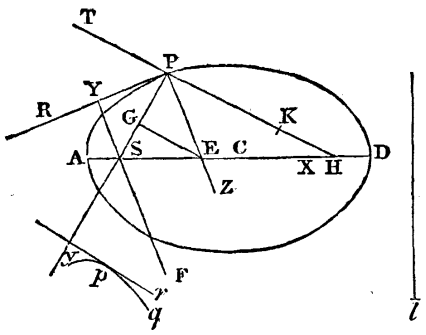
(hh) Factum puta quod propositum erat. Sit APD orbis ille conicus, quem corpus, velocitate datâ è loco P secundum rectam PR decedens, urgentibus viribus centripetis quæ umbilicum S respiciant, describere cogetur. Sectionis conicæ APD axis sit ASD. A puncto P, ad angulos cum contingente PR rectos, eductam puta PE, quæ axi AS in E occurrat. A puncto E in junctam SP ad perpendiculum demittatur EG. Sectionis conicæ APD, sit latum rectum L, quod magnitudine quidem dari, eodem nos quo Newtonus modo ostendamus. Hujus autem dimidio recta PG æqualis est. (Hamilton. Conic. Lib. II. 27.) Recta igitur PG magnitudine data est. Sed et positione (Dat. 26.) propter puncta P, S data. Punctum igitur G datum (Dat. 27.) Recta igitur GE, à dato puncto G cum rectâ PG, positione datâ, ad perpendiculum educta, positione & ipsa dabitur (Dat. 29.) Sed & recta PE, à dato puncto P cum rectâ PR, positione datâ, ad perpendiculum educta, positione & ipsa dabitur (Dat. 29.) Punctum igitur E datum (Dat. 25.) Datum autem S. Recta igitur SE, quæ axis est sectionis conicæ APD, positione dabitur (Dat. 26.) Si igitur Parabola

pienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque Liber Primus.



tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in Prop. XI, XII, & XIII, quòd vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis à centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P, cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. Q. E. F (hh).

Corol.



Parabola fit sectio illa, cùm umbilicum S datum habeat, & axem SA positione datum, latusque rectum L magnitudine, positione quidem ipsa dabitur. Si verò Ellipsis fit, aut Hyperbola, sectio illa conica APD, sit H umbilicus ejus alter, & jungatur PH. Jam angulus RPH, si sectio fit Hyperbola, si verò illa fit Ellipsis, angulus TPR, qui cum illo RPH duos rectos complet, angulo RPS æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. II. 16 & 17.) Angulus autem RPS, qui à rectis PS, PR positione datis comprehensus est, magnitudine datus est. Angulus igitur RPH datus. Recta igitur PH quæ à dato puncto P, datâ ad rectam PR, positione datam, inclinatione est educta, positione & ipsa dabitur (Dat. 29.) Sed ostensa est SA positione data. Punctum igitur H datum (Dat. 25.) Recta igitur PH magnitudine & positione data (Dat. 26.) Sed SP data, id enim suprà ostensum est. Duarum igitur SP, PH summa vel differentia dabitur. Harum autem summæ quidem, si sectio conica APD fit Ellipsis, differentiæ verò, si illa fit Hyperbola, axis transversus AD est æqualis (Hamilton. Conic. Lib. II. 14.) Axis igitur transversus magnitudine datus. Quare sectio conica APD, cùm umbilicos S, H, datos habeat, axemque transversum AD magnitudine datum, positione ipsa quidem dabitur. Q. E. D.

Componemus igitur Problema hoc modo.

Sit *l* latus rectum orbitæ *pq*. Ab umbilico S in rectas *pr*, PR deducantur ad perpendiculum *sv*, SY. Et à puncto P, ad perpendiculum cum rectâ PR erigatur PZ. Capiatur SE, ad quam SY rationem habeat eam, quam velocitas in loco *p* ad velocitatem in P. Capiatur etiam A ad *q* ita-

De Motu Corporum

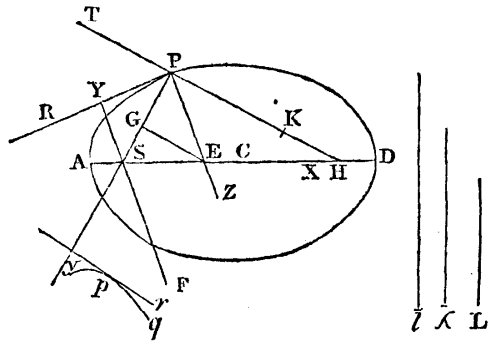
Corol. 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali, D, latere recto, L, & umbilico, S, datur umbilicus alter H; capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS. Nam proportio SP+PH ad PH ut 2SP+2KP ad L, in casu hujus corollarii, fit DS+DH ad DH ut 4DS ad L, & divisim DS ad DH ut 4DS−L ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam DS, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo, impulsu quocunque, exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsûs loco, secundum rectam positione datam, exibit.

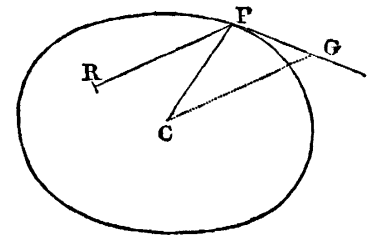
Corol. 4. Et si corpus illud, vi aliquâ extrinsecus impressâ, continuò

l rationem habeat quam SY ad SF; denique capiatur L quæ cum duabus *l*, Λ proportione sit tertia. Jungatur SP, & abscindatur PG semissi rectæ L æqualis. A puncto G, ad perpendiculum cum rectâ PG, educatur GE, quæ cum PZ in puncto E conveniat. Jungatur SE. Et angulo EPS constituatur angulus EPK æqualis. Productâ KP ultra P ad T, angulus PSE angulo TPS vel æqualis erit vel non. Si fit æqualis, recta PK parallela erit cum rectâ SE. Quod si acciderit Parabola scribatur, cujus umbilicus sit S, axis transversus SE, latus rectum L, & hæc erit orbita quam definire suscepimus. Nam si orbita illa Ellipsis aut Hyperbola esset, umbilicum suum alterum ea haberet in rectâ PK positum, quæ propterea axem SE alicubi conveniret; quod angulorum TPS, GSE inter ipsos æqualitas fieri omnino vetat. Sin verò anguli illi inæquales sint, rectæ PK, SE inter se non erunt parallelæ. Convenient igitur. Conveniant in H. Angulus GSE, dato TPS, cum illi æqualis non sit, vel minor vel major erit. Si minor fuerit angulus GSE, rectæ PK, SE ab iis partibus rectæ SP convenient, ad quas situs est angulus PSE; & punctum E punctis S, H intermedium erit. Si verò angulus GSE angulo TPS major fuerit, rectæ SE, PK à partibus rectæ SP earum, ad quas situs est angulus PSE, contrariis convenient; & punctum E illis, H, S, minimè intermedium erit. Primum quidem si acciderit, Ellipsis cujus umbilici sint S, H, axis autem transversus duarum SP, PH summæ sit æqualis, sin verò posterius, Hyperbola, cujus umbilici



tinuò perturbetur, innotescet cursus quàm proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, &, ex seriei analogiâ, mutationes continuas in locis intermediis æstimando. Liber Primus.

Scholium.



Si corpus P vi centripetâ, ad punctum quodcunque datum R tendente, moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per Corol. 1. & Schol. Prop. X. & Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{\text{CG cub.}}{\text{RP quad.}}$.

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

umbilici sint S, H, axis autem transversus differentiæ duarum SP, PH æquetur, orbita erit quam definire suscepimus. Nam Parabola esse omnino illa nequit; nam si Parabola esset, recta PH cum axe SE parallela esset. (Hamilton. Conic. Lib. II. 5.) Neque verò, si primum acciderit, Hyperbola; nam in hyperbolâ punctum E (concursus utique radii curvaturæ, qui dicitur, cum axe transverso) umbilicis intermedius esse nequit; neque denique, si postremum acciderit, Ellipsis erit orbita illa; nam in ellipsi concursus ille radii curvaturæ cum axe transverso non esse nequit umbilicis intermedius. Orbita igitur, quam definire nos oportet, si primum acciderit, Ellipsis; si posterius, Hyperbola erit, umbilicis & axibus transversis quos diximus. Quod si neutrum acciderit, anguli autem PSE, TPS æquales sint, orbita Parabola erit quam suprà definivimus. Q. E. I.

E nostrâ verò Problematis resolutione, æquè atque ex illâ Newtoni, patet, majorem minoremve corporis, in dato loco P, velocitatem illud esse, quod orbitæ cuique speciem propriam inducit. Auctâ enim in loco P velocitate, cæteris manentibus, augebitur L. Auctâque L augebitur semissis ejus PG. Et quo major fuerit PG, eo, propter datam quidem SP, minor erit SG Et in triangulo PGE specie dato, quâ ratione aucta fuerit PG, eâdem augebitur GE. Auctâ igitur velocitate (cæteris manentibus) augebitur GE, atque SG imminuetur. Et utroque nomine ratio rectæ SG ad GE, sive radii ad tangentem anguli acuti GSE, minor fiet. Imminutâ autem ratione illâ, angulus ipse major fiet. Major itaque corporis in loco P velocitas majorem angulum GSE effecerit; crescente autem angulo GSE, orbita à formâ ellipticâ in parabolicam, & à parabolicâ in hyperbolicam, sensim migrabit. Omnis igitur formæ ratio posita est in modo velocitatis.

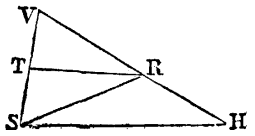
Præterea è nostrâ resolutione corollaria Newtoniana facilè deducenda sunt. Capiatur enim DX = ½L. Jam cùm recta PE angulum SPH medium dividat, idcirco erit SP ad PH ut SE ad EH: punctoque P per flexum orbitæ utcunque translato, hæc similitudo proportionum manebit. Igitur & ultimò manebit, si P in verticem D transferatur. Ultimò verò puncto P in D incidente, puncta G, E simul in illud X incident. Unde efficietur DS : DH = SX : XH. Quare DS : DH = DS + SX : DX. Sed DS + SX = 2DS − DX, et DX = ½L. Quare DS : DH = 2DS − ½L : ½L = 4DS − L : L. Hoc est DS : DH = 4DS − L : L. Q. E. D.

LEMMA

De Motu Corporum

LEMMA XV.

Si ab ellipſeos vel hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium,* V, *inflectantur rectæ duæ,* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, id eſt, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem conicam alicubi tanget: & contrà, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

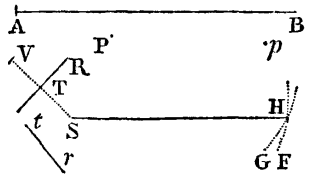


Secet enim perpendiculum TR rectam HV productam, ſi opus fuerit, in R; & jungatur SR. Ob æquales TS, TV, æquales erunt & rectæ SR, VR, & anguli TRS, TRV. Unde punctum R erit ad ſectionem conicam, & perpendiculum TR tanget eandem: & contrà. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROB. X.

Datis umbilico & axibus principalibus, deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujuſvis; P punctum per quod trajectoria debet tranſire; & TR, recta quam debet tangere. Centro P, intervallo AB−SP, ſi orbita ſit Ellipſis, vel AB+SP, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut ſit TV æqualis ST; centroque V, & intervallo AB, deſcribatur circulus FH. Hâc methodo, ſive dentur duo puncta P, *p*, ſive duæ tangentes TR, *tr*, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria deſcripta (eo quòd PH+SP in Ellipſi, & PH−SP in Hyperbolâ æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, *p*, vel tanget rectas duas TR, *tr*. Q. E. F.



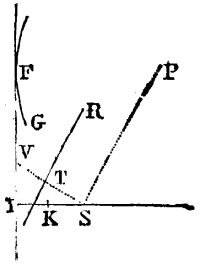
PROP.

Liber Primus.

PROP. XIX. PROB. XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

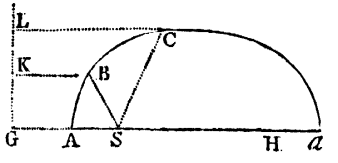
Sit S umbilicus, P punctum, & TR tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS, deſcribe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut ſit TV æqualis ST. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta IF, quæ tangat duos circulos FG, *fg*, ſi dantur duo puncta P, *p*; vel tranſeat per duo puncta V, *v*, ſi dantur duæ tangentes TR, *tr*; vel tangat circulum FG, & tranſeat per punctum V, ſi datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biſeca in K; & axe SK, vertice principali K deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, tranſibit per punctum P; & (per Lem. XIV. Corol. 3.) ob æquales ST & TV, & angulum rectum STR, tanget rectam TR. Q. E. F.



PROP. XX. PROB. XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit, & rectas tanget poſitione datas.

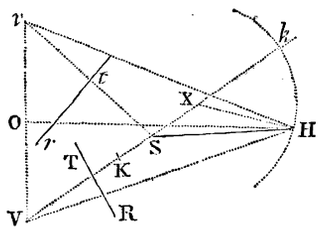
Caſ. 1. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria ABC per puncta duo B, C. Quoniam trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In eâ ratione cape KB ad BS, & LC ad CS. Centris B, C, intervallis BK, CL, deſcribe circulos duos; & ad rectam KL, quæ tangat eoſdem in K & L, demitte perpendiculum SG, idemque



De Motu Corporum

que feca in A & *a*, ita ut ſit GA ad AS, & G*a* ad *a*S, ut eſt KB ad BS ; & axe A*a*, verticibus A, *a*, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cùm ſit GA ad AS ut G*a* ad *a*S, erit diviſim G*a*−GA, ſeu A*a*, ad *a*S−AS, ſeu SH in eâdem ratione; ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus ; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribendâ. Cúmque ſint KB ad BS & LC ad CS in eâdem ratione, tranſibit hæc figura per puncta B, C, ut ex conicis manifeſtum eſt.

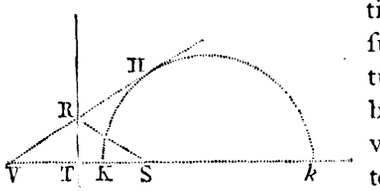
Caſ. 2. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria, quæ rectas duas TR, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula ST, S*t*, & produc eadem ad V, *v*, ut ſint TV, *tv* æquales TS, *t*S. Biſeca V*v* in O, & erige perpendiculum infinitum OH, rectamque VS infinitè productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit VK ad KS, & V*k* ad *k*S, ut eſt trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro K*k* deſcribatur circulus ſecans OH in H ; & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca K*k* in X, & junge HX, HS, HV, H*v*. Quoniam eſt VK ad KS ut V*k* ad *k*S ; & compoſitè ut VK+V*k* ad KS+*k*S ; diviſimque ut V*k*−VK ad *k*S−KS, id eſt, ut 2VX ad 2KX & 2KX ad 2SX, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis, VH, eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam, SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cùm VH, *v*H æquentur axi principali, & VS, *v*S à rectis TR, *tr* perpendiculariter biſecentur, liquet (ex Lem. XV.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. Q. E. F.



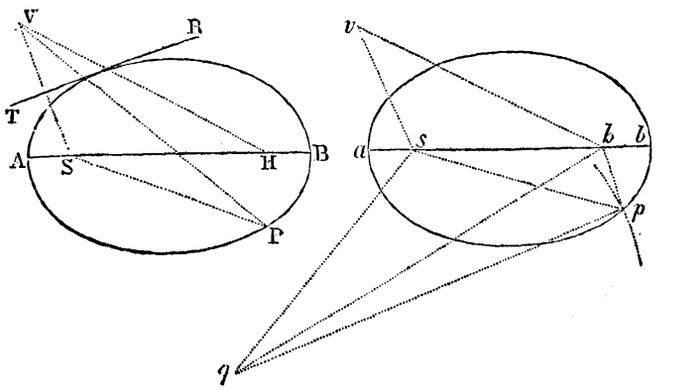
Caſ. 3. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria, quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Junge VR, & rectam VS infinitè productam ſeca in K & *k*, ita ut ſit VK ad SK,

SK, & V*k* ad S*k*, ut Ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum ; circuloque ſuper diametro K*k* deſcripto, ſecetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque VH eſſe ad SH ut VK ad SK, atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribendâ, rectam verò TR, quâ angulus VRS biſecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. Q. E. F.

Liber Primus.



Caſ. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, tranſeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ *apb*, axe principali *ab* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos *bsq*, *sbq* æquales ; centroque *q*, & intervallo, quod ſit ad *ab* ut SP ad VS, deſcribe circulum ſecantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp*, & age SH quæ ſit ad *sb* ut eſt SP ad



sp, quæque angulum PSH angulo *psb*, & angulum VSH angulo *psq* æquales conſtituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB diſtantiam VH æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum.

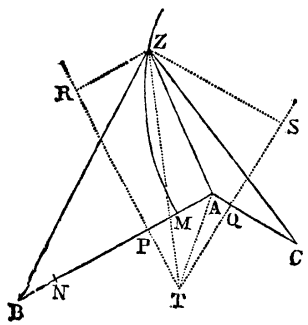
De Motu Corporum

Nam si agatur *st*, quæ sit ad *sp* ut est *sh* ad *sq*, quæque constituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt similia; & propterea *vh* erit ad *pq* ut est *sh* ad *sq*, id est (ob similia triangula VSP, *hsq*) ut est VS ad SP seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro ob similia triangula VSH, *vsh*, est VH ad SH ut *vh* ad *sh*; id est, axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam descripta similis est figuræ *apb*. Transit autem hæc figura per punctum P, eo quòd triangulum PSH simile sit triangulo *psh*; & quia VH æquatur ipsius axi, & VS bisecatur perpendiculariter à rectâ TR, tangit eadem rectam TR. Q. E. F.

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas, quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data A, B, C, & punctum quartum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum AZ, BZ, locabitur punctum Z in Hyperbolâ cujus umbilici sunt A & B, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN. Cape PM ad MA ut est MN ad AB, & erectâ PR perpendiculari ad AB, demissâque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex naturâ hujus hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN ad AB. Simili discursu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt A, C, & principalis axis differentia inter AZ & CZ; ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ, & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque si rectæ RP, SQ concurrant in T, & agantur TZ & TA, figura TRZS dabitur specie; & recta TZ, in quâ punctum Z alicubi locatur,



Liber Primus.

locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta TA, ut & angulus ATZ; &, ob datas rationes ipsarum AZ ac TZ ad ZS, dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum ATZ, cujus vertex est punctum Z. Q. E. I.

Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ, æquantur, ita age rectam TZ, ut bisecet rectam AB; dein quære triangulum ATZ, ut suprà.

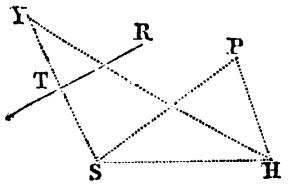
Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C transeuntis. Q. E. I.

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum Tactionum *Apollonii* à *Vietâ* restitutum.

PROP. XXI. PROB. XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus sit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Y, ut sit TY æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes TR, vel plura puncta P, devenietur semper ad lineas totidem YH, vel PH, à dictis punctis Y, vel P, ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque ideo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis unà cum axis longitudine (quæ vel est YH; vel, si trajectoria Ellipsis est, PH+SP; sin Hyperbola, PH−SP) habetur trajectoria. Q. E. I.



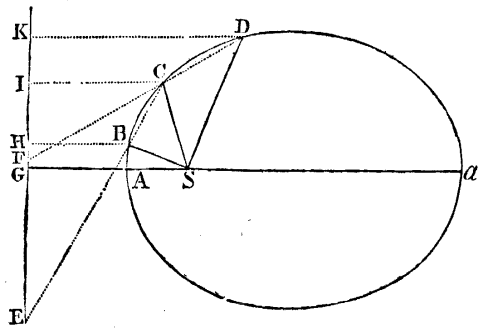
Scholium.

Ubi trajectoria est Hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus

De Motu Corporum

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditiùs. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut ſit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinitè productâ cape GA ad AS, & G*a* ad *a*S, ut eſt HB ad BS; & erit A vertex, & A*a* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quàm AS, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam ſi demittantur ad GF perpendicula CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc eſt, ut SC ad SB; & viciſſim IC ad SC ut HB ad SB, ſive ut GA ad SA. Et ſimili argumento probabitur eſſe KD ad SD in eâdem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in coni ſectione circa umbilicum S ita deſcriptâ, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad ſingula ſectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula à punctis iiſdem ad rectam GF demiſſa in datâ illâ ratione.



Methodo haud multum diſſimili hujus Problematis ſolutionem tradit clariſſimus Geometra *De la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. 8. Prop. XXV.

SECTIO V.

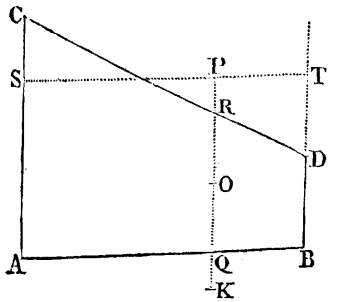
Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

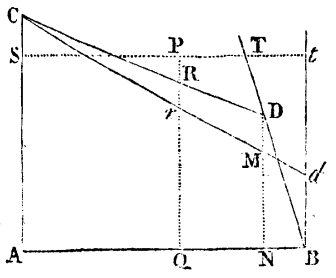
Si à datæ conicæ ſectionis puncto quovis, P, *ad trapezii alicujus*, ABCD, *in conicâ illâ ſectione inſcripti, latera quatuor infinitè producta*, AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ*, PQ, PR, PS, PT, *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera*, PQ × PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita*, PS × PT, *in datâ ratione.*

Liber Primus.

Caſ. 1. Ponamus primò lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC, & PS ac PT lateri AB. Sintque inſuper latera duo ex oppoſitis, puta AC & BD, ſibi invicem parallela. Et recta, quæ biſecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ ſectionis, & biſecabit etiam RQ. Sit O punctum in quo RQ biſecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K, ut ſit OK æqualis PO, & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cùm igitur puncta A, B, P & K ſint ad conicam ſectionem, & PK ſecet AB in dato angulo, erit (per Prop. XVII, XIX, XXI & XXIII. Lib. 3. Conicorum *Apollonii*) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in datâ ratione. Sed QK & PR æquales ſunt; utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ; & inde etiam rectangula PQK & PQ × PR æqualia ſunt; atque ideo rectangulum PQ × PR eſt ad rectangulum AQB, hoc eſt ad rectangulum PS × PT, in datâ ratione. Q. E. D.



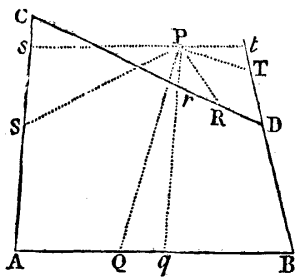
Caſ. 2. Ponamus jam trapezii latera oppoſita AC & BD non eſſe parallela. Age B*d* parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in *t*, tum conicæ ſectioni in *d*. Junge C*d* ſecantem PQ in *r*, & ipſi PQ parallelam age DM ſecantem C*d* in M, & AB in N. Jam ob ſimilia triangula BT*t*, DBN; eſt B*t*, ſeu PQ, ad T*t* ut DN ad NB. Sic & R*r* eſt ad AQ, ſeu PS, ut DM ad AN. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes, & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum PQ in R*r* eſt ad rectangulum PS in T*t*, ita rectangulum NDM eſt ad rectangulum ANB, & (per Caſ. 1.) ita rectangulum PQ in P*r* eſt ad rectangulum PS in P*t*,



De Motu Corporum

ac diviſim ita rectangulum PQ×PR eſt ad rectangulum PS×PT. Q. E. D.

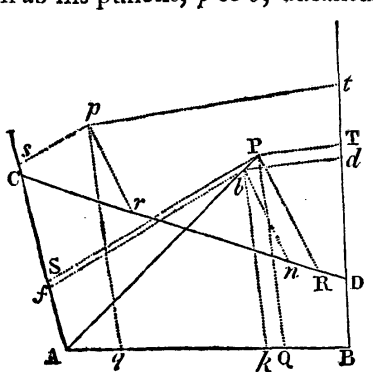
Caſ. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT, non eſſe parallelas lateribus AC, AB, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age P*q*, P*r* parallelas ipſi AC; & P*ſ*, P*t* parallelas ipſi AB; & propter datos angulos triangulorum PQ*q*, PR*r*, PS*ſ*, PT*t*, dabuntur rationes PQ ad P*q*, PR ad P*r*, PS ad P*ſ*, & PT ad P*t*; atque ideo rationes compoſitæ, PQ×PR ad P*q*×P*r*, & PS×PT ad P*ſ*×P*t*. Sed, per ſuperiùs demonſtrata, ratio P*q*×P*r* ad P*ſ*×P*t* data eſt: ergo & ratio PQ×PR ad PS×PT. Q. E. D.



LEMMA XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera trapezii, PQ×PR, *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera,* PS×PT, *in datâ ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam ſectionem circa trapezium deſcriptam.*

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, puta *p*, concipe conicam ſectionem deſcribi: dico punctum P hanc ſemper tangere. Si negas, junge AP ſecantem hanc conicam ſectionem alibi quàm in P, ſi fieri poteſt, puta in *b*. Ergo ſi ab his punctis, *p* & *b*, ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt*, & *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; erit ut *bk*×*bn* ad *bf*×*bd* ita (per Lem. XVII.) *pq*×*pr* ad *ps*×*pt*, & ita (per hypoth.) PQ×PR ad PS×PT. Eſt & propter ſimilitudinem trapeziorum *bkAf*, PQAS, ut *bk* ad *bf* ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correſpondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut PR ad PT. Ergo trapezia æquiangula



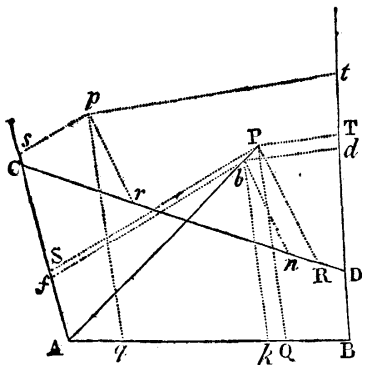
æquiangula D*nbd*, DRPT ſimilia ſunt, & eorum diagonales D*b*, DP propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in interſectionem rectarum AP, DP, ideoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque ſumatur, incidit in aſſignatam conicam ſectionem. Q. E. D. Liber Primus.

Corol. Hinc ſi rectæ tres, PQ, PR, PS, à puncto communi P ad alias totidem poſitione datas rectas, AB, CD, AC, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis, PQ×PR, ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P, à quo rectæ ducuntur, locabitur in ſectione conicâ, quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contrà. Nam coeat linea BD cum lineâ AC, manente poſitione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam lineâ PT cum lineâ PS: & rectangulum PS×PT evadet PS *quad.* rectæque AB, CD, quæ curvam in punctis A & B, C & D ſecabant, jam curvam in punctis illis coeuntibus non ampliùs ſecare poſſunt, ſed tantùm tangent.

Scholium.

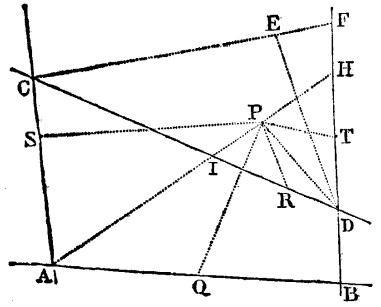
Nomen conicæ ſectionis in hoc Lemmate latè ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea, per verticem coni tranſiens, quam circularis, baſi parallela, includatur. Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, quâ puncta A & D, vel C & B, junguntur, conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera eſt recta, quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus, vel perpendiculariter, vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis, PQ×PR, æquale rectangulo ſub duabus aliis, PS×PT, ſectio conica evadet circulus. Idem fiet, ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis, & rectangulum ſub duabus ductis, PQ×PR, ſit ad rectangulum ſub aliis duabus, PS×PT, ut rectangulum ſub ſinubus angulorum, S, T, in quibus duæ ultimæ, PS, PT, ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum, Q, R, in quibus duæ primæ, PQ, PR, ducuntur. Cæteris in caſibus locus puncti P erit aliqua trium figurarum, quæ vulgò nominantur ſectiones conicæ. Vice autem trapezii ABCD ſubſtituti poteſt

De Motu Corporum



potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuò, instar diagonalium, decussant. Sed & è punctis quatuor A, B, C, D possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.



Invenire punctum P, *à quo si rectæ quatuor*, PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem positione datas rectas*, AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis*, PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus*, PS×PT, *in datâ ratione.*

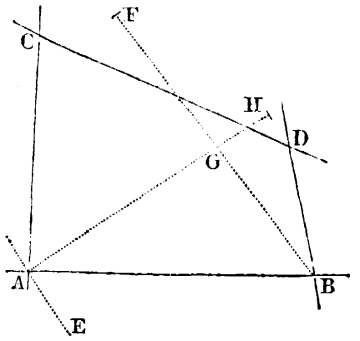
Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo, A, age rectam quamlibet, AH, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD, CD; nimirum BD in H, & CD in I; & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA, & PA ad PS, ideoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc à datâ ratione PQ×PR ad PS×PT, dabitur ratio PR ad PT; & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH, dabitur ratio PI ad PH, atque ideo punctum P. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam ad locum punctorum infinitorum, P, punctum quodvis D tangens duci potest. Nam chorda PD, ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium IP & PH invenietur,

Liber Primus.

invenietur, ut suprà. Ipsi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in eâ ultimâ ratione sectam in E; & DE tangens erit, propterea quòd CE & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc loci tangentem AE, & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem loco in F. Invenietur autem punctum F per Lem. XIX. Bisecta BF in G, & acta indefinita AG erit positio diametri, ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat loco in H, & erit AH diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut BG^2 ad AG×GH. Si AG nusquam occurrit loco, lineâ AH existente infinitâ, locus erit Parabola, & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BG^2}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus Hyperbola erit, ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G: & Ellipsis, ubi G intermedium est; nisi forte angulus AGB rectus sit, & insuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in casu Circulus habebitur.



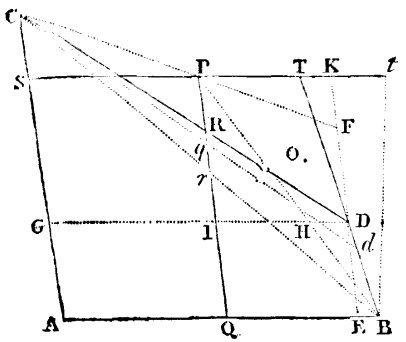
Atque ita Problematis Veterum de *Quatuor Lineis*, ab Euclide incœpti & ab Apollonio continuati, non calculus, sed compositio geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur.

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis, ASPQ, *angulis duobus oppositis*, A & P, *tangit sectionem quamvis conicam in punctis* A & P; & *lateribus unius angulorum illorum infinitè productis*, AQ, AS, *occurrit eidem sectioni conicæ in* B & C; *à punctis autem occursuum*, B & C, *ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum*, D, *agantur rectæ duæ*, BD, CD, *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus*, PS, PQ, *in* T & R: *erunt semper abscissæ laterum partes*, PR & PT, *ad invicem in datâ ratione. Et*

contrà, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in datâ ratione, punctum D *tanget ſectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *tranſeuntem.*

Caſ. 1. Jungantur BP, CP, & à puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipſi AB parallela ſit, & occurrat PB, PQ, CA, in H, I, G; altera DE parallela ſit ipſi AC, & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per Lem. XVII.) rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH in ratione datâ. Sed eſt PQ ad DE (ſeu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & viciſſim PQ ad PT ut DE ad DH. Eſt & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & viciſſim PR ad PS ut DF ad DG; &, conjunctis rationibus, fit rectangulum PQ×PR ad rectangulum PS×PT ut rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. Q. E. D.



Caſ. 2. Quòd ſi PR et PT ponantur in datâ ratione ad invicem, tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum DE×DF ad rectangulum DG×DH in ratione datâ; ideoque punctum D (per Lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta A, B, C, P. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi agatur BC ſecans PQ in *r*, & in PT capiatur P*t* in ratione ad P*r* quam habet PT ad PR: erit B*t* tangens conicæ ſectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut, chordâ BD evaneſcente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB et B*t*.

Corol. 2. Et vice verſâ ſi B*t* ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut P*r* ad P*t*. Et contrà, ſi ſit PR ad PT ut P*r* ad P*t*; convenient BD, CD ad conicæ ſectionis punctum aliquod D.

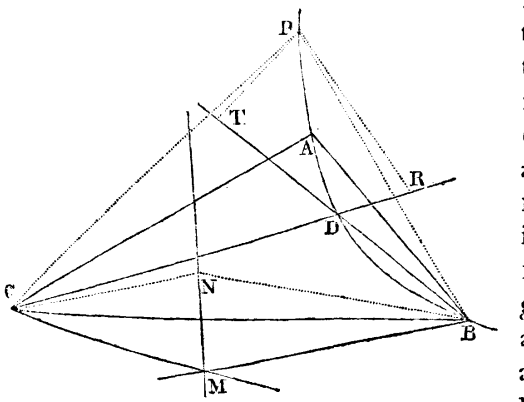
Corol. 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis pluribus

pluribus quàm quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; eaſque ſecet recta BD in punctis D, *d*, & ipſam PQ ſecet recta C*d* in *q*. Ergo PR eſt ad PT ut P*q* ad PT; unde PR & P*q* ſibi invicem æquantur, contra hypotheſin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ, BM, CM, *per data puncta,* B, C, *ceu polos ductæ, concurſu ſuo,* M, *deſcribant tertiam poſitione datam rectam,* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ,* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos,* MBD, MCD, *efficientes ducantur: dico, quòd hæ duæ,* BD, CD, *concurſu ſuo,* D, *deſcribent ſectionem conicam per puncta* B, C *tranſeuntem. Et vice verſâ, ſi rectæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribant ſectionem conicam per puncta data* B, C, A *tranſeuntem, & ſit angulus* DBM *ſemper æqualis angulo dato* ABC, *anguluſque* DCM *ſemper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam poſitione datam.*

Nam in rectâ MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N, incidat punctum mobile D in immotum P. Junge CN, BN, CP, BP, & à puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipſis BD, CD in T & R, & facientes angulum BPT æqualem angulo dato BNM, & angulum CPR æqualem angulo dato CNM.

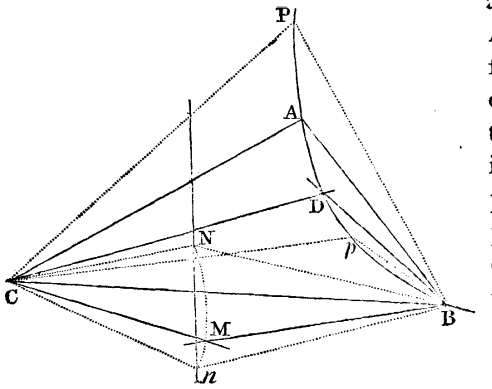


Cùm ergo (ex hypotheſi) æquales ſint anguli MBD, NBP, ut & anguli MCD, NCP; aufer communes NBD & NCD, & reſtabunt æquales NBM & PBT, NCM & PCR: ideoque triangula NBM, PBT ſimilia ſunt, ut & triangula NCM, PCR. Quare PT eſt ad NM ut PB ad NB, & PR ad NM ut PC ad NC. Sunt autem puncta B, C, N, P

De Motu Corporum

N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter ſe; atque ideo (per Lem. XX.) punctum D, perpetuus rectarum mobilium BT & CR concurſus, contingit ſectionem conicam, per puncta B, C, P tranſeuntem. Q. E D.

Et contrà, ſi punctum mobile D contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta B, C, A, & ſit angulus DBM ſemper



æqualis angulo dato ABC, & angulus DCM ſemper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit ſucceſſivè in duo quævis ſectionis puncta immobilia *p*, P, punctum mobile M incidat ſucceſſivè in puncta duo immobilia *n*, N: per eadem *n*, N agatur recta *n*N, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D ſectionem conicam per puncta quinque B, C, A, *p*, P tranſeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum D ſectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, *p*, P, tranſeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lemmat. XX. Igitur punctum M verſari in lineâ curvâ abſurdum eſt. Q. E. D.

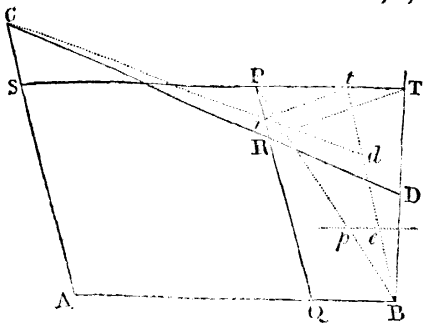
PROP. XXII. PROB. XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

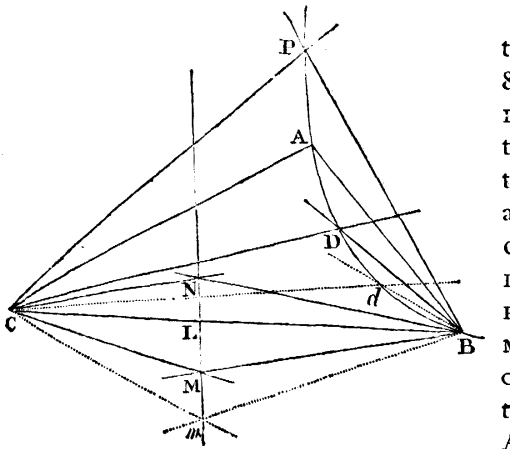
Dentur puncta quinque, A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo, A, ad alia duo quævis, B, C, quæ poli nominentur, age rectas AB, AC; hiſque parallelas TPS, PRQ per punctum quartum P. Deinde à polis duobus B, C age per punctum quintum, D, duas BDT, CRD, noviſſimè ductis, TPS, PRQ, (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in T & R. Denique de rectis PT, PR, actâ rectâ *tr* ipſi

ipſi TR parallelâ, abſcinde quaſvis P*t*, P*r* ipſis PT, PR proportionales; & ſi per earum terminos, *t*, *r*, & polos B, C actæ B*t*, C*r* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoriâ quæſitâ. Nam punctum illud *d* (per Lem. XX.) verſatur in conicâ ſectione per puncta quatuor A, B, C, P tranſeunte; & lineis R*r*, T*t* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto D. Tranſit ergo ſectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. E. D.

Liber Primus.

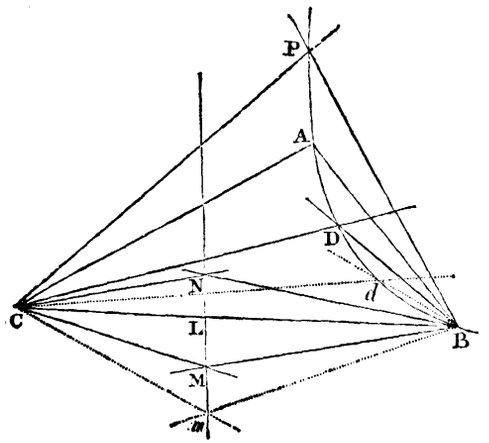


Idem aliter.



E punctis datis junge tria quævis, A, B, C; & circum duo eorum, B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB, applicentur crura BA, CA primò ad punctum D, deinde ad punctum P, & notentur puncta M, N in quibus altera crura BL, CL caſu utroque ſe decuſſant. Agatur recta infinita MN, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos B, C, eâ lege, ut crurum, BL, CL, vel BM, CM, interſectio, quæ jam ſit *m*, incidat ſemper in rectam illam infinitam MN; & crurum BA, CA, vel BD, CD, interſectio, quæ jam ſit *d*, trajectoriam quæſitam PAD*d*B delineabit. Nam punctum *d* (per Lem. XXI.) continget ſectionem conicam per puncta B, C tranſeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta L, M, N, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta A, D, P. Deſcribetur itaque ſectio conica tranſiens per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. E. F.

Corol.



Corol. 1. Hinc recta expeditè duci poteſt, quæ trajectoriam quæſitam in puncto quovis dato B continget. Accedat punctum *d* ad punctum B, & recta B*d* evadet tangens quæſita.

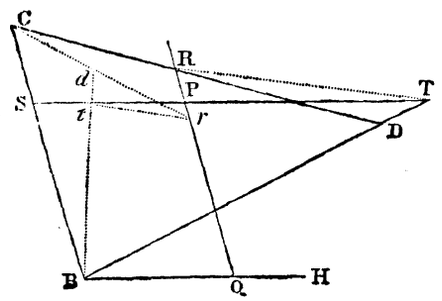
Corol. 2. Unde etiam trajectoriarum centra, diametri, & latera recta inveniri poſſunt, ut in corollario ſecundo Lemmatis XIX.

Scholium.

Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo BP, & in eâ, ſi opus eſt productâ, capiendo B*p* ad BP ut eſt PR ad PT; & per *p* agendo rectam infinitam *pe* ipſi SPT parallelam, & in eâ capiendo ſemper *pe* æqualem P*r*; & agendo rectas B*e*, C*r* concurrentes in *d*. Nam cùm ſint P*r* ad P*t*, PR ad PT, *p*B ad PB, *pe* ad P*t* in eâdem ratione; erunt *pe* & P*r* ſemper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditiſſimè, niſi mavis curvam, ut in conſtructione ſecundâ, deſcribere mechanicè.

PROP. XXIII. PROB. XV.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.

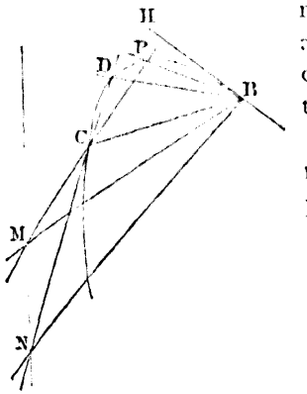


Caſ. 1. Dentur tangens HB, punctum contactûs B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam rectæ BH, & PQ parallelam rectæ BC, comple parallelogrammum BSPQ. Age BD ſecantem SP in T, & CD ſecantem PQ

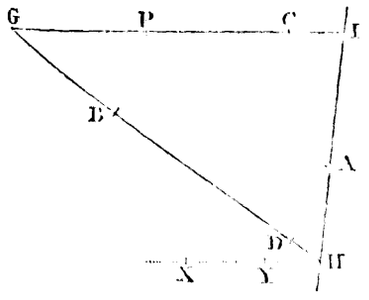
PQ in R. Denique, agendo quamvis *tr* ipſi TR parallelam, de PQ, PS abſcinde P*r*, P*t* ipſis PR, PT proportionales reſpectivè; & actarum C*r*, B*t* concurſus *d* (per Lem. XX.) incidet ſemper in trajectoriam deſcribendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus, CBH, circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus, DC, circa polum C. Notentur puncta, M, N, in quibus anguli crus BC ſecat radium illum, ubi crus alterum, BH, concurrit cum eodem radio in punctis P & D. Deinde & actam infinitam MN concurrant perpetuo radius ille CP, vel CD, & anguli crus BC, & cruris alterius BH concurſus cum radio delineabit trajectoriam quæſitam.



Nam ſi in conſtructionibus Problematis ſuperioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo ſuo ſitu fiet tangens BH; atque ideo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hîc deſcriptis. Delineabit igitur cruris BH concurſus cum radio ſectionem conicam per puncta C, D, P tranſeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B. Q. E. F.



Caſ. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P, extra tangentem HI ſita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G, tangentique occurrentibus in H & I. Secetur tangens in A, ita ut ſit HA ad IA, ut eſt rectangulum ſub mediâ proportionali inter CG & GP & mediâ proportionali inter BH & HD, ad rectangulum ſub mediâ proportionali inter DG & GB & mediâ proportionali inter

De Motu Corporum

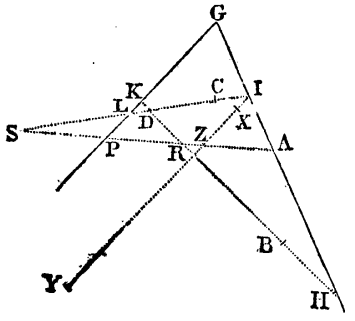
ter PI & IC; & erit A punctum contactûs. Nam ſi rectæ PI parallela HX trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis, X & Y: erit (ex conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA *quad.* ad AI *quad.* in ratione compoſitâ ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD, ſeu rectanguli CGP ad rectangulum DGB, & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC. Invento autem contactûs puncto A, deſcribetur trajectoria ut in caſu primo. Q. E. F.

Capi autem poteſt punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter deſcribi.

PROP. XXIV. PROB. XVI.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per data tria puncta, & rectas duas poſitione datas continget.

Dentur tangentes HI, KL, & puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis, B, D, age rectam infinitam, BD, tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis, C, D, age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita ſeca in R & S, ut ſit HR ad KR ut eſt media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD; & IS ad LS ut eſt media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H, I & L, vel extra eadem; dein age RS ſecantem tangentes in A & P, & erunt A & P puncta contactuum. Nam ſi A & P ſupponantur eſſe puncta contactuum alicubi in tangentibus ſita; & per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutrâ HI ſitum, agatur recta IY tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in X & Y, & in eâ ſumatur IZ media proportionalis inter IX & IY: erit, ex conicis, rectangulum XIY, ſeu IZ *quad.* ad LP *quad.* ut rectangulum CID ad rectangulum CLD, id eſt (per conſtructionem) ut SI *quad.* ad SL *quad.* atque ideo IZ ad LP ut SI ad SL. Jacent ergo puncta



Liber Primus.

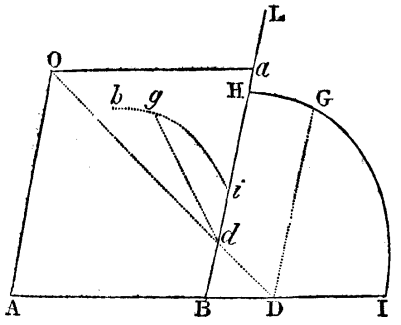
puncta S, P, Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex conicis) rectangulum XIY, ſeu IZ *quad.* ad IA *quad.* ut GP *quad.* ad GA *quad.* ideoque IZ ad IA ut GP ad GA. Jacent ergo puncta P, Z & A in unâ rectâ; idcoque puncta S, P & A ſunt in unâ rectâ. Et eodem argumento probabitur quòd puncta R, P & A ſunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum A & P in rectâ RS. Hiſce autem inventis, trajectoria deſcribetur ut in caſu primo Problematis ſuperioris. Q. E. F.

In hâc Propoſitione, & caſu ſecundo Propoſitionis ſuperioris, conſtructiones eædem ſunt, ſive recta XY trajectoriam ſecet in X & Y, ſive non ſecet; eæque non pendent ab hâc ſectione. Sed demonſtratis conſtructionibus ubi recta illa trajectoriam ſecat, innoteſcunt conſtructiones, ubi non ſecat; iiſque ultrà demonſtrandis, brevitatis gratiâ, non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

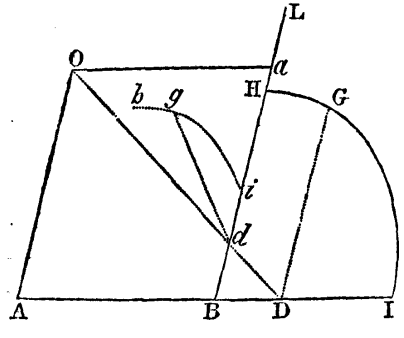
Tranſmutanda ſit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ, AO, BL, tertiam quamvis poſitione datam, AB, ſecantes in A & B; & à figuræ puncto quovis, G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipſi OA parallela. Deinde à puncto aliquo O, in lineâ OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipſi BL occurrens in *d*, & à puncto occurſûs erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum rectâ BL continens, atque eam habens rationem ad *od*, quam habet DG ad OD; & erit *g* punctum in figurâ novâ *hgi* puncto G reſpondens. Eâdem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratiâ nominemus DG ordinatam primam, *dg* ordi-



De Motu Corporum

natam novam; AD abſciſſam primam, *ad* abſciſſam novam; O polum, OD radium abſcindentem, OA radium ordinatum primum, & O*a* (quo parallelogrammum OAB*a* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quòd, ſi punctum G tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum G tangit conicam ſectionem, punctum G tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum G tangit lineam tertii ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quàs puncta G, *g* tangunt. Etenim ut eſt *ad* ad OA ita ſunt *od* ad OD, *dg* ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantùm dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hâc æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova; in quâ abſciſſa nova, *ad*, & ordinata nova, *dg*; ad unicam tantùm dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. Sin AD & DG, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione primâ, aſcendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione ſecundâ. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ, *ad*, *dg*, in æquatione ſecundâ, & AD, DG in prima, aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, *g* tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.



Dico præterea, quòd ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta, eodem modo cum curvâ in figuram novam tranſlata, tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contrà. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt

coeunt in figurâ primâ, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque. Liber Primus.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum, à quibus conflatur, interſectiones transferre, & per eaſdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes, & aliæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit; idque quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ ſunt, quæ nuſquam concurrunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figurâ novâ; ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur ſolutio quæſita.

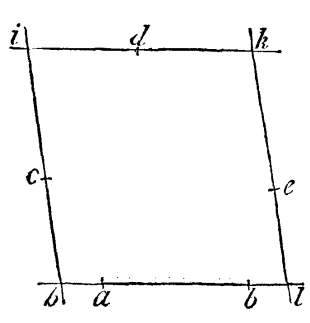
Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione ſolidorum Problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi Hyperbola ſit vel Parabola, in Ellipſin: deinde Ellipſis facile mutatur in Circulum. Rectam item & ſectio conica, in conſtructione planorum Problematum, vertuntur in rectam & circulum.

PROP. XXV. PROB. XVII.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data duo puncta tranſibit, & rectas tres continget poſitione datas.

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum rectâ illâ, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem

De Motu Corporum



invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *bi*, *kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela tranſiens per puncta illa, *a*, *b*, per quæ conica ſectio in hâc figurâ novâ tranſire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *bc* ad latus quadratum rectanguli *abb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd*, ut eſt ſumma rectarum *hi* & *kl* ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta *ik*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *abb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, ſunt *bc* quadratum ad rectangulum *abb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eâdem ratione; & propterea *bc* ad latus quadratum ipſius *abb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd*, & *el* ad latus quadratum ipſius *alb* ſunt in ſubduplicatâ illâ ratione; & compoſitè, in datâ ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *abb*, & recta *ik*, & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur, ex datâ illâ ratione, puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figurâ novâ. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per Prob. XIV.) deſcribetur trajectoria. Q. E. F. Cæterùm perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *b*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *b*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *b*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.

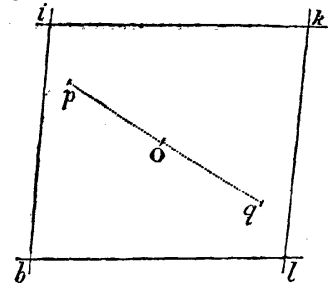
PROP. XXVI. PROB. XVIII.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per punctum datum, & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita; &, eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, tranſmutetur

figura (per Lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent

Liber Primus.

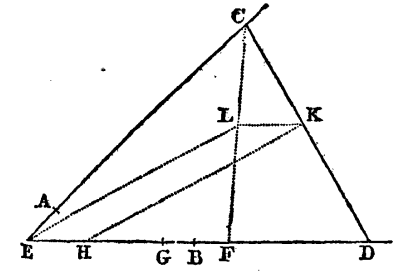


parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl*, continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum, in hâc novâ figurâ, puncto in figurâ primâ dato reſpondens. Per figuræ centrum o agatur *pq*, & exiſtente o*q* æquali o*p*, erit *q* punctum alterum, per quod ſectio conica in hâc figurâ novâ tranſire debet. Per Lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria deſcribenda eſt. Per eadem vero deſcribi poteſt trajectoria illa per Problema XVII. Q. E. F.

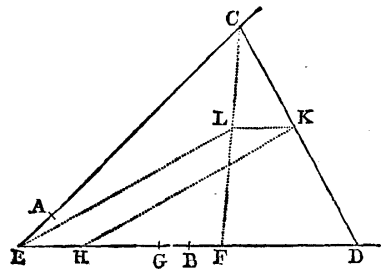
LEMMA XXII.

Si rectæ duæ poſitione datæ, AC, BD, *ad data puncta*, A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, ſecetur in ratione datâ in* K: *dico, quòd punctum* K *locabitur in rectâ poſitione datâ.*

Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut eſt BD ad AC, ſitque FD ſemper æqualis datæ EG; & erit ex conſtructione EC ad GD, hoc eſt, ad EF, ut AC ad BD, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur ſpecie triangulum EFC. Secetur CF in L, ut ſit CL ad CF in ratione CK ad CK; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam ſpecie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL poſitione datâ. Junge LK, & ſimilia erunt triangula CLK, CFD; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD, dabitur LK. Huic æqualis capiatur EH, & erit



De Motu Corporum



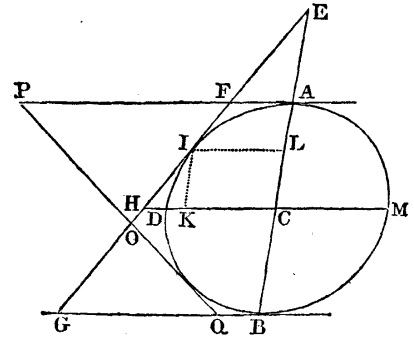
erit ſemper ELKH parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere poſitione dato HK. Q. E. D.

Corol. Ob datam ſpecie figuram EFLC, rectæ tres EF, EL & EC, id eſt, GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni ſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico, quòd ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto AF, GB parallelæ duæ coni ſectionem ADB tangentes in A & B; EF recta tertia coni ſectionem tangens in I, & occurrens prioribus tangentibus in F & G; ſitque CD ſemidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quòd AF, CD, BG ſunt continuè proportionales.



Nam ſi diametri conjugatæ AB, DM tangenti FG occurrant in E & H, ſeque mutuò ſecent in C, & compleatur parallelogrammum HKCL; erit, ex naturâ ſectionum conicarum, ut EC ad CA ita CA ad CL, & ita diviſim EC−CA ad CA−CL, ſeu EA ad AL, & compoſitè EA ad EA+AL, ſeu EL, ut EC ad EC+CA, ſeu EB; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG, AF ad LI ut CH ad BG. Eſt itidem, ex naturâ ſectionum conicarum, LI ſeu CK ad CD ut CD ad CH; atque ideo ex æquo perturbatè AF ad CD ut CD ad BG. Q. E. D.

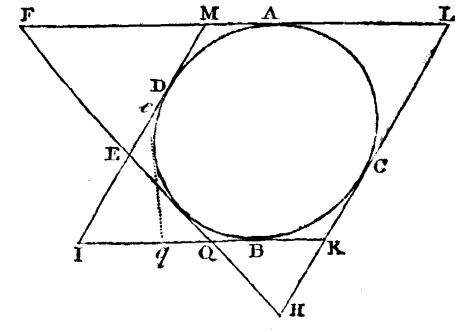
Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis AF, BG occurrant in F & G, P & Q, ſeque mutuò ſecent in O; erit ex æquo perturbatè AF & BQ ut AP ad BG, & diviſim ut FP ad GQ, atque ideo ut FO ad OG.

Liber Primus.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ, PG, FQ, per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum, A, B, tranſeuntem.

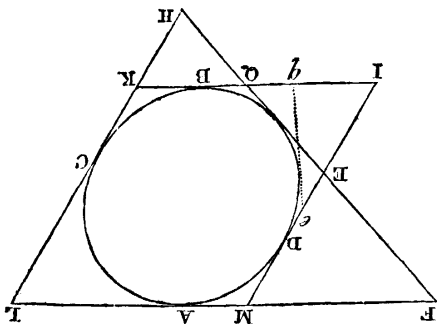
LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinitè producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico, quòd abſciſſa alterutra ſit ad latus illud à quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini, inter punctum contactûs & latus tertium, eſt ad abſciſſarum alteram.



Tangant parallelogrammi MLIK latera quatuor, ML, IK, KL, MI, ſectionem conicam in A, B, C, D; & ſecet tangens quinta, FQ, hæc latera in F, Q, H & E; ſumantur autem laterum MI, KI abſciſſæ ME, KQ, vel laterum KL, ML abſciſſæ KH, MF: dico, quòd ſit ME ad MI ut BK ad KQ; & KH ad KL ut AM ad MF. Nam per corollarium primum Lemmatis ſuperioris eſt ME ad EI ut AM, ſeu BK, ad BQ; & componendo, ME ad MI ut BK ad KQ. Q. E. D. Item KH ad HL ut BK, ſeu AM, ad AF; & dividendo, KH ad KL ut AM ad MF. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogrammum IKLM, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum KQ×ME, ut & huic æquale rectangulum KH×MF. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum KQH, MFE.



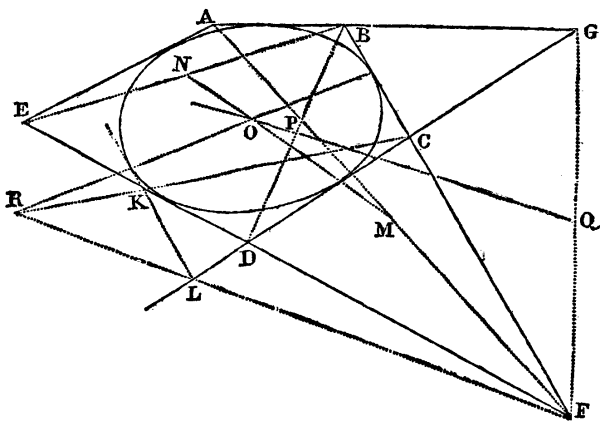
Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens, *eq*, tangentibus KI, MI occurrens in *q* & *e*; rectangulum KQ × ME æquabitur rectangulo K*q* × M*e*; eritque KQ ad M*e* ut K*q* ad ME, & diviſim ut Q*q* ad E*e*.

Corol. 3. Unde etiam ſi E*q*, *e*Q jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cùm ſit Q*q* ad E*e* ut KQ ad M*e*, tranſibit eadem recta per medium omnium E*q*, *e*Q, MK (per Lem. XXIII.) & medium rectæ MK eſt centrum ſectionis.

PROP. XXVII. PROB. XIX.

Trajectoriam deſcribere, quæ rectas quinque poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ, ABFE, diagonales, AF, BE, biſeca in M & N, & (per Corol. 3. Lem. XXV.) recta MN, per



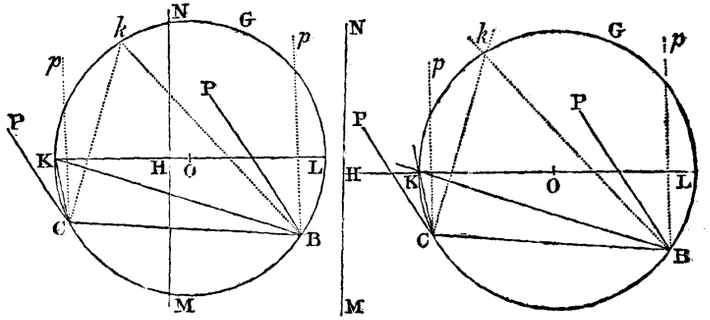
puncta

puncta biſectionum acta, tranſibit per centrum trajectoriæ. Ruriſus figuræ quadrilateræ, BGDF, ſub aliis quibuſvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF biſeca in P & Q: & recta PQ, per puncta biſectionum acta, tranſibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concurſu biſecantium. Sit illud O. Tangenti cuivis, BC, parallelam age KL, ad eam diſtantiam, ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas, GCD, FDE, in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concurſus, C & K, F & L, age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta ſecabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per conſtruct. Prob. XIV. trajectoriam deſcribere. Q. E. F.

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel aſymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinitè diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactûs. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactûs abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones Problematum præcedentium vertentur in conſtructiones ubi Aſymptotos datur.

Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hâc methodo. In conſtructione & figurâ Lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura, BP, CP, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſunt ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, C in figurâ illâ. Interea verò deſcribant altera angulorum illorum crura, CN, BN, concurſu ſuo K vel *k*, circulum BGKC. Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam MN, ad quam altera illa crura, CN, BN, interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L. Et ubi



crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K, quod regulæ propius eſt, crura prima, CP, BP, parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium verò quadrata ſunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile eſt trajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles, PCK, PBK; his autem datis deſcribi poteſt circulus BGKC. Tum, ob datam ſpecie trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, ideoque ipſa OH. Centro O, & intervallo OH, deſcribe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & tranſit per concurſum crurum CK, BK, ubi crura prima, CP, BP, concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN cujus ope trajectoria deſcribetur. Unde etiam viciſſim trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in datâ quâvis ſectione conicâ inſcribi poteſt.

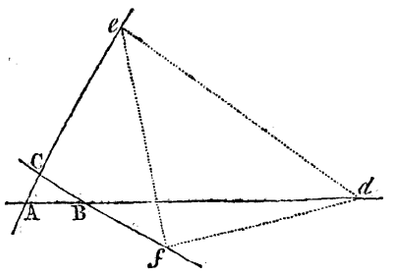
Sunt & alia Lemmata, quorum ope trajectoriæ ſpecie datæ, datis punctis & tangentibus, deſcribi poſſunt. Ejus generis eſt quòd, ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam coni ſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam coni ſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

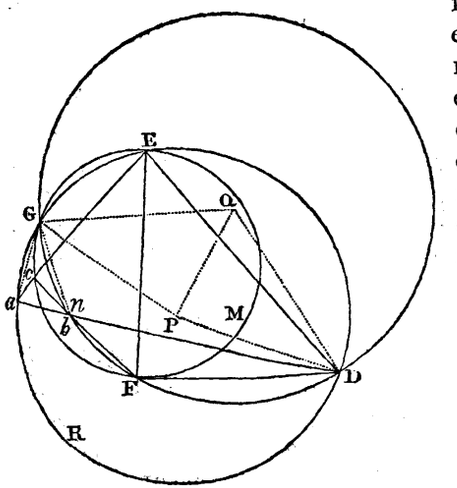
LEMMA

LEMMA XXVI.

Trianguli, ſpecie & magnitudine dati, tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

Dantur poſitione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF deſcribe tria circulorum ſegmenta DRE, DGF, EMF; quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales reſpectivè. Dèſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum DE, DF, EF, ut literæ D, R, E, D eodem ordine cum literis B, A, C, B; literæ D, G, F, D eodem cum literis A, B, C, A; & literæ E, M, F, E eodem cum literis A, C, B, A in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuò in G, ſintque centra eorum P & Q. Junctis GP, PQ, cape G*a* ad AB ut eſt GP ad PQ; & centro G, intervallo G*a*, deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum, DGE, in *a*. Jungatur tum *a*D ſecans circulum ſecundum, DFG, in *b*, tum *a*E ſecans circulum tertium, EMF, in *c*. Et jam licet figuram ABC*def* conſtituere

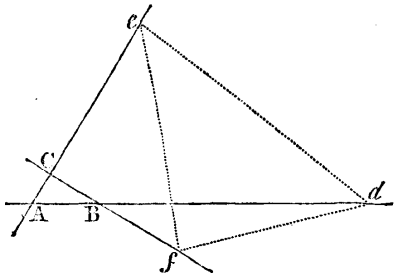


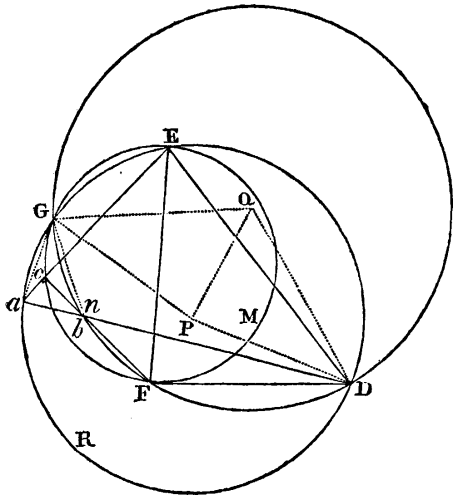


De Motu Corporum

ſtituere ſimilem & æqualem figuræ *abc*DEF. Quo facto perficitur Problema.

Agatur enim FC ipſi *a*D occurrens in *n*, & jungantur *a*G, *b*G, QG, QD, PD. Ex conſtructione eſt angulus E*a*D æqualis angulo CAB, & angulus *ac*F æqualis angulo ACB, ideoque triangulum *anc* triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus *anc*, ſeu F*n*D, angulo ABC, ideoque angulo F*b*D æqualis eſt; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus GPQ, qui dimidius eſt anguli ad centrum GPD, æqualis eſt angulo ad circumferentiam G*a*D; & angulus GQP, qui dimidius eſt anguli ad centrum GQD, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam G*b*D, ideoque æqualis angulo G*ba*; ſuntque ideo triangula GPQ, G*ab* ſimilia; & G*a* eſt ad *ab* ut GP ad PQ; id eſt (ex conſtructione) ut G*a* ad AB. Æquantur itaque *ab* & AB; & propterea triangula *abc*, ABC, quæ modò ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde, cùm tangant inſuper trianguli DEF anguli, D, E, F trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc*, reſpectivè, compleri poteſt figura ABC*def* figuræ *abc*DEF ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur Problema. Q. E. F.





Corol. Hinc recta duci poteſt, cujus partes, longitudine datæ, rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum

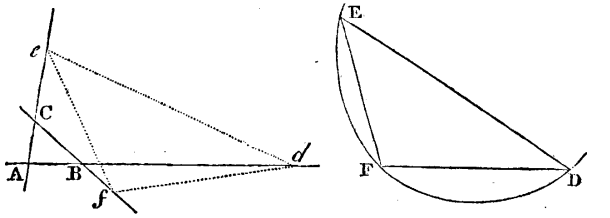
rectum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data, DE, rectis poſitione datis AB, AC, & pars data, DF, rectis poſitione datis AB, BC, interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

Liber Primus.

PROP. XXVIII. PROB. XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus, poſitione datis, interjacebunt.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ curvæ DEF, quæque à rectis tribus, AB, AC, BC, poſitione datis, in partes datis hujus partibus, DE & EF, ſimiles & æquales ſecabitur.



Age rectas DE, EF, DF, & trianguli hujus, DEF, pone angulos D, E, F ad rectas illas poſitione datas (per Lem. XXVI.) dein circa triangulum deſcribe trajectoriam curvæ DEF ſimilem & æqualem. Q. E. F.

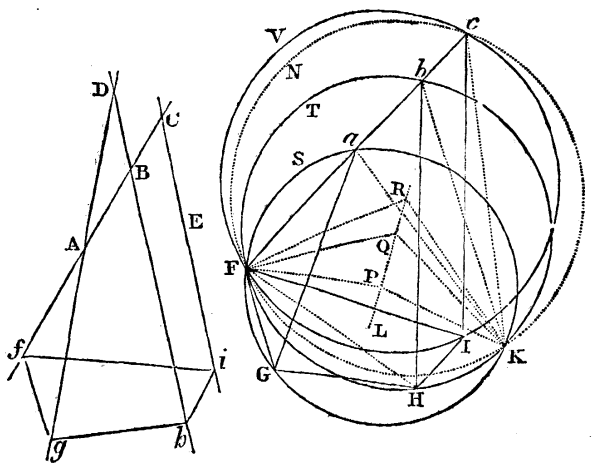
LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor, ABC, AD, BD, CE; quarum prima ſecet ſecundam in A, tertiam in B, & quartam in C: & deſcribendum ſit trapezium *fghi*, quod ſit trapezio FGHI ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato F æqualis, tangat rectam ABC; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas AD, BD, CE reſpectivè. Jungatur FH, & ſuper FG, FH, FI deſcribantur totidem circulorum ſegmenta FSG, FTH,

De Motu Corporum

FVI; quorum primum FSG capiat angulum æqualem angulo BAD; ſecundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD; ac tertium



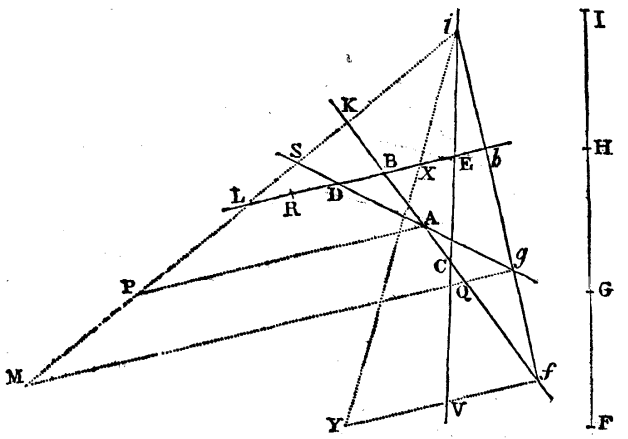
FVI capiat angulum æqualem angulo ACE. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI, ut literarum F, S, G, F idem ſit ordo circularis, qui literarum B, A, D, B; utque literæ F, T, H, F eodem ordine cum literis C, B, D, C; & literæ F, V, I, F eodem cum literis A, C, E, A in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque P centrum circuli primi FSG, & Q centrum ſecundi FTH. Jungatur & utrinque producatur PQ, & in eâ capiatur QR, in eâ ratione ad PQ, quam habet BC ad AB. Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q, ut literarum P, Q, R idem ſit ordo atque literarum A, B, C: centroque, R & intervallo RF, deſcribatur circulus quartus, FN*c*, ſecans circulum tertium, FVI, in *c*. Jungatur F*c* ſecans circulum primum in *a*, & ſecundum in *b*. Agantur *a*G, *b*H, *c*I, & figuræ *abc*FGHI ſimilis conſtitui poteſt figura ABC*fghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipſum, quod conſtituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi, FSG, FTH, ſe mutuò in K. Jungantur PK, QK, RK, *a*K, *b*K, *c*K, & producatur QP ad L. Anguli ad circumferentias, F*a*K, F*b*K, F*c*K, ſunt ſemiſſes angulorum FPK, FQK, FRK ad centra; ideoque angulorum illorum dimidiis, LPK, LQK,

LQK, LRK, æquales. Eſt ergo figura PQRK figuræ *abc*K æquiangula & ſimilis; & propterea *ab* eſt ad *bc* ut PQ ad QR, id eſt, ut AB ad BC. Angulis inſuper F*a*G, F*b*H, F*c*I æquantur *f*A*g*, *f*B*b*, *f*C*i*, per conſtructionem. Ergo figuræ *abc*FGHI figura ſimilis ABC*fghi* compleri poteſt. Quo facto trapezium *fghi* conſtituetur ſimile trapezio FGHI, & angulis ſuis, *f*, *g*, *b*, *i*, tanget rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F. Liber Primus.

Corol. Hinc recta duci poteſt, cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI uſque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant; & in hoc caſu, conſtruendo Problema, ducetur recta *fghi*, cujus partes, *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor poſitione datis, AB & AD, AD & BD, BD & CE, interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem verò ſic fit expeditiùs.

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut ſit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in *i*.



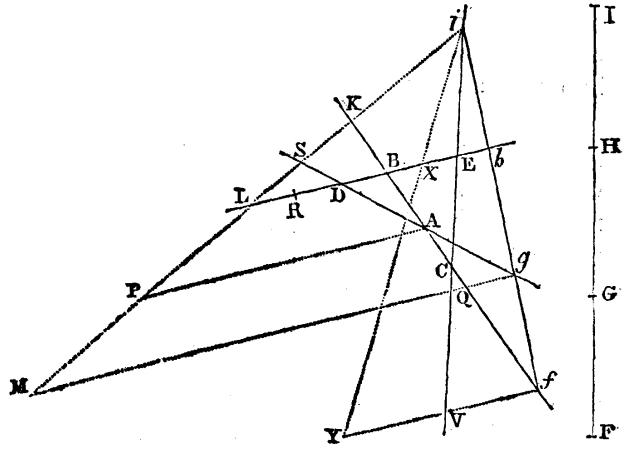
Producatur *i*L ad M, ut ſit LM ad *i*L ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipſi LB parallela, rectæque AD occurrens in *g*, tum *gi* ſecans AB, BD in *f*, *b*. Dico factum.

Secet enim M*g* rectam AB in Q; & AD, rectam KL in s; & a-

De Motu Corporum

gatur AP, quæ ſit ipſi BD parallela, & occurrat *i*L in P; & erunt *g*M ad L*b* (*gi* ad *hi*, M*i* ad L*i*, GI ad HI, AK ad BK) & AP ad BL in eâdem ratione. Secetur DL in R, ut ſit DL ad RL in eâdem illâ ratione; &, ob proportionales *g*S ad *g*M, AS ad AP, & DS ad DL, erit, ex æquo, ut *g*S ad L*b* ita AS ad BL, & DS ad RL; & mixtim, BL−RL ad L*b*−BL ut AS−DS ad *g*S−AS. Id eſt, BR ad B*b* ut AD ad A*g*, ideoque ut BD ad *g*Q. Et viciſſim, BR ad BD ut B*b* ad *g*Q, ſeu *fb* ad *fg*. Sed, ex conſtructione, linea BL eâdem ratione ſecta fuit in D & R, atque linea FI in G & H: ideoque eſt BR ad BD ut FH ad FG. Ergo *fb* eſt ad *fg* ut FH ad FG. Cùm igitur ſit etiam *gi* ad *hi* ut M*i* ad L*i*, id eſt, ut GI ad HI, patet lineas FI, *fi*, in *g* & *b*, G & H, ſimiliter ſectas eſſe. Q. E. F.

In conſtructione Corollarii hujus, poſtquam ducitur LK ſecans



CE in *i*, producere licet *i*E ad V, ut ſit EV ad E*i* ut FH ad HI, & agere V*f* parallelam ipſi BD. Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo IH, deſcribatur circulus ſecans BD in X, & producatur *i*X ad Y, ut ſit *i*Y æqualis IF, & agatur Y*f* ipſi BD parallela.

Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitàrunt.

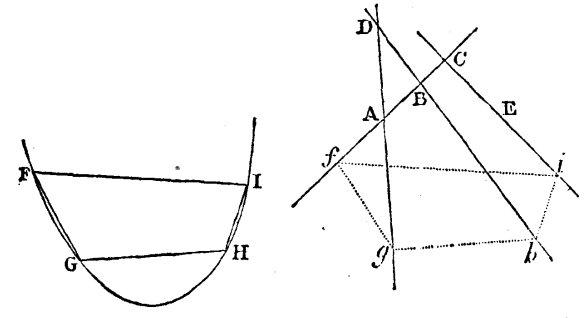
PROP.

Liber Primus.

PROP. XXIX. PROB. XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ à rectis quatuor, poſitione datis, in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ FGHI, & cujus partes, illius partibus FG, GH, HI ſimiles & proportionales, rectis AB & BD, AD & BD, BD & CE poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis



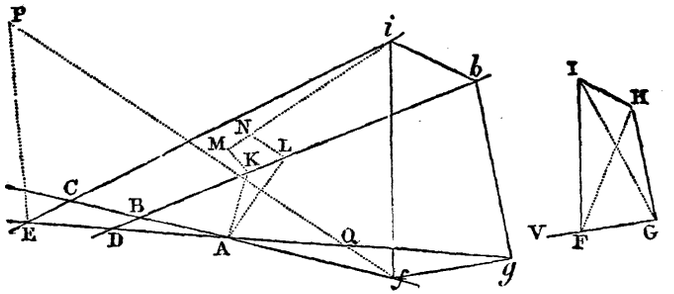
FG, GH, HI, FI, deſcribatur (per Lem. XXVII.) Trapezium *fghi* quod ſit trapezio FGHI ſimile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas AB, AD, BD, CE, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium deſcribatur trajectoria curvæ lineæ FGHI conſimilis.

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis FG, GH, HI, FI, produc GF ad V, jungeque FH, IG, & angulis FGH, VFH fac angulos CAK, DAL æquales. Concurrant AK, AL cum rectâ BD in K & L, & inde agantur KM, LN; quarum KM conſtituat angulum AKM æqualem angulo GHI, ſitque ad AK ut eſt HI ad GH; & LN conſtituat angulum ALN æqualem angulo FHI, ſitque ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, AL, LN ad eas partes linearum AD, AK, AL, ut literæ C,A,K,M,C; A,L,K,A; D,A,L,N,D; eodem ordine cum literis F,G,H,I,F in orbem redeant; & acta MN occurrat rectæ CE in *i*. Fac angulum *i*EP æqualem angulo IGF; ſitque PE ad E*i* ut FG ad GI; & per P agatur PQ*f*, quæ cum rectâ ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG, rectæque AB occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem PE ad PQ, ad eas partes linearum CE, PE, ut literarum P,E,*i*,P & P,E,Q,P idem ſit ordo circularis qui literarum F,G,H,I,F; & ſi ſuper lineâ *fi*, eodem

De Motu Corporum

quoque literarum ordine, conſtituatur trapezium, *fghi*, trapezio



FGHI ſimile, & circumſcribatur trajectoria ſpecie data, ſolvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROP. XXX. PROB. XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Sit S umbilicus, & A vertex principalis Parabolæ, ſitque 4AS × M æquale

(a) A puncto H in PO deducatur ad perpendiculum recta HR. Propter angulum ad G rectum, rectaſque GA, GS inter ſe æquales, junctæ HA, HS inter ſe æquales erunt. Punctum igitur A eſt ad circulum centro H radio HS ſcriptum, ad quem eſt etiam punctum parabolæ P. Duæ igitur HA, HP inter ſe æquales; et quadrata ex HG, AG ſimul ſumpta, cùm propter angulum ad G rectum quadrato ex HA æqualia ſint, quadrato quoque ex HP erunt æqualia. Sed propter angulum ad R rectum, quadratum ex HP duobus quadratis ex HR, RP ſimul ſumptis æquale eſt. Et cùm propter figuram HROG parallelogrammam, æquales inter ſe ſint illæ HR, GO, necnon illæ HG, RO, erit $HR^2 = GO^2 = \overline{AO - AG}^2$, et $PR^2 = \overline{PO - GH}^2$. Quare HP^2, ſive $AG^2 + GH^2 = \overline{AO - AG}^2 + \overline{PO - GH}^2$. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier.)*

(b) 2AG × AO = SA × AO; nempe cùm GA ipſius SA ſemiſſis ſit. Et SA × AO = $\frac{1}{4}PO^2$, propter parabolam. Quare $AO^2 + PO^2 - 2GAO = AO^2 + PO^2 - \frac{1}{4}PO^2 = AO^2 + \frac{3}{4}PO^2$. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier, et in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

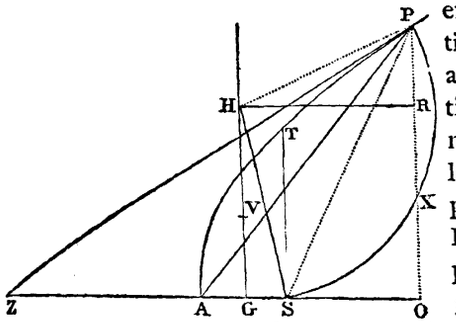
(c) $\frac{4AS - 3SO}{6} \times PO = \frac{2}{3}AO \times OP - \frac{1}{2}SO \times OP$. Sed ſpatium $\frac{2}{3}AO \times OP$ æquale eſt areæ parabolicæ APO. (Hamilton. Conic. Lib. III. 13.) & $\frac{1}{2}SO \times OP$ æquale eſt triangulo SOP. Quare $\frac{2}{3}AO \times OP - \frac{1}{2}SO \times OP$ æquale erit areæ parabolicæ APS. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier, et in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

Verùm tota hæc demonſtratio magis geometricè ad hunc ferè modum concinnari poteſt.

CAPIATUR

æquale areæ parabolicæ abſcindendæ APS, quæ, radio SP, vel poſt

Liber Primus.



exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus ad verticem deſcribenda eſt. Innoteſcit quantitas areæ illius abſcindendæ ex tempore ipſi proportionali. Biſeca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale 3M; & circulus centro H, intervallo HS, deſcriptus ſecabit Parabolam in loco quæſito P. Nam, demiſſâ ad axem perpendiculari PO, & ductâ PH, eſt $AGq + GHq$ $(= HPq = \overline{AO - AG} : quad. + \overline{PO - GH} : quad.$ (a) $= AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{1}{4}POq$ (b). Pro AOq ſcribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad 3PO, ductiſque in 2AS, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS$ $(= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ APO − SPO) (c) = areæ APS. Sed GH erat 3M, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ eſt $4AS \times M$. Ergo area abſciſſa APS æqualis eſt abſcindendæ $4AS \times M$. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc GH eſt ad AS, ut tempus, quo corpus deſcripſit arcum AP, ad tempus, quo corpus deſcripſit arcum inter verticem A &

CAPIATUR AZ tripla ipſius AS; jungantur AP, ZP. Recta autem PO circulo, centro H, radio HS ſcripto, iterum in puncto X occurrat. Jam cùm puncta quatuor A, S, P, X ad circulum illum ſint, idcirco rectangula POX, AOS erunt inter ſe æqualia. (El. III. 36.) Quare ſi rectangulum OAS utrique æqualium addatur, duo POX, OAS ſimul ſumpta duobus AOS, OAS ſimul ſumptis, hoc eſt (per El. II. 2.) quadrato ex AO, æqualia erunt. Addatur utrinque rectangulum $PO \times XR$: erunt tria illa, POX, $PO \times XR$, OAS, ſimul ſumpta duobus, quadrato ex AO et rectangulo $PO \times XR$, ſimul ſumptis æqualia. Sed è tribus illis POX, $PO \times XR$, OAS, duo quidem, POX, $PO \times XR$, rectangulum POR conficiunt. (El. II. 2.) Quare duo POR, OAS ſimul ſumpta, duobus, quadrato ex AO rectangulo $PO \times XR$, erunt æqualia. Sive, cùm rectæ XR, PR inter ſe æquales ſint (El. III. 3.) duo POR, OAS, duobus, quadrato ex AO rectangulo $PO \times PR$, æqualia erunt. Additoque utrinque rectangulo POR, fiet duplum rectanguli POR cum rectangulo OAS, quadratis ex AO, PO ſimul ſumptis æquale. Hoc eſt, cùm recta OR ipſi GH ſit æqualis, et rectangulum OAS (propter parabolam) æquale ſit parti quartæ quadrati ex PO, erit rectangulum $2GH \times PO$ cum parte quartâ quadrati ex PO, æquale quadratis duobus ex AO, PO ſimul ſumptis. Ablatâque utrinque parte quartâ quadrati ex PO, erit $GH \times 2PO = AO^2 + \frac{1}{4}PO^2$. Sed $\frac{3}{4}PO^2 = OA \times 3AS$ (propter parabolam) $= OA \times AZ$. Quare $AO^2 + \frac{3}{4}PO^2 = AO^2 + OA \times AZ = ZO \times OA$. Erit igitur $GH \times 2PO = ZO \times OA$. Quapropter $GH \times 2PO : GH \times 4AS = ZO \times OA : GH \times 4AS$. (El. V. 7.) Sed $GH \times 2PO : GH \times 4AS = 2PO : 4AS$ (El. VI. 1.) $= PO : 2AS$ (El. V. 15.) $= AO : \frac{1}{2}PO$ (propter parabolam). Quare $ZO \times OA : GH \times 4AS = AO : \frac{1}{2}PO$. (El. V. 11.) Sed ut AO ad $\frac{1}{2}PO$ ita eſt quadratum ex AO ad triangulum POA. (El. I. 41. & VI. 1.) Quare $ZO \times OA$ eſt ad $GH \times 4AS$ ut AO^2 ad triangulum POA. Et permutando ZO ad AO ut $GH \times 4AS$ ad triangulum POA. Sed ut ZO ad AO ita eſt triangulum POZ ad triangulum POA.

De Motu Corporum

A & perpendiculum ad axem ab umbilico s erectum (d).

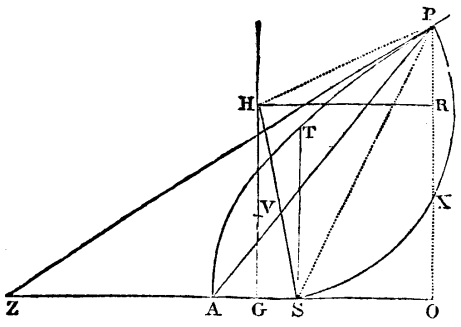
Corol. 2. Et circulo ASP per corpus motum P perpetuò transeunte, velocitas puncti H eſt ad velocitatem, quam corpus habuit in vertice A, ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione eſt linea GH ad lineam rectam, quam corpus, tempore motûs ſui ab A ad P, eâ cum velocitate quam habuit in vertice A, deſcribere poſſet (e).

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri poteſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H (f).

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis, cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod, ceu polum, revolvatur perpetuò linea recta, uniformi cum motu, & interea in rectâ illâ exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper eâ cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis, à rectâ illâ abſciſſæ, portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia



POA. (El. VI. 1.) Triangulum igitur POZ et rectangulum GH × 4AS ad triangulum POA eandem utrumque rationem habet. Triangulum igitur ZOP rectangulo GH × 4AS æquale erit. Et cùm recta M pars tertia ſit rectæ GH, ac proinde rectangulum M × 4AS triens rectanguli GH × 4AS, idcirco pars tertia trianguli ZOP rectangulo M × 4AS æquale erit. Jam verò triangulum ZOP è duobus componitur, PAZ, PAO. Horum alterius quidem, PAZ, triangulum PSA pars tertia eſt (nempe per El. VI. 1. cùm recta AZ facta eſt tripla ipſius AS). Alterius autem, PAO, ſegmentum parabolicum ATP pars tertia eſt. (Hamilton. Conic. Lib. III. 13.) Ex triangulo igitur PSA cum ſegmento parabolico ATP conſit pars tertia trianguli POZ. Sed ex eodem triangulo PSA cum ſegmento parabolico AFP conſit ſector parabolicus SAP. Sector igitur ille trianguli POZ parti tertiæ eſt æqualis, hoc eſt rectangulo M × 4AS. Q. E. D.

(d) RECTA ab umbilico s ad perpendiculum cum axe educta Parabolæ in T occurrat, et capiatur recta GV tripla ejus, quæ cum 4AS rectangulum claudat ſpatio ATS æquale. Erit $\frac{1}{3}$GV × AS = ATS. Sed ATPS = $\frac{2}{3}$GH × AS. Quare ATPS erit ad ATS, hoc eſt, tempus quo conficitur arcus AP ad tempus quo conficitur arcus AT, ut GH ad GV. Præterea cùm area ATS ſit $\frac{2}{3}$AS × ST, et ST æqualis ſit duplæ AS, erit ATS = $\frac{4}{3}$AS^2. Sed ATS = $\frac{1}{3}$GV × AS. Quare AS^2 = GV × AS. Ac proinde GV = AS. Tempus igitur quo conficitur arcus AP erit ad tempus quo conficitur AT ut GH ad AS. Q. E. D. *(Eadem fere Le Sœur & Jacquier.)*

(e) NASCENTE arcu AP, ſector parabolicus ASP triangulo rectilineo ASP ſit primò æqualis, ſive dimidio rectanguli AS × PO. Quare cùm rectangulum $\frac{2}{3}$GH × AS ſectori AEP ſemper ſit æqualis, erit primò, congruentibus punctis P, A, $\frac{2}{3}$GH × AS = $\frac{1}{2}$PO × AS. Ac propterea $\frac{2}{3}$GH = $\frac{1}{2}$PO, et 8GH = 3PO. Quare GH : PO = 3 : 8; primò ſcilicet, arcu AP naſcente. Sed cùm recta PO arcuſque AP naſcentes ſint primò inter ſe æquales (Lem. VII.) ratio prima naſcentis rectæ GH, motu puncti H ſcriptæ, ad naſcentem PO, ea erit quam celeritas puncti H (ſaltem quâ motum ſuum incipiet) habebit ad velocitatem corporis, per parabolam delati, in ipſo vertice A. Sed æquabilis eſt motus puncti H, propter æquabilem aream ASP deſcriptionem, cujus utique rationem recta GH, creſcendo, conſtanter ſervat. Velocitas igitur æquabilis puncti H ad celeritatem corporis in parabolæ vertice A, rationem habebit eam quam 3 ad 8. Q. E. D.

(f) Propter æquales HP, HA, punctum H erit ad rectam à medio puncto rectæ AP ad perpendiculum eductam.

tia puncti à polo, quæ huic areæ proportionalis eſt; ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum ſpirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinitè producta ſpiralem ſecat in punctis numero infinitis; & æquatio, quâ interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, ideoque aſcendit ad tot dimenſiones, quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuò ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, quâ interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri, niſi per æquationem quatuor dimenſionum, quâ omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio; quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eò quòd ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum; & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſariò fieret, reducere liceret Problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida ad ſolida. Loquor hic de curvis

LIBER PRIMUS.

poteſtate

De Motu Corporum

potestate irreducibilibus. Nam si æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ potestatis, per æquationes trium; quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ potestatis, per æquationes dimensionum quatuor; & sic in infinitum. Ergo rectæ & spiralis intersectiones numero infinitæ, cùm curva hæc sit simplex, & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus intersectiones omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam si à polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud, unà cum secante, revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuò, quæque prima erat, seu proxima, post unam revolutionem secunda erit; post duas, tertia; & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio, nisi pro mutatâ magnitudine quantitatum, per quas positio secantis determinatur. Unde cùm quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam; ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis, cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describatur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest, quòd longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De ovalibus autem hîc loquor, quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile finitam;

(g) Sicut ante Newtonum Wallisius fecerat. Nempe ejus est constructio Problematis Keplerian

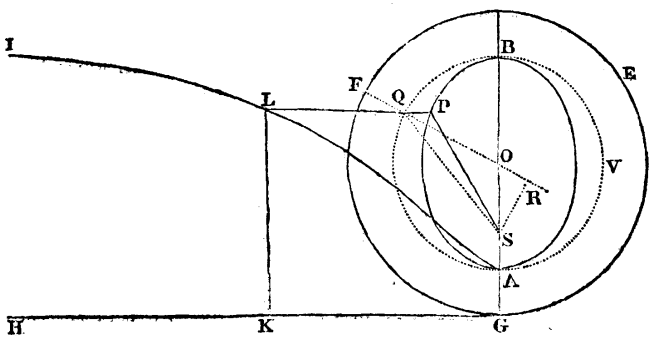
Liber Primus.

ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello, quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæteraque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt arithmeticè rationes vel irrationales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam geometricè irrationalem (g), ut sequitur.

PROP. XXXI. PROB. XXIII.

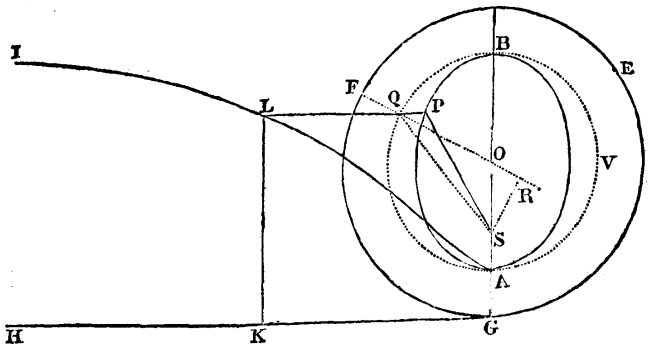
Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G, ut sit OG ad OA ut OA ad OS. Erige perpendiculum GH, centroque O, & intervallo OG, describe circulum GEF, & super regulâ GH, ceu fundo, progrediatur rota GEF, revolvendo circa axem suum, & interea, puncto suo A, describendo Trochoidem ALI. Quo facto,



cape GK in ratione ad rotæ perimetrum GEFG, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum KL occurrens

riani quam Newtonus traditurus est. *Vide Wallisii libellum de Cycloide & Cissoide.*



Trochoidi in L, & acta LP, ipſi KG parallela, occurret Ellipſi in corporis loco quæſito P.

Nam centro O, intervallo OA, deſcribatur ſemicirculus AQB; & arcui AQ occurrat LP, ſi opus eſt producta, in Q; junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR. Area APS eſt ut area AQS, id eſt, ut differentia inter ſectorem OQA & triangulum OQS, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$OQ × AQ & $\frac{1}{2}$OQ × SR; hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}$OQ, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, ideoque (cùm eædem ſint datæ rationes SR ad ſinum arcûs AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad

(h) Hæc quidem explicatiùs dici poſſint hoc modo. Area APS eſt ad aream totam Ellipſeos APB, ut area AQS ad aream circuli ABV (Lemma IV. Cor. H. 1): hoc eſt ut differentia ſectoris OQA triangulique OQS ad aream circuli ABV, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$OQ × AQ & $\frac{1}{2}$OQ × SR ad rectangulum ſub $\frac{1}{2}$OQ & toto ambitu circuli ABV: ſive rurſum, ut differentia arcûs AQ rectæque SR ad totum ambitum circuli ABV. Arcus autem AQ eſt ad ambitum circuli ABV, ut arcus GF ad ambitum circuli GFE. Et recta SR ad ambitum circuli ABV rationem habet, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ SR ad ſinum arcûs AQ, ſinûſque ejus ad ambitum ABV. Sed, propter angulum ad R rectum, recta SR erit ad SO ut ſinus anguli SOR, ſive, arcûs AQ, ad radium OA. Permutando, SR erit ad ſinum arcûs AQ, ut SO ad OA. Sed SO : OA = OA : OG. Ita enim factum eſt. Et OA eſt ad OG ut ambitus circuli AEV ad ambitum circuli GFV. Erit igitur SR ad ſinum arcûs AQ ut ambitus circuli ABV ad ambitum circuli GFV. (El. V. 11.) Quæ igitur è rationibus rectæ SR ad ſinum arcûs AQ, ſinûſque illius ad ambitum ABV, compoſita eſt ratio, ea quidem componetur è rationibus ambitûs ABV ad ambitum GFE, ſinûſque arcûs AQ ad ambitum ABV. Verùm ex eiſdem compoſita eſt ratio, quam ſinus arcûs AQ habet ad ambitum circuli GFE. Quare recta SR erit ad ambitum circuli ABV ut ſinus arcûs AQ ad ambitum circuli GFE. Cùm igitur ſit arcus AQ ad ambitum ABV ut arcus GF ad ambitum GFE; atque rurſum recta SR ad ambitum ABV ut ſinus arcûs AQ ad ambitum GFE: ideirco differentia arcûs AQ rectæque SR erit ad ambitum ABV, ut differentia arcûs GF ſinûſque arcûs AQ ad ambitum GFE (El. V. 24.)

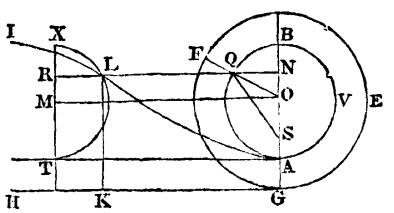
Quare area APS erit ad aream totam Ellipſeos ut differentia arcûs GF ſinûſque arcûs AQ ad ambitum circuli GFE. Sed recta GK differentiæ arcûs GF ſinûſque arcûs AQ æqualis eſt. Quare area APS erit ad aream ellipſeos ut recta GK ad ambitum GFE; hoc eſt, ut tempus, quo confecta eſt area APS, ad tempus converſionis integræ per ambitum Ellipſeos. Namque ſumpta eſt GK, quæ haberet ad ambitum GFE hanc rationem. Q. E. D.

Rectam autem GK æqualem eſſe differentiæ arcûs GF ſinûſque arcûs AQ, id oſtendimus hoc modo. Lineæ Trochoidis, ALI, ea eſt deſcriptio, ut rotâ GFE, circum centrum ſuum O, æquabiliter ſe convertente, centrum ipſum O motu æquabili transferatur ſecundum rectam cum rectâ GH parallelam; atque

ad GF, & diviſim AQ − SR ad GF − ſinu arcûs AQ) ut GK differentia inter arcum GF & ſinum arcûs AQ (h). Q. E. D.

Scholium.

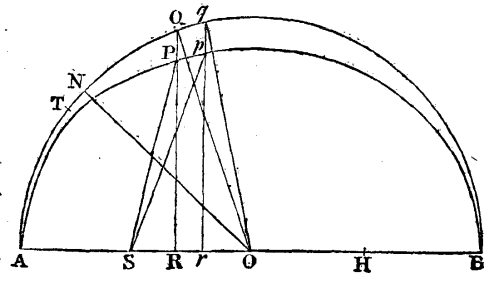
Cæterùm, cùm difficilis ſit hujus Curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam exhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57.29578, quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia SH ad Ellipſeos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eâdem ratione inverſè. Quibus ſemel inventis, Problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus P proximus vero ejus loco *p*. Demiſſâque ad axem ellipſeos ordinatim applicatâ PR, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti, AQB, ordinatim applicata RQ, quæ ſinus eſt anguli AOQ exiſtente AO radio, quæque ellipſin ſecat in P. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum A*p*, ad tempus revolutionis unius in Ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli AOQ ad radium; & angulus E ad angulum N − AOQ + D,



atque eâ quidem velocitate, ut ſpatium, quod tempore integræ converſionis rotæ emenſum fuerit, rotæ ambitui GFE æquale ſit. Sit igitur M locus centri rotæ, O, quo tempore punctum ejus A locum L occupat. Circulus centro M, radio ML, ſcriptus poſitionem circuli AQB referet, quo tempore centrum rotæ in locum M pervenerit; junctaque OM cum rectâ GH parallela erit. Et ſi per A ducatur recta AT cum rectâ GK parallela, quæ circulo TLX in T occurrat, hæc circulos æquales, AQB, TLX, in punctis A, T continget; junctaque MT rectam AT ad perpendiculum inſiſtet; ac proinde cum rectâ OA parallela erit. Recta igitur LQ rectis inter ſe parallelis OA, TM, in punctis N, R occurrat. Erunt duæ NR, OM, necnon duæ TR, AN inter ſe æquales. Quare in circulis æqualibus, AQB, TLX, cum diametrorum AB, TX partes illæ, AN, TR, inter ſe æquales ſint; ordinatim ductæ, NQ, RL, erunt etiam inter ſe æquales. Quapropter arcus etiam AQ, TL, quorum ſinus ſunt illæ NQ, RL, erunt inter ſe æquales. Jam verò cùm centrum rotæ O, rectâ progrediendo, & punctum A, converſione rotæ circumactum, in loca M, L ſimul devenerint, recta OM et arcus TL ſpatia erunt, quæ puncta illa ſimul confecerint. Recta igitur OM erit ad arcum TL, ſive illi æqualem AQ, ut velocitas puncti O ad velocitatem puncti A. Eſt autem ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV ut velocitas puncti O ad velocitatem puncti A. Recta igitur OM erit ad arcum AQ ut ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV. (El. V. 11.) Eſt autem arcus GF ad arcum AQ ut ambitus circuli GFE ad ambitum circuli ABV. Recta igitur OM arcuſque GF ad arcum AQ eandem proportionem habent. Recta igitur OM, ſive illi æqualis RN, arcui GF æqualis erit. (El. V. 9.) Quare NL, cui æqualis eſt GK, arcûs GF rectæque RL differentia erit. Sed oſtenſa eſt RL ſinui arcûs AQ æqualis. Quare GK differentia erit arcûs GF ſinûſque arcûs AQ. Q. E. D.

De Motu Corporum

ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli AOQ+E ad radium, tum angulus G ad angulum N−AOQ−E+F ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli AOQ+E diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli AOQ+E+G ad radium; & angulus I ad angulum N−AOQ−E−G+H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli AOQ+E+G diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus A*oq* æqualis angulo AOQ+E+G+I+ &c. Et ex cosinu ejus o*r* & ordinatâ *pr*, quæ est ad sinum ejus *qr* ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Si quando angulus N−AOQ+D negativus est, debet signum + ipsius E ubique



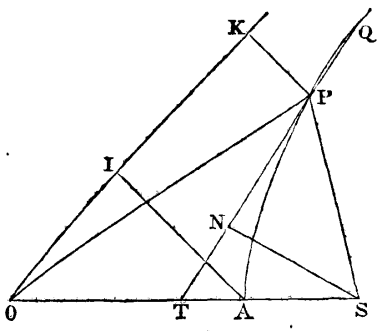
(i) Capiatur scilicet arcus AN, qui sit ad ambitum Circuli AQB, ut tempus quo conficitur arca ASP ad tempus conversionis integræ per ambitum Ellipseos; et jungantur ON, SQ. Jam cùm sector AON sit ad aream circuli AQB ut arcus AN ad ambitum; cùm sit etiam area ASQ ad aream circuli ut area elliptica PSA ad aream totam ellipseos, hoc est ut arcus AN ad ambitum circuli ANB; idcirco sector AON et area ASQ inter se æquales erunt. Quare si æqualium hoc et illud sectori AOQ dematur, quæ relinquentur, ea quoque inter se æqualia erunt. Sector igitur NOQ triangulo SOQ æqualis. Quare arcus NQ rectæ à puncto S in radium OQ ad perpendiculum demissæ æqualis erit. Circuli AQB sit arcus QF anguli B mensura. Et cùm arcus circuli cujusvis sint inter se ut anguli quos metiuntur, erit arcus ille circuli AQB qui radio OA æqualis est, ad arcum TQ ut angulus 57°,29578 ad angulum B, hoc est ut OA ad OS. Arcus igitur TQ rectæ SO æqualis erit. Et cùm arcus NQ rectæ à puncto S in rectam OQ ad perpendiculum deductæ æqualis fit, erit TQ ad NQ ut radius ad sinum anguli AOQ.

Jam cùm angulus AON, motûs utique medii, ex dato temporis spatio, quod elapsum fuerit ab appulsu planetæ ad apsidem A, datus fit, et cùm ex angulo illo dato punctum N detur, si quo modo definiri posset amplitudo arcûs NQ, datum esset punctum Q. Et ex dato Q, ad circulum, daretur P ad ellipsin. Daretur autem arcus NQ, si quidem angulus QOA ad centrum circuli datus esset. Nimirum cùm arcus ille NQ is sit, ad quem datus arcus TQ rationem habeat, quam radius ad sinum anguli QOA. Atqui cùm ignotus sit angulus PSA, seu motûs veri, angulus QOA æquè ignorabitur. Neque è ratione radii ad anguli ignoti sinum arcus NQ, exquisitâ saltem ratione, definiri potest. Illud igitur agendum, quoniam via recta indaginis nulla pateat, ut anguli QOA æstimatio quædam conjecturâ fiat; et, elicitâ arcûs NQ magnitudine, quæ conjecturæ illi respondeat, videndum, an arcus AN, arcu illo NQ auctus, assumpto AQ æqualis fit, vel quantum ab eo discrepet. Ita errorem assumptionis æstimare liceat, et novam anguli AOQ conjecturam, vero propriorem, capere. Quæ quidem ipsa simili examini subjicienda, et novis rursus assumptionibus emendanda erit; donec, errores sensim amoliendo, tantùm non ipsam veritatem assecuti simus. Nempe invento puncto N, ponatur arcus N*q* (in figurâ appositâ) æqualis mensuræ anguli D, quo Newtonus docet modo definiendi.

E ubique mutari in −, & signum − in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli N−AOQ−E+F, & N−AOQ−E−G+H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita AOQ+E+G+I+ &c. quàm celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultrà progredi quàm ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quòd area APS sit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in radium OQ perpendiculariter demissam (i).

Liber Primus.

Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbolâ. Sit ejus centrum O, vertex A, umbilicus S, & Asymptotos OK. Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de positione rectæ SP, quæ aream APS abscindat veræ proximam. Jungatur OP, & ab A & P ad Asymptoton agantur AI, PK Asymptoto alteri parallelæ, & per tabulam logarithmorum dabitur area AIKP, eique æqualis area OPA (k), quæ subducta de tri-



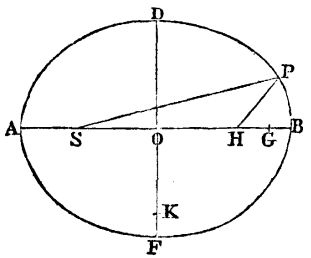
definiendi. Si locus P in ellipsi (in figurâ Newtonianâ) pro planetæ loco verè assumptus fuerit, verè etiam æstimatus fuerit angulus AOQ. Itaque arcus NQ illi N*q* linearionis nostræ æqualis erit, et punctum *q* in ipsum Q incidet. Si *q* in ipsum Q non incidat, minùs exquisitè collocatum erit punctum Q. Sit P punctum ubi Q collocari oportuit. Junctâ O*q*, à puncto S in OQ ad perpendiculum demittatur SF, quæ rectæ O*q* in *e* occurrat. Exiguo existente angulo QO*q*, id enim ponimus, angulus SEO tantùm non rectus erit, et recta *e*F differentiæ rectarum, quæ à puncto S in rectas O*q*, OQ ad perpendiculum demittantur, tantùm non æqualis erit. Sed earum differentiæ arcus P*q* tantum non æqualis est. Nempe cùm alteri rectarum arcus N*q* æqualis fit, alteri arcus NP propemodum saltem æqualis. Quare P*q* : Q*q* = *e*F : *q*Q. Sed *e*F : Q*q* = OF : OQ propemodum. Ergo P*q* : Q*q* = OF : OQ, et PQ : Q*q* = OF + OQ : OQ propemodum. Sed cùm OQ, QF propè sint æquales, ut OQ + OF ad OQ ita erit OQ ad QF quàm proximè. Quare PQ : Q*q* = OQ : QF quàm proximè. Jam verò capiatur L quæ sit ad R, hoc est ad ipsam OQ, ut OQ ad OS. Erit igitur quadratum ex OQ æquale rectangulo SO × L. Est autem SO ad OF, ut radius, hoc est ut OQ, ad cosinum anguli AOQ (propter angulum ad F rectum). Quare cosin. AOQ × FO = OQ × OF. Quare L × SO : cosin. AOQ × SO = OQ² : OQ × OF. Quare rursum L : cos. AOQ = OQ : OF. Et convertendo L : L − cosin. AOQ = OQ : QF. Sed OQ : QF = PQ : P*q* quàm proximè (ex priùs ostensis). Quare L : L − cosin. AOQ = PQ : Q*q* quàm proximè. Ac proinde junctâ OP, angulus QOP erit quàm proximè ad angulum QO*q* ut longitudo L ad eandem L cosinu anguli AOQ imminutam. Sed ut L ad L − cosin. AOQ, ita est angulus E Newtonianus ad angulum N − AOQ + D. Et angulus N − AOQ + D = AON − AOQ + NO*q* = − QO*q*. Quare E = − QOP quàm proximè. Angulo igitur E illi AOQ ablato, restabit AOP quàm proximè. Et calculis ad Newtoni præcepta refectis, si quid reliquum est erroris, penitus id tandem amoliri licebit. [*Hæc ferè Keillius, vel horum saltem non multum dissimilia, in Actis Philosoph. & in 25ª Lectionum suarum Astronomicarum.*]

(k) Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV. & Cor.

De Motu Corporum

angulo OPS relinquet aream abſciſſam APS. Applicando aream abſcindendæ A & abſciſſæ APS differentiam duplam, 2APS − 2A, vel 2A − 2APS, ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem TP perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ PQ. Inſcribatur autem chorda illa PQ inter A & P, ſi area abſciſſa, APS, major ſit aream abſcindendâ A; ſecus ad punctı P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratior (l). Et computatione reperitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.

Atque his calculis Problema generaliter confit analyticè. Verùm uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis, qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentiâ inter ſemiaxem minorem OD & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt rectangulum ſub differentiâ illâ D, & ſemiſummâ axium, AO+OD, ad quadratum



(l) PUTA enim Q verum eſſe planetæ locum; junctis PQ, SQ, ſi locus P pro vero aſſumptus à vero non multum aberraverit, ſector hyperbolicus SPQ parvus erit, et triangulo SPQ haud multo major. Sed triangulum SPQ, rectanguli SN × PQ dimidium erit; nimirum cùm, ob parvitatem arcûs PQ, angulus TPQ duobus rectis tantùm non æqualis fiat, ut duæ rectæ TP, PQ pro unâ haberi poſſint. Sector igitur hyperbolicus SPQ, ſeu differentia areæ abſciſſæ ASP, et abſcindendæ ASQ, dimidio rectanguli SN × PQ haud multo major erit. Quare dupla illa differentia, ſive 2APS − 2A, rectangulo illo haud multo major. Ac proinde recta PQ non multo minor erit quàm recta $\frac{2APS-2A}{SN}$. Si igitur, aut verſus verticem, A, aut ad partes punctı P contrarias, prout area APS major quàm abſcindenda minorve fuerit, inſcribatur chorda PQ rectæ $\frac{2APS-2A}{SN}$ æqualis, erit Q locus planetæ accuratior; vero tamen ejus loco promotior citeriorve, prout area APS juſto minor majorve ſumpta fuerit. Calculis autem refectis error ſenſim amoliendus erit. *(Eadem ferè Le Sœur & Jacquier, & in notis ſuis MSS Gregorius.)*

(m) VEL quod eodem redit, ſicut mox oſtendam (Lemm. H. VII.) capiatur angulus Y cujus ſinus ſit ad radium, vel potius qui ipſe ſit ad angulum 57°,29578 ut parallelopipedon ſuper quadratum ex OS, altitudine quæ rectæ OD æqualis ſit, ad quadruplum cubi è dimidio axe tranſverſo.

(n) Vel, quod eodem redit, capiatur angulus Z qui ſit ad Y uſ 8SH ad 3.AO+OD.

(o) HUJUS computationis rationes abditiſſimas ut in lucem proferamus, ante omnia ex angulo mediæ quem vocant anomaliæ, anguli BHP, ad umbilicum orbitæ ſuperiorem conſtituti, formula quædam generalis conficienda eſt (quæ alia ſanè ac ſeries infinita eſſe nequit) cujus ope angulorum illorum differentiam æſtimare liceat. Huic differentiæ æquationem Newtonianam, x ± v, in orbibus quorum exigua eſt umbilicorum diſtantia ratione axis tranſverſi, ita non æqualem oſtendemus, ut illud quo hæc ab illâ aberit, in omnium quidem planetarum orbitis, ſi unum Mercurium exceperis, pro nihilo habendum ſit. Sed ad formulæ illius inventionem, et ad alia quæ polliciti ſumus præſtanda, nonnullis è Geometriâ aſſumptis via nobis munienda eſt.

LEMMA

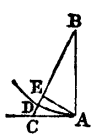
tum axis majoris AB (m); tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ, SH, & differentiâ illâ, D, ad triplum quadratum ſemiaxis majoris AO (n). His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori, quo arcus BP deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motûs æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinûs anguli T ad cubum radii. Angulorum, T, V, X, vel ſummæ, T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ, T+X−V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum BHP, motum medium æquatum (°); & ſi HP occurrat ellipſi in P, acta SP abſcindet aream BSP tempori proportionalem quàm proximè.

Hæc

Liber Primus.

LEMMA II. III.

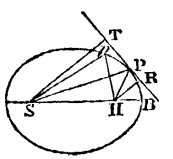
Si trianguli ABC *angulus ad* A *rectus ſit, angulusque ad* B *ſit perexiguus, longitudo quâ latus* BC, *angulo recto adverſum, ſuperat latus* BA, *recto angulo exiguoque contiguum, cum duplo latere* BC, *latereque* AC, *quod exiguo angulo adverſum eſt, quàm proximè proportione tertia erit.*



Centro B, radio BA, ſcribatur circulus, qui rectæ BC in D occurrat. Erit CD longitudo illa, quâ latus BC latus BA ſuperat. Dico 2BC : CA = CA : CD quàm proximè. A puncto enim A in rectam BD deducatur ad perpendiculum recta AE. Propter angulos ad A et E rectos, erit BC : BA = BA : BE (El. VI. 8.) Hoc eſt, cùm BA, BD, propter circulum, ſint inter ſe æquales, BC : BD = BD : BE. Convertendo, BC : CD = BD : DE. Sed propter perexiguam anguli ABC amplitudinem, illæ BC, BD inter ſe tantùm non æquales erunt. Quare et illæ CD, DE, inter ſe tantùm non æquales. (El. V. 14.) Quare CD tantùm non ſemiſſis erit rectæ CE. Sed propter angulos ad A et E rectos, erit BC : CA = CA : CE. Ac proinde 2BC : CA = 2CA : CE = CA : $\frac{1}{2}$CE. Hoc eſt, cùm CD tantùm non æqualis ſit dimidiæ CE, 2BC : CA = CA : CD. Q. E. D.

LEMMA H. IV.

Si à puncto quovis, P, *ad Ellipſin, cujus* S, H *umbilici, ducantur rectæ* PS, PH *ad umbilicos, puncto* P *per circuitum ellipſeos utcunque tranſlato, fluxio ſectoris* BHP *erit ad fluxionem ſectoris* BSP *ut recta* HP, *ad rectam* SP.



Ducatur enim recta TPR quæ ellipſin in puncto P contingat, & in illam à punctis S, H ad perpendiculum deducantur ST, HR. Sit *p* aliud punctum ad ellipſin, et jungantur S*p*, H*p*, P*p*. Jam fluxio ſectoris BHP ad fluxionem ſectoris BSP rationem habebit eam, quæ, coeuntibus punctis P, *p*, ſectoris PH*p* naſcentis ad naſcentem PS*p* prima erit: ſive (per Lemma VI.) quæ trianguli naſcentis PH*p* ad naſcens triangulum PS*p* prima erit. Sed cùm triangula illa baſin P*p* ſemper communem habeant, eadem ſemper erit triangulorum ratio, quæ rectarum ab horum verticibus, H, S, in communem baſin ad perpendiculum demiſſarum. Et rectæ in communem naſcentium baſin ad perpendiculum demiſſæ ſunt ipſæ HR, ST. Quare fluxio ſectoris BHP erit ad fluxionem ſectoris BSP ut

HR

De Motu Corporum

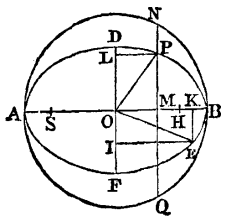
Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quòd angulorum perexiguorum v & x, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam Planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio

HR ad ST. Verùm anguli HPR, SPT inter ſe æquales ſunt (Hamilton. Conic. Lib. II. 16.) et anguli ad R et T ſunt recti. Quare triangula HPR, SPT erunt inter ſe ſimilia, et HR : ST = HP : SP. Fluxio igitur areæ BHP erit ad fluxionem areæ BSP ut HP ad SP. (El. v. 11.) Q. E. D.

LEMMA V.

Si à puncto quovis P in Ellipſi, cujus umbilici, S, H, *centrum* O, *axes* AOB, FOD, *ducatur* PM *ad axem tranſverſum* AB *ordinatim, ſpatium, quo quadratum ex ſemidiametro, quæ ſemidiametri* OP *eſt conjugata, ſuperat quadratum ex ſemiaxe ſecundo, ad quadratum ex ordinatâ* PM *rationem habebit eam, quam quadratum ex dimidiâ umbilicorum diſtantiâ ad quadratum ex ſemiaxe ſecundo.*

Per centrum Ellipſeos O ducatur ſemidiameter OE conjugata ejus quæ per P ducitur.
Dico $OE^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$.
A punctis E, P, diametrorum conjugatarum OE, OP verticibus, ducantur EK, PL, in axes AB, FD ordinatim. Ducatur etiam EI in axem FD ordinatim. Centroque O, radio OB, qui eſt ſemiaxis tranſverſus ellipſeos, ſcribatur circulus, qui rectæ PM in punctis N, Q occurrat. Propter angulum ad K rectum, quadratum ex OE, duobus quadratis ex EK, OK, ſive duobus ex OI, OK ſimul ſumptis, æquale eſt. Horum autem illud ex OI rectangulo FLD, alterum ex OK rectangulo AMB æquale eſt. (Hamilton. Conic. Lib. IV. 2.) Quadratum igitur ex OE, rectangulis duobus FLD, AMB ſimul ſumptis æquale erit. Utrique æqualium auferatur quadratum ex OD; relinquentur $OE^2 - OD^2$, $AMB - OL^2$ inter ſe æqualia. Sed, propter circulum, rectangulum $AMB = NM^2$; et, propter figuram LPMO parallelogrammam, $OL^2 = PM^2$. Quare $OE^2 - OD^2 = NM^2 - PM^2 = NPQ$. Jam verò cùm propter Ellipſin, rectangulum AMB (hoc eſt quadratum ex NM) ſit ad quadratum ex PM ut quadratum ex OB ad quadratum ex OD; dividendo, erit $NPQ : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Quare cùm NPQ ſpatio $OE^2 - OD^2$ modò oſtenſum ſit æquale, erit etiam $OE^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Q. E. D.



Cor. 1. Deductâ PM à quovis puncto P, eorum quæ ad ellipſin, in axem tranſverſum ordinatim, erit illud quo rectangulum AMB, ſub ſegmentis axis, ſuperat quadratum ex ordinatâ PM, æquale illi quo quadratum ex ſemidiametro OE, conjugatâ utique ejus quæ per P ducitur, ſuperat quadratum ex ſemiaxe ſecundo OD.

Cor. 2. Deductâ PL à quovis puncto P, eorum quæ ad ellipſin, in axem ſecundum OD ordinatim, erit illud quo quadratum ex ordinatâ PL ſuperat rectangulum FLD, ſub ſegmentis axis, æquale illi quo quadratum ex ſemiaxe tranſverſo OB ſuperat quadratum ex ſemidiametro OE conjugatâ utique ejus, quæ per P ducitur. Nam cùm quadratum ex OE æquale ſit duobus rectangulis AMB, FLD ſimul ſumptis, ſi æqualium hoc et illud quadrato ex OB auferatur, relinquentur $OB^2 - OE^2$, $OM^2 - FLD$, ſive $PL^2 - FLD$, inter ſe æqualia.

Cor. 3. Deductâ PL in axem ſecundum ordinatim, ſpatium quo quadratum ex ſemidiametro OE, conjugatâ quidem ejus quæ per P ducitur, ſuperatur à quadrato ex ſemiaxe tranſverſo OB, erit ad quadratum ex ordinatâ PL, ut quadratum ex dimidiâ umbilicorum diſtantiâ ad quadratum ex ſemiaxe tranſverſo. Dico $OB^2 - OE^2 : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Nam, propter ellipſin, $PL^2 : FLD = OB^2 : OD^2$. Convertendo, $PL^2 : PL^2 - FLD = OB^2 : OH^4$. Et invertendo, $PL^2 - FLD : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Sed $PL^2 - FLD = OB^2 - OE^2$. (Cor. 2.) Quare $OB^2 - OE^2 : PL^2 = OH^2 : OB^2$. Q. E. D. Sunt hæc quidem Corollaria à negotio noſtro aliena : ſed rerum convenientias contemplari juvat.

LEMMA

Liber Primus.

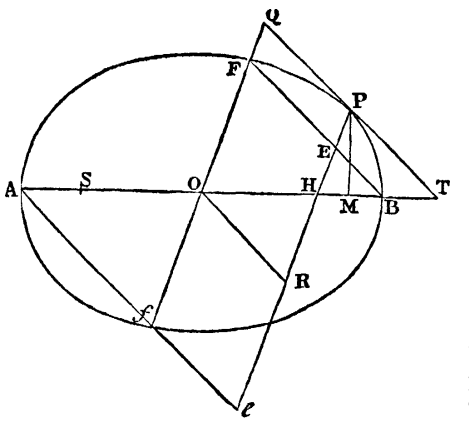
æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motûs medii æquati, BHP, angulus veri motûs BSP & diſtantia SP in promptu ſunt per methodum notiſſimam.

Hactenus

LEMMA VI.

Lineâ rectâ Ellipſin in quovis puncto contingente, ſi à puncto illo recta ducatur ad alterutrum umbilicorum ellipſeos, aliaque ad axem tranſverſum ordinatim, tum ſi per verticem axis tranſverſi ducatur recta cum contingente parallela, hæc ab illâ, quæ per umbilicum ducta eſt, partem abſcindet, contingentem verſus, illi quam ordinatim deducta ab axe tranſverſo abſcidcrit, verticem verſus per quem ducta fuerit recta cum contingente parallela, æqualem.

Ellipſin, cujus axis tranſverſus AB, centrum O, umbilici S, H, in puncto quolibet P recta PT contingat. A puncto P ad alterutrum umbilicorum, puta ad H, ducatur recta PH, rectaque PM ad axem tranſverſum AB ordinatim. Per verticem alterutrum axis tranſverſi, puta per B, ducatur recta BE cum contingente PT parallela, quæ rectæ ad umbilicum ductæ, PH, in E occurrat. Dico rectæ PH ſegmentum PE, quod recta BE ab illâ abſciderit à parte contingentis, æquale eſſe illi MB, quod ordinata PM ab axe tranſverſo abſciderit à parte verticis B. Occurrat enim axis tranſverſus productus rectæ PT in T. Ducatur per O, centrum ellipſeos, recta OQ cum illâ PH parallela, quæ contingenti TP in Q occurrat, rectæque BE in F*. Erit OT : OB = OB : OM (Hamilton. Conic. Lib. I. XLVIII.) Convertendo OT : TB = OB : BM. Sed propter rectas TQ, BF inter ſe parallelas, OT : TB = OQ : QF. (El. VI. 2.) Quare OB : BM = OQ : QF. Sunt autem OB, OQ inter ſe æquales. (Hamilton. Conic. Lib. 2. XXIII.) Quare BM, QF inter ſe æquales. (El. V. 14.) Sed, propter figuram PEFQ parallelogrammam, erunt PE, QF inter ſe æquales. Quare et BM, PE inter ſe æquales erunt. Q. E. D.



Et ſi ab altero axis tranſverſi vertice, A, ducatur Ae cum contingente parallela, quæ rectæ PH per umbilicum ductæ in *e* occurrat, ſimilibus argumentis efficientur AM, Pe inter ſe æquales. Rectæ enim Ae recta QO productæ in *f* occurrat. Jam cùm ſit OT : OB = OB : OM, erit etiam OT + OB, ſive AT, ad OB + OM, ſive AM, ut OT ad OB. Permutando AT : OT = AM : OB. Sed, propter rectas TQ, Ae inter ſe parallelas, erit AT : TO = *f*Q : QO. Quare AM : OB = *f*Q : QO. Sunt autem OB, QO inter ſe æquales. Quare AM, *f*Q, ac propterea AM, *e*P inter ſe æquales. Q. E. D.

Cor. 1. Rectæ per umbilicum pars illa, Ee, quæ rectis parallelis BE, Ae intercepta eſt, duplæ diſtantiæ ordinatæ PM à centro, hoc eſt, duplæ OM æqualis erit. Nam cùm Pe = AM, et PE = BM, erit Ee = AM − BM = 2OB − 2BM = 2OM.

Cor. 2. Segmentum rectæ per umbilicum, inter umbilicum et rectam cum contingente parallelam, eſt ad ſegmentum axis inter ordinatam et centrum, ut diſtantia umbilici à vertice illo, per quem ducta eſt recta cum contingente parallela, ad dimidium axis tranſverſi. Per centrum enim O ducatur recta OR cum contingente PT parallela, quæ rectæ PH, per umbilicum ductæ, in R occurrat. Propter figuram PROQ parallelogrammam erit PR æqualis illi OQ, cui oſtenſa eſt æqualis OB. Quare PR, OB inter ſe æquales. Sed PE, BM inter ſe æquales. Æquales igitur OM, ER. Ad utramque igitur æqualium OM, ER illa EH eandem rationem habet. (El. V. 7.) Sed, propter

* *Cave credas punctum* F *neceſſariò ad Ellipſin eſſe. Id enim in appoſitâ figurâ fortuitum eſt.*

De Motu Corporum

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile rectâ descendat vel rectâ ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

SECTIO

rectas EB, RO inter se parallelas, EH : ER = HB : BO. Quare EH : OM = HB : BO.
Similibus argumentis efficietur *eh* : OM = AH : AO. Q. E. D.

LEMMA H. VII.

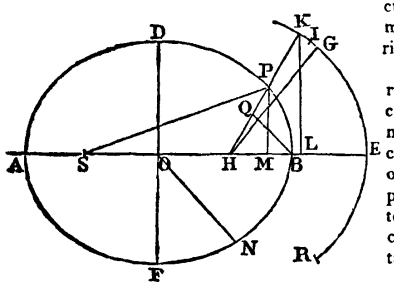
In Ellipsi rectangulum sub dimidiâ axium summâ dimidiâque lateris recti et axis secundi differentiâ ad quadratum è dimidiâ umbilicorum distantiâ rationem habet quam axis secundus ad axem transversum.

Sit Ellipsis cujus axis transversus AB, secundus DF, centrum O umbilici S, H (fig. text. p. 134.) Capiatur OG dimidio axi secundo OD æqualis, et OK æqualis dimidio lateri recto. Ita erit AG dimidia axium summa, et FK dimidia axis secundi lateriseque recti differentia erit. Dico esse FK × AG : OH² = OF : OA.

Erit enim FK × AG duobus FK × AO, FK × OG simul sumptis æquale. Quorum illud FK × AO = OF × OA − OK × CA = OF × OA − OF² (nempe cùm propter trium AO, OF, OK continuam proportionis convenientiam rectangulum OK × AO quadrato ex OF æquale sit.) Verùm, propter OG, OF inter se æquales, FK × OG = OF² − OF × OK. Quare FK × AO + FK × OG = AO × OF − OF × OK. Quare FK × AG = AO × OF − OF × OK. Jam verò AO × OF : AO² = OF : AO = OK : OF = OF × OK : OF². Quare (per El. v. 12.) AO × OF − OF × OK : AO² − OF² = OK : OF = OF : OA. Hoc est, cùm AO × OF − OF × OK æquale sit rectangulo FK × AG (ex modò ostensis), et cum AO² − OF² æquale sit quadrato ex OH (propter ellipsin) idcirco erit FK × AG : OH² = OF : OA. Q. E. D.

Horum tandem ope facilis erit formulæ, quâ opus est, inventio; quæ, si omnia calculorum vi perficere voluissemus, magno quidem constitisset labore.

1. In orbe Elliptico cujus axes, transversus quidem AB, secundus FD, centrum O, umbilici S, H, sit S umbilicorum is quem vires centripetæ respiciant, punctum P locus quilibet planetæ in hoc orbe circumacti. Junctis PS, PH, centro H, radio HE, qui dimidio axi transverso OB æqualis sit, scribatur circulus; et hujus circuli capiatur arcus EG, qui ad totum circuli circuitum rationem habeat, quam sector BSP ad aream totam ellipseos. Junctâ igitur HG erit angulus EHG mediæ quem vocant anomaliæ, ejusque mensura pro radio HE erit arcus EG. Et si producatur HP circulum usque, cui in K occurrat, erit arcus EK mensura anguli, BHP, ad umbilicum orbitæ superiorem constituti.



2. Significetur arcus EG literâ T, arcus EK literâ *z*. A punctis K, P in axem ellipseos AB deducantur ad perpendiculum KL, PM. Erit KL sinus, HL cosinus arcûs EK; quorum KL significetur literâ *s*, HL literâ *x*. Jungatur HD, et per O ducatur semidiameter ON, conjugata ejus quæ per P. Æquales OB, HE, HD literâ *a* communiter significentur. Semiaxis secundus OD significetur literâ *c*; et OH, dimidia umbilicorum distantia, literâ *n*.

3. Jam puncto P per ellipseos circuitum translato, fluxio sectoris circularis EHK erit ad fluxionem sectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP. (Ideo scilicet quia nascentia sectorum EHK, BHP incrementa sunt primò inter se sicut triangula inter se similia, quorum triangulorum sunt HK, HP latera homologa.) Sed fluxio sectoris elliptici BHP ad fluxionem sectoris elliptici BSP erit ut HP ad PS (Lemma H. 4.) hoc est ut quadratum ex HP ad rectangulum HP × PS vel ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON; nam quadratum ex ON rectangulo HP × PS est æquale.

SECTIO VII.

Liber Primus.

De corporum ascensu & descensu rectilineo.

PROP.

quale. (Hamilton. Conic. Lib. II. 19.) Cùm igitur fit fluxio sectoris circularis EHK ad fluxionem sectoris elliptici BHP ut quadratum ex HK ad quadratum ex HP, et fluxio sectoris elliptici BHP ad fluxionem sectoris elliptici BSP ut quadratum ex HP ad quadratum ex ON, erit ex æquo fluxio sectoris circularis EHK ad fluxionem sectoris elliptici BSP ut quadratum ex HK ad quadratum ex ON. Hoc est $\dot{EHK} : \dot{BSP} = HK^2 : ON^2$. Quare cùm $\dot{EHK}$ æqualis sit rectangulo $\frac{1}{2}HE \times \dot{EK}$, sive $\frac{1}{2}a\dot{z}$, erit $\dot{BSP} = \frac{ON^2}{2a}\dot{z}$.

4. Sed (per Lemma H. v.) est $ON^2 - OD^2 : PM^2 = OH^2 : OD^2$. Quare $\overline{ON^2 - OD^2} \times \frac{OD^2}{OH^2}$, sive $\overline{ON^2 - cc} \times \frac{cc}{nn}$, $= PM^2$. Sed propter rectas PM, KL parallelas, erit KL : PM = KH : HP. Quare $KL^2 \times \frac{HP^2}{KH^2}$, sive $\frac{ss \times HP^2}{a^2}$, $= PM^2$. Quare $\overline{ON^2 - cc} \times \frac{cc}{nn} = \frac{ss}{a^2} \times HP^2$. Et $ON^2 = cc + \frac{nnss}{cca^2} HP^2$.

5. Agatur per B recta BQ cum rectâ ON parallela, quæ rectæ HP in Q occurrat. Ita dividetur HP in partes duas, PQ, QH; quarum altera quidem, PQ, æqualis erit abscissæ ab axe BM, altera vero $QH = \frac{OM \times HB}{OB}$. (Lemma H. VI. & Cor. ejus 2.) Propter rectas KL, PM inter se parallelas, erit HL : HM = HK : HP. Quare $HM = \frac{HL \times HP}{HK} = \frac{x \times HP}{a}$. Sed $HB = a - n$. Quare $BM = a - n - \frac{x \times HP}{a}$. Et $OM = n + \frac{x \times HP}{a}$. Quare $QH \left(= \frac{OM \times HB}{OB}\right) = n + \frac{x \times HP}{a} \times \frac{a-n}{a} = n + \frac{\overline{x \times HP}}{a} - \frac{n^2}{a} - \frac{\overline{nx \times HP}}{a^2}$. Quare rursum $PH = (BM + QH) = a - \frac{n^2}{a} - \frac{nx \times HP}{a^2} = \frac{a^2 - n^2}{a} - \frac{nx \times HP}{a^2} = \frac{c^2}{a} - \frac{nx \times HP}{a^2}$. Et transponendo $HP \times \frac{a^2 + nx}{a^2} = \frac{c^2}{a}$. Quare $HP = \frac{ac^2}{a^2 + nx}$. Et $HP^2 = \frac{a^2 c^4}{\overline{a^2 + nx}^2}$. Quare $\frac{nn.ss}{cca^2} HP^2 = \frac{nn.ss.cc}{\overline{a^2 + nx}^2}$. Additoque utrinque cc, erit $cc + \frac{nnss}{cca^2} HP^2$, hoc est ex suprà ostensis (§ 4.) $ON^2 = cc + \frac{nn.ss.cc}{\overline{a^2 + nx}^2}$. Quare fluxioni areæ BSP, cui illud $\frac{ON^2}{2a}\dot{x}$ jam suprà (§ 3.) ostensum est æquale, erit hoc etiam æquale, $\frac{cc\dot{z}}{2a} + \frac{nn.ss.cc}{2a \times \overline{a^2 + nx}^2}\dot{x}$. Erit inquam $\dot{BPS} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nn.cc.ss}{2a \times \overline{a^4 + 2anx + n^2x^2}}\dot{z}$.

6 Hujus membro posteriore in seriem infinitam, divisionis operâ, explicato, erit $\dot{BPS} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nn.cc.ss}{2a^3}\dot{z} - \frac{n^3cc.ss.x}{a^7}\dot{z} + \frac{3n^4c^2ssx^2}{2a^9}\dot{z} -$ &c. Hæc series, si exigua fit n, dimidia umbilicorum distantia ratione dimidii axis transversi, a, qualiscunque fuerit arcûs z amplitudo, celerrimè quidem ad metam properabit: ut tria prima ejus membra pro summâ totius haberi possint. Ponatur igitur $\dot{BPS} = \frac{cc}{2a}\dot{z} + \frac{nncc.ss}{2a^5}\dot{z} - \frac{n^3ccss.x}{a^7}\dot{z}$.

7. Jam cùm sit $\dot{x} : \dot{x} = s : s$ (Excerpt. ex Epist. IV. Not. k. Cor.) erit $s\dot{z} = a\dot{x}$. Rursum, cùm sit $\dot{x} : \dot{s} = a : x$ (Excerpt. ex Epist. IV. Not. l. Cor.) erit $x\dot{z} = a\dot{s}$. Quare quantitatis ejus, cui inventa est $\dot{BPS}$ æqualis, ejus inquam membro secundo erit hoc æquale, $\frac{nncs}{2a^3}\dot{x}$; tertio autem, hoc, $\frac{n^3cc.s^2.s}{a^6}$

De Motu Corporum

PROP. XXXII. PROB. XXIV.

Posito quòd vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire, quæ corpus, rectâ cadendo, datis temporibus describit.

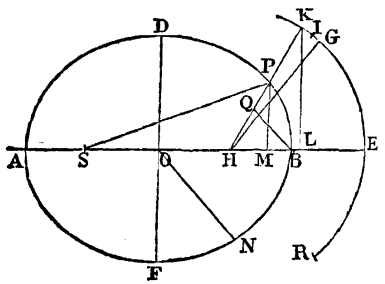
Cas.

$\frac{n^3cc\dot{s}^2\dot{s}}{a^6}$.

Hinc $\dot{BPS} = \frac{cc}{2a}\dot{zz} + \frac{nncc\dot{s}\dot{x}}{2a^4} - \frac{n^2ccs^2\dot{s}}{a^6}$.

Atque hinc efficitur $BPS = \frac{cczz}{2a} + \left|\frac{n^2ccsx}{2a^4}\right| - \frac{n^3ccs^3}{3a^6}$.

Sed $\left|\frac{n^2ccsx}{2a^4}\right| = \frac{n^2c^2}{2a^4}EKL$. Et $EKL = HKE - HKL = \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}xs$. Quare $BPS = \left|\frac{cc}{2a} + \frac{n^2cc}{4a^3}\right|z - \frac{n^2cc}{4a^4}xs - \frac{n^3ccs^3}{3a^6}$.



8. Atque formulam hujus quidem simillimam, vel re potius eandem, notis autem aliam, et aliâ longè ratione inventam, in notationibus suis Anglicis Emersonus tradidit. Qui tamen formulâ quam invenerat, ad explicationem eorum, quæ à Newtono sunt præcepta, minùs feliciter usus est; calculorum ut opinor fastidio, haud enim ingenii tarditate lapsus; à quâ suspicione vir ille acutissimus procul abest. Nos autem ad propositum revertamur. Cùm arcus circularis EG sit ad totum circuli circuitum ut area BPS ad aream totam ellipseos (ita enim factum est), erit sector circularis EHG ad aream circuli ut sector ellipticus BPS ad aream ellipseos. Et permutando, sector EHG erit ad sectorem BPS ut circulus ad ellipsin; hoc est, ut quadratum ex HE ad rectangulum OB × OD; vel, cùm æquales sint HE, OB, ut HE ad OD, sive ut a ad c. Quare sector $EHG = \frac{BPS \times a}{c}$.

Quare arcus EG, sive $T = \frac{2BPS}{c} = \left|\frac{c}{a} + \frac{n^2c}{2a^3}\right|z - \frac{n^2c}{2a^4}xs - \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$. Capiatur igitur arcus ER ad quem EK, vel z, rationem habeat quam $2a^2$ ad $\left|2a^2+n^2\right|c$. Erit $T = ER - \frac{n^2c}{2a^4}xs - \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

9. Jam cùm n, dimidia umbilicorum distantia, exigua sit ratione ipsius a, dimidii axis transversi (id enim semper ponimus) hoc est, cùm in triangulo DOH, cujus angulus ad O rectus est, angulus ODH fit exiguus, erit OH^2, sive $n^2 = 2DH \times DH - DO = 2a \times \overline{a-c}$ (Lemma H. III.) et $n^2c = 2a^2c - 2ac^2$. Hinc $2a^3 : \left|2a^2+n^2\right|c = 2a^3 : \overline{4a^4-2acc}\,c = a^2 : 2ac-c^2$. Differentia duarum a, c designetur literâ p, ut sit $a-c=p$. Erit igitur $2ac-c^2 = a^2-p^2$. Hinc $a^2 : 2ac-c^2 = a^2 : a^2-p^2$. Quare $2a^2$ erit ad $\left|2a^2+n^2\right|c$, hoc est arcus EK ad arcum ER ut a^2 ad a^2-p^2. Sed cùm p non nisi pars multesima sit ipsius a; hinc ratio illorum a^2, a^2-p^2, tantùm non æqualium ratio erit, et arcus ER, EK inter se tantùm non æquales. Pro æqualibus igitur habendi sunt. Inde erit $T = EK - \frac{n^2c}{2a^4}xs - \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

Vel transponendo, $T + \frac{n^2c}{2a^4}xs + \frac{2n^3c}{3a^6}s^3 = EK$. Ablatoque $EG = T$, erit $\frac{n^2c}{2a^4}xs + \frac{2n^3c}{3a^6}s^3 = GK$. Atqui arcus GK mensura est anguli GHK, seu differentiæ anguli anomaliæ mediæ angulique BHP ad umbilicum orbitæ superiorem. Hæc ita se habent si angulus BHP recto minor sit. Quòd si recto major ille fuisset, calculis simili modo subductis, provenisset arcus $GK = -\frac{n^2c}{2a^4}xs + \frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

10. Osten-

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Corol. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam conicam, cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica ARPB, & umbilicus ejus S. Et primò si figura Ellipsis est, super hujus axe majore, AB, describatur semicirculus ADB; & per corpus deci-

Liber Primus.

10. Ostendendum est igitur mensuram æquationis Newtonianæ, $x \pm v$, pro radio HE, arcui GH modò invento æqualem esse.

Divisum puta arcum GK in duos GI, IK, quorum alter GI æqualis sit illi $\frac{n^2c}{2a^4}xs$, alter IK æqualis fit $\frac{2n^3c}{3a^6}s^3$.

11. Cùm litera s sinum, x cosinum arcûs EK significet, existente a radio, erit rectangulum $2xs = a \times$ sin. 2EK. Duplum enim rectanguli sub sinu et cosinu arcûs cujuspiam circularis rectangulo sub radio & sinu arcûs dupli æquale est. (Keill. Trigonom. Plan. Prop. IV. Cor.) Quare $\frac{n^2c}{2a^4}xs = \frac{n^2c}{4a^3}$ sin. 2T propemodum. Arcus igitur GI illi $\frac{n^2c}{4a^3}$ sin. 2T tantùm non æqualis erit.

12. Jam verò sinus anguli V Newtoniani est ad radium ut $D \times \overline{AO + OD}$ ad $4AO^2$. Quare sinus anguli V, sive cùm angulus V exiguus fit, arcus, qui mensura est anguli V pro radio AO, erit $\frac{D \times \overline{AO+OD}}{4AO}$, sive $D \times \frac{a+c}{4a}$. Et cùm arcus ille sit ad alium, qui mensura erit anguli v, ut radius ad sinum dupli arcûs T, erit arcus ille quem angulus v mensuram habet, $\frac{D \times \overline{a+c} \times \text{sin. } 2T}{4a^2}$.

Sed (per Lemma H. VII.) $D = \frac{OH^2 \times OD}{AO + OD \times AO} = \frac{n^2c}{a+c \times a}$. Quare $\frac{D \times a+c}{4a^2} = \frac{n^2c}{4a^3}$. Quare arcus, quem angulus Newtoni V mensuram habet pro radio a vel AE, erit $\frac{n^2c}{4a^3}$ sin. 2 T, cui ostensus est arcus GI tantùm non æqualis (§ 11). Angulus igitur V Newtonianus angulo GHI tantùm non æqualis.

13. Rursum propter arcus EG, EK tantùm non æquales, eorum sinus tantùm non æquales erunt. Quare $s^3 = \overline{\text{sin. } T}^3$ propemodum. Hinc arcus $IK = \frac{2n^3c}{3a^6}\overline{\text{sin. } T}^3$ propemodum.

14. Verùm sinus anguli Z Newtoniani, vel, si angulus exiguus fit, arcus ipse, quem angulus ille Z mensuram habet, est ad radium ut $4D \times OH$ ad $3AO^2$, sive ut $4D \times n$ ad $3a^2$. Quare arcus ille $= \frac{4n^2D}{3a} = \frac{4n^3c}{3a^2 \times \overline{a+c}}$. Et cùm arcus ille sit ad alium, quem angulus X mensuram habet, ut a^3 ad $\overline{\text{sin. } T}^3$, erit arcus, quem angulus X mensuram habet, $= \frac{4n^3c}{3a^5 \times \overline{a+c}} \times \overline{\text{sin. } T}^3$. Vel si pro $a+c$ ponatur $2a$, nempe cùm perexigua sit illarum a, c differentia, erit mensura anguli X Newtoniani pro radio a, vel $HE, = \frac{4n^3c}{6a^6}\overline{\text{sin. } T}^3 = \frac{2n^3c}{3a^6}\overline{\text{sin. } T}^3$, cui ostensus est arcus IK tantùm non æqualis (§ 13). Quare angulus X Newtonianus angulo IHK tantùm non æqualis est. Quare $X \pm V$ angulo KHI $\pm$ IHG, hoc est angulo KHG, tantùm non æqualis. Q. E. D.

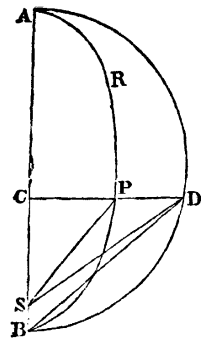
		Y	Z
		° ′ ″	° ′ ″
In orbita	☿	0 − 38 − 5	0 − 21 − 30
	♀	0 − 00 − 2½	0 − 00 − 00,04
	⊕	0 − 00 − 14	0 − 00 − 00, 6
	♂	0 − 7 − 4	0 − 1 − 42
	♃	0 − 1 − 57	0 − 0 − 15
	♄	0 − 2 − 58	0 − 0 − 28

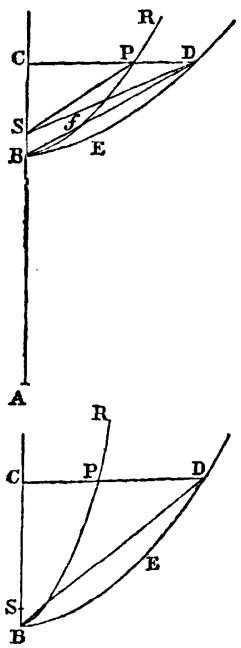
14. Calculis subductis invenio angulos Y, Z in orbitis planetarum, quales hæc Tabella indicat.

15. Cæterùm in orbitâ Mercurii, computatio ex Newtoni præceptis instituta æquationem maximam dabit 24°−7′−31″; quam Hallæius partibus, 25′−02′, minorem statuit.

dens.

dens tranſeat recta DPC perpendicularis ad axem; actiſque DS, PS, erit area ASD areæ ASP, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuò latitudo ellipſeos; & ſemper manebit area ASD tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: &, orbe APB jam coincidente cum axe AB, & umbilico S cum axis termino B, deſcendet corpus in rectâ AC, & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque ſpatium AC, quod corpus de loco A, perpendiculariter cadendo, tempore dato deſcribit, ſi modò tempori proportionalis capiatur area ABD, & à puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC. Q. E. I.





Caſ. 2. Si figura illa RPB Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem AB hyperbola rectangula BED: & quoniam areæ CSP, CE*f*P, SP*f*B ſunt ad areas CSD, CBED, SDEB, ſingulæ ad ſingulas, in datâ ratione altitudinum CP, CD (a); & area SP*f*B proportionalis eſt tempori quo corpus P movebitur per arcum P*f*B; erit etiam area SDEB eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ RPB in infinitum, manente latere tranſverſo, & coibit arcus PB cum rectâ CB, & umbilicus S cum vertice B, & rectâ SD cum rectâ BD. Proinde area BDEB proportionalis erit tempori quo corpus C, recto deſcenſu, deſcribit lineam CB. Q.E.I.

Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi figura RPB Parabola eſt, & eodem vertice principali, B, deſcribatur alia Parabola BED, quæ ſemper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ CB; fiet ſegmentum

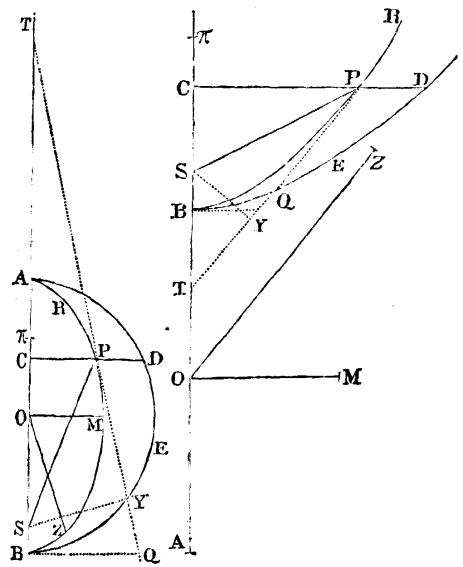
(a) Spatiis utique hyperbolicis CE*f*P, CBED eadem inter ipſa eſt ratio, quæ rectis CP, CD. (Lemma IV.

ſegmentum parabolicum BDEB proportionale tempori, quo corpus illud, P vel C, deſcendet ad centrum S vel B. Q. E. I.

PROP. XXXIII. THEOR. IX.

Poſitis jam inventis, dico, quòd corporis cadentis velocitas, in loco quovis C, *eſt ad velocitatem corporis, centro* B, *intervallo* BC, *Circulum deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione quam* AC, *diſtantia corporis à Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* ½AB.

Biſecetur AB, communis utriuſque figuræ RPB, DEB diameter, in O; & agatur recta PT, quæ tangat figuram RPB in P, atque etiam ſecet communem illam diametrum AB (ſi opus eſt productam) in T; ſitque SY ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ RPB latus rectum ponatur L. Conſtat per Corol. 9. Prop. XVI. quòd corporis, in lineâ RPB circa centrum S moventis, velocitas in loco quovis P ſit ad velocitatem corporis, intervallo SP, circa idem centrum, Circulum deſcribentis in ſubduplicatâ ratione rectanguli ½L × SP ad SY quadratum. Eſt autem ex conicis ACB ad CP*q* ut 2AO ad L; ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicatâ ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad SY *quad.* Porro ex conicis, eſt CO ad BO ut BO ad TO (b); & compoſitè, vel diviſim, ut CB ad BT. Unde, vel dividendo, vel componendo, fit BO − vel + CO ad BO ut CT ad

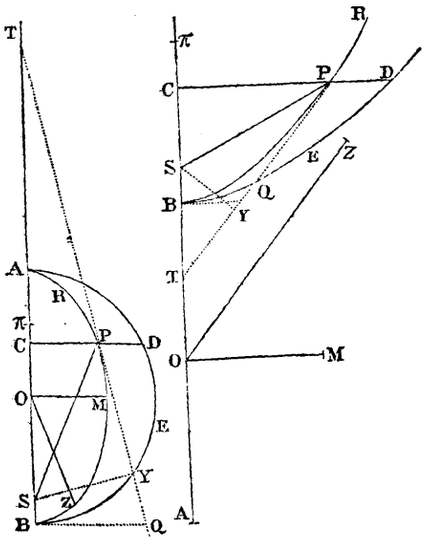


IV. Cor. H. 1.) Sed eadem quoque triangulis CSP, CSD. (El. VI. 1.) Quare & ſectoribus hyperbolicis SP*f*B, SDEB inter ipſos ratio eadem intercedet. (El. V. 11.)

(b) Hamilton. Conic. Lib. 1. XLVIII. XLIX.

BT,

De Motu Corporum



BT, id eſt, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP; ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SY cum lineâ BC, lineaque SY cum lineâ BQ; & corporis, jam rectâ deſcendentis in lineâ CB, velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad SYq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad SYq) in ſubduplicatâ ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}$AB. Q. E. D (c).

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam à centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam à centro diſtantiam.

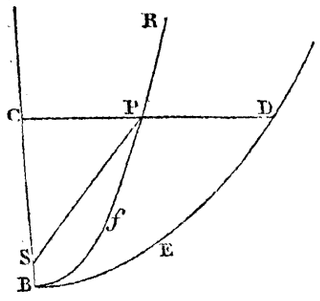
PROP. XXXIV. THEOR. X.

Si figura BED *Parabola eſt, dico, quòd corporis cadentis velocitas, in loco*

(c) ALITER.

Per centrum O ducatur OM, ſemiaxis ſecundus orbitæ RPB, et OZ, ſemidiameter ejus cum contingente TP parallela; & ſit m ad n ut velocitas corporis, circum umbilicum S in orbitâ RPB lati, in loco P, ad velocitatem corporis, circum centrum S ad diſtantiam SP, in circulo circumacti. Erit igitur m^2 ad n^2 ut rectangulum $\frac{1}{2}$L × SP ad quadratum ex SY (XVI. Cor. 9.) Jam verò rectangulum $\frac{1}{2}$L × SP ad quadratum ex SY rationem habet, quæ componitur è rationibus rectanguli $\frac{1}{2}$L × SP ad quadratum ex SP, quadratique ex SP ad quadratum ex SY; ſive è rationibus rectæ $\frac{1}{2}$L ad rectam SP, quadratique ex SP ad quadratum ex SY; ſive rurſum è rationibus rectæ $\frac{1}{2}$L ad rectam SP, quadratique ex OZ ad quadratum ex OM. Eſt enim $SP^2 : SY^2 = OZ^2 : OM^2$ (Hamilton. Conic. Lib. II. 31.) Habet igitur m^2 ad n^2 rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ $\frac{1}{2}$L ad SP, quadratique ex OZ ad quadratum ex OM; ſive eam, quæ eſt parallelepipedi $\frac{1}{2}$L × OZ^2 ad parallelepipedon $\frac{1}{2}$L × AO × SP; rectangulum enim $\frac{1}{2}$L × AO quadrato ex OM æquale eſt.

loco quovis C, *æqualis eſt velocitati quâ corpus, centro* B, *dimidio intervalli ſui* BC, *circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis Parabolam RPB circa centrum S deſcribentis velocitas in loco quovis P (per Corol. 7. Prop. XVI.) æqualis eſt velocitati corporis, dimidio intervalli SP, circulum circa idem centrum S uniformiter deſcribentis. Minuatur parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus parabolicus PfB cum rectâ CB, centrum S cum vertice B, & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & conſtabit propoſitio. Q. E. D.

PROP. XXXV. THEOR. XI.

Iiſdem poſitis, dico quòd area figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*

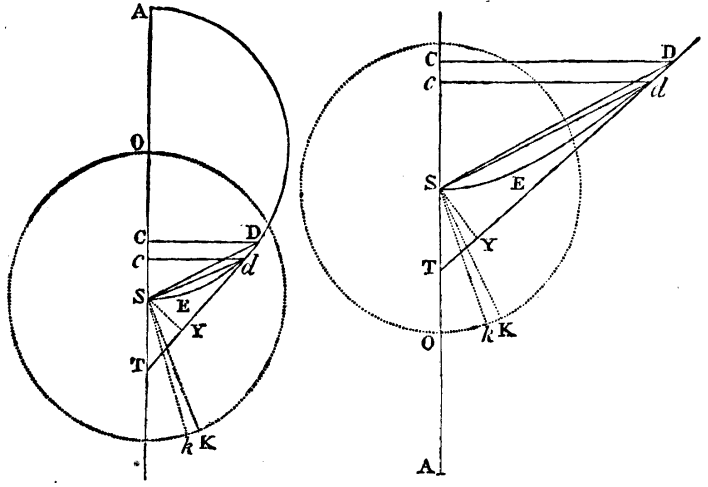
Nam concipe corpus C, quàm minimâ temporis particulâ, lineolam Cc cadendo deſcribere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk deſcribere. Erigantur perpendicula CD, Cd occurrentia figuræ DES in D, d. Jungantur SD, Sd, SK, Sk, & ducatur Dd axi AS occurrens in T, & ad eam demittatur perpendiculum SY.

Caſ. 1. Jam ſi figura DES Circulus eſt vel Hyperbola rectangula, biſecetur ejus tranſverſa diameter AS in O, & erit SO dimidi-

eſt. Eſt autem $\frac{1}{2}$L × $OZ^2 : \frac{1}{2}$L × AO × SP = OZ^2 : AO × SP. Habet igitur m^2 ad n^2 rationem eam quam quadratum ex OZ ad rectangulum AO × SP. Capiatur Bπ = SP. Ita erit Aπ æqualis diſtantiæ puncti P ab altero curvæ RPB umbilico (Hamilton. Conic. Lib. II 14.) ac propterea quadratum ex OZ rectangulo Bπ × πA æquale erit. (Hamilton. Conic. Lib. II. 19.) Habebit igitur m^2 ad n^2 rationem eam quam rectangulum Bπ × πA ad rectangulum AO × SP; ſive, propter æquales Rπ, SP, eam quam recta Aπ habet ad rectam AO. Et quâcunque fuerit figura RPB latitudine, perinde obtinebit hæc proportionum ſimilitudo. Latitudine igitur illâ in infinitum imminutâ, ratio ultima illorum m^2, n^2 inter ipſa, ea erit, quæ rectæ mutabilis Aπ ad datam AO ultima quoque erit. Latitudine autem CP in infinitum imminutâ, ut puncta P, S tandem cum illis C, B cocant, punctum etiam π cum illo C coibit, & Aπ evadit ipſi AC æqualis. Ratio igitur ultima duorum m^2, n^2 ea rectæ AC ad AO ratio erit; unde ratio ultima m ad n, quæ eſt velocitatis corporis rectâ cadentis in loco C ad velocitatem corporis in circulo, radio SP, circumacti, hæc inquam ratio ejus quam AC habet ad AO ſubduplicata erit. Q. E. D.

De Motu Corporum

um lateris recti. Et quoniam est TC ad TD ut cc ad Dd, & TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut CD × cc ad SY × Dd. Sed (per Corol. 1. Prop. XXXIII.) est TC ad TS ut AC ad AO, puta si in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC est ad AO, seu SK, ut CD × cc ad SY × Dd. Porro corporis descendentis velocitas in c est ad velocitatem corporis circulum, intervallo sc, circa centrum s, describentis in subduplicatâ ratione AC ad AO, vel SK (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum OKk in subduplicatâ ratione SK ad sc (per Corol. 6. Prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola cc ad arcum Kk in subduplicatâ ratione AC ad sc, id est in ratione AC ad CD. Quare est CD × cc æquale AC × Kk, & propterea AC ad SK ut AC × Kk ad SY × Dd, indeque SK × Kk æquale SY × Dd, & $\frac{1}{2}$SK × Kk æquale $\frac{1}{2}$SY × Dd; id est area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis gene-

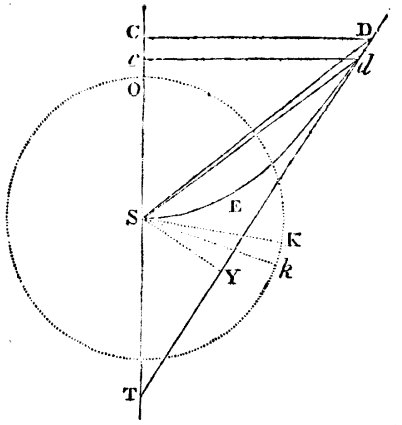


rantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. Q.E.D.

(d) Hamilton. Conic. Lib. I. 47.

(e) Quod ita scilicet effeceris, si arcum OK summæ arcûs AD rectæque DC æqualem sumpseris.

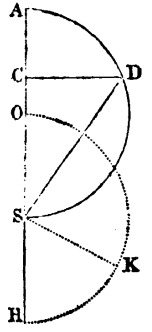
Cas.



Cas. 2. Quòd si figura DES Parabola sit, invenietur esse ut supra CD × cc ad SY × Dd ut TC ad TS, hoc est ut 2 ad 1 (d), ideoque $\frac{1}{4}$CD × cc æquale esse $\frac{1}{2}$SY × Dd. Sed corporis cadentis velocitas in c æqualis est velocitati, quâ circulus intervallo $\frac{1}{2}$sc uniformiter describi possit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola cc ad arcum Kk (per Corol. 6. Prop. IV.) est in subduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2}$sc, id est, in ratione SK ad $\frac{1}{4}$CD. Quare est $\frac{1}{2}$SK × Kk æquale $\frac{1}{4}$CD × cc, ideoque æquale $\frac{1}{2}$SY × Dd, hoc est, area KSk æqualis areæ SDd, ut suprà. Q.E.D.

PROP. XXXVI. PROB. XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora descensûs.*



Super diametro AS, distantiâ corporis à centro sub initio, describe semicirculum ADS, ut & huic æqualem semicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem constitue sectorem OSK (e). Patet per Prop. XXXV. quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum OK. Q.E.F (f).

PROP. XXXVII. PROB. XXVI.

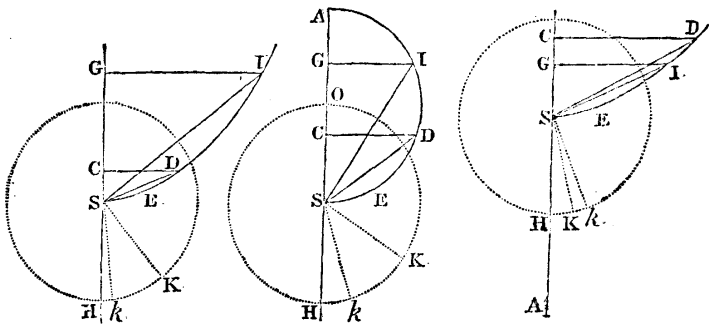
Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensûs vel descensûs.

Exeat corpus de loco dato G secundum lineam GS cum veloci-

(e) *Cor. H.* Corpus igitur è loco A demissum, rectâ cadendo, eodem temporis spatio centrum usque S pervenerit, quo corpus aliud circa centrum idem S motu æquabili semicirculum OKH absolverit.

De Motu Corporum

tate quâcunque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum SG circa centrum s revolvi poſſet, cape GA ad $\frac{1}{2}$AS. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum A infinitè diſtat, quo caſu Parabola vertice s, axe SG, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per Prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quàm 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro SA deſcribi debet. Patet per Prop. XXXIII (g). Tum centro s, intervallo æquante dimidium lateris



recti, deſcribatur circulus H*k*K, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum G, & locum alium quemvis c, erigantur perpendicula GI, CD occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in I ac

D.

(g) NIMIRUM recta GS, quâ corpus centrum verſus cadit, vel aſcenſu recto centrum fugit, pro ultimâ figurâ ſectionis conicæ habendâ eſt, quæ umbilicum habeat S, axem verò ſuum in rectâ GS poſitum, ſi manente utique latere tranſverſo, latere autem recto in infinitum imminuto, ſectio illa conica ſenſim evaneſcat. Hoc enim è Prop. XXXII[a]. efficitur. Quòd ſi velocitas corporis, rectâ cadentis vel aſcendentis, in loco quovis G, ad velocitatem corporis, circa centrum S ad diſtantiam SG motu æquabili circulum ſcribentis, rationem habeat eam, quæ ſubduplicata ſit ejus quam binarius ad unitatem, pro ultimâ evaneſcentis Parabolæ figurâ habenda eſt recta SG; pro Ellipſeos autem evaneſcentis ultimâ, ſi minor ſit velocitas illa prima; pro ultimâ denique Hyperbolæ, ſi major, quàm pro ratione binarii ad unitatem ſubduplicatâ. Hæc enim Propoſitionibus XXXIII[a] & XXXIV[a]. oſtenſa ſunt. Quamobrem ad hujus Problematis effectionem vel Parabola vel Circulus vel Hyperbola æquilateralis, pro variâ velocitatum ratione, uſurpanda eſt, quemadmodum à Newtono præceptum eſt. *Eadem fere Le Sœur & Jacquier.*

(h) NAM ſi viribus iſtiuſmodi centripetis ſollicitatum corpus aliquod rectâ non cadat, id utique per Ellipſin deferetur, cujus Ellipſeos centrum ipſum virium centrum erit (per Prop. X. Cor. I.) Sit APF ellipſis illa, & centrum ejus ſit S, ſemiaxis SA. Et per P, locum quemvis corporis per ellipſin lati, ad axem SA agatur ad perpendiculum recta PC, quæ circulo, qui centro A radio SA ſcriptus fuerit, in D occurrat. Junctis SP, SD, ſector ASD ſectoris elliptici ASP, atque proptere i temporis proportionem ſervabit. (Lemma IV. Cor. II.) Et manente ſemiaxe SA, ſi latitudo ellipſeos infinitè *minuatur*, manebit tamen ſectori ASD temporis proportio. Quare cum circulorum ſectores arcuum,

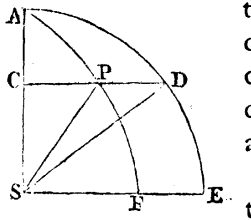
Liber Primus.

D. Dein junctis SI, SD, fiant ſegmentis SEIS, SEDS ſectores HSK, HS*k* æquales, & per Prop. XXXV. corpus G deſcribet ſpatium GC eodem tempore quo corpus K deſcribere poteſt arcum K*k*. Q. E. F.

PROP. XXXVIII. THEOR. XII.

Poſito quòd vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum à centro; dico, quòd cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A ſecundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, deſcribatur circuli quadrans AE, ſitque CD ſinus rectus arcûs cujuſvis AD; & corpus A, tempore AD, cadendo deſcribit ſpatium AC, inque loco C acquiret velocitatem CD.



Demonſtratur eodem modo ex Propoſitione X. quo Propoſitio XXXII. ex Propoſitione XI. demonſtrata fuit (h).

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem ADE.

cum, quibus inſiſtunt, inter ſe proportionem gerant, arcus quoque AD, temporis quo conficitur arcus ellipſeos AP proportionem ſervabit, idque quæcunque fuerit ellipſeos latitudo. Quare & latitudine illâ in nihilum abeunte, & arcu AP cum rectâ AC congruente, arcus circularis AD temporis caſus recti per AC proportionem ſervabit. Q. E. D.

Arcus igitur AD temporum caſus recti inter ſe proportiones ſervare eodem ex Prop. X[a]. ejuſque Corollario oſtenſum eſt modo, quo propoſitio poſt tricefimam ſecundam ex propoſitione undecimâ oſtenſa fuit.

Quod præterea verò Newtonus dicit, arcuum AD ſinus rectos, CD, velocitatum, quas corpus in locis C adeptum fuerit, proportiones inter ſe ſervare, id nos ſic oſtendimus.

Si per orbes ADE, APE quorum communis eſt axis tranverſus SA corpora duo deferantur è vertice A ſimul digreſſa, vigente, qualis poſita eſt, virium centralium lege; arcus AD, AP à corporibus ſimul abſolventur, quæcunque fuerit orbis interioris latitudo (Prop. X. Cor H) Quare & latitudine illâ infinitè imminutâ, eodem tempore abſolvetur arcus AD, quo recta AC caſu recto. Erit igitur velocitas corporis rectâ cadentis, in loco C, ad velocitatem æquabilem corporis, in circulo ADE circumacti, ſicut fluxio ſinûs verſi AC ad fluxionem arcûs AD, ſive ut ſinus rectus CD ad datam SD, circuli utique radium. (Tom I. Excerpt. IV. Not. [e]. Cor.) Expoſitâ igitur datâ quâdam rectâ V, ſit *v* alia recta, eâ quidem lege mutabilis, ut ad datam V eam ſemper illa rationem habeat, quam velocitas corporis rectâ cadentis in loco quovis C ad datam corporis in circulo circumacti velocitatem. Erit igitur *v* : V = CD : SD. Et permutando *v* : CD = V : SD. Datarum verò V, SD inter ſe ratio data. Quare et mutabilium, *v*, CD, ratio tamen data erit.

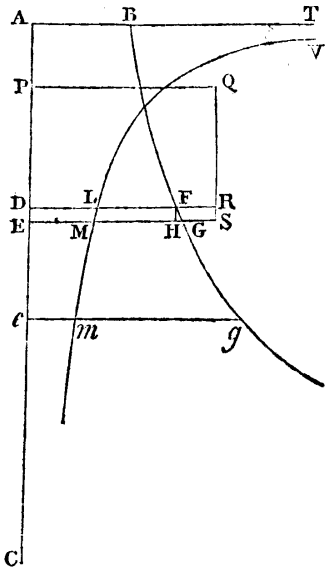
De Motu Corporum

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

PROP. XXXIX. PROB. XXVII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: et contrà.

De loco quovis A in rectâ ADEC cadat corpus E, deque loco ejus E erigatur ſemper perpendicularis EG, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: ſitque BFG linea curva, quam punctum G perpetuò tangit. Coincidat autem EG ipſo motûs initio cum perpendiculari AB, & erit corporis velocitas, in loco quovis E, ut recta, quæ poteſt aream curvilineam ABGE. Q. E. I.



In EG capiatur EM rectæ, quæ poteſt aream ABGE, reciprocè proportionalis, & ſit VLM linea curva, quam punctum M perpetuò tangit, & cujus Aſymptotos eſt recta AB producta; & erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam AE, ut area curvilinea ABTVME. Q. E. I.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quàm minima, DE, datæ longitudinis; ſitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus verſabatur in D; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream ABGE, ſit ut deſcendentis velocitas; erit area ipſa in duplicatâ ratione velocitatis: id eſt, ſi pro velocitatibus in D & E, ſcribatur V & V+I, erit area ABFD ut VV,

(*) Namque *puta* A, P *eſſe loca à quibus ſi caſum unumquodque ſuum duo corpora inchoaverint, alterum*

VV, & area ABGE ut VV + 2VI + II; & diviſim, area DFGE ut 2VI+II; ideoque $\frac{\text{DFGE}}{\text{DE}}$ ut $\frac{2\text{VI}\times\text{II}}{\text{DE}}$; id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2\text{VI}}{\text{DE}}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{\text{I}\times\text{V}}{\text{DE}}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam DE, ut lineola illa directè & velocitas V inverſè; eſtque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inverſè, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{\text{I}\times\text{V}}{\text{DE}}$, hoc eſt, ut longitudo DF. Ergo vis ipſi DF, vel EG, proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream ABGE. Q. E. D. Liber Primus.

Porro cùm tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE deſcribatur, ſit ut velocitas inverſè, ideoque inverſè ut linea recta quæ poteſt aream ABFD; ſitque DL, atque ideo area naſcens DLME, ut eadem linea recta inverſè: erit tempus ut area DLME, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea AE deſcribitur ut area tota ATVME. Q. E. D.

Corol. 1. Si P ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquiſivit eodem loco D; & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ ſit ad DF, ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum PDRQ, eique æqualis abſcindatur area ABFD; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque (*) completo rectangulo DRSE, cùm ſit area ABFD ad aream DFGE ut VV ad 2VI, ideoque ut $\frac{1}{2}$V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area PQRD ad aream DRSE ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ naſcentes DFGE, DRSE; erunt ex æquo areæ totæ ABFD, PQRD ad invicem ut ſe-

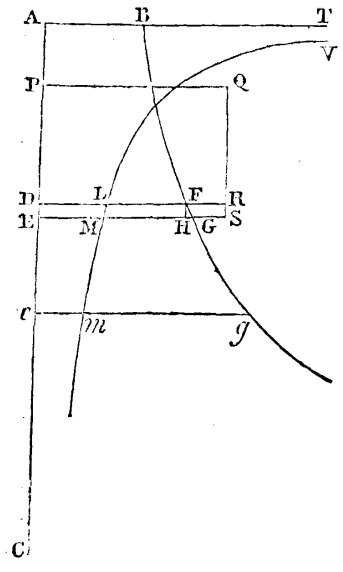
terum quidem vi inæquabili alterum verò æquabili incitatum, in loco D *æquales velocitates adepta fuerint.* Tum completo, &c.

miſſes

De Motu Corporum

miſſes totarum velocitatum (k); & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque D datâ cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum PQRD areâ curvilineâ DF*ge* vel auctum, ſi locus *e* eſt loco D inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum PQRD.



Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciprocè proportionalem lateri quadrato ex PQRD + vel − DF*ge*, & capiendo tempus, quo corpus deſcripſit lineam D*e*, ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea DL*me* ad rectangulum 2PD × DL. Namque tempus, quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD, eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE, in ſubduplicatâ ratione PD ad PE, id eſt (lineolâ DE jamjam naſcente) in ratione PD ad PD+½DE, ſeu 2PD ad 2PD+DE; & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut 2PD ad DE, ideoque ut rectangulum 2PD × DL ad aream DLME; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam D*e*, ut area DLME ad aream DL*me*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2PD × DL ad aream DL*me*.

SECTIO

(k) Corporum quæ à locis A, P demiſſa fuerint, quorum illud vi inæquabili, hoc æquabili, incitari poſuimus, eorum in loco D velocitates literæ *v*, *v* deſignent. Literæ autem *i*, *i* velocitatum *v*, *v* incrementa deſignent ſimul genita. Jam conferendo primas quantitatum naſcentium rationes,

SECTIO VIII.

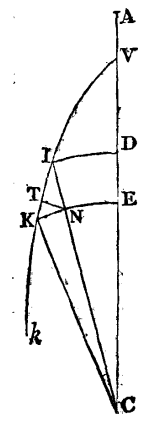
Liber Primus.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.

PROP. XL. THEOR. XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C; & moveatur corpus aliud à V in lineâ curvâ VI*k*. Centro C, intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici DI, EK, rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipſi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum, DE vel IN, quàm minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & ſi vis una IN (per legum Corol. 2.) reſolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo ſecundum lineam NT corporis curſui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus à curſu rectilineo, facietque ipſum de orbis tangente perpetuò deflectere, inque viâ curvilineâ ITK*k* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera, IT, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quàm minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in D & I acceleratione, æqualibus temporibus factæ, ſi ſumantur linearum naſcentium



rationes, erit area ABFD ad aream DFGE ut VV ad 2I × v (per hanc propoſitionem) ſive ut ½v ad I. Erit autem area DFGE ad aream DRSE ut DF ad DR, hoc eſt ut I ad *i*. Rurſum erit area DRSE ad aream PQRD ut 2*i* × *v* ad *vv* (per hanc propoſitionem) hoc eſt ut *i* ad ½*v*. Ex æquo igitur area ABFD erit ad aream PQRD ut ½v ad ½*v*.

De Motu Corporum

DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ, ſunt ut lineæ DE, IT: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ DE & IK; ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas DE & IK, ſunt ut DE & IT, DE & IK conjunctim, id eſt ut DE *quad.* & IT×IK *rectangulum.* Sed *rectangulum* IT×IK æquale eſt IN *quadrato* (a), hoc eſt, æquale DE *quad.* & propterea acceleratione in tranſitu corporum à D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in E & K: & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. Q. E. D.

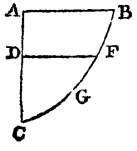
Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo, vel impedimento vaſis abſolutè lubrici, idem præſtatur, quod vi tranſverſâ NT. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantùm cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima à centro diſtantia, ad quam corpus, vel oſcillans, vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$

(a) Propter angulos INK, NTK rectos.

(b) Nempe cùm ea ſit lex vis centripetæ, ut ad quamlibet à centro diſtantiam, literâ A ſignificatam, vis illius efficacia ſit ut A^{n-1}, literâ utique n numerum deſignante; Curva BFG Propoſitionis XXXIX^ma. per ipſum virium centrum C tranſibit, ut in figurâ appoſitâ. Ponatur igitur CA rectæ P æqualis, ſitque CD æqualis indefinitæ A. Eductiſque AB, DF ad perpendiculum, velocitas corporis rectâ cadentis vel aſcendentis in loco D erit ut recta quæ poteſt aream ADFB, hoc eſt, ut $\sqrt{ADFB}$ ſive ut $\sqrt{CAB - CDF}$; eſt enim area ADFB duarum CAB, CDF differentia. Jam verò cùm DF ſit ut vis centripeta in loco D, erit DF



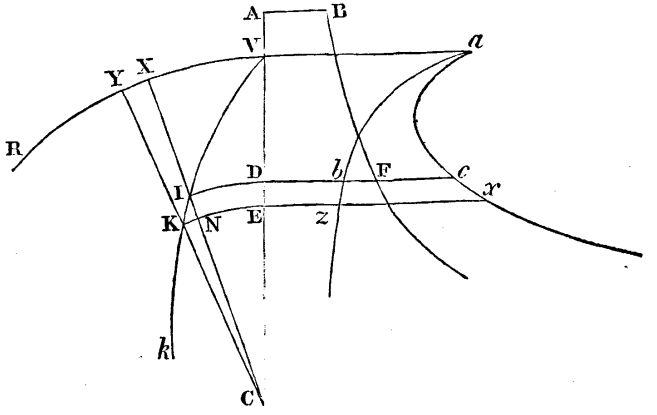
Liber Primus.

$n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas rectâ aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX.) eſt in hâc ipſâ ratione (b).

PROP. XLI. PROB. XXVIII.

Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C, & invenienda ſit trajectoria VIK*k*. Detur circulus VR, centro C, intervallo quovis, CV, deſcriptus; centroque eodem deſcribantur alii quivis circuli ID, KE trajectoriam ſecantes in I & K, rectamque CV in D & E. Age tum



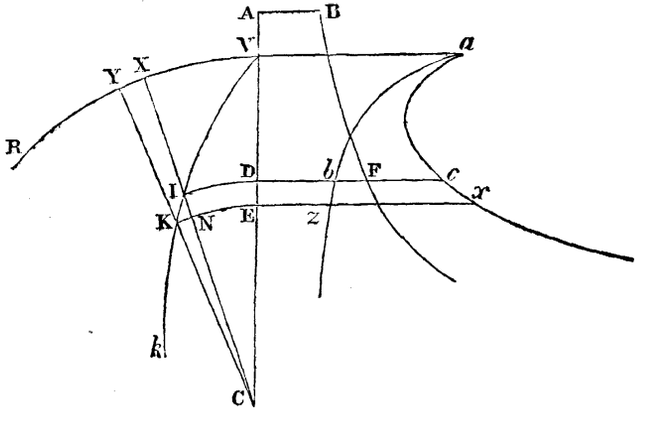
rectam CNIX ſecantem circulos KE, VR in N & X, tum rectam CKY occurrentem circulo VR in Y. Sint autem puncta I & K ſibi in-

DF ut CD^{n-1}. Quare fluxio areæ CDF erit ut $CD^{n-1} \times \dot{CD}$. Quare area CDF erit ut $\frac{1}{n} CD^n$ (Geometr. Flux. Th. IV.) Ac propterea area CAB erit ut $\frac{1}{n} CA^n$. Et ADFB ut $\frac{1}{n}\overline{CA^n - CD^n}$ ſive ut $\frac{1}{n}\overline{P^n - A^n}$ ſive denique dato numero n, ut $\overline{P^n - A^n}$. Quare velocitas corporis rectâ cadentis vel aſcendentis, in loco D, erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

vicem

De Motu Corporum

vicem viciniſſima, & pergat corpus ab v per I & K ad *k*; ſitque punctum A locus ille, de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I. Et ſtantibus quæ in Propoſitione XXXIX, lineola IK, dato tempore quàm minimo deſcriptâ, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ poteſt aream ABFD; & triangulum ICK tempori proportionale dabitur; ideoque KN erit reciprocè ut altitudo IC, id



eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q, ut ſit in aliquo caſu √ABFD ad z ut eſt IK ad KN; & erit in omni caſu √ABFD ad z ut IK ad KN, & ABFD ad zz ut IK*q* ad KN*q*, & diviſim ABFD−zz ad zz ut IN *quad.* ad KN *quad.* ideoque $\sqrt{ABFD-zz}$ ad z, ſeu $\frac{Q}{A}$, ut IN ad KN, & propterea A×KN æquale $\frac{Q\times IN}{\sqrt{ABFD-zz}}$. Unde cùm YX×XC ſit ad A×KN ut CX*q* ad AA (c), erit rectangulum XY×XC æquale. $\frac{Q\times IN\times CX\text{ quad.}}{AA\sqrt{ABFD-zz}}$. Igitur ſi in perpendiculo DF capiantur ſemper D*b*, D*c* ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-zz}}$, $\frac{Q\times CX\text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD-zz}}$ æquales reſpectivè, & deſcribantur Curvæ lineæ *ab*, *ac*, quas puncta *b*, *c* perpetuò tangunt; deque puncto v ad lineam AC erigatur perpendiculum v*a*, abſcindens areas curvilineas VD*ba*, VD*ca*, & erigatur etiam ordinatæ E*z*, E*x*: quoniam rectangulum D*b*×IN, ſeu D*bz*E, æquale eſt dimidio rectanguli, A×KN, ſeu triangulo ICK; & rectangulum D*c*×IN ſeu D*cx*E æquale eſt dimidio rectanguli YX×XC, ſeu triangulo XCY: hoc eſt, quoniam arearum VD*ba*, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ D*bz*E, ICK, & arearum VD*ca*, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ D*cx*E, XCY; erit area genita VD*ba* æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita VD*ca* æqualis ſectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco v, dabitur area ipſi proportionalis VD*ba*, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI (d); & area VD*ca*, eique æqualis ſector VCX unà cum ejus angulo VCI (e). Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus, completo illo tempore, reperietur. Q. E. I (f).

Corol.

(c) Per El. VI. 20. Nimirum cùm figuræ evaneſcentes CXY, CNK ſint ultimò inter ſe ſicut figuræ ſimiles, quarum CX, CN ſunt latera homologa.

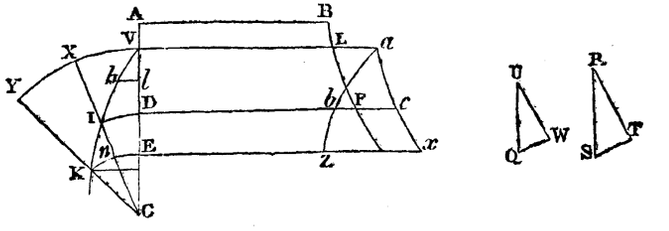
(d) Nempe per quadraturam curvæ VD*ba*, quærendo abſciſſam axis VD, quæ datæ areæ longitudo eſt.

(e) Datâ enim VD dabitur areæ curvæ *a*VD*c* quæ datam habet abſciſſam VD, cujuſque ordinata D*c* datam aliquam relationem ad abſciſſam habet.

(f) ALITER.

Sint VC*b*, ICK ſectores orbitæ, qui motu corporis temporibus æqualibus conficiuntur, & à punctis *k*, K in rectas CV, CI deducantur ad perpendiculum *bl*, K*n*. Sectores VC*b*, ICK, temporibus æqualibus confecti, inter ſe æquales erunt (Prop. I.) Temporibus verò quibus conficiuntur infinitè imminutis, ita tamen ut maneant ſemper inter ſe æqualia, ſectores etiam manebunt ſemper inter ſe æquales. Unde et evaneſcentium ultima inter ipſos ratio æqualitas erit. Sectores autem illi evaneſcentes cum rectangulis CV×*bl*, CI×K*n*, quorum utique dimidiis ultimò æquales ſiunt, proportione ultimò convenient. Rectangula igitur illa ſiunt ultimò inter ſe æqualia. Recta v*a*, à puncto v ad perpendiculum cum rectâ CA educta, curvæ BFG in *a* occurrat. Exponantur rectæ UQ, RS; quarum illa UQ ea ſit quæ poſſit aream ABLV, altera verò RS poſſit

poſſit aream ABFD. Erit igitur UQ ad RS ut velocitas corporis in loco v ad velocitatem ejus in loco I (Prop. XXXIX & XL.) Conſtituantur anguli QUW, SRT angulis *b*VC, KI*n*, quibus rectæ



CV, CI ad curvam in punctis, V, K inclinentur, ſingulatim æquales. Et à punctis Q, S, in rectas UW, RT demittantur ad perpendiculum QW, ST. Ita efformata erunt triangula rectangula UWQ, RTS,

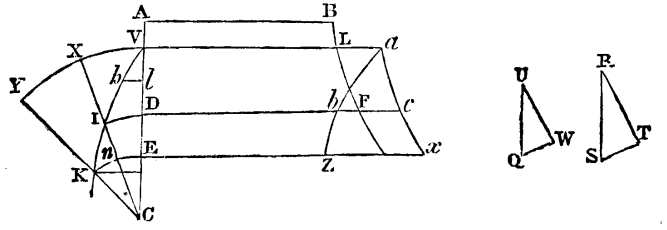
De Motu Corporum

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt, apſides trajectoriarum expeditè inveniri poſſunt. Sunt enim apſides puncta illa, in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam VIK: id quod fit, ubi rectæ IK & NK æquantur, ideoque ubi area ABFD æqualis eſt ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo trajectoria alicubi ſecat lineam illam IC, ex datâ corporis altitudine IC expeditè invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut KN ad IK, id eſt, ut Z ad latus quadratum areæ ABFD.

Corol.

RTS, ad quorum utique ſimilitudinem figuræ evaneſcentes *vlb*, INK ultimò accedent. Erit igitur ultimò *vb* ad *bl* ut UQ ad QW, necnon IK ad K*n* ut RS ad ST. Arcus autem evaneſcens *vb* ad evaneſcentem IK erit ultimò ut velocitas corporis in loco V ad velocitatem corporis in loco I; nimirum cùm arcus illi temporibus æqualibus conficiuntur. Arcus igitur evaneſcens *vb* ad evaneſcentem IK erit ultimò ut recta UQ ad rectam RS. (El. v. 11.) Cùm igitur ſit *bl* ad *vb* ultimò ut WQ ad QU, & *vb* ad IK ultimò ut UQ ad RS, atque rurſum IK ad K*n* ultimo ut RS ad ST, ex æquo erit *bl* ad K*n* ultimo ut QW ad ST. Quare & ratio illa quæ componitur è ratione rectæ VC ad rectam IC, atque eâ quæ ultima eſt evaneſcentis *bl* ad evaneſcentem K*n*, hæc eadem componetur è rationibus rectæ CV ad rectam IC, rectæque QW ad rectam ST. Hoc eſt, ratio ultima rectanguli evaneſcentis CV × *bl*, ad evaneſcens IC × K*n* eadem erit, quæ rectanguli VC × QW ad



rectangulum IC × ST. Fiunt autem evaneſcentia illa ultimò quidem inter ſe æqualia; id enim jam ſuprà oſtendimus. Quare & rectangula CV × QW, CI × ST erunt inter ſe æqualia. Si igitur in rectâ DF capiatur longitudo D*b*, ea utique quæ oritur applicando rectangulum CV × QW ad duplam rectam RT; atque rurſum longitudo D*c*, quæ habeat ad D*b* rationem eam quam quadratum ex CV ad quadratum ex CI, tum ſi ducantur curvæ *abz*, *acx*, ad quas collocentur ſemper puncta *b*, *c*; erit area quidem *vab*D ſectori orbitæ VCI, area autem *vac*D ſectori circulari VCX æqualis. Quod ſic oſtendo. Rectangulum $\overline{Db} \times 2RT$ cùm æquale ſit rectangulo CV × QW, ita enim factum eſt, idem rectangulo IC × ST æquale erit. Quare $Db : IC = ST : 2RT$, & $Db : \frac{1}{2}IC = ST : RT$. Quare cùm ST ſit ad RT ut K*n* ad I*n* ultimò erit $Db : \frac{1}{2}IC = Kn : In$ ultimò. Quare rectangulum evaneſcens D*b* × I*n* triangulo evaneſcenti CIK ſit ultimò æquale. Sed fluxio areæ *vab*D ad fluxionem areæ VCI rationem habet eam, quæ ultima eſt evaneſcentis rectanguli D*b* × I*n* ad evaneſcens triangulum CIK. Fluxiones igitur illæ ſunt inter ſe æquales. Quare & fluentes, areæ nimirum ipſæ *vab*D, VCI, cùm in loco V ſimul à nihilo generari inceperint, inter ſe æquales erunt. Præterea cùm ſit D*c* ad D*b* ut quadratum ex CV ad quadratum ex CI, cùm ſit etiam fluxio areæ *vac*D ad fluxionem areæ *vab*D ut D*c* ad D*b*, & fluxio ſectoris VCX ad fluxionem ſectoris VCI ut quadratum ex VX vel VC ad quadratum ex CI, idcirco erit $\dot{\overline{vac}}D : \dot{\overline{vab}}D = \dot{\overline{VCX}} : \dot{\overline{VCI}}$ (per El. v. 11.) Sed oſtenſæ ſunt $\dot{\overline{vab}}D$, $\dot{\overline{VCI}}$ inter ſe æquales. Quare & $\dot{\overline{vac}}D$, $\dot{\overline{VCX}}$ inter ſe æquales erunt. (El. v. 14.) Quare & fluentes, areæ nimirum ipſæ *vac*D, VCX (cùm in loco V ſimul à nihilo generari inceperint) inter ſe æquales erunt. (Geometr. Flux. Th. II.)

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet conica VRS, & à quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinitè producto CV in puncto T; dein, junctâ CR, ducatur recta CP, quæ æqualis ſit abſciſſæ CT, angulumque VCP ſectori VCR proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo diſtantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco V juſtâ cum velocitate ſecundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoriâ VPQ, quam punctum P perpetuò tangit;

Hâc ratione ſectores VCI, VCX in areas tranſmutantur quæ ordinatis ad perpendiculum erectis, rectam VD, datæ utique diſtantiæ V & indefinitæ CD differentiam, longitudinem habent. Unde ſi ordinatæ D*b*, D*c* ad abſciſſam VD certas aliquas relationes gerant, Curvæ *abz*, *acx* per Newtoni inventa quadraturæ ſubjicientur: per earum vero quadraturas, vel invenientur Curvæ per quas corpora deferentur, vel, ſi datæ ſint curvæ illæ, dabuntur etiam tempora quibus data datarum curvarum ſpatia corpora abſolverint.

Primùm enim ſi datum ſit temporis ſpatium quo corpus aliquod è dato loco V egreſſum ad alium ignotum locum I orbitæ non datæ pervenerit, locus ille I hâc ratione inveniendus erit. Ex dato temporis ſpatio dabitur area *av*D*b* magnitudine; hujus igitur baſis VD dabitur. (Analyſ. per Æquationes Infinitas, C. XI. Sect. 2.) Datâ autem VD dabitur area VD*ca* (ope Libri de Quadraturâ Curvarum). Huic æreæ æqualis eſt ſector VCX, cujus etiam radius VC magnitudine & poſitione datus eſt (id enim poſuimus). Dato autem ſectore VCX, dabitur angulus VCX. Quare recta CX poſitione data; ſed CI magnitudine; cùm datarum VC, VD differentiæ CD æqualis ea ſit. Punctum igitur I datum. Datiſque aliis temporibus, dabuntur alia curvæ VIK puncta; datiſque pluribus punctis, quorum major tamen deſiderabitur numerus prout Curva genere elatior fuerit, ipſa tandem Curva poſitione dabitur.

E contrario ſi Curva VIK poſitione data ſit, tempora quibus corpus aliquod data ejus ſpatia confecerit, hâc ratione invenientur. Datis punctis V, I, propter datum C, dabuntur CV, CI, magnitudine. Quare illarum differentia VD dabitur. Datâque abſciſſâ VD, è naturâ curvæ *abz*, area ejus *vab*D dabitur; cui æqualis eſt ſector VCI. Sector igitur VCI magnitudine datus erit. Si præterea detur punctum K, ſector VCK, per quadraturam curvæ *abz*, magnitudine datus erit. Unde ſi detur tempus, quo alterum è ſectoribus illis confectum fuerit, tempus, quo alterum etiam conficietur, datum erit. Vel ſi temporum illorum neutrum detur, ratio tamen, quæ illis mutuò intercedit, innoteſcet.

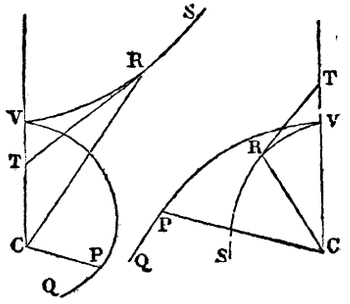
Cæterum curvarum *abz*, *acx* ordinatæ D*b*, D*c* ad abſciſſam VD relationes habent hiſce ferè formulis oſtenſas.

Datum rectangulum CV × QW nota q^2 deſignet, diſtantiam indefinitam CI litera A, rectamque $\frac{q^2}{A}$ litera Z. Jam cùm rectangula IC × ST, CV × QW, inter ſe æqualia ſint (id enim oſtenſum), erit $ST = \frac{q^2}{A} = Z$. Sed $RS = \sqrt{ABFD}$ (ita enim factum eſt). Unde in triangulo RTS, cujus angulus ad T rectus, $RT = \sqrt{ABFD - ZZ}$. Ergo D*b*, quæ facta eſt $\frac{CV \times QW}{2RT} = \frac{q^2}{2RT}$, hæc inquam $Db = \frac{q^2}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Rurſum cùm facta ſit D*c* ad D*b* ut CV^2 ad CI^2, erit $Dc = \frac{Db \times CX^2}{CI^2}$. Hoc eſt $Dc = \frac{q^2 \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Quæ ſane formulæ haud aliâ re à Newtonianis abſunt, niſi quòd pro litera ejus Q notam q^2 poſuerim, ut ſuperficiem ſcilicet apertiùs ſignificarem. Verùm illæ D*b*, D*c* ſimpliciùs quidem, neque ad computandi utilitates minùs ut opinor accommodatè, hiſce formulis indicantur: $Db = \frac{q^2}{2RT}$. $Dc = \frac{CV^2}{CI^2} \times \frac{q^2}{2RT}$.

ideoque

De Motu Corporum

ideoque ſi conica ſectio VRS Hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: ſin ea Ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contrà, ſi corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco V, & perinde ut incœperit vel obliquè deſcendere ad centrum, vel ab eo obliquè aſcendere, figura VRS vel Hyperbola ſit vel Ellipſis, inveniri poteſt trajectoria, augendo vel minuendo angulum VCP in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam verſâ, aſcendet corpus obliquè in trajectoriâ VPQ, quæ invenitur, capiendo angulum VCP ſectori elliptico VRC proportionalem, & longitudinem CP longitudini CT æqualem, ut ſuprà. Conſequuntur hæc omnia ex propoſitione præcedente, per Curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratiâ miſſam facio (g).



PROP. XLII. PROB. XXIX.

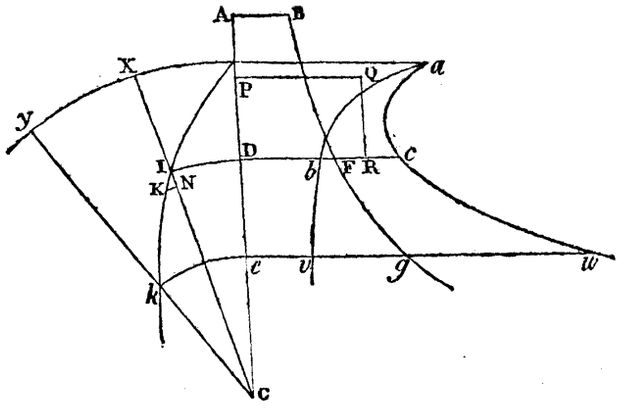
Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus propoſitionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I ſecundum lineolam IK, eâ cum velocitate, quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco P cadendo acquirere poſſet in D: ſitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in I, ut DR ad DF. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque C, & intervallo C*k* deſcribatur circulus, *ke*, occurrens rectæ PD in *e*, & erigantur curvarum BF*g*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo PDRQ, datâque lege vis centripetæ, quâ corpus primum agitatur, datur curva linea BF*g*, per conſtructionem Problematis XXVII. & ejus Corol 1. Deinde ex dato angulo CIK datur proportio naſcentium IK,

(g) Vide Librum Noſtrum *De Viribus Centralibus quæ rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervant.*

(h) *Efficiendum*

IK, KN; & inde, per conſtructionem Prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis D*bve*, datur tum corporis altitudo C*e* vel C*k*, tum Liber Primus.



area D*cwe*, eique æqualis ſector XC*y*, anguluſque IC*k*, & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. Q. E. I.

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam, in receſſu quidem à centro, variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt; in æqualibus autem à centro diſtantiis, eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.

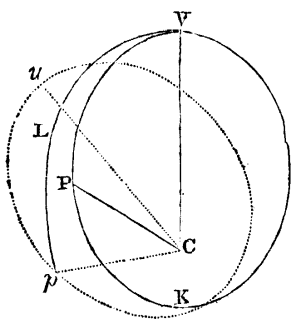
PROP. XLIII. PROB. XXX.

Efficiendum eſt (a) *ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quieſcente.*

(a) *Efficiendum eſt.* i. e. Definienda eſt vis centripeta, quâ efficiatur illud; datâ nimirum lege vis centripetæ quâ corpus urgetur in orbitâ quieſcente.

De Motu Corporum

In orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo à V versus K. A centro C agatur semper C*p*, quæ sit ipsi CP æqualis, angulumque V*cp* angulo VCP proportionalem constituat; & area, quam linea C*p* describit, erit ad aream VCP, quam linea CP simul describit, ut velocitas lineæ describentis C*p* ad velocitatem lineæ describentis CP; hoc est, ut angulus V*cp* ad angulum VCP, ideoque in datâ ratione, & propterea tempori proportionalis. Cùm area tempori proportionalis sit, quam linea C*p* in plano immobili describit, manifestum est, quòd corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ, revolvi possit unà cum puncto *p* in curvâ illâ lineâ, quam punctum idem *p*, ratione jam expositâ, describit in plano immobili. Fiat angulus V*cu* angulo PC*p*, & linea C*u* lineæ CV, atque figura *ucp* figuræ VCP æqualis; & corpus in *p* semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *ucp*, eodemque tempore describet arcum ejus, *up*, quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem, VP, in figurâ quiescente VPK describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum Propositionis VI. vis centripeta, quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ, quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur Problema (b). Q. E. F.



PROP.

(b) ANALYSIS PROBLEMATIS.

Corpus quodpiam viribus centripetis, quæ centrum C respiciant, incitatum feratur per orbitam quandam immobilem VPK. Circum centrum immobile C converti intelligatur figura *ucp* immobilis illius, VCP, per omnia similis et æqualis. Et per Curvam mobilem *up* ferri intelligatur corpus quoddam, eâ quidem lege, ut orbitæ suæ mobilis sectorem quemvis *ucp* eodem tempore absolvat, quo corpus primum similem & æqualem orbitæ suæ immobilis VCP sectorem. Vel quod eodem redit, positis rectis VC, *uc* æqualibus, item angulis VCP, *ucp*; corpora quæ ex punctis *v*, *u*, ipso motûs initio congruentibus, exierint, loca P, *p* orbitæ unumquodque suæ simul appulisse intelligantur. Datâ lege vis centripetæ, quâ corpus retineatur in orbitâ immobili VPK, constituenda est lex vis alterius, quæ cùm idem centrum C respiciat, motum corporis, qualem pericripsimus, in orbitâ mobili præstare possit.

Sit V*Lp* linea illa curva, quam corpus in orbitâ mobili latum, motu composito, proprio utique in orbita, orbitæque circum centrum, in plano immobili scripserit. Areæ igitur V*cp*, VCP, quas corpora

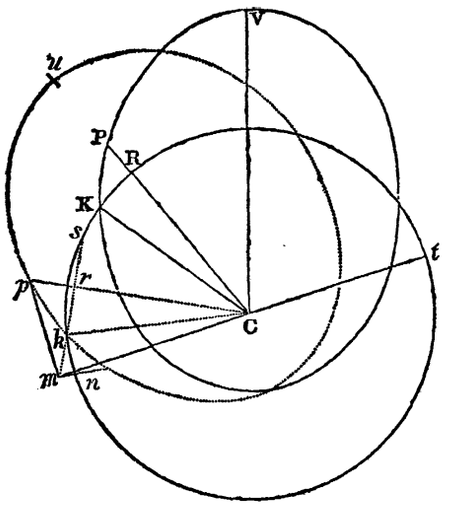
PROP. XLIV. THEOR. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.

Partibus orbis quiescentis, VP, PK, sunto similes & æquales orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum, P, K, distantia intelligatur esse quàm minima. A puncto *k* in rectam *p*C demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut sit *mr* ad *kr* ut angulus V*cp* ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines, PC & *p*C, KC, & *k*C, semper æquantur; manifestum est, quòd linearum PC & *p*C incrementa vel decrementa semper sint æqualia; ideoque si corporum, in locis P & *p* existentium, distinguantur motus singuli (per legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas, PC, *p*C, determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis PC, *p*C perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis *p* erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ *p*C ad motum angularem lineæ PC, id est, ut angulus V*cp* ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K, corpus *p*, æquali in centrum motu, æqualiter movebitur à *p* versus C; ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *p*C perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam à lineâ *p*C, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit à lineâ PC, ut

corpora viribus centrum C respicientibus sollicitata in plano immobili simul confecerint, datam inter se rationem gerent (per Prop. I^m. hujus Libri). Quare & earum fluxionibus eadem data ratio intercedet. (Geom. Flux. Th. IV.) Sed propter radios CP, C*p* inter se æquales, arearum atque angulorum V*cp*, VCP fluxionibus eadem inter ipsas ratio erit. Angulorum igitur V*cp*, VCP fluxionibus data quædam ratio intercedit. Quare & anguli illi vel eandem inter se rationem gerent, vel alter altero dato major erit. (Geometr. Flux. Th. IV.) Puta angulum VCP infinitè minui, ut recta CP cum ipsâ CV congruat. Quo facto, area VCP unà cum angulo VCP, in nihilum abierit. Sed propter datam arearum VCP, V*cp* inter ipsas rationem, illâ VCP in nihilum abeunte, altera quoque V*cp* in nihilum abibit. Et cum illâ V*cp* angulus etiam V*cp* in nihilum abierit. Quare anguli VCP, V*cp* in nihilum simul abierint. Neuter igitur eorum altero dato major erit; sed datam fluxionum suarum rationem anguli illi inter se habebunt. Ea igitur erit curvarum V*cp*, V*cp* inter ipsas cognatio, ut anguli quibus radii æquales, CP, C*p*, ad communem VC inclinentur, datam inter se rationem habeant. Curvâ igitur VPK positione datâ, altera V*Lp* positione dabitur. Quare ope Corollarii 5. Prop. VI. dabitur lex vis centripetæ, quæ motum corporis in Curvâ illâ V*Lp* positione datâ præstare poterit.

De Motu Corporum



eſt motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis alterius P. Quare cùm *kr* æqualis ſit diſtantiæ quam corpus P acquirit à lineâ PC, ſitque *mr* ad *kr* ut angulus vc*p* ad angulum vcP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis P; manifeſtum eſt, quòd corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita ſe habebunt, ubi corpora *p* & P æqualiter ſecundum lineas *p*c & Pc moventur, ideoque æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pcn* ad angulum *pck* ut eſt angulus vc*p* ad angulum vcP, ſitque *n*c æqualis *k*c, & corpus *p*, completo illo tempore, reverâ reperietur in *n*; ideoque vi majore urgetur quàm corpus P, ſi modò angulus *ncp* angulo *kcp* major eſt, id eſt ſi orbis *upk* vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quàm ſit dupla ejus quâ linea cP in conſequentia fertur; & vi minore, ſi orbis tardiùs movetur in antecedentia. Eſtque virium differentia ut locorum

(c) Siquidem à puncto *n* in rectam c*p* ad perpendiculum deductâ *n*ſ, erunt naſcentes *mr*, *n*ſ primò quidem inter ſe æquales.

(d) EXPLICATIO DEMONSTRATIONIS NEWTONIANÆ.

Sint *p*, *n* loca corporis per orbitam mobilem lati, quando corpus alterum orbitæ immobilis loca P, K teneat. Erunt igitur illa, *p*, *n*, puncta duo lineæ vL*p* figuræ p. 162. Situs orbitæ mobilis, quo tempore corpus quod per eam fertur locum *p* teneat, is ſit quem figura *upc* repræſentat, & capiatur Curvæ *up* arcus *pk* arcui PK orbitæ immobilis æqualis. A puncto *k* in junctam c*p* ad perpendiculum demittatur *kr*, quæ junctæ c*n* in *m* occurrat. Punctum *n* erit ad circulum, centro c radio c*k* ſcriptum; nempe cùm æquales ſint c*k*, c*n*, quippe quarum hæc & illa rectæ cK æqualis eſt. Scribatur igitur circulus ille, rectiſque *n*c, *mk* productis in punctis, *t*, *s*, iterum occurrat. Denique jungatur *pm*. Ad motum corporis è loco *p* per arcum lineæ vL*p* naſcentem *pn* quatuor motus recti conſpirant. Primus per tangentem arcûs *pk*; alius verſus centrum c, qui fugam centri à motu primo oriundam ſiſtat, corpuſque à concurſu rectæ c*k* cum tangente arcûs *pk* in ipſum locum *k* transferat.

locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, tranſferri debet. Centro c intervallo c*n* vel c*k* deſcribi intelligatur circulus ſecans lineas *mr*, *mn* productas in *s* & *t*, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque *mn* æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cùm autem triangula *pck*, *pcn*, dato tempore, dentur magnitudine, ſunt *kr* & *mr* (c), earumque differentia *mk*, & ſumma *ms*, reciprocè ut altitudo *p*c; ideoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciprocè ut quadratum altitudinis *p*c. Eſt & *mt* directe ut $\frac{1}{2}mt$, id eſt, ut altitudo *p*c. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens *mn*, eique proportionalis virium differentia, reciprocè ut cubus altitudinis *p*c (d). Q. E. D. LIBER PRIMUS.

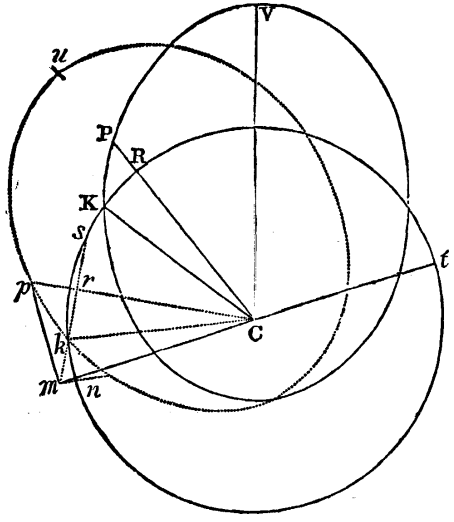
Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & *p*, vel K & *k*, eſt ad vim, quâ corpus motu circulari revolvi poſſit ab R ad K, eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens *mn* ad ſinum verſum arcûs naſcentis RK; id eſt, ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates, F, G, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus vcP ad angulum vc*p*, ut GG−FF ad FF. Et propterea, ſi centro c, intervallo quovis cP, vel c*p*, deſcribatur ſector circularis æqualis areæ toti vPc, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, ſectorem illum eodem tempore, quo deſcripta ſit area vPc, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut

transferat. Hiſce duobus, propter angulorum PcK, *pcn* rationem datam, tertius accedere debet, tranſverſus quidem, ſecundum perpendiculum rectæ c*p* directus, è converſione orbitæ mobilis circum centrum c natus, quo corpus è loco *k* in rectam c*n* transferatur. Tribus hiſce motibus corpus è loco *p* in locum *m* tranſlatum eſſet, quo tempore corpus alterum, per orbitam immobilem, è loco P in locum K. Quartus igitur jungendus eſt, verſus centrum directus, qui fugam centri ex tranſverſo oriundam ſiſtat, atque corpus è loco *p* egreſſum, ſub finem temporis illius quo corpus alterum arcum PK confecerit, in loco ſuo *n* conſtituat. Ex quatuor igitur motibus rectis qui ad motum corporis per arcum *pn* conſpirare debent, duo verſus centrum diriguntur. Atque horum alter, qui fugæ centri à motu per tangentem arcûs *pk*, vel PK, oriundæ obviam fit, corporibus è locis *p* & P egredientibus communis eſt. Alter corporis è loco *p* ſecundum arcum *pn* iter occupantis peculiaris. Nempe qui fugæ centri obſiſtat, è motu tranſverſo ejuſdem corporis peculiari oriundæ. Atque hic motus motuum centralium in locis *p*, P differentia erit; et à virium centralium, quales in illis locis vigeant, differentiâ veniet; quæ proinde quantitate ſuâ illius rationem ſervabit. Ille verò naſcentis *mn* rationem primam. Jam verò naſcentium *mn* rationes primas cuborum è radiis Pc contrarias eſſe, id ni fallor Newtonus ipſe luculentiſſimè oſtendit.

De Motu Corporum

GG − FF ad FF. Namque sector ille & area *pck* sunt ad invicem ut tempora, quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis VPK Ellipsis sit, umbilicum habens C, & apsidem summam V; eique similis & æqualis ponatur ellipsis *upk*, ita ut sit semper *p*C æqualis PC, & angulus V*c*p sit ad angulum VCP in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel *p*C scribatur A, & pro Ellipseos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, & contrà. Exponatur enim vis, quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi, per quantitatem $\frac{FF}{AA}$; & vis in V erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. Vis autem, quâ corpus in Circulo, ad distantiam CV, eâ cum velocitate revolvi posset, quam corpus in Ellipsi revolvens habet in V, est ad vim quâ corpus in Ellipsi revolvens urgetur in apside V, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum CV (c), ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ sit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet $\frac{RGG-RFF}{CV\ cub.}$: estque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V, quibus corpus P in ellipsi immotâ, VPK, & corpus *p* in ellipsi mobili, *upk*, revolvuntur. Unde cùm (per hanc Prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A sit ad seipsam in altitudine



(c) Per Cor. 3. Prop. VI. hujus Libri. Nimirum cùm circuli, qui sectionem conicam in apside osculatur, chorda, quæ per umbilicum sectionis, ducta est lateri ejus recto æqualis est.

(f) Nam vis quâ corpus, quod per orbitam VPK feratur, urgetur in loco V, erit ad vim, quâ corpus aliud, pari velocitate è loco V emissum, retineatur in circulo cujus radius CV (vel T) ut T ad R (per Cor. 3. Prop. VI.) Quare si vis illa prior exponatur per $\frac{VFF}{TT}$, hæc altera exponetur per $\frac{RVFF}{T\ cub.}$. Et vis quæ sit ad hanc alteram ut GG − FF ad FF, ea quidem exponetur per $\frac{RVGG-RVFF}{T\ cub.}$.

Ea

dine CV ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi potest in ellipsi immobili VPK, addatur excessus $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota, $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, quâ corpus in ellipsi mobili *upk*, iisdem temporibus, revolvi possit. Liber Primus.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur, quòd si orbis immobilis, VPK, Ellipsis sit centrum habens in virium centro C; eique similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *upk*; sitque 2R ellipseos hujus latus rectum principale, & 2T latus transversum sive axis major, atque angulus V*c*p semper sit ad angulum VCP ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\ cub.}$ & $\frac{FFA}{T\ cub.} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ respectivè.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima CV nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis VPK habet in V, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili VPK revolvi potest in loco V, dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis P indefinitè dicatur X, altitudine CP nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli V*c*p ad angulum VCP: erit vis centripeta, quâ corpus idem eosdem motus in eâdem trajectoriâ *upk*, circulariter motâ, temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG-VRFF}{A\ cub.}$ (f).

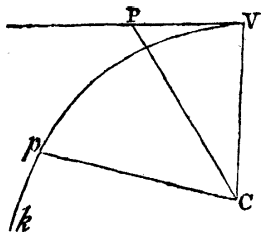
Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ; & inde inveniri novi orbes immobiles, in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam CV positione datam erigatur perpendiculum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturque CP, &

Ea verò differentia erit virium, quibus corpora in locis, V, *v*, orbitæ immotæ mobilisque urgentur. Quæ differentia, cùm fit ad differentiam in locis aliis P, *p*, sicut cubus ex A ad cubum ex T, differentia virium in locis P, *p* exponetur per $\frac{RVGG-RVFF}{A\ cub.}$. Huic differentiæ addatur vis in orbe immoto, in loco P, per literam X designata; fiet $X + \frac{RVGG-RVFF}{A\ cub.}$ vis tota in loco *p* orbitæ mobilis. Q. E. D.

ipsi

De Motu Corporum



ipſi æqualis agatur c*p*, conſtituens angulum vc*p*, qui ſit ad angulum vcP in datâ ratione; vis, quâ corpus gyrari poteſt in Curvâ illâ v*pk*, quam punctum *p* perpetuò tangit, erit reciprocè ut cubus altitudinis c*p*. Nam corpus P per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi poteſt in rectâ vP. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis cP vel c*p* reciprocè proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam v*pk*. Eſt autem hæc Curva v*pk* eadem cum Curvâ illâ vPQ in Corol. 3. Prop. XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora, hujuſmodi viribus attracta, obliquè aſcendere (g).

PROP. XLV. PROB. XXXI.

Orbium qui ſunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apſidum.

Problema ſolvitur arithmeticè, faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipſi mobili (ut in Propoſitionis ſuperioris Corol. 2 vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis, quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ, quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum v apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maximâ cv, A pro altitudine quâvis aliâ cP vel c*p*, & X pro altitudinum differentiâ cv−cP; & vis, quâ corpus in Ellipſi circa umbilicum ſuum C (ut in Corol. 2.) revolvente movetur, quæque in Corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, ſubſtituendo

(g) Nimirum generalis eſt inventio lineæ vLP, qualis in Prop. XLIII. à Newtono tradita eſt, qualiſcunque fuerit figura orbitæ immobilis vPK, aut quæcunque fuerint vires centrales, à quibus corpus in illâ orbitâ retineatur. Puta igitur vires eas paulatim imminui, et ad nullas tandem redigi. Quo facto orbita vPK in rectam abibit, per quam corpus motu ſemel impreſſo æquabiliter feretur, & linea vL*p* lineæ v*pk* hujus Corollarii figuram induet. Sed vis centralis, quâ corpus urgetur in loco quovis *p*, vim centralem in loco cognato P lineæ immobilis parte quâdam exuperat, quæ ſit contrariè ut cubus è cP. (Id enim generaliter quoque oſtenſum eſt, nullâ neque figuræ quâ prædita

ſtituendo T−X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda Liber Primus. ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.*: & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, ſive (ſcribendo T−X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub.-3TTX+3TXX-X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet RGG−RFF+TFF ad T *cub.* ut −FFX ad −3TTX+3TXX−X *cub.* ſive ut −FF ad −3TT+3TX−XX. Jam cùm orbis ponatur Circulo quàm maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut −FF ad −3TT; ſeu GG ad TT ut FF ad 3TT, & viciſſim GG ad FF ut TT ad 3TT, id eſt, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc eſt angulus vc*p* ad angulum vcP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cùm corpus in ellipſi immobili, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo, conficiat angulum vcP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipſi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apſide ſummâ ad apſidem imam deſcendendo, conficiet angulum vc*p* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus urgente uniformi vi centripetâ deſcribit, & orbis illius, quem corpus in ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter, ſed tunc cùm ad formam circularem quàm maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apſidem ſummam & apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 gr. 55 m. 23 ſec. ad centrum; perveniens ab apſide

prædita ſit lineâ vPK, neque virium centralium, quæ per lineæ illius ductum vigeant, ratione habitâ.) Cùm vero nulla planè ſit vis centralis in loco P, quando linea vPK recta utique exiſtat; quam in lineâ mobili in loco *p* poſuimus vis centralis exuperantiam, ea vim illam totam prorſus abſumet. Unde totæ vires per lineam v*pk* rationes cuborum è radiis contrarias induent. Præterea linea v*pk* eadem erit atque vPK Corollarii 3. Prop. XLI. modò Ellipſis, à quâ genita eſt illa vPK, Circuli formam induat. Ita enim ſectores elliptici vCR cum angulis vCR proportione mutuâ convenient, rectæque CT horum angulorum ſecantibus, ſive rectis cP vel c*p* hujus figuræ, æquales evadent.

De Motu Corporum

ſummâ ad apſidem imam, ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad apſidem ſummam rediens, ubi iterum confecit eundem angulum; & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3}, ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n, ſeu $\overline{T-X}|^n$, in ſeriem indeterminatam per methodum noſtram ſerierum convergentium reductus, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius, RGG − RFF + TFF − FFX, fit RGG − RFF + TFF ad T^n ut − FF ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut − FF ad $-nT^{n-1}$; ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; ideoque G ad F, id eſt angulus vc*p* ad angulum vcP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus vcP, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus vc*p*, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab apſide imâ ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis à centro, id eſt, ut A, ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4, & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. ſeu 90 gr. Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius, corpus perveniet ad apſidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apſidem ſummam; & ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propoſitione x. manifeſtum eſt. Nam corpus, urgente hâc vi centripetâ, revolvetur in Ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quòd ſi vis centripeta ſit reciprocè ut diſtantia, id eſt directè ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2; ideoque inter apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 gr. 16 m. 45 ſec. Et propterea corpus, tali vi revolvens,

Liber Primus.

vens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apſide ſummâ ad imam, & ab imâ ad ſummam perveniet, in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciprocè ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id eſt reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, ſeu ut $-\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. & propterea corpus de apſide ſummâ diſcedens, & ſubinde perpetuò deſcendens, perveniet ad apſidem imam, ubi implevit revolutionem integram; dein, perpetuò aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$, id eſt, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A \text{ cub.}}$ ſeu (per eandem methodum noſtram ſerierum convergentium) ut $\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \text{ &c.}}{A \text{ cub.}}$. Et collatis numeratorum terminis, fiet RGG − RFF + TFF ad $bT^m + cT^n$, ut − FF ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas, quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam cv, ſeu T, arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus vc*p* ad angulum vcP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cùm angulus vcP inter apſidem ſummam & apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180 gr. erit angulus vc*p* inter eaſdem apſides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA + cA^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento, ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes

De Motu Corporum

A *cub.* Dein pars data numeratoris, qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG−RFF+TFF−FFX ad ipsius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ sunt: et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; & contrà. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est (h). Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere non posse (i): corpus tali vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere, nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in recessu à centro, decrescit in majore quàm triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quàm triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & contrà, si corpus de apside

(h) Quantitatem enim illam quam in exemplis secundis litera *n* designavit, eam jam litera *x* significet, ut fit vis centripeta ut A^{x-3}. Erit igitur G : F = 1 : $\sqrt{x}$; id quod calculi in exemplis illis subducti satis evincunt. Unde $\sqrt{x} = \frac{F}{G}$, & $x = \frac{FF}{GG}$; vel si pro illis G, F scribantur *m*, *n*, $x = \frac{nn}{mm}$. Unde $A^{x-3} = A^{\frac{nn}{mm}-3}$. Q. E. D.

(i) Nam si auctâ corporis à centro distantiâ vis centripeta decrescat, ponatur ea vis esse ut A^{-z}. Erit igitur $\frac{nn}{mm}-3=-z$. Et $\frac{nn}{mm}=3-z$. Quare illa *z* ternario non potest esse major, ne quantitas quadratica $\frac{nn}{mm}$ negativa fit. Q. E. D.

side ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eo longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit *m* ad *n* ut 8, vel 4, vel 2, vel $1\frac{1}{2}$, ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$, vel $\frac{1}{16}-3$, vel $\frac{1}{4}-3$, vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$, vel $A^{\frac{1}{16}-3}$, vel $A^{\frac{1}{4}-3}$, vel $A^{\frac{4}{9}-3}$; id est, reciprocè ut $A^{3-\frac{1}{64}}$, vel $A^{3-\frac{1}{16}}$, vel $A^{3-\frac{1}{4}}$, vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit *m* ad *n* ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{mm}{nn}-3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit; erit *m* ad *n* ut $\frac{3}{4}$, vel $\frac{2}{3}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$, vel $A^{\frac{9}{4}-3}$, vel A^{9-3}, vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$, vel $A^{\frac{3}{4}}$; aut directè ut A^{6} vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit *m* ad *n* ut 363 gr. ad 360 gr. sive ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{39523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{20523}{14641}}$; seu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{43}}$ proximè (k). Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quàm duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit.

(k) Cùm igitur motus menstruus Apsidum orbitæ Lunaris tres gradus vix exuperet, vires, quas centrum terræ respicientes in orbitâ illâ dominari cernimus, rationem duplicatæ distantiarum contrariam haud magnoperè aspernantur. Imò potiùs affectant. Et motus ille apsidum tardissimus non ex aliâ virium illarum conditione venit, sed ex vi quâdam extraneâ quæ centralibus se immiscet. Hæc autem quanta esse debeat, Newtonus in sequente Corollario æstimare instituit.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contrà. Ut si vis, quâ corpus revolvitur in Ellipsi, sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA (l), ideoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^4}{A\text{ cub.}}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 (m) partibus minorem quàm vis altera quâ corpus revolvitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180.7623, id est, 180 gr. 45 m. 44. s. Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 s. perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa, singulis revolutionibus progrediendo, conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis Lunæ est duplo velocior circiter (n).

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum

(l) Nempe vis Solis, quæ motum apsidibus orbitæ Lunaris infert, reliquis manentibus, est ut distantia Lunæ à centro Terræ; sicut in Corollario 16. Prop. LXVI. hujus Libri Newtonus ostensus est. Idcirco eas ponit vires extraneas, quæ cum quantitatibus cA proportione mutuâ conveniant.

(m) —*esse* 357,45.] Nempe vires Solis in Lunam, quæ apsidibus ejus motum inferunt, in partes duas resolvendæ sunt, sicut in Propositione LXVI. hujus Libri & Corollariis ejus Newtonus docet, quas partes rectæ LM, MN, fig. pag. 203. referunt. Harum LM dimidio ferè mense apsides contra signorum ordinem remeare cogit: altera MN, reliquo dimidio spatii mensirui, progredi. Et cùm duarum LM, MN, hæc MN major sit, progressus regressu major erit, atque integro mense apsides promoverint. (Prop. LXVI. Cor. 7.) Hinc progressus ille apsidum orbitæ lunaris, quem Astronomi observârunt, tribuendus est differentiæ, quâ vis MN vim LM exuperat: et verisimile est eundem esse, quem spatio mensirruo vis aliqua extranea procrearet, quæ mediocri earum differentiæ semper æqualis esset, & Lunam à centro terræ retrahendo, vim ejus centripetam in majoribus distantiis minorem redderet, quàm pro contrariâ quadratorum ex distantiis ratione. Jam verò vis mediocris LM est ad illam, quâ Luna in mediocri distantiâ centrum terræ petit, sicut 1 ad $178\frac{29}{40}$, id enim in Prop. XXV. Libri 3. calculis subductis Newtonus probat. Maxima vis MN tripla est illius LM. Mimima, nulla est. (Prop. LXVI. Cor. 7. & Prop. XXVI. Libri 3.) Mediocris igitur erit ea, quæ sit ad mediocrem LM ut $1\frac{1}{2}$ ad 1. Quare mediocris MN mediocrem LM parte dimidiâ superabit. Unde cùm LM sit ad vim centripetam Lunæ terram versus mediocrem, ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, differentia, quâ mediocris MN superat mediocrem LM, erit ad vim illam mediocrem centripetam Lunæ versus terram ut 1 ad 357,45. *Ponamus igitur* (inquit Newtonus) *vim extraneam* tot partibus esse minorem vi alterâ, quâ corpus per Ellipsin convertatur, & calculos subducendo explorem us, an motus apsidum, qui ex tali vi extraneâ oriturus est, is *sit* quem in orbitâ Lunari Astronomi deprehenderunt.

trum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores, qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quàm perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium, hîc considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolutè lubrica, ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corporum incumbunt, quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur, & orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus. Liber Primus.

SECTIO X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROP. XLVI. PROB. XXXII.

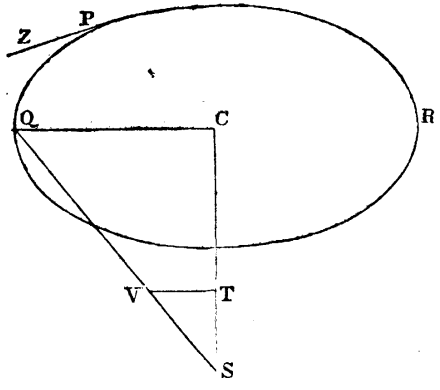
Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis

(n) Vis extraneæ æstimatio dato apsidum motu viâ rectâ ad hunc ferè modum iniri possit. Ponatur translatio mensirua apsidis summæ 3°. cùm vis centralis in orbe elliptico immobili fit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ut cA. Pro literis b, m, n, in exemplis tertiis scribendi sunt numeri 1, 1, 4, eritque angulus conversionis ab apside summâ summam usque rursum apsidem $360\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 363$. Unde $\overline{360}^2 \times \overline{1-c} = \overline{363}^2 \times \overline{1-4c}$. Sive $\overline{360}^2 - \overline{360}^2 c = \overline{363}^2 - 4 \times \overline{363}^2 c$. Quare $4 \times \overline{363}^2 - \overline{360}^2 \cdot c = \overline{363}^2 - \overline{360}^2 = \overline{6 \times 360} + 9 = 2169$. Sive $397476 \times c = 2169$. Quare $c : 1 = 2169 : 397476 = 1 : \frac{397476}{2169} = 1 : 178\frac{3}{4}$ propemodum. Quid igitur? Num tanta statuenda est vis solis mediocris, quæ progressum illum mensirruum trium circiter graduum apsidum Lunarium pariat. Haud censeo. Corollarium illud 7. Prop. LXVI. quod certissimis rationibus confirmatum est, erroris argueret. Ipsam potius, quam hîc usurpavimus, vis extraneæ æstimationem suspectam habeo. Cujus exquisita ratio in eo certè nititur, quòd vires, quæ in utroque orbe, stabili mobilique, vigeant, commensu licet radiorum aliæ, centrum tamen idem respiciant. Inde enim venit constans illa angulorum vcp, vcp inter ipsos ratio, quam Problematis XXX. compositio postulat. Et è ratione illâ constante Propositionis XLIV. Corollariorumque ejus doctrina tota pendet, quæque in hâc Propositione tradita est calculorum ratio. Corpus autem Lunæ vi triplici incitatur. Primum vi propriâ terræ versus terræ centrum. Tum solari, quæ in duas resolvitur; quarum altera, centrum terræ spectans, efficaciam vis terrestris auget; altera verò, secundum rectam directa quæ cum eâ parallela sit, quæ centra solis terræque jungat, cum duabus aliis vim totam efficit à centro terræ nisi in ipsis eorporum conjunctionibus paullum declinantem. (Prop. LXVI. hujus Libri.) Unde consequens erit motus Lunares per motum corporis in orbe elliptico, qui ipse circum umbilicum convertatur suum, minus exquisitè repræsentari. Cæterum hunc locum de apsidum motu aliisque Lunaribus, accuratè pertractârunt Clairaultius & T. Simson.

De Motu Corporum

figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.

Sit s centrum virium, sc diſtantia minima centri hujus à plano dato, P corpus de loco P ſecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ ſuâ revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & ſi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ, quâ corpus trahitur verſus centrum S, & agatur VT quæ ſit parallela CQ & occurrat SC in T: vis SV reſolvetur (per legum Corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST, trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directè verſus punctum C in plano datum; ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac ſi vis ST tolleretur, & corpus vi ſolâ TV revolveretur circa centrum C in ſpatio libero. Datâ autem vi centripetâ TV, quâ corpus Q in ſpatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per Prop. XLII.) tum trajectoria PQR, quam corpus deſcribit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contrà. Q. E. I.



PROP. XLVII. THEOR. XV.

Poſito quòd vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citróque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.

Nam,

Liber Primus.

Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore propoſitione, vis SV, quâ corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia SQ; atque ideo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV, quâ corpus trahitur verſus punctum C, in orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur verſus punctum C, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum S; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in ſpatiis liberis circa centrum S; ideoque (per Corol 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum C, vel periodos movendi ultrò citróque in lineis rectis, per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri, ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuò reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citróque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROP. XLVIII. THEOR. XVI.

Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, &, more rotatarum revolvendo, progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii, qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

PROP. XLIX. THEOR. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat, & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei,

De Motu Corporum

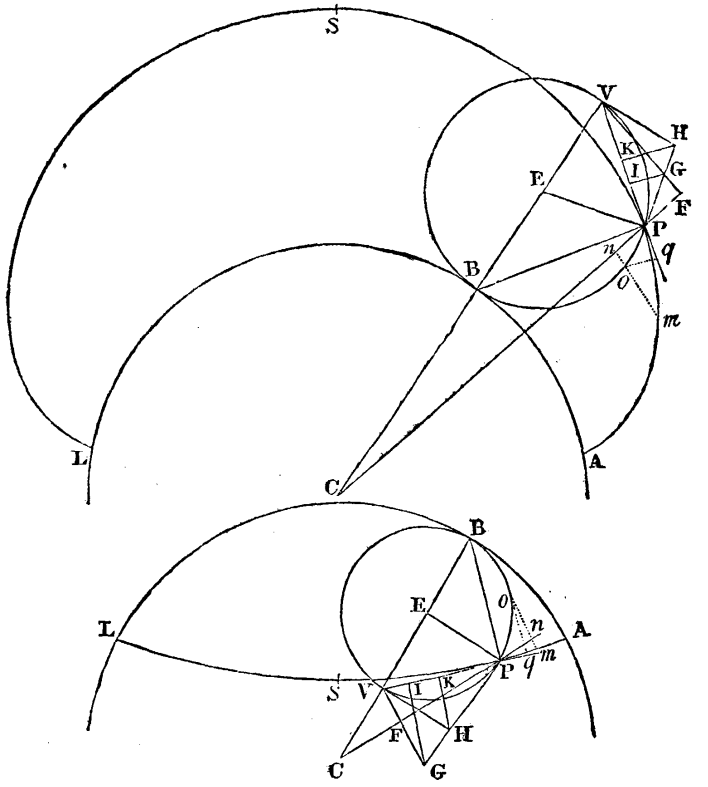
vilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii, qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei inſiſtens, E centrum rotæ, B punctum contactûs, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B verſus L; & inter eundum ita revolvi, ut arcus, AB, PB, ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud P, in perimetro rotæ datum, interea deſcribere viam curvilineam AP. Sit autem AP via tota curvilinea deſcripta, ex quo rota globum tetigit in A, & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum ſinum verſum arcûs $\frac{1}{2}$PB, ut 2CE ad CB. Nam recta CE (ſi opus eſt) producta occurrat rotæ in V, junganturque CP, BP, EP, VP; & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & V, concurrentes in H; ſecetque PH ipſam VF in G, & ad VP demittantur normales GI, HK. Centro item C, & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom*, ſecans rectam CP in *n*, rotæ perimetrum BP in *o*, & viam curvilineam AP in *m*; centroque V & intervallo V*o* deſcribatur circulus ſecans VP productam in *q*.

Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactûs B; manifeſtum eſt, quòd recta BP perpendicularis eſt ad lineam illam curvam AP, quam rotæ punctum P deſcribit; atque ideo quòd recta VP tanget hanc Curvam in puncto P. Circuli *nom* radius, ſenſim auctus vel diminutus, æquetur tandem diſtantiæ CP; &, ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis P*nomq* & figuræ PFGVI, ratio ultima lineolarum evaneſcentium P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, id eſt, ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcûs circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit, quæ linearum PV, PF, PG, PI reſpectivè. Cùm autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares ſint, angulique HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri HVEP ad V & P rectos) angulo CEP æqualis eſt, ſimilia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV, ſeu HP; & ita KI ad KP: & compoſitè, vel diviſim, ut CB ad CE ita PI ad PK; &, duplicatis conſequentibus, ut CB ad 2CE ita PI ad PV, atque ita P*q* ad P*m*. Eſt igitur decre-

Liber Primus.

decrementum lineæ VP, id eſt, incrementum lineæ BV − VP, ad incrementum lineæ curvæ AP in datâ ratione CB ad 2CE, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines BV − VP & AP, incrementis illis genitæ, ſunt in eâdem ratione. Sed, exiſtente BV radio, eſt VP co-ſinus anguli BVP, ſeu $\frac{1}{2}$BEP; ideoque BV − VP ſinus verſus eſt ejuſdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius eſt $\frac{1}{2}$BV, erit BP − VP duplus ſinus verſus arcûs $\frac{1}{2}$BP. Ergo AP eſt ad duplum ſinum verſum arcûs $\frac{1}{2}$BP ut 2CE ad CB. Q.E.D.



Lineam autem AP in propoſitione priore Cycloidem extra globum; alteram, in poſteriore, Cycloidem intra globum, diſtinctionis gratiâ, nominabimus.

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur Cyclois integra ASL, & biſecetur

De Motu Corporum

ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus eſt ſinus anguli VBP, exiſtente EB radio) ut 2CE ad CB, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad rotæ diametrum BV ut 2CE ad CB.

PROP. L. PROB. XXXIII.

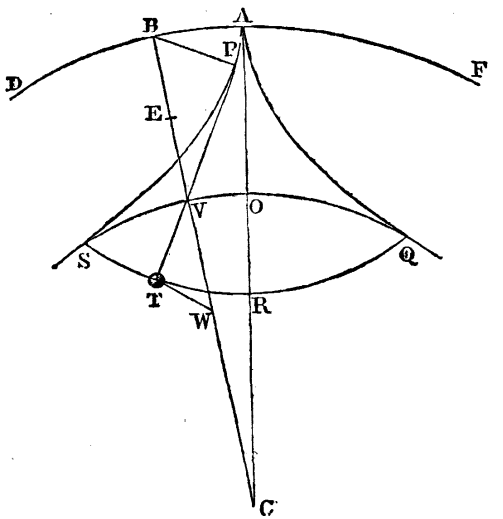
Facere ut corpus pendulum oſcilletur in Cycloide datâ.

Intra globum QVS, centro C deſcriptum, detur Cyclois QRS, biſecta in R, & punctis ſuis extremis, Q & S, ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur CR biſecans arcum QS in O, & producatur ea ad A, ut ſit CA ad CO ut CO ad CR. Centro C intervallo CA deſcribatur globus exterior DAF, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter ſit AO, deſcribantur duæ ſemicycloides AQ, AS, quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A (a). A puncto illo A, filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra ſemicycloides AQ, AS oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo AR, filum parte ſui ſuperiore, AP, applicetur ad ſemicycloidem illam, APS, verſus quam peragitur motus, & circum eam, ceu obſtaculum, flectatur; parteque reliquâ, PT, cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oſcillabitur in Cycloide datâ QRS. Q. E. F.

Occurrat

(a) Curvas motu rotæ ſcriptas, cujus diameter eſt AO, quæque à puncto A proficiſcatur, eas ſemicycloides eſſe, et in punctis S, Q globum interiorem contingere, ad hunc modum oſtendimus. Intellige junctam CS et productam, ut globo exteriori in D occurrat. Jam cùm CA ſit ad CO ut CO ad CR (ita factum enim) convertendo, erit CA ad AO, ut CO ad OR; et permutando, CA ad CO ut AO, ad OR. Diametri igitur rotarum, quarum motu ſcribuntur cycloides intra globos DF, SQ, eum globorum diametris proportione conveniunt. Arcus autem circulares AD, OS inter ſe ſunt ſimiles. Quare et arcus illi cum globorum diametris, ac proinde cum diametris rotarum, proportione convenient. Hoc eſt AD : OS = AO : OR. Permutando AD : AO vel DS = OS : OR. Unde cùm OS ſemiſſis ſit arcûs ejus circularis, quem rota, cujus diameter eſt OR, integrâ ſui converſione confecerit, erit AD ſemiſſis arcûs ejus circularis, quem rota, cujus diameter eſt AO, integrâ ſui converſione confecerit. Quare DS axis erit Cycloidis, quam motus hujus rotæ generaverit. Unde punctum S ad Cycloidem erit, et arcus AS ſemicyclois erit. Eam verò globum interiorem in puncto S contingere, ex eo patet, quòd recta DS tam cycloidem AS, cujus eſt axis, quam circulum OS ad cujus centrum tendit, ad perpendiculum ſecat. Et ſimili argumentatione efficiatur punctum Q ad cycloidem eſſe, cujus proinde arcus QA ſemicyclois erit, et globum interiorem in Q continget. Q. E. D.

(b) Recta PB, à puncto P ad perpendiculum cum PT ducta, occurrat globo AD in B. Quando rotæ, cujus diameter eſt AO, punctum quo cyclois APQ ſcribitur, quod punctum generans vocatur, quando illud locum P obtineat, ambitus rotæ globum AD in B continget. Id enim ex demonſtratione Propoſitionis XLVIII. vel XLIX. manifeſtum eſt Et in tali rotæ ſitu, diametri ejus, quæ per B ducta fuerit, extremitas altera ad globi QOS ſuperficiem erit. Eadem verò, erit ad rectam PT, quæ cycloidem in B contingit. (Per ea quæ in demonſtrandis Propoſit. XLVIII. & XLIX.



Liber Primus.

Occurrat enim filum PT tum Cycloidi QRS in T, tum Circulo QOS in V, agaturque CV; & ad fili partem rectam PT, è punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula BP, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR, perpendicula illa, PB, TW, abſcindere de CV longitudines VB, VW rotarum diametris OA, OR æquales (b). Eſt igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente ½BV radio) ut BW ad BV, ſeu AO+OR ad AO; id eſt (cùm ſint CA ad CO, CO ad CR & diviſim AO ad OR proportionales) ut CA+CO ad CA, vel, ſi biſecetur BV in E, ut 2CE ad CB. Proinde (per Corol. 1. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili PT æquatur ſemper Cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur ſemper Cycloidis arcui dimidio APS, hoc eſt

XLIX. à Newtono oſtenſa ſunt.) Concurſus igitur rectæ PT cum globo QOS, hoc eſt, punctum V, extremitas erit diametri rotæ, quæ per B ducta fuerit, contactum utique rotæ et globi FAD. Erit igitur ipſa BV rotæ diameter, quæ per contactum rotæ globique FAD tranſit. Vergit igitur eadem ad punctum C centrum globi. Puncta igitur tria C, V, B ad rectam ſunt, cujus pars BV ipſi AO æqualis eſt. Jam à puncto T educta recta TW, ad perpendiculum cum PT, ipſi CV in W occurrat. Quando rota, cujus diameter eſt OR, eum ſitum obtineat, ut globum SOQ in puncto V contingat, diameter ejus per punctum contactûs V congruet cum parte aliquâ rectæ VC; arcus autem rotæ, qui à diametro illâ & puncto generante, quod vocant, interceptus ſit, is arcui VO æqualis erit. Rotâ autem, cujus diameter eſt AO, eum ſitum obtinente, ut globum FAD in B contingat, arcus ejus, cujus chorda eſt BP, arcui AB æqualis eſt. Quare arcus quem diximus rotæ prioris ad rotæ poſterioris arcum, cujus chorda BP, rationem habebit quam VO ad AB; ſive eam quam CO ad CA; ſive eam denique quam OR ad AO. Similes igitur inter ſe ſunt rotarum arcus illi, utpote cum rotarum diametris proportione convenientes. Angulus igitur qui ad ambitum rotæ, cujus diameter eſt OR, conſtituitur arcum ejus à diametro per punctum V et puncto generante interceptum baſem habeat, is angulo BVP æqualis erit, ſive angulo WVT. Quapropter diametro rotæ cum parte aliquâ rectæ VC congruente, recta à puncto V in punctum generans extenſa congruet cum parte aliquâ rectæ VT. Rotâ igitur eum ſitum obtinente ut globum QOS in V contingat, punctum generans erit ad rectam VT. Idem verò ad cycloidem SR. Ad concurſum igitur rectæ VT et Cycloidis: hoc eſt ad ipſum punctum T. Quare rotâ eum ſitum obtinente ut globum QOS in puncto V contingat, erit T locus puncti generantis. Unde recta TW, ad perpendiculum cum rectâ VT, quæ contactum rotæ et globi cum puncto generante conjungit, educta, hæc Cycloidem in T continget, rectaque VW, rectis TV, TW interceptæ, diametri rotæ OR æqualis erit. (Per ea quæ in demonſtrandis Propoſitionibus XLVIII & XLIX. à Newtono ſunt oſtenſa.)

De Motu Corporum

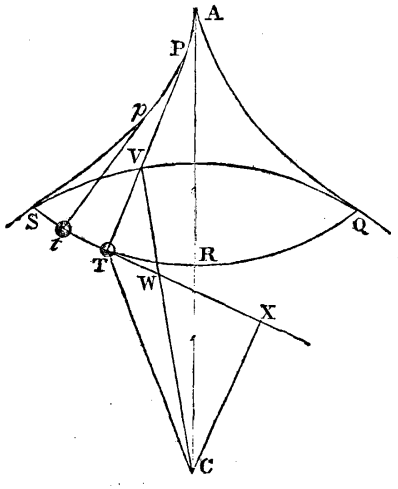
(per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini AR movebitur punctum T in Cycloide datâ QRS. Q. E. D.

Corol. Filum AR æquatur ſemicycloidi AS, ideoque ad globi exterioris ſemidiametrum AC eandem habet rationem, quam ſimilis illi ſemicyclois SR habet ad globi interioris ſemidiametrum co.

PROP. LI. THEOR. XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum, C, *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro;* &, *hâc ſolâ vi agente, corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloidis* QRS : *dico, quòd oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem TW infinitè productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta, quâ corpus T impellitur verſus C, eſt ut diſtantia CT, atque hæc (per legum Corol. 2.) reſolvitur in partes CX, TX, quarum CX, impellendo corpus directè à P, diſtendit filum PT, & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum; pars autem altera, TX, urgendo corpus tranſverſim, ſeu verſus X, directè accelerat motum ejus in Cycloide; manifeſtum eſt, quòd corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo TX; id eſt, ob datas CV, WV, iiſque proportionales TX, TW, ut longitudo TW, hoc eſt (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcûs Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, *apt* de perpendiculo AR inæqualiter deductis, & ſimul demiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi, TR, *t*R. Sunt autem partes ſub initio deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut totæ ſub initio deſcribendæ; & propterea partes, quæ manent deſcribendæ, & acce-



Liber Primus.

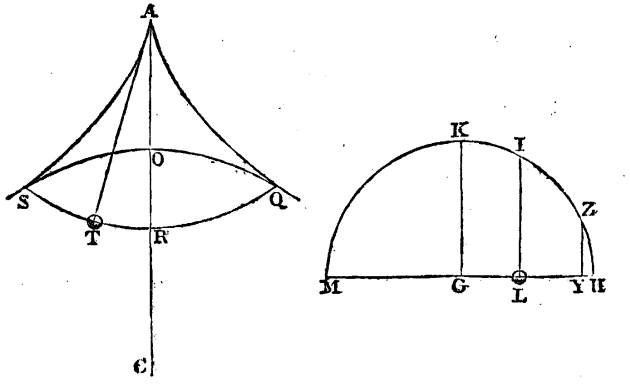
acceleratione ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ, & partes his velocitatibus deſcriptæ, parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum AR. Cúmque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo R, per eoſdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis à viribus iiſdem à quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cùm Cycloidis partes duæ, RS & RQ, ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas, tam totas quàm dimidias, iiſdem temporibus ſemper peragent. Q. E. D.

Corol. Vis, quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in Cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem pondus in loco altiſſimo, s vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejuſdem arcum SR vel QR.

PROP. LII. PROB. XXXIV.

Definire & velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & tempora, quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes, peraguntur.

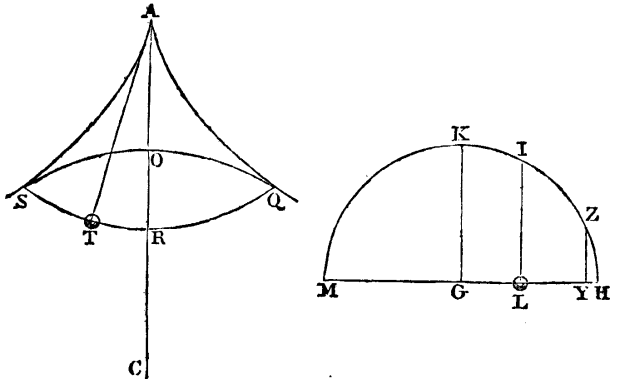
Centro quovis G, intervallo GH Cycloidis arcum RS æquante,



deſcribe ſemicirculum HKM, ſemidiametro GK biſectum. Et ſi vis centripeta,

De Motu Corporum

centripeta, distantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G, sitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipsius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum T demittitur è loco supremo S, cadat corpus aliquod, L, ab H ad G: quoniam vires, quibus corpora urgentur, sunt æquales sub initio, & spatiis describendis, TR, LG, semper proportionales, atque ideò, si æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa describere spatia ST, HL æqualia sub initio, ideóque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare (per Prop. XXXVIII.) tempus, quo corpus describit arcum ST, est ad tempus oscillationis unius, ut arcus HI, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad semiperipheriam



HKM, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R, (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, seu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, sive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR. Unde cùm, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus

(c) In figurâ Prop. XLIX. intelligatur jungi rectam CA. Tum si recta BV sensim crescat, ut rectæ CB ultimò æqualis fiat, arcus BP ad ambitum circuli BPV eam ultimò rationem habebit, quam duplus arcus AB ad ambitum circuli AC. Unde angulus PEB duplo angulo ACB ultimò æqualis erit. Sed in omni magnitudine rectæ BV, angulus PEB duplo angulo PVB est æqualis. Ultimò

bus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primò invenienda. Liber Primus.

Oscillentur jam funipendula corpora in Cycloidibus diversis, intra globos diversos, quorum diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: &, si vis absoluta globi cujusvis QOS dicatur V, vis acceleratrix, quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versus centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli à centro illo & vis absoluta globi conjunctim, hoc est, ut CO × V. Itaque lineola HY, quæ fit ut hæc vis acceleratrix CO × V, describetur dato tempore; &, si erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicatâ ratione rectanguli GHY, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide QRS (cùm sit ut semiperipheria HKM, quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ, qui datum tempus similiter denotat, inversè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè; hoc est, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, sive (per Corol. Prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & subduplicatâ ratione distantiæ inter punctum suspensionis & centrum globi inversè, & subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quâ Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens (c); & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus descensûs de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale, quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quatimò igitur, puncto V cum ipso C congruente, anguli BVP, BCA, sive BCP, BCA, inter se æquales fiunt. Congruet igitur recta CP ultimò cum rectâ CA positione datâ, et punctum rotæ P, quo in omni rotæ magnitudine Cyclois scribitur, erit ad rectam illam CA positione datam, et Cyclois ultimò in rectam illam migraverit.

De Motu Corporum

drantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Cycloide quâvis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcûs Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcûs rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus*: et Pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

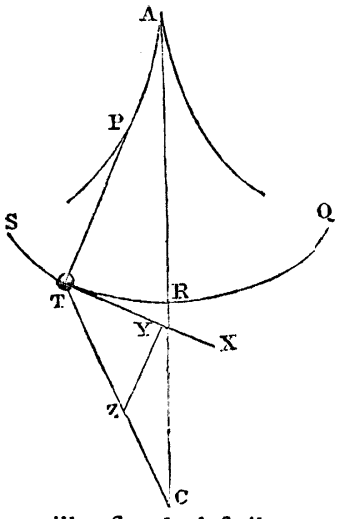
Aptantur autem propoſitiones à nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ; quatenus rotæ, eundo in ejus circulis maximis, deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferiùs in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadent iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu à ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro ejus, deorſum verò in ratione ſimplici.

PROP. LIII. PROB. XXXV.

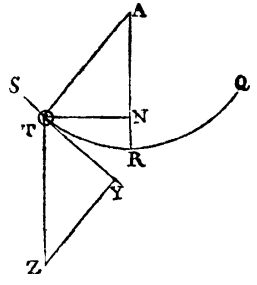
Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ STRQ, cujus axis ſit AR tranſiens per virium centrum, C. Agatur TX, quæ Curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hâc tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcûs illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innoteſcit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. Q. E. I.

Nam



Nam ſi vis, quâ corpus trahitur de T verſus C, exponatur per rectam TZ captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ, trahendo corpus ſecundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat; vis autem altera TY motum ejus in curvâ STRQ directè accelerat, vel directè retardat. Proinde cùm hæc fit ut via deſcribenda TR, acceleratione corporis vel retardationes in oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi corpus T, filo rectilineo AT à centro A pendens, deſcribat arcum circularem STRQ, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum à vi aliquâ, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus ſinum TN: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, ſimilia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN, hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT; vis TZ, quâ oſcillationes evadent iſochronæ, erit ad vim gravitatis AT, ut arcus TR, ipſi TY æqualis, ad arcûs illius ſinum TN.

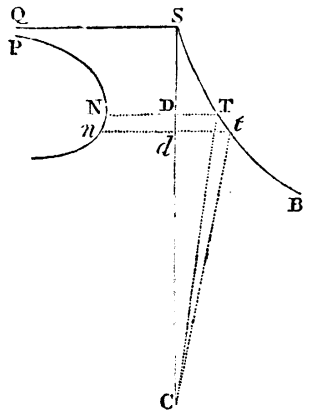
Corol. 2. Et propterea in horologiis, ſi vires, à machinâ in pendulum ad motum conſervandum impreſſæ, ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea, quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu TR & radio AR ad ſinum TN, oſcillationes omnes erunt iſochronæ.

De Motu Corporum

PROP. LIV. PROB. XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

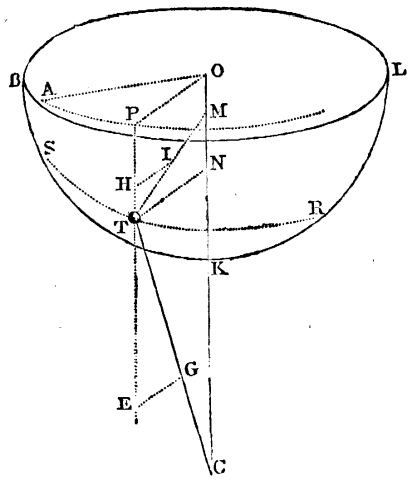
Deſcendat corpus de loco quovis s, per lineam quamvis curvam ST*t*B in plano per virium centrum c tranſeunte datam Jungatur cs, & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſitque D*d* partium illarum aliqua. Centro c, intervallis CD, c*d*, deſcribantur circuli DT, *dt*, lineæ curvæ ST*t*R occurrentes in T & *t*. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine cs, de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine CT (per Prop. XXXIX.) Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam T*t*, eſt ut lineolæ hujus longitudo; id eſt, ut ſecans anguli *t*TC directè, & velocitas inverſè. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata DN, ad rectam CS per punctum D perpendicularis; &, ob datam D*d*, erit rectangulum D*d*×DN, hoc eſt area DN*nd*, eidem tempori proportionale. Ergo ſi PN*n* ſit curva illa linea, quam punctum N perpetuò tangit, ejuſque Aſymptotos ſit recta SQ, rectæ CS perpendiculariter inſiſtens: erit area SQPND proportionalis tempori, quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam ST; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. Q. E. I.



PROP. LV. THEOR. XIX.

Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico, quòd parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit BKL ſuperficies curva; T, corpus in eâ revolvens; STR, trajectoria, quam corpus in eâdem deſcribit; s, initium trajectoriæ; OMK, axis ſuperficiei curvæ; TN, recta à corpore in axem perpendicularis; OP, huic parallela & æqualis à puncto O, quod in axe datur, educta; AP, veſtigium trajectoriæ, à puncto P in lineæ volubilis OP plano, AOP, deſcriptum; A, veſtigii initium puncto s reſpondens; TC, recta à corpore ad centrum ducta; TG, pars ejus vi centripetæ, quâ corpus urgetur in centrum C, proportionalis; TM, recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; TI, pars ejus vi preſſionis, quâ corpus urget ſuperficiem, viciſſimque urgetur verſus M à ſuperficie, proportionalis; PTE, recta axi parallela per corpus tranſiens; & GE, IH, rectæ à punctis G & I in parallelam illam PHTF perpendiculariter demiſſæ. Dico jam, quòd area AOP, radio OP ab initio motûs deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis TG (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires TE, EG; & vis TI in vires TH, HI: vires autem TE, TH, agendo ſecundum lineam PE plano AOP perpendicularem, mutant ſolummodò motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideóque motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus; hoc eſt, motus puncti P, quo trajectoriæ veſtigium AP in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires TE, TH tollerentur, & corpus ſolis viribus EG, HI agitaretur; hoc eſt, idem ac ſi corpus in plano AOP, vi centripetâ ad centrum O tendente, & ſummam virium EG & HI æquante, deſcriberet curvam AP. Sed vi tali deſcribitur area AOP (per Prop. 1.) tempori proportionalis. Q.E.D.



Corol. Eodem argumento ſi corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ CO datâ tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunque curvam ST; foret area AOP tempori ſemper proportionalis.

Liber Primus.

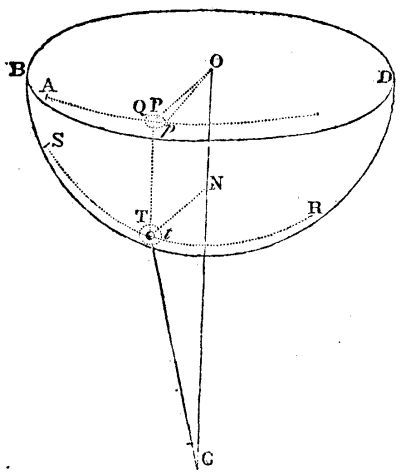
PROP. LVI. PROB. XXXVII.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege vis

De Motu Corporum

vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ, cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria, quam corpus in eâdem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, verſus plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.

Stantibus quæ in ſuperiore propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus T, de loco dato S, ſecundum rectam poſitione datam, in trajectoriam inveniendam STR, cujus veſtigium in plano BLO ſit AP. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC. Eâ cum velocitate, dato tempore quàm minimo, deſcribat corpus trajectoriæ ſuæ particulam T*t*, ſitque P*p* veſtigium ejus in plano AOP deſcriptum. Jungatur O*p*; & circelli, centro T, intervallo T*t* in ſuperficie curvâ deſcripti, veſtigium in plano AOP ſit ellipſis *p*Q. Et, ob datum magnitudine circellum T*t*, datamque ejus ab axe CO diſtantiam TN, vel PO, dabitur ellipſis illa *p*Q ſpecie & magnitudine, ut & poſitione ad rectam PO. Cùmque area PO*p* ſit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus PO*p*. Et inde dabitur ellipſeos & rectæ O*p* interſectio communis *p*, unà cum angulo OP*p* in quo trajectoriæ veſtigium AP*p* ſecat lineam OP. Inde verò (conferendo Prop. XLI. cum Corol. ſuo 2.) ratio determinandi curvam AP*p* facile apparet. Tum ex ſingulis veſtigii punctis P, erigendo ad planum AOP perpendicula PT, ſuperficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur ſingula trajectoriæ puncta T. Q. E. I.



SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis ſe mutuò petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile, mobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri ſolent ad Corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia ſe mutuò attrahant; hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de cauſâ jam pergo motum exponere corporum ſe mutuò trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſicè loquamur, veriùs dicantur impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur; & propterea, miſſis diſputationibus phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus à lectoribus mathematicis faciliùs intelligi.

Liber Primus.

PROP. LVII. THEOR. XX.

Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuò, figuras ſimiles.

Sunt enim diſtantiæ corporum à communi gravitatis centro reciprocè proportionales corporibus; atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminum ſuum communem æquali motu angulari, propterea quòd in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in datâ ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quieſcunt, vel motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omninò ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. Q. E. D.

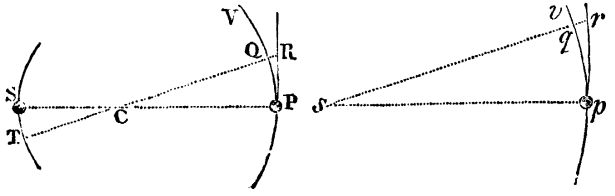
PROP. LVIII. THEOR. XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico, quòd figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuò, poteſt figura ſimilis

De Motu Corporum

similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Rovolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T, deque P ad Q. A dato puncto *s* ipsis SP, TQ æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & Curva *pqv*, quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, describit, erit similis & æqualis Curvis, quas corpora S, P describunt circum se mutuò: proindeque (per Theor. XX.) similis curvis ST & PQV,



quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C: idque quia proportiones linearum SC, CP, & SP, vel *sp*, ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C, per legum Corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primò, quòd id quiescit; inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus S & P similia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & *pr* Curvas PQ & *pq* in P & *p*; & producantur CQ & *sq* ad R & *r*. Et ob similitudinem figurarum CPRQ, *sprq* erit RQ ad *rq* ut CP ad *sp*, ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus P versus corpus S, atque ideo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim, quâ corpus *p* versus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR, *pr* ad arcus PQ, *pq*, per intervalla ipsis proportionalia RQ, *rq*; ideoque vis posterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in Curvâ *pqv*, quæ similis esset Curvæ PQV, in quâ vis prior efficit, ut corpus P gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & *s*, P & *p*, & æqualitatem distantiarum SP, *sp*) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter tra-

hentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quòd (per lemma decimum) spatia, ipso motûs initio descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ ratione distantiæ *sp* ad distantiam CP, eò ut temporibus, quæ sint in eadem subduplicatâ ratione, describantur arcus *pq*, PQ, qui sunt in ratione integrâ: et corpora, P, *p*, viribus æqualibus semper attracta, describent circum centra quiescentia C & *s* figuras similes PQV, *pqv*, quarum posterior *pqv* similis est & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quòd commune gravitatis centrum, unà cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum Corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut priùs; ideóque corpora describent circum se mutuò figuras easdem ac priùs, & propterea figuræ *pqv* similes & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuò trahentia, describunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuò, Ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuò, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuò ductis describunt areas temporibus proportionales.

PROP. LIX. THEOR. XXII.

Corporum duorum S & P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum se mutuò describunt, figuram similem & æ-*

De Motu Corporum

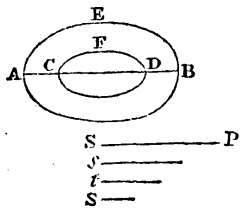
qualem deſcribentis, in ſubduplicata ratione corporis alterius S, *ad ſummam corporum* S+P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris propoſitionis, tempora, quibus arcus quivis ſimiles PQ & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum CP & SP, vel *sp*; hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione corporis S ad ſummam corporum S+P. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles PQ & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota, quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem ſubduplicatâ ratione. Q. E. D.

PROP. LX. THEOR. XXIII.

Si corpora duo S & P, *viribus, quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, ſe mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd Ellipſeos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem Ellipſeos, quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S+P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum* S.

Nam ſi deſcriptæ Ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema ſuperius) forent in ſubduplicatâ ratione corporis S ad ſummam corporum S+P. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in Ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipſeos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio S ad S+P eſt triplicata; ideoque erit ad axem principalem Ellipſeos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter S+P & S ad S+P. Et inverſè, axis principalis Ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ



(a) Sit AEB Ellipſis ejus per omnia ſimilis et æqualis, quam corpus P motu ſuo circum S ſcribit, ſive ejus quam *p* circum *s* in fig. p. 192. Sitque CFD Ellipſis alia, cujus circuitum corpus D, circum umbilicum immobilem, eodem tempore abſolveret, quo corpus P converſionem ſuam circum corpus S. Ellipſeos autem primæ axis tranſverſus ſit AB; alterius, CD. Exponatur recta S datæ cujuſvis longitudinis; aliaque SP, quæ ad datam S rationem eam habeat, quam ſumma corporum duorum, S+P, ad corpus S. Sint duæ, *s*, *t*, inter duas SP, S proportione mediæ. Dicit Newtonus rectam AB ad rectam CD proportionem habere eam quam SP ad *s*. Id verò hiſce ferè argumentis

ſcriptæ circa immobile, ut S+P ad primum duorum mediè proportionalium inter S+P & S. Q. E. D (a). Liber Primus.

PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, viribus iiſdem traheretur: et virium trahentium eadem erit lex, reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi, atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuò trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi à corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis à centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex unâ diſtantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ diſtantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus, ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, ſit directè vel inverſè ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc diſtantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inverſè, ut corporis attracti diſtantia à centro illo communi; vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas; vel denique ut quantitas ex hâc diſtantiâ & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex, reſpectu diſtantiæ utriuſque. Q. E. D.

mentis probat. Cùm corpora *p*, D eiſdem viribus centralibus per Ellipſes AEB, CFD ferantur, (id enim omninò ponendum eſt) duplicata temporum converſionum ratio, axium triplicata erit (per Prop. XV.) At verò ratio corporum S+P ad corpus S, ſive rectæ SP ad rectam S, duplicata eſt ejus quam tempus converſionis corporis *p* per AEB habet ad tempus converſionis per CFD (per Theorema noviſſimum.) Quare cubus ex AB erit ad cubum ex CD ut recta SP ad rectam S; ſive ut cubus ex SP ad cubum ex *s*. Quare AB : CD = SP : *s*. Q. E. D.

De Motu Corporum

PROP. LXII. PROB. XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur (b), *determinare motus.*

Corpora (per Theorema noviſſimum) perinde movebuntur, ac ſi à corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, traherentur; & centrum illud, ipſo motûs initio, quieſcet per hypotheſin; & propterea (per legum Corol. 4) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per Prob. XXV.) perinde ac ſi à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuò trahentium. Q. E. I.

PROP. LXIII. PROB. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per legum Corollarium quintum, & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum unà cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuò, ſed à corpore tertio, ſito in centro illo, traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato, ſecundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius circum idem centrum. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille ſyſtematis, ſpatii & corporum in eo gyrantium,

(b) Nempe ut ſolis viribus centralibus incitata rectâ cadant.

(c) NIMIRUM datâ velocitate quâcum corpus T è loco T, ſecundum rectam poſitione datam, exeat, datâque in eodem loco vi centrali, dabitur Ellipſeos, per quam feratur corpus T, in loco T curvatura. (Vide Sect. III. Not. m.) Sed recta, quæ Ellipſin illam in loco T contingit, poſitione data; nempe cùm ipſa ſit ſecundum quam corpus è loco T exeat. Circulus igitur, qui Ellipſin in loco T oſculabitur, magnitudine et poſitione datus. Quam igitur de rectâ DT, poſitione datâ, circulus ille partem abſcindat, ea magnitudine data. Verùm ea lateri recto diametri DT æqualis

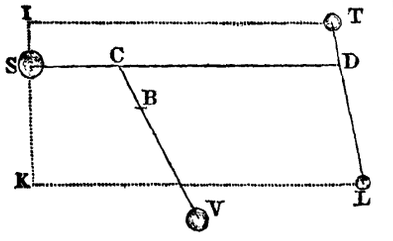
gyrantium, motus progreſſivus ſuprà inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. Q. E. I.

PROP. LXIV. PROB. XL.

Viribus, quibus corpora ſe mutuò trahunt, creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter ſe.

Ponantur primò corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Deſcribent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI.) Ellipſes centra habentes in D, quarum magnitudo ex Problemate V. innoteſcit (c).

Trahat jam corpus tertium, S, priora duo, T & L, viribus acceleratricibus, ST, SL, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis ST (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires autem, DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L ſe mutuò trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis DT ac DL proportionales, ut priùs, ſed viribus prioribus majores; ideóque (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 8. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut priùs, ſed motu celeriore.



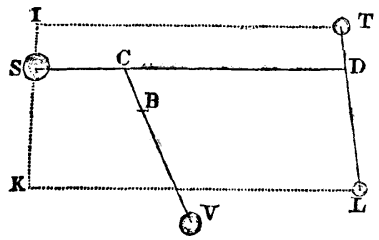
Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus SD × T & SD × L, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas TI, LK, ipſi DS parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam IK acceſſus,

eſt. (Hamilton. Conic. Lib. 5. Prop. XVII.) Quare latus rectum ejus diametri magnitudine datum. Diameter autem ipſa magnitudine data, propter ſemiſſem ejus, DT, datam. Quare et conjugata ejus magnitudine data, utpote quæ diametri et lateris ejus recti proportione media ſit. Eadem verò conjugata poſitione data, quoniam per datum punctum D centrum Ellipſeos tranſeat, et parallela ſit cum rectâ poſitione datâ, quæ Ellipſin in T contingit. Ellipſeos igitur, per quam fertur corpus T, diametri duæ magnitudine et poſitione datæ; quæ per T, quæque ejus conjugata. Ellipſis igitur ipſa magnitudine & poſitione data. Q. E. D. Simili modo oſtendamus Ellipſin alteram, per quam feratur corpus L, magnitudine et poſitione datam.

faciendo,

De Motu Corporum

facicndo, ut ſyſtema corporum T & L ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S, cò quòd ſumma virium motricium SD × T & SD × L, diſtantiæ CS proportionalium, tendit verſus centrum C, deſcribit Ellipſin circa idem C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, deſcribet Ellipſin conſimilem & è regione. Corpora autem T & L viribus motricibus SD × T & SD × L, prius priore, poſterius poſteriore, æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK, ut dictum eſt, attracta, pergent (per legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D ellipſes ſuas deſcribere, ut priùs. Q. E. I.



Addatur jam corpus quartum V, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipſes, circa omnium commune centrum gravitatis B, deſcribere, manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centrum D & C, ſed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita ſe habent, etſi corpora T & L trahunt ſe mutuò viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus, quàm quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facilè deducetur, quòd corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. Q. E. I.

PROP. LXV. THEOR. XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis, areas deſcribere temporibus proportionales quàm proximè.

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus, ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accuratè. Quo magis recedit lex virium

Liber Primus.

virium à lege ibi poſitâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hîc poſitam ſe mutuò trahentia, moveantur in Ellipſibus accuratè, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multùm ab Ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod, ad varias ab eo diſtantias, revolvi; tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuò. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. Q. E. O.

Caſ. 2. Fingamus jam ſyſtema corporum minorum, modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum, circum ſe mutuò revolventium, corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quòd, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motûs attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum

De Motu Corporum

ductarum differentiæ, reſpectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores ſint, quàm datæ quævis; perſeverabunt motus partium ſyſtematis inter ſe ſine erroribus, qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, ſyſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius: hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum ſectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languidâ, Ellipſin fortiore) & radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, ſine ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ, perexiguæ ſanè & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad ſyſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium ſyſtematis inter ſe; propterea quòd linearum, à corpore maximo ad has ductarum, jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quòd attractiones acceleratrices partium ſyſtematis, verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit quàm inæqualitas proportionis diſtantiarum à corpore maximo. Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundùm lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque ſit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſariò mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi ſyſtematis hujus partes in Ellipſibus, vel Circulis, ſine perturbatione inſigni moveantur; manifeſtum eſt, quòd cædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſimè, aut urgentur æqualiter, & ſecundum lineas parallelas quamproximè.

P R O P.

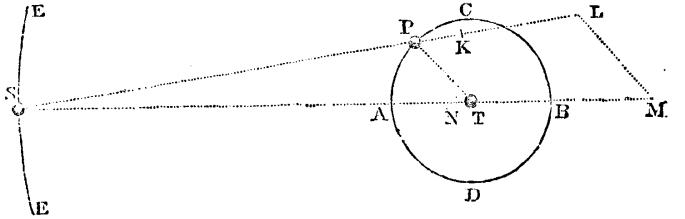
P R O P. LXVI. T H E O R. XXVI.

Liber Primus.

Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum, ſe mutuò trahunt; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico, quòd interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipſeos, umbilicum in concurſu radiorum habentis, magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm ſi maximum illud vel à minoribus non attractum quieſcat, vel multo minùs vel multo magis attractum aut multo minùs aut multo magis agitetur.

Liquet ferè ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latiùs cogente ſic evincitur.

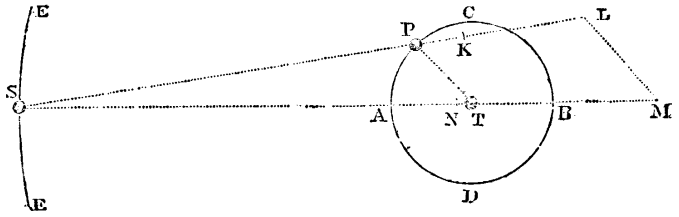
Caſ. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P deſcribat orbem interiorem PAB, & S exteriorem ESE. Sit SK mediocris diſtantia corporum P & S; & corporis P verſus S attractio acceleratrix, in mediocri illâ diſtantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione SK ad SP capiatur SL ad SK; & erit SL attractio acceleratrix corporis P verſus S in diſtantiâ quâvis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M; & attractio SL reſolvetur (per legum Corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et ſic urgebitur corpus P vi



acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T, & oritur à mutuâ attractione corporum T & P. Hâc vi ſolâ corpus P circum corpus T, ſive immotum, ſive hâc attractione agitatum, deſcribere

De Motu Corporum

deberet & areas, radio PT, temporibus proportionales, & Ellipſin, cui umbilicus eſt in centro corporis T. Patet hoc per Prop. XI. & Corollaria 2 & 3. Theor. XXI. Vis altera eſt attractionis LM; quæ, quoniam tendit à P & T, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſâ, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PT reciprocè proportionalis, componet ea, cum



vi priore, vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cùm (per Prop. XI. & per Corol. 2. Theor. XXI.) vis, quâ Ellipſis circa umbilicum T deſcribitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ PT reciprocè proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis PAB aberret à formâ Ellipſeos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major eſt aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam verò vis tertia, SM, trahendo corpus P ſecundum lineam ipſi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à P in T; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non ampliùs temporibus proportionales deſcribat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis verò PAB aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de cauſâ adaugebit; tum quòd non dirigatur â P ad T, tum etiam quòd non ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ PT. Quibus intellectis, manifeſtum eſt, quòd areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales,

portionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, ſit minima; & quod orbis PAB tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam ſecunda quàm tertia, ſed præcipuè vis tertia, ſit minima, vi primâ manente. Liber Primus.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix verſus S per lineam SN; & ſi attractiones acceleratrices SM, SN æquales eſſent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & ſecundùm lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per legum Corol. 6.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio SN minor eſſet attractione SM, tolleret ipſa attractionis SM partem SN, & maneret pars ſola MN, quâ temporum & arearum proportionalitas, & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio SN major eſſet attractione SM, oriretur ex differentiâ ſola MN perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur ſemper attractio tertia ſuperior SM ad attractionem MN, attractione primâ & ſecundâ manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maximè accedunt, ubi attractio MN vel nulla eſt, vel quàm fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus S, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio SN non eſt nulla, neque minor minimâ attractionum omnium SM, ſed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quaſi mediocris; hoc eſt, non multò major neque multò minor attractione SK. Q. E. D.

Caſ. 2. Rovolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diverſis; & vis LM, agendo ſecundum lineam PT in plano orbitæ PAB ſitam, eundem habebit effectum ac priùs, neque corpus P de plano orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera, NM, agendo ſecundum lineam quæ ipſi ST parallela eſt (atque ideo, quando corpus S verſatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motûs in longitudinem jam antè expoſitam, inducet perturbationem motûs in latitudinem, trahendo corpus P de plano ſuæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans MN, ideoque minima evadet ubi MN eſt minima;

De Motu Corporum

hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio SN non eſt multò major, neque multò minor attractione SK. Q. E. D.

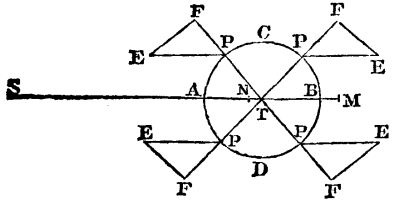
Corol. 1. Ex his facilè colligitur, quòd, ſi corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque cætera à ſe mutuò.

Corol. 2. In ſyſtemate vero trium corporum T, P, S, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciprocè ut quadrata diſtantiarum; corpus P, radio PT, aream circa corpus T velociùs deſcribet prope conjunctionem A & oppoſitionem B, quàm prope quadraturas C, D. Namque vis omnis quâ corpus P urgetur & corpus T non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam PT, accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis NM. Hæc in tranſitu corporis P à C ad A tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad D in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad B, & ultimò in antecedentia tranſeundo â B ad C (c).

Corol. 3. Et eodem argumento patet, quòd corpus P, cæteris paribus, velociùs movetur in conjunctione & oppoſitione quàm in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis P, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quàm in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minùs deflectunt à recto tramite. Et præterea vis KL, vel NM, in conjunctione & oppoſitione contraria eſt vi, quâ corpus T trahit corpus P; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minùs deflectet à recto tramite, ubi minùs urgetur in corpus T.

Corol.



(c) Tota vis LM agit ſecundum rectam PT, et nihil in ipſis conjunctionibus pars aliqua alterius vis NM. Nam per P, centrum corporis P, agatur PE cum rectâ TS parallela, et capiatur PE æqualis rectæ NM, *modò centrum* corporis S ſitum ſit in plano orbitæ ADBC. Per E agatur EF cum rectâ illâ, quæ orbitam in P contingat, parallela. Ita vis NM, ſive PE, reſolvetur in duas PF, FE; quarum PF, cùm ſecundum rectam PT agat, velocitatem deſcriptionis

Liber Primus.

Corol. 5. Unde corpus P, cæteris paribus, longiùs recedet à corpore T in quadraturis, quàm in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis P excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus P, ad apſidem ſummam appellans, abſit longiùs à corpore T in ſyzygiis quàm in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additionem vis LM, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis KL, & ob magnitudinem vis KL, magis diminuitur quàm augetur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii TP directè & ratione duplicatâ temporis periodici inverſè: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis KL; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius TP, augeri, idque in ſubduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minùs quàm in radii hujus ratione ſeſquiplicatâ (per Corol. 6. Prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus P minùs ſemper & minùs attractum perpetuò recederet longiùs à centro T; & contrà, ſi vis illa augeretur, accederet propiùs. Ergo ſi actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur ſimul ac diminuetur radius TP per vices; & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione ſeſquiplicatâ radii, & ratione ſubduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam, quòd Ellipſeos à corpore P deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen pro-

ſcriptionis areæ nihil mutat. Altera, FE, auget velocitatem illam, dum à C ad A, vel à D ad B corpus tranſfeat; minuit vicißim, corpore ab A in D, vel à B in C tranſeunte. Quod figura ipſa, ni fallor, ſatis monſtrat. Quòd ſi corpus S extra planum orbitæ ADBC ſitum fuerit, trahca partem illam vis NM, quæ cum plano orbitæ parallela ſit, in duas reſolvendo, quarum altera agat ſecundum rectam TP, altera ſecundum rectam quæ parallela ſit cum eâ quæ orbitam in P contingat, eadem ferè efficientur.

greditur,

De Motu Corporum

greditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripetâ, quâ corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, ſi augeatur diſtantia PT, augetur in eâdem ferè ratione cum hâc diſtantiâ; & vis poſterior decreſcit in duplicatâ illâ ratione: ideoque ſumma harum virium decreſcit in minore quàm duplicatâ ratione diſtantiæ PT, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione verò & oppoſitione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia eſt inter vim, quâ corpus T trahit corpus P, & vim KL; & differentia illa, propterea quòd vis KL augetur quamproximè in ratione diſtantiæ PT, decreſcit in majore quàm duplicatâ ratione diſtantiæ PT, ideoque (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux pregrediatur. In locis inter ſyzygias & quadraturas pendet motus augis ex cauſâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa, vel regrediatur. Unde cùm vis KL in ſyzygiis ſit quaſi duplo major quàm vis LM in quadraturis, exceſſus erit penes vim KL, transferetque augem in conſequentia ([d]). Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii faciliùs intelligetur, concipiendo ſyſtema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c. in orbe ESE conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipſius T minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ.

Corol. 8. Cùm autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quàm duplicata ratione diſtantiæ TP, in tranſitu corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam; ut & à ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſummâ ad vim in apſide imâ maxime recedit à duplicatâ ratione diſtantiarum inverſâ: manifeſtum eſt, quòd apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam KL ſeu NM − LM, progredientur velociùs, inque quadraturis ſuis tardiùs recedent per vim additititiam LM ([e]). Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progreſſûs vel tarditas regreſſûs continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

([d]) Vide Lib. 3. Prop. XXV & XXVI.

Corol.

Liber Primus.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ à centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipſi; & mox, in deſcenſu ab apſide ſummâ, ſeu auge, ad apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt, quòd corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quàm ſi urgeretur vi ſolâ creſcente in duplicatâ ratione diſtantiæ diminutæ; ideoque orbem deſcriberet orbe elliptico interiorem, & in apſide imâ propiùs accederet ad centrum quàm priùs. Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab apſide imâ ad apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus antè creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem; ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minùs attractum aſcendet ad diſtantiam majorem, & ſic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; & contrà, diminuetur eadem, ſi ratio illa decreſcat. Jam verò in ſyſtemate corporum T, P, S, ubi apſides orbis PAB ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt; & maxima fit, ubi apſides ſunt in ſyzygiis. Si apſides conſtituantur in quadraturis, ratio prope apſides minor eſt, & prope ſyzygias major quàm duplicata diſtantiarum; & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter apſides, hæ minor eſt quàm duplicata diſtantiarum. Vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in minore quàm duplicatâ ratione diſtantiæ apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam apſidis imæ ab eodem umbilico: & contrà, ubi apſides conſtituuntur in ſyzygiis, vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in majore quàm duplicatâ ratione diſtantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in ſyzygiis ſubductæ à viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter apſides, minima

([e]) Nempe cùm vis KL in ſyzygiis maxima ſit, vis LM in quadraturis tantùm non ad nihilum redacta ſit.

in

De Motu Corporum

in quadraturis, maxima in ſyzygiis: & propterea in tranſitu apſidum à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem Ellipſeos; inque tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

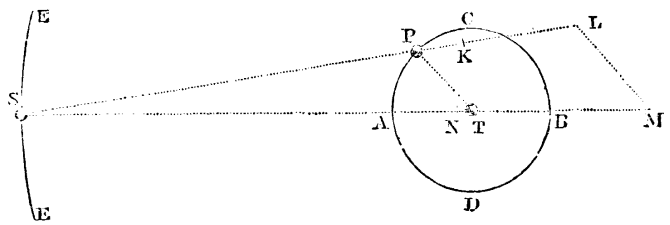
Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis EST immobile manere; & ex errorum expoſitâ cauſâ manifeſtum eſt, quòd ex viribus NM, ML, quæ ſunt cauſa illa tota, vis ML, agendo ſemper ſecundum planum orbis PAB, nunquam perturbat motus in latitudinem; quódque vis NM, ubi nodi ſunt in ſyzygiis, agendo etiam ſecundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpuſque P de plano orbis ſui perpetuò trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis à quadraturis ad ſyzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu à ſyzygiis ad quadraturas. Unde fit, ut corpore in ſyzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt, inter C & A, D & B, intelligetur ex modò expoſitis, quòd, in tranſitu corporis P à nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuò minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quàm augetur, & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quàm in præcedente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt in octantibus alteris inter A & D, B & C. Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum à ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad nodos appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, & corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat; nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur (f).

Corol. 11. Quoniam corpus P, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus S in tranſitu

(f) Hæc optimè intelligenda ſunt ex calculis quos in Propoſitionibus Libri Tertii XXX & XXXIV. Newtonus

Liber Primus.

tranſitu ſuo à nodo C per conjunctionem A ad nodum D; & in contrariam partem in tranſitu à nodo D per oppoſitionem B ad nodum C: manifeſtum eſt, quòd in motu ſuo à nodo C corpus per-



petuò recedit ab orbis ſui plano primo CD, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſimè diſtans à plano illo primo CD, tranſit per planum orbis EST non in plani illius nodo altero D, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S, quodque proinde novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere, in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuò recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardiùs: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii, ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti errores ſunt paulò majores in conjunctione corporum P, S, quàm in eorum oppoſitione; idque ob majores vires generantes NM & ML.

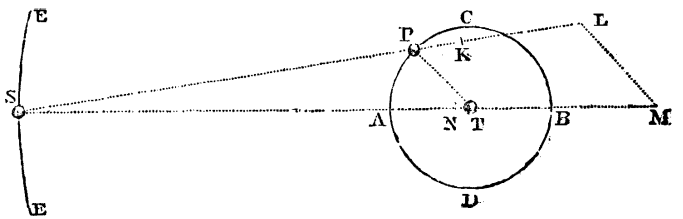
Corol. 13. Cúmque rationes horum Corollariorum non pendeant à magnitudine corporis S, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis S tanta ſtatuitur magnitudo, ut circa ipſum revolvatur corporum duorum T & P ſyſtema. Et ex aucto corpore S, auctâque ideo ipſius vi centripetâ, à quâ errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus diſtantiis, majores in hoc caſu quàm in altero, ubi corpus S circum ſyſtema corporum P & T revolvitur.

Corol. 14. Cùm autem vires NM, ML, ubi corpus S longinquum eſt, ſint quamproximè ut vis SK & ratio PT ad ST con-

Newtonus ſubducere inſtituit.

De Motu Corporum

junctim (f), hoc eſt, ſi detur tum diſtantia PT, tum corporis S vis ſoluta, ut ST cub. reciprocè; ſint autem vires illæ NM, ML cauſæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum eſt in præcedentibus Corollariis: manifeſtum eſt, quòd effectus illi omnes, ſtante corporum T & P ſyſtemate, & mutatis tantum diſtantiâ ST



& vi abſolutâ corporis S, ſint quamproximè in ratione compoſitâ ex ratione directâ vis abſolutæ corporis S, & ratione triplicatâ inverſâ diſtantiæ ST. Unde ſi ſyſtema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S; vires illæ NM, ML, & earum effectus erunt (per Corol. 2 & 6. Prop. IV.) reciprocè in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis S proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ NM, ML, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S è corpore T ſpectati, & vice verſâ. Namque hæ rationes eædem ſunt, atque ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum S & T vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; hæ vires (hoc eſt, vis corporis T, quâ corpus P de recto tramite in orbitam PAB deflectere, & vis corporis S, quâ corpus idem P de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, & eadem proportione: neceſſe eſt, ut ſimiles

(f) Vis ML eſt ad vim SK ſicut recta ML ad rectam SK; hoc eſt, ſi permagna fuerit corporis S diſtantia, ut TP ad ST, illis utique ML, TP, necnon SK, ST, quando diſtantia ST infinitè augetur, ipſam æqualitatis rationem ultimò induentibus. Hinc ſi litera A deſignet vim SK, erit vis $ML = \frac{A \times PT}{ST}$. Unde ſatis conſtat ratio illa compoſita virium ML, quam Newtonus allegavit. Rurſum diſtantiâ ST infinitè auctâ, rectæ MT, PL ultimò parallelæ & æquales fiunt. Quare et recta NM rectæ PL æqualis erit: nam ſi corpora T, P viribus eiſdem pro diſtantiarum ratione verſus S urgeantur, id quod ponendum eſt, punctum N ultimò cum ipſo T congruet. Quare recta NM rectæ PL ultimò æqualis fiet. Diſtantiâ autem ST infinitè auctâ, recta PL triplæ rectæ PK æqualis erit. Nimirum

Liber Primus.

les & proportionales ſint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri; angulares verò, iidem qui priùs; & errorum linearium ſimilium, vel angularium æqualium, tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quàm proximè: ſed breviùs hâc methodo. Vires NM, ML, cæteris ſtantibus, ſunt ut radius TP, & harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis P; & hinc errores angulares è centro T ſpectati (id eſt, tam motus augis & nodorum, quàm omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quàm proximè (g). Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum T, P, S ſyſtemate, ubi P circum T ſibi propinquum, & T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inverſè. Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inverſè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis PAB non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cùm autem linea LM nunc major ſit nunc minor quàm radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum

Nimirum cùm SL fit ad SK ut quadratum ex SK ad quadratum ex SP, atque ipſæ SK, SP tantùm non æquales ſint. Inde enim ſequetur duarum SL, SK differentiam, KL, duplam eſſe PK, quæ duarum SK, SP differentia eſt. Quare tota PL ejuſdem PK tripla erit. Dato autem angulo PTA, propter angulum ad K junctâ TK rectum, ratio rectæ PK ad PT data erit. Quare et triplæ PK, ſive illius PL, vel NM, ad PT ratio data. Sed PT, LM ultimò æquales. Ratio igitur NM ad ML data. Quare et vis NM ad vim ML ratio dabitur. Quam igitur vires ML inter ſe rationem habeant, eandem alteræ illæ NM habituræ ſunt. Unde conſtat id quod à Newtono affirmatum eſt.

(g) Nam errores angulares rationem inter ſe habebunt linearium directam, cum contrariâ radiorum TP compoſitam.

De Motu Corporum

PT; & erit hæc ad vim mediocrem SK, vel SN, (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Eſt autem vis mediocris SN vel ST, quâ corpus T retinetur in orbe ſuo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo circum T, in ratione compoſitâ ex ratione radii ST ad radium PT, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S (h). Et ex æquo, vis mediocris LM ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo circum T (quâve corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad diſtantiam PT revolvi poſſet) eſt in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ cùm diſtantiâ PT, datur vis mediocris LM; & eâ datâ, datur etiam vis MN quamproximè, per analogiam linearum PT, MN.

Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum, ac corpori T concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis P peragendo, propiùs accedent ad corpus T, & celeriùs movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis S, quàm in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T, quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias verò movebuntur in antecedentia, & velociſſimè quidem in quadraturis, tardiùs aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completâque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis T, ex materiâ non fluidâ conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor, per vices acceleratus & retardatus, ut in ſuperiore Corollario, in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior, quàm ſuperficies globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis S, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs. Par eſt ratio

(h) Prop. IV. Cor. 2.

tio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum ſuum (per legum Corol. 5.) ut & globi de curſu rectilineo uniformiter tracti (per legum Corol. 6.) Accedat autem corpus S, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorſum in quadraturis, facietque ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis KL trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus, & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quatenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi: ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſuâ contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli, globo orbati, maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: atque hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quàm juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcentis Corollarii vix inde mutabuntur; niſi quòd loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non

De Motu Corporum

per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorſum maximè in quadraturis, & vis KL ſeu NM − LM trahit eandem ſurſum maximè in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum, & incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias; ac deſinunt trahere aquam ſurſum, incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, & minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quatenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus, vel per vim inſitam aquæ paulo diutiùs perſeveret, vel per impedimenta alvei paulo citiùs ſiſtatur.

Corol. 21. Eàdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel rarior quàm juxta polos, orietur motus nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus ſit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in ſpatiis liberis primò quieſcere; dein impetu quocunque, obliquè in ſuperficiem ſuam facto, propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quàm in alium quemvis; perſpicuum eſt, quòd is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte, quâ priùs, impulſu quocunque novo; & cùm citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quòd hi duo impulſus, ſucceſſivè impreſſi, eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent; hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum Corol. 2.) compoſitâ impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt

eſt ratio impulſûs ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motûs primi; ut & impulſûs primi facti in locum quemvis in æquatore motûs, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem, ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit, & ad unum reducit; & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem, mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur verò alicubi inter polum & æquatorem materia nova, in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro ſui motûs, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuò deſcribant. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in caſu (per Corol. 21.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per Corol. 20.) nodi regredientur; vel denique, ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur; & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo, vel æquatori, propiores.

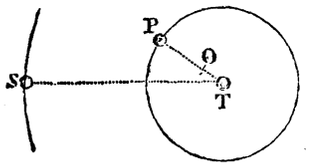
Liber Primus.

PROP. LXVII. THEOR. XXVII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipſeos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, quàm circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*

Nam corporis S attractiones verſus T & P componunt ipſius attractionem

De Motu Corporum



attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum, O, quàm in corpus maximum T, quæque quadrato diſtantiæ SO magis eſt proportionalis reciprocè, quàm quadrato diſtantiæ ST: ut rem perpendenti facilè conſtabit.

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quòd corpus exterius S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam Ellipſeos, umbilicum in centro eodem habentis, magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm ſi id vel non attractum quieſcat, vel multo magis aut multo minùs attractum aut multo magis aut multo minùs agitetur.*

Demonſtratur eodem ferè modo cum Prop. LXVI. ſed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem ſic æſtimare. Ex demonſtratione Propoſitionis noviſſimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum eſſe communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quieſceret commune centrum gravitatis corporum trium; deſcriberent corpus S ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quieſcens, Ellipſes accuratas. Liquet hoc per Corollarium ſecundum Propoſitionis LVIII. collatum cum demonſtratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum à centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio, ubi commune trium centrum quieſcit; hoc eſt, ubi corpus intimum & maximum T, lege cæterorum attrahitur: ſitque major ſemper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis T, moveri incipit, & magis deinceps magiſque agitatur.

Corol.

Liber Primus.

Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quòd orbitæ deſcriptæ propiùs accedent ad ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directè & quadrata diſtantiarum inverſè, ſe mutuò trahant agitentque, & orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitati corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum, & ſic deinceps) quàm ſi corpus intimum quieſcat, & ſtatuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

In ſyſtemate corporum plurium A, B, C, D, &c. *ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, &c. *viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, &c. *viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D verſus A, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus B, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis A ad vim abſolutam attractivam corporis B, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus B, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis B verſus A, ad attractionem acceleratricem corporis A verſus B. Sed attractio acceleratrix corporis B verſus A eſt ad attractionem acceleratricem corporis A verſus B, ut maſſa corporis A ad maſſam corporis B; propterea quòd vires motrices, quæ (per definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ſunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hîc ſunt (per motûs legem tertiam) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis A eſt ad ab-

De Motu Corporum

ſolutam vim attractivam corporis B, ut maſſa corporis A ad maſſam corporis B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi ſingula ſyſtematis corpora A, B, C, D, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula ſyſtematis corpora A, B, C, D, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt vel reciprocè, vel directè, in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum à trahente, quæve ſecundum legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quòd corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In ſyſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum, ſi minora circa maximum in Ellipſibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quàm fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis deſcribant areas temporibus quàm maximè proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & contrà. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hîc generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: ſive conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuò petentium,

(a) Nam ſi à punctis I, K in rectas HP, PL intelligantur rectæ ad perpendiculum deduci, deductæ illæ rectarum IP, PK inter ſe proportionem gerent; utpote quæ angulorum ad P æqualium ſunt ſinus pro radiis inæqualibus IP, PK. Sed, propter circulum, IP : PK = HP : PL. Quare rectæ à punctis I, K in rectas HP, PL ad perpendiculum deductæ, eæ ipſarum HP, PL inter ſe proportionem gerent; et in omni magnitudine angulorum circum P iſta proportionum ſimilitudo manebit. Evaneſcentibus

petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuſcunque, ſeu corporei ſeu incorporei, oriatur, corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem impulſûs, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens, ut in definitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum phænomenis; ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutiùs diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora ſphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuò agere; & quales motus inde conſequantur.

Liber Primus.

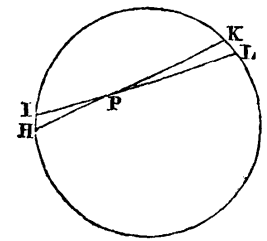
SECTIO XII.

De corporum ſphæricorum viribus attractivis.

PROP. LXX. THEOR. XXX.

Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quòd corpuſculum, intra ſuperficiem conſtitutum, his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit HIKL ſuperficies illa ſphærica, & P corpuſculum intùs conſtitutum. Per P agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quàm minimos HI, KL intercipientes; &, ob triangula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis HP, LP proportionales (a); & ſuperficiei ſphæricæ particulæ quævis ad HI & KL, rectis per punctum P tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ



Evaneſcentibus igitur angulis IPH, KPL, deductæ illæ ſimul evaneſcentes rectarum HP, PL rationem vel ultimò ſervabunt. Sed evaneſcentibus angulis illis, arcus IH, KL evaneſcunt, & deductarum rationem ultimò induunt. Nempe cùm arcus illi ſint ultimò ad deductas, ut radius ad ſinus angulorum IHP, KLP ultimò æqualium. Deductarum igitur ratio ultima, ea arcuum inter ipſos ultima erit. Erunt igitur arcus HI, KL ultimò inter ſe, ſicut rectæ HP, PL.

De Motu Corporum

directè, & quadrata diſtantiarum inverſè. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuò deſtruunt. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam ſphæricam ſuperficiem à contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

PROP. LXXI. THEOR. XXXI.

Iſdem poſitis, dico quòd corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ, vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint AHKB, *ahkb* æquales duæ ſuperficies ſphæricæ, centris S, *s*, diametris AB, *ab* deſcriptæ, & P, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur à corpuſculis lineæ PHK, PIL, *phk*, *pil*, auferentes à circulis maximis AHB, *ahb*, æquales arcus HK, *hk*, & IL, *il*: et ad eas demittantur perpendicula SD, *sd*; SE, *se*; IR, *ir*; quorum SD, *sd* ſecent PL, *pl* in F & *f*: demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, *iq*. Evaneſcant anguli DPE, *dpe*: & ob æquales DS & *ds*, ES & *es*; lineæ PE, PF, & *pe*, *pf*; & lineolæ DF, *df*, pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, *dpe* ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis.

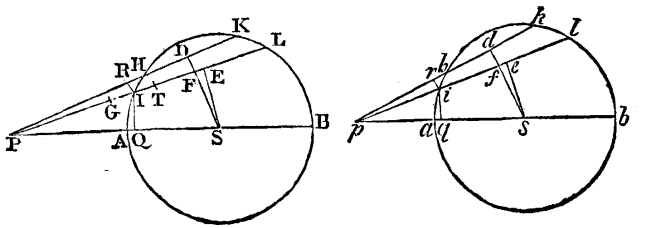
(b) *Et conjunctis rationibus.* Quæ ſequuntur ad argumenta purioris Geometriæ hoc modo revocari poſſint.

Capiatur PG ad quam PF rationem habeat quam *pf* ad *pi*; et PT ad quam PS rationem habeat eam quam *ps* ad *pi*. Jam cùm IH habeat ultimò ad *ih* rationem eam, quam rectangulum PI × *pf* ad rectangulum PF × *pi*; ſive eam, quæ componitur è rationibus rectæ PI ad rectam PF, rectæque *pf* ad *pi*; harum verò poſterior, ea utique quam *pf* habet ad *pi*, eadem ſit quam PF habet ad PG: idcirco habebit IH ad *ih* ultimò rationem quæ componitur è rationibus rectæ PI ad PF rectæque PF ad PG; eam igitur quam PI ad PG. Simili modo, eo quòd IQ ſit ad *iq* ut rectangulum PI × *ps* ad rectangulum PS × *pi*, quidque *ps* ſit ad *pi* ut PS ad PT; obtinebimus IQ eſſe ad *iq* ut PI ad PT. Cùm igitur ſit IH ad *ih* ut PI ad PG, et IQ ad *iq* ut PI ad PT, erit rectangulum IH × IQ ad rectangulum *ih* × *iq*, ultimò ſcilicet angulis HPI, *hpi* infinitè imminutis, ut quadratum ex PI ad rectangulum PG × PT. At verò ratio illa, quam, angulis HPI, *hpi* infinitè imminutis, evaneſcentia illa IH × IQ, *ih* × *iq* inter ſe ultimam habent, ea zonarum quoque evaneſcentium, quarum latitudines ſunt arcus IH, *ih*, ultima inter ipſas erit. Quare zona evaneſcens, cujus latitudo arcus IH, erit ultimò ad zonam evaneſcentem, cujus latitudo *ih*, ut quadratum ex PI ad rectangulum PG × PT. Eademque partium ſimilium harum zonarum ultima erit inter ipſas ratio. Planis igitur circulorum maximorum quorum, in ſphærâ utràque, diametri ſint communes illæ AB, *ab*, quæ centra ſphærarum cum corporum centris conjungunt, talium inquam circulorum planis dividi intelligantur illæ zonæ in partes ſimiles. Exponatur recta A datæ cujuſvis longitudis; ſitque alia *a* eâ lege mutabilis, ut latitudinibus zonarum quovis modo mutatis, necnon partium utriuſque ſimilium magnitudinibus, recta *a* habeat ad alteram A rationem eam, quam vires, quibus zonæ *ih* pars aliqua, ex iis in quas eam dividi poſuimus, corpus *p* ſollicitat, ad vires quibus pars cognata zonæ IH ſollicitat corpus P. Latitudinibus zonarum infinitè imminutis, necnon partium, in quas ſimiliter

A———— B————
a ——— *b*———

Liber Primus.

æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF, & *pf* ad *pi* ut *df* vel DF ad *ri*; & ex æquo PI × *pf* ad PF × *pi* ut RI ad *ri*, hoc eſt (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus IH ad arcum *ih*.



Rurſus PI ad PS ut IQ ad SE, & *ps* ad *pi* ut *se* vel SE ad *iq*; & ex æquo PI × *ps* ad PS × *pi* ut IQ ad *iq*. Et conjunctis rationibus (b) PI *quad.* × *pf* × *ps* ad *pi quad.* × PF × PS, ut IH × IQ ad *ih* × *iq*; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione ſemicirculi *akb* circa diametrum *ab* deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & *p*, ſunt (per hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies directè, & quadrata diſtantiarum ſuperficierum à corporibus inverſè, hoc eſt, ut *pf* × *ps* ad PF × PS. Suntque hæ

liter ſunt diviſæ, magnitudinibus, numero ſcilicet partium illarum infinitè aucto, vires, quibus præditæ ſunt zonarum partes cognatæ planis LPE, KPB, *lpb*, *kpb* interceptæ, evaneſcentibus utique angulis KPL, *kpl*, corpora P, *p* ſecundum rectas PI, *pi* ultimò totæ trahunt. Unde rationem inter ſe ultimò habebunt eam, quæ componitur è rationibus partium illarum directâ, diſtantiarumque PI, *pi* duplicatâ contrariè ſumptâ; hoc eſt, eam quæ componitur è rationibus quadrati ex PI ad rectangulum PG × PT, quadratique ex *pi* ad quadratum ex PI. Invertendo, vis, quâ ultimò pars zonæ *ih*, planis *lpb*, *kpb* intercepta, trahit corpus *p* ſecundum rectam *pi*, ad vim, quâ ultimò cognata pars zonæ IH trahit corpus P ſecundum rectam PI, rationem habet quæ componitur è rationibus rectanguli PG × PT ad quadratum ex PI, quadratique ex PI ad quadratum ex *pi*; hoc eſt eam, quam rectangulum PG × PT ad quadratum ex *pi*; ſive eam, quæ componitur è rationibus rectæ PG ad *pi* rectæque PT ad *pi*; hoc eſt, è rationibus rectæ PF ad *pf*, rectæque PS ad *ps* (nempe cùm ſit PF : PG = *pf* : *pi*, et PS : PT = *ps* : *pi*) hoc eſt, eam quam rectangulum PF × PS habet ad rectangulum *pf* × *ps*. Eademque rectarum *a*, A erit ratio ultima. Sint *b*, *b* rectæ, ad quas A, *a* rationes ſingulatim habeant eas, quas vires totæ, quibus trahuntur corpora P, *p* ſecundum rectas PI, *pi* à zonarum partibus cognatis infinitè imminutis, ad virium illarum partes illas, quæ, reſolutione virium per legum Cor. 2. factâ, ad centra ſphærarum tendunt. Erit igitur A ad B ut PI ad PQ, ſive ut PS ad PF. Et *a* ad *b* ut *pi* ad *pq*, ſive ut *ps* ad *pf*.

Jam verò cùm ſit B : A = PF : PS = PF × PS : PS^2

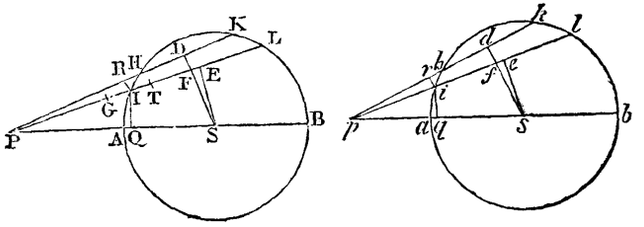
et A : *a* = = *pf* × *ps* : PF × PS (ex modo oſtenſis) ex æquo perturbatè erit B : *a* = *pf* × *ps* : PS^2. Unde cùm ſit etiam *a* : *b* = *ps* : *pf* = *ps*^{2} : *pf* × *ps* ex æquo perturbatè erit B : *b* = *ps*^{2} : PS^2.

Vires igitur quibus cognatæ ſphæricarum ſuperficierum partes corpora P, *p* verſus centra trahunt, rationem duplicatæ diſtantiarum à centris contrariam inter ſe gerunt. Et cùm ſimili argumento de quibuſvis partibus cognatis idem obtinendum ſit, vires, quibus ſuperficies totæ corpora verſus centra trahant, eandem inter ſe rationem gerent. (Geometr. Flux. Th. IV.)

vires

De Motu Corporum

vires ad ipſarum partes obliquas, quæ (factâ per legum Corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas PS, *ps* ad centra tendunt, ut



PI ad PQ, & *pi* ad *pq*; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, *piq* & *psf*) ut PS ad PF & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi *p* verſus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut *ps quad.* ad PS *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum KL, *kl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *ps quad.* ad PS *quad.* inque eâdem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies ſphærica, capiendo ſemper *sd* æqualem SD, & *se* æqualem SE, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eâdem ratione. Q. E. D.

PROP. LXXII. THEOR. XXXII.

Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; ac detur tum ſphæræ denſitas, tum ratio diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi à centro ejus: dico quòd vis, quâ corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiametro ſphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim à ſphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & diſtantias eorum à ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpectivè, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſitâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ diſtantiarum

tiarum inverſè. Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicatâ diametrorum; & diſtantiæ ſunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione poſteriore bis inverſè eſt ratio diametri ad diametrum. Liber Primus.

Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ à centris ſphærarum proportionales earundem diametris: tempora periodica erunt æqualia.

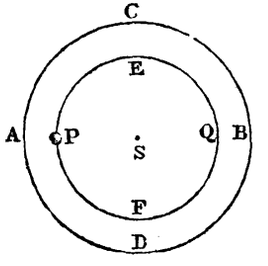
Corol. 2. Et vice verſâ, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; vires, quibus corpuſcula, ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quòd corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In ſphærâ ABCD, centro S deſcriptâ, locetur corpuſculum P; & centro eodem B, intervallo SP, concipe ſphæram interiorem PEQF deſcribi. Manifeſtum eſt (per Prop. LXX.) quòd ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia AEBF componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus P. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris PEQF. Et (per Prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia PS. Q. E. D.



Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hîc non ſunt purè mathematicæ,

De Motu Corporum

mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimò conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies, & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quòd corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtanguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concentricas; & attractiones corpuſculi, à ſingulis ſuperficiebus oriundæ, erunt reciprocè proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi à centro (per Prop. LXXI.) Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eâdem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis à centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ (*). Nam (per Prop. LXXII.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illâ ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; decreſcet

(*) Sint ſphæræ homogeneæ A, B, et ad æquales à centris earum diſtantias collocata puta corpora C, D. Dicit Newtonus vim, quâ corpus C urgetur verſus centrum ſphæræ A, eſſe ad vim, quâ corpus D urgetur verſus centrum ſphæræ B, ſicut ſphæra ipſa A ad ipſam B. Capiatur enim AE quæ ſit ad BD vel illi æqualem AC ut diameter ſphæræ A ad diametrum ſphæræ B; et in ipſo puncto E collocatum puta corpus tertium. Jam vis quâ corpus D urgetur verſus E erit ad vim quâ corpus E urgetur verſus A ut diameter ſphæræ B ad diameter ſphæræ A (per Prop. LXXVII.) Et vis quâ corpus E urgetur verſus A erit ad vim quâ corpus C urgetur verſus A, ut quadratum ex AC ad quadratum AE, hoc eſt, ut quadratum è diametro ſphæræ B ad quadratum è diametro ſphæræ A. Ex æquo vis quâ corpus D urgetur verſus B ad vim quâ corpus C urgetur verſus A rationem habet quæ componitur è rationibus diametri ſphæræ B ad diametrum ſphæræ A, quadratique ex diametro

creſcet vis particulæ cujuſque in duplicatâ ratione diſtantiæ à particulâ.

Liber Primus.

PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; dico quòd ſphæra quævis alia ſimilaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ trahentis (per Prop. LXXIV.) & propterea eadem eſt, ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt, quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modò illud à ſingulis ſphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ; ideoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eâdem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones ſphærarum, verſus alias ſphæras homogeneas, ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eâdem vi, quâ ab ipſis viciſſim trahuntur; ideoque, cùm in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quàm punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperiùs de motu corporum circa umbilicum conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent, ubi

diametro ſphæræ B ad quadratum ex diametro ſphæræ A; hoc eſt eam, quæ eſt cubi ex diametro ſphæræ B ad cubum ex diametro ſphæræ A; ſive eam, quæ eſt ſphæræ ipſius B ad ſphæram ipſam A. Q. E. D. *(Eadem ferè in notis ſuis MSS. Gregorius.)*

Cor. H. 1. In æqualibus diſtantiis à centris ſphærarum, quarum denſitates ſint diverſæ, ſingularum tamen uniformis, attractiones erunt inter ſe ut ſphærarum corpora; hoc eſt, ut ſphæræ & denſitates conjunctim.

Cor. H. 2. Vis, quâ ſphæra quælibet homogenea corpuſculum quodvis, ad datam à centro diſtantiam poſitum, in centrum trahit, eadem eſt, ac ſi materia omnis ſphæræ in ipſo centro conglobata eſſet. Nam, radio ſphæræ ſenſim ſe contrahente, puta concretione quâdam materiæ effici, ut corpus maneat. Manebit igitur vis attrahendi (per Cor. H. 1.) Et ſi radio ad minimum redacto corpus uſque maneat, manebit uſque cum corpore vis attrahendi.

De Motu Corporum

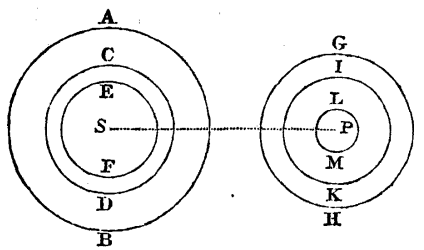
ſphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra ſphæram.

Corol. 4. Ea verò, quæ de motu corporum circa centrum conicarum ſectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram.

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico, quòd vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares AB, CD, EF, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares GH, IK, LM, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato diſtantiæ SP. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, quâ ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita, AB, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam, GH; erit in eâdem ratione. Augeatur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum, ſic ut materiæ denſitas unà cum vi attractivâ, in progreſſu à circumferentiâ ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis denſitas deficiens, eò ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eâdem illâ diſtantiæ quadratæ ratione inverſâ. Q. E. D.



Corol.

Liber Primus.

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuò trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata diſtantiarum inter centra inverſè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivâ mutuo exercitâ in ſphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervatâ.

Corol. 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperiùs de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

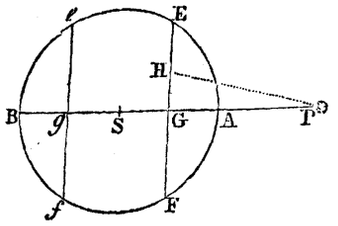
Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII.

Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuò trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.

Caſ. 1. Sit AEBF ſphæra; S centrum ejus; P corpuſculum attractum, PASB axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; EF, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia à centro ſphæræ; G, *g* interſectiones

De Motu Corporum



sectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH; & (per legum Corol. 2.) secundum lineam PG, seu versus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia PG multiplicata per numerum punctorum; id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso EF & distantia illa PG. Et similiter, vis plani *ef*, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam *Pg*, sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam *Pg*; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum PG+*Pg*, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS, hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS, vel ut summa æqualium planorum EF+*ef* ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphæra tota, hinc inde æqualiter à centro sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS, hoc est, ut sphæra tota & ut distantia PS conjunctim. Q. E. D.

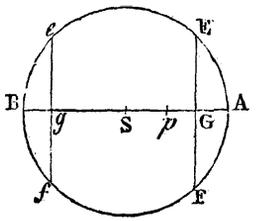
Cas. 2. Trahit jam corpusculum P sphæram AEBF. Et eodem argumento probabitur quòd vis, quâ sphæra illâ trahitur, erit ut distantia PS. Q. E. D.

Cas. 3. Componatur jam sphæra altera ex corpusculis innumeris P; & quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi à centro sphæræ primæ & ut sphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota, quâ corpuscula omnia in sphærâ secundâ trahuntur, hoc est, quâ sphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra sphærarum. Q. E. D.

Cas. 4. Trahant sphæræ se mutuò, & vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

Cas.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum *p* intra sphæram AEBF; & quoniam vis plani *ef* in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo & distantia *pg*; & vis contraria plani EF ut solidum contentum sub plano illo & distantiâ *p*G; erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum; hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in *p*s distantiam corpusculi à centro sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF, *ef* in sphærâ totâ, hoc est, attractio sphæræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphæra tota, & ut *p*s, distantia corpusculi à centro sphæræ. Q. E. D.



PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

Si sphæræ in progressu à centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares & inæquabiles, in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similares; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quòd vis tota, quâ hujusmodi sphæræ duæ se mutuò trahunt, sit proportionalis distantiæ inter centra sphærarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente eodem modo, quo Propositio LXXVI. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superiùs in Propositionibus X & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphæricorum conditionis jam descriptæ, & attracta corpora sunt sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, & componentes corporum sphæricorum vires centripetas eâdem lege, in recessu à centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: quod est notatu

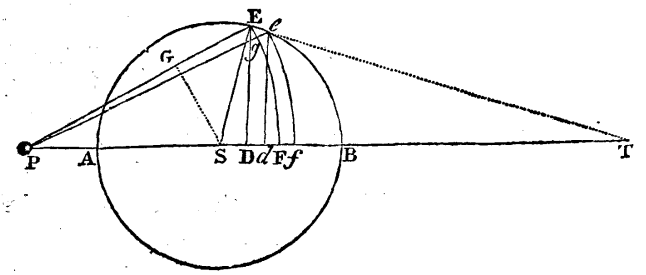
De Motu Corporum

notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minùs elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur, centro S, *circulus quilibet* AEB, &, *centro* P, *circuli duo* EF, *ef, ſecantes priorem in* E, *e, lineamque* PS *in* F, *f*; & *ad* PS *demittantur perpendicula* ED, *ed: dico quòd, ſi diſtantia arcuum* EF, *ef in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* D*d ad lineam evaneſcentem* F*f ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam ſi linea P*e* ſecet arcum EF in *g*; & recta E*e*, quæ cum arcu evaneſcente E*e* coincidit, producta occurrat rectæ PS in T; & ab S demittatur in PE normalis SG: ob ſimilia triangula DTE, *d*T*e*, DES; erit D*d* ad E*e*, ut DT ad TE, ſeu DE ad ES; & ob tri-



angula E*eg*, ESG (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia (c), erit E*e* ad *eg*, ſeu F*f*, ut ES ad SG; & ex æquo, D*d* ad F*f* ut DE ad SG; hoc eſt (ob ſimilia triangula PDE, PGS) ut PE ad PS. Q. E. D.

PROP.

(c) Anguli recti PEF, SEB inter ſe æquales ſunt. Ablatoque communi SEF, relinquentur PES, ſive GES, *e*E*g* inter ſe æquales. Anguli autem ad G et *g* æquales, namque recti. Quapropter triangula GES, *g*E*e* erunt inter ſe ſimilia.

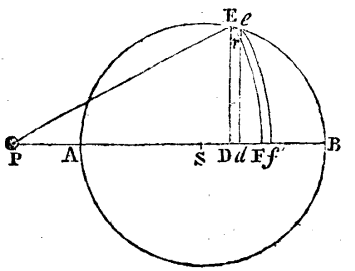
(d) Nimirum vis quâ corpuſculum in P poſitum trahitur verſus centrum S ab annulo evaneſcente ſphærico, converſione evaneſcentis arcûs EF genito, fluxio eſt virium, quibus corpus idem trahitur verſus idem centrum S à ſuperficie ſphæricâ, quæ converſione arcûs integri EF generatur. Ex iis autem quæ hactenus à Newtono diſputata ſunt, id ſcilicet efficitur, illam virium fluxionem rectanguli PD × D*d*, ſive PD × $\dot{PD}$, ſive PD × $\dot{FD}$, rationem conſtanter ſervare. Sive ſpatii PF × $\dot{FD}$ − $\dot{FD}$ × FD. Hujus autem ſpatii ſpatium PF × FD − $\frac{1}{2}$FD² fluens erit. Quare vires ipſæ ſpatii PF × FD − $\frac{1}{6}$FD²

Liber Primus.

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens EF*fe, convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quòd vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* DE*q* × F*f*, & *ratione vis, quâ particula data in loco* F*f traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primò conſideremus vim ſuperficiei ſphæricæ EF, quæ convolutione arcûs FE generatur, & à linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcûs *r*E genita, ut lineola D*d*, manente ſphæræ radio PE (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de *Sphærâ* & *Cylindro*.) Et hujus vis, ſecundum lineas, PE vel P*r*, undique in ſuperficie conicâ ſitas, exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola D*d*, vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato ſphæræ radio PE & lineolâ illâ D*d*: at ſecundum lineam, PS, ad centrum S tendentem, minor in ratione PD ad PE, ideoque ut PD × D*d*. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur D*d*; & ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos; quorum vires erunt ut ſumma omnium PD × D*d*, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$PF*q* − $\frac{1}{2}$PD*q*, ideoque ut DE *quad* (d). Ducatur jam ſuperficies FE in altitudinem F*f*; & fiet ſolidi EF*fe* vis exercita in corpuſculum P ut DE*q* × F*f*: puta ſi detur vis, quam particula aliqua data, F*f*, in diſtantiâ PF exercet



FD − $\frac{1}{2}$FD², vel inter ſe rationem gerent, vel datis majores minoreſve erunt, quàm ut rationem illam gerere poſſint. (Geometr. Flux. Th. IV.) Evaneſcente FD punctum D tandem cum ipſo F jungatur, rectaque FD in nihilum abeat. Superficies ipſa ſphærica FE, cum viribus ſuis ſimul in nihilum abierit. Non igitur datis majores minoreſve erunt vires illæ, quàm ut ſpatii illius inter ſe rationem gerant, quocum unà in nihilum abierint. Gerent igitur conſtanter ſpatii PF × FD − $\frac{1}{2}$FD² inter ſe rationem. Junctâ verò FE, dimidium quadrati ex FE rectangulo PF × FD æquale erit. Quare PF × FD − $\frac{1}{2}$FD² differentiæ quadratorum ex EF, FD dimidium erit; hoc eſt, dimidium quadratum ex FD. Vires igitur, quibus ſuperficies ſpherica converſione arcûs EF genita corpuſculum in P poſitum verſus S trahunt, quæcunque fuerit arcûs illius amplitudo, quadrati ex ED, hoc eſt, è ſinu arcûs, rationem inter ſe conſtanter gerunt, ſicut Newtonus affirmavit.

in

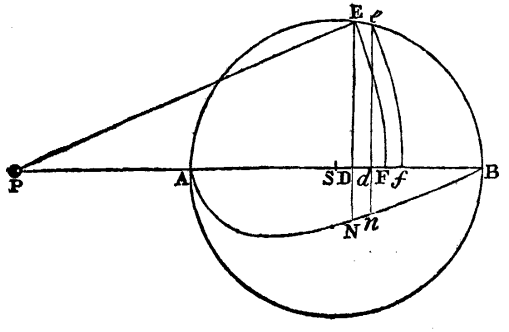
De Motu Corporum

in corpuſculum P. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi EF*fe* ut ſolidum DEq × F*f* & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

PROP. LXXX. THEOR. XL.

Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis,* D, *perpendicula,* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitates* $\frac{DE^q \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula, ſita in axe ad diſtantiam* PE, *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quòd vis tota, quâ corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuò tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem ſphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales D*d*, & ſphæram totam dividi in totidem laminas ſphæricas concavo-convexas EF*fe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per Theorema ſuperius, vis, quâ lamina EF*fe* trahit corpuſculum P, eſt ut DEq × F*f* & vis particulæ unius ad diſtantiam PE vel PF exercita conjunctim. Eſt autem (per Lemma noviſſimum) D*d* ad F*f* ut PE ad PS, & inde F*f* æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & DEq × F*f* æquale D*d* in $\frac{DE^q \times PS}{PE}$; & propterea vis laminæ EF*fe* eſt ut D*d* in $\frac{DE^q \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex hypotheſi) ut DN × D*d*, ſeu area evaneſcens DN*nd*. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes DN*nd*; hoc eſt, ſphæræ vis tota ut area tota ANB. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut DEq × PS / PE; erit vis tota, quâ corpuſculum à ſphærâ attrahitur, ut area ANB.

Liber Primus.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut diſtantia corpuſculi à ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DE^q \times PS}{PE^q}$; erit vis, quâ corpuſculum P à ſphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

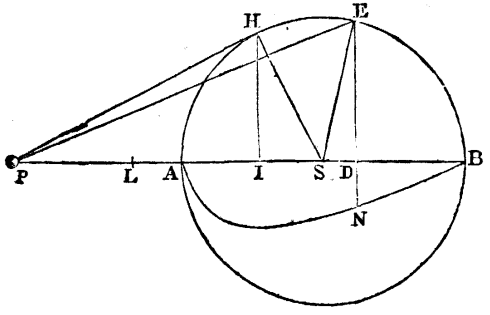
Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DE^q \times PS}{PE^{qq}}$; erit vis, quâ corpuſculum à totâ ſphærâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciprocè ut quantitas V, ſiat autem DN ut $\frac{DE^q \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpuſculum à ſphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

PROP. LXXXI. PROB. XLI.

Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ANB.

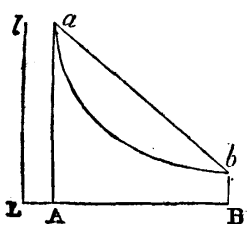
A puncto P ducatur recta PH ſphæram tangens in H, & ad axem PAB demiſſâ normali HI, biſecetur PI in L; & erit (per Prop. XII. Lib. 2. Elem.) PEq æquale PSq + SEq + 2PSD. Eſt autem SEq ſeu SHq (ob ſimilitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale eſt contento ſub PS & PS + SI + 2SD, hoc eſt, ſub PS & 2LS + 2SD, id eſt, ſub PS & 2LD. Porro DE *quad.* æquale eſt SEq − SDq, ſeu SEq − LSq + 2SLD − LDq, id eſt, 2SLD − LDq − ALB. Nam LSq − SEq, ſeu LSq − SAq (per Prop. VI. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque 2SLD − LDq − ALB pro DEq; & quantitas $\frac{DE^q \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundùm Corollarium quartum Propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^q \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale



De Motu Corporum

tionale inter PS & 2LD; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per methodos vulgatas innoteſcunt. Q. E. F.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PE^q, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data 2SL ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege, ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, deſcribet aream $\frac{LB^q - LA^q}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de areâ priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam ANB. Unde taliſ emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB, per puncta a, b deſcribatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ ANB æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\ cub.}{2AS^q}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PE^q; & fiet DN ut $\frac{SL \times AS^q}{PS \times LD} - \frac{AS^q}{2PS} - \frac{ALB \times AS^q}{2PS \times LD^q}$, id

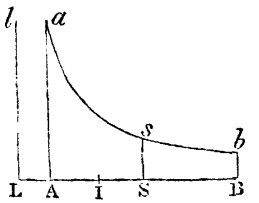
(e) Nimirum $AS^2 = SB^2 = PS \times SI$. Et $PS \times SI = LS^2 - LI^2$; nempe cùm recta PI in puncto L media ſit diviſa. Hinc $LI^2 = LS^2 - SA^2 = ALB$. Quare $LI = \sqrt{ALB}$. Sed $2SI = 2LS - 2LI = LB + AL - 2\sqrt{ALB}$. Quare $\sqrt{2.SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{AL}$. Et $\frac{1}{\sqrt{2SI}} \times \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{ALB}} \left(= \frac{1}{\sqrt{2.SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} \right) = \frac{1}{\sqrt{ALB}} = \frac{1}{LI}$. Hinc areas primam ſecundamque illis, $\frac{2SI^q \times SL}{LI}$, SI^q, ſingulatim æquari ſatis patet.

Tertiæ reductio hujuſcemodi erit. $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2.SI}} \times \frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}} = \frac{SI^2 \times ALB}{3.LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{ALB^{\frac{3}{2}}} =$

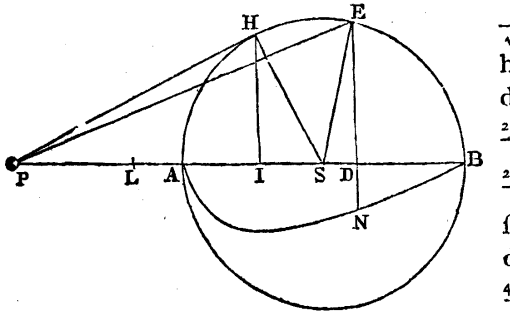
$\frac{SI^2}{}$

id eſt, (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LD^q}$. Liber Primus.

Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$, aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LD^q}$, aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ ſubducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita ANB. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B, erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perque punctum s, aſymptotis Ll, LB, deſcribatur hyperbola asb, occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area hyperbolica $Aasb$B relinquet aream quæſitam ANB.



Exempl. 3. Si vis centripeta, ad ſingulas ſphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicatâ ratione diſtantiæ à particulis; ſcribe $\frac{PE^q q}{2AS\ cub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SI^q \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^c}} - \frac{SI^q}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^q \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^q c}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SI^q \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SI^q}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SI^q \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA\ cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\ cub.}}$. Et hæ poſt debitam reductionem fiunt $\frac{2SI^q \times SL}{LI}$, SI^q, & $SI^q + \frac{2SI\ cub.}{3LI}$ (e). Hæ verò, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\ cub.}{3LI}$. Proinde vis



$\frac{SI^2}{3.LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} \times \frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{ALB^{\frac{1}{2}}} = \frac{SI^2}{3.LI} \times \frac{LB^3 - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = \frac{SI^2}{3LI} \times LB + LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = \frac{SI^2}{3LI} \times \overline{LB + LI + LA}$. Jam verò $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quare $\frac{SI^2}{3LI} \times LB + LI + LA = \frac{SI^2}{3LI} \times 2SI + 3LI$.

Quare $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2.SI}} \times \frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}} = \frac{SI^2}{3LI} \times 2SI + 3LI = SI^2 + \frac{2SI^3}{LI}$. Q. E. D. *(Le Sœur & Jacquier ad locum.)*

De Motu Corporum

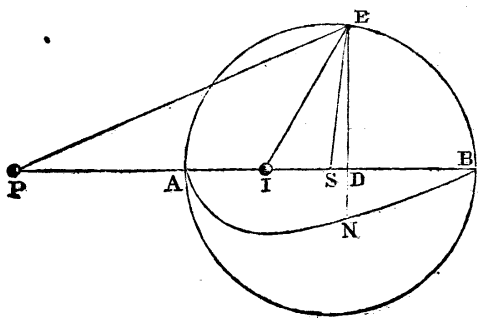
tota, quâ corpuſculum P in ſphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\ cub.}{PI}$, id eſt, reciprocè ut PS *cub.* × PI. Q. E. I.

Eâdem methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra ſphæram; ſed expeditiùs per Theorema ſequens.

PROP. LXXXII. THEOR. XLI.

In ſphærâ centro S *intervallo* SA *deſcriptâ, ſi capiantur* SI, SA, SP *continuè proportionales: dico quòd corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* IS, PS, *& ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut, ſi vires centripetæ particularum ſphæræ ſint reciprocè ut diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti; vis, quâ corpuſculum ſitum in I trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in P, in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiæ SI ad diſtantiam SP, & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ in loco I, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eâdem in centro particulâ oriundam, id eſt, ratione ſubduplicatâ diſtantiarum SI, SP ad invicem reciprocè. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P à ſphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum ſphæræ ſunt reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum,



colligetur quod attractio in I ſit ad attractionem in P, ut diſtantia SP ad ſphæræ ſemidiametrum SA: ſi vires illæ ſunt reciprocè in triplicatâ ratione diſtantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.* ſi in quadruplicatâ, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cùm attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciprocè ut PS *cub.* × PI, attractio in I erit reciprocè ut SA *cub.* × PI, id eſt (ob datum SA *cub.*) reciprocè ut PI. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema verò ſic demonſtratur.

Stantibus

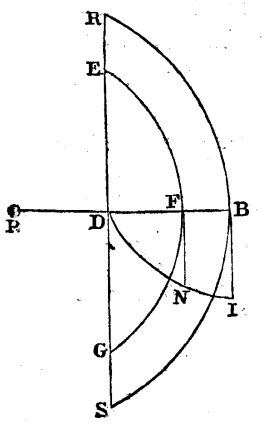
Liber Primus.

Stantibus jam antè conſtructis, & exiſtente corpuſculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DE^q \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur IE, ordinata illa, pro alio quovis corpuſculi loco I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DE^q \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è ſphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus *n* deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DE^q \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DE^q \times IS}{IE \times IE^n}$; quarum ratio ad invicem eſt ut PS × IE × IE^n ad IS × PE × PE^n. Quoniam ob continuè proportionales SI, SE, SP, ſimilia ſunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet PS × IE^n ad SA × PE^n. Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ, quas ordinatæ deſcribunt, hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatis illis rationibus. Q. E. D.

PROP. LXXXIII. PROB. XLII.

Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro ſphæræ, & RBSD ſegmentum ejus plano RDS & ſuperficie ſphæricâ RBS contentum. Superficie ſphæricâ



EFG centro P deſcriptâ ſecetur DB in F, ac diſtinguatur ſegmentum in partes BREFGS, FEDG. Sit autem ſuperficies illa non purè mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quàm minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut PF × DF × O. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciprocè ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt *n*; & vis, quâ ſuperficies EFG trahit corpus P, erit (per Prop. LXXIX.) ut $\frac{DE^q \times O}{PF^n}$, id eſt, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^q \times O}{PF^n}$ (g). Huic propor-

(g) Nimirum pro DE^q ſcribendo $2DF \times PF - DF^q$;

tionale

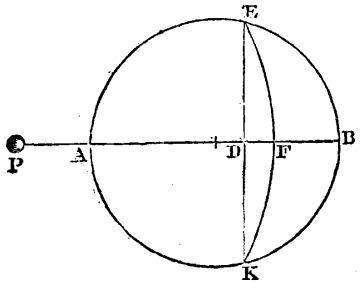
De Motu Corporum

tionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea BDI, quam ordinatim applicata FN, in longitudinem DB per motum continuum ducta, deſcribit, erit ut vis tota quâ ſegmentum totum RBSD trahit corpus P. Q. E. I.

PROP. LXXXIV. PROB. XLIII.

Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.

A ſegmento EBK trahatur corpus P in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE deſcribatur ſuperficies ſphærica EFK, quâ diſtinguatur ſegmentum in partes duas EBKFE & EFKDE. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius EBKDE. Q. E. I.



Scholium.

Explicatis attractionibus corporum ſphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO XIII.

De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.

PROP.

(a) Nam in Exemplo ſecundo, ſi corpus P tangat ſuperficiem ſphæricam in A, punctum L cum ipſo A congruet, rectaque As cum hyperbolæ aſymptotâ Ll. Unde vis, quâ corpus trahitur verſus centrum ſphæræ, cum ipſâ areâ hyperbolicâ, infinita evadet.

In

Liber Primus.

PROP. LXXXV. THEOR. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti continguum eſt, attractio longè fortior ſit, quàm cùm vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à particulis; attractio verſus corpus ſphæricum, propterea quòd (per Prop. LXXIV.) ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ attracti corporis à centro ſphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minùs augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur Propoſitio de ſphæris attractivis. Et par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in orbibus corpora interiùs conſtituta trahentibus, cùm attractiones paſſim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quòd ſi ſphæris hiſce orbibuſque ſphæricis partes quælibet à loco contactûs remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cùm ſint à loco contactûs remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum, qui ex contactu oritur. Conſtat igitur Propoſitio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ, vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis: attractio longè fortior erit in contactu, quàm cùm attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem, in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi ſphæram trahentem, augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem Problematis XLI. in exemplo ſecundo ac tertio exhibitam (a). Idem,

In Exemplo autem tertio, ſi corpus ſuperficiem ſphæricam itidem in A tangat, fiet PS = As, rectaque PI in nihilum abierit, puncto utique I æquè ac P cum ipſo A congruente. Hinc quantitas PS cub. × PI in nihilum planè abierit; vires autem, quæ contrariam quantitatis hujus inter ſe rationem gerunt, infinitæ fient.

per

De Motu Corporum

per Exempla illa & Theorema XLI. inter ſe collata, facilè colligitur de attractionibus corporum verſus orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his ſphæris & orbibus ubivis, extra locum contactûs, materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit Propoſitio de corporibus univerſis. Q. E. D.

PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales, & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & diſtantiarum dignitates illæ inverſè. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut A *cub.* & B *cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ à corporibus, ut A & B: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A quad.}}$ & $\frac{\text{B cub.}}{\text{B quad.}}$, id eſt, ut corporum latera illa cubica A & B. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A cub.}}$ & $\frac{\text{B cub.}}{\text{B cub.}}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora

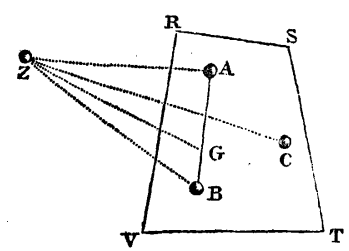
pora erunt ut $\frac{\text{A cub.}}{Aqq}$ & $\frac{\text{B cub.}}{Bqq}$, id eſt, reciprocè ut latera cubica A & B. Et ſic in cæteris. LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modò decrementum illud ſit directè vel inverſè in ratione aliquâ diſtantiarum.

PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

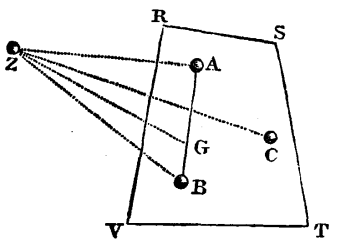
Corporis RSTV particulæ A, B trahant corpuſculum aliquod Z viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ AZ, BZ; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ AZ, BZ conjunctim, ſive (ſi ita loquar) ut hæ particulæ in diſtantias ſuas AZ, BZ reſpectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa A×AZ & B×BZ. Jungatur AB, & ſecetur ea in G, ut ſit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis A×AZ (per legum Corol. 2.) reſolvitur in vires A×GZ & A×AG; & vis B×BZ in vires B×GZ & B×BG. Vires autem A×AG & B×BG, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cùm dirigantur in partes contrarias, ſe mutuò deſtruunt. Reſtant vires A×GZ & B×GZ. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B}\times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia C, & componatur

De Motu Corporum

ponatur hujus vis cum vi $\overline{A+B \times GZ}$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G, & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac ſi globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque RSTV, ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. Q. E. D.



Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac ſi corpus attrahens RSTV eſſet ſphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum à ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, quâ corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonſtratur eodem modo, atque Propoſitio ſuperior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

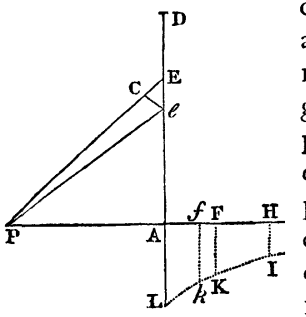
PROP.

Liber Primus.

PROP. XC. PROB. XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, creſcentes vel decreſcentes in quâcunque diſtantiarum ratione: invenire vim, quâ corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro A, intervallo quovis AD, in plano, cui recta AP perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur Circulus; & invenienda ſit vis, quâ corpuſculum quodvis, P, in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis, E ad corpuſculum attractum P agatur recta PE. In rectâ PA capiatur PF ipſi PE æqualis, & erigatur normalis FK, quæ ſit ut vis quâ punctum E trahit corpuſculum P. Sitque IKL curva linea, quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI Curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpuſculi P attractio in Circulum ut area AHIL ducta in altitudinem AP. Q. E. I.



Etenim in AE capiatur linea quàm minima Ee. Jungatur Pe, & in PE, PA capiantur PC, Pf ipſi Pe æquales. Et quoniam vis, quâ annuli, centro A intervallo AE in plano prædicto deſcripti, punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut FK; & inde vis, quâ punctum illud trahit corpus P verſus A, eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P verſus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis, quâ annulus iſte trahit corpus P verſus A, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur,

De Motu Corporum

ſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota AHIKL ducta in AP. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, atque ideo area AHIKL ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt (b), ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciprocè ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, ideoque area AHIKL ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et ſi diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus *n* ſit unitate major; attractio corpuſculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quòd terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneſcet (c).

PROP. XCI. PROB. XLV.

Invenire attractionem corpuſculi ſiti in axe Solidi Rotundi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires æquales centripetæ in quácunque diſtantiarum ratione decreſcentes.

In Solidum DECG trahatur corpuſculum P, ſitum in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS, ad hunc axem perpendiculari, ſecetur hoc ſolidum, & in ejus ſemidiametro FS, in plano aliquo PALKB per axem tranſeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo FK vi, quâ

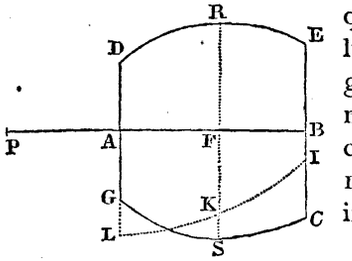
(b) Ut $\frac{PH-PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$.

(c) Rectâ utique PH cum illâ AD infinitè auctâ.

(d) CURVÆ LKI QUADRATURA.

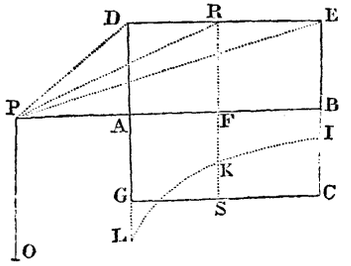
Pro 1 ſcribatur litera *b*. Hoc eſt, deſignet litera *b* datam illam rectam cujus longitudinem, in Arithmeticâ quantitatum æſtimatione, pro unitate haberi velis.

Datam rectam AD deſignet litera *a*; indefinitam PF, litera *x*. Ita, propter angulum ad F rectum, PR his notis deſignanda erit; $\sqrt{x^2+a^2}$. Ordinataque FK, cùm per Cor. 1. Prop. XC. æquanda ſit quantitati $1 - \frac{PF}{PR}$, idcirco hæc erit $b - \frac{bx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Hinc fluxio areæ curvi linearis LKI, quæ ab aſymptotâ PO, à puncto P cum axe PB ad perpendiculum eductâ, initium ſumit, quæque ad ordinatam FK terminata eſt, hujus inquam fluxio, ſive $FK \times \dot{x} = b\dot{x} - \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Quare area ipſa $\overline{FK \times \dot{x}}$ ſpatio $bx - b\sqrt{x^2+a^2}$, quod fluens eſt fluxionis $b\dot{x} - \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$, vel æqualis erit, vel illo major minorve dato



quâ corpuſculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum, AL & BI, occurrentem in L & I; & erit attractio corpuſculi P in Solidum ut area LABI. Q. E. I. LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Unde ſi Solidum Cylindrus ſit, parallelogrammo ADEB circa axem AB revoluto deſcriptus,



& vires centripetæ, in ſingula ejus puncta tendentes, ſint reciprocè ut quadrata diſtantiarum à punctis: erit attractio corpuſculi P in hunc cylindrum ut AB−PE+PD. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. XC.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, deſcribit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem $\overline{PB}$, deſcribit aream 1 in $\overline{PE-AD}$ (id quod ex Curvæ LKI quadraturâ facilè oſtendi poteſt); & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem PA deſcribit aream 1 in $\overline{PD-AD}$, ductaque in ipſarum $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ differentiam, AB, deſcribit arearum differentiam, 1 in $\overline{PE-PD}$ (d). De contento primo, $1 \times AB$, auferatur contentum poſtremum, 1 in $\overline{PE-PD}$, & reſtabit area LABI æqualis 1 in

dato (Geometr. Flux. Th. IV.) Vel, quod eodem redit, ſpatium $\overline{FK \times \dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2}$ rectangulo $b\dot{x}$ vel æquale erit, vel illo majus minuſve dato. Evaneſcendo fluat recta PF, ut congruente tandem puncto F cum ipſo P, recta PF ſeu *x* ad nihilum planè redigatur. Quo facto, pro ſpatio omni $\overline{FK \times \dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2}$ manebit quidem rectangulum *ba* datum. Quando igitur ordinata mobilis FK cum ipſâ PO congruat, ſpatium $\overline{FK \times \dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2}$ rectangulum $b\dot{x}$ dato *ba* exſuperabit. Quoniam rectangulum $b\dot{x}$ in nihilum abierit. Quare et in omni ſitu ordinatæ FK ſpatium illud hoc rectangulum eodem dato exſuperabit. Quare $\overline{FK \times \dot{x}} + b\sqrt{x^2+a^2} - ba = bx$. Unde $\overline{FK \times \dot{x}} = b \times \overline{x - \sqrt{x^2+a^2} + a}$. Atque hæc erit dimenſio areæ, quæ Curvâ LKI, Aſymptotâ PO, Ordinatâ FK, Abſciſſâque PF intercluſa eſt, quæcunque fuerit abſciſſæ illius PF, ſeu *x*, longitudo. Ponatur igitur *x* æqualis primùm rectæ toti PB, tum datæ ejus parti PA; arearumque OPBI, OPAL à formulâ generali hæ venient æſtimationes.

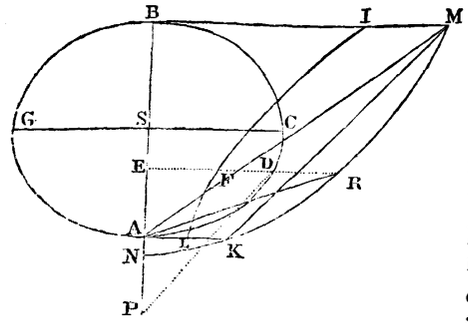
OPBI $= b \times \overline{PB - PE + AD}$

OPAL $= b \times \overline{PA - PD + AD}$.

Quare LABI $=$ OPBI − OPAL $= b \times \overline{AB - PE + PD}$. Q. E. D.

AB−

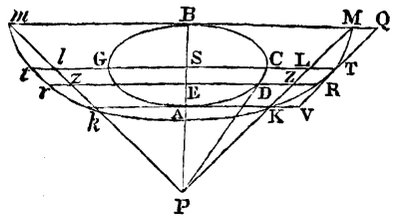
$\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut AB − PE + PD.



Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit, quâ Sphærois AGBC attrahit corpus quodvis P, exteriùs in axe ſuo AB ſitum. Sit NKRM ſectio conica, cujus ordinatim applicata ER, ipſi PE perpendicularis, æquetur ſemper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata iſta ſphæroidem ſecat (e). A ſphæroidis verticibus A, B ad ejus axem

(e) LOCUS SOLIDUS.

Sectione conicâ ACB, *cujus centrum* S, *axes* AB, CG, *poſitione datâ, ſi in rectâ* ED *ordinatim ad axem alterutrum eductâ capiatur* ER, *quæ æqualis ſit rectæ* PD, *quæ terminum ordinatæ cum puncto* P, *in axe* BA *dato, jungat; punctum* R *erit ad aliam aliquam ſectionem conicam poſitione datam.*



Per puncta A, B, quæ vertices utique ſunt axis AB, ducantur AK, BM, cum ordinatis ED parallelæ. Capiantur hinc inde AK, Ak, inter ſe rectæque PA æquales. Junctæ PK, Pk rectæ BM in punctis M, *m*, rectæ verò ER in punctis *z*, *z* occurrant. Ita erunt rectæ BM, *Bm*, inter ſe rectæque BP, rectæ EZ, *Ez*, inter ſe rectæque PE æquales. Per R ducatur recta RQ, cum rectâ PM parallela; quæ illis BM, AK in punctis Q, V, occurrat. Propter ER, PD inter ſe æquales, quadratum ex ER æquale erit duobus quadratis ex PE, ED ſimul ſumptis; hoc eſt, propter PE, EZ inter ſe æquales, duobus quadratis, ex EZ, ED ſimul ſumptis. Cùm verò recta *zz* media ſit diviſa in puncto E, quadratum ex ER æquale eſt quadrato ex EZ cum rectangulo *z*R × R*z*. (Elem. II. 6.) Quadratum igitur ex EZ cum rectangulo *z*R × R*z*, quadratis ex EZ, ED ſimul ſumptis æquale eſt. Quadrateque ex EZ communiter dempto, manebit rectangulum *z*R × R*z* quadrato ex ED æquale. At verò quadratum ex ED ad rectangulum AE × EB, propter ſectionem conicam ACB poſitione datam, datam rationem habet. Quare et rectangulum *z*R × R*z* ad rectangulum AE × EB rationem datam habet. Rectangulum autem AE × EB ad rectangulum KZ × ZM rationem habet datam; nimirum eam, quam quadratum ex datâ PA ad quadratum ex datâ PK; (El. VI. 20.) nempe cùm ſit tam AE ad KZ quàm EB ad ZM ut PA ad PK. Rectanguli igitur *z*R × R*z* ad rectangulum KZ × ZM, ſive RV × RQ, ratio data eſt (8. dat.) A puncto igitur R in rectas quatuor, KM, *Km*, K*k*, M*m*, poſitione datas, deducuntur quatuor, RZ, R*z*, RV, RQ, datis inclinationibus. Quodque deductarum duæ, RZ, R*z*, rectangulum claudunt, ad rectangulum, alteris duabus deductarum concluſum, datam rationem habet. Erit igitur punctum R ad ſectionem conicam poſitione datam. Q. E. D.

COMPOSITIO LOCI SOLIDI.

Ductis per A, B, rectis AK, BM cum axe SC parallelis, fiant AK, A*k* rectæ PA ſingulatim æquales. Junctæ PK, P*k*, rectæ BM in punctis M, *m* occurrant. Jungatur PC, & in axe SC producto capiatur

axem AB erigantur perpendicula AK, BM, ipſis AP, BP æqualia reſpectivè, & propterea ſectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eâdem ſegmentum KMRK. Sit autem ſphæroidis centrum S, & ſemidiameter maxima SC: & vis, quâ Sphærois trahit corpus P, erit ad vim, quâ ſphæra diametro AB deſcripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CS^q - PS \times KMRK}{PS^q + CS^q - AS^q}$ ad $\frac{AS\ \text{cub.}}{3PS\ \text{quad.}}$ (f). Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum ſphæroidis.

Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra ſphæroidem in axe collocetur; attractio erit ut ipſius diſtantia à centro. Id quod faciliùs hoc argumento colligitur, ſive particula in axe ſit, ſive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit AGOF *(vide fig. p. 250)* ſphærois attrahens, S centrum ejus, & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum ſemidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG ſphæroidi hinc inde

tur ST junctæ PC æqualis. Per puncta quinque, K, T, M, *m*, *k*, ſcribatur ſectio conica. Ea Locus erit punctorum R. Hoc eſt, ſi recta ED, quæ ad axem AB Curvæ ACB ordinatim eſt educta, ſectionæ conicæ KT*Mmk* in puncto R occurrat, recta ER junctæ PD æqualis erit.

DEMONSTRATIO COMPOSITIONIS.

Sectionis conicæ ACB axis GC rectis PM, P*m* in punctis L, *l* occurrat. Propter ſectionem conicam KT*Mmk*, rectangulum R*z* × R*z*, erit ad RV × RQ, ſive ZK × ZM, ſicut TL × T*l* ad quadratum ex LM. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. LVI. Cor.) Rectangulum autem R*z* × R*z* ad rectangulum AE × EB rationem habet, quæ componitur è rationibus rectanguli R*z* × R*z* ad ZK × ZM, rectangulique ZK × ZM ad AE × EB; ſive è rationibus rectanguli TL × T*l* ad quadratum ex LM, quadratique ex LM ad quadratum ex SB. Ex eiſdem verò componitur ratio illa, quam TL × T*l* habet ad quadratum ex SB. Quare R*z* × R*z* erit ad AE × EB ut TL × T*l* ad quadratum ex SB. At verò rectangulum TL × T*l* quadrato ex SC æquale eſt. Nam, propter æquales ST, PC, quadratum ex ST duobus quadratis ex PS, SC ſimul ſumptis eſt æquale; ſive duobus ex SL, SC ſimul ſumptis. Et cùm recta L*l* media ſit diviſa in puncto S, quadratum ex ST, quadrato ex SL cum rectangulo TL × T*l* eſt æquale. (El. II. 6.) Quadratum igitur ex SL cum rectangulo TL × T*l* quadratis duobus ex SL, SC ſimul ſumptis eſt æquale. Quadratoque ex SL communiter ablato, manet rectangulum TL × T*l* quadrato ex SC æquale. Rectangulum igitur TL × T*l* quadratumque ex SC ad quadratum ex SB eandem utrumque rationem habent. Sed oſtenſum eſt rectangulum R*z* × R*z* ad AE × EB rationem habere eam, quam TL × T*l* ad quadratum ex SB. Erit igitur rectangulum R*z* × R*z* ad AE × EB ſicut quadratum ex SC ad quadratum ex SB; hoc eſt, (propter ſectionem conicam ACB) ſicut quadratum ex DE ad rectangulum AEB. Rectangulum igitur R*z* × R*z* et quadratum ex DE, cùm ad rectangulum AE × EB eandem rationem gerant, erunt inter ſe æqualia. (El. V. 9.) Quadratoque ex EZ communiter addito, rectangulum R*z* × R*z* cum quadrato ex EZ, hoc eſt quadratum ex ER, quadratis ex ED, EZ, ſimul ſumptis æquale erit. Quare cùm EZ, EP ſint inter ſe æquales, quadratum ex ER quadratis ex ED, EP ſimul ſumptis, hoc eſt quadrato ex PD, æquale erit. Quare recta ER æqualis erit rectæ PD. Q. E. D.

Hæc velim Lector conferas cùm iis, quibus alii oſtendere conati ſunt, quod à Newtono affirmatum eſt, lineam KRM, ſive locum puncti R, Curvam eſſe è conicis. Senties, ni fallor, quantum lucis, ſi Diis placeat, quantum compendii, cum calculis iſtis ſuis Algebra rationibus Geometricis attulerit.

(f) CAPIATUR enim EF quæ ſit ut vis, quâ circulus, cujus centrum E, radius ED, trahit corpuſculum in P poſitum. Sitque LFI Curva, quam punctum F perpetuò tangit, quæ planis AK, BM, ſphæroidem in verticibus axis ſui contingentibus, in punctis L, I occurrat. Erit igitur ER = I −

De Motu Corporum

inde occurrentes in D & E, F & G; ſintque PCM, HLN ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus P, & ſecet rectas DE & FG in $\frac{PE}{PD}$, vel ſi b deſignet rectam illam quam pro unitate haberi velis, $EF = b - \frac{b.PE}{PD}$.

Ponatur $AE = x$. $AB = 2b$. $a = \frac{CS^2}{SA}$. Ita erit $DE^2 = 2ax - \frac{ax^2}{b}$.

Rurſum ponatur $PA = c$. Erit $PE = c + x$. Et $PE^2 = c^2 + 2cx + x^2$.

Unde $PD^2 = c^2 + \overline{2c + 2a}.x + \frac{b-a}{b}x^2$. Vel ſi pro $2c + 2a$ ſcribatur f, et g pro $\frac{b-a}{b}$, $PD^2 = c^2 + fx + gx^2$.

Quare $EF = b - \frac{b.PE}{PD} = b - \frac{bc}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} - \frac{bx}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$.

Et fluxio areæ $LAEF = EF \times \dot{x} = b\dot{x} - \frac{bc\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} - \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$.

Unde area $LAEF = bx - \overline{\frac{bc\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}} + \frac{bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$.

Ordinatæ autem EF membra illa $\frac{bc}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$, $\frac{bx}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}$, ſi ſcribas e pro c^2, d pro bc in primo, et d pro b in ſecundo, fiunt $\frac{d}{\sqrt{e+fx+gx^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{e+fx+gx^2}}$; ex quibus ſingulatim venient areæ $\frac{8dgs - 4dgxv - 2dfv}{4eg - f^2}$, $\frac{-4dfs + 2dfxv + 4dev}{4eg - f^2}$ (per Tab. II^m. Newtoni Claſſ. VIII. Form. 1 & 2.) literâ nimirum v ſectionis conicæ NKRM ordinatam ER deſignante; literâ verò s, ſectionis illius aream KAER. Quare harum arearum ſumma areæ $\overline{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ vel æqualis erit, vel eâ major minorve datâ. (Geometr. Flux. Th. IV.)

Cùm verò per literas x, s, v eædem quantitates in utroque ſymbolo ſignificentur, arearum ſummam ita facillimè collegeris, ſi membrorum homologorum coefficientes pro ſignis ſuis, +, −, algebraicè conſummaveris. Id quod fit operâ ſequente.

I. 1. $8dg = 8bc \times \frac{b-a}{b} = 8bc - 8ca$
2. $-4df = -4b \times \overline{2c + 2a} = -8bc - 8ba$
} Summa $-8a \times b + c = -8a \times PS$.

II. 1. $-4dg = -4bc \times \frac{b-a}{b} = -4bc + 4ca$
2. $+2df = 2b \times \overline{2c + 2a} = +4bc + 4ba$
} $+4a \times b + c = +4a \times PS$.

III. 1. $-2df = -2bc \times \overline{2c + 2a} = -4bc^2 - 4bac$
2. $+4de = 4b \times c^2 = +4bc^2$
} $-4bac$

$4eg = 4c^2 \times \frac{b-a}{b} = \frac{4bc^2 - 4ac^2}{b}$

$f^2 = 4c^2 + 8ac + 4a^2$

$4eg - f^2 = \frac{4bc^2 - 4ac^2 - 4bc^2 - 8acb - 4a^2b}{b} = \frac{-4ac^2 - 8acb - 4a^2b}{b}$.

Hinc $\frac{8dgs - 4dfxv - 2dfv}{4eg - f^2} + \frac{-4dfs + 2dfxv + 4dev}{4eg - f^2} = \frac{-8a \times PS.s + 4a \times PS.xv - 4bacv}{-4ac^2 - 8acb - 4a^2b} \times b =$
$\frac{2PS.s - PS.xv + bcv}{c^2 + 2cb + ab} \times b = \frac{2PS \times KREA - PS \times AE \times ER + bc.ER}{c^2 + 2cb + ab} \times b$.

Hinc

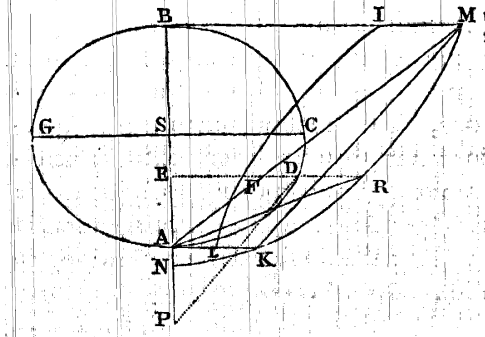
Liber Primus.

FG in B & C, poſterior ſecet eaſdem rectas in H, I & K, L. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum,

Hinc area $\overline{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ ſpatio $b \times \frac{2PS \times KREA - \overline{PS \times AE \times ER} + bc \times ER}{c^2 + 2cb + ab}$ vel æqualis erit, vel eo major minorve dato.

Fluendo decreſcat recta AE, donec puncto E in ipſum A tranſlato, recta AE, ſive x, in nihilum abeat. Area $\overline{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$ ſimul in nihilum abierit. Et pro omni ſpatio $\frac{2PS \times KREA - \overline{PS \times AE \times ER} + bc \times ER}{c^2 + 2cb + ab} \times b$ manebit $\frac{bc \times AK}{c^2 + 2cb + ab} \times b$. Quare hoc ſpatium areâ illâ dato $\frac{bc \times AK}{c^2 + 2cb + ab} \times b$ majus erit.

Ergo $\overline{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}} = \frac{2PS \times KREA - \overline{PS \times AE \times ER} + \overline{bc \times ER - AK}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$.



Jungatur AR. Rectangulum AE × ER trianguli AER duplum erit. Quare ſolidum PS × AE × ER, ſolidi 2PS × triang. AER æquale erit. Unde $2PS \times KREA - \overline{PS \times AE \times ER} = 2PS \times KREA - \text{triang. AER}$. Sed KREA − triang. AER ſpatio conico triangulari RAK æquale eſt. Hinc $2PS \times KREA - \overline{PS \times AE \times ER} = 2PS \times RAK$. Unde efficitur $\overline{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}} = \frac{2PS \times RAK + bc \times \overline{ER - AK}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$. Unde $bx - \overline{\frac{bc\dot{x} + bx\dot{x}}{\sqrt{c^2+fx+gx^2}}}$, ſive area LAEF,

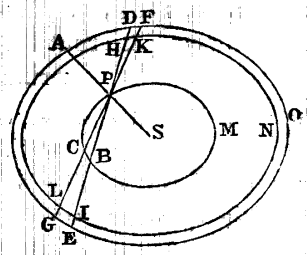
$= bx - \frac{2PS \times KARK + bc \times \overline{ER - AK}}{c^2 + 2cb + ab} \times b$. Unde rurſum, cùm recta x in ipſam AB, ſive $2b$, fluendo adoleverit, area tota $LABI = 2b^2 - \frac{2PS \times MAKRM + bc \times \overline{BM - AK}}{c^2 + 2cb + ab} b$. Sed $BM - AK = PB - PA = AB$. Quare $LABI = 2b^2 - \frac{2PS \times MAKRM + bc.AB}{c^2 + 2cb + ab} b = \frac{2c^2b^2 + 4cb^3 + 2ab^3 - 2b.PS \times MAKRM - 2cb^2}{c^2 + 2cb + ab}$.

Quare propter datam $2b$, area LABI rectæ $\frac{c^2b + 2cb^2 + ab^2 - PS \times MAKRM - cb^2}{c^2 + 2cb + ab}$ rationem conſtanter ſervabit; ſive rectæ $\frac{c^2b + cb^2 + ab^2 - PS \times MAKRM}{c^2 + 2cb + ab}$. Atque $c^2b + cb^2 = cb \times \overline{c + b} = \overline{RA \times AS} \times PS = \text{triang. MAK} \times PS$. Hinc recta $\frac{c^2b + cb^2 + ab^2 - PS \times MAKRM}{c^2 + 2cb + ab} = \frac{PS \times \text{triang. MAK} + ab^2 - PS \times MAKRM}{c^2 + 2cb + ab}$.

Sed triang. MAK − MAKRM = − KRM. Et $ab = CS^2$. Et $c^2 + 2cb = AP^2 + BAP = BP \times PA = PS^2 - AS^2$.

Quare recta $\frac{c^2b + cb^2 + ab^2 - PS \times MAKRM}{c^2 + 2cb + ab} = \frac{CS^2 \times AS - PS \times KRM}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$. Atque hujus rectæ rationem area LABI, nec non vis quâ ſphærois AGBC corpus in P poſitum verſus centrum ſuum trahit, ſervabit.

Jam verò manentibus AS, PS, recta CS minuatur paulatim vel creſcat, ut rectæ AS æqualis tandem evadat; ita verò Ellipſis ACBG in Circulum abierit, & Sphærois ACBG in Sphæram perfectam.



tarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FP & CG, DH & IE, FK & LG ſibi mutuò æquales; propterea quòd rectæ DE, PB, & HI biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL. Concipe jam DPF, EPG deſignare conos oppoſitos, angulis verticalibus DPF, EPG infinitè parvis deſcriptos, & lineas etiam DH, EI infinitè parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ DHKF, GLIE, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum à corpuſculo P, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus ſphæroidum innumerarum, ſimilium, concentricarum, & axem communem habentium, dividantur ſpatia DPF, EGCB in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni DPF & ſegmenti conici EGCB, & per contrarietatem ſe mutuò deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra ſphæroidem intimam PCBM. Trahitur igitur corpus P à ſolâ ſphæroide intimâ PCBM, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, quâ corpus A trahitur à ſphæroide totâ AGOD, ut diſtantia PS ad diſtantiam AS. Q. E. D.

PROP. XCII. PROB. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

E corpore dato formanda eſt Sphæra, vel Cylindrus, aliave figura

Rectaque $\frac{CS^2 \times AS - PS \times KRM}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$, cujus rationem area LABI ſervat, ea fiet $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^2}$. Jam verò exiſtente ACBG Circulo, ſectio conica NKRM Parabola erit, cujus axis NB, parameter 2PS. Id quod ex æquatione illâ, PD², ſive ER², $= c^2 + \overline{2c + 2a}.x + \frac{b-a}{b}x^2$ ſatis patet: quæ rectis, b, a, propter circulum ACBG jam factis æqualibus, in hanc migraverit, $ER^2 = c^2 + \overline{2c + 2b}.x$.

Hinc area conica KRMBA $=$ NRMB $-$ NKA $= \frac{2}{3}$NB $\times$ BM $- \frac{2}{3}$NA $\times$ AK. Sed NB $= \frac{BM^2}{2PS}$. Et NA $= \frac{AK^2}{2PS}$ (propter parabolam). Hinc $\frac{2}{3}$NB $\times$ BM $- \frac{2}{3}$NA $\times$ AK $= \frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$.

Quare area parabolica KRMBA $= \frac{BM^3 - AK^3}{3PS}$.

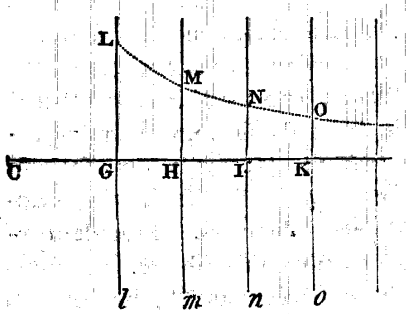
Sed

gura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI & XCI.) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis diſtantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit.

PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

Si Solidum ex unâ parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu à Solido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quòd Solidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie planâ, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi à plano, & index ternario minor quàm index poteſtatis diſtantiarum.

Caſ. 1. Sit LG*l* planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus verſus I, inque plana innumera *m*HM, *n*IN, *o*KO, &c. ipſi GL parallela reſolvatur. Et primò collocetur corpus attractum c extra ſolidum. Agatur autem CGHI planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus *n* ternario non



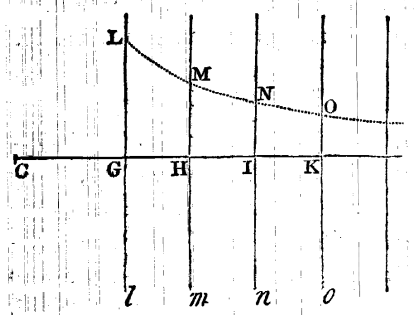
Sed BM $=$ PB $=$ PS $+$ SA. Et AK $=$ PA $=$ PS $-$ SA. Quare $BM^3 - AK^3 = 6PS^2 \times SA + 2SA^3$.

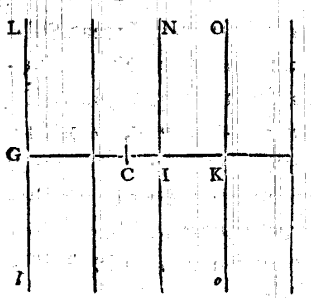
Quare area parabolica KRMBA $= \frac{6PS^2 \times SA + 2SA^3}{3PS}$. Demptoque trapezio KABM $= AS \times \overline{BM + AK}$ $= AS \times 2PS = \frac{6PS^2 \times SA}{3PS}$, manebit KRM $= \frac{2SA^3}{3PS}$. Unde et PS $\times$ KRM $= \frac{2SA^3}{3}$. Hinc $\frac{AS^3 - PS \times KRM}{PS^2} = \frac{AS^3}{PS^2} - \frac{2SA^3}{3PS^2} = \frac{AS^3}{3PS^2}$.

Atque huic rectæ æqualis erit illa, cujus rationem area LABI ſervat; quando ſcilicet ſphæroïs ACBG, diametro æquatoris CG cum ipſo axe AB æquatâ, perfectam ſphæræ figuram induerit. Erit igitur vis, quâ ſphæroïs trahit corpus P, ad vim quâ ſphæra, diametro AB ſcripta, idem corpus trahit, ut $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^2}$, ſicut Newtonus affirmavit. Q. E. D.

De Motu Corporum

minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC.) vis, quâ planum quodvis *m*HM trahit punctum c, eſt reciprocè ut CH^{n-2}. In plano *m*HM capiatur longitudo HM ipſi CH^{n-2} reciprocè proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis ſingulis *l*GL, *n*IK, *o*KO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque ſumma virium ut ſumma longitudinum; hoc eſt, vis Solidi totius ut area GLOK in infinitum verſus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciprocè ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius eſt reciprocè ut CG^{n-3}. Q.E.D.





Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum c ex parte plani *l*GL intra Solidum, & capiatur diſtantia CK æqualis diſtantiæ CG. Et ſolidi pars LG*lo*K*o*, planis parallelis *l*GL, *o*KO terminata, corpuſculum c, in medio ſitum, nullam in partem trahet; contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum c ſolâ vi Solidi ultra planum OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciprocè ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3}. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi Solidum LGIN planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractivâ Solidi totius infiniti LGKO vim attractivam partis ulterioris NIKO, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius penè eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris, augendo diſtantiam, decreſcet quàm proximè in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum, & ex unâ parte planum,

Liber Primus.

num, trahat corpuſculum è regione medii illius plani; & diſtantia inter corpuſculum & planum, collata cum dimenſionibus corporis attrahentis, perexigua ſit; conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum: vis attractiva corporis totius decreſcet quamproximè in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quàm index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quòd, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinitè major quàm attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur Problema quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis rectâ deſcendentis ad hoc planum, & (per legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contrà, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis Tertii.

Operationes autem contrahî ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ vel in baſem attractum, vel à baſi fugatum, moveri poſſit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: ſuppono baſem augeri parte quàm minimâ o, & ordinatim applicatam, $\overline{A+o}^{\frac{m}{n}}$, reſolvo in ſeriem infinitam, $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}oA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn}ooA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo o duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn}ooA^{\frac{m-2n}{n}}$

vim

De Motu Corporum

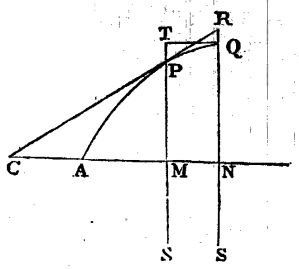
vim proportionalem esse suppono (e). Est igitur vis quæsita ut $\frac{mn-nn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$; vel quod perinde est, ut $\frac{mn-nn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quòd si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^3$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbolâ. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROP. XCIV. THEOR. XLVIII.

Si media duo similiaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quòd sinus incidentiæ in planum

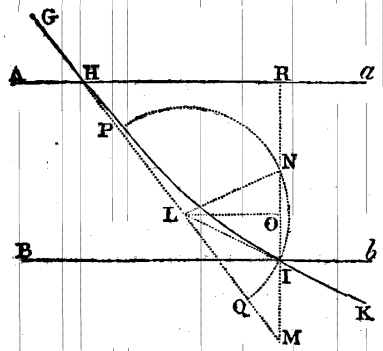


(e) Nimirum in figurâ Problematis tertii, sit Abscissa AM = A, Ordinata PM = B. Curvæ autem APQ ea fit natura, ut fit $A^n = B$, sive $A^m = B^n$.

Recta RP, quæ Curvam in P contingat, occurrat axi MA in C, & Ordinatæ NQ in R. Recta autem MN, ordinatis MP, NQ interjecta, dicatur O. Si corpus quodpiam, viribus secundum rectas parallelas PM, QN incitatum, per Curvam APQ feratur, vires illæ rationem inter se ejus quæ rectarum $\frac{QT^2}{QR}$, evanescente arcu PQ, est ultima contrariam, necesse est constanter gerant (Prop. VI. Cor. 5.) Sive ejus contrariam, quæ, evanescente arcu PQ, ultima est rectarum $\frac{MN^2}{QR}$. Namque propter rectas PM, QN parallelas, et angulum ad T rectum, ad M aut rectum aut datum, rectæ QT, MN, aut æquales erunt inter se, aut datam saltem inter se rationem gerent. Jam verò propter $A^m = B^n$, erit recta $MC = \frac{nB^n}{mA^{m-1}}$ (Geometr. Analyt. Prop. IV. Mod. 1.) Et propter rectas PM, NR inter se parallelas, erit CM : MP = CN : NR. Sive $\frac{nB^n}{mA^{m-1}} : A^{\frac{m}{n}} = \frac{nB^n}{mA^{m-1}} + O : NR$. Quare $NR = \left.\frac{nB^n}{mA^{m-1}} + O\right| \times A^{\frac{m}{n}} \times \frac{mA^{m-1}}{nB^n}$

planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ. Liber Primus.

Cas. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa secundum lineam GH; ac, toto suo per spatium intermedium transitu, attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam HI, & emergat secundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ, KI, producta occurrat HM in L. Centro L intervallo LI describatur circulus, secans tam HM in P & Q, quàm MI productam in N; & primò si attractio, vel impulsus, ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) Curva HI Parabola; cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & lineâ IM æquale sit HM quadrato; sed & linea HM bisecabitur in L (a). Unde si ad MI demittatur perpen-



$\frac{mA^{m-1}}{nB^n} = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m \times A^{\frac{m}{n}+m-1}}{nB^n} O$. Hoc est, propter $A^m = B^n$, $NR = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} O$.

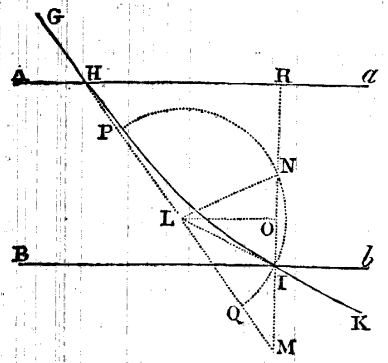
Sed ex naturâ Curvæ APQ, $QN = \overline{A+O}^{\frac{m}{n}} = A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} O + \frac{mm-mn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} O^2 + \frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3} A^{\frac{m-3n}{n}} O^3$.

Ergo $QR = NR - NQ = \frac{mn-nn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} O^2 + \frac{3m^2n-m^3-2mn^2}{6n^3} A^{\frac{m-3n}{n}} O^3 +$. Et $\frac{MN^2}{QR} = \frac{O^2}{QR} = \frac{1}{\frac{mn-nn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{3m^2n-m^3-2mn^2}{6n^3} A^{\frac{m-3n}{n}} O +}$ Vires igitur, de quibus agitur, quantitatum $\frac{mn-nn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{3m^2n-m^3-2mn^2}{6n^3} A^{\frac{m-3n}{n}} O +$ rationem ultimam constanter servant; hoc est, propter illam O infinitè imminutam, quantitatum $\frac{mn-nn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$. Rectè igitur posuit Newtonus vires illas cum his quantitatibus proportione convenire.

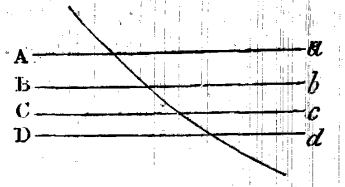
(a) Id quod facilè efficitur ex XLVII^a. Lib. 1. Conicorum Hamiltoni, si per H ducatur recta cum illâ LI, quæ Parabolam in I contingit, parallela.

De Motu Corporum

diculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cùm IR detur, datur etiam MN; eſtque rectangulum NMI ad rectangulum ſub latere recto & IM, hoc eſt, ad HMq, in datâ ratione. Sed rectangulum NMI æquale eſt rectangulo PMQ, id eſt, differentiæ quadratorum MLq, & PLq ſeu LIq; & HMq datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem MLq: ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad MLq; & convertendo ratio LIq ad MLq, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinûs anguli incidentiæ LMR ad ſinum anguli emergentiæ LIR. Q. E. D.



Caſ. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſivè per ſpatia plura parallelis planis terminata, A*ab*B, B*bc*C, &c. & agitetur vi, quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum A*a* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo B*b*, in datâ ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum B*b*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio C*c*, in datâ ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto D*d*, in datâ ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulſûs actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinûs incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. Q. E. D.



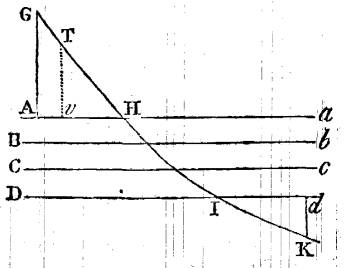
PROP.

Liber Primus.

PROP. XCV. THEOR. XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quòd velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

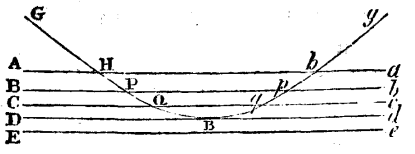
Capiantur AH, I*d* æquales, & erigantur perpendicula AG, *d*K occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum A*a* demittatur normaliter T*v*. Et (per legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis A*a*, B*b*, C*c*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſûs, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas; & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam *d*K; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt : d velocitatem poſt emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id eſt, ut AH vel I*d* ad *v*H, hoc eſt (reſpectu radii TH vel IK) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. Q. E. D.



PROP. XCVI. THEOR. L.

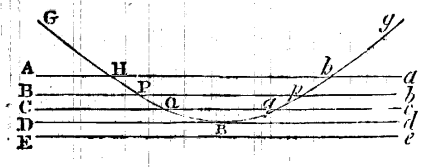
Iiſdem poſitis, & quòd motus ante incidentiam velocior ſit quàm poſtea: dico quòd corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana A*a*, B*b*, C*c*, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi HP, PQ, QR, &c. Et ſit ea lineæ incidentiæ, GH, obliquitas ad planum primum A*a*, ut



De Motu Corporum

ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in eâ ratione, quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano D*d*, in ſpatium D*de*E : & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideóque linea emergentiæ coincidet cum plano D*d*. Perveniat corpus ad hoc



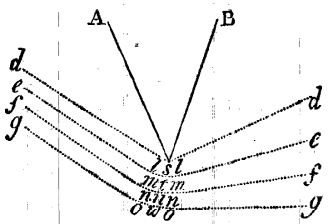
planum in puncto B ; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt, quòd corpus non poteſt ultrà pergere verſus planum E*e*. Sed nec poteſt idem pergere in lineâ emergentiæ R*d*, propterea quòd perpetuò attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana C*c*, D*d*, deſcribendo arcum Parabolæ QB*q*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi)* eſt in B ; ſecabit planum C*c* in eodem angulo in *q*, ac priùs in Q ; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus QP, PH ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac priùs in P, H, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in *h*, quâ incidit in H. Concipe jam planorum A*a*, B*b*, C*d*, D*d*, E*e*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eò ut actio attractionis vel impulſûs, ſecundùm legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur ; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

Scholium.

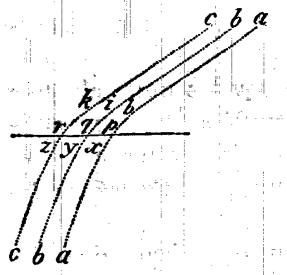
Harum attractionum haud multùm diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundùm datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundùm datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſivè propagari, & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum à ſole ad terram venire, jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſâ, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære

Liber Primus.

ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem ; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propiùs accedunt ad corpora, incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minùs incurvantur ; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figurâ deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis ASB ; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati ; idque magis vel minùs pro diſtantia eorum à cultro. Cùm autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii,



qui incidunt in cultrum, priùs incurvari in aere quàm cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt : uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *b* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere ; interea de naturâ radiorum (utrùm ſint corpora necne) nihil omninò diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodò determinans.



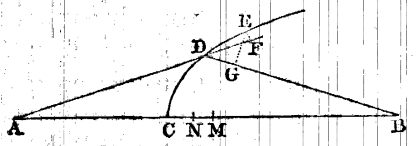
PROP. XCVII. PROB. XLVII.

Poſito quòd ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in datâ ratione ; quódque incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari

De Motu Corporum

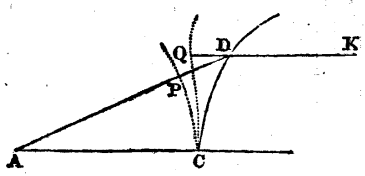
conſiderari poſſit: determinare ſuperficiem, quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus à quo corpuſcula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; D, E Curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demiſſa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF, quâ AD augetur, ad lineam DG, quâ DB diminuitur, ratio ultima erit eadem, quæ ſinûs incidentiæ ad ſinum emergentiæ (b). Datur ergo ratio incrementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea, ſi in axe AB ſumatur ubivis punctum C, per quod Curva CDE tranſire debet, & capiatur ipſius AC incrementum, CM, ad ipſius BC decrementum, CN, in datâ illâ ratione, centriſque A, B, & intervallis AM, BN deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in D; punctum illud D tanget Curvam quæſitam CDE, eademque ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.



Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Carteſius* in Opticâ & Geometriâ ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cùm *Carteſius* celaverit, viſum fuit hâc Propoſitione exponere.

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis CD, ſecundum lineam rectam AD, lege quâvis ductam incidens, emerget ſecundum aliam quamvis rectam DK, & à puncto C duci intelligantur lineæ curvæ CP, CQ ipſis AD, DK ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum PD, QD, atque ideo lineæ ipſæ PD, QD, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contrà.



PROP.

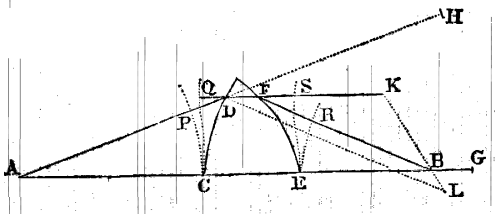
(b) Junctâ enim DE, anguli rectilinei DEF, DEG, quorum ſinus ſunt DF, DG pro radio communi

Liber Primus.

PROP. XCVIII. PROB. XLVIII.

Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcriptâ ſuperficie quâcunque attractivâ* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta AB ſecet ſuperficiem primam in C & ſecundam in E, puncto D utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eâdem, & ſinu emergentiæ è ſuperficie ſecundâ ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: producatur AB ad G, ut ſit BG ad CE ut M − N ad N; tum AD ad H, ut ſit AH æqualis AG; tum etiam DF ad K, ut ſit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH deſcribe circulum occurrentem KB productæ in L, ipſique DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. Q. E. F.



Nam concipe lineas CP, CQ ipſis AD, DF reſpectivè, & lineas ER, ES ipſis FB, FD ubique perpendiculares eſſe, ideoque QS ipſi CE ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N, ideoque ut DL ad DK vel FB ad FK; & diviſim ut DL − FB, ſeu PH − PD − FB, ad FD, ſeu FQ − QD; & compoſitè ut PH − FB ad FQ, id eſt (ob æquales PH & CG, QS & CE) CE + BG − FR ad CE − FS. Verùm (ob proportionales BG ad CE & M − N ad N) eſt etiam CE + BG ad CE ut M ad N; ideoque diviſim FR ad FS ut M ad N; & propterea (per Corol. 2. Prop. XCVII.) ſuperficies EF cogit corpus, in ipſam ſecundùm lineam DF incidens, pergere in lineâ FR ad locum B. Q. E. D.

Scholium.

Eâdem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures.

muni DE, hi, evaneſcente arcu DE, fiunt angulis, ille incidentis radii, hic emergentis, ultimò æquales. Erunt igitur DF, DG ultimò ut ſinus illi.

Ad

De Motu Corporum

Ad uſus autem opticos maximè accommodatæ ſunt figuræ ſphæricæ. Si perſpicillorum vitra objectiva ex vitris duobus ſphæricè figuratis & aquam inter ſe claudentibus conflentur; fieri poteſt ut à refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolùm quòd faciliùs & accuratiùs formari poſſint, ſed etiam quòd penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratiùs refringant. Veruntamen diverſa diverſorum radiorum refringibilitas impedimento eſt, quo minùs optica per figuras vel ſphæricas vel alias quaſcunque perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperitè collocabitur.

DE MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.

PROP. I. THEOR. I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentiâ amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

Liber Secundus.

NAM cùm motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Quare ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ſpatiis liberis ſolâ vi inſitâ moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motûs illius partem amiſſam.

LEMMA

De Motu Corporum

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

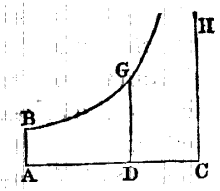
Sit A ad A−B ut B ad B−C & C ad C−D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. Q. E. D.

PROP. II. THEOR. II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis, singulis temporis particulis, ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. 2.) continuè proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continuè proportionales, erunt in hoc etiam casu continuè proportionales. Q. E. D.

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per Prop. I. Lib. 2.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

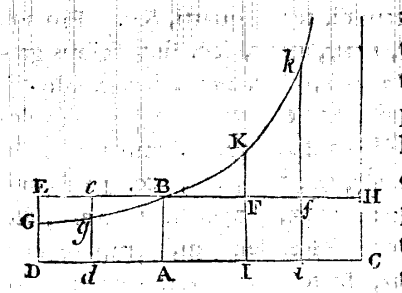


Corol. Hinc si asymptotis rectangulis AC, CH describatur hyperbola BG, sintque AB, DG ad asymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motûs initio, per lineam quamvis datam AC, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC: exponi potest tempus per aream ABGD, & spatium eo tempore descriptum per lineam AD. Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta DC in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & partes rectæ AC, æqualibus temporibus descriptæ, decrescent in eâdem ratione.

PROP. III. PROB. I.

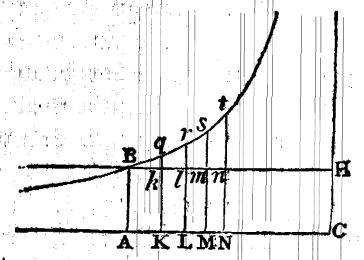
Corporis, cui, dum in medio similari rectâ ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BACH, & resistentia medii, initio ascensûs, per rectangulum BADE sumptum ad contrarias partes rectæ AB. Asymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B describatur hyperbola secans perpendicula DE, *de* in G, *g*; & corpus ascendendo tempore DG*gd* describet spatium EG*ge*, tempore DGBA spatium ascensûs totius EGB; tempore ABKI spatium descensûs BFK, atque tempore IK*ki* spatium descensûs KF*fk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt ABED, AB*ed*, nulla, ABFI, AB*fi* respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit BACH.



Resolvatur enim rectangulum BACH in rectangula innumera A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*, &c.

De Motu Corporum



&c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypotheſin) ut reſiſtentiæ medii principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK, vel ABHC ad AB*k*K, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi; deque vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt ABHC, K*k*HC, L*l*HC, M*m*HC, &c. ut vires abſolutæ, quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque ideo (per motûs legem II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, &c. & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progreſſione geometricâ. Quare ſi rectæ K*k*, L*l*, M*m*, N*n*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ AB*q*K, K*qr*L, L*rs*M, M*st*N, &c. æquales; ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area AB*q*K (per Corol. 3. Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream B*kq* ut K*q* ad $\frac{1}{2}kq$ ſeu AC ad $\frac{1}{2}$AK, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio tempori ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cùm areæ æquales BAK*q*, *q*K*Lr*, *r*L*Ms*, *s*M*Nt*, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ B*kq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ B*kq*, B*lr*, B*ms*, B*nt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ AB*q*K, AB*r*L, AB*s*M, AB*t*N, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis AB*r*L, deſcribit ſpatium B*lr*, & tempore L*rt*N ſpatium *rlnt*. Q. E. D. Et ſimilis eſt demonſtratio motûs expoſiti in aſcenſu. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere,

(a) NIMIRUM ſunt B*kq*, *qklr*, *rlms*, *smnt* ſpatia, quæ temporum differentiis æqualibus, BAK*q*, *q*K*Lr*, *r*L*Ms*, *s*M*Nt*, caſu corporis conficiuntur. Horum verò ſpatiorum differentiæ rectangulorum A*k*, K*l*, L*m*, M*n* differentiis ſunt æquales. (Nempe propter areas A*q*, K*r*, L*s*, M*t* inter ſe æquales.) Rectangula autem illa, cùm ſint rectangulorum CB, C*k*, C*l*, C*m*, C*n*, geometricâ ratione decreſcentium, differentiæ, eâdem ratione geometricâ ipſa decreſcunt; hoc eſt eâ, quâ decreſcunt differentiæ, quibus velocitates corporis cadentis abſunt à velocitate maximâ, quam ultimò illud adeptum fuerit. Nam

acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim reſiſtentiæ, quâ in fine temporis illius impeditur. LIBER SECUNDUS.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione arithmeticâ, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis, in aſcenſu; atque etiam earundem differentia, in aſcenſu, decreſcit in progreſſione geometricâ.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum (a), quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eâdem progreſſione geometricâ.

Corol. 4. Spatium vero à corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum, quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſûs, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo deſcenſûs initio æquantur inter ſe.

PROP. IV. PROB. II.

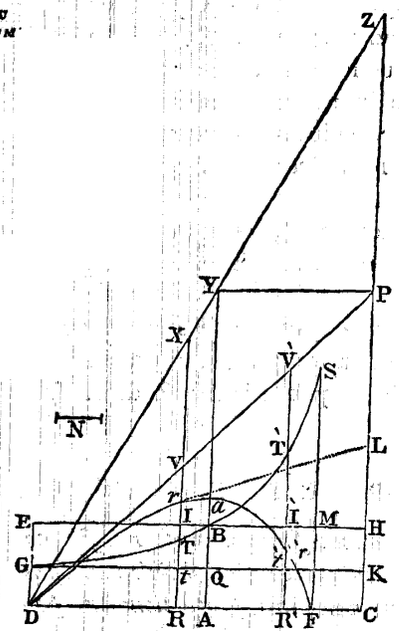
Poſito quòd vis gravitatis in medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, reſiſtentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis D egrediatur projectile ſecundùm lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejuſdem velocitas ſub initio motûs. A puncto P ad lineam horizontalem DC demittatur perpendiculum PC; & ſecetur DC in A, ut ſit DA ad AC ut reſiſtentia medii, ex motu in altitudinem ſub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde eſt) ut ſit rectangulum ſub DA & DP ad rectangulum ſub AC & CP ut reſiſtentia tota, ſub initio motûs, ad vim gravitatis. Aſymptotis DC, CP deſcribatur hyperbola quævis GTBS ſecans perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum DGKC, cujus latus GK ſecet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB, quâ DC ſit ad CP; & ad rectæ

Nam rectangula CB, C*k*, C*l*, C*m*, C*n* pari ratione cum differentiis velocitatum illarum minuuntur. Cùm verò rectangula A*k*, K*l*, L*m*, M*n* geometricè decreſcant, eorum etiam differentiæ, ſive differentiæ ſpatiorum B*kq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, ſimiliter decreſcent; hoc eſt pro ratione differentiarum, quibus velocitates corporis cadentis à maximâ velocitate abſunt.

Simili modo oſtendatur differentia ſpatiorum, quæ, æqualibus temporum differentiis, corpus aſcendendo confecerit, pro ratione ſummæ velocitatis corporis aſcendentis velocitatiſque maximæ, quâcum aſcenſum inchoaverat, decreſcere.

De Motu Corporum



DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, *t* & V occurrat; in eo cape V*r* æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde est, cape R*r* æqualem $\frac{GTIE}{N}$ (b); & projectile tempore DRTG perveniet ad punctum *r*, describens curvam lineam D*raf*, quam punctum *r* semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad asymptoton PC. Estque velocitas ejus in puncto quovis *r* ut curvæ tangens *r*L. Q. E. I.

Est enim N ad QB ut DC ad CP, seu DR ad RV; ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & R*r* (id est RV − V*r*, seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream RDGT, & (per legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensûs, alterum ad latus. Et cùm resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motûs proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus descripta, erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo verò (per Prop. III. hujus) ut area (c), DR × AB − RDGT, hoc est, ut linea R*r*. Ipso autem motûs initio area RDGT æqualis est rectangulo DR × AQ, ideoque

(b) Propter figuram BQ*tI* parallelogrammam erunt TQ, *tI* inter se æquales. Et propter figuram *t*RDG parallelogrammam erunt DR, G*t* inter se æquales. Quapropter cùm sit N ad QB ut DC ad CP, erit N ad *t*I ut DC ad CP, hoc est, ut DR, vel G*t* ad RV. Erunt igitur rectangula G*t*IE, N × RV inter se æqualia. At verò N × RV, duobus N × V*r*, N × R*r* simul sumptis est æquale. (El. II. 1.) Duo igitur N × V*r*, N × R*r* simul sumpta rectangulo G*t*IE, five spatiis duobus G*t*I, GTIE simul sumptis sunt æqualia. Quare si N × V*r* æquale sit spatio G*t*I, erit N × R*r* æquale spatio GTIE.

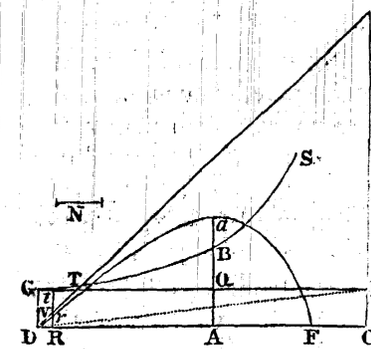
(c) Ut GTIE, hoc est ut DR × AB − RDGT.

(d) Corpus verò projectum altitudinem maximam in puncto *a* attingere, id ex Propositione tertiâ patet, et velocitatem in loco *r* esse ut *r*L id quidem ex Propositione II^a. Nempe cùm per Prop. II. velocitas motûs ad latus sit ut RC; velocitas autem ad latus ad velocitatem motûs per Curvam

que linea illa R*r* (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut AB − AQ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cùm igitur R*r* semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque R*r* ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est, ut R*r* semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in lineâ D*raf*, quam punctum *r* perpetuò tangit (d). Q. E. D. Liber Secundus.

Corol. 1. Est igitur R*r* æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque si producatur RT ad X, ut sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum ACPY, jungatur DY secans CP in *z*, & producatur RT donec occurat DY in X (e); erit X*r* æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

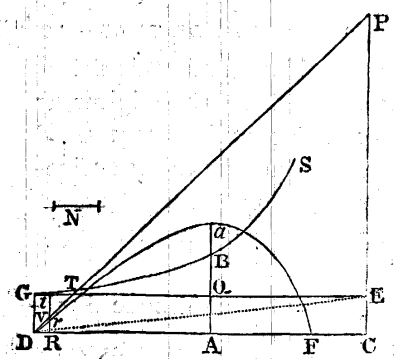
Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde est, innumeræ *z*X in progressione geometricâ; erunt totidem X*r* in progressione arithmeticâ. Et hinc Curva D*raf* per Tabulam Logarithmorum facilè delineatur.



Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorsum productâ, & latere recto quod sit ad 2DP ut resistentia tota ipso motûs initio ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas, quâcum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat Curvam D*raf*, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum Curvam in loco *r*, ut $\overline{DR}$ ad $\overline{Dr}$, hoc est ut RC ad *r*L.

(e) Completo parallelogrammo ACPY, junctâque DY, quâcum recta RV, si opus sit producta, in X occurrat, dico rectangula RX × N, DR × AB inter se æqualia. Namque recta N est ad QB ut DC ad CP; id enim factum est. Et propter hyperbolam GBS, cujus centrum C, asymptotæ CH, CA, erit BA ad BG, vel AQ, ut CD ad CA. Convertendo et invertendo BQ erit ad BA ut DA ad DC. Cùm igitur sit N ad QB ut DC ad CP; et QB ad AB ut DA ad DC; ex æquo perturbate, erit N ad AB ut DA ad CP vel AY. Productis autem DY, CP concursum usque mutuum, qui in puncto *z* fiat, erit DA : AY = DC : C*z*. Quare N : AB = DC : C*z*. Permutando et invertendo DC : N = C*z* : AB. Quare RX × DC : RX × N = DR × C*z* : DR × AB. Sed rectangulum RX × DC, rectangulo DR × C*z* æquale est. Nempe cùm, propter rectas RX, C*z* inter se parallelas, fit DR : RX = DC : C*z*. Unde RX × N æquale erit rectangulo DR × AB. (El. V. 14.) Q. E. D.

eandem



eandem rectam DP, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam latus rectum parabolæ hujus, ipſo motûs initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & vr eſt $\frac{rGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tr}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, parallela eſt ipſi DK (f), ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$ (g), & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea vr eſt $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$, id eſt (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DV^2 \times CK \times CP}{2DP^2 \times QB}$, & latus rectum, $\frac{DV\ quad.}{Vr}$, prodit $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales QB & CK, DA & AC (h) $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad 2DP, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. Q. E. D.

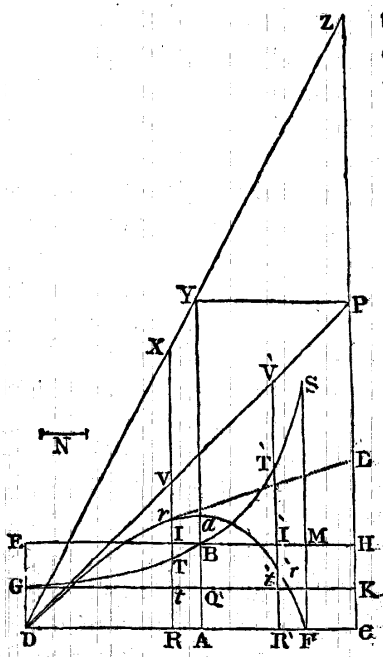
Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam DP projiciatur; & reſiſtentia medii ipſo motûs initio detur: inveniri poteſt Curva *Draf*, quam corpus idem deſcribet. Nam ex datâ velocitate datur latus rectum parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo 2DP ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva *Draf*.

Corol. 5. Et contrà, ſi datur Curva *Draf*, dabitur & velocitas corporis, & reſiſtentia medii in locis ſingulis *r*. Nam ex datâ ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motûs, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam velocitas

(f) Nam recta GC, ſi ducta eſſet, illam DK mediam divideret. Nempe cùm omnis parallelogrammi diagoniæ ſe mutuò medias dividant. Quare et rectam per punctum G ductam cum illâ DK parallelam, rectis CA, CK hinc illinc occurrentem, punctum ipſum G mediam divideret. Quare recta illa hyperbolam in G contingeret. (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XXXVI.)

(g) Nam ex eo quod modò probavimus, rectam per punctum G, quæ cum rectâ DK parallelâ ſit, hyperbolam in G contingere, ſequitur nascentes Tt, Rr, eſſe primò inter ſe æquales. Sed propter parallelas CK, Rr, eſt $CK : Rr = CD : DR$. Rectangulum igitur $CK \times DR$ rectangulo $CD \times Rr$ æquale erit. Eidem igitur $CK \times DR$ naſcens illud $CD \times Tt$ primò quidem æquale erit. Unde $Tt = \frac{CK \times DR}{CD}$ primò.

(h) Vide



tas ſub initio motûs. Deinde ex longitudine tangentis *r*L, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis *r*.

Corol. 6. Cùm autem longitudo 2DP ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia in eâdem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: patet longitudinem 2DP augeri in ratione illâ ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

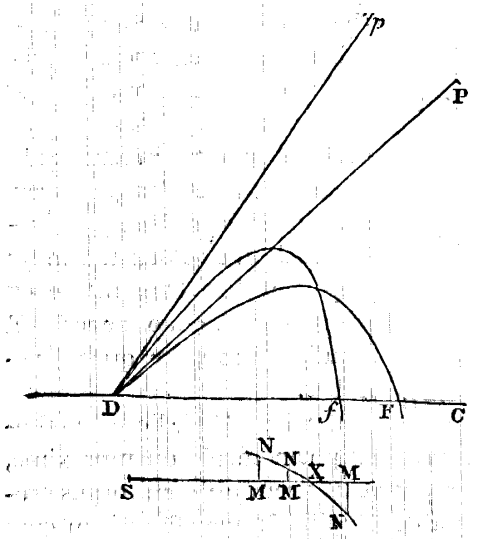
Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam *Draf* ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi reſiſtentiam, & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, CD*p* & cognoſcantur loca F, *f*, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, aſſumptâ quâcunque longitudine pro DP vel D*p*, fingatur quòd reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem (i), ex longitudine illâ aſſumptâ DP, inveniantur longitudines

(h) Vide Not. [e].

(i) —*per computationem*] Quæ ope hyperbolæ GBS facillimè ineatur; nimirum ſi ducatur recta SM cum aſymptotâ CP parallela, quæ abſcindat aream SBM datæ EBG æqualem, hæc SM cum rectâ DC in ipſo puncto F concurret. Per quodvis enim punctum *r* inter punctum altitudinis maximæ *a* punctumque F, ut ſit *r* locus aliquis corporis ab altitudine maximâ jam deſcendentis, ducatur *v*'*r*'R cum aſymptotâ CP parallela, quæ rectis DP, EH, GK, DC, hyperbolæque GBS, in punctis *v*, *i*, *t*, *R*, *r* occurrat. Jam rectangula G*t*IE, N × *R*'*v* eſſe inter ſe æqualia id ſuprà oſtenſum eſt (Not. [b].) Duo igitur N × *v*'*r*, N × *R*'*r*, quæ ſimul ſumpta illud N × *R*'*v* conficiunt, hæc ſimul ſumpta ſpatiis duobus *i*'*r*GB, GBE ſimul ſumptis ſunt æqualia. Additoque communiter ſpatio E*i*'*r*, tria N × *v*'*r*, N × *R*'*r*, E*i*'*r* ſimul ſumpta duobus *r*G'*r*, BGE ſimul ſumptis.

De Motu Corporum

longitudines DF, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertiò, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN ſecans rectam SMMM in X, & erit SX vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex. hâc ratione colligenda eſt longitudo DF per calculum; & longitudo, quæ ſit ad aſſumptam longitudinem DP, ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modò inventam, erit vera longitudo DP. Quâ inventâ, habetur tum curva linea *DraF* quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.



Scholium.

Cæterùm, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis, hypotheſis eſt magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in duplicatâ ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem

tis ſunt æqualia. Trium verò NX'v', NX'r', E'I'T, illud NX'v', à naturâ curvæ DAF ſpatio VG'T eſt æquale. Quare duo reliqua NX'r', E'I'T ſimul ſumpta ſpatio EGE ſunt æqualia. Quare NX'r' illud ipſum eſt quo ſpatium EGE ſpatium E'I'T exſuperat. At verò puncto v in ipſum F tranſlato, rectangulum NX'r' cum ipſâ rectâ 'r' in nihilum abierit. Unde ſpatia EGE, E'I'T æqualia

quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; eſtque reſiſtentia (per motûs Leg. 2 & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege reſiſtentiæ. Liber Secundus.

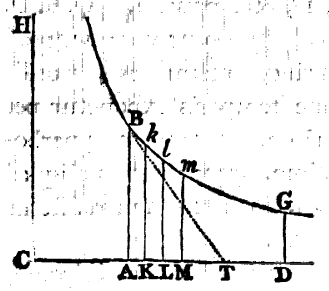
SECTIO II.

De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROP. V. THEOR. III.

Si corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare movetur; tempora verò ſumantur in progreſſione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico, quòd velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eâdem progreſſione geometricâ inverſè; & quòd ſpatia ſunt æqualia, quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD ſumptæ, & erigantur perpendicula AB, K*k*, L*l*, M*m*, &c. hyperbolæ B*klm*G, centro C, aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptæ, occurrentia in B, *k*, *l*, *m*, &c. & erit AB ad K*k* ut CK ad CA, & diviſim AB − K*k* ad K*k* ut AK ad CA, & viciſſim AB − K*k* ad AK ut K*k* ad CA, ideoque ut AB × K*k* ad AB × CA. Unde, cùm AK & AB × CA dentur, erit AB − K*k* ut AB × K*k*; & ultimò, ubi coeunt AB & K*k*, ut AB*q*. Et ſimili argumento erunt K*k* − L*l*, L*l* − M*m*, &c. ut K*k quad.* L*l quad.* &c. Linearum igitur AB, K*k*, L*l*, M*m* quadrata ſunt ut earundem differentiæ (a); & idcirco cùm quadrata

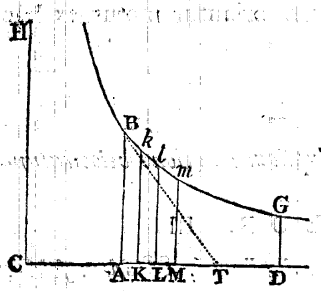


æqualia fient. Definietur igitur punctum F ducendo SM, cum aſymptotâ CF parallelam, quæ abſcindat aream SMB datæ EBG æqualem. Q. E. D.

(a) Nimirum ſi Hyperbola BG motu rectæ AB, cum aſymptotâ CH parallelæ, ſuperatâ aſymptotâ

De Motu Corporum

drata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ, his lineis deſcriptæ, ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam K*k*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream AK*k*B; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes L*l*, M*m*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas L*l*, M*m*, &c. Et compoſitè, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum AM*m*B (b). Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione geometricâ; & erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & velocitates AB, K*k*, L*l*, M*m*, &c. in progreſſione eâdem inverſâ, atque ſpatia deſcripta A*k*, K*l*, L*l*, &c. æqualia. Q. E. D.



Corol. 1. Patet ergo quòd, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatam applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem ABGD; necnon ſpatium, quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate primâ AB, in medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum AB × AD.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area hyperbolica ABGD ad rectangulum AB × AD.

Corol.

totâ incedentis ſcribatur, fluxiones incedentium AB duplicatam ipſarum AB rationem inter ſe conſtanter ſervant.

Propter datam enim rectanguli $\dot{CA} \times \dot{AB}$ magnitudinem fluxio ejus nulla erit. Rectangula igitur $\dot{CA} \times \dot{AB}$, $CA \times \dot{AB}$, quorum utique differentia, ſiquidem ulla eſſet, fluxio eſſet rectanguli $\dot{CA} \times AB$, hæc inquam rectangula inter ſe æqualia erunt; ne fluat rectangulum $\dot{CA} \times AB$, quod è naturâ hyperbolæ manet. Erit igitur $\dot{AB}$ ad $\dot{CA}$ ut AB ad CA. Hoc eſt, fluxio rectæ AB erit ad fluxionem abſciſſæ AC, ut AB ad CA. Ponatur AB motu uniformi ferri. Itaque conſtans erit fluxio abſciſſæ AC,

Liber Secundus.

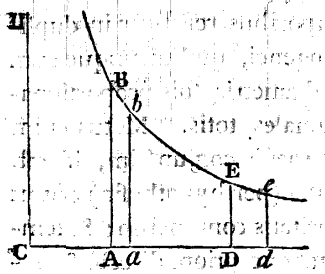
Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia medii, ſtatuendo eam ipſo motûs initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore AC, in medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat hyperbolam in B, & occurrat aſymptoto in T; recta AT æqualis erit ipſi AC (c), & tempus exponet, quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam AB.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice verſâ, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus AC, quo vis centripeta, reſiſtentiæ æqualis, generare poſſit velocitatem quamvis AB: & inde datur punctum B per quod hyperbola, aſymptotis CH, CD, deſcribi debet; ut & ſpatium ABGD, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illâ AB, tempore quovis AD, in medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

PROP. VI. THEOR. IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus, quæ ſunt reciprocè ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptâ hyperbolâ quâvis, B*b*E*e*, ſecante perpendicula AB, *ab*, DE, *de*, in B, *b*, E, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula AB, DE, & tempora per lineas A*a*, D*d*. Eſt ergo ut A*a* ad D*d* ita (per hypotheſin) DE ad AB, & ita (ex naturâ hyperbolæ) CA ad CD;

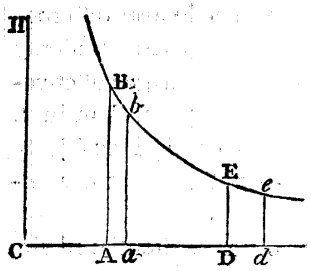
AC, eritque fluxio incedentis AB ad rectam datam ut AB ad CA, ſive ut quadratum ex AB ad rectangulum datum AB × CA. Pari ratione eadem data recta erit ad fluxionem rectæ M*m*, ut AB × CA ad quadratum ex M*m*. Ex æquo $\dot{AB} : \dot{Mm} = \dot{AB}^2 : \dot{Mm}^2$. Q. E. D.

Velocitates igitur, quarum fluxiones duplicatam ipſarum rationem inter ſe conſtanter ſervant, lineis AB, K*k*, L*l*, M*m*, quibus ſimilis eſt decreſcendi lex, haud incommodè repreſentari poterunt.

(b) Vide Lib. I. Sect. I. Lemma x. Not. f.

(c) Patet per Prop. XXXVI. Lib. I. Conicorum Hamiltoni.

De Motu Corporum



& componendo, ita c*a* ad c*d*. Ergo areæ AB*ba*, DE*ed*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ AB, DE ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea, dividendo, partibus etiam ſuis amiſſis, AB−*ab*, DE−*de*, proportionales. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR. V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inverſè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & reſiſtentia inverſè. Quare temporum particulis in eâ ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus ſuis primis ſemper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia, quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujuſque erit ut ejus velocitas & maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propoſitionem) eſt in ratione priore directè & ratione poſteriore inverſè, id eſt, ut diameter directè & velocitas inverſè; ideoque ſpatium, tempori & velocitati proportionale, eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus

locitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia, quibus globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia, quibus globi quibuſcunque cum velocitatibus moti amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quòd ſi globi non ſint homogenei, ſpatium à globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum Genitæ æquatur momentis Laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in Arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in Geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hîc conſidero; & earum incrementa

vel

De Motu Corporum

vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis, ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis, ſeu negativis, habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli, AB, fuerit $aB + bA$; & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-3}$ reſpectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$, ſive A^3B^{-2}, momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur verò Lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum, AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, ſeu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quàm primùm latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$, ſeu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{2}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. Q. E. D.

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G; & contenti ABC, ſeu GC, momentum (per Caſ. 1) erit $gC+cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur

tur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. Q. E. D. Libri Secundus.

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuò ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$; ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. Q. E. D.

Caſ. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$, ſeu ipſius A^{-1}, eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unà cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$, ſeu A^{-n}, erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

Caſ. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ fit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Caſ. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$, ſive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1}, ſeu $nbA^{-\frac{m}{n}}$; ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. E. D.

Caſ. 6. Igitur Genitæ cujuſcunque, A^mB^n, momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, unà cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1}B^n+nbB^{n-1}A^m$; idque ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, ſi terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut $-2A-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In Epistolâ quâdam ad D. *J. Collinium* nostratem 10 Decem. 1672 datâ, cùm descripsissem methodum Tangentium, quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicatâ, subjunxi: *Hoc est unum particulare, vel Corollarium potiùs, methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modò ad ducendum tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliasve Curvas respicientes, verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de Maximis & Minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti, quâ æquationum exegesin instituo, reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus Epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente (d).

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico, quòd vires illæ absolutæ sunt in progressione geometricâ.

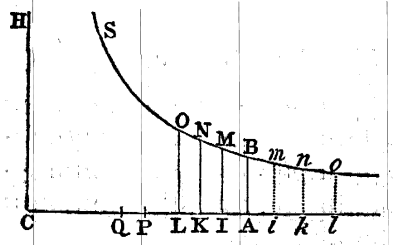
Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ sit media proportionalis

(d) *Scholium Editionis Primæ & Secundæ.*

In literis quæ mihi cum Geometrâ peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cùm significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æquè ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus [Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versâ] eandem celarem: rescripsit Vir Clarissimus, se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit à meâ vix abludentem præterquam

Liber Secundus.

proportionalis inter AK & AC, ideoque in subduplicatâ ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ, datâ temporis particulâ, factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C, asymptotis rectangulis, CA, CH, describatur hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO occurrens in B, N, O. Quoniam AK est ut AP^q, erit hujus momentum KL ut illius momentum 2APQ: id est, ut AP in KC; nam velocitatis incrementum PQ (per motûs Leg. 2.) proportionale est vi generanti KC. Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum KL×KN ut AP×KC×KN; hoc est, ob datum rectangulum KC×KN, ut AP. Atqui areæ hyperbolicæ KNOL ad rectangulum KL×KN ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut AP. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL ex particulis KNOL velocitati AP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est (e). Dividatur jam area illa in partes æquales ABMI, IMNK, KNOL, &c. & vires absolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progressione geometricâ. Q. E. D. Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas AB*mi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quòd vires absolutæ AC, *ic*, *kc*, *lc*, &c. sunt continuè proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lc*, *kc*, *ic*, AC, IC, KC, LC, &c. erunt continuè proportionales. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam ABNK; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis, & resistentia medii per lineas AC, AP & AK respectivè; & vice versâ.

præterquam in verborum & notarum * formulis & Ideâ generationis quantitatum *. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

(e) Nimirum, tempore æquabiliter fluente, area BALO eâ lege fluit, ut illius fluxiones velocitatum corporis cadentis inter se rationes gerant. Sed tempore æquabiliter fluente, spatii, quod casu recto corporis conficitur, fluxiones velocitatum quoque rationes induent. Areæ igitur BALO spatiique quod casu rectò corporis conficitur, fluxiones proportione inter se convenient. Area igitur ipsâ spatiumque, cùm simul à nihilo generari inceperint, proportione inter se convenient. (Geometr. Flux. Prop. IV.)

* Hæc verba sunt editionis secundæ. A primâ aberant.

De Motu Corporum

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus, in infinitum descendendo, potest unquam acquirere, exponens est linea AC.

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

PROP. IX. THEOR. VII.

Positis jam demonstratis, dico quòd, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ AC, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D, semidiametro AD, describatur tum circuli quadrans AιE; tum hyperbola rectangula AVZ. axem habens AX, verticem principalem A, & asymptoton DC. Ducantur Dp, DP, & erit sector circularis AιD ut tempus omne ascendendi ad locum summum; & sector hyperbolicus ATD ut tempus omne descendendi à loco summo: si modò sectorum tangentes Ap, AP sint ut velocitates.

Cas. 1. Agatur enim Dvq abscindens sectoris ADι & trianguli ADp momenta, seu particulas quàm minimas simul descriptas, tDv & Dpq. Cùm particulæ illæ, ob angulum communem D, sunt in duplicatâ ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp \times tD\text{ quad.}}{pD\text{ quad.}}$, id est, ob datam tD, ut $\frac{qDp}{pD\text{ quad.}}$. Sed *pD quad.* est AD *quad.* + A*p quad.* id est, AD *quad.* + AD × A*k* (f), seu AD × C*k*; & *qDp* est $\frac{1}{2}$AD × *pq*. Ergo sectoris particula tDv est ut $\frac{pq}{Ck}$; id est, ut velocitatis decrementum quàm minimum *pq* directè, & vis illa C*k*, quæ velocitatem diminuit, inversè; atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis respondens (g). Et, componendo, fit summa particularum

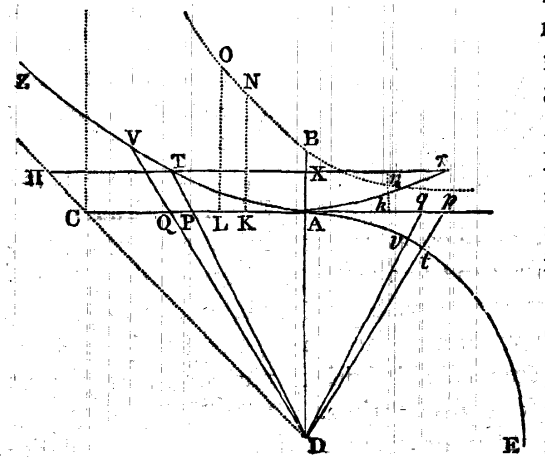
(f) Sive AC quad. + AC × A*k*; id est (Elem. II. 3.) AC × C*k*, sive propter AC, AD inter se æquales, AD × C*k*.

(g) Nam fluxio velocitatis, erit ut vis illa quæ velocitatem mutat, & fluxio temporis conjunctim. Quare fluxio temporis erit ut fluxio velocitatis directè et vis illa quæ velocitatem mutat, contrariè.

Liber Secundus.

ticularum omnium tDv in sectore AD*ι*, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis Ap particulis amissis *pq* respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus AD*ι* est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. Q. E. D.

Cas. 2. Agatur DQv abscindens tum sectoris DAv, tum trianguli DAQ particulas quàm minimas TDv & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT*q* ad DP*q*, id est (si TX & AP parallelæ sint) ut DX*q* ad DA*q* vel TX*q* ad AP*q*, & divisim ut DX*q* − TX*q* ad DA*q* − AP*q*. Sed, ex naturâ hyperbolæ, DX*q* − TX*q* est AD*q*, & per hypothesin AP*q* est AD × AK. Ergo particulæ sunt ad invicem ut AD*q* ad AD*q* − AD × AK; id est, ut AD ad AD − AK, seu AC ad CK: ideoque sectoris particula TDv est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$ (h); atque ideo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento respondens (i). Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur, ut summa particularum sectoris ATD, id est, tempus totum ut sector totus. Q. E. D.



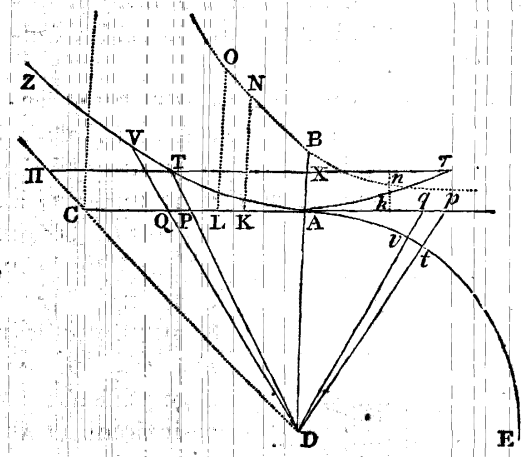
Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC, spatium, quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area ABNK, quâ spatium ca-

contrariè.

(h) Sive $\frac{\frac{1}{2}AD \times PQ \times AC}{CK}$.

(i) Vide Not. g.

dendo descriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cùm sit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per Corol. 1. Lem. 2. hujus) LK ad PQ ut 2AK ad AP, hoc est, ut 2AP ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}$PQ ut AP ad $\frac{1}{4}$AC, vel AB; est & KN ad AC, vel AD, ut AB ad CK; itaque ex æquo LKNO ad DPQ ut AP ad CK. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rursus ex æquo LKNO est ad DTV ut AP ad AC; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam, quam corpus cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum ABNK & ATD momenta, LKNO & DTV, sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ ABNK & ATD ut spatia tota ab initio descensûs descripta. Q. E. D.



Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio, quod in ascensu describitur. Nimirum quòd spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore descriptum, ut est area ABnk ad sectorem ADt.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum APD ad sectorem hyperbolicum ATD. Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus ATD, & in medio resistente est ut AP, id est, ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio descensûs æquantur inter se, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum APD ad sectorem circularem AtD; sive ut recta Ap ad arcum At.

Corol.

Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam AC in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut sector ADT ad triangulum ADC: & tempus, quo velocitatem Ap in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus At ad ejus tangentem Ap.

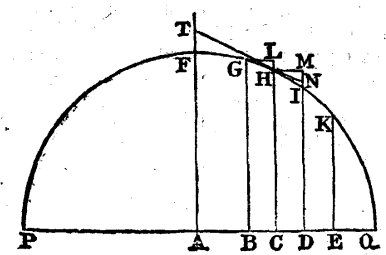
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (per Corol. 2 & 3. Theor. VI. Lib. 2.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo sectorem ADT, vel ADt, ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modò inventum; dabitur tum velocitas AP vel Ap, tum area ABNK vel ABnk, quæ est ad sectorem ADT vel ADt ut spatium quæsitum ad spatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam antè inventâ, uniformiter describi potest.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensûs vel descensûs spatio ABnk vel ABNK, dabitur tempus ADt vel ADT.

PROP. X. PROB. III.

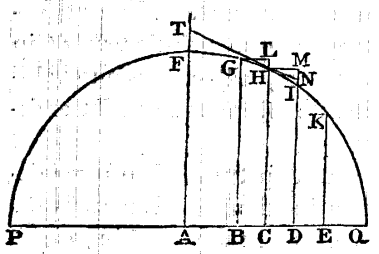
Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

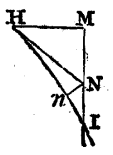
Sit PQ planum illud plano schematis perpendiculare; PFHQ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis, in hâc Curvâ, ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE Ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E insistentes; & sint BC, CD, DE distantiæ Ordinatarum inter se æquales. A punctis



De Motu Corporum

tis G & H ducantur rectæ, GL, HN, Curvam tangentes in G & H, & ordinatis, CH, DI, ſurſum productis occurrentes in L & N; & compleatur parallelogrammum HCDM. Et tempora, quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum, LH, NI, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, à tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ, GH, HI, directè, & tempora inverſè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis, tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem, quâ duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet, ut *Galilæus* demonſtravit; id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſolâ longitudine HI − HN, ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$ (k); ideoque generat tantùm velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $2NI$





(k) Centro H, radio HN, ſcribatur arcus circularis Nn, qui Curvæ HI in n occurrat. Evaneſcente arcu HI, erunt HN, Hn ultimò æquales. Unde HI − HN = In. Angulus autem InN, cùm rectus ultimò fiat, recto IMH erit ultimò æqualis. Angulusque MIH figuris duabus MIH, nIN eſt communis. Quare evaneſcente arcu HI, figuræ illæ ultimò fiunt triangula, inter ſe ſimilia, contrariè poſita. Quare lineis NI, In, eadem quæ illis HI, Hn erit ratio ultima. Rectangula igitur MI × NI, HI × In ultimò inter ſe æqualia. Unde In, ſive HI − HN, $= \frac{MI \times NI}{HI}$ ultimò.

(l) Vide Lib. I. Sect. XIII. Scholium, Not. c.

(m) Nempe GH $= o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRo^3}{\sqrt{1+QQ}}$.

Quare $\frac{t \times GH}{T} = \frac{Ro + \frac{3}{2}So^2\sqrt{1+QQ}}{R} - \frac{Ro^2 + \frac{3}{2}So^3}{\sqrt{1+QQ}}\,Q_o$

Sed

$\frac{2NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$. Liber Secundus.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribatur $-o$, o, $2o$. Pro ordinatâ CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3$ + &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3$ + &c. erunt NI (l), & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3$ − &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3$ − &c. & $P + Qo - Roo + So^3$ − &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum, BG − CH, & CH − DI, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata; $oo + QQoo - 2QRo^3$ + &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3$ + &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea, ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ, Roo, & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t: & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$, ſeu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3So}{2R}\sqrt{1+QQ}$ (m). Et cùm $2NI$ ſit $2Roo$, reſiſtentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3So}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id eſt, ut $3s\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea eſt, quâcum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in parabolâ, diametrum HC &

Sed HI $= o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRo^3}{\sqrt{1+QQ}} = \frac{Ro\sqrt{1+QQ}}{R} + \frac{Ro^2}{\sqrt{1+QQ}}\,Q_o$

Quare $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}So^2}{R}\sqrt{1+QQ} - \frac{2Ro^2 + \frac{3}{2}So^3}{\sqrt{1+QQ}}\,Q_o$

Rurſum evaneſcente o, MI $= Qo$ ultimò, & NI $= Ro^2$ ultimò.

Quare $2MI \times NI = 2Ro^2Q$ ultimò.

Et $\frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{2Ro^2}{o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}}\,Q = \frac{2Ro^2}{\sqrt{1+QQ}}\,Q$ ultimò.

Quare $\frac{t \times GA}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{3So}{2R}\sqrt{1+QQ} - \frac{3So^2Q}{2\sqrt{1+QQ}} = \frac{3So}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ultimò.

latus

De Motu Corporum

latus rectum $\frac{HN^q}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ (n) habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim; & propterea medii densitas est ut resistentia directè & quadratum velocitatis inversè, id est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè, & $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$ (o), ideoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Quâ ratione resistentia erit ad gravitatem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, si curva linea PFHQ definiatur per relationem inter basem, seu abscissam, AC, & ordinatim applicatam CH, ut moris est; & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expeditè solvetur, ut in Exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit linea PFHQ semicirculus super diametro PQ descriptus, & requiratur medii densitas, quæ faciat, ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Bisecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & erit $DI q$ seu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, seu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum nostram (p) extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^2o^3}{2e^5}$ - &c. Hîc scribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annoo}{2e^5}$ - &c.

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo tri-

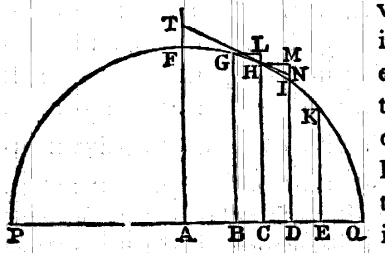
um

(n) Nempe $HN^2 = HM^2 + MN^2$. Sed $HM^2 = oo$: et evanescente CD, vel o, $MN = Qq$ ultimò, et $MN^2 = QQoo$. Quare $HN^2 = oo \times 1 + QQ$. Rursum $NI = Roo$ ultimò. Quare $\frac{HN^2}{NI} = \frac{oo \times 1+QQ}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$.

(o) Propter duas rectas DN, AT, cum tertiâ CH parallelas, erit HT ad AC ut HN ad CD. Unde HT × CD = AC × HN. Sive $HT \times o = AC \times o \times \sqrt{1+QQ}$. Unde $\frac{HT \times o}{AC \times o}$, sive $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+QQ}$.

Liber Secundus.

um est; & sic in infinitum. Et primus terminus, qui hîc est e, denotabit semper longitudinem ordinatæ, CH, infistentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus terminus, qui hîc est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id est, lineolam MN, quæ abscinditur complendo parallelogrammum HCDM, atque ideo positionem tangentis HN semper determinat; ut in hoc casu capiendo MN ad HM ut est $\frac{ao}{e}$ ad o, seu a ad e. Terminus tertius, qui hîc est $\frac{nnoo}{2e^3}$, designabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & Curvam; ideoque determinat angulum contactûs IHN, seu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unà cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini sequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi possunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione Problematum, quæ pendent à Tangentibus & Curvaturâ Curvarum (q).



Conferatur jam series $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annoo}{2e^5}$ - &c. cum serie $P - Qo - Roo - So^3$ - &c. & perinde pro P, Q, R & S, scribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{annn}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ scribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$, seu $\frac{n}{e}$; & prodibit medii densitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu $\frac{AC}{CH}$, id est, ut tangentis longitudo illa HT (r), quæ ad semidiametrum AF ipsi PQ normaliter insistentem, terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut

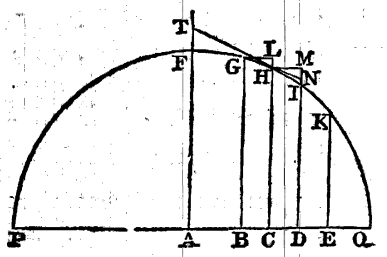
(p) Vide Analys. per Æquat. Infin. Cap. III. § 5. & Geometr. Analyt. Cap. I. § 8.

(q) Confer Lib. I. Sect. 13. Scholium, & Scholium ad finem Libri De Quadraturâ Curvarum.

(r) Nimirum juncta AH efficeret triangula duo AHC, AHT inter se similia, propter angulos ad C et H rectos, angulosque CHA, HAT inter se æquales. Quare AC : CH = TH : HA. Arithmeticè igitur $\frac{AC}{CH} = \frac{TH}{HA}$. Unde, propter datam HA, erit quantitas $\frac{AC}{CH}$ ut recta TH.

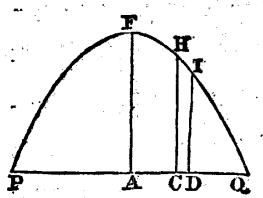
De Motu Corporum

$3a$ ad $2n$, id eſt, ut 3AC ad circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſtâ cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & medii denſitas in ſingulis locis, H, ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut 3AC ad PQ, corpus illud deſcribet circuli quadrantem FHQ. Q. E. I.



At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC, ſeu a, ad contrarias partes centri A; & propterea ſignum ejus mutandum eſſet, & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii denſitas ut $-\frac{a}{c}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus, aſcendendo à P, deſcribat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à reſiſtente impediri (s).

Exempl. 2. Sit linea PFQ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipſâ moveatur.

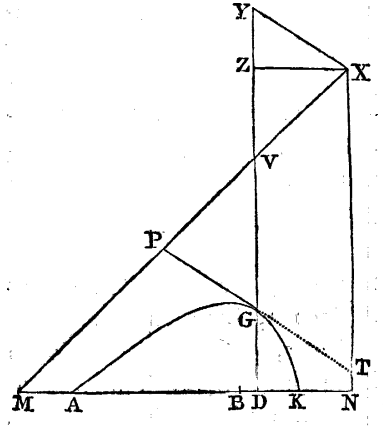


Ex naturâ Parabolæ, rectangulum PDQ, æquale eſt rectangulo ſub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc eſt, ſi dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$, ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$, æquale eſt rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qq, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cùm verò plures non ſint termini, debebit quarti coefficiens S evaneſcere; & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii

(s) Et vix magis naturaliter fieri poſſit, meo ſaltem judicio, ut corpus, è loco P projectum, per circuli

Liber Secundus.

dii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nullâ igitur medii denſitate movebitur projectile in Parabolâ, uti olim demonſtravit *Galilæus*. Q. E. I.

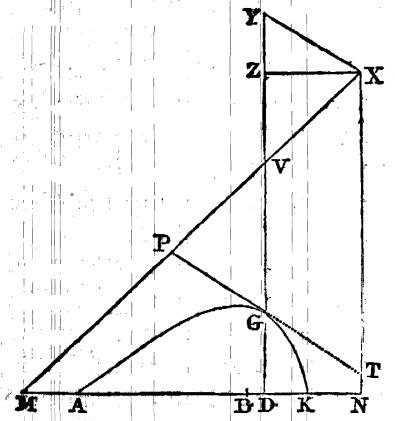


Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, aſymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit MX aſymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo DNXZ; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX, vel DN, ponatur eſſe $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD, ſeu NX−VZ−VG, æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Reſolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in ſeriem convergentem, $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qq, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro so^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regulâ ſuperiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii denſitas ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$; id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt

circuli quadrantem FQ deferatur. Cùm ad talem corporis motum eâ opus eſſet materiæ, per quam iter ei faciendum eſſet, denſitate, quæ in loco ſummo F nulla eſſet, in loco Q infinita.

ipſarum XZ & ZY quadrata (t).



Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3XY ad 2YG (u); & velocitas ea eſt, quâcum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{\text{XY quad.}}{\text{VG}}$ habente (x). Ponatur itaque, quòd medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciprocè ut diſtantiæ XY, quòdque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut 3XY ad 2YG; & corpus de loco A, juſtâ cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. Q. E. I.

Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quòd linea AGK hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX, eâ lege deſcripta, ut, conſtructo rectangulo XZDN, cujus latus ZD ſecet hyperbolam in G & aſymptoton

(t) Nempe evaneſcente o, vel BD, DN vel $ZX = a$ ultimò. Quare $XZ^2 = aa$ ultimò.

Rurſum cùm ſit $VG = \frac{bb}{a-o}$, et $VZ = \frac{ma-mo}{n}$, erit $VG = \frac{bb}{a}$, et $VZ = \frac{ma}{n}$ ultimò. Unde $ZY = VG - VZ = \frac{bb}{a} - \frac{ma}{n}$ ultimò. Quare $ZY^2 = \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{a^2}$ ultimò.

Cæterùm denſitatem materiæ, per quam iter corpori faciendum eſſet, quod curſu ſuo hyperbolam AGK ſcriberet, eam cum quantitate $\frac{I}{XY}$ proportione convenire, elegantius longè ad hunc modum concluditur. Recta TG producta cum aſymptotâ XV in P concurrat. Erunt TG, GP inter ſe æquales. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVI.) Ac proinde, cùm parallelæ ſint VG, XT, erunt PV, VX inter ſe æquales. Sed VG, VY inter ſe æquales. (Id enim factum eſt.) Duæ igitur PV, VG, duabus XV, VY ſingulatim ſunt æquales. Angulúſque XVY angulo PVG æqualis. (El. I. 15.) Quare XY, PG (El. I. 4.) ac proinde XY, GT erunt inter ſe æquales. Denſitas igitur, quæ ex Corollario 1°. quantitatis $\frac{S \times BN}{R \times GT}$ rationem ſervat, ea hujus etiam $\frac{S \times BN}{R \times XY}$ rationem ſervabit. Sed $S = \frac{bb}{a^4}$, et $BN = a$. Unde $S \times BN = \frac{bb}{a^3}$. Sed $R = \frac{bb}{a^2}$. Quare $\frac{S \times BN}{R} = 1$, et $\frac{S \times BN}{R \times XY} = \frac{I}{XY}$. Denſitas igitur quantitatis $\frac{I}{XY}$ rationem ſervabit.

(u) Nimirum evaneſcente rectâ BD, ut illæ BN, DN ultimò æquales fiant, renixus materiæ erit ad vim gravitatis (per Cor. 1.) ut $3S \times GT$ ad $4RR \cdot \times BN$; hoc eſt, eùm æquales ſint GT, XY (Not. *) ut $3S \times XY$ ad $4RR \times BN$; ſive ut $\frac{3bb}{a^4} \times XY$ ad $\frac{4b^4}{a^6} \times a$, hoc eſt ut $3aXY$, ſive $3BN \times XY$ ad $4b^2$. Sed $b^2 = DN \times VG$. Quare $4b^2 = DN \times 4VG = DN \times 2YG$. Quare renixus materiæ erit ad vim gravitatis ut $3BN \times XY$ ad $BN \times 2YG$, ultimò ſcilicet rectâ BD evaneſcente. Evaneſcente autem rectâ BD, factiſque BN, DN ultimò æqualibus, $3BN \times XY$ erit ultimò ad $DN \times 2YG$ ut 3XY ad 2YG. Renixus

ſymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur medii denſitas, quâ projectile progrediatur in hâc Curvâ.

Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpectivè, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis A−O, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD, ſeu NX−VZ−VG, æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in ſeriem infinitam, $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. (y) ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3n+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro QQ, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro RO^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro SO^3. Et inde medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2ndbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$ (z), ideoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, denſitas illa eſt reciprocè

nixus igitur materiæ erit ad vim gravitatis, in loco utique G, ut 3XY ad 2YG.

(x) Velocitas enim corporis, è puncto G hyperbolæ egredientis, ea erit, quâcum ſecundum dictum parabolæ diametro DG, latere recto cujus ſymbolum eſſet $\frac{I+QQ}{R}$, corpus idem per inane ferri poſſit. At verò per Corollarium primum $I + QQ = \frac{GT^2}{BN^2} = \frac{GT^2}{a^2}$. (Ultimo ſcilicet evaneſcente BD, ut illæ BN, DN æquales habeantur.) Et R, è naturâ hyperbolæ, $= \frac{bb}{a^2}$. Unde $\frac{I+QQ}{R} = \frac{GT^2 \times a}{bb} = \frac{GT^2 \times BN}{DN \times VG}$, ultimò ſcilicet rectâ BD evaneſcente. Ita verò BN, DN ultimò æquales fiunt, et illud $\frac{GT^2 \times BN}{DN \times VG}$ huic $\frac{GT^2}{VG}$ fit ultimò æquale. Quare $\frac{I+QQ}{R}$, ſive latus rectum parabolæ de quâ agitur, rectæ $\frac{GT^2}{VG}$, ſive propter æquales GT, XY (Not. *) rectæ $\frac{XY^2}{VG}$ æqualis erit.

(y) Quod ita facilliimè efficietur ſi quantitate $\frac{I}{\overline{A-O}^n}$, ſive $\overline{A-O}^{-n}$, ope Theorematis binomialis, in ſeriem infinitam $A^{-n} + nA^{-n-1}O + \frac{nn+n}{2}A^{-n-2}O^2 + \frac{n^3+3n^2+2n}{6}A^{-n-3}O^3 +$, reſoluta, ſeriei illius membra in quantitatem bb ſingulatim multiplicentur.

(z) Nempe propter $S = \frac{n^3+3n^2+2n}{6A^{n+3}}bb$, et $R = \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bb$, erit $\frac{S}{R} = \frac{n+2}{3A}$. Quare denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, erit $\frac{n+2}{3A\sqrt{1+QQ}}$. Et propter $Q = \frac{d}{e} - \frac{nbb}{A^{n+1}}$ erit $QQ = \frac{dd}{ee} - \frac{2ndbb}{eA^{n+1}} + \frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}$.

Et

De Motu Corporum

reciproce ut XY. Sunt enim A² & $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2ndbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^n}$ ipsarum XZ & ZY quadrata (aa). Resistentia autem in eodem loco G sit ad gravitatem ut 3s in $\frac{XY}{A}$ ad 4RR, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$VG (bb). Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in Parabolâ pergeret, verticem G, diametrum GD, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY\text{ quad.}}{nn+n\text{ in }VG}$ habente (cc). Q. E. I.

Scholium.

Et $1+QQ=1+\frac{dd}{ee}+\frac{2ndbb}{eA^{n+1}}+\frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}$. Et $A\sqrt{1+QQ}=\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2ndbb}{eA^n}A+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$.

Unde densitas $\frac{n+2}{3A\sqrt{1+QQ}}=\frac{n+2}{3\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2ndbb}{eA^n}A+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$.

(aa) Nempe ZX=DN=A−o. Hinc evanescente BD vel o, ZX=A ultimò, et ZX²=AA ultimò. Rursum $VY=BVG=\frac{nbb}{\overline{DN}^n}=\frac{nbb}{\overline{A-o}^n}=\frac{nbb}{A^n}$ ultimò. Et $VZ=\frac{d}{e}DN=\frac{d}{e}A$ ultimò.

Quare $ZY=VY-VZ=\frac{nbb}{A^n}-\frac{d}{e}A$ ultimò. Unde $ZY^2=\frac{dd}{ee}AA-\frac{2ndbb}{eA^n}A+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}$.

Hinc $\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2ndbb}{A^n}A+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}=\sqrt{ZX^2+ZY^2}=XY$. Unde densitas $=\frac{n+2}{3XY}$. Ac proinde, propter numeros n+2 et 3 datos, densitas rationem quantitatis XY contrariam servat.

(bb) $XY=\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2ndbb}{eA^n}A+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$ (per Not. aa) $=A\sqrt{1+QQ}$ (per Not. z). Ergo $XY=A\sqrt{1+QQ}$. Et per Cor. 1. $A\sqrt{1+QQ}=GT$. Quare rectæ GT, XY inter se æquales.

Rursum renixus materiæ erit ad vim gravitatis, in loco G, ut $\frac{3s\times GT}{A}$ ad 4RR (per Cor. 1.) Erit igitur renixus ille ad vim gravitatis ut $\frac{3s\times XY}{A}$ ad 4RR, hoc est ut, $\frac{n^3+3n^2+2n}{2A^{n+4}}bbXY$ ad $\frac{\overline{nn+n}^n}{A^{2n+4}}b^4$.

Sive ut $\overline{n^3+3n^2+2n}.A^n.XY$ ad $2.\overline{nn+n}^n.bb$; vel dividendo quantitate $\overline{nn+n}^n$, ut $\frac{n+2}{nn+n}A^n.XY$ ad 2bb; vel, propter A=BN &, bb=VG×DN², ut $\frac{n+2}{nn+n}\times BN^n.XY$ ad 2VG×DN². Evanescente autem rectâ BD, factisque BN², DN² ultimò inter se æqualibus, erit $\frac{n+2}{nn+n}BN^nXY$ ad 2VG×DN² ultimò ut $\frac{n+2}{nn+n}XY$ ad 2VG, hoc est ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Renixus igitur materiæ ad vim gravitatis, in loco hyperbolæ G, erit ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$.

(cc) $1+\frac{1}{1}$

Liber Secundus.

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$ in Corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis, v, dignitas quælibet v^n, prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}\times\overline{\frac{AC}{HT}}^{n-1}$ (dd). Et propterea si Curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}^{n-1}$,

(aa) $1+QQ=\frac{XY^2}{A^2}$ (Not. bb.) Sed $R=\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bb$. Ergo $\frac{1+QQ}{R}=\frac{2XY^2.A^n}{nn+n.bb}=\frac{2XY^2.BN^n}{nn+n\,VG.BN^n}=\frac{2XY^2}{nn+n\,VG}$.

(dd) Nempe Formula, per quam vis renitentis materiæ ad vim gravitatis rationem Newtonus repræsentari docuit, ea quàm maximè generalis est: ac quæcunque fuerit lex, quâ vim illam renixûs velocitatibus attemperari ponas, ratio vis ejus ad vim gravitatis semper ea erit, quæ quantitatis $3s\sqrt{1+QQ}$ ad quantitatem 4RR: quantitatibus utique illis, s, Q, R, pro varia lege renixûs variis.

Velocitas quoque quâcum corpus per Curvam FHQ latum (vid. fig. p. 289) à loco H discedit, pro omni lege renixûs, ea erit quâcum ex eodem loco H secundum rectam HN emitti oporteret, ut secundum ductum Parabolæ, diametro HC, latere recto cujus illud $\frac{1+QQ}{R}$ symbolum esset, per inane ferri posset.

Denique, quæcunque fuerit lex renixûs, manet æquatio illa, Corollario primo constituta, $\frac{HT}{AC}=\sqrt{1+QQ}$.

Quæcunque igitur fuerit renixûs lex, velocitas quantitatis $\frac{1+QQ}{R}$ rationem subduplicatam servabit, secundum doctrinam Galilæi. Erit igitur velocitas ut $\overline{\frac{1+QQ}{R}}^{\frac{1}{2}}$. Ponamus igitur renixum esse ut densitas materiæ et potestas velocitatis à numero n denominata conjunctim, hoc est literâ r renixum significante, literâ D densitatem, literâ V velocitatem, ponamus r esse ut $D\times V^n$; itaque erit D ut $\frac{r}{V^n}$. At verò cùm r sit ad vim gravitatis æquabilem ut $3s\sqrt{1+QQ}$ ad 4RR, si pro vi illâ æquabili gravitatis ponatur 1, erit $r=\frac{3s\sqrt{1+QQ}}{4RR}=\frac{3s}{4RR}\times\frac{HT}{AC}$. Rursum velocitas sive V, cùm sit $\overline{\frac{1+QQ}{R}}^{\frac{1}{2}}$, hoc est ut $\frac{HT}{R^{\frac{1}{2}}\times AC}$, erit V^n ut $\frac{HT^n}{R^{\frac{n}{2}}\times AC^n}$. Ergo $\frac{r}{V^n}=\frac{3s}{4RR}\times\frac{HT}{AC}\times\frac{R^{\frac{n}{2}}\times AC^n}{HT^n}=\frac{3s}{4.R^{\frac{4-n}{2}}}\times\frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$. Hujus igitur quantitatis rationem, illa D, sive densitas materiæ, constanter servabit. Propter numeros autem 3, 4, datos, hujus etiam, $\frac{s}{R^{\frac{4-n}{2}}}\times\frac{AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, eadem ratio erit.

vel

De Motu Corporum

vel $\frac{S^n}{R^{n-n}}$ ad $\overline{1+QQ}^{\frac{n-1}{2}}$: corpus movebitur in hâc Curvâ in uniformi medio, cum reſiſtentiâ quæ ſit ut velocitatis dignitas v^n. Sed redeamus ad Curvas ſimpliciores.

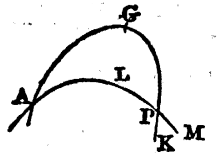
Quoniam motus non fit in Parabolâ niſi in medio non reſiſtente, in Hyperbolis verò hîc deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt, quòd linea, quam projectile in medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propiùs accedit ad hyperbolas haſce (cc) quàm ad parabolam. Eſt utique linea illa hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab aſymptotis; in partibus à vertice remotioribus propiùs ad ipſas accedit, quàm pro ratione hyperbolarum quas hîc deſcripſi (ff). Tanta verò non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ, in rebus practicis, non incommodè adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quàm hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ verò in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum XYGT, & recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque denſitas medii in G eſt reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^q}{GV^q}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat hyperbolam AGK, & AH producta occurrat aſymptoto NX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri aſymptoto MX in I: erit medii denſitas in A reciprocè ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AH^q}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut AH ad

2nn

(cc) Cum nullâ tamen earum omni ex parte conveniet. Cùm corporis per quamlibet earum motus eam poſtulaverit materiæ circumfuſæ denſitatem, cui immutabili eſſe non liceat, ſiquidem rectæ mutabilis XY rationem contrariam neceſſe eſt ea conſtanter ſervet. *(Le Sœur & Jacquier ad locum.)*



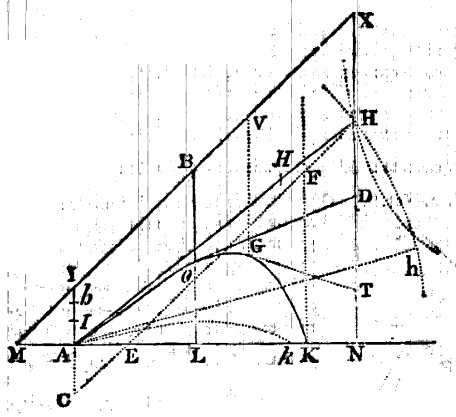
(ff) Puta corpori, è loco A, ſecundum tangentem AH, eâ cum velocitate projecto, quâcum projiciendum eſſet corpus aliud, quod, per materiam variè in variis locis, lege quâ oporteret, condenſatam, per hyperbolam AGK (vid. fig. text. p. 297) incederet, hâc inquam velocitate, è loco A, ſecundum tangentem AH, projecto corpori per materiam, uniformi quâdam denſitate præditam, puta iter faciendum eſſe. Jam ſi denſitas illa uniformis ea ſit, quæ, corpore per hyperbolam AGK incedente, maximam inter minimamque materiæ circumfuſæ denſitatem media eſſet, denſitas materiæ circa locum A, quæ motum corporis per hyperbolam illam præſtaret, uniformi illâ denſitate minor eſſet, ob tangentem AH mediâ, ſi ita dicam, tangente majorem. Renixus igitur materiæ uniformis, per quam corpus iter facere poſſuimus, in loco A, renixu illo qui motum per hyperbolam AGK præſtaret, validior. Impetus igitur corporis è loco A projecti in

Liber Secundus.

$\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes regulæ.

Reg. 1. Si ſervetur tum medii denſitas in A, tum velocitas quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX (gg). Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expeditè determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus NAH, tum medii denſitas in A, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.



Reg. 3. Si tam angulus NAH, quàm corporis velocitas in A, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AH^q}{AI}$: & propterea minuetur AH in eâdem ratione, & AI minuetur in ratione illâ duplicatâ (hh). Augetur verò proportio reſiſtentiæ ad

in materiâ uniformi citiùs langueſcet, et corpus per Curvam quandem, ALM, feretur hyperbolâ AGK parte ſaltem aſcendente interiorem, ut in figurâ hîc appoſitâ.

Curva igitur interior, circa verticem depreſſior, ampliore ſinu brachia pandens, aſymptotas, quas proprias utique habebit, infimâ parte, propiùs acceſſura eſt, quàm hyperbola illa ſuas.

(gg) Nam data denſitate dabitur AH. Datâque velocitate dabitur recta $\frac{AH^2}{AI}$. Quæ ſi dicatur a, erit quadratum ex AH rectangulo AI × a æquale. Quadratum autem ex datâ AH dabitur. Dabitur igitur rectangulum AI × a. Recta autem a data. Quare et AI. Rectarum autem HX, AI mutua ratio data. Nam ſi producatur HA occurſum uſque aſymptotæ XM, è naturâ hyperbolæ XGA, pars illa omnis tangentis HA, quæ duabus aſymptotis XN, XM intercepta eſt, ad partem illam quæ à puncto contactûs, A, ad aſymptotam XM pertingit, rationem habet quam numerus $n+1$ ad 1. Quare et HX ad AI eandem numeri $n+1$ ad 1 rationem habebit. Rectæ igitur HX ad rectam AI ratio data. Datâ igitur illâ AI, dabitur quoque HX. (Dat. 2.) Tres igitur AH, AI, HX magnitudine ſingulatim datæ. Q. E. D.

(hh) Exponatur recta g datæ cujuſvis longitudinis. Sit R^r alia recta eâ lege mutabilis, ut recta R^r ad datam g rationem ſemper habeat, quam vis motrix renixûs in loco A ad vim motricem gravitatis. Datoque angulo NAH, datâque etiam corporis, è loco A projecti, velocitate; ſint AH, AI rectarum

De Motu Corporum

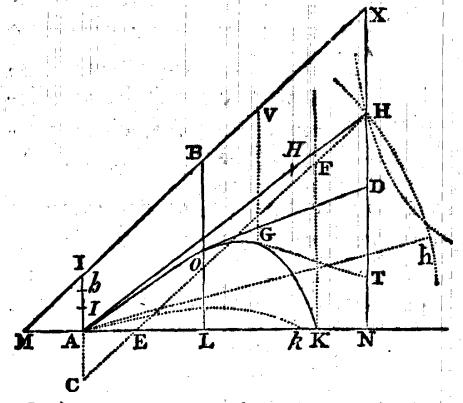
ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ, diminuitur in minore ratione quàm pondus.

Reg. 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major



rectarum AH, AI magnitudines, quas proportio illa vis renixûs ad vim motricem gravitatis, quæ eadem ſit quæ rectæ Rr ad rectam *g*, poſtulaverit. Vi autem renixûs ratione gravitatis motricis ita auctâ, ut Rr in Rϱ increverit, rectæ AH, AI magnitudines alias, A*H*, A*I*, ſint adeptæ. Dicit Newtonus, ſi augeatur vis renixûs ratione gravitatis, rectam AH imminui; hoc eſt ſi Rϱ major fit quàm Rr, eſſe A*H* minorem quàm AH. Dicit etiam AI eâdem ratione minui, quâ quadratum ex AH minuitur; hoc eſt, exiſtente Rϱ majore quàm Rr dicit A*I* minorem eſſe quàm AI, et tali quidem ratione minorem, ut ſit A*I* ad AI ut quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Dicit denique AH eâdem ratione minui quâ Rr augetur; hoc eſt, dicit A*H* eſſe ad AH ut Rr ad Rϱ. Nos autem ea, quæ Newtonus affirmavit, oſtendimus hoc modo.

Dato angulo NAH, propter rectam AN poſitione datam punctumque A datum, recta AH poſitione data erit. (Dat. 29.) Datâque velocitate illâ quâcum corpus è loco A emiſſum eſt, Parabola, cujus ductum corpus ex eodem loco A, ſecundum rectam poſitione datam AH cum datâ illâ velocitate projectum, per inane ſequeretur, hæc inquam Parabola poſitione dabitur. Quare latus ejus rectum ad verticem A magnitudine dabitur. Huic æqualis ſit recta L. Recta igitur L magnitudine data. Sed quadrata ex A*H*, AH rectangulis $\frac{nn+n}{2}$ AI × L, $\frac{nn+n}{2}$ AI × L ſingulatim ſunt æqualia. (Vid. Exempl. 4. Not. [cc].)



Quadratum igitur ex A*H* ad quadratum ex AH eam habet rationem quam rectangulum A*I* × L ad rectangulum AI × L, ſive eam quam A*I* ad AI. Jam verò cùm Rϱ major fit quàm Rr, major eſt Rϱ quàm ut habeat ad rectam *g* rationem eam quam Rr ad *g*. Sed Rϱ eſt ad *g* ut A*H* ad $\frac{2nn+2n}{2+n}$ A*I*; et Rr eſt ad *g* ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI (Exempl. 4. Not. [bb].) Major itaque eſt A*H* quàm ut habeat ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A*I* rationem eam quam AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI. Habet autem $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A*I* ad ipſam A*I* rationem eam quam $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI ad ipſam AI. Ex æquo igitur major erit A*H* quàm ut habeat ad A*I* rationem eam quam AH ad AI. Permutando A*H* major quàm ut habeat ad AH rationem eam quam A*I* ad AI. Sed A*I* ad AI rationem habet quam quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. (Id enim ſuprà oſtenſum.) Major igitur A*H* quàm ut habeat ad AH rationem eam quam quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Verùm ut A*H* ad AH ita erit quadratum ex A*H* ad rectangulum A*H* × AH. Quadratum igitur ex A*H* majus eſt quàm ut habeat ad rectangulum A*H* × AH rationem eam quam idem quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. Rectangulum igitur A*H* × AH quadrato ex AH minus erit. (El. v. 10.) Atque idcirco recta A*H* rectâ AH minor. Ex eo igitur quòd Rϱ majorem poſueramus quàm Rr, probavimus A*H* minorem eſſe quàm AH. Creſcente igitur Rr, id eſt creſcente vi renixûs ratione gravitatis motricis corporis projecti, AH minuetur. Quod primò demonſtrandum erat.

Dicit præterea Newtonus, rectam AI eâdem ratione minui, quâ quadratum ex AH minuitur. Id verò ex proportionis convenientiâ illâ, quam quadratis ex A*H*, AH cum rectis A*I*, AI intercedere ſuprà oſtendimus, ſatis patet.

Dicit

Liber Secundus.

major eſt quàm in loco A; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo majore quàm ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT [ii].

Reg.

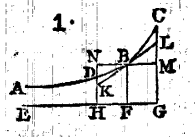
Dicit etiam Newtonus illam AH eâdem ratione minui, quâ vis renixûs in loco A ratione ponderis augetur. Hoc eſt A*H* eſſe ad AH ut Rr ad Rϱ. Id verò ſic oſtendimus. Capiatur A*b* duarum A*I*, AI proportione media. Erit igitur quadratum ex A*I* ad quadratum ex A*b* ut A*I* ad AI. Sed A*I* eſt ad AI ut quadratum ex A*H* ad quadratum ex AH. (Id enim ſuprà oſtenſum.) Quadratum igitur ex A*H* eſt ad quadratum ex AH, ſicut quadratum ex A*I* ad quadratum ex A*b*. (El. v. lx.) Ac proinde A*H* erit ad AH ut A*I* ad A*b*; ſive ut A*b* ad AI. Eſt autem Rr ad *g* ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI; ſive ut AH × A*I* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ × AI × A*I*. Rurſum *g* eſt ad Rϱ ut $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI × A*I* ad A*H* × AI. Ex æquo igitur Rr : Rϱ = AH × A*I* ad A*H* × AI. Quare illa Rr ad Rϱ rationem habet è rationibus rectæ A*I* ad AI rectæque AH ad A*H* compoſitam, vel, cùm AH ſit ad A*H* ut AI ad A*b*, compoſitam è rationibus rectæ A*I* ad AI rectæque AI ad A*b*. Verùm ex eiſdem compoſita eſt ratio rectæ A*I* ad A*b*. Erit igitur Rr ad Rϱ ut A*I* ad A*b*, hoc eſt ut A*H* ad AH. Q. E. D.

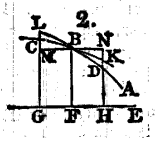
(ii) LEMMA VIII. H.

In omnibus Curvis Ordinatarum fluxiones ſecundæ vel poſitivæ erunt, vel negativæ, prout Curvæ baſes ſuas convexæ, vel concavæ, reſpiciant.

Sit Curva quævis ABC, cujus baſis EF, Ordinata FB. Fluente quovis modo baſi EF, dico Ordinatæ FB fluxionem ſecundam vel poſitivam eſſe, vel negativam, prout Curva ABC baſin EF convexa, vel concava, in loco B reſpiciat. Ducatur enim per B recta KL, quæ Curvam in B contingat, ordinatiſque duabus HD, GC, à contrariis partibus ordinatæ BF poſitis, in punctis K, L occurrat. Ducatur etiam per punctum B recta NM cum baſi EF parallela, quæ Ordinatis eiſdem in punctis N, M occurrat. Jam evaneſcentibus rectis FH, FG, Ordinatarum utique GC, HD à mediâ FB diſtantiis, rectæ ML, NK fluxionum Ordinatæ FB, rectæ verò LC, KD fluxionum ejuſdem ſecundarum rationes ultimò aſciſcunt. At verò ſi Curva ABC baſin EF convexa reſpiciat (ut in fig. 1.) tum ſi ordinata BF creſcendo fluat, ut in ipſam GC creſcat, poſitivâ exiſtente ML, erit LC etiam poſitiva. Poſitivam namque habeo plagam eam, verſus quam Ordinatæ à baſi eductæ tendant: contrariam, negativam. Sin decreſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam HD mutetur, tum negativa fit fluxio prima NK, manet tamen fluxio ſecunda KD poſitiva. Poſitivæ igitur in hoc caſu ſunt Ordinatarum fluxiones ſecundæ, ſive illæ creſcendo, ſive decreſcendo fluant. E contrario, ſi Curva ABC baſin ſuam concava reſpiciat (fig. 2.) tum ſi creſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam GC creſcat, poſitivâ exiſtente fluxione primâ ML, eſt LC negativa. Sin decreſcendo fluat ordinata FB, ut in ipſam HD mutetur, negativa jam fiet fluxio ejus prima NK, et manebit fluxio ſecunda KD negativa. Negativæ igitur in hoc caſu ſunt Ordinatarum fluxiones ſecundæ, ſive illæ creſcendo, ſive decreſcendo, fluant. Ordinatarum igitur fluxiones ſecundæ vel poſitivæ erunt, vel negativæ, prout Curvæ baſes ſuas convexæ, vel concavæ, reſpiciant.

Cor. Curvæ baſes ſuas vel convexæ, vel concavæ, reſpicient, prout Ordinatarum fluxiones ſecundæ poſitivæ, vel negativæ, fuerint.





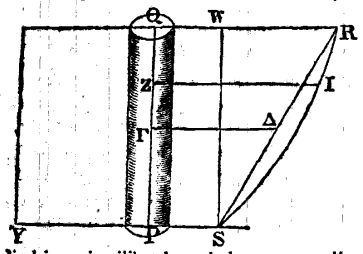
Ex hiſce, ni fallor, facilis erit demonſtratio ejus quod à Newtono affirmatum eſt, denſitatem materiæ mediocrem, quæ motum corporis per hyperbolam AGK præſtare poſſit, paulo eſſe majorem, quàm quæ habeat ad denſitatem propriam materiæ circa locum A, unde corpus projectum fuit, rationem eam quam tangentium AH, GT ſumma dimidiata ad GT tangentem minimam.

Intelligatur cylindrus rectus cavus, cujus axis, FQ, æqualis ſit arcui hyperbolico AG. Puta hunc cylindrum materiâ quâdam plenum variè condenſatâ; eâ quidem lege, ut ſi in axe FQ capiatur

De Motu Corporum

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI, & deſcribenda ſit figura AGK: produc HN ad X, ut ſit HX ad AI ut $n+1$ ad 1: centroque X, & aſymptotis MX, NX, per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg.



piatur pars PZ arcui cuivis hyperbolæ, AO, æqualis, tum cylindrus plano per z ſecetur ad axem recto, quod circulum efficiat cum baſe cylindri parallelum; denſitas materiæ ejus omnis in cylindro, quæ ſuperficiem hujus circuli contiguam habeat, eadem ſit quæ materiæ circa locum O hyperbolæ. Ita ſcilicet denſitas mediocris materiæ, quæ in cylindro totâ PQ continetur, eadem erit quæ materiæ arcui hyperbolico AG *(fig. p.* 298.) circumfuſæ, per quam corpus, arcum illum percurrendo, iter facit. Axem cylindri PQ ad perpendiculum inſiſtant rectæ QR, PS; quarum illa QR tangenti AH, hæc PS tangenti GT ſit æqualis. Ducatur recta OD, quæ hyperbolam AGK in O contingat, et aſymptotæ ejus XN in D occurrat. Per puncta R, S, duci intelligatur Curva quædam RIS; cujus ea ſit natura, ut acceptâ PZ in axe cylindri arcui cuilibet hyperbolæ, AO, æquali, eductâque à puncto Z ad perpendiculum rectâ ZI Curvam uſque, rectangulum ZI × OD rectangulo QR × PS æquale ſit. Ducatur per S recta SW cum rectâ PQ parallela, quæ rectæ QR in W occurrat. Cùm æqualia ſint rectangula illa ZI × OD, QR × PS, idcirco erit ZI ad PS ut QR, vel AH, ad OD. Sed ut AH ad OD, ita eſt denſitas materiæ in loco O hyperbolæ ad denſitatem in loco A. (Exempl. 4.) Denſitates autem, circa loca A, O hyperbolæ, eædem ſunt quæ circa loca P, Z, cylindri. Quapropter ZI erit ad PS ut denſitas materiæ in cylindro circa punctum Z ad denſitatem circa punctum P. Et in omni ſitu puncti Z idem obtinebit. Unde ſequetur, quantitatem materiæ omnis in cylindro PQ ad quantitatem materiæ, quam uniformi denſitate præditam æquale ſpatium cylindraceum contineret, ſi denſitas illa uniformis ea eſſet, quæ materiæ circa locum P cylindri vel A hyperbolæ: ſequetur inquam, quantitatem materiæ omnis in cylindro ad hujus alterius quantitatem rationem habere eam, quam ſpatium RQPSIR ad rectangulum QS; vel ſi ad rectam PQ applicetur rectangulum QY ſpatio illi RQPSIR æquale, eam quam recta YP ad rectam PS vel GT. Oſtendendum igitur rectam YP tangentium AH, GT ſummâ dimidiatâ paulo eſſe majorem.

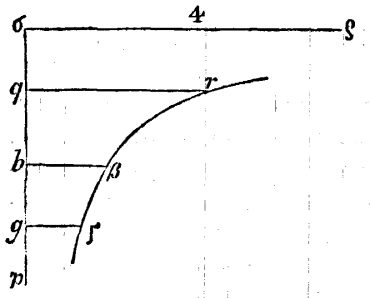
Jungatur SR. Media dividatur recta PQ in puncto Γ; agaturque ΓΔ cum QR, PS parallelæ, quæ rectæ SR in Δ occurrat. A puncto O hyperbolæ ducatur OB in aſymptotam XM, cum alterâ aſymptotâ XN parallela. Cùm è naturâ hyperbolæ quantitas $NL^n \times BO$ datæ cuidam ſit æqualis; ſi rectam NL litera y deſignet, rectam BO litera x, erit $y^n \times x$ datæ cuidam æqualis. Unde $ny^{n-1}\dot{y} : \dot{x} = y^n : x$ (Geometr. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) Ac proinde $\dot{y} : \dot{x} = \frac{y}{n} : x = y : nx$. Et $\dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = y^2 : n^2x^2$. Et $\dot{y}\dot{y} : \dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = y^2 : y^2 + n^2x^2$. Et $\dot{y} : \sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = y : \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Sed $\sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = \dot{AO}$. Quare $\dot{y} : \dot{AO} = y : \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Sed $\dot{y} : \dot{AO} = NL$ vel $y : OD$. Quare $y : OD = y : \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Hinc $OD = \sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Unde ſi rectangulum datum QR × PS dicatur B^2, erit $\frac{B^2}{OD} = \frac{B^2}{\sqrt{y^2 + nx^2}}$. Sed è natura Curvæ RIS, $\frac{B^2}{OD} = ZI$. Quare $ZI = \frac{B^2}{\sqrt{y^2 + n^2x^2}}$.

Rurſum, cùm ſit $\dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = y^2 : n^2x^2$, erit $\dot{y}\dot{y} = \frac{y^2}{n^2x^2}\dot{x}\dot{x}$. Quare $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{x}\dot{x} \times 1 + \frac{y^2}{n^2x^2} = \dot{x}\dot{x} \times \frac{n^2x^2 + y^2}{n^2x^2}$. Et $\dot{PZ}\ (= \dot{AO}) = \sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{nx}\sqrt{y^2 + n^2x^2}$. Hinc $ZI \times \dot{PZ}$, ſive fluxio areæ SPZI, $= \frac{B^2\dot{x}}{nx}$.

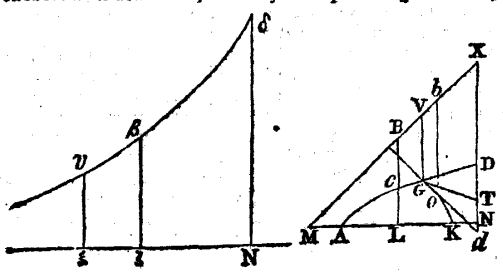
Expoſitâ igitur rectâ quâvis infinitâ $o\beta$, ſi in eâ capiatur $o\sigma$, quæ habeat ad PS rationem eam quam 1 ad n: eductiſque à punctis σ, q ad perpendiculum $o\beta$, gr, quarum illa $o\sigma$ infinita ſit, altera qr rectæ QR æqualis; ſi centro σ, aſymptotis illis $o\beta$, $o\beta$, ſcribatur hyperbola conica, quæ per punctum r tranſeat; ſumptiſque og, ob illis VG, OB *(fig. p.* 298) æqualibus, ſi à punctis g, b, educantur ad perpendiculum gf, $b\beta$, hyperbolam uſque; erit area hyperbolica $fg\beta\beta$ areæ SPZI æqualis, et harum fluxiones erunt

Liber Secundus.

Reg. 6. Quo major eſt numerus n, eo magis accuratæ ſunt hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A, & minùs accuratæ in ejus deſcenſu ad K; & contrà ([kk]). Hyperbola conica mediocrem rationem



erunt inter ſe æquales. Nam cùm oq ſit ad PS ut 1 ad n, propter æquales qr, QR, erit $oq \times qr$ ad PS × QR, ſive ad B^2, ut 1 ad n. Unde $oq \times qr = \frac{B^2}{n}$, & Ordinata hyperbolæ $b\beta = \frac{B^2}{n \cdot ob} = \frac{B^2}{nx}$: nempe cùm ob æqualis ſit illi OB (id enim poſuimus) quam litera x ſignificat. Quare $\beta b \times \dot{ob}$, ſive $\beta b \times \dot{x}$, fluxio areæ hyperbolicæ $fgb\beta$, quantitati $\frac{B^2\dot{x}}{nx}$ æqualis, cui etiam $ZI \times \dot{PZ}$, fluxio areæ SPZI, oſtenſa eſt æqualis. Hinc ſi ordinatam hyperbolæ, βb, litera v generaliter ſignificet, erit $ZI \times \dot{PZ} = v\dot{x}$. Vel ſi arcus AO, eique æqualis recta PZ ponatur æquabiliter fluere, et pro datâ $\dot{PZ}$, more Newtoniano, ſcribatur 1; erit $ZI = v\dot{x}$. Rectanguli $v\dot{x}$ latera, v, $\dot{x}$, contrariè fluunt. Nam cùm Curva AOG *(fig. p.* 298) baſin ſuam MX convexa reſpiciat, ordinatæ x fluxio ſecunda poſitiva erit. (Per Lemm. H. VIII.) Creſcente igitur x fluxio ejus, $\dot{x}$, creſcet. At verò eâdem x, ſeu ob, creſcente, v, ſive $b\beta$, è naturâ hyperbolæ conicæ decreſcet. Decreſcit igitur v dum illa $\dot{x}$ creſcat. Rectanguli igitur fluentis $v\dot{x}$ latera contrariè fluunt. Quare rectanguli illius fluxio, quæ eſt fluxio rectæ ZI, rectangulorum $v\dot{x}$, $\dot{v}\dot{x}$ differentia erit. Quare $\dot{ZI} = v\ddot{x} - \dot{v}\dot{x}$. Et $\dot{ZI} + \dot{v}\dot{x} = v\dot{x}$. Rurſum creſcente x fluxio ejus ſecunda minuitur uſque; ſiquidem illâ x infinitè creſcente, fluxio ejus datæ arcûs AO infinitè creſcentis fluxioni fit ultimò æqualis; ac proinde fluxio ejus ſecunda nihilo fit ultimò æqualis. Creſcente autem x illa v minuitur uſque, ut ſuprà oſtendimus. Rectanguli igitur fluentis $v\ddot{x}$ latera, v, $\ddot{x}$ eodem modo fluunt; et decreſcendo utrumque ſi creſcente arcu AO, vel rectâ PZ, ipſa x creſcat; ut tam $\ddot{x}$ quàm v negativa ſit, et ipſius rectanguli $v\ddot{x}$ fluxio negativa; $-v\ddot{x} - \dot{v}\dot{x}$. Rurſum cùm hyperbola conica $r\beta\beta$, atque altera illa AGK baſes ſuas $o\beta$, XM, convexæ reſpiciant; erunt $\dot{v}$, $\ddot{x}$ poſitivæ (per Lemm. H. VIII). Duæ igitur $\dot{v}$, $\dot{x}$ eodem modo fluunt, et rectanguli $\dot{v}\dot{x}$ fluxio erit $\ddot{x}\dot{v} + \dot{v}\ddot{x}$. Hinc cùm ſit $\dot{ZI} + \dot{v}\dot{x} = v\ddot{x}$, erit etiam $\ddot{ZI} + \dot{x}\ddot{v} + \dot{v}\ddot{x} = -v\dddot{x} - \dot{v}\ddot{x}$. Unde tranſponendo $\ddot{ZI} = -v\dddot{x} - \dot{x}\ddot{v} - 2\dot{v}\ddot{x}$. Rectæ igitur ZI fluxio ſecunda negativa erit. Curva igitur SIR, cujus eſt illa ZI ordinata, hæc baſin ſuam PQ concava reſpiciet. (Lemm. H. VIII. Cor.) Trapezium igitur SPQR areâ SPQRIS, ſive rectangulo QY, minus erit. Sed propter trapezii latera QR, PS inter ſe parallela, angulóſque ad Q et P rectos, trapezium SPQR rectangulo PQ × ΓΔ æquale erit. Quare rectangulum PQ × ΓΔ rectangulo QY, ſive PQ × PY minus erit. Rectangulum igitur PQ × PY rectangulo PQ × PA majus. Recta igitur PY rectâ ΓΔ major. Sed ΓΔ, propter latera trapezii QR, PS inter ſe parallela, duarum QR, PS, ſive duarum AH, GT eſt ſemiſſis. Recta igitur PY, quæ ad PS vel GT rationem habet eam, quam denſitas mediocris materiæ arcui hyperbolico AG circumfuſæ ad propriam materiæ circa locum A denſitatem, hæc major eſt quàm tangentium AH, GT ſumma dimidiata. Q. E. D.

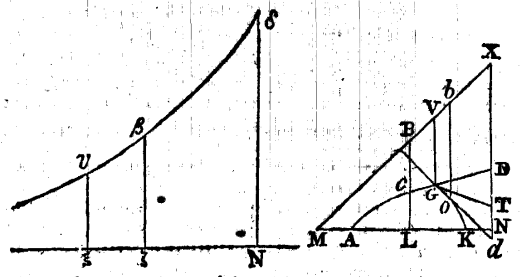


([kk]) Per punctum quodvis, o, in arcu aſcenſûs AG, ducatur recta OD, quæ hyperbolam AGK in O contingat, et aſymptotæ XN in D occurrat; aliaque BOL, cum aſymptotâ ND parallela, quæ alteri aſymptotæ XM in B occurrat, hyperbolæ baſi MN in L. Datis XV, VG, XB, ſi augeatur numerus n, minuetur uſque recta OB, atque tali quidem lege,

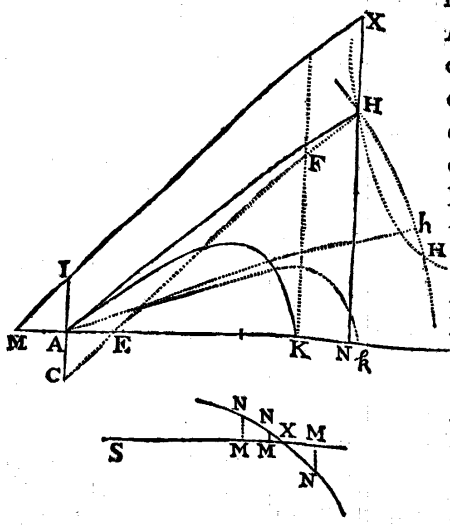
De Motu Corporum

tionem tenet (ll), eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi hyperbola ſit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A tranſeuntem, quæratur: occurrat producta AN aſymptotis MX, NX in M & N, & ſumatur NK ipſi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diverſis HAK, *b*A*k*, incidantque in planum horizontis in K & *k*; & notetur proportio AK ad A*k*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo AI, aſſume utcunque longitudinem AH vel A*b*, & inde collige graphicè longitudines AK, A*k*, per Reg. 6. Si ratio AK ad A*k* ſit eadem cum ratione *d* & *e*, longitudo AH rectè aſſumpta fuit. Sin minus, cape in rectâ infinitâ SM longitudinem SM æqualem aſſumptæ AH, & erige perpendiculum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{kA} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus AH invenienda ſunt plura puncta N, & per omnia agenda curva linea regularis NNXN, ſecans



lege, ut magis minuatur OB quàm pro ratione creſcentis numeri *n*; id eſt, ut magis minuatur OB quàm ut rationem numeri *n* contrariam ſervet. Quod ſic oſtendimus. Sit Curva logarithmica *nbδ* aſymptotâ rectâ ξN. Hujus ordinatæ ξ*v*, ζβ rectis illis, XV, XB æquales ſint. Capiatur ξN, quæ habeat ad ξζ rationem eam quam numerus *n* ad unitatem; et à puncto N educatur ordinata N*δ* logarithmicam uſque. Et è naturâ logarithmicæ erit ξ*v* ad N*δ* ut ξ*v*^{n} ad ζβ^n, vel ut XV^n ad XB^n. Sed è naturâ hyperbolæ AGK, XV^n : XB^n = OB : VG. Quare ξ*v*, vel XV ad N*δ* ut OB ad VG. Rectangulum igitur N*δ* × OB rectangulo XV × VG æquale erit. Et qualiſcunque fuerit numerus *n* rectangulorum æqualitas manebit. Rectangulum autem XV × VG datum; nempe cùm rectæ XV, VG magnitudine ſingulatim datæ ſint. Rectangulum igitur N*δ* × OB datum: unde ſi augeatur quâvis ratione recta N*δ*, pari ratione illa OB minuetur. At verò creſcente numero *n*, illa N*δ* augebitur quidem, et magis quàm pro ratione numeri *n*. Nam cùm logarithmica aſymptotam ſuam ξN convexa reſpiciat, auctâ rectâ ξN, ordinata N*δ* magis augebitur quàm pro ratione illius ξN, quæ eâdem ratione, quâ numerus *n*, creſcit; modo numerus *n* numero illo non ſit minor, qui ad unitatem rationem habeat quam ſubtangens logarithmicæ ad ξζ. Magis igitur augetur N*δ* quàm pro ratione numeri *n*, ſaltem quando numerus *n* ultra datum limitem increverit. Quare illa OB magis quàm pro hâc ratione minuetur. Creſcente igitur numero *n*, recta NOB uſque minuetur. Quare et quadratum ex illâ rectâ, hoc eſt *n*^{2}.OB^2 eo magis minuetur, quo numerus *n* magis creverit. Recta igitur OD = $\sqrt{y^2 + n^2 x^2}$ (Not. ii) = $\sqrt{NL^2 + n^2 OB^2}$, manente NL, utpote quæ ad datam XB datam



ſecans rectam SMMM in X. Aſſumatur demum AH æqualis abſciſſæ SX, & inde denuò inveniatur longitudo AK; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem AI, & hanc ultimam AH, ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimò inventam longitudinem AK, erunt veræ illæ longitudines AI & AH, quas invenire oportuit. Hiſce verò datis dabitur & reſiſtentia medii in loco A, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut AH ad 2AI (mm). Augenda eſt autem denſitas medii per Reg. 4. & re-

datam rationem habet; hâc NL, inquam manente, illa OD = $\sqrt{NL^2 + n \cdot OB^2}$ uſque minor fiet. E contrario ſi, per punctum quodvis *o* in arcu deſcenſûs GK, ad contrarias utique partes puncti G, ducatur recta *od* quæ hyperbolam in *o* contingat, et aſymptotæ ejus XN in *d* occurrat, aliaque *bol* cum aſymptotâ XN parallela, quæ alteri aſymptotæ XM in *b*, baſi Curvæ in *l* occurrat: ſimili prorſus modo ope curvæ logarithmicæ oſtendi poteſt, manente abſciſſâ X*b*, rectam *bo*, ſi augeatur numerus *n*, majorem uſque fieri. Quare et *n*.*ob* major fiet, et quadratum *n*^{2}.*ob*^{2} majus. Aucto igitur numero *n*, recta *od* = $\sqrt{y^2 + n^2 ob^2} = \sqrt{NL^2 + n^2 . ob^2}$ major fiet.

Aucto igitur numero *n*, modò eo quem diximus initio non fit minor, Tangentes per arcum aſcenſûs AG minores fiunt, per arcum deſcenſûs GK majores. Quare tangens minima GT, per punctum G ducta, quod arcus illos diſcriminat, illa quidem certâ longitudine manebit. Tangentes autem per arcum aſcenſûs AG, dum perpetim decreſcendo, minimæ GT æqualitatem ſingulatim accedant, mutuam quoque æqualitatem magis affectant. E diverſo tangentes arcus deſcenſûs GK, dùm, perpetim increſcendo à modo minimæ tangentis GT magis abſcedunt, mutuam quoque æqualitatem magis exuunt. Denſitates igitur, quæ contrariam tangentium rationem gerunt, eæ, aucto numero *n*, per arcum aſcenſûs AG magis fiunt uniformes; per arcum deſcenſûs GK, minùs. Quo major igitur fuerit numerus *n*, eo arcus AG, per quem corpus aſcenſum facit, Curvæ illius figuram magis referet, cujus ductum corpus aſcendendo ſequeretur, cui per materiam uniformi denſitate præditam progrediendum eſſet; cùm è contrario arcus deſcenſûs GK à figurâ Curvæ, quam corpus, per materiam uniformem iter faciens, deſcendendo ſcriberet, quo major fuerit numerus *n* eo magis abhorrebit.

(ll) Utpote quæ arcus contrarios, aſcenſûs et deſcenſûs, ſimiles omninò habeat; tangentes ad utramque partem minimæ, æqualibus à vertice diſtantiis, à menſurâ minimæ æqualiter abſcedentes, ac proinde inter ſe æquales.

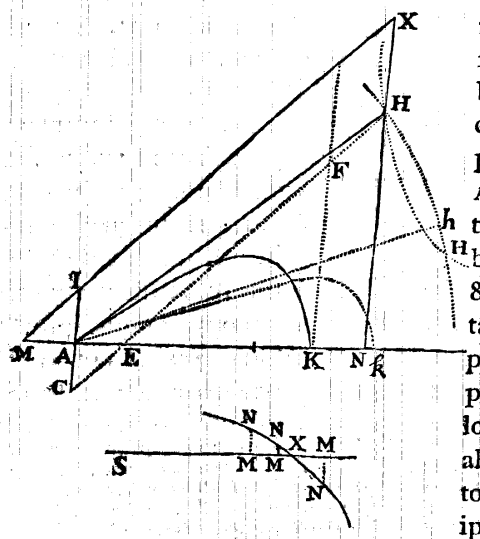
(mm) Pro AH ad 2AI, lege 3AH ad 4AI. (Vide Exempl. 3, Not. [s], vel Exempl. 4, Not. [bb]) ubi generaliter oſtenditur vim renixûs, quæ motum corporis per quamlibet harum hyperbolarum præſtare poſſit, eſſe ad vim gravitatis ut AH ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ AI. Hoc eſt, ſi *n* ſit unitas ut AH ad ⅔ AI. Sive ut 3AH ad 4AI. Eandem hujus loci emendationem attulerunt Patres Doctiſſimi Le Sœur & Jacquier, & in commentariis ſuis Anglicis Emerſonus.

ſiſtentia

De Motu Corporum

sistentia modo inventa, si in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis longitudinibus AH, HX; si jam desideretur positio rectæ AH, secundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emissum, incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorsum tendat, & æquetur ipsi AI seu $\frac{1}{2}$HX. Asymptotis AK, KF describatur hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum C (nn), centroque A & intervallo AH describatur circulus secans hyperbolam illam in puncto H; & projectile secundum rectam AH emissum incidet in punctum K. Q.E.I. Nam punctum H, ob datam longitudinem AH, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur CH occurrens ipsis AK & KF, illi in E, huic in F; & ob parallelas CH, MX, & æquales AC, AI, erit AE æqualis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE est ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam (oo) asymptotis AK, KF descriptam, cujus conjugata transit per punctum C, atque ideo reperitur in communi



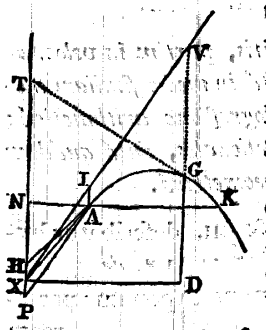
(nn) Asymptotis NK, KF scribatur hyperbola, cujus *opposita* transeat per punctum C.

(oo) Asymptotis NK, KF scriptam, cujus *opposita* transit per punctum C.

(pp) Per punctum X agatur XD cum plano horizontis parallela, quæ rectæ VG, si opus fit, productæ, in D occurrat. Et propter angulum VXD datum, angulumque VDX rectum, triangulum VDX specie datum est. Ratio igitur VX ad XD data. Ac proinde ratio illius VX^n ad XD^n data. Sit recta P parameter parabolæ KAX ad verticem X. Ut fit $VG \times P^{n-1} = VX^n$. Sit b recta tali longitudine, ut fit b^{n-1} ad P^{n-1} ut XD^n ad VX^n. Erit igitur $VG \times b^{n-1}$ ad $VG \times P^{n-1}$ ut XD^n ad VX^n. Unde cùm $VG \times P^{n-1}$ illi VX^n æquale sit, erunt etiam $VG \times b^{n-1}$, XD^n inter se æqualia. Vel si recta XD designetur literâ x, erit $VG \times b^{n-1} = x^n$. Vel $VG = \frac{x^n}{b^{n-1}}$. Data ratio rectæ XD ad rectam DV ea sit, quam e habet ad d. Unde $DV = \frac{d}{e}x$. Et $DG = \frac{d}{e}x - \frac{x^n}{b^{n-1}}$. Ordinatæ igitur, intervalli

muni intersectione hyperbolæ hujus & circuli descripti. Q.E.D. Notandum est autem, quòd hæc operatio perinde se habet, sive recta AKN horizonti parallela sit, sive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quòdque ex duabus intersectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quòd in praxi mechanicâ sufficit circulum semel describere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis sit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK sitæ. Liber Secundus.

Quæ de Hyperbolis dicta sunt facilè applicantur ad Parabolas. Nam si XAGK parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV digninates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela sit VG, & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam; si modò densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2GT^q}{nn-n \times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG (PP). Unde si NAK lineam horizontalem designet,



intervallo o abscissæ DV ab ordinatâ DG remotæ, hoc erit symbolum generale $\frac{d}{e}\overline{x+o} - \overline{\overline{x+o}^n}{b^{n-1}}$; sive, quantitate illâ $\overline{x+o}^n$ in seriem infinitam resolutâ, $\frac{d}{e}x + \frac{x^n}{b^{n-1}} + \frac{d}{e}o - \frac{nx^{n-1}o}{b^{n-1}} - \frac{nn-n}{2b^{n-1}}x^{n-2}o^2 - \frac{n^3-3n^2+2n}{bb^{n-2}}x^{n-3}o^3 -$,

Unde veniet $Q = \frac{d}{e} - \frac{n}{b^{n-1}}x^{n-1}$ $R = \frac{nn-n}{2b^{n-1}}x^{n-2}$ $S = \frac{n^3-3n^2+2n}{6b^{n-1}}x^{n-3}$.

Quare $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3x} = \frac{n-2}{3DX}$. Densitas igitur, cùm per Corollarium 1^m ea sit ut $\frac{S \times DX}{R \times GT}$, erit ut $\frac{n-2}{3GT}$, sive ut GT contrariè.

De Motu Corporum

net, & manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX (qq), & inde datur parabolæ vertex X, & poſitio rectæ XI (rr), & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

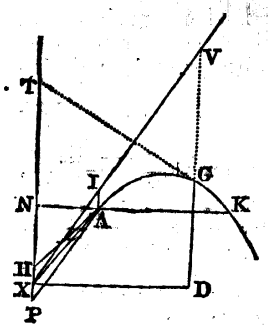
SECTIO III.

De motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ.

PROP. XI. THEOR. VIII.

Si corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometricâ.

Centro C, aſymptotis rectangulis CAD*d* & CH, deſcribatur hyperbola BE*e*, & aſymptoto CH parallelæ ſint AB, DE, *de*. In aſymptoto CD dentur puncta A, G: et ſi tempus exponatur per aream



Rurſum vis reſiſtitus, cùm per idem Corollarium ea ſit ad vim gravitatis motricem ut $2BK \cdot GT$ ad $4RR \times DX$, idcirco ad vim motricem gravitatis erit ut $\frac{n^4 - 3n^2 + 2n}{2b^{n-1}} x^{n-3} GT$ ad $\frac{\overline{2n-n}^2}{b^{2n-2}} x^{2n-3}$, ſive ut $n^3 - 3n^2 + 2n \cdot GT$ ad $\frac{2 \cdot \overline{2n-n}^2 x^n}{b^{n-1}}$, ſive ut $\frac{n-2}{2nn-2n} GT$ ad $\frac{x^n}{b^{n-1}}$: hoc eſt, cùm ſit $\frac{x^n}{b^{n-1}} = VG$, ut $\frac{n-2}{2nn-2n} GT$ ad VG, vel ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2} VG$.

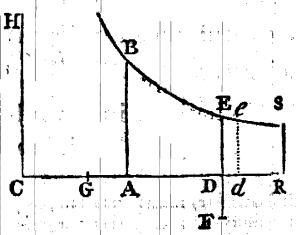
Rurſum latus rectum parabolæ conicæ, quam corpus motu ſuo per inane ſcriberet, ſi è loco G, ſecundum rectam GT, eâ cum velocitate projectum fuerit, quam corpus per Curvam KGN latum in loco illo G habet, hujus inquam parabolæ latus rectum, cùm per idem Corollarium æquale ſit rectæ hoc ſymbolo ſignificatæ, $\frac{GT^2}{DX \times R}$; idcirco huic rectæ æquale erit, $\frac{2b^{n-1}}{2n-n.x^n} GT^2$; quæ vel hoc etiam ſymbolo ſignificabitur, $\frac{2GT^2}{nx-n.VG}$; nempe cùm illud b^{n-1} huic $\frac{x^n}{VG}$ æquale ſit.

(qq) Data ſcilicet materiæ denſitate, datâque etiam velocitate quâcum corpus è puncto A emiſſum eſt, rectas AH, AI magnitudine dari, id iiſdem planè argumentis probare licet, quibus idem in hyperbolis oſtendimus. (Vide Not. ss.) At verò rectam HX magnitudine quoque dari, id nunc oſtendimus.

Liber Secundus.

ream hyperbolicam ABED uniformiter creſcentem; dico, quòd velocitas exponi poteſt per longitudinem DF, cujus reciproca GD, unà cum datâ CG, componat longitudinem, CD, in progreſſione geometricâ creſcentem.

Sit enim areola DE*ed* datum temporis incrementum quàm minimum, & erit D*d* reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) eſt $\frac{Dd}{GD_q}$, erit ut $\frac{CD}{GD_q}$, ſeu $\frac{CG+GD}{GD_q}$; id eſt, ut $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GD_q}$. Igitur tempore ABED per additionem datarum particularum, ED*de*, uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GD_q}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior, $\frac{CG}{GD_q}$, eſt ut $\frac{1}{GD_q}$: proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas (a). Et ſi quantitas GD, ipſi



oſtendimus hoc modo. Agatur per A recta AP cum tangente AH parallela, quæ parabolæ diametro, NX, in P occurrat. Cùm data ſit recta AI magnitudine dabitur huic æqualis XP. (Æquales autem erunt AI, XP propter figuram AIXP parallelogrammam.) Ratio autem rectæ PX ad XH è parabolæ naturâ data. Nempe cùm ea ſit quæ unitatis eſt ad numerum $n-1$. Recta igitur XH magnitudine data (Dat. 2.) Q. E. D.

(rr) Nimirum ex dato quovis angulo NAH, dabitur poſitione recta AH. Unde ex datâ ejus longitudine datoque puncto A, punctum H dabitur. (Dat. 27.) Recta igitur HX, per datum punctum H in planum horizontis ad perpendiculum deducta, poſitione data. (Dat. 30.) Quare ex datâ etiam ejus longitudine datoque puncto H punctum X datum. (Dat. 27.) At vero recta AI magnitudine & poſitione data, punctumque A datum. Datum igitur punctum I. (Dat. 27.) Datis autem punctis X, I, recta XI poſitione data. (Dat. 26.) Q. E. D.

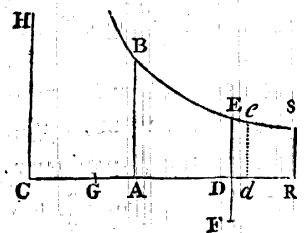
(a) Hæc eſt, ni fallor, argumentatio Newtoni.

In hyperbolæ cujuſdam BE, poſitione datæ, aſymptotâ CA, dato puncto quolibet G infra centrum hyperbolæ; ſi area hyperbolica, ABDE, quæ aſymptotæ CA parte quâvis AD, rectiſque AB, DE, cum alterâ aſymptotâ parallelis, intercluſa eſt, motu rectæ DE, manente illâ AB, æquabiliter increſcat, ſitque DF recta, quæ cum rectâ GD, inter punctum datum G rectamque mobilem DE interceptâ, rectangulum claudat datæ magnitudinis: fluxio decreſcentis rectæ DF erit ut ipſa DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF ſemper rationem geret.

At verò ſi corpus per materiam, vi renixus, qualis poſita eſt, præditam, ſolâ vi inſitâ impulſum progrediatur; tempore æquabiliter aucto, velocitas corporis eâ lege minuetur, ut fluxio ejus ſit ſemper ut velocitas ipſa parte quâdam aucta, quæ ipſius velocitatis rationem duplicatam geret.

Recta igitur DF corporis velocitatem, ſimili planè lege decreſcentem, optimè repræſentabit, modò aptè ſumptum fuerit punctum P: vel etiam puncto G pro arbitrio aſſumpto, ſi talis ſumatur DF

ipſi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur; ſumma CD, tempore ABED uniformiter creſcente, creſcet in progreſſione geometricâ. Q. E. D.

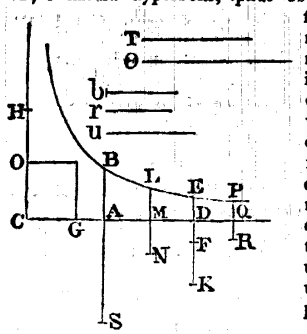


Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam ABED, exponi poteſt velocitas per ipſius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca ſub initio, quæ rectangulo GD × DF juſtam reddat magnitudinem.

Rectam autem DF quo diximus modo fluere, id Newtonus hiſce ferè argumentis probat.

Symbolo A^2, ſignificetur ſpatium illud datum, cui rectangulum GD × DF ponitur æquale. Jam propter rectangulum GD × DF datum, cujus tamen latera, GD, DF, contrariè fluunt, erit (per Geom. Flux. Prop. VIII. Cor. 3.) $\dot{DF} : \dot{GD} = DF : GD$. Rectarum verò GD, CD, propter earum differentiam CG datam, fluxiones inter ſe æquales erunt. (Geom. Flux. Prop. V.) Quare $\dot{DF} : \dot{CD} = DF : GD$. Sed propter æquabilem aream ABED fluxum, fluxio rectæ CD, è naturâ hyperbolæ, ipſius CD rationem geret; vel, quod idem eſt, recta CD fluxionis ſuæ. Si igitur capiatur DK, quæ ſit ſemper ad CD, ut fluxio rectæ DF ad fluxionem rectæ CD, ſemper erit DK ut fluxio rectæ DF; et $DK : CD = DF : GD$. Sed cùm punctum G ſit infra centrum hyperbolæ, id enim omninò ponendum eſt, CD major erit quàm GD. Quare et DK major quam DF. (El. V. 14.) Et cùm DK ſit ad CD ut DF ad GD, permutando et convertendo erit DK ad KF, ut CD ad CG. Dividendo $DF : FK = GD : CG$. Permutando $DF : GD = FK : CG$. Quare DF^2 erit ad DF × GD, ſive ad datum ſpatium A^2, ut FK ad datam rectam CG. Recta igitur FK, cùm ſit ad datam CG ut quadratum ex DF ad ſpatium datum, quadrati utique ex DF rationem conſtanter ſervabit. Et fluxio rectæ DF, cùm ea ſit ut DK, hoc eſt ut DF + FK, vel ut DF parte FK aucta, erit ut DF parte quâdam aucta, quæ quadrati ex DF rationem ſemper geret. Q. E. D.



Hyperbolâ autem BE cum aſymptotis ſuis CA, CH poſitione datis, rectâque etiam AB, quæ cum aſymptotâ CH parallela eſt, poſitione datâ; ſitus puncti G, qui efficiat ut rectæ DF, datum cum illis GD ſpatium continentes, velocitatum inter ſe rationes induant, dum areæ ABED temporum rationibus reſpondeant, is hâc ratione definiendus erit.

Sumantur ABLM, ABED, quæ temporum duorum T, Θ, rationem gerant; ſumptâque rectâ MN hyperbolæ ordinatæ ML æquali, inveniatur alia DF quæ ad illam MN rationem habeat, quam velocitas corporis ſub finem temporis Θ ad velocitatem ejus ſub finem temporis minoris T. Inveniatur in rectâ DC punctum G, ut ſit GD ad GM ut MN ad DF. Punctum G infra centrum erit hyperbolæ. Areâ enim ABLM æquabiliter creſcente, ordinata ML ratione Geometricâ decreſcet. Quare fluxio rectæ ML ipſius ML rationem ſemper geret. Et ſi velocitas corporis eâ lege decreſceret, ut fluxio ejus ipſius ſemper rationem ſervaret, hyperbolæ ordinata DE ad ordinatam ML, vel ejus æqualem rectam MN, rationem haberet, quam velocitas ſub finem temporis Θ ad velocitatem ſub finem temporis T. Namque area hyperbolica LMDE logarithmus eſt rationis quam ML habet ad DE. Et tempus Θ − T logarithmus eſſet rationis, quam velocitas ſub finem temporis T ad velocitatis ſub finem temporis Θ haberet, ſi geometricâ ratione velocitas decreſceret. Sed area LMDE temporis Θ − T rationem ſervat. Unde, propter mutuam logarithmorum competentiam, ratio velocitatis ad velocitatem eadem quæ rectæ ML ad rectam DE eſſet. Sed velocitas, cùm

initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis ABED, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

PROP. XII. THEOR. IX.

Iiſdem poſitis, dico, quòd ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometricâ.

In aſymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat hyperbolæ in s, exponatur deſcriptum ſpatium per

cùm eâ lege decreſcat, ut fluxio ejus ſemper ſit ut velocitas ipſâ parte quâdam aucta, quæ ipſius rationem duplicatam gerat, velociùs utique decreſcit, quàm ut fluxio ejus ipſius rationem ſervet. Ac propterea, dato quovis tempore, minor fiet, quàm ſi geometricâ ratione decrementum ſubiiſſet. Minor igitur, quàm illa DE, erit recta quæ ad ML, vel ejus æqualem MN, rationem habebit quam velocitas ſub finem temporis Θ ad velocitatem ſub finem temporis T. Quare DF minor erit quàm DE. Quare MN major erit, quàm ut habeat ad DF rationem eam, quam MN, vel ML, ad DE. (El. V. 8.) Sed $MN : DF = GD : GM$. (Id enim factum eſt.) Et $ML : DE = CD : CM$, propter hyperbolam. Quare GD major erit, quàm ut habeat ad GM rationem eam, quam CD ad CM. Convertendo, minor erit GD quàm quæ habeat ad DM rationem eam quam CD ad DM. Quare GD minor erit quàm CD. (El. V. 10.) Quare punctum G infra C centrum hyperbolæ. Et cùm GO ſit ad GM ut MN ad DF, rectangula GD × DF, GM × MN erunt inter ſe æqualia. Et tempore Θ utcunque aucto, ſi capiatur area ABQF, quæ ad aream ABED rationem habeat, quam tempus illud majus ad tempus Θ, velocitas ſub finem temporis illius majoris erit ad velocitatem ſub finem temporis Θ ut recta QR, quæ cum GQ rectangulum contineat dato GM × MN æquale, ad rectam DF.

Sed leviore negotio efficere liceat, ut rectæ DF velocitatum rationes præ ſe ferant, ſi punctum G pro arbitrio ſumatur. Sumatur enim. Sint r, u rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ r renixûs, illæ u velocitatis ſemper rationes gerant. Sit b recta datæ magnitudinis. Et talis ponatur lex renixûs, ut ſit ſemper $r = u + \frac{uu}{b}$. In aſymptotâ CH capiatur CO datæ b æqualis, et complentur rectangulum OG. Capiatur GA ejus longitudinis, ut cum datâ illâ rectæ u longitudine, qualem utique initio motûs illa habuit, rectangulum contineat dato OG æquale. Tum u capiatur DF ejus ſemper longitudinis, quæ efficiat rectangulum DF × DG eidem OG æquale, illa DF ita fluet, ut velocitatis ſemper rationem ſervet, modò area ABED temporis rationem tueatur. Area enim ABDE æquabiliter fluente erit $\dot{DF} = DF + \frac{DF^2}{A}$ CG (per ea quæ ſuprà oſtenſa ſunt). Vel ſi pro ſymbolo A^2 rectangulum OG ſubſtituatur, $\dot{DF} = DF + \frac{DF^2}{OC} = DF + \frac{DF^2}{b}$. Sed $\dot{u} = u + \frac{uu}{b}$. Quare ſi initio fluxûs illæ DF, u æquales fuerint, æquales tunc erunt earum fluxiones, et rectæ ipſæ, decrementis æqualibus imminutæ, æquales uſque manebunt. Sunt autem, initio fluxûs, illæ DF, u æquales. Tempore enim Θ paulatim imminuto, area ABED pari ratione paulatim minuatur, uſque dum tempore Θ ad nihilum redacto, area ABED in nihilum ſimul abeat, ordinatâ DE cum illâ AB ultimò congruente. Recta verò DF, increſcendo utique dum GD decreſcat, ut rectangulo DF × GD ſua conflet magnitudo, rectæ AS magnitudinem ultimò adepta ſit. Rectangulum igitur AS × GA dato OG æquale. Talis autem accepta eſt recta GA, quæ cum rectâ u, qualis utique initio motûs illa fuit, rectangulum contineat illi OG æquale. Quare AS, quæ eſt longitudo rectæ DF, quam naſcente aream ABED primam illa habuit, eadem longitudo erit rectæ u, quam primam illa, naſcente tempore Θ, habuit. Sunt igitur illæ DF, u initio fluxûs inter ſe æquales. Quare æquales ſemper erunt, dummodo area ABED tueatur temporis rationem. Et tempore æquabiliter aucto, cùm area ABED æquabiliter ſimul creſcat, recta GD, quæ ipſius DF contrariam ſemper rationem gerit, datâ CG aucta, geometricâ ratione creſcet.

aream

De Motu Corporum

aream hyperbolicam RSED *(vid. fig. p. 308)*; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ, cum datâ CG, componit longitudinem CD in progreſſione geometricâ decreſcentem, interea dum ſpatium RSED augetur in arithmeticâ.

Etenim ob datum ſpatii incrementum EDde, lineola Dd, quæ decrementum eſt ipſius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciprocè proportionali, quo data ſpatii particula DdeE deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim; id eſt, directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum unà eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſè ut velocitas; ideoque directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quàm lineæ GD, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim; & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea GD (b). Q. E. D.

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem GD, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica DESR.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum R, invenietur punctum G, capiendo GR ad GD, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis RSED deſcriptum. Invento autem puncto G, datur ſpatium ex datâ velocitate, & contrà.

Corol. 3. Unde cùm (per Prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore

(b) Nimirum in hyperbolæ cujuſvis, BR, poſitione datæ, aſymptotâ CA dato puncto C infra centrum *(vid. fig. p. 308)*, ſi area hyperbolica RSED, quæ aſymptotæ CA parte quâvis RD, ſectiſque RS, DE, cum alterâ aſymptotâ parallelis, intercluſa eſt, motu rectæ DE verſus aſymptotam CH, manente illâ RS, æquabiliter increſcat; rectæ decreſcentis GD fluxio erit ſemper ut GD datâ CG aucta. Nam propter æquabilem areæ SRDE fluxum, recta CD è naturâ hyperbolæ ratione geometricâ decreſcet. Quare fluxio rectæ CD ipſius CD rationem ſemper ſervabit. Unde ponere liceat $\dot{CD} = CD$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Sed rectarum GD, CD fluxiones, ob datam fluentium differentiam, CG, ſemper inter ſe æquales erunt. (Geometr. Flux. Prop. V.) Quare $\dot{GD} = \dot{CD} = CD = CG + GD$.

Verùm ſi corpus per materiam, vi renixûs, qualis poſita eſt, præditam, ſolâ vi inſitâ impulſum progrediatur, tum ſi arithmeticè ſumantur itineris confecti ſpatia, velocitas corporis eâ quidem lege minuetur, ut fluxio ejus ſit ſemper ut velocitas ipſa datâ quâdam aucta. Sint enim R, V, S, T, rectæ eâ lege mutabiles, ut illæ R renixûs, illæ V velocitatis, illæ S itineris confecti, illæ T temporis quo conficitur iter S, rationem tueantur. Sit B recta datæ magnitudinis. Atque talis ponatur lex renixûs, ut ſit ſemper $R = V + \frac{VV}{B}$. Sive $BR = BV + VV$. Jam cùm $\dot{V}$ ſit ſemper ut $B \times \dot{T}$, et $\dot{T}$ ſit ſemper ut $\frac{\dot{S}}{V}$, erit $\dot{V}$ ut $\frac{B \times \dot{S}}{V}$, ſive datâ $\dot{S}$, quod poſuimus, ut $\frac{B}{V}$. Unde ponere licet

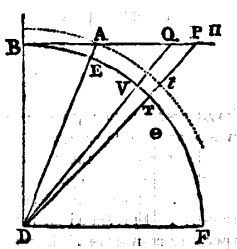
Liber Secundus.

pore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex datâ velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contrà.

PROP. XIII. THEOR. X.

Poſito quòd corpus, ab uniformi gravitate deorſum attractum, rectâ aſcendit vel deſcendit; & quòd eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ: dico quòd, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis à centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contrà.

Caſ. 1. Ponamus primò quòd corpus aſcendit; centroque D & ſemidiametro quovis DB deſcribatur circuli quadrans BETF, & per ſemidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, ſemidiametro DF parallela. In eâ detur punctum A, & capiatur ſegmentum AP velocitati proportionale. Et cùm reſiſtentiæ pars altera ſit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; ſit reſiſtentia tota ut AP *quad.* + 2BAP. Jungan-

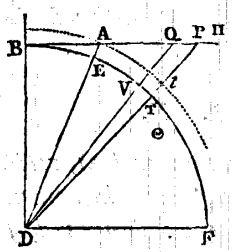


ſicet $\dot{V} = \frac{BR}{V}$. (Geometr. Flux. Def. 5.) Quare $\dot{V} = B + V$. R—— V—— B— Y— S—— T——.

Recta igitur GD corporis velocitatem, ſimili planè lege decreſcentem, optimè repræſentabit, ſi dato punctorum G, R altero, alterum aptè ſumatur.

Dato autem puncto G *(fig. p. 308)*, talis ſumenda eſt GR, quæ ad rectæ V, qualem utique initio motûs illa habuit, longitudinem rationem habeat quam CG ad B. Vel dato R, talis ſumenda eſt CG quæ ad GR rationem habeat quam data B ad longitudinem rectæ V, qualem utique initio motûs illa habuit. Ita ſemper GD velocitatis rationem ſervabit, modò area SRDE itineris confecti rationem ſervet. Puta enim ſpatium itineris S tempore quodam T confectum; eodemque tempore aream SRDE generatam, et velocitatem quæ initio fuerit V in minorem Y abiiſſe. Dico GR eſſe ad GD ut V ad Y. Cùm enim, datâ $\dot{S}$, $\dot{V}$ ſit ut $B + V$, ſpatio S æquabiliter aucto, recta $B + V$ ratione geometricâ decreſcet. Quare iter confectum S logarithmus erit rationis quam $B + V$ habet ad $B + Y$. At verò area hyperbolica SRDE rationis quam CR habet ad CD, è naturâ hyperbolæ, erit logarithmus; et area illa hyperbolica ſimili ſemper ratione cum itinere confecto creſcit. Ob mutuam igitur logarithmorum competentiam, eadem erit ratio rectæ $B + V$ ad $B + Y$ quæ rectæ CR ad CD, ſive quæ $CG + GR$ ad $CG + GD$. Et permutando $B + V : CG + GR = B + V : CG + GD$. Eſt autem $B : CG = V : GR$. (Id enim factum eſt.) Erit igitur $B + V : CG + GR = B : CG$. (El. V. 12.) Et cùm ſit etiam $B + V : CG + GR = B + Y : CG + GD$, erit $B : CG = B + Y : CG + GD$. (El. V. 11.) Quare permutando $B : B + V = CG : CG + GD$. Invertendo et dividendo $Y : B = GD : CG$. Permutando $B : CG = V : GD$. Sed $B : CG = V : GR$. Quare $V : GR = Y : GD$. Permutando $V : Y = GR : GD$. Q. E. D.

tur



tur DA, DP, circulum secantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut DAq ad APq + 2BAP (c): & tempus ascensûs totius erit ut circuli sector EDT.

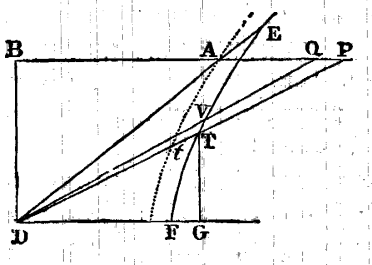
Agatur enim DVQ, abscindens & velocitatis AP momentum PQ, & sectoris DFT momentum DTV dato temporis momento respondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut summa virium gravitatis DAq & resistentiæ APq + 2BAP, id est (per Prop. XII. Lib. II. Elem.) ut DPq *quad.* Proinde area DPQ, ipsi PQ proportionalis, est ut DP *quad.* & area DTV, quæ est ad aream DPQ ut DTq ad DPq, est ut datum DTq (d). Decrescit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori ascensûs totius proportionalis est. Q. E. D.

Cas.

(c) Hujus lineationis ratio ita, ni fallor, apertiùs exponatur. Recta AP positione data, manente puncto A, eâ lege fluat, ut mutabilem corporis cujusdam velocitatem referat, quod per materiam vi renixûs, qualis posita est, præditam, urgente vi uniformi gravitatis, rectâ cadat vel ascendat. Sit R alia recta, quæ eâ lege fluat, ut renixûs materiæ semper rationem servet. Detur magnitudine recta β. Atque talis ponatur lex renixûs, ut sit semper $\beta R = \beta \times AP + AP^2$. In PA producta capiatur AB semissi rectæ β æqualis. Unde semper erit $2AB \times R = 2BAP + AP^2$. Et rectâ AP ad modum velocitatis fluente, spatium $2BAP + AP^2$ ita fluet, ut renixûs semper rationem servet. Datam puta rationem quam vis renixûs ad vim constantem gravitatis habeat, quando corpus dato quodam velocitatis gradu feratur. Atque detur etiam rectæ mutabilis AP magnitudo, AΠ, quæ datam illam velocitatem referat. Ita dabitur spatium, quod ad datam tunc spatii fluentis $2BAP + AP^2$ magnitudinem, $2BA\Pi + A\Pi^2$, rationem illam datam habeat quam vis gravitatis ad vim renixûs. Sit C recta cujus quadratum huic spatio æquale est. Et cùm vis renixûs spatii mutabilis $2BAP + AP^2$ rationem semper servet, vis constans gravitatis erit semper ad vim renixûs, ut quadratum è rectâ C datum ad mutabile $2BAP + AP^2$. Recta autem C vel major erit quàm AB, vel minor, vel ei æqualis. Si major fit, deducatur à puncto A in rectam BD, ad perpendiculum à puncto B eductam, recta AD illi C æqualis. Centro D intervallo DB describatur circulus. Sint Π, Π duo quævis loca puncti mobilis P. Junctæ DΠ, DΠ circulo in Θ, T occurrant. Tempus ascendendi à loco illo, ubi corporis velocitas ea est quam recta AΠ refert, locum usque quem corpus, extinctâ sensim velocitate, summum attigerit, ad tempus ascendendi à loco alio, ubi velocitas est ea quam recta AP refert, locum usque summum, erit ut sector ΘDE ad sectorem TDE. Vel sermone Newtoniano, sector TDE erit ut tempus, quo velocitas AP ascendendo extinguitur.

(d) Hoc est, fluxio trianguli DPA, quæ fluxionis rectæ AP rationem servat, ea ad quadratum ex DP datam rationem geret. Sed fluxio trianguli DPA est ad fluxionem sectoris DTE ut quadratum ex DP ad quadratum ex DT. Permutando $\dot{DTE} : DT^2 = \dot{DPA} : DP^2$. Quare cùm $\dot{DPA}$ sive fluxio trianguli DPA, ad quadratum ex DP datam rationem habeat, fluxio sectoris $\dot{DTE}$ ad quadratum ex DT datam quoque rationem geret. Sed recta DT, cùm rectæ BD æqualis est, magnitudine datur. Nam AD positione data. (Dat. 31.) Et B positione data. (Dat. 29.) Quare punctum D datum. (Dat. 25.) Et B datum; quia extremum est rectæ AB, magnitudine et positione datæ, cujus alterum extremum A datur. (Dat. 27.) Recta igitur BD, & illi æqualis DT, magnitudine data est. (Dat. 26.) Quare quadratum ex DT magnitudine datum, et fluxio sectoris circularis

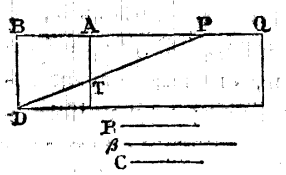
Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut APq + 2BAP, & si vis gravitatis minor sit quàm quæ per DAq exponi possit; capiatur BD ejus longitudinis, ut sit ABq − BDq gravitati proportionale (e); sitque DF ipsi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F describatur hyperbola FTVE, cujus semidiametri conjugatæ sint DB & DF, quæque secet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus ascensûs totius ut hyperbolæ sector TDE.



Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, est ut summa resistentiæ APq + 2BAP & gravitatis ABq − BDq, id est, ut BPq − BDq. Est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, si ad DF demittatur perpendiculum TG, ut GTq, seu GDq − DFq, ad BDq, utque GDq ad BPq; & divisim ut

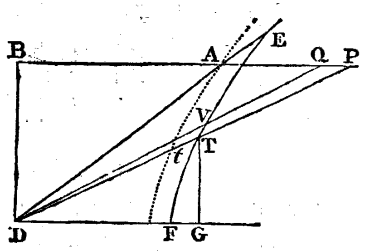
circularis DTE magnitudine data. Sector igitur DTE, cujus fluxio constans, æquabiliter fluit.

(e) Jam verò C non sit major quàm AB. Vel minor igitur erit, vel ei æqualis. Sit æqualis primò; cujus casûs demonstrationem Newtonus, ad alia properans, neglexit. A puncto B ad perpendiculum eductâ BD, capiatur BD ipsi AB æqualis. Per A educatur ad perpendiculum recta AT, cui juncta DP in T occurrat. Dico tempus, quo consumitur ascendendo velocitas AP, esse ut triangulum DTA*; sive ut recta TA. Cùm enim vis constans gravitatis sit semper ad vim renixûs ut C^2 ad 2BAP + AP^2; idcirco, positis C, AB æqualibus, summa virium gravitatis renixûsque erit ut BA^2 + 2BAP + AP^2, hoc est (per El. II. 4.) ut BP^2. Velocitatis autem fluxio, tempore æquabiliter aucto, summæ virium gravitatis renixûsque rationem servabit. Quare fluxio rectæ AP erit semper ut quadratum ex BP. Vel si ad datam BD applicetur rectangulum QD quadrato ex BP æquale, rectæ AP fluxio ad rectam BQ rationem datam geret. Sed cùm recta DP, polo D mobilis, rectas AP, AT positione datas secet, erit $\dot{AP} : \dot{AT} = DP \times PA : DT \times TA$. (Introduct. Quad. Curv. § 8.) Sed propter parallelas AT, BD, erit PA : PB = TA : BD. Quare DP × PA : DP × PB = DT × TA : DT × BD. Permutando DP × PA : DT × TA = DP × PB : DT × BD. Quare $\dot{AP} : \dot{AT} = DP \times PB : DT \times BD$. Sed propter rectas AT, DB parallelas, erit DP : PB = DT : BA, vel BD. Rectangula igitur DP × PB, DT × BD inter se similia erunt, et quadratorum è lateribus PB, BD inter se rationem gerent. Hoc est DP × PB : DT × BD = PB^2 : BD^2 = QB : BD. Quare $\dot{AP} : \dot{AT} = QB : BD$. Permutando $\dot{AP} : QB = \dot{AT} : BD$. Sed ratio illius $\dot{AP}$ ad QB data est. Quare et illius $\dot{AT}$ ad datam BD data. Quapropter AT data erit magnitudine. Et recta AT, cujus constans est fluxio, nimirum si tempus æquabiliter augeatur, æquabiliter ad modum temporis ipsa fluet. Q. E. D.



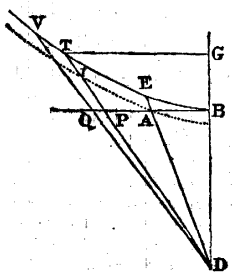
At verò si C minor sit quàm AB, capiatur BD ejus longitudinis, ut quadratum ex BD illud sit, quo quadratum ex AB excuperat quadratum ex C. Ita fiet AB^2 − BD^2 = C^2; et vis gravitatis semper erit ad vim renixûs ut AB^2 − BD^2 ad AP^2 + 2BAP.

* *In oppositâ figurâ artifex rectam* DA *celare neglexit. Ut in figurâ casus superioris, p.* 312, *rectam* DΘ.



DFq ad BPq − BDq. Quare cùm area DPQ fit ut PQ, id eſt, ut BPq − BDq; erit area DTV ut datum DFq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. Q. E. D.

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & APq + 2BAP reſiſtentia, & BDq − ABq vis gravitatis (f), exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula BETV ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſûs.



Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut BDq − ABq − 2BAP − APq, ſeu BDq − BPq. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut GTq, ſeu GDq − BDq, ad BPq, utque GDq ad BDq, & diviſim ut BDq ad BDq − BPq. Quare cùm area DPQ ut ſit BDq − BPq, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſûs proportionalis eſt. Q. E. D.

Corol. Si centro C, ſemidiametro DA, per verticem A ducatur arcus A*t* ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum ADT: velocitas AP erit ad velocitatem, quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris DA*t*; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli. *Scholium.*

(f) Si corpus recta cadat, rectâ c ut priùs inventâ, in rectâ BD à puncto B ad perpendiculum ductâ

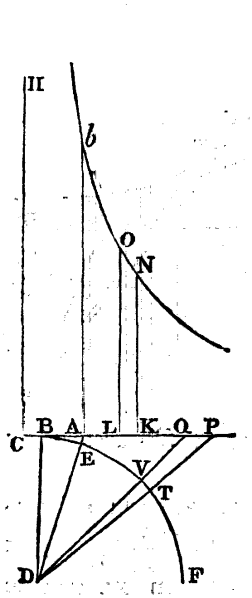
Scholium.

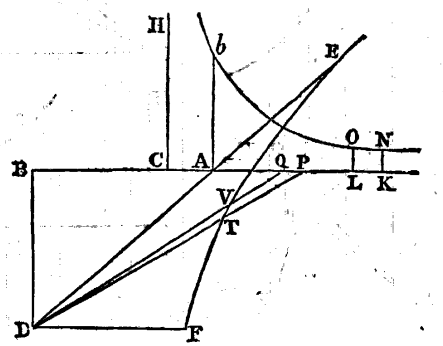
Demonſtrari etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quàm quæ exponi poſſit per DAq ſeu ABq + BDq, & major quàm quæ exponi poſſit per ABq − BDq, & exponi debet per ABq (g). Sed propero ad alia.

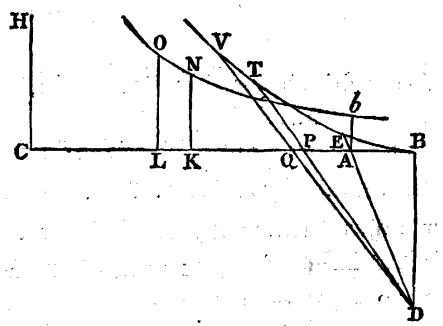
PROP. XIV. THEOR. XI.

Iiſdem poſitis, dico quòd ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione Arithmeticâ, ſi vires ex reſiſtentiâ & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione Geometricâ.

Capiatur AC (in fig. tribus ultimis) gravitati, & AK reſiſtentiæ







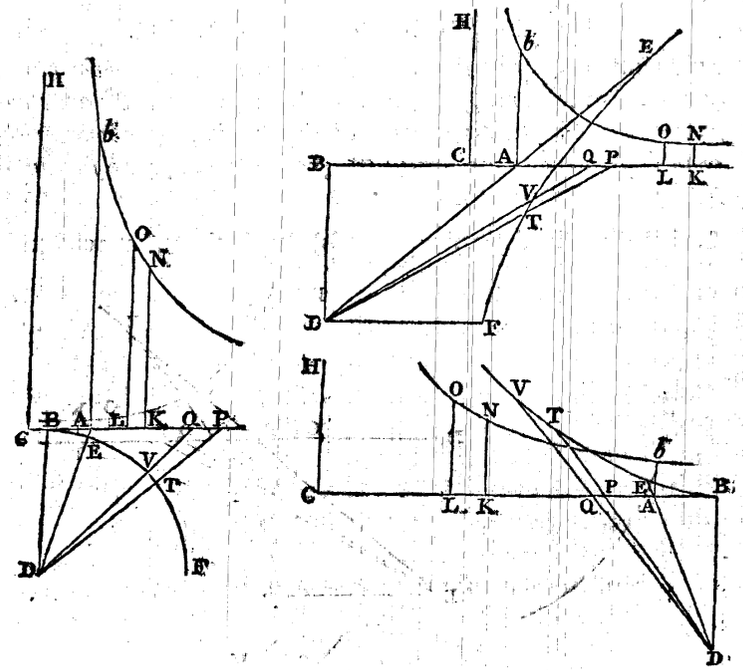
proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes puncti A, ſi

ductâ capiatur BD, cujus quadratum quadratis ex AB et ex c ſimul ſumptis æquale ſit.

(g) Vide Not. *.

De Motu Corporum

corpus descendit; aliter ad contrarias. Erigatur A*b*, quæ sit ad DB ut DBq ad 4BAC: & descriptâ ad asymptotos rectangulas, CK, CH hyperbolâ *b*N, erectâque KN ad CK perpendiculari, area A*b*NK augebitur vel diminuetur in progressione Arithmeticâ, dum vires CK in progressione Geometricâ sumuntur. Dico igitur quòd dis-



tantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ A*b*NK supra aream DET.

Nam cùm AK sit ut resistentia, id est, ut APq + 2BAP; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{AP_q+2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma II.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ A*b*NK momentum KLON æquale $\frac{2BPQ\times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ\times BD\text{ cub.}}{2Z\times CK\times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut ABq + BDq, existente BET Circulo (in figurâ primâ) linea AC, quæ gravitati proportionalis

proportionalis est, erit $\frac{AB_q+BD_q}{Z}$; & DPq, seu APq + 2BAP + ABq + BDq, erit AK × Z + AC × C, seu CK × Z; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad CK × Z. Liber Secundus.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut ABq − BDq, linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{AB_q-BD_q}{Z}$; & DTq erit ad DPq ut DFq, seu DBq, ad BPq − BDq, seu APq + 2BAP + ABq − BDq; id est, ad AK × Z + AC × Z, seu CK × Z. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad CK × Z.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut BDq − ABq, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BD_q-AB_q}{Z}$, erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad CK × Z: ut suprà.

Cùm igitur areæ illæ semper sint in hâc ratione; si pro areâ DTV, quâ momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta BD × *m*, erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2}$BD × PQ, ad BD × *m* ut CK × Z ad BDq. Atque inde fit PQ × BD *cub.* æquale 2BD × *m* × CK × Z; & areæ A*b*NK momentum, KLON, superiùs inventum, fit $\frac{BP\times BD\times m}{BA}$. Auferatur areæ DET momentum DTV, seu BD × *m*, & restabit $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$; & propterea, ob datum $\frac{BD\times m}{AB}$, ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. Q. E. D.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia v sumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio non resistente, è quiete cadendo, eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD\times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis, sive ut v^2; &, ob datas BD & AB, ut $\frac{BD\times V^2}{AB}$. Hæc area æ-

qualis

De Motu Corporum

qualis est areæ $\frac{DA_q \times BD \times M^2}{DE_q \times AB}$, & ipsius M momentum est m; & propterea hujus areæ momentum est $\frac{DA_q \times BD \times 2M \times m}{DE_q \times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & AbNK, *viz.* ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DA_q \times BD \times M}{DE_q}$ ad $\frac{1}{2}BD \times AP$, sive ut $\frac{DA_q}{DE_q}$ in DET ad DAP; ideoque, ubi areæ DET & DAP quàm minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & AbNK, quando omnes hæ areæ quàm minimæ sunt, æqualia habent momenta; ideoque sunt æquales. Unde cùm velocitates, & propterea etiam spatia, in medio utroque in principio descensûs vel fine ascensûs simul descripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & AbNK differentia; & præterea cùm spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuò ut arearum DET & AbNK differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & AbNK differentia. Q. E. D.

Scholium.

Resistentia corporum sphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex densitate Medii. Et resistentiæ partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi diximus esse in duplicatâ ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi, seu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed sufficit aditum patefeciſſe ad hanc speculationem in Propositionibus VIII & IX. quæ præcedunt, & eorum Corollariis. In iisdem utique pro corporis ascendentis resistentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus solâ vi insitâ movetur; & corpore rectâ ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque

(*) Nimirum TQ est ad PD ut TS ad PE, propter tres rectas, PT, DQ, ES, inter se parallelas. Evanescente

que subducère, quando corpus rectâ descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in Propositionibus præcedentibus XIII & XIV. in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis substitui potest, vel cum eâdem, ut priùs, componi. Sed propero ad alia. Liber Secundus.

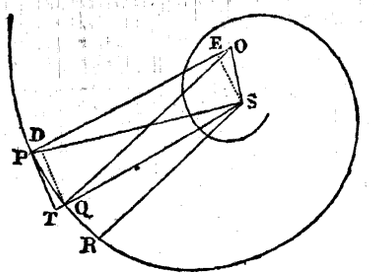
SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus.

LEMMA III.

Sit PQR *Spiralis, quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT, *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico, quòd si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis OPQ, OQR subducantur anguli æquales SPQ, SQR, & manebunt anguli æquales OPS, OQS. Ergo circulus, qui transit per puncta O, S, P, transibit etiam per punctum Q. Coeant puncta P & Q, & hic circulus, in loco coitûs PQ, tanget Spiralem, ideoque perpendiculariter secabit rectam OP. Fiet igitur OP diameter circuli hujus, & angulus OSP in semicirculo rectus. Q. E. D.



Ad OP demittantur perpendicula QD, SE, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: TQ ad PD ut TS, vel PS, ad PE, seu 2PO ad 2PS; item PD ad PQ ut PQ ad 2PO (*); & ex æquo perturbatè TQ ad PQ ut PQ ad 2PS. Unde fit PQ_q æquale TQ × 2PS. Q. E. D.

PROP.

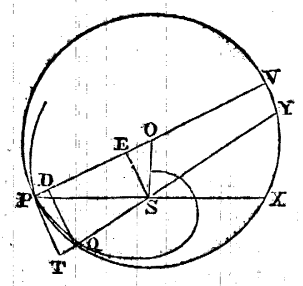
Evanescente autem angulo PST, recta TS fit rectæ PS ultimò æqualis. Erit igitur TQ ad PD ultimò

De Motu Corporum

PROP. XV. THEOR. XII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicatâ ratione denſitatis: dico quòd corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate, & producatur SQ ad V *(fig. p.* 322.) ut ſit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat



timò ut PS ad PE. Sed propter angulum OSP rectum, anguloſque ad E rectos, erit PS ad PE, ut PO ad PS (El. VI. 8.) hoc eſt, ut 2PO ad 2PS. Ergo TQ erit ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS.

Recta PO circulo, qui radio OP circum centrum O ſcriptus fuerit, iterum in V occurrat. Propter angulum ad D rectum (talis enim factus eſt), quadratum ex DQ rectangulo VD × DP æquale eſt; ultimò ſcilicet, arcu ſpirarum PQ infinitè imminuto, ut punctum Q ſit ad circulum illum cujus radius OP, quique ſpiras in puncto P oſculatur. Evaneſcendo arcus PQ rectaque DQ fiunt ultimò inter ſe æquales. Quare quadrata evaneſcentia ex PQ, DQ, ultimò æqualibus, fiunt ultimò inter ſe æqualia. Quadratum igitur ex PQ et rectangulum VD × DP æqualium rationem ultimò inter ſe abſciſcunt. Sed propter rectam VD ipſi VP ultimò æqualem, rectangula quoque evaneſcentia VD × DP, VP × PD ultimò inter ſe æqualia erunt. Quadratum igitur ex PQ et rectangulum VP × PD fiunt ultimò inter ſe æqualia. Unde PD erit ultimò ad PQ ut PQ ad VP, vel 2PO. Cùm igitur ſit TQ ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS, et PD ad arcum PQ ultimò, ut PQ ad 2PO; ex æquo perturbatè, inquit Newtonus, erit TQ ad PQ ultimò, ut PQ ultimò ad 2PS; ac propterea quadratum ex PQ et rectangulum TQ × 2PS erunt ultimò inter ſe æqualia.

In re minimè difficili rationum concluſiones accuratiùs deduximus, ne quis facili errore deceptus, quales ferè incautos ex Cavalerii diſciplinâ homines miſerè ludificari ſolent, eò utique quòd rectus ultimò ſit angulus, quem recta OQ arcuſque PQ intercludunt, et quòd arcus ille quàm minimus pro rectâ haberi poſſit, concludendum ſtatim exiſtimaret, PD eſſe ultimò ad PQ ut PQ ad PO; propter ultimam ſcilicet quam ſomniaverit triangulorum OQP *, QDP evaneſcentium ſimilitudinem. Unde id ſequeretur, quadrati ex PQ ad rectangulum TQ × 2PS rationem ultimam, quam Newtonus æqualitatem ipſam ſtatuit, eam binarii potius ad unitatem eſſe. Reverâ ſi figuræ illæ evaneſcentes OPQ, PQD certas aliquas triangulorum rectilinearium ſpecies ultimò affectarent: hoc eſt, ſi ad triangulorum quorumvis rectilinearium, quæ ſpecie data eſſent, figuras evaneſcendo infinitè accederent; è rationibus quæ triangulorum illorum lateribus rectis interceederent, evaneſcentium PD, PQ rationes ultimæ certiſſimè æſtimandæ eſſent. Atqui ea profecto evaneſcentium OPQ, QPD eſt conditio, ut cum nullâ planè figurâ triangulari, à lineis rectis factâ, eæ comparari poſſint. Siquidem illa QPD ita evaneſcit, ut angulum PQP ultimò omni acuto, qui lineis rectis concludatur, minorem habeat: ita verò illa OPQ ut duos in angulis ſuis habeat rectos; tertium, acuto omni, quem lineæ rectæ intercludunt, minorem. Cùm igitur trianguli naturæ, à lineis rectis facti, id maximè contrarium ſit, ut duos angulos rectos habeat, tertium vel acutiſſimo minorem; evaneſcentium OPQ, PQD nulla planè confenda eſt figura ultima triangularis. Figurarum autem quæ nullæ ſunt, haud ulla ut opinor ſimilitudo erit. Ex ſimilitudinibus verò quæ nullæ ſunt, mutuas rerum rationes definiendas quis non ſtultè ſperaverit.

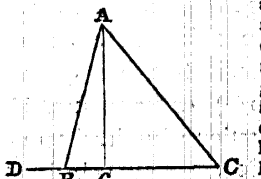
In ſummâ illud monitos velim imperitiores; in acie, quod aiunt, novaculæ conſiſti, ſiquando aream aliquâ triangulari evaneſcente, argumentum aliquod de ultimâ laterum vel angulorum ejus mutabilium ratione ex eo petitur, quòd pro trianguli rectilinearis lateribus, vel angulis, ultimò haberi poſſint: nimirum ſi area tali modo evaneſcat, ut uno ex angulis ſuis in nihilum abeunte, ſpeciem ſuam triangulam ultimò prorſus exuat. Et neſcio an ex alio fonte errores plures gravioreſque promanârint. Ut ſiquis poſito triangulo ABC, cujus manente latere AB cum angulo ABC, reliqua duo latera, evaneſcente angulo BAC, cum angulo tertio fluant; propter ultimam rectarum AB, AC æqualitatem

* *Junge rectam* OQ *quam cælare artifex neglexit.*

Liber Secundus.

ſcribat corpus arcum quàm minimum PQ, & tempore duplo arcum quàm minimum PR; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentiâ oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: eſt itaque decrementum arcûs PQ pars quarta decrementi arcûs PR (a*). Unde etiam,

æqualitatem, triangulum evaneſcens ultimò iſoſceles pronuntiet: tum ex eo quòd triangulum ultimò iſoſceles futurum ſit, angulos ad baſin ABC, ACB ultimò æquales ſtatuat. Haud enim angulo ABC ſed externo ABD, congruentibus utique rectis AC, AB, fit ille ACB ultimò æqualis. Error autem inde venerit, quòd triangulum ABC habitum ſit iſoſceles, tunc cùm omnem planè trianguli ſpeciem exueret. Qui triangulum illud evaneſcens ultimo iſoſceles contendere velit, proferat oportet triangulum iſoſceles, cujus anguli ad baſin duobus rectis æquales ſint. Quod ſi nemo facere poſſit, abjudicanda certè areæ evaneſcenti ABC trianguli iſoſcelis conditio. Neque cum Larvis pugno. Novimus primarios quoſdam in Philoſophiâ viros ſimili errore captos. Quid dicam primarios? Certè nec coryphæus ille omnium noſtrum Newtonus ſemper ab eo immunis erat. (Vide Locum ipſum in Editione Primâ.)

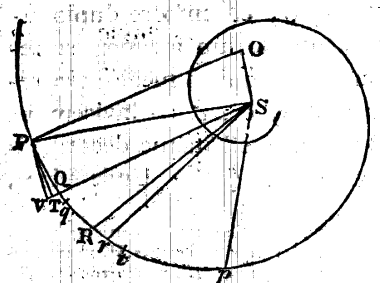


Cæterùm id verum eſſe quod Newtonus pronunciavit, quadrati ex PQ rectangulique TQ × 2PS rationem ultimam æqualitatem eſſe, vel hâc ratione approbare liceat. *(Vid. fig. p.* 320.) Rectæ PS, QS circulo cujus radius OP, in punctis X, Y iterum occurrant. Quadratum ex PT rectangulo YT × TQ ultimò æquale erit. (El. III. 36.) Evaneſcente autem angulo PSQ, recta TY congruet ultimò cum PX, et fiet illi ultimò æqualis. Unde rectangula YT × TQ, XP × TQ ultimò æqualia fient. Sed et arcus PQ rectæ PT ultimò æqualis erit. Quadratum igitur ex PQ rectangulo PX × TQ ultimò æquale. Sed cùm O centrum ſit circuli XYP, et angulus OSP rectus, recta OS illam PX mediam dividet. (El. III. 3.) Quare PX = 2PS. Et PX × TQ = 2PS × TQ. Quadratum igitur ex PQ & rectangulum 2PS × TQ ultimò erunt inter ſe æqualia. Q. E. D.

Atque hanc demonſtrationem Newtonianâ firmiorem judico. Nempe cùm hæc noſtra haud alias loquitur quantitatum rationes ultimas, præter eas quæ verè ſunt rationes; ſive tales quæ magnitudinibus datis verè intercedant. Newtoni probatio ultimâ quidam nititur rationum convenientiâ, quæ rationes reverâ ultimò nullæ ſunt. Nam rationes eæ evaneſcentis PD ad evaneſcentem PQ, PQ item evaneſcentis ad datam 2PO, quas Newtonus ultimò eaſdem ſtatuit, eæ nullæ potiùs ultimò habendæ ſunt. Siquidem PQ minor fit ultimò quam ut datam aliquam rationem ad datam 2PO gerat. Minor itidem ultimò evaneſcens PD, quàm quæ datam rationem gerat, ad illam PQ unà evaneſcentem. Nec aliter ſe habet ultimò illa PD, vel PQ, ratione illius PQ, vel PV, ac ſi manente PD vel PQ, altera PQ vel PV, ſenſim creſcendo, infinitam quandam longitudinem adepta eſſet. Infiniti autem cum finito nullam comparationem, cum Euclide nullam inter ea rationem agnoſco. Neque tamen vitioſa adeo eſt argumentatio Newtoni, quin levi emendatione ſanari poſſit, et firmiſſima evadat quâ parte vel maximè laborat. Nam ex eo quòd tres rectæ PT, DQ, ES ſint inter ſe parallelæ, certiſſimè concluditur eſſe TQ ad PD ut TS ad PE. Quin et illud etiam veriſſimè dictum eſt, rectam TS illi PS fieri ultimò æqualem. Unde et illud ei concedi neceſſe eſt, eſſe TQ ad PD ultimò ut PS ad PE. Jam verò PS eſſe ad PE ut 2PO ad 2PS ex triangulorum OSP, PES inter ipſa ſimilitudine neceſſario ſequitur. Unde illud etiam pro certiſſimo tenendum, TQ eſſe ad PD ultimò ut 2PO ad 2PS. Hinc autem illud Newtono efficiendum erat, ſi demonſtrationem ſuam quàm maximè ex arte concinnare fategiſſet, rectangula TQ × 2PS, PD × 2PO eſſe ultimò inter ſe æqualia. Jam verò quadratum ex PQ rectangulo PD × 2PO eſſe ultimò æquale, invictiſſimis rationibus ex ipſius circuli naturâ comprobatum eſt. Cùm igitur rectangula TQ × 2PS, PD × 2PO oſtenſa ſint ultimò inter ſe æqualia, atque horum illud PD × 2PO quadrato ex PQ oſtenſum ſit ultimò æquale; fieri nequit, quin quadratum ex PQ & rectangulum TQ × 2PS ipſam inter ſe æqualium rationem ultimò induant. Nec in tali argumentationis contextu inventurum quempiam ſpero, quod commodè improbari poterit.

(a*) Lib. I. Lemma X.

De Motu Corporum



si areæ PSQ æqualis capiatur areæ QSr, erit decrementum arcûs PQ æquale dimidio lineolæ Rr (b); ideoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem, ut lineolæ $\frac{1}{2}$Rr & TQ quas simul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, est reciprocè ut SPq, & (per Lem. X. Lib. I.) lineola TQ, quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ describitur (nam resistentiam, in hoc casu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta negligo (c)) erit TQ × SPq, id est (per Lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}$PQq × SP, in ratione duplicatâ temporis; ideoque tempus est ut PQ × $\sqrt{SP}$; & corporis velocitas, quâ arcus PQ illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$, seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$; hoc est, in subduplicatâ ratione ipsius SP reciprocè. Et simili argumento,

(b) Sint *q*, *t* loca, quæ corpus, si per inane latum spirarum ductum sequeretur, iisdem temporibus attigisset, quibus materiæ circumfusæ offensu impeditum arcus PQ, PR confecerit, modò pari cum velocitate à loco P exiisset. Ita erunt Q*q*, R*t* spatia, quibus arcus PQ, PR per materiæ renixum breviores facti fuerint, quàm pro ratione motûs in spatiis vacuis. Arcus autem evanescentes P*q*, *qt* rationem inter se ultimam æqualium habituri sunt. Sed et PQ, QT evanescentes æqualium inter se rationem ultimò adsciscunt. Quare Q*q* = *qt* − QT ultimò. Additoque Q*q*, PQ*q* = QT − QT = *rt* ultimò. Hoc est, ille *rt* ad illum Q*q* rationem ultimam, quæ binarius ad unitatem habet. Sed Q*q* ad R*t* rationem ultimam quam unitas ad quaternarium. Igitur ex æquo *rt* ad R*t* rationem ultimam, quam binarius ad quaternarium habet. Quare *rt* ultimò semissis erit illius R*t*; ac proinde illi R*r*, *rt* ultimò inter se æquales. Unde ille Q*q* qui ostensus est semissis illius *rt*, idem et illius R*r* semissis erit. *(Emersonus ad locum.)*

(c) —*nam resistentiam, in hoc casu, ut infinite minorem quàm vis centripeta negligo.*] Vellem hæc abessent. Sive enim parva sive magna fuerit vis renixûs ratione vis centralis, recta tamen TQ, sive declinatio corporis à tangente centrum versus, à solâ vi centrali provenerit; ac proinde rationem quæ componitur è ratione vis illius cum duplicatâ temporis, quo arcus PQ conficitur, eam, nascendo utique primam, illa TQ semper propriam habebit. Cave enim credas illam TQ, primùm utique nascentem, non à nudâ vi centripetâ, ut, in spatiis vacuis, sed à majore efficaciâ vis centripetæ præ vi renixûs genitam, differentiæ virium illarum rationem cum duplicatâ temporis, quo arcus PQ conficitur, compositam nascendo servare. Næ ille multùm à vero aberraverit, cui id in mentem venerit rem eo modo agi. Nimirum cùm renixus omnis motui fit contrarius, corpus dum per arcum PQ incedat, nullum planè renixum sentiet, nisi qui secundum arcum illum agat. Materia, à corpore progrediente à P versus Q in arcu PQ propulsa, vicissim repellere conatur corpus in arcu illo à Q versus P. Conatus autem ille repellendi in duos est resolvendus (per Leg. Mot. II.) duobus illis, è quibus compositus est corporis per arcum PQ motus, contrarios; quorum cùm alter secundum tangentem TP directus sit, alter secundum radium SP, hic vi centripetæ opponitur atque ejus efficaciam minuit. Duo autem conatum repellendi secundum arcum QP componunt; nec aliud juncti præstant, nisi ut arcum illum, dato tempore confectum, breviorem reddant quàm pro ratione motûs per inane. Arcus igitur Q*q*, quo PQ abest ab illo P*q* qui eodem tempore in spatiis vacuis conficiendus esset, illud omne refert, quod vis renixûs effecerit, dum corpus per arcum PQ iter

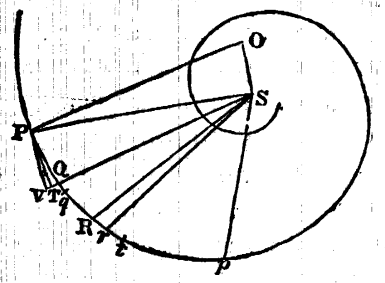
mento, velocitas quâ arcus QR describitur, est in subduplicatâ ratione ipsius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi, PQ & QR, ut velocitates descriptrices ad invicem; id est, in subduplicatâ ratione SQ ad SP, sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQ*r*, & æquales areas PSQ, QS*r*, est arcus PQ ad arcum Q*r* ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum R*r* ut SQ ad SP − $\sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}$VQ. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima SP − $\sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}$VQ est æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs PQ, ex resistentiâ oriundum, sive hujus duplum R*r*, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad R*r*, ut SQ ad $\frac{1}{2}$VQ: & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$, sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob similia triangula PVQ, PSO (d), fit PQ ad $\frac{1}{2}$VQ ut OP ad $\frac{1}{2}$OS. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia,

iter faceret. Neque alia erit vis renixûs secundum radium SP efficacia, quâ vi centripetæ officiat, præter illam, quæ cum alterâ ejus secundum tangentem efficaciâ composita effectum totum Q*q* præstat. Minuit igitur vis renixûs declinationem corporis à tangente dato tempore: sed imminutionem illam effectus compositus, Q*q*, in se totam habet. Et quanta quanta fuerit vis renixûs ratione vis centripetæ, nihilominus illa TQ à nudâ vi centripetâ provenerit, haud secus ac si in spatiis vacuis motus perageretur. Nam si effectum vis renixûs, ad declinationem corporis à tangente imminuendam, iterum in rectâ TQ seorsim considerare velis, cujus aliàs in effectu compositio Q*q* rationem habuisti, profectò efficaciam vis renixûs vi centripetæ contrariam imprudens duplicem posueris, quæ simplex omninò ponenda erat. Nec aliter Newtonum intellexisse, utut aliter scripsisse videatur, ex Corollariis, quæ huic Propositioni comitantur, satis patet. Quorum ne ullum quidem generaliter obtineret, si ipsius Propositionis rationes in eo ponendæ essent, quòd vis renixûs ratione vis centripetæ perexigua esset. Immo, vocabulis illis *in hoc casu* illud ipsum credo significare voluit, partem illam vis renixûs, quæ, secundum radium agendo, corpus à centro repellat, ad minuendam illam TQ nihil planè valere. Quam tamen rectiùs dixisset ad partes non denuò vocandam, cùm aliàs ejus ratio habita esset, quàm præ parvitate suâ negligendam; cui vel dimidiæ vi centripetæ æquali esse liceat, sicut Corollario quarto Newtonus ipse constituit.

Sed rem satis difficilem, si potero, enodatiùs explicabo. Cogita junctam *sq* in tangentem PT produci. Quæ pars productæ *sq* à Curvâ & tangente intercepta fuerit, ea scilicet declinatio erit corporis à recto tramite, quam tempore, quo arcus PQ conficitur in spatio impedito, vis centripeta effecisset in spatiis liberis. Pars illa productæ *sq* rectâ TQ semper quidem major erit. Atqui evanescente arcu PQ, arcus P*q* unà evanescit; tali quidem lege, ut licet semper major sit quàm PQ, eorum tamen differentia Q*q* velociùs multo quàm pro ratione arcûs PQ minuatur. Arcu igitur PQ infinitè imminuto et ad nihilum tandem redacto, Q*q* simul in nihilum abierit; arcus PQ, P*q* fient ultimò æquales; recta *sq* congruet ultimò cum SQ; & pars illa productæ *sq*, quæ à Curvâ et tangente intercepta erit, ipsi TQ fiet ultimò æqualis. Arcu igitur PQ infinitè imminuto, recta TQ et declinatio corporis à recto tramite quam mera vis centripeta in spatiis vacuis, eodem tempore quo generata fuerit TQ, effecisset; hæ rationem sive evanescendo ultimam, sive nascendo primam, ipsam æqualitatem habent. Haud aliâ igitur quantitate nasci poterit recta TQ ac si à merâ vi centripetâ provenisset. Id verò non quasi parva sit vis renixûs ratione vis centralis; sed quia talis sit, quæ mutationem aliquam vis insitæ in corpore moto non nisi lentè admodum et gradatim pariat.

(c) Nimirum si centro S, radio SP, scriptus sit arcus circularis, per punctum V transibit, propter

De Motu Corporum



resistentia, id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$ (e). Detur Spiralis (f), & ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hâc Spirali. Q. E. D.

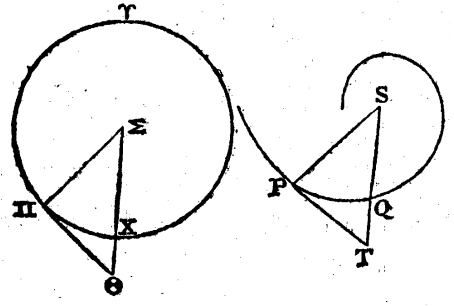
Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est, quâcum corpus, in medio non resistente, eâdem vi centripetâ gyrari potest in Circulo, ad eandem à centro distantiam SP (g).

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP^3}$. Sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP^2}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii

ter æquales sp, sv. Et propter angulum ad v rectum, angulumque pqv, è Spirarum naturâ, datum; figura pqv, quæ arcu spirarum pq, circulari pv, rectâque vq est concluſa, arcubus illis pq, pv, evanescentibus, trianguli cujusdam rectilinearis rectanguli speciem ultimò induet. Dico ipsi pos figuram pqv fieri ultimò similem. Nam cùm rectus sit angulus opq, angulus spq illius ops complementum erit. Verùm ejusdem ops ille sop complimentum. Angulus igitur sop angulo spq æqualis. Sed eidem spq ille pqv è Spirarum naturâ æqualis. Anguli igitur sop, pqv inter se æquales. Triangula igitur pos, pqv, quæ angulos ad s, v rectos, acutosque ad o, q æquales habent, ea omninò inter se similia erunt.

(c) Litera d significetur recta quædam, eâ lege mutabilis ut densitatis semper rationem gerat. Erit igitur $\frac{D}{SP}$ ut reciprocus, id est, ut $\frac{OS}{OP \times SP^2}$. Quare D, sive densitas, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(f) Hoc est, detur angulus ad spiram spq.



(g) Putavires quasdam centrum Σ, in inani constitutum, respicere; tales quæ viribus centrum s, in spatio impedito constitutum, respicientibus, in æqualibus à centro distantiis æquales sint. Circum centrum Σ, radio ΣΠ, cuilibet è Spirarum radiis sp æquali, scribatur circulus Πxv. Dico corporis in spatio impedito per Spiras lati, in loco P, velocitatem velocitati illi æquabili esse æqualem, quâcum corpus in inani circum centrum Σ per circulum Πxv ferretur. Sint enim pq, Πx arcus, illi Spirarum, hic Circuli, eodem tempore confecti; junctæque sq, Σx rectis pt, lΘ, quæ Curvas in punctis P, Π contingant,

Liber Secundus.

Medii densitatem aptari potest (h).

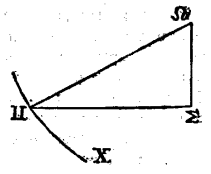
Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$os ad OP. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$Rr & TQ; sive ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$; hoc est, ut $\frac{1}{2}$VQ & PQ, seu $\frac{1}{2}$os & OP. Datâ igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam; & vice versâ ex datâ illâ proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc Spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & Spiralis conveniet cum lineâ rectâ PS; inque hâc rectâ corpus descendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, quâ probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. x. Lib. 1.) descensum in medio non resistente fieri, in subduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium (i). Et tempora descensûs hîc erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur (k).

Corol.

gunt, in punctis T, Θ occurrant. Jam cùm illa TQ, arcui PQ primùm nascenti, à mutâ vi centripetâ provenerit, quòd modò probavimus (Not. c). nascentes primùm TQ, Θx, cùm ab æqualibus viribus centripetis eodem tempore oriundæ sint, erunt inter se æquales. Quare propter sp, ΣΠ inter se æquales, rectangula nascentia 2sp × TQ, 2ΣΠ × Θx, primò quidem inter se æqualia erunt. At verò rectangulo nascenti 2sp × TQ quadratum ex nascente PQ primò est æquale. (Probatur à Lemmate III.) Rectangulo item nascenti 2ΣΠ × Θx quadratum è nascente primò Πx. (Probatur à circulo.) Quadrata igitur è nascentibus PQ, Πx erunt primò inter se æqualia. Quare et nascentes PQ, Πx primò inter se æquales. Velocitates autem corporum, à locis P, Π egredientium, eam inter se rationem habent, quæ arcuum nascentium PQ, Πx inter ipsos prima est. Velocitates igitur in locis illis erunt inter se æquales. Q. E. D.

(h) Nimirum si dentur Spiræ pq *(fig. text. p. 324)* per quas corpus feratur, per materiam, datâ quâdam densitate, in datâ à centro s distantiâ sp, præditam, dabuntur spiræ aliæ Πx *(in figurâ appositâ)* per quas corpus feretur, cui cum materiâ circumfusâ luctandum sit, quæ in aliâ à centro Σ distantiâ datâ ΣΠ, aliam datam densitatem habeat.



Spirarum pq sit radius sp radio ΣΠ spirarum Πx æqualis. A puncto Π eductam puta rectam ΠΩ, quæ Curvam Πx ad perpendiculum insistat, rectæque ΣΩ, à puncto Σ ad perpendiculum cum radio ΣΠ eductæ, in Ω occurrat. Densitates in locis P, Π significentur literis D, Δ. Densitas in loco p literâ *d*. Erit D : *d* = sp : sp. Quare datis sp, sp, datâque etiam densitate D, densitas *d* dabitur. Sed *d* : Δ = os × ΩΠ : ΩΣ × OP. Datarum autem *d*, Δ ratio data. Rectangulorum igitur os × ΩΠ, ΩΣ × OP ratio data. Latera autem os, OP magnitudine data. Quare mutua eorum ratio data. (Dat. 1.) Quare et reliquorum laterum ΩΠ, ΩΣ ratio data. (Dat. 68.) Triangulum igitur ΩΣΠ, cujus angulus ad Σ rectus, specie datum. (Dat. 43.) Angulus igitur ΣΩΠ datus. Sed angulo ΣΩΠ angulus ΣΠx, radio ΣΠ Curvâque interclusus, æqualis est. Angulus igitur spirarum datus. Spiræ igitur specie datæ. Dato igitur centro Σ, radioque ΣΠ magnitudine et positione dato, Spiræ, cùm specie datæ sint, positione etiam dabuntur. Q. E. D.

(i) Per Cor. 1. & Lib. I. Prop. IV. Cor. 6.

(k) Corpora duo rectâ cadant; alterum per inane versus centrum Σ, alterum versus centrum s per

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR, atque in rectâ SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in datâ ratione, nempe in ratione OP ad OS (l); tempus deſcenſûs in Spirali erit ad tempus deſcenſûs in rectâ SP in eâdem illâ data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus, quem Spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum, quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo



per materiam quandam circumfuſam, cujus denſitates diſtantiarum à centro S rationes contrarias ſervent. Ponantur vires, quæ centrum utrumque, Σ & S, reſpiciunt, rationem duplicatam diſtantiarum contrariam ſervare; et vires diverſas ad æquales à centro diſtantias inter ſe æquales eſſe. Ponantur autem ΣΠ, SP inter ſe æquales; et velocitas corporis per inane cadentis, in loco Π, ea ſit, quam caſu infinito locum uſque Π adeptum eſſet; ea verò corporis per materiam circumfuſam cadentis, in loco P, quâcum in ſpatiis vacuis circulum circum centrum S ad diſtantiam SP, ſcribere poſſet. Sint $\dot{\Sigma\pi}$, $\dot{s\rho}$, aliæ corporum à centris diſtantiæ inter ſe æquales. Dicit Newtonus tempus caſûs per rectam $\Pi\pi$ in ſpatio vacuo ad tempus caſûs per æqualem $P\rho$ in ſpatio impedito, rationem habere ſubduplicatam ejus quam unitas ad binarium habet. Tempora cadendi per $\Pi\pi$, $P\rho$ literis Θ, T ſingulatim ſignificentur; velocitates corporum à centris ſuis Σ, S æqualiter diſtantium, literis Υ, V. Erit $\dot{\Pi\pi} : \dot{P\rho} = \Theta \times \Upsilon : T \times V$. Ponantur $\dot{s\pi}$, $\dot{s\rho}$, quæ initio fuerunt $\dot{\Sigma\Pi}$, $\dot{s\rho}$, eâ lege fluere, ut mutabiles $\Sigma\pi$, $s\rho$ ſemper ſint inter ſe æquales. Ita fluxiones, $\dot{\Pi\pi}$, $\dot{P\rho}$, ſemper erunt inter ſe æquales. Ac proinde rectangula $\Theta \times \Upsilon$, $T \times V$ inter ſe æqualia. Quare $\Theta : T = V : \Upsilon$. Sed $V : \Upsilon = 1 : \sqrt{2}$. Quare $\Theta : T = 1 : \sqrt{2}$. Et cùm hæc conſtans ſit fluxionum ratio, fluentibus etiam Θ, T, utpote quæ ſimul generari inceperint, eadem intercedet. Et cùm in omni magnitudine æqualium $\Pi\pi$, $P\rho$, hæc ratio vigeat, vigebit etiam quando æquales $\Pi\pi$, $P\rho$ in totas ΠΣ, PS creverint. Hoc eſt tempus caſûs ab altitudine quâvis ΣΠ centrum uſque Σ in inani, ad tempus caſûs ab æquali altitudine SP centrum uſque S, in ſpatio impedito, rationem habebit ſubduplicatam ejus quam unitas ad binarium habet; modò velocitates, quibuſcum caſus in locis Π, P incipiantur, eæ ſint, quas præſcripſimus. Q. E. D.

(l) Nimirum cùm hæc conſtans ſit fluxionum Curvæ radiique ratio.

(m) Circum centrum S (*fig. p.* 327), quod vires centripetæ reſpiciant, quæ duplicatæ diſtantiarum rationi contrariè reſpondeant, ſcriptos puta circulos ABC, DEF. Spatium illud omne, quod horum circulorum circumflexus undique cingunt, materiâ quâdam intelligatur conſpergi, cujus denſitates in variis locis rationem diſtantiarum à centro S contrariam ſervent. Siquod igitur corpus è loco A projectum fuerit, ſecundum rectam tali angulo ad radium SA inclinatam, quem denſitas materiæ in loco A poſtulaverit; atque eâ cum velocitate, quâcum, urgentibus eiſdem viribus centripetis, per circulum ABC in inani æquabiliter ferretur: corpus, inquam, eo modo è loco A projectum, per ſpiras æquiangulares certæ cujuſdam ſpeciei circa centrum S feretur. Dentur anguli ASG, ASH. Literæ autem x, y numeros quoſdam adhuc incognitos ſignificent. Ac primùm eam puta materiæ in loco A denſitatem, quæ ſpiris æquiangulis, per quas corpori è loco A projecto eundum erit, ſpeciem inducat eam, in quâ radii, angulos qui dato ASG ſint æquales, cum Curvâ faciant. Tales autem ſpiræ, per punctum A ductæ, ad punctum D radii SA pertingant poſtquam centrum S tot gyris cinxerint, quot ſint in numero x unitates. Dein mutatam puta materiæ, quâcum ſpatium circulis intercluſum oppleri poſuimus, denſitatem; tali quidem ratione, ut ſpecies ſpirarum, per quas corpori, è loco A projecto, eundum ſit, in illam tranſeat, cujus radii cum Curvâ angulos faciant dato ASH æquales. Atque tales ſpiræ per punctum A ductæ ad punctum D radii SA perveniant, poſtquam centrum ſuum S tot gyris cinxerint, quot ſint in numero y unitates. Ducatur per A recta AH, quæ circulum ABC in A contingat, et rectis SG, SH datos angulos ASG, ASH, cùm radio SA efficientibus, in punctis G, H occurrant.

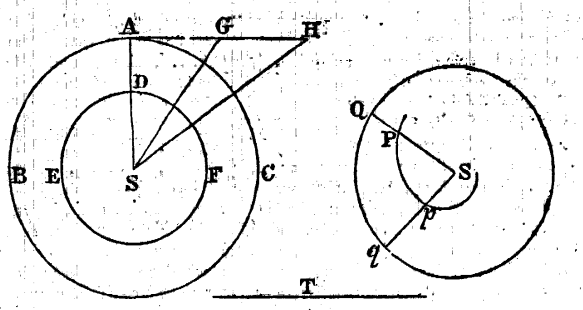
Dicit

gendo in Spirali à circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$; ſive ut tangens anguli illius, quem Spiralis continet cum radio PS; Tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas (m).

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in Curvâ quâcunque AEB circa centrum illud fecerit, & radium primum AS in eodem an-

Dicit Newtonus numerum x ad numerum y rationem habere eam, quam recta AG ad rectam AH. Tempus autem, quo corpus à loco A in locum D per ſpiras primas delatum fuerit, ad tempus, quo delatum fuerit ab eodem loco A in eundem D per ſpiras alteras, rationem habere eam quam recta SG ad rectam SH; ſive eam, quam denſitas poſtremò poſita ad denſitatem primò poſitam. Nos autem oſtendimus quæ Newtonus dicit hoc modo.

Spirarum æquiangularium ea eſt natura, ut ſi duo ex earum radiis, SP, $s\rho$, qui datum quemvis angulum contineant, circulo, datæ cujuſlibet magnitudinis, circum centrum ſpirarum S ſcripto, occurrant, ut in punctis Q, q; tum ſi ſumatur T tangenti anguli quem radii ſpirarum cum curvâ contineant, pro radio SQ, æqualis; arcus Qq à radiis SQ, sq interceptus, rationis ejus quam SP ad $s\rho$ habet, pro modulo T logarithmus erit. (Cotes. Harmon. Menſur. Part I. Prop. VI.)

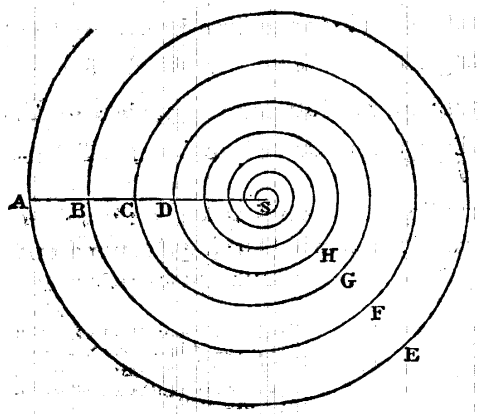


Hæc autem cùm ità ſint, ſi circuli ABC ambitus ſignificetur literâ P, erit utique xP logarithmus rationis, ejus quam SA habet ad SD, pro modulo AG. Erit etiam yP ejuſdem rationis logarithmus pro modulo AH. Ejuſdem autem rationis in ſyſtematis diverſis logarithmi ſunt ut moduli. (Cotes. Harmon. Menſur. Part I. Prop. I. Cor. 3.) Erit igitur xP ad yP ut AG ad AH. Sed xP eſt ad yP ut numerus x ad numerum y. Omninò igitur numerus x ad numerum y ut AG ad AH. Quod primùm demonſtrandum erat.

Jam verò tempus, quo corpus è loco A in locum D tranſferatur per ſpiras quarum angulus ASG, eſt ad tempus quo per ſpatium AD rectâ cecidiſſet, ſi talis fuiſſet materiæ denſitas, quæ vim renixûs vis centripetæ dimidiam effeciſſet, ut GS ad SA (per Cor. 5.) Quia et tempus illud rectâ cadendi per ſpatium AD, ad tempus quo tranſferatur corpus è loco A in locum D per ſpiras quarum angulus ASH, ut SA ad SH (per Cor. 5.) Quare ex æquo tempus per ſpiras primas ad tempus per has alteras, ut SG ad SH. Quod alterum demonſtrandum erat. Denique rationem rectæ SG ad SH denſitatum eſſe contrariam, id quidem ex Cor. 2. ſatis patet.

Stabunt autem hujuſce Corollarii rationes, etiamſi ſpiræ circulum interiorem non ad eundem radium ſecent, ad quem exteriorem ſecuerint, ſed in diverſis locis; puta ſi primæ in E, alteræ in F: modò pro numero converſionum x vel y, longitudo illa ſubſtituatur, quam radii mobilis terminus A, in circuli ſui ABC circumflexu, curſitando emenſus erit, dum corpus per ſpiras ſuas à circulo in circulum tranſlatum fuerit.

gulo



gulo ſecuerit in B quo priùs in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro (id eſt, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & interſectionibus

(n) Ut corpus viribus centripetis incitatum, quæ duplicatæ diſtantiarum rationi contrariè reſpondeant, per ſpiras aliquas feratur ex æquiangularibus; non modò illud neceſſe eſt, ut materiæ circumfuſæ denſitas rationem diſtantiæ à centro contrariam ſervet, ſed etiam ut corpus ex dato loco cum certâ velocitate projiciatur, & ſecundum rectam certo quodam angulo ad radium inclinatam: nempe cum velocitate eâ, quâcum in inani, urgentibus iiſdem viribus centripetis, per circulum ferretur ad eandem à centro diſtantiam (per Cor. 1.); eâ autem ad radium inclinatione, cujus coſinus rationem ad radium habeat, quam dupla vis renixùs ad vim centripetam (per Cor. 3.) Quòd ſi vel aliâ cum velocitate, vel ſecundum rectam aliter ad radium inclinatam, corpus projectum fuerit, fieri nullo modo poteſt, ut per ſpiras aliquas ex æquiangularium genere curſum teneat. At verò per Curvam aliquam. Quænam illa erit? Difficillimam hanc quæſtionem ne omninò intactam videretur reliquiſſe, Newtonus, ut opinor, ſeptimum hoc corollarium poſuit. Nempe fieri poteſt, ut corpus aliter è loco A projectum, quàm quo motus per ſpiras logiſticas præſtari poſſit, Curvam quandam circa centrum S ſcribat, cujus, liceat haud prorſus æquiangularis ſit, data tamen quædam ad radium inclinatio certis locis redeat. Si igitur talis ſit, cujus, cùm ſemel centrum cinxerit, eadem ad radium SA inclinatio redeat, quam in loco A habuit; hoc eſt ſi radium SA eâdem inclinatione in locis duobus A, B ſecuerit, ſi præterea velocitates in locis, A, B, ſubduplicatam radiorum SA, SB rationem contrariè gerant: dicit Newtonus Curvam illam centrum S gyris innumeris cingere, qui omnes ad radium AS ſimiliter inclinati erunt, et radium illum in partes innumeras dividunt, geometricâ ratione inde ab initio decreſcentes. Tempora verò, quibus corpus per hanc Curvam latum orbes ſingulos AEB, BFC, CGD ordine confecerit, rationem habere è ratione longitudinum ipſorum orbium cum ratione velocitatum in locis A, B, C compoſitam; ſive eam, quæ cuborum è radiis AS, BS, CS ſubduplicata erit. Quorum omnium hæc erit demonſtratio.

Perpetua ſi fit inter rectas SA, SB, SC, SD proportionis convenientia, erunt aliquæ ex ſpiris æquiangularibus, quæ, ſi polus eorum ipſi S ſuperimpoſitus eſſet, radius autem ipſi SA æqualis in ipſum radium SA, radios ſuos alios, qui illis SB, SC, SD æquales eſſent cum ipſis SB, SC, SD congruentes haberent; et inter puncta quæque proxima, A, B; B, C; C, D; ſimplici ſemper orbe polum S cingerent. Jam verò vires centripetæ acceleratrices, quibus corpus per Curvam AEB incedens in locis A, B urgetur, eædem ſunt, quæ corpus per ſpiras illas latum in eiſdem locis urgerent. Velocitates item corporis per Curvam AEB incedentis quas in locis A, B, habet, cum eandem inter ſe rationem gerant, quam velocitates corporis quod per ſpiras ferretur, quas in eiſdem locis utique id haberet: permutando, velocitas in Curvâ AEB in loco A, ad velocitatem in loco A in ſpiris, ut velocitas in curvâ AEB in loco B ad velocitatem in loco B in ſpiris. Denſitates etiam materiæ in locis A, B eædem, ſive corpus per Curvam AEB, ſive per ſpiras incedat. Denique cum tam ſpirarum quàm Curvæ eædem ſint in locis A, B, ad radium communem SA inclinationes, eadem ſcilicet in utroque loco Curvæ ad ſpiras inclinatio erit. Motus igitur corporis è loco B egredientis,

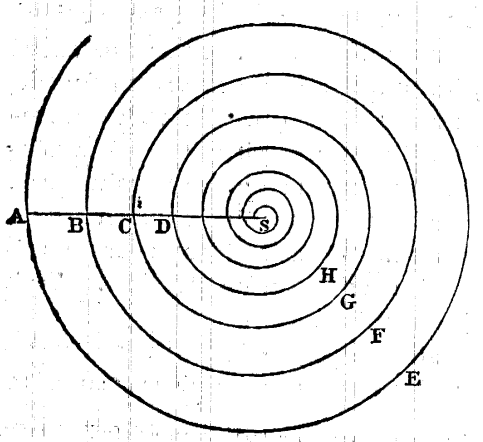
bus diſtinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inverſè; id eſt, ut $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$ (n). Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut ſumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{1}{2}}$; id eſt, ut terminus ille primus $AS^{\frac{1}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{1}{2}} - BS^{\frac{1}{2}}$ (o), ſive ut $\frac{2}{3}$ AS ad AB quàm proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam

dientis, ad motum corporis, cui ex eodem loco egredienti ſecundus ſpirarum orbis ſcribendus eſſet, eodem planè modo ſe habet, quo motus corporis è loco A egredientis ad motum corporis ſe habuit, cui, cùm ex eodem loco egrederetur, per primum ſpirarum orbem eundum eſſet. Vires etiam illæ omnes, quibus corpori è loco B egredienti obtemperandum eſt, ad vires illas, quæ motum per ſecundum ſpirarum orbem præſtarent, eodem modo ſe habent, quo vires, quibus corpori è loco A egredienti obtemperandum erat, ad vires quæ motum per ſpirarum orbem primum præſtarent. Fieri igitur nequit, cùm in rerum naturâ nihil ſine ratione fiat, quin corpus è loco B egreſſum per Curvam quandam feratur, cui cum orbe ſpirarum ſecundo eadem planè cognatio intercedat, quæ Curvæ AEB cum orbe illarum primo. Unde etiam Curva illa BFC cum ſecundo ſpirarum orbe in loco C iterum concurret, et tam radium communem ſe quàm ſpiras eiſdem angulis in C, quibus in B vel A, ſecabit. Et ſimilibus planè argumentis efficietur corpus è loco C egreſſum per tertium quendam orbem ferri, cui cum orbe ſpirarum tertio eadem cognatio intercedat, quæ orbibus AEB, BCD cum ſpirarum orbibus primo et ſecundo: et è loco C egreſſum corpus per orbem quartum CGD feretur cum orbe ſpirarum quarto ſimiliter cognatum. In ſummâ, Curva, per quam corpus feretur, centrum S orbibus innumeris cinget; qui ſpirarum orbibus innumeris in punctis A, B, C, D ordine occurrentes, radium primum SA, in innumeros SA, SB, SC, SD ratione geometricâ decreſcentes neceſſario dividet. Et cùm innumeri illi hujus Curvæ orbes ſpirarum innumeros ſimili inclinatione ſingulatim ſecent, ad radium etiam illi omnes in interſectionum punctis ſimiliter inclinati erunt.

Præterea ex ſimili orbium omnium Curvæ ad ſpirarum orbes, ſi ordine conferantur, cognationes, ſequitur orbibus Curvæ, primo, ſecundo tertio, innumeriſque deinceps aliis, eaſdem planè inter ipſos rationes intercedere, quæ ſpirarum orbibus primo, ſecundo, tertio innumeriſque deinceps aliis: quin et tempora, quibus Curvæ orbes conficientur, temporum, quibus ſpirarum orbes conficiendi eſſent, rationem inter ſe ſervare. Nam cùm ex orbium, Curvæ ſpirarumque, ſeu cognatione ſeu diverſitate omnis temporum ſeu cognatio ſeu diverſitas proveniat, ex ſimili orbium cognatione ſimiles planè temporum ſeu cognationes ſeu diverſitates venerint. Tempus igitur quo conficitur orbis AEB erit ad tempus quo conficitur orbis BFC, ut tempus quo primus ſpirarum orbis ad tempus quo ſecundus conficiendus eſſet. Sed tempus quo primus conficeretur ſpirarum orbis ad tempus quo ſecundus rationem habet è ratione longitudinis orbis primi ad longitudinem orbis ſecundi, cum contrariâ velocitatum in locis A, B ratione compoſitam. Nimirum cùm orbes inter ſe ſunt ſimiles, dataque ſit velocitatum ratio, quibus ſimilium illorum orbium partes omnes ſimiles conficiendæ eſſent. Sed longitudines orbium, propter ſimilitudinem eorum inter ſe, ſunt ut radii SA, SB. Et velocitatum contraria ratio radiorum SA, SB ſubduplicata erit. Quare ratio ex hiſce compoſita cuborum è radiis SA, SB eſt ſubduplicata. Tempus igitur quo primus ſpirarum orbis conficeretur ad tempus quo ſecundus, ac proinde tempus quo conficitur orbis AEB, ad tempus quo orbis alter BFC, rationem habet quam $SA^{\frac{1}{2}}$ ad $SB^{\frac{1}{2}}$. Q. E. D. *Horum demonſtrationem ex eiſdem principiis arceſſiverunt doctiſſimi Patres Le Sœur & Jacquier.*

(o) Vide Analyſ. per Æquat. Infinit. Not. 2.



quamcunque legem assignatam observat. Centro S, intervallis continuè proportionalibus SA, SB, SC, &c. describe circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quàm proximè: sed & in eâdem quoque ratione esse secantem anguli, quo Spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium AS, ad secantem anguli quo Spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes, ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quàm proximè. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus, quibus modis ac temporibus corpora, in medio quocunque regulari, gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descriptâ, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

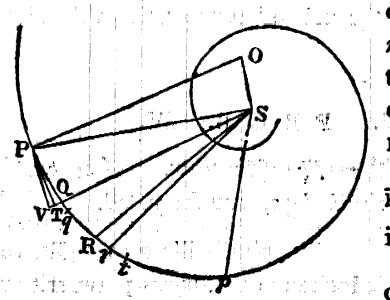
PROP.

(p) Nimirum ex eo quòd tempus quo conficitur arcus PQ fit ultimò ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, sequitur velocitatem in loco P esse ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$. Arcus autem evanescentes PQ, QR eam ultimam inter se rationem habent, quam velocitates in punctis P, Q. Hoc est PQ : QR ultimò $= SQ^{\frac{1}{2}n} : SP^{\frac{1}{2}n}$. Coeuntibus autem punctis P, Q, ut illa SQ, SP, vel SV, ultimò æquales fiant; erit $SQ^{\frac{1}{2}n}$ ad $SP^{\frac{1}{2}n}$ ultimò ut SQ ad $SQ + \frac{1}{2}nQY$. Unde PQ : QR ultimò $= SQ : SQ + \frac{1}{2}nVQ$. Rursum cùm æquales sint areæ PSQ, QSr, angulique SPQ, SQr inter se æquales; cùm præterea areæ illæ evanescentes triangulorum rectilinearium rationem inter se ultimò æquales: idcirco PQ erit ad Qr ultimò ut QS ad SP. (El. vi. 15.) Cùm igitur fit PQ ad QR ultimò ut SQ ad $SQ + \frac{1}{2}nVQ$, et PQ ad Qr ultimò ut SQ ad SP vel $SQ + VQ$: erit (per El. v. 24) PQ ad Rr ultimò ut SQ ad $VQ - \frac{1}{2}nVQ$. Unde $Rr = \frac{1-\frac{1}{2}n \cdot VQ \times PQ}{SQ}$. Jam verò id quo arcus PQ propter renixum brevior redditur, sive ejus duplum, Rr, rationem servabit è ratione vis renixûs cum duplicatâ temporis compositam. Quare vis renixûs erit ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$; hoc est, pro Rr æquali ejus substituto, ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \cdot VQ}{PQ \times SQ \times SP^n}$: id est, propter SQ, SP ultimò inter se æquales ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \cdot VQ}{PQ \times SP^{n+1}}$.

PROP. XVI. THEOR. XIII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quòd corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eâdem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciprocè ut distantiæ, SP, dignitas quælibet, SP^{n+1}, cujus index est $n+1$: colligetur ut suprà, quòd tempus, quo corpus describit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, sive ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ (p), ideoque ut $\frac{1-\frac{1}{2}n \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$; hoc est, ob datum $\frac{1-\frac{1}{2}n \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cùm velocitas sit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciprocè ut SP^n.



Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam ut $1-\frac{1}{2}n \times OS$ ad OP (q).

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciprocè ut SP^n *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in Propositione nonâ Libri Primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur (r).

(q) Id enim eodem modo ostendatur quo Corollarium tertium Propositionis præcedentis.

(r) Fieri igitur nequit, ut corpus per materiam renitentem in spirâ æquiangulari iter faciat, si vires centripetæ potestatis alicujus distantiarum, quæ cubicâ altior sit, contrariam rationem gerant.

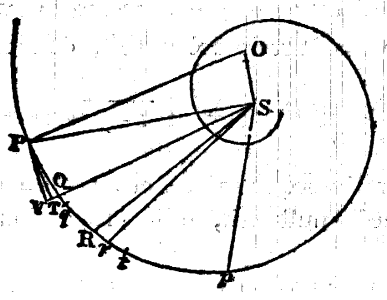
De Motu Corporum

Scholium.

Cæterùm hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quàm ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque, cæteris paribus, denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROP. XVII. PROB. IV.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ Spirali, datâ velocitatis lege, revolvi poteſt.



Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus; & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum, PSQ & QSR, differentiâ RS*r*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas medii.

PROP. XVIII. PROB. V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, quâ corpus datam Spiralem deſcribet.

Ex vi centripetâ invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii denſitas; ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum verò tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propoſitione

Liber Secundus.

poſitione decimâ, & lemmate ſecundo; & lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutiùs detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentiâ Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

SECTIO V.

De denſitate & compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtaticâ.

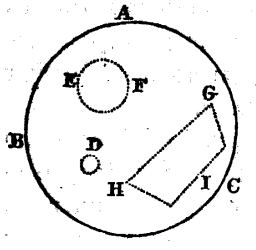
Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facilè moventur inter ſe.

PROP. XIX. THEOR. XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.

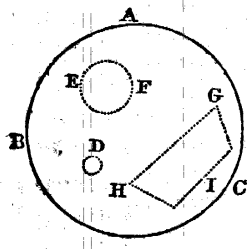
Caſ. 1. In vaſe ſphærico, ABC, claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico, quòd ejuſdem pars nulla ex illâ preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua D moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui à preſſione illâ oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propiùs accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longiùs ob eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervatâ ſuâ à centro diſtantiâ moveri in



plagam

plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. Q. E. D.

Caſ. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim EF pars ſphærica fluidi; & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſò dicebatur, quòd ſphæra EF non undique premebatur æqualiter. Q. E. D.



Caſ. 3. Dico præterea, quòd diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuò premunt æqualiter in puncto contactûs, per motûs Legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eâdem vi. Q. E. D.

Caſ. 4. Dico jam, quòd fluidi partes omnes undique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt à partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per Caſum 3, & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. Q. E. D.

Caſ. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet, GHI, in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuò æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt, quòd fluidi cujuſcunque, GHI, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuò premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. Q. E. D.

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

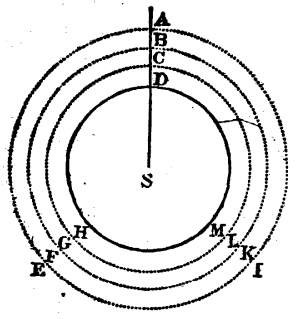
Caſ.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primùm à parte magis preſſâ recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuò prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. Q. E. D.

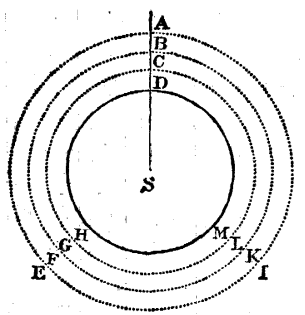
Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externâ ſuperficie illatam, mutari poſſunt; niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes, intenſiùs vel remiſſiùs ſeſe premendo, difficiliùs vel faciliùs labuntur inter ſe.

PROP. XX. THEOR. XV.

Si fluidi ſphærici, & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis, partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



Sit DHM ſuperficies fundi, & AEI ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris BFK, CGL diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema AE vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & omnes orbis ſupremi partes, & ſuperficies ſecunda BFK (per Prop. XIX.) pro menſurâ ſuâ æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda BFK vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem



preſſionem duplam. Hâc preſſione, pro menſurâ ſuâ, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione triplâ, urgetur ſuperficies tertia CGL. Et ſimiliter preſſione quadruplâ urgetur ſuperficies quarta, quintuplâ quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur, quâ ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati Solidi, cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modò orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis à ſuperficie infimâ ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. Q. E. D. Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quâvis aſſignatâ diſtantiæ à centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet, quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit horizonti parallela, vel perpendicularis, vel obliqua; ſive fluidum, à ſuperficie preſſâ ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit obliquè per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maximè irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem theorematis hujus ad caſus ſingulos fluidorum.

Corol. 3. Eâdem demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quòd fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe; ſi modò excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc Fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt, manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt, manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido liberè innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret, & indueret formam fluidi; hoc, ſi priùs aſcenderet, vel deſcenderet, vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet, vel deſcenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus, cæteræque motuum cauſæ, permanent. Atqui (per Caſ. 5. Prop. XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & priùs.

Corol. Proinde corpus, quod ſpecificè gravius eſt quàm Fluidum ſibi contiguum, ſubſidebit; & quod ſpecificè levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſûs, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutrâ Libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in Fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera Vera & Abſoluta, altera Apparens, Vulgaris & Comparativa. Gravitas Abſoluta eſt vis tota, quâ corpus deorſum tendit: Relativa & Vulgaris eſt exceſſus gravitatis, quo corpus magis tendit deorſum quàm fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum, & corporum omnium, gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis; id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ præ-

De Motu Corporum

gravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quàm exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minùs gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparativè levia ſunt, non verè, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparativè & apparenter gravia vel levia; & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus, quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ, vel ab eâ ſuperatur. Quæ verò nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aquâ. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de Gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortiùs; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur leviùs, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cùm autem Fluida, premendo corpora incluſa, non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (per Corollarium Prop. XIX.) quòd non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora à compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis Fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent Gravitatem ſuam Comparativam; niſi quatenus Fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

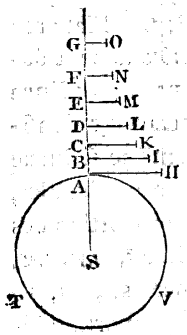
PROP.

Liber Secundus.

PROP. XXI. THEOR. XVI.

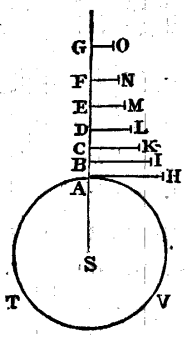
Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ diſtantiis ſuis à centro reciprocè proportionali deorſum trabantur: dico quòd, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continuè proportionales, denſitates Fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continuè proportionales.

Deſignet ATV fundum ſphæricum cui Fluidum incumbit; S centrum; SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. diſtantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E, F; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis



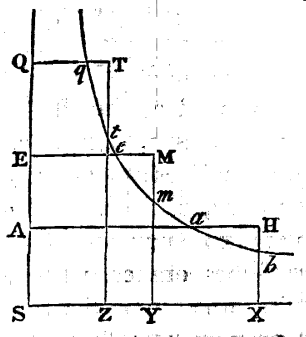
per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD, &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, &c. quibus fundum ATV (juxta Theorema XV.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps: ideoque particulæ primæ A denſitas AH eſt ad particulæ ſecundæ B denſitatem BI ut ſumma omnium AH + BI + CK + DL, in infinitum, ad ſummam omnium BI + CK + DL, &c. Et BI denſitas ſecundæ B eſt ad CK denſitatem tertiæ C, ut ſumma omnium BI + CK + DL, &c. ad ſummam omnium CK + DL, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (per hujus Lem. I.) proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continuè proportionales. Quare cùm denſitates in locis A, B, C, &c. ſint ut AH, BI, CH, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per ſaltum, & ex æquo in diſtantiis SA, SC, SE continuè proportionalibus, erunt denſitates AH, CK, EM continuè proportionales.

De Motu Corporum



tionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, densitates, AH, DL, GO, erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eò ut progressio gravitatum specificarum à fundo A ad summitatem Fluidi continua reddatur; & in distantiis quibusvis continuè proportionalibus, SA, SD, SG, densitates, AH, DL, GO, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q. Centro S, Asymptotis rectangulis SQ, SX describatur Hyperbola secans perpendicula AH, EM, QT in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula HX, MY, TZ, ad Asymptoton SX demissa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *Ymtz* ad aream datam *Ymhx* ut area data *EeqQ* ad aream datam *Eea*A; & linea *Zt* producta abscindet lineam QT densitati proportionalem. Namque si lineæ SA, SE, SQ sunt continue proportionales, erunt areæ *EeqQ*, *Eea*A æquales; & inde areæ his proportionales *Ymt*Z, X*hm*Y etiam æquales, & lineæ SX, SY, SZ, id est, AH, EM, QT, continuè proportionales, ut oportet. Et si lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in serie continuè proportionalium,



(a) Hujus constructionis in eo posita est ratio, quòd ad omnes à centro distantias logarithmi rationum inter densitates cum rationum inter ipsas distantias logarithmis ratione conveniant. Inter distantias enim quasvis datas SA, SE (in fig. Sup.) capiantur quot libuerit continuâ proportione mediæ SB, SC, SD. Erunt igitur densitates BI, CK, DL, inter densitates AH, EM, continuâ proportione mediæ. Logarithmi rationum, quæ distantiis SA, SE, densitatibus AH, IB intercedunt, significentur literis L, A. Quot verò sumptæ fuerint distantiæ SB, SC, SD, inter duas SA, SE, continuâ proportione mediæ, tot sint in numero $m-1$ unitates. Erit igitur mL logarithmus rationis quæ distantiis SA, SE intercedit. Cùm verò inter densitates AH, EM tot sint aliæ BI, CK, DL continuâ proportione mediæ, quot inter distantias SA, SE distantiæ; idcirco tot erunt densitates BI, CK, DL inter duas AH, EM continuâ proportione mediæ, quot sunt in numero $m-1$ unitates. Quare mA rationis ejus, quæ densitatibus AH, EM intercedit, erit logarithmus. Jam verò $mL : mA = L : A$. Logarithmus igitur rationis inter distantias SA, SB, ad logarithmum rationis inter densitates AH, BI eandem rationem habet, quam logarithmus inter rationis distantias SA, SE ad logarithmum rationis inter densitates AH, EM. Nec huic rationi officiet distantiarum, quæ inter datas SA, SE, mediæ sumptæ fuerint, multitudo, parva illa magnave fuerit. Quare et numero earum infinitè aucto, ut partes AB,

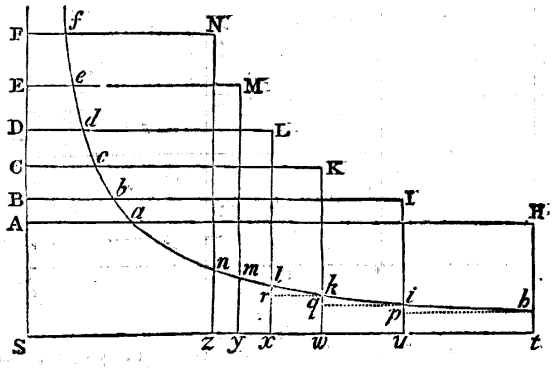
Liber Secundus.

um, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in aliâ serie quantitatum continuè proportionalium (a).

PROP. XXII. THEOR. XVII.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis distantiarum suarum à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quòd, si distantiæ sumantur in progressione Musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione Geometricâ.

Designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in pro-



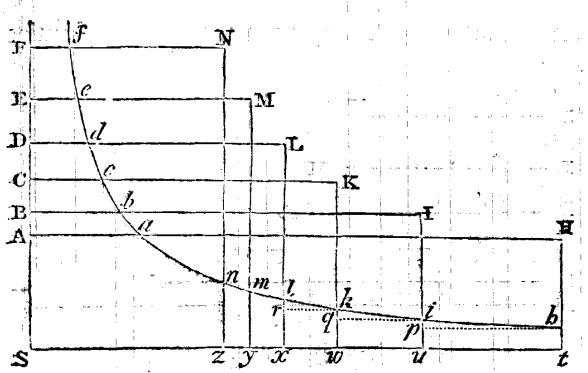
gressione Geometricâ. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ sint ut Fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipsius

AB, BC, CD, DE, necnon densitatum AH, BI, CK, DL, EM differentiæ evanescant; inter evanescentes logarithmos, L, A, ratio data logarithmi rationis inter distantias SA, SE, ad logarithmum rationis inter densitates AH, EM vel ultimò manebit. Quæ verò logarithmi evanescentis L ad evanescentem A ultima est ratio, ea fluxionis logarithmi inter distantias ad fluxionem logarithmi inter densitates ratio erit. Quare fluxionibus hisce data ratio intercedet logarithmi rationis inter distantias datas SA, SE, ad logarithmum rationis inter densitates datas AH, EM. Eadem igitur fluentium inter ipsas ratio erit. Logarithmi igitur rationum inter densitates eorum, qui rationum inter distantias sunt logarithmi, rationem constanter servabunt. Jam verò in lineatione Newtoni *(vid. fig. Cor.)* positis SA, SE, SQ distantiis, si AH, EM, QT sint inter se ut densitates in distantiis illis; spatia hyperbolica *aAEe*, *eEQq* rationum inter distantias SA, SE, SQ erunt logarithmi: item spatia hyperbolica *b*XYM, Y*mtz* rationum inter densitates AH, EM, QT logarithmi. Quare Y*mtz* : *b*XYM = *eEQq* : *Eea*A. Datis autem tribus distantiis SA, SE, SQ, cum densitatibus duabus AH, EM, spatia tria *Eea*A, *eEQq*, *b*XYM magnitudine data sunt. Quare tertii *b*XYM ad quartum Y*mtz* ratio data. Spatium igitur Y*mtz* magnitudine datum. Quare rectâ etiam SY magnitudine datâ, dabitur magnitudine SZ, et illi æqualis QT (per Excerpt. ex Epist. 4. § 7.)

gravitates

De Motu Corporum

gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SA_q}$, $\frac{BI}{SB_q}$, $\frac{CK}{SC_q}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam à B ad C, tertiam à C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm denſitates ſunt ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum AH−BI, BI−CK, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, Aſymptotis SA, S*x* deſcribatur Hyperbola quævis, quæ ſecet per-



pendicula AH, BI, CK, &c. in *a*, *b*, *c*, &c. ut & perpendicula ad Aſymptoton S*x* demiſſa H*t*, I*u*, K*w* in *h*, *i*, *k*; & denſitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu *tp*, *uq*, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id eſt, ut A*a*, B*b*, &c. Eſt enim, ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel S*t*, ut *th* ad A*a*, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale A*a*. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale B*b*, &c. Sunt autem A*a*, B*b*, C*c*, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis A*a*−B*b*, B*b*−C*c*, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula

(b) Nimirum è naturâ hyperbolæ D*d* erit ad F*f* ut SF ad SD. Unde D*d*−F*f* : F*f* = FD : SD. Sed F*f* : A*a* = SA : SF. Et SA : SF = AD : DF propter progreſſionem muſicam. Quare F*f* : A*a* = AD : DF. Cùm igitur ſit D*d*−F*f* : F*f* = FD : SD, et F*f* : A*a* = AD : DF : ex æquo perturbatè D*d*−

Liber Secundus.

gula *tp*, *uq*, &c. ut & ſummis differentiarum A*a*−C*c* vel A*a*−D*d* ſummæ rectangulorum *tp*+*uq* vel *tp*+*uq*+*wr*. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta A*a*−F*f*, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta *zthn*, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ *zthn*, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia A*a*−F*f*. Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progreſſione Muſicâ, & differentiæ A*a*−D*d*, D*d*−F*f* erunt æquales (b); & propterea differentiis hiſce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter ſe, & denſitates S*t*, S*x*, S*z*, id eſt, AH, DL, FN, continuè proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi dentur Fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area *thiu*, harum differentiæ *tu* reſpondens; & inde invenietur denſitas FN in altitudine quâcunque SF, ſumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thiu* ut eſt differentia A*a*−F*f* ad differentiam A*a*−B*b*.

Scholium.

Simili argumentatione probari poteſt, quòd ſi gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicatâ ratione diſtantiarum à centro, & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SA_q}$, $\frac{SA\ cub.}{SB_q}$, $\frac{SA\ cub.}{SC_q}$) ſumantur in progreſſione Arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometricâ. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SA_{qq}}{SA\ cub.}$, $\frac{SA_{qq}}{SB\ cub.}$, $\frac{SA_{qq}}{SC\ cub.}$, &c.) ſumantur in progreſſione Arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometricâ. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum Fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione Arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione Geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſ-

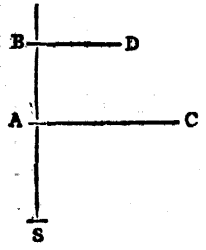
D*d*−F*f* : A*a* = AD : SD. Quare rectangula D*d*−F*f* × SD et A*a* × AD inter ſe æqualia. Rurſum, propter hyperbolam, A*a* : A*a*−D*d* = SD : AD. Quare rectangula $\overline{Aa-Dd} \times SD$ et A*a* × AD inter ſe æqualia. Rectangula igitur $\overline{Dd-Ff} \times SD$, $\overline{Aa-Dd} \times SD$ inter ſe æqualia. Quare A*a*−D*d*, D*d*−F*f* inter ſe æquales.

De Motu Corporum

sione Arithmeticâ, densitates erunt in progressione Geometricâ. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi, compressione condensati, densitas est ut vis compressionis; vel, quod perinde est, spatium à Fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges; ut quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ à centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, densitas erit reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ.

(c) Sed omnes generatim in duas Formulas concludam.

Sit s centrum ad quod gravia tendant; sa distantia quælibet data, per literam a designanda; sb alia quælibet, generaliter designanda per literam x. Ea verò vis centripetæ sit conditio, ut potestatis cujusdam è distantiâ, cujus index sit m, rationem ea semper servet. Nimirum ut vis centripeta in loco A sit ad vim centripetam in loco B ut SA^m ad SB^m, existente nimirum indice m vel positivo vel negativo, integro vel fracto, modò non sit -1. Jam si vis centripeta in loco dato A exponatur per rectam SA, vis centripeta in loco quovis alio exponetur per rectam $\frac{SB^m}{SA^{m-1}}$; cujus hoc erit symbolum algebraicum $\frac{x^m}{a^{m-1}}$. Ponatur recta AC cujusvis magnitudinis. Et sit alia BD, quæ ad datam AC rationem habeat, quam densitas in loco B ad datam in loco A densitatem. Rectaque BD generaliter designetur literâ y. Jam cùm gravitas, in loco quovis B, symbolo $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ generaliter



significetur, hoc alio $\frac{x^m}{a^m}y \times \dot{x}$, fluxionem vis comprimentis generaliter designare liceat. Quare si talis ponatur densitas materiæ fluidæ, quæ vis comprimentis rationem ubique servet, cùm fluxio quoque densitatis fluxionem vis comprimentis rationem servare debeat, ponere licebit $\frac{x^m}{a^m}y\dot{x} = b\dot{y}$ designante nimirum illâ b rectam quandam justæ magnitudinis. Quare $\dot{y} : \frac{x^m}{a^m}\dot{x} = y : b$. Sive $\dot{y} : \frac{\dot{x^{m+1}}}{m+1.a^m} = y : b$. Quare $\frac{1}{m+1}\frac{SB^{m+1}}{SA^m} - \frac{1}{m+1}SA$ logarithmus erit rationis ejus quam BD habet ad AC, sive densitas in loco B ad densitatem datam in loco A, pro modulo b. Unde si tales sumantur distantiæ SB, ut earum potestates per quantitatem $m+1$ indicatæ arithmeticè usque crescant, densitatum progressio Geometrica erit.

2. Reliquis manentibus, talis ponatur densitas, quæ non simplici vis comprimentis rationi, sed rationi potestatis alicujus à vi comprimente constanter respondeat. Ejus potestatis index sit n, positivus quivis sive integer sive fractus, modò non sit $+1$, neve 0. Neque omninò negativum ponere liceat indicem n, ne rarior esset materia fluida, quæ majore vi comprimeretur: qualem ullius materiæ conditionem rerum natura ægrè, ut opinor, patiatur. Designet litera c rectam quandam eâ

Liber Secundus.

tantiæ. Fingatur quòd vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ, & densitas erit reciprocè ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset (c). Cæterùm per experimenta constat, quòd densitas Aeris sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quàm proximè: & propterea densitas Aeris in Atmosphærâ Terræ est ut pondus Aeris totius incumbentis; id est, ut altitudo Mercurii in Barometro.

eâ lege mutabilem, ut vis comprimentis rationem ea semper gerat. Erit igitur BD vel y ut c^n, et $\dot{y}$ ut $nc^{n-1}\dot{c}$; adeoque, dato n, ut $c^{n-1}\dot{c}$. Hoc est, cùm y^n sit ut c, ac proinde $y^{\frac{n-1}{n}}$ ut c^{n-1}, $\dot{y}$ erit ut $y^{\frac{n-1}{n}}\dot{c}$. Ponere igitur licebit $\dot{y} = \frac{y^{\frac{n-1}{n}}}{b^{\frac{n-1}{n}}}\dot{c}$, sive $\frac{b^{\frac{n-1}{n}}}{y^{\frac{n-1}{n}}}\dot{y} = \dot{c}$, designante b rectam quandam justæ magnitudinis. (*Geom. Flux. Def. 5.*) At verò talis inveniebatur fluxio vis comprimentis, quæ rectanguli illius $\frac{x^m}{a^m}y\dot{x}$ rationem constanter servaret. Quare recta c talis esse debet, quæ hujus rectanguli rationem servet. Unde ponere licet $ac = \frac{x^m}{a^m}y\dot{x}$. Unde efficietur $\frac{x^m}{a^m}y\dot{x} = \frac{a.b^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}}\dot{y}$. Sive $\frac{x^m}{a^m}\dot{x} = \frac{a.b^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}y^{\frac{n-1}{n}}}\dot{y}$. Et ex hâc fluxionum æquatione hæc alia fluentium veniet, $\frac{x^{m+1}}{m+1.a^m} = \frac{a.b^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}y^{\frac{n-1}{n}}}$; modò illud generaliter obtineat, distantiâ x infinitè auctâ, densitatem item sensim imminui; ut datâ quâvis tandem minor fiat: è contrario, distantiâ in nihilum redactâ, densitatem omni datâ ultimò majorem fieri. At si verè ponatur æquatio illa, distantiarum potestates, à quantitate $m+1$ indicatæ, earum à densitatibus potestatum, quas quantitas $\frac{n-1}{n}$ indicaverit, rationem contrariam gerent.

Jam si in casu primo pro n numeri -3, -4, 0, 1 ordine substituantur; in casu autem secundo si pro m scribatur -2, & pro n quantitates $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ordine subrogentur, veriffima invenientur ea quæ, in casu utroque, à Newtono affirmata sunt.

Cæterùm in casu secundo necesse est ut quantitates $m+1$, $\frac{n-1}{n}$ eidem prædita sint signo. Nam si contraria fortè gerant, fieri nequit ut distantiâ infinite auctâ densitas in nullam abeat; & viciffim, distantiâ infinitè imminutâ, ut densitas infinitè crescat.

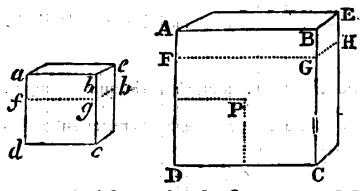
Formulas generales, nostrarum haud multum abfimiles, post Varignonium, patres Doctissimi Le Seur & Jacquier ad locum posuerunt.

De Motu Corporum

PROP. XXIII. THEOR. XVIII.

Si Fluidi, ex particulis ſe mutuò fugientibus compoſiti, denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice verſâ, particulæ viribus, quæ ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum, ſe mutuò fugientes componunt Fluidum Elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico ACE; dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*: & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, diſtantiæ erunt ut euborum latera AB, *ab*; & Mediorum denſitates reciprocè ut ſpatia continentia AB, *cub.* & *ab cub.* In cubi majoris latere plano, ABCD, capiatur quadratum, DP, æquale lateri plano cubi minoris, *db*; & ex hypotheſi, preſſio, quâ quadratum DP urget Fluidum incluſum, erit ad preſſionem, quâ illud quadratum *db* urget Fluidum incluſum, ut Medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *ab cub.* ad AB *cub.* Sed preſſio, quâ quadratum DB urget Fluidum incluſum, eſt ad preſſionem, quâ quadratum DP urget idem Fluidum, ut quadratum DB ad quadratum DP, hoc eſt, ut AB *quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex æquo, preſſio quâ quadratum DB urget Fluidum, eſt ad preſſionem quâ quadratum *db* urget Fluidum, ut *ab* ad AB (d). Planis FGH, *fgb*, per media cuborum ductis, diſtinguatur Fluidum in duas partes; & hæ ſe mutuò prement iiſdem viribus, quibus premuntur à planis AC, *ac* (e), hoc eſt, in proportione *ab* ad AB: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones



(d) Nempe cùm ſit preſſus quadrati DB ad preſſum quadrati DP, ut AB^2 ad ab^2, ſive ut ſolidum $AB^2 \times ab$ ad ab^3; cùm ſit etiam preſſus quadrati DP ad preſſum quadrati *db* ut ab^3 ad AB^3, ex æquo erit preſſus quadrati DB ad preſſum quadrati *db* ut ſolidum $AB^2 \times ab$ ad AB^3, hoc eſt, ut recta *ab* ad rectam AB.

(e) Per Prop. XIX.

(f) Litera E ſignificetur denſitas liquoris in ſpatium cubicum *ade* coacti; literâ *e* minor ejuſdem liquoris denſitas, quâ ſpatium amplius cubicum ADE impleat. Jam ſi tales ponantur vires, quibus efficitur ut ſolida liquoris corpuſcula ſe mutuò fugiant, quæ earum à centrorum diſtantiis poteſtatum, quæ numero *n* indicatæ ſint, rationem contrariam gerant, vires

Liber Secundus.

ſiones ſuſtinentur, ſunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires, quas particulæ omnes ſecundum plana FGH, *fgb* exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *fgb* in cubo minore, ut *ab* ad AB, hoc eſt, reciprocè ut diſtantiæ particularum ad invicem. Q. E. D.

Et vice verſâ, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciprocè ut diſtantiæ, id eſt, reciprocè ut cuborum latera AB, *ab*; ſummæ virium erunt in eâdem ratione, & preſſiones laterum DB, *db* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut *ab quad.* ad AB *quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad AB *cub.* id eſt; vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. Q. E. D.

Scholium.

Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si vires centrifugæ ſint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantiâ, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciprocè ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis $E^{\frac{n+2}{3}}$, cujus index eſt numerus $n+2$: & contrà (f). Intelligenda verò ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis, quæ terminantur in particulis proximis; aut non longè ultrà diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in ſui generis corporibus ſibi proximis.

vires illæ ſimilium à rectis *ab*, AB poteſtatum contrariam rationem gerent; et preſſus quadrati *db* erit ad preſſum quadrati DB ut AB^n ad ab^n. Quare cùm ſit preſſus quadrati DB ad preſſum quadrati DP ut AB^2 ad ab^2, rationes haſce componendo, efficietur preſſus quadrati *db* ad preſſum quadrati DP ut AB^{n+2} ad ab^{n+2}. Sed $E : e = AB^3 : ab^3$. Ergo $AB : ab = E^{\frac{1}{3}} : e^{\frac{1}{3}}$. Et AB^{n+2} ad ab^{n+2} ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$. Quare preſſus quadrati *db* ad preſſum quadrati DP ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

De Motu Corporum

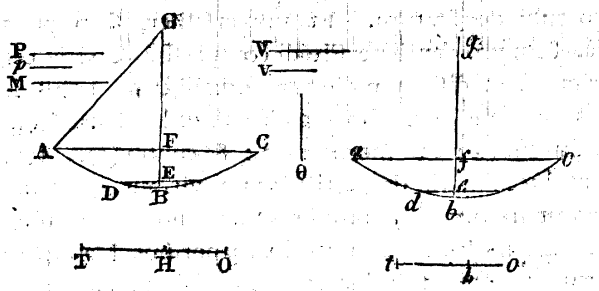
proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à Magnete quàm à laminâ trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur Fluida, de quibus actum est in hâc Propositione. Quòd si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. An verò Fluida Elastica ex particulis se mutuò fugantibus constent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematicè demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De Motu & Resistentiâ Corporum Funependulorum.

PROP.

(a) Corpora pendula, centris G, *g*, funibus æqualibus GB, *gb*, suspensa, arcus ABC, *abc*, vel circulares vel alios quoslibet, dummodo similes inter se sint & æquales, centris oscillationum B, *b*, in spatiis vacuis oscillando describant. Arcuum ABC, *abc* sumantur partes quævis inter se similes et æquales, & similiter in totis positæ, AD, *ad*. Dicit Newtonus tempora, quibus conficiuntur



arcus AD, *ad*, eandem inter se habere rationem, quam tempora quibus arcus integri ABC, *abc* conficiendi sunt. Dicit etiam velocitates corporum in locis D, *d* rationem inter se habere è rationibus virium motricûm et temporum, quibus arcus integri ABC, *abc* conficiuntur, cum contrariâ materiæ ratione compositam.

Primum verò quod dicit Newtonus, id nos ostendimus hoc modo.

Exponatur recta P datæ cujusvis longitudinis. Capiatur alia *p*, quæ ad illam B rationem habeat, quam pondus corporis *b* ad pondus corporis B. Capiatur etiam alia M, quæ habeat ad *p* rationem eam, quam materia corporis B ad materiam corporis *b*. Sint V, v rectæ eâ lege mutabiles, ut in omni magnitudine arcuum æqualium AD, *ad*, illæ V, v velocitatum in locis D, *d* inter

Liber Secundus.

PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum à centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major est vis, vel majus tempus, vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motûs Legem secundam manifestum est. Jam verò si Pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices, in locis à perpendiculo æqualiter distantibus, sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cùm tempora, quibus corpora describant singulas arcúum partes correspondentes, sint ut tempora oscillationum totarum; erunt velocitates ad invicem, in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè (a): ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum

inter se rationem servent. Sint aliæ etiam rectæ TH, *th*, eâ lege mutabiles, ut temporum, quibus conficiantur arcus æquales AD, *ad*, hæ rationem servent. Et quando arcus illi in integros creverint, rectæ TH, *th* longitudines TO, *to* sint adeptæ; arcubus autem illis primùm nascentibus, eum temporibus, quibus arcus nascentes conficiuntur, in nihilum ipsæ singulatim abeant. Ostendere oportet rectas TH, *th* cum illis TO, *to* proportione convenire. In rectas BG, *bg*, quæ à punctis arcuum ABC, *abc* mediis, ad perpendiculum fuerint erectæ, ducantur ab arcuum principiis A, *a*, nec non à punctis D, *d*, rectæ AF, *af*, DE, *de*, cum plano horizontis parallelæ. Jam arcuum AD, *ad* fluxiones rationem inter se habebunt, è ratione velocitatum in locis D, *d*, cum eâ quæ temporum, quibus arcus illi conficiuntur, fluxionibus intercedit, compositam. Hoc est $\dot{\overline{AD}} : \dot{\overline{ad}} = V \times \dot{\overline{TH}} : v \times \dot{\overline{tb}}$. At verò cùm talia semper sint tempora TH, *th*, ut arcus AD, *ad* semper sint inter se æquales, arcuum etiam eorum fluxiones, $\dot{\overline{AD}}$, $\dot{\overline{ad}}$, semper erunt inter se æquales. Quare et rectangula $V \times \dot{\overline{TH}}$, $v \times \dot{\overline{tb}}$ erunt inter se æqualia; et temporum TH, *th* fluxiones velocitatum V, v contrariam inter se rationem gerent. At verò eæ sunt corporum in locis D, *d* velocitates, quas in locis E, *e* adepta essent, si è locis F, *f*, vi proprii utrumque ponderis rectâ cecidissent. Eam igitur velocitates illæ inter se rationem gerent, quæ efficitur à rationibus ponderum corporum B, *b*, temporumque quibus corpora illa, rectâ cadendo è locis F, *f*, spatia æqualia FE, *fe* confecissent, cum contrariâ materiæ, quæ corporibus inest, ratione compositis. Hoc est, cùm sit pondus corporis B, ad pondus corporis *b*, ut P ad *p*, et materia in corpore *b* ad materiam in corpore B, ut *p* ad M; ratio rectæ V ad v ea erit, quæ componitur è rationibus rectæ P ad M, temporisque, quo corpus B rectâ cadendo confecisset spatium FE, ad tempus quo corpus alterum *b*, rectâ itidem cadendo, confecisset spatium *fe*. Sit igitur θ recta quædam eâ lege mutabilis, ut ad mutabilem TH eam semper rationem gerat, quam tempus, quo corpus *b* spatium *fe* casu recto confecisset, ad tempus quo corpus B casu recto confecisset spatium FE. Igitur V erit ad v ut rectangulum P × TH ad rectangulum M × θ. At

verò

De Motu Corporum

num tempora directè & velocitates reciprocè. Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora: atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum; & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum; id est, ut pondera & quadrata temporum. Q. E. D.

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol.

verò cùm corpora, oscillando per arcus ABC, *abc*, in locis à perpendiculo æqualiter remotis, qualia semper erunt illa D, *d*, à viribus urgeantur quæ ipsam ponderum rationem inter se constanter gerant; fieri nequit, quin tempora, quibus corpora è locis F, *f*, in loca E, *e*, vi proprii utrumque ponderis, rectâ cecidissent, ad tempora quibus conficiuntur arcus similes et æquales AD, *ad*, similem singulatim rationem gerant. Hoc est, fieri nequit, quin sit TH : *th* = TH : θ. Fieri igitur nequit, quin sint æquales rectæ illæ *th*, θ, et rectangula M × θ, M × *th* inter se æqualia. Cùm igitur sit V : V = P × TH : M × θ, erit etiam V : V = P × TH : M × *th*. At verò jam antè ostendimus esse V ad V ut $\dot{TH}$ ad $\dot{th}$. Erit igitur $\dot{TH} : TH = P \times TH : M \times th$. Quare $th \times \dot{TH} : th \times TH = P \times TH : M \times th$. Sed $th \times \dot{TH} : TH \times TH = M \times \dot{th} : M \times TH$. Ex æquo igitur $th \times \dot{th} . TH \times TH = P : M$. Quadratorum autem è rectis *th*, TH fluxiones rectangulorum, $th \times \dot{th}$, $TH \times \dot{TH}$ inter se rationem gerunt. Quare fluxionibus illis constans rectarum P, M ratio intercedet. Eadem igitur et fluentibus; ipsis utique rectarum *th*, TH quadratis; siquidem quadrata illa, cum rectis ipsis arcubusque AD, *ad* simul generari inceperint. Rectarum igitur TH, *th*, quarum duplicata ratio data est, earum propria certè inter ipsas ratio dabitur. Et si arcus AD, *ad*, semper inter se æquales, in totos ABC, *abc* creverint, et rectæ TH, *th* in illas TO, *to*; erit TH ad *th* ut TO, *to*: et tempora quibus arcus æquales AD, *ad* conficiuntur, quorum utique temporum rationem rectæ TH, *th* referunt, ea cum temporibus, quibus arcus integri conficiuntur, per rectas TO, *to* expositis, proportione convenient. Q. E. D.

Jam verò quod alterum Newtonus dicit, esse V ad V ut P × TO ad M × *to*, id ex iis quæ ostensa sunt, facilè obtinendum est. Nempe ostendimus TH esse ad *th* ut TO ad *to*. Erit igitur P × TH ad M × *th* ut P × TO ad M × *to*. Sed illud etiam ostendimus, esse V ad V ut P × TH ad M × *th*. Quare V : V = P × TO : M × *to*. Q. E. D.

CÆTERUM Propositio ipsa, cujus approbandæ gratiâ hæc velocitatum ratio allegata est, vel ex eo satis in aperto posita est, quod modò nos ostendimus, rectis M, P rationem inter se habere, ejus quæ temporibus TH, *th*, quibus arcus æquales conficiantur, intercedit, duplicatam. Cùm enim sit M : P = $TH^2 : th^2 = TO^2 : to^2$; ratio M ad *p*, quæ componitur è rationibus rectæ M ad P. rectæque P ad *p*, ea componetur è rationibus rectæ P ad *p* et quadrati ex TO ad quadratum ex *to*. Sed ratio rectæ M ad *p* ea est quæ materiæ in corpore B ad materiam in corpore *b*; et ratio rectæ P ad *p* ea est quæ ponderis corporis B ad pondus corporis *b*; et ratio mutua rectarum TO, *to*, ea temporum, quibus corpora arcus integros oscillando confecerint, mutua est ratio. Ratio igitur materiæ ad materiam composita est è ratione ponderum cum duplicatâ temporum ratione. Q. E. D.

(b) CORPORA A, *a*, à centris G, γ, funibus longitudine inæqualibus, GB, γβ suspensa, arcus ABC, *a*β*x* sive circulares, sive alios quoslibet, inæquales quidem, sed inter se similes, in spatiis vacuis oscillando, centris oscillationum B, β scribant. Posuit Newtonus in Corollario quarto, temporum, quibus corpora arcus similes ABC, *a*β*x* confecerint, quadrata esse inter se sicut longitudines GB, γβ, si corpora A, *a* tam pondere quàm materiâ inter se fuerint æqualia. Inde verò consequi ait, pondera corporum, A, *a*, longitudinum, GB, γβ, rationem inter se servare, si æqualis sit in utroque corpore materia, et si tempora oscillandi per arcus illos similes æqualia sint. Et in Corollario quinto, id universè constituit, materiam corporis cujuscunque penduli rationem è tribus rationibus

Liber Secundus.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cùm quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines Pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines Pendulorum.

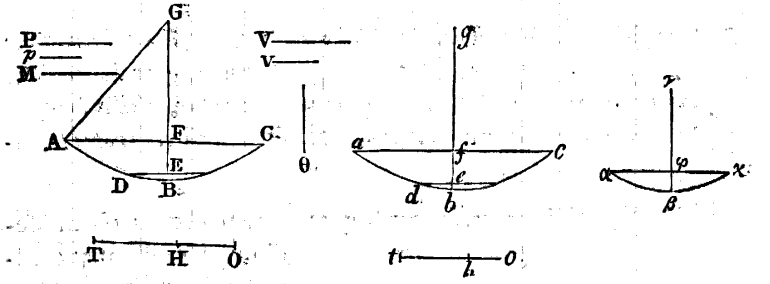
Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo Penduli inversè (b).

Corol.

tionibus compositam, ponderis, duplicatâ temporis, contrariâ longitudinis, constanter servare.

Nos primùm quod posuit Newtonus sic ostendimus.

Per puncta A, C, *a*, *x*, arcuum similium ABC, *a*β*x* extrema, ducantur rectæ AC, *ax*, quæ rectis GB, γβ, quæ à mediis arcuum illorum punctis ad perpendiculum fuerint erectæ, in punctis F, φ occurrant. Jam cùm similes sint arcus ABC, *a*β*x*, idcirco in locis, quæ à perpendiculo æqualibus va-



cillantium funium inclinationibus remota fuerint, corpora, per arcus ABC, *a*β*x* oscillando, à viribus incitabuntur, quæ ipsorum ponderum rationem inter se constanter gerent. Ac propterea fieri nequit, quin tempora, quibus corpora, si è locis F, φ, cecidissent, vi proprii utrumque ponderis in loca B, β casu recto delata essent, ad tempora, quibus arcus similes ABC, *a*β*x* oscillando conficiantur, similem rationem gerant. Quare et duplicata illorum ratio horum etiam duplicata erit. Atqui spatia FB, φβ, cùm corpora ponantur tam pondere quàm materiâ inter se æqualia, rationem inter se habebunt temporum, quibus casu recto confecta essent, duplicatam: quare et eorum temporum duplicatam, quibus arcus similes ABC, *a*β*x* corpora oscillando confecerint. Sed cùm similes sint arcus illi ABC, *a*β*x*, quæ spatiis FB, φβ eadem longitudinibus GB, γβ inter ipsas ratio erit. Quare et longitudines illæ temporum, quibus arcus ABC, *a*β*x* conficiantur, rationem inter se duplicatam gerant. Sicut in Corollario 4, Newtonus posuit. Q. E. D.

Inde verò quod in Corollario quinto Newtonus universè constituit, facili argumento obtinebimus. Manente enim corporum A, *a*, cùm materiæ tum ponderis æqualitate, intelligatur corpus quodpiam tertium *b* centro *g*, fune *gb*, qui illius GB longitudine æqualis, fit suspensum, arcum *abc* oscillando scribere illius ABC similem et æqualem. Jam materia corporis *a* ad materiam corporis A, sive ad materiam corporis *a*, rationem habet è ratione ponderis corporis *a* ad pondus corporis A vel *a*, cùm temporis, quo conficitur arcus *abc*, ad tempus, quo conficitur arcus ABC, duplicatâ ratione compositam (per Prop. XXIV.) Sed temporis, quo conficitur arcus *abc*, ad tempus, quo conficitur ABC, duplicata ratio componitur è duplicatâ temporis quo conficitur arcus *abc* ad tempus quo arcus *a*β*x*, et duplicatâ ejus quo arcus *a*β*x* ad tempus quo ABC. Quæ postrema eadem est quæ longitudinis γβ ad longitudinem GB vel *gb*: ficut Newtonus posuit, et à nobis ostensum est. Quare materia corporis *a* ad materiam corporis A rationem habet ex tribus compositam; ponderis

De Motu Corporum

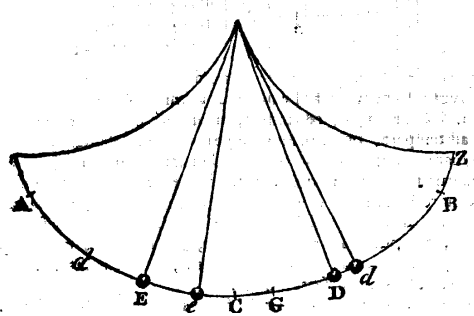
Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente (c) quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inverſè. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſuprà explicui; ideoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quàm accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

PROP. XXV. THEOR. XX.

Corpora funependula quibus, in Medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D, tempore quovis in Medio non reſiſtente, oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in C, ita ut C ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix, quâ corpus urgetur in loco quovis D, vel *d*, vel E, ut longitudo arcûs CD, vel C*d*, vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cùm reſiſtentia ſit ut momentum temporis,



ponderis α ad pondus ω, temporum quibus conficiuntur arcus $\alpha b c$, $\omega \beta \kappa$ duplicatâ, et longitudinum $g b$, $\gamma \beta$ contrariâ. Q. E. D.

Hanc verò veritatem ejus quod in Corollario quarto Newtonus affirmavit, quivis colliget. Corporum pendulorum m, μ pondera ſignificentur literis α, ω; materia illius literâ x; hujus, literâ φ. Tempora quibus arcus ſimiles $\alpha b c$, $\omega \beta \kappa$ oſcillando confecerint literis t, τ. Cùm ſit $m : \mu = \alpha \times x^2 \times \gamma \beta : \omega \times \varphi^2 \times g b$; ſi ponantur m, μ inter ſe æquales, erunt $\alpha \times x^2 \times \gamma \beta$, $\omega \times \varphi^2 \times g b$ inter ſe æqualia. Unde ſi æqualia ſint x^2, φ^2, erunt etiam $\alpha \times \gamma \beta$, $\omega \times g b$ inter ſe æqualia. Ac propterea

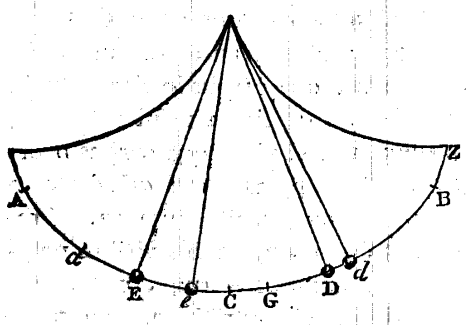
ideoque detur (d), exponatur eadem per datam arcûs Cycloidis partem CG; & ſumatur arcus G*d* in ratione ad arcum CD quam habet arcus GB ad arcum CB: & vis, quâ corpus in *d* urgetur in Medio reſiſtente, cùm ſit exceſſus vis C*d* ſupra reſiſtentiam CG, exponetur per arcum G*d*; ideoque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in Medio non reſiſtente in loco D, ut arcus G*d* ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut arcus GB ad arcum CB. Proinde ſi corpora duo, D, *d* exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cùm vires ſub initio ſint ut arcus CB & GB, erunt velocitates primæ & arcus primò deſcripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi BD & B*d*; & arcus reliqui CD, G*d* erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipſis CD, G*d* proportionales manebunt in eâdem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, G*d* ſemper erunt ut arcus toti CB, GB; & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo D, *d* ſimul pervenient ad loca C & G; alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in Medio reſiſtente ad locum G. Cùm autem velocitates in C & G ſint ut arcus CB, GB; erunt arcus, quos corpora, ulteriùs pergendo, ſimul deſcribunt, in eâdem ratione. Sunto illi CE & G*e*. Vis, quâ corpus D in Medio non reſiſtente retardatur in E, eſt ut CE; & vis, quâ corpus *d* in Medio reſiſtente retardatur in *e*, eſt ut ſumma vis C*e* & reſiſtentiæ CG, id eſt ut G*e*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus CE, G*e* proportionales arcus CB, GB; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur, & arcus iiſdem deſcripti, ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum CB & GB; & propterea ſi ſumantur arcus toti AB, *a*B in eâdem ratione, corpora D, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis,

terea $\alpha : \alpha = g b : \gamma \beta$. Pondera ut longitudines. Q. E. D.

(c) —*medio non reſiſtente.*] Hoc eſt, in ſpatio materiâ quâdam conſperſo, modò ulla talis cogitari poſſit, quæ, cùm gravitate prædita eſſet, vi tamen inertiæ deſtitueretur. Corpora, in tali materiâ, ſive pendula oſcillarent, ſive quovis modo per eam iter facerent, nullam quidem ex ejus offenſibus mutationem motûs ſubirent, licet minore vi deorſum traherentur, quàm quæ in inani conſtituta eſſent.

(d) —*detur,*] i. e. conſtans ſit.

De Motu Corporum



tis, BA, B*a*, proportionales ſunt arcuum partes quælibet BD, B*d* vel BE, B*e* quæ ſimul deſcribuntur. Q. E. D.

Corol. Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum c, ſed reperitur in puncto illo G, quo arcus totus deſcriptus *a*B biſecatur. Et corpus, ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à B ad G.

PROP. XXVI. THEOR. XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, à centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti; reſiſtentiæ, velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cúmque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti. Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cùm ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. Q. E. D.

PROP.

Liber Secundus.

PROP. XXVII. PROB. XXII.

Si corporibus funependulis reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quàm proximè.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcûs B, in duplicatâ ratione velocitatum; id eſt, ut AA ad BB, quàm proximè. Si reſiſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſuprà tempus in Medio non reſiſtente; & reſiſtentia BB efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes AB & BB quàm proximè, id eſt, ut arcus A & B. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ; & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora; propterea quòd reſiſtentia in deſcenſu corporis, quâ tempus producitur, major ſit, pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quàm reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente, quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minùs reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis, quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia Medium,

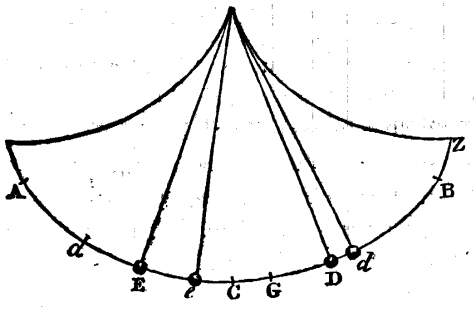
De Motu Corporum

eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minùs; ac proinde magis vel minùs cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minùs quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur.

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.

Si corpori funependulo in Cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad Penduli longitudinem duplicatam.

Designet BC arcum descensu descriptum, c*a* arcum ascensu descriptum, & A*a* differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut arcus CD ad arcum CG, qui semissis est differentiæ illius A*a*. Ideoque vis, quâ corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio, seu puncto altissimo, id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum c ad arcum CG; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla Penduli longitudo (e), ad arcum A*a*. Q. E. D.



PROP. XXIX. PROB. VI.

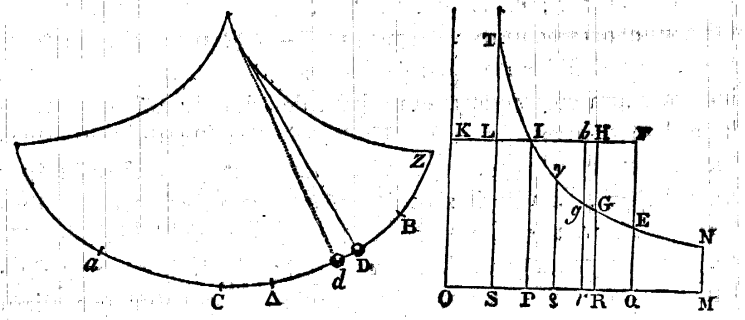
Posito quòd corpori in Cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit B*a* arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque c infimum Cycloidis punctum, & CZ semissis arcûs Cycloidis totius, longitudini

(e) Vide Cotesium de motu Pendulorum in Cycloide. Prob. & Lemm. III.

Liber Secundus.

dini Penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, S, P, Q; eâ lege, ut (si erigantur perpendicula OK, ST, PI, QE, centroque O & Asymptotis OK, OQ describatur Hyperbola TIGE secans perpendicula ST, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela Asymptoto OQ occurrens Asymptoto OK in K, & perpendiculis ST & QE in L & F) fuerit area hyperbolica PIEQ ad aream hyperbolicam PITS ut arcus BC, descensu corporis descriptus, ad arcum



c*a* ascensu descriptum; & area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS. Dein perpendiculo MN abscindatur area hyperbolica PINM, quæ sit ad aream hyperbolicam PIEQ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area hyperbolica PIGR, quæ sit ad aream PIEQ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH ad aream PINM.

Nam cùm vires à gravitate oriundæ, quibus corpus in locis Z, B, D, *a* urgetur, sint ut arcus CZ, CB, CD, C*a*, & arcus illi sint ut areæ PINM, PIEQ, PIGR, PITS; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper D*d* spatium quàm minimum, à corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quàm minimam RG*gr*, parallelis RG, *rg* comprehensam; & producatur *rg* ad *h*, ut sint GH*hg*, & RG*gr* contemporanea arearum IGH, PIGR decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH incrementum, GH*hg* − $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, seu Rr × HG − $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, erit ad areæ PIGR decrementum, RG*gr*, seu Rr × RG, ut HG − $\frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut OR × HG −

De Motu Corporum

$\frac{OR}{OQ}$ IEF ad OR × GR, seu OP × PI; hoc est (ob æqualia OR × HG, OR × HR − OR × GR, ORHK − OPIK, PIHR & PIGR + IGH) ut PIGR + IGH − $\frac{OR}{OQ}$ IEF ad OPIK. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH dicatur Υ, atque areæ PIGR decrementum RGgr detur, erit incrementum areæ Υ ut PIGR − Υ.

Quòd si V designet vim à gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, quâ corpus urgetur in D, & R pro resistentiâ ponatur; erit $V - R$ vis tota, quâ corpus urgetur in D. Est itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ & particula illa temporis, in quâ factum est, conjunctim: sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè & particula eadem temporis inversè. Undè, cùm resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per Lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & $V - R$ conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut $V - R$; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens PIGR, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut PIGR − Z.

Igitur areâ PIGR per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Υ in ratione PIGR − Υ, & area Z in ratione PIGR − Z. Et propterea si areæ Υ & Z simul incipiant, & sub initio æquales sint, hæ, per additionem æqualium momentorum, pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et viciſſim, si simul incipiunt et simul evanescunt, æqualia habebunt momenta, & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas, unà cum arcu illo ca qui in ascensu corporis describitur, diminuetur;

(f) Mira certè argumenti subtilitas, neque tamen evidentia minor; nisi quòd illud fortè obscuriùs dictum sit, cur areæ Y, z, si initio sive crescendi sive decrescendi æquales fuerint, semper æquales maneant. Hujus autem ratio hâc nititur Propositione.

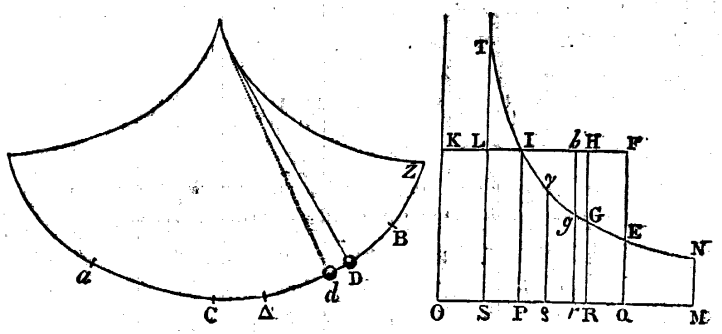
THEOREMA.

Si magnitudines initio æquales simili modo fluant, atque eâ etiam lege, ut fluentium magnitudines, fluendo simul factæ, fluxionibus suis auctæ semper inter se æquales sint; fluentes ipsæ semper erunt inter se æquales.

Magnitudines æquales AB, CD similiter fluant, i. e. vel crescendo utraque vel utraque decrescendo, et earum sub initio fluxûs, sint AE, CF (sensu Def. 5. Geom. Flux.) fluxiones. Sint Ab, cd; $A\beta$, $c\delta$ fluentium magnitudines fluendo simul factæ; quarum etiam fluxiones (sensu Def. 5. Geom. nostræ

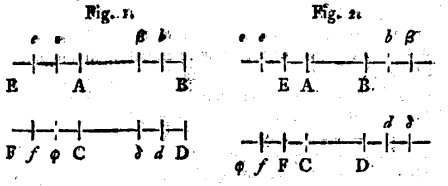
diminuetur; & puncto in quo motus omnis, unà cum resistentiâ, cessat, propiùs accedente ad punctum c, resistentia citiùs evanescet quàm area Υ. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur. Liber Secundus.

Jam verò area Z incipit definitque ubi resistentia nulla est; hoc est, in principio motûs, ubi arcus CD arcui CB æquatur, & recta RG incidit in rectam QE; & in fine motûs, ubi arcus CD arcui ca æquatur & RG incidit in rectam ST. Et area Υ, seu $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH, incipit definitque ubi nulla est; ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}$ IEF & IGH æqualia sunt; hoc est (per constructionem) ubi recta RG



incidit successivè in rectas QE & ST. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream PINM, per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem (f). Q. E. D.

Corol.



nostræ Flux.) sint Ae, Cf; Aι, Cφ; magnitudines utique in eodem genere in quo sunt fluentes. Ea denique sit fluendi lex, ut sint EB, FD, nec non eb, fd; $\iota\beta$, $\varphi\delta$ inter se æquales. Dico fluentes esse semper inter se æquales, si eæ conferantur magnitudines, quæ fluendo simul exsistant. Hoc est dico $Ab = cd$, et $A\beta = c\delta$. Magnitudinibus enim AB, CD eas manere singulatur fluendi velocitates, quas initio fluxûs quæque habuit, usquedum novas illas longitudines Ab, cd sint adeptæ: inde verò velocitates fluendi in alias subitò mutari, quæ sint ad priores ut rectæ Ae, Cf ad illas Aι, Cφ. Atque rursum magnitudinibus fluentibus hæ novæ fluendi velocitates manent, usquedum fluentes Ab, cd in illas $A\beta$, $c\delta$ mutatæ fuerint. Inde verò velocitates in

De Motu Corporum

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo c ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ IEF ad aream PINM.

Corol. 2. Et autem maxima, ubi area PIHR est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum PIGR − *Y*) evadit nullum (g).

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, & ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem Cycloide sine omni resistentiâ oscillantis.

Cæterùm ob difficilem calculum, quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere.

PROP. XXX. THEOR. XXIV.

Si recta AB *æqualis sit Cycloidis arcui, quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis, in arcûs punctis correspondentibus, ad vim gravitatis: dico, quòd differentia inter arcum, descensu toto descriptum, & arcum, ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundem semisummam æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Fig. 1.

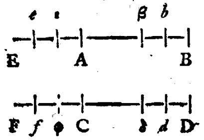
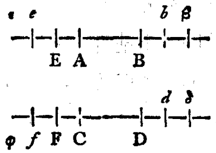


Fig. 2.



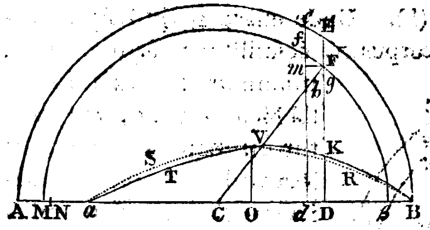
in alias rursum subitò mutentur, quæ sint ad primas ut Aι, Cφ ad illas AE, CF. Ita erit B*b* ad D*d* ut AE ad AF: et *b*β ad *d*δ ut A*e* ad A*f*.

Jam verò cùm EB, ED inter se æquales sint, id enim posuimus; cùm sint etiam AB, CD inter se æquales, nam et illud posuimus; erunt nimirum AE, CF inter se æquales. Ergo B*b*, D*d* inter se æquales erunt. Quare et A*b*, C*d*, quæ fluendo simul factæ sunt, erunt inter se æquales, necnon illæ E*b*, F*d*. Rursum cùm E*b*, F*d* sint inter se æquales, cùm sint etiam *eb*, *fd* inter se æquales, id enim posuimus, et E*e*, F*f* inter se æquales erunt. Quare cùm illæ AE, CF sint etiam inter se æquales, id enim ostensum est, æquales erunt A*e*, C*f*. Unde illæ *b*β, *d*δ erunt etiam inter se æquales. Et propter æquales jam ostensas A*b*, C*d*, aliæ illæ Aβ, Cδ, fluendo utique simul factæ, erunt etiam inter se æquales; necnon illæ *e*β, *f*δ. Unde rursum cùm sint etiam ιβ, φδ inter se æquales, id enim posuimus, et *e*ι, *f*φ inter se æquales erunt; et propter æquales illas A*e*, C*f*, erunt Aι, Cφ inter se æquales, illarum utique Aβ, Cδ fluxiones. Neque huic rationi officiet illarum B*b*, *b*β, C*d*, *d*δ magnitudines, magnæ parvæve fuerint. Quare et numero earum B*b*, *b*β; D*d*, *d*δ infinitè aucto, magnitudinibus singularum infinitè imminutis, fluentium, quæ fluendo simul factæ fuerint, æqualitas mutua manebit. Q. E. D.

Hinc autem facilis est probatio ejus quod à Newtono affirmatum est. Constantem enim areæ PIGR fluxionem (*vid. fig. p.* 359) ponere licet dato rectangulo OPIK æqualem. (Geom. Flux. Def. 5.) Unde cùm

Liber Secundus.

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oscillatione integrâ descriptus, per rectam illam sibi æqualem *a*B, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB. Bisecetur AB in C, & punctum C repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit CD ut vis à gravitate oriunda, quâ corpus in D secundum tangentem Cycloidis urgetur; eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli, quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD, & vis gravitatis per longitudinem Penduli; & si in DE capiatur DK, in eâ ratione ad longitudinem Penduli, quam habet resistentia ad gravitatem, erit DK exponens resistentiæ. Centro C & intervallo CA, vel CB, construatur semicirculus BE*e*A. Describat autem corpus, tempore quàm minimo, spatium D*d*; & erectis perpendiculis DE, *de* circumferentiæ occurrentibus in E & *e*, erunt hæc ut velocitates, quas corpus in vacuo, descendendo



cùm sit $\dot{Y}$: $\overline{\dot{PIGR}}$ = PIGR − Y : OPIK, id enim à Newtono ostensum est, erit $\dot{Y}$ = PIGR − Y. Sive $\dot{Y}$ + Y = PIGR. At verò et fluxio areæ Z ponenda est spatio PIGR − Z æqualis (sic demonstrante Newtono.) Quare $\dot{Z}$ + Z = PIGR = $\dot{Y}$ + Y. Unde si areæ Y, Z semel fuerint æquales, semper æquales erunt (per nostram Propositionem). Q. E. D.

(g) Nimirum $\dot{R}$ = PIGR − $\dot{Z}$ = PIGR − $\dot{Y}$ = PIGR + IGH − $\frac{OR}{OQ}$ IEF = PIHR − $\frac{OR}{OQ}$ IEF. (*Vid. fig. p.* 359.)

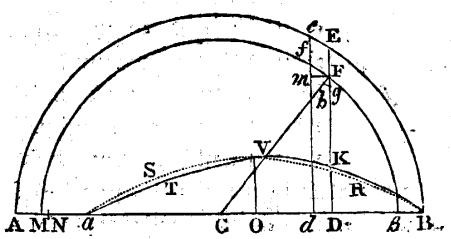
Posito igitur $\dot{R}$ = 0, ut sit R maxima, erit PIHR = $\frac{OR}{OQ}$ IEF. Sive PIHR : IEF = OR : OQ. Q. E. D.

Si igitur capiatur Oρ talis ut sit Oρ ad Pρ sicut datum rectangulum OP ad datum spatium IEF; eductâque ad perpendiculum rectâ ργ, quæ hyperbolæ in γ occurrat, si capiatur arcus CΔ qui ad arcum CB rationem habeat quam spatium hyperbolicum PIργ ad spatium PIEQ, vis renixûs Maxima erit in loco Δ. Non enim. In alio igitur loco; puta in loco D; ductâque RG, quæ, cum asymptotâ OK parallela, abscindat aream PIGR, cujus ea sit ad aream PIEQ ratio quæ arcûs CD ad arcum CB; erit PIHR : IEF = OR : OQ (pro eo quod modò ostensum est). Sed OR : OQ = OKHR : OKFQ. (Elem. VII 1.) Quare PIHR : IEF = OKHR : OKFQ. Permutando PIHR : OKHR, sive PR : OR = IEF : OF. Invertendo OR : PR = OF : IEF = Oρ : Pρ. Dividendo OP : PR = OP : Pρ. Æquales igitur erunt PR, Pρ. Quare punctum R cum illo ipso ρ congruet, et ordinata RG cum ipsâ ργ. At verò cùm locus D alius sit à loco Δ, arcus CD, CΔ inæquales erunt; et inæqualium ad arcum CB haud una erit ratio. Neque igitur arearum IPργ, IPRG ad aream IPEQ una erit ratio. Areæ igitur IPργ, IPRG, quæ ab eâdem ordinata IP initium sumunt, inæquales erunt. Minimè igitur congruent ordinatæ illæ ργ, RG. Quod est absurdum; quoniam congruere ostensæ sunt. Non igitur in alio loco præter Δ vis renixûs maxima erit. Quare in ipso loco Δ. Q. E. D.

à puncto

De Motu Corporum

à puncto B, acquireret in locis D & *d*. Patet hoc (per Prop. LII. Lib. I.) Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa DE, *de*; ſitque DF velocitas, quam acquirit in D, cadendo de B in Medio reſiſtente. Et ſi centro C, & intervallo CF, deſcribatur Circulus F*f*M occurrens rectis *de* & AB in *f* & M, erit M locus, ad quem deinceps, ſine ulteriore reſiſtentiâ, aſcenderet; & *df* velocitas, quam acquireret in *d* (h). Unde etiam ſi *Fg* deſignet velocitatis momentum, quod corpus D, deſcribendo ſpatium quàm minimum D*d*, ex reſiſtentiâ Medii amittit; & ſumatur CN æqualis C*g*: erit N locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet; & MN erit decrementum aſcenſûs ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum F*m*; & velocitatis DF decrementum F*g*, à reſiſtentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fm*, à vi CD genitum, ut vis generans DK ad vim generantem CD. Sed & ob ſimilia triangula F*mf*, F*hg*, FDC, eſt *fm* ad F*m*, ſeu D*d*, ut CD ad DF; & ex æquo F*g* ad D*d* ut DK ad DF. Item F*h* ad F*g* ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè, F*h*, ſeu MN, ad D*d* ut DK ad CF, ſeu CM; ideoque ſumma omnium MN × CM æqualis erit ſummæ omnium D*d* × DK. Ad punctum mobile M erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem A*a*; & trapezium ex illo motu deſcriptum, ſive huic æquale rectangulum A*a* × $\frac{1}{2}$*a*B, æquabitur ſummæ omnium MN × CM (i), ideoque ſummæ omnium D*d* × DK, id eſt, areæ BKV*T*a. Q. E. D.



Coroll.

(h) Perficiatur enim ſemicirculus M*f*β, ut rectæ MC iterum in β occurrat: Jam velocitas DF ea eſt, quam corpus, in ſpatiis vacuis oſcillando, in loco D adeptum eſſet, ſi è loco β, urgente vi quæ eſſet ut eβ, cecidiſſet. (Lib. I. LII.) Cùm igitûr corporis, in ſpatio impedito oſcillantis, eadem ſit in loco D velocitas ac ſi in vacuo, è loco β, urgente ibi vi cβ, oſcillare incepiſſet; ſi extingui ponatur vis renixûs in loco D, idem erit corporis deinceps motus, ſcilicet per materiam vi ſuâ renitendi ſpoliatam, ac ſi motus ab initio è loco β vi cβ inchoatus eſſet. At verò motu in vacuo ita inchoato corpus, in loco D, velocitatem *df* adipiſcerotur; et locum uſque M aſcenderet, ubi velocitas ejus omnis extingueretur. (Lib. I. LII.)

(i) Trapezium motu illo deſcriptum iri, ex eò patet, quòd ordinata mobilis, ad perpendiculum cum rectâ CA, quæ poſitione data eſt, educta, rectæ CM inter ipſam et datum punctum c intercep-

Liber Secundus.

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum C*a*, CB differentiâ A*a* colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quàm proximè.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura BKT*a* rectangulum erit ſub B*a* & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}$B*a* & A*a* erit æquale rectangulo ſub B*a* & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}$A*a*. Quare cùm DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo Penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}$A*a* ad longitudinem penduli; omninò ut in Prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura BKT*a* Ellipſis erit quàm proximè. Nam ſi corpus, in Medio non reſiſtente, oſcillatione integrâ deſcriberet longitudinem BA, velocitas, in loco quovis D, foret ut Circuli, diametro AB deſcripti, ordinatim applicata DE. Proinde cùm B*a* in Medio reſiſtente, & BA in Medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius B*a* punctis, ſint quàm proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt B*a* ad BA; erit velocitas in puncto D, in Medio reſiſtente, ut Circuli, vel Ellipſeos, ſuper diametro B*a* deſcripti, ordinatim applicata; ideoque figura BKV*T*a Ellipſis erit quàm proximè. Cùm reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit OV exponens reſiſtentiæ in puncto medio O; & Ellipſis BRV*s*a, centro O, ſemiaxibus OB, OV deſcripta, figuram BKV*T*a, eique æquale rectangulum A*a* × BO, æquabit quamproximè. Eſt igitur A*a* × BO ad OV × BO ut area Ellipſeos hujus ad OV × BO: id eſt, A*a* ad OV ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: et propterea $\frac{7}{11}$A*a* ad longitudinem Penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.

Quòd ſi reſiſtentia DK ſit in duplicatâ ratione velocitatis, figura BKV*T*a ferè Parabola erit, verticem habens V & axem OV (k);

ceptæ ſemper ſit æqualis. Atque idcirco mobilis illa faſtigio ſuo tanget ſemper rectam poſitione datam. (Simſon. Loc. Plan. Lib. I. Prop. XXIII. Caſ. 1.) Trapezium autem illud rectangulo A*a* × $\frac{1}{2}$a*s* æquale eſſe ſic oſtenditur. Trapezii illius latera parallela per puncta A, *a* cùm ſint rectis CA, C*a* ſingulatim æqualia, trapezium æquale erit rectangulo $\frac{1}{2}$CA + $\frac{1}{2}$C*a* × A*a*; hoc eſt propter CA, CB inter ſe æquales, rectangulo $\frac{1}{2}$CB + $\frac{1}{2}$C*a* × A*a*, ſive $\frac{1}{2}$a*s* × A*a*.

(k) Cùm enim DK ſit ut DF^2, erit DK × A = DF^2 = β*d* × D*m*, deſignante A datam quandam juſtæ longitudinis. Sed rectangulum β*d* × D*m* rectangulo B*d* × D*a* propemodùm eſt æquale. Quare DK × A, B*d* × D*a* propemodum inter ſe æqualia. Si verè æqualia eſſent, punctum K eſſet ad Parabolam cujus parameter A; axis verò rectam A*a*, quam ad perpendiculum inſiſteret, mediam divideret. Neque longè ab illius Parabolæ ductu punctum K abſceſſerit, propter non magnam illorum DK × A, B*d* × D*a* inæqualitatem.

De Motu Corporum

ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{1}{3}$BA & ov quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{3}$BA & Aa æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}$Ba & ov, ideoque ov æqualis $\frac{3}{4}$Aa: & propterea corporis oscillantis resistentia in o ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}$Aa ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cùm Ellipsis vel Parabola BRVa congruat cum figurâ BKVTa in puncto medio V, hæc, si ad partem alterutram BRV vel Vsa excedit figuram illam, deficiet ab eâdem ad partem alterum, & sic eidem æquabitur quàm proximè.

PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Si corporis oscillantis resistentia, in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus, augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2}AB$, & arcuum illorum CB, Ca differentiâ, Aa, æqualis erat areæ BKTa. Et area illa, si maneat longitudo AB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc est, in ratione resistentiæ, ideoque est ut longitudo AB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}AB$ est ut AB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contrà.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: & contrà.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcûs totius: & contrà.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contrà.

Eadem

Liber Secundus.

Eadem erit lex & ratio resistente pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideoque si Pendulo inæquales arcus successivè describente inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his Propositionibus, per oscillationes Pendulorum in Mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam Mediorum. Aeris verò resistentiam investigavi per Experimenta sequentia.

Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{12}$ diâmetro digitorum *Londinensium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi; ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro suspensionis distans; & è regione puncti illius collocavi Regulam, in digitos distinctam, quorum ope notarum longitudines arcuum à Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes, quibus Globus octavam motûs sui partem amitteret. Si Pendulum deducebatur à perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totâque oscillatione primâ, ex descensu & ascensu subsequente compositâ, arcum digitorum ferè quatuor: idem oscillationibus 164 amisit octavam motûs sui partem; sic ut, ultimo suo ascensu, describeret arcum digiti unius cùm tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motûs partem oscillationibus 121; ita ut, ascensu ultimo, describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motûs partem oscillationibus $69, 35\frac{1}{2}, 18\frac{1}{2}, 9\frac{1}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$ respectivè. Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{1}{4}, 7\frac{1}{2}, 15, 30,$

60,

De Motu Corporum

60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{49}$ partes digiti respectivè. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ

(') Neque tamen universè illud videtur obtinere, ut quo majores sint oscillationes, eò propiùs vires renixùs duplicatam attingant velocitatum rationem. Nam cùm arcuum differentiæ fuerint quales à Newtono sunt descriptæ, si omnes ordine à primâ dividantur, numeri à divisione oriundi, earum omnium inter se & ad primam rationes exhibebunt. Atqui hi sunt numeri à divisione oriundi

1 2,71 9,507 36,96 141,84 543

Motu igitur corporis penduli ad Cycloidem redacto, quâ ratione Newtonus mox dicturus est, vires renixùs, quales in mediis arcuum Cycloideos punctis fuissent, si per tales arcus corpus pendulum latum esset, eas inter se rationes habuissent, quas hi numeri præ se ferunt; arcus autem ipsi Cycloideos eandem inter se rationem habuissent, quam circulares quos corpus pendulum centro oscillandi suo reverâ scribebat; quorum communis ratio minoris cujusque ad proximum, unitatis ad binarium erat. Velocitatum igitur, quibuscum in similibus arcuum illorum Cycloideos punctis corpus pendulum latum esset, et harum eadem inter ipsas communis ratio, unitatis ad binarium, fuisset. Velocitatum igitur illarum duplicata ratio unitatis ad quaternarium fuisset. Hæc cùm ita sint, quæriam fuisset vis renixùs in medio arcûs cujusque Cycloidalis puncto, si ad eam, quæ in puncto medio arcûs proximè majoris regnâsset, rationem habuisset velocitatum duplicatam; & quânam sui parte vis renixùs, in medio arcûs cujusque minoris puncto, major fuisset quàm pro duplicatâ velocitatum ratione, ex sequenti numerorum descriptione quivis ut opinor intelligat

4 : 1 = 543	: 135,75	141,84	$\frac{6,1}{141,8}$	$= \frac{1}{23}$
4 : 1 = 141,84	: 35,46	36,96	$\frac{1,5}{36,9}$	$= \frac{1}{25}$
4 : 1 = 36,96	: 9,24	9,51	$\frac{,27}{9,51}$	$= \frac{1}{35}$
4 : 1 = 9,51	: 2,37	2,71	$\frac{,34}{2,71}$	$= \frac{1}{8}$
4 : 1 = 2,71	: 0,68	1	$\frac{,3}{1}$	$= \frac{3}{10}$

Hic in maximis arcubus, minùs quidem quàm in mediis, servatam videre est inter vires renixùs duplicatam velocitatum rationem. A quâ quantum et in aliis Newtoni experimentis vires illæ abscesserint, haud inutile erit simili numerorum descriptione oculis subjecisse.

EXPERIMENTA IN GLOBO LIGNEO

Qui in aere oscillabat donec pars quarta Motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{748}$	$\frac{1}{272}$	$\frac{4}{325}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{12}{17}$
Differentiarum rationes	1	2,75	9,21	35,9	143,6	528.

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 528	: 132	143,6	$\frac{11,6}{143,6}$	$= \frac{1}{12}$
4 : 1 = 143,6	: 35,9	35,9	0	
4 : 1 = 35,9	: 8,97	9,21	$\frac{,24}{9,21}$	$= \frac{1}{38}$
4 : 1 = 9,21	: 2,30	2,75	$\frac{,45}{2,75}$	$= \frac{1}{6}$
4 : 1 = 2,75	: 0,69	1,	$\frac{,3}{1}$	$= \frac{3}{10}$

EXPE-

Liber Secundus.

duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè; in minoribus verò paulo majores quàm in eâ ratione; & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI. libri hujus) resistentia Globi, ubi celeriùs movetur, est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulo major quàm in eâ ratione (').

Designet jam v velocitatem maximam in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates datæ; & fingamus quòd differentia arcuum sint $Av + Bv^{\frac{3}{2}} + Cv^2$. Cùm velocitates maximæ sint, in Cycloide,

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO

Qui in aere oscillabat donec pars octava motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{1808}$	$\frac{1}{912}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{181}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{4}{15}$
Differentiarum rationes	1,	1,98	4,86	12,91	39,96	136,4	482,1 :

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 482,1	: 120,5	136,4	$\frac{15,9}{136,4}$	$= \frac{10}{86}$
4 : 1 = 136,4	: 34,1	39,99	$\frac{5,9}{39,9}$	$= \frac{1}{7}$
4 : 1 = 39,96	: 9,99	12,91	$\frac{3}{12,9}$	$= \frac{1}{4,3}$
4 : 1 = 12,91	: 3,23	4,68	$\frac{1,45}{4,68}$	$= \frac{1}{3,2}$
4 : 1 = 4,68	: 1,17	1,98	$\frac{,81}{1,98}$	$= \frac{1}{2,4}$
4 : 1 = 1,98	: 0,49	1,	$\frac{,5}{1}$	$= \frac{1}{2}$

EXPERIMENTA IN EODEM GLOBO PLUMBEO

Qui in aere oscillabat donec pars quarta motûs extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{1}{2040}$	$\frac{1}{1036}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{8}{121}$	$\frac{8}{35}$
Differentiarum rationes	1	1,97	4,86	12,83	40	134,9	466,3

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 466,3	: 116,6	134,9	$\frac{18,3}{134,9}$	$= \frac{1}{7}$
4 : 1 = 134,9	: 33,5	40	$\frac{6,5}{40}$	$= \frac{1}{6}$
4 : 1 = 40	: 10,	12,83	$\frac{2,8}{12,8}$	$= \frac{1}{4,6}$
4 : 1 = 12,83	: 3,21	4,86	$\frac{1,65}{4,86}$	$= \frac{1}{3}$
4 : 1 = 4,86	: 1,21	1,97	$\frac{,76}{1,97}$	$= \frac{1}{2,5}$
4 : 1 = 1,97	: 0,49	1	$\frac{,5}{1}$	$= \frac{1}{2}$

EXPE-

De Motu Corporum

cloide, ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in Circulo verò, ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quàm in Circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo ſint majora quàm in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore quamproximè in utrâque Curvâ; deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, unà cum reſiſtentiâ, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ ſimplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ, quæ fuerunt in Circulo obſervatæ; velocitates verò maximæ ponendæ

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MAJORE.

Qui in AERE oſcillabat donec pars QUARTA motûs extincta erat.

Arcuum differentiæ	$\frac{3}{535}$	$\frac{4}{287}$	$\frac{32}{171}$
Differentiarum rationes	1	3,73	50
Velocitatum rationes	1	2	8

16 : 1 = 50 : 3,125 | 3,73 | $\frac{,6}{3,7} = \frac{1}{6}$

4 : 1 = 3,73 : 0,93 | 1, | $\frac{,07}{1} = \frac{1}{14}$

Mitto experimenta hujus Globi in Aquâ oſcillantis, propter errores ex vaſis anguſtiâ oriundos.

EXPERIMENTA IN GLOBO PLUMBEO MINORE

Qui in AQUA oſcillabat donec pars QUARTA motus extincta erat.

Arcuum Differentiæ	$\frac{5}{4976}$	$\frac{3}{424}$	$\frac{1}{136}$	$\frac{5}{212}$	$\frac{12}{145}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{32}{27}$
Differentiarum rationes	1	2,35	7,32	23,5	82,36	306,2	1179,5

Velocitatum communis ratio 1 : 2

4 : 1 = 1179,5 : 294,9 | 306,2 | $\frac{11,3}{306,2} = \frac{1}{27}$

4 : 1 = 306,2 : 76,55 | 82,36 | $\frac{5,8}{82,4} = \frac{1}{15}$

4 : 1 = 82,36 : 20,59 | 23,5 | $\frac{2,9}{23,5} = \frac{1}{8}$

4 : 1 = 23,5 : 5,87 | 7,32 | $\frac{1,45}{7,32} = \frac{1}{5}$

4 : 1 = 7,32 : 1,83 | 2,35 | $\frac{,52}{2,35} = \frac{1}{4,5}$

4 : 1 = 2,35 : 0,59 | 1 | $\frac{,4}{1} = \frac{2}{5}$

ſunt

Liber Secundus.

ſunt arcubus, vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro v; & prodibit arcuum differentia $\frac{4}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{4}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{25}{36}} = 16A + 14B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0{,}0000916$; $B = 0{,}0010847$; & $C = 0{,}0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916v + 0{,}0010847v^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558v^2$: & propterea, cùm (per Corollarium Propoſitionis XXX. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia Globi, in medio arcûs oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt v, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$ (m) $+ \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur

(m) NIMIRUM vis renixûs, quam literâ R ſignificare liceat, trifariam intelligatur diſtribui, ſive ex tribus viribus conflari, quas ſingulatim literis r, r, ϱ ſignificabimus; ut ſit $R = r + r + \varrho$. Harum trium partium, ex quibus vis tota R conflata eſt, prima r talis ſit, quæ ſimplici ſemper velocitatis corporis penduli rationi reſpondeat; ultima ϱ rationem velocitatis duplicatam ſervet; media r rationem illam quæ ſimplicis & duplicatæ velocitatis media eſt, quam Newtonus ſequiplicatam vocare ſolet. Vel ut clariùs dicamus, ſi ſint v, $v^{\frac{3}{2}}$ duæ rectæ eâ lege mutabiles, ut illa v ſimplicem velocitatis rationem, illa $v^{\frac{3}{2}}$ duplicatam ſemper gerat; ſit alia $v^{\frac{3}{2}}$ eâ lege mutabilis, ut duarum v, $v^{\frac{3}{2}}$ proportione ſemper media ſit. Et tales ponantur vires r, r, ϱ, ut illa r rectæ v, illa r rectæ $v^{\frac{3}{2}}$, illa ϱ rectæ v^2 ſemper rationem ſervet. Similiter arcuum, qui à corpore pendulo deſcendendo & aſcendendo ſcripti fuerint, horum differentia à vi renixûs oriunda, quam literâ D ſignificabimus, in partes tres d, d, δ diſtribui cogitetur, à tribus viribus r, r, ϱ ſingulatim oriundas. Ut ſit $D = d + d + \delta$. Ponatur autem $d = AV$, $d = BV^{\frac{3}{2}}$, $\delta = CV^2$. Unde efficietur id quod Newtonus poni juſſit, $D = AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Et pro D & V numeris, quos experimenta è memoratis ſecundum, quartum, & ſextum monſtrant, ordine ſubſtitutis, venient literarum A, B, C æſtimationes illæ, quas Newtonus protulit.

V $V^{\frac{3}{2}}$ V^2

Jam verò cùm in puncto medio arcûs, quem corpus quodpiam pendulum ſcribat, vis renixûs ſit ad corporis pondus ut recta ov (in fig. Prop. XXX.) ad longitudinem fili quo corpus ſuſpenſum eſt; cùm præterea, ſi talis ponatur vis renixûs quæ ſimplici velocitatum rationi utique reſpondeat, ea erit ov quæ ad arcuum, qui deſcendendo & aſcendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 7 ad 11 (per Cor. Prop. XXX.). Hæc cùm ita ſint, ſi figura Propoſitionis XXX. ad vim r accommodata fuerit, erit $ov = \frac{7}{11}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in puncto arcûs ſcripti medio, quæ ad corporis penduli pondus rationem habuerit, quam $\frac{7}{11}d$, ſive $\frac{7}{11}AV$ ad L (ſignificante literâ L longitudinem fili, quo corpus ſuſpenſum erat).

At verò ſi talis ſit vis renixûs, quæ duplicatam velocitatis rationem ſervet, ov ea erit quæ ad arcuum, qui deſcendendo & aſcendendo confecti fuerint, differentiam rationem habeat quam 3 ad 4. Quare ſi figura Prop. XXX. ad vim ϱ accommodata fuerit, erit $ov = \frac{3}{4}\delta$. Ac proinde ea fuerit vis ρ, in medio arcûs confecti puncto, quæ ad corporis penduli pondus rationem habeat quam $\frac{3}{4}\delta$ ſive $\frac{3}{4}CV^2$ ad L.

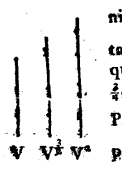
Rurſum cùm proportio rectæ ov ad $A\alpha$, ſive quantitas $\frac{ov}{A\alpha}$, à lege vis renixûs omnino pendeat; et cùm lex illa, quæ ſimplicem inter vires illas velocitatum conſtituat rationem, illam $\frac{ov}{A\alpha}$ huic $\frac{7}{11}$ æqualem efficiet; altera verò lex, quæ duplicatam velocitatum rationem viribus renixûs inducat,

De Motu Corporum

bantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0{,}0000583v + 0{,}0007593v^{\frac{3}{2}} + 0{,}0022169v^{2}$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam; id eſt, ad 121 digitos. Unde cùm v in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus Globi in caſu ſecundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 (n) ad 121, in ſexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus, quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum (o). Et propterea, cùm radius eſſet 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum Globi eſſet 126 digitorum; arcus, quem centrum globi deſcripſit, erat $124\frac{3}{31}$ (p) digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima, ob reſiſtentiam Aëris, non incidit in punctum infimum arcûs deſcripti, ſed in medio ferè loco arcûs totius verſatur: hæc eadem erit circiter, ac ſi Globus, deſcenſu ſuo toto in Medio non reſiſtente, deſcriberet arcûs illius partem dimidiam digitorum $62\frac{1}{62}$ (q), idque in Cycloide, ad quam motum Penduli ſuprà reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati, quam Globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcûs illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in Cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad Penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278 (r). Quare velocitas ea ipſa eſt, quam corpus cadendo, & caſu ſuo ſpatium 15,278 (r) digitorum

illam $\frac{ov}{Aa}$ huic $\frac{1}{4}$ æqualem reddat: certè lex priorum geometricè quaſi intermedia, quæ viribus renixûs rationem ſimplicis & duplicatæ velocitatum mediam induxerit, hæc illam $\frac{ov}{Aa}$ talem præſtiterit, quæ earum, quas priores renixûs leges dabant, geometricâ ratione quaſi media ſit. (Id quod Emerſonus ad locum rectè monuit.) Sed quantitatum $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{4}$, quas leges priores dabant, eſt $\frac{7}{10}$ geometricâ ratione quaſi media. Quare ſi figura Propoſitionis xxx. ad vim r accommodetur, erit $\frac{ov}{Aa}$ ſive $\frac{ov}{d} = \frac{7}{10}$, ſive $ov = \frac{7}{10}d$. Ac proinde ea fuerit vis r, in puncto medio arcûs oſcillando confecti, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{10}d$, ſive $\frac{7}{10}Bv^{3}$, ad L.



Cùm igitur in medio puncto arcûs, oſcillando confecti, ea fuerit vis r, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{11}Av$ ad L: ea autem vis r quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{10}Bv^{\frac{3}{2}}$ ad L: ea denique vis ρ quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{1}{2}Cv^{2}$ ad L: idcirco ea fuerit vis R, è tribus r, r, ρ conflata, in puncto illo oſcillationis medio, quæ ad pondus corporis penduli rationem habeat quam $\frac{7}{11}Av + \frac{7}{10}Bv^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}Cv^{2}$ ad L,

Liber Secundus.

gitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate Globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (ſi reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem hydroſtatico inveni, quòd pondus Globi hujus lignei eſſet ad pondus Globi aquei magnitudinis ejuſdem ut 55 ad 97: & propterea cùm 121 ſit ad 213,4 in eâdem ratione, erit reſiſtentia Globi aquei, præfatâ cum velocitate progredientis, ad ipſius pondus ut 0,56752 ad 213,4, id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ (s). Unde cùm pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuatâ deſcribat longitudinem digitorum 30,556 (t), velocitatem illam omnem in Globo cadente generare poſſet; manifeſtum eſt, quòd vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$ (s), hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ (u). Et propterea, quo tempore Globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$, deſcribere poſſet, eodem amitteret motûs ſui partem $\frac{1}{3342}$ (u).

Numerabam etiam oſcillationes, quibus Pendulum quartam motûs ſui partem amiſit. In ſequente Tabulâ numeri ſupremi denotant longitudinem arcûs deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcûs aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accura-

z, longitudinem fili quo corpus ſuſpenſum erat. (El. v. 24.) Q. E. D.

(n) Lege 0,041778, ſicut rectè emendavit etiam Emerſonus.

(o) Erat ut opinor arcus digitorum 120, ne minimâ quidem parte major vel minor; ſi, quod Newtonus voluiſſe videtur, media ejus longitudo maximam inter minimamque ſumenda ſit. Cùm enim arcus, quos corpus pendulum motu ſuo, ob aëris renixum ſenſim langueſcente, ſcribebat, ſeriem quandam arithmeticam conſtituerint, datâ longitudine ($\frac{2}{29}$ dig.) uſque minuentes, media omnium longitudo maximæ minimæque ſimul ſumptarum ſemiſſis fuerit. At verò arcus deſcenſûs primi in experimento è memoratis ſexto erat digitorum 64. Arcus igitur aſcenſûs primi partibus $\frac{2}{29}$ unius digiti contractior. Unde arcus totus primus, idemque maximus, $128 - \frac{2}{29}$. Rurſum arcus aſcenſûs ultimi erat digitorum 56. Arcus igitur deſcenſûs ultimi partibus $\frac{2}{29}$ unius digiti longior. Arcus igitur totus ultimus, idemque minimus, $112 + \frac{2}{29}$. Primi igitur ultimique ſumma $128 - \frac{2}{29} + 112 + \frac{2}{29} = 240$. Atque hujus ſemiſſis $= 120$.

(p) 124,958.

(q) 62,479.

(r) 15,490.

(s) Lege $376\frac{1}{300}$.

(t) 30,9814.

(u) $\frac{1}{33300}$.

De Motu Corporum

tum, quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. Calculum tentet qui volet (x).

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem; sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum, quibus pars octava motûs totius cessavit; secunda numerum oscillationum, quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabulâ priore, seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 6 respectivè, & generaliter per quantitatem v ut suprà: emerget in observatione tertiâ

(x) Nobis autem tentantibus exitus operis hujusmodi fuit; computatione utique super experimento secundo cum quarto & sexto institutâ

A = 0,0005098. B = 0,0005881. C = 0,00025785. Unde

	In Exp. 2.	In Exp. 4.	In Exp. 6.
r	0,0003244	0,0012976	0,0051904
r	0,0004117	0,0032936	0,0263488
ϱ	0,0019340	0,0309440	0,4951040
R	0,0026701	0,0355352	0,5266432

Igitur in experimento sexto pars illa vis renixûs, quæ duplicatam velocitatis rationem servabat, erat ad pondus corporis penduli ut 0,495104 ad 121.

Longitudo autem arcûs, quem fili punctum illud scripsit cujus è regione Regula collocata est, digitorum erat 112. (Vide Not. °.)

Duplus finus versus dimidii arcûs cycloidalis, quem globus centro oscillandi scripsisset = 26,988.

Motus globo aqueo amittendus, qui diametrum lignei Newtoniani æqualis esset, quo tempore cum velocitate æquabili, quam spatium digitorum 13,494 rectâ cadendo vi proprii ponderis adeptus esset, spatium casûs illius duplum, 26,988, confeciisset; motus, inquam, hoc tempore globo aqueo amittendus pars esset $\frac{1}{431}$ totius.

Motus tali globo aqueo amittendus, quo tempore eâdem cum velocitate semidiametrum suam confeciisset, pars esset $\frac{1}{3384}$ totius.

Illud

Liber Secundus.

tertiâ $\frac{5}{193} = A + B + C$; in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$; in septimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$; $B = 0{,}000297$; $C = 0{,}000879$. Et inde prodit resistentia Globi, cum velocitate v moti, in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009v + 0{,}000208v^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659v^2$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis; hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659v^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ, in experimento primo, ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{12}$ ut $0{,}002217v^2$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{12}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{11}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de Pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem tertiam resistentiæ totius minoris Penduli; & inde didici; quòd resistentiæ Globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quàm proximè in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longè abest à diametrorum ratione duplicatâ, $11\frac{13}{16}$ ad 1 (y).

Illud autem hâc in re minimè prætereundum judico, quod nequeo non mirari à Newtono prætermissum: computationem, si in experimento primo, cum tertio & quinto, sive horum, sive eorum quæ antè memorata sunt, similem ad modum instituta fuerit, coefficientem B negativum promere. Nec aliter eveniet, in experimentis illis quæ in Globo plumbeo minore in Aere oscillante facta sunt, si in primo, cum tertio & quinto, vel in secundo, cum quarto et sexto utriusque eorum classis, computatio peracta fuerit.

(y) Quod si in experimento tertio, cum quinto et septimo, secundæ classis eorum quæ in hoc globo facta sunt, similis computatio instituatur, veniet $A = 0{,}0013066$. $B = 0{,}0003508$. $C = 0{,}0007235$. Unde vis renixûs, in puncto arcûs cujusque medio, ad pondus hujus globi rationem habuerit quam $0{,}0008316v + 0{,}0002457v^{\frac{3}{2}} + 0{,}0005427v^2$ ad 121. Et pars ea hujus vis, quæ rationem velocitatis duplicatam servaverit, sive pars ϱ, ea fuerit ad pondus globi ut $0{,}0005427v^2$ ad 121. Sed in Globo ligneo, ex experimento 2°, 4°, et 6° eorum in quibus pars quarta motûs extinguebatur, eam invenimus vis ϱ ad pondus globi lignei rationem, quæ est $0{,}001934v^2$ ad 121. (Vide Not. *.) Æquatis igitur globorum velocitatibus, efficietur vis ϱ in globo ligneo ad vim ϱ in globo plumbeo ut $0{,}001934 \times 57\frac{7}{12}$ ad $0{,}0005427 \times 26\frac{1}{4}$; hoc est ut 7,7914 ad 1. Vel ablatâ utrinque parte illâ renixûs, quæ filo tribuenda erat, ut $7{,}7914 - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, hoc est ut 7,46 ad $\frac{2}{3}$; vel ut 22,38 ad 2; vel ut 11,19 ad 1. Sed ratio 11,19 ad 1 à ratione duplicatâ diametrorum $11\frac{13}{16}$, sive 11,8125 ad 1, haud longè abest.

De Motu Corporum

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo, cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo Penduli, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, erat digitorum $122\frac{1}{2}$; inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo Penduli deſcenſu à nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo, poſt oſcillationes quinque (z), ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum, ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima, ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri, $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri à nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri à centro Globi deſcriptum; & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo Penduli, manente longitudine arcûs deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur, & velocitas Penduli diminueretur in ratione illâ ſubduplicatâ; maneret verò arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ (aa) ad $67\frac{1}{8}$, differentia ſita 0,4475 augeretur in duplicatâ illâ ratione, ideoque evaderet 1,5295 (bb). Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quòd reſiſtentia Penduli eſſet in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo ſi Pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ (aa) digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum (bb). Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136 (cc). Rurſus, ubi Pendulum ſuperius ex globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod à puncto ſuſpenſionis

(z) Legendum omnino *Decem*. Id quod ad locum Emerſonus rectè monuit.
(aa) 124,958. Vide Not. p.
(bb) 1,5508+.
(cc) 1,5508+ × 208 = 322,575.
(dd) Vide aa.
(ee) Talem enim arcum ſcribebat Globus ligneus minor, in experimento ſexto eorum quæ omnium prima memorata ſunt.
* Nimirum in datâ fili longitudine.
(ff) Ut numeri 322,575 & 49,396 (vide Not. cc.)
(gg) Vt 0,56752 ad 0,61705. Vide ſuprà.
(hh) Ut 45,431 ad 49,396.
(ii) Ut 322,575 & 45,431 quam proximè.

ſionis

Liber Secundus.

ſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ (dd) digitorum; differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptorum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ (ee); quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum, ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directè & pondera inverſè*. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396 (ff). Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675 (gg), id eſt, ut 45,453 ad 49,396 (hh); & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; ideoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproximè (ii), id eſt, ut 7 & 1 (kk). Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut Globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major eſt, quàm quæ ex fili reſiſtentiâ oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterùm Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfectè ſphæricus, & propterea in calculo hîc allato minutias quaſdam, brevitatis gratiâ, neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minimè ſollicitus. Optârim itaque, cùm demonſtratio Vacui ex his dependeat, ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione geometricâ, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

(kk) —*ut* 7,1 *ad* 1] Nec alia veniet ratio, ſi hoc idem experimentum, in Globo ligneo majore, conferatur cum ſexto ſecundæ claſſis eorum, quæ in ligneo minore facta ſunt; quæ cum facillimè ad hunc modum conferatur. Arcus, quem globus minor, centro ſuo oſcillandi, in ſexto illo experimento, ſcribebat, digitorum erat $\frac{126}{121}112$; hoc eſt 116,628. Inveniatur igitur numerus (280,998) ad quem numerus ille antè inventus 322,575 rationem habeat duplicatam ejus quam 124,958 ad 116,628. Tum inveniatur numerus (42,132) ad quem numerus 49,396 rationem habeat quam $\frac{24}{25}$ ad $\frac{12}{17}$. Vires renixûs fuerint ut numeri 280,998; 42,132. Sed in experimento illo, de quo agitur, in globo minore, ſexto utique ſecundæ claſſis eorum quæ in illo factæ ſunt, vis tota R ad partem $\frac{5}{6}$ erat ut 0,5266432 ad 0,495104 (vid. Not. *.) Et 0,5266432 : 0,495104 = 42,112 : 39,609. Et in Globo majore pars $\frac{5}{6}$ totî R tantùm non æqualis erat. Vires igitur renixûs in globos ligneos, quâ parte utraque duplicatæ velocitatis rationi reſponderit, fuerint inter ſe ut numeri 280,998 & 36,609. Sed 280,998 : 36,609 = 7,1 : 1.

JAM

De Motu Corporum

JAM verò conferendo reſiſtentias diverſorum Fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ; fecique ut immerſa Pendula in Medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in Tabulâ ſequente deſcripſimus; exiſtente videlicet longitudine Penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo à puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia, motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum in aquâ			$\frac{29}{100}$	1;	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in Aere, & $1\frac{1}{5}$ in Aquâ amiſſi ſunt. Erant quidem oſcillationes in Aere paulo celeriores quàm in Aquâ. At ſi oſcillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur, ut motus Pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus motus idem ac priùs amitteretur; ob reſiſtentiam auctam, & ſimul quadratum temporis diminutum, in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus, motus æquales in Aere oſcillationibus 535 & in Aquâ oſcillationibus $1\frac{1}{5}$ amiſſi ſunt; ideoque reſiſtentia Penduli in Aquâ eſt ad ejus reſiſtentiam in Aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $Av+cv^2$ differentiam arcuum, in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, à Globo in Aere cum velocitate maximâ v moto; & cùm velocitas maxima in caſu columnæ quartæ ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in caſu columnæ quartæ ad differentiam in caſu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{5}$ ad 4280: ſcribamus

(11) Sed ad partem illam vis renixûs in aere definiendam, quæ duplicatam velocitatis rationem ſervaverit,

Liber Secundus.

bamus in his caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A+c=85\frac{1}{2}$; & $8A+64c=4280$; ſeu $A+8c=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7c=449\frac{1}{2}$; & $c=64\frac{3}{14}$; & $A=21\frac{1}{7}$: atque ideo reſiſtentia, cum ſit ut $\frac{7}{11}Av+\frac{3}{4}cv^2$, erit ut $13\frac{6}{11}v+48\frac{9}{56}v^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$, ſeu $61\frac{12}{17}$, ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia Penduli in Aquâ eſt ad reſiſtentiæ partem illam in Aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim; id eſt, ut 571 ad 1 (11). Si Penduli in Aquâ oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut Penduli in Aquâ oſcillantis reſiſtentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem Penduli totius, eâdem cum velocitate in Aere oſcillantis, ut 850 ad 1 circiter; hoc eſt, ut denſitas Aquæ ad denſitatem Aeris quàmproximè.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ Penduli in Aquâ, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum fortè videatur) reſiſtentia in aquâ augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicatâ. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi; quòd arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis, præ anguſtiâ ſuâ nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Id tentabam conſtruendo Pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in Aquâ, ſuperior & major proximè ſupra aquam filo affixus eſſet; &, in Aere oſcillando, adjuvaret motum Penduli, eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabulâ ſequente deſcribitur.

ſervaverit, cur non hic ut antè Newtonus poſuit $Av+Bv^3+cv^4=D$? Nempè ſi poſuiſſet, ex tribus illis quæ in Aere facta ſunt experimentis, coefficiens A negativus prodiiſſet.

De Motu Corporum

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut Pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat Globus alius plumbeus satis magnus ad motum Penduli diutiùs continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi; ut, pendulo in Fluido utroque succeſſivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum: & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quòd in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immersi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus, & in liquoribus tum Metallorum fusorum, tum aliis quibusdam, tam calidis quàm frigidis, repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum, celeriter motorum, densitati Fluidorum, in quibus moventur, proportionalem esse quàm proximè. Non dico accuratè. Nam Fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora; ut Oleum frigidum quàm calidum, calidum quàm Aqua pluvialis, Aqua quàm Spiritus Vini. Verùm in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in Aquâ seu dulci seu salsâ, in Spiritibus Vini,

(mm) EX EDITIONE PRIMA.

Hactenus experimentis usi sumus oscillantium Pendulorum, eò quòd eorum motus faciliùs & accuratiùs observari, & mensurari possint. Motus autem Pendulorum in gyrum actorum, &, in orbem redeundo, circulos describentium, propterea quòd sint uniformes, & eo nomine ad investigandam resistentiam datæ velocitati competentem longè aptiores videantur, in consilium etiam

Liber Secundus.

Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo à fæcibus per destillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam fluidi sunt, ut, in vasis agitati, motum impressum diutiùs conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur; nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus, & velociùs motis, instituantur (mm).

Denique cùm nonnullorum opinio sit, Medium quoddam æthereum & longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem Medio, per corporum poros fluente, resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo, pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum Pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus, arcu suo superiore acie annixus, liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam à perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare; ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram Pendulum; dein, Pendulo demisso, notabam alia tria loca, ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpiùs, ut loca illa quàm potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed priùs ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur, ac dimidio partis reliquæ, quæ inter uncum & pyxidem pendulam adhibui. Faciendo enim ut Pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos primâ & ultimâ revolutione descripsit. Et inde collegi velocitates corporis sub initio & fine. Tum dicendo quòd corpus, velocitate mediocri describendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi resistentiam, quâ differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti posset; & resistentia inventa, quanquam hujus generis experimenta minùs accuratè tentare licuit, probè tamen cum præcedentibus congruebat.

De Motu Corporum

dulam tendebatur. Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui Pendulum, à perpendiculo digreſſum, ſemper urget. Huic ponderi addebam pondus Aeris, quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem Penduli, contrahebam filum, ut Penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac priùs. Dein Pendulo ad locum primò notatum retracto ac demiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret; totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertiò notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo, quòd reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena, ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſitâ pyxidis vacuæ, motuum ſuum oſcillatorium tanto diutiùs conſervare deberet, atque ideo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externâ, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur, erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A+B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A+78 B ut 77 ad 78; & diviſim A+B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A+B ad B ut 77×77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ, in partibus internis, quinquies millies minor quàm ejuſdem reſiſtentia in externâ ſuperficie, & ampliùs. Sic verò diſputamus ex hypotheſi quòd major illa reſiſtentia pyxidis plenæ non ab aliâ aliquâ cauſâ latente oriatur, ſed ab actione ſolâ Fluidi alicujus ſubtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulſus ſum.

Liber Secundus

ſum. Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citiùs retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quòd uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, &, ejus oſcillationibus obſequendo, in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſuprà deſcripſimus.

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Reſiſtentiâ Projectilium.

PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

Si Corporum Syſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno ſyſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant (eæ inter ſe quæ in uno ſunt ſyſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuò quæ in eodem ſunt ſyſtemate, niſi in momentis reflexionum; neque attrahant, vel fugent ſe mutuò, niſi viribus acceleratricibus, quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſè & quadrata velocitatum directè: dico, quòd Syſtematum particulæ illæ pergent inter ſe, temporibus proportionalibus, ſimiliter moveri.

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem, in fine temporum illorum, ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius ſyſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Undè tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes à particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi Syſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incœptorum motuum, pergent ſimiliter moveri, uſque donec ſibi mutuò occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motûs Leg. 1. Si viribus aliquibus ſe mutuò agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſè

&

De Motu Corporum

& quadrata velocitatum directè; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per legum Corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient, ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt (per Corol. 1 & 8. Prop. IV. Lib. 1.) ſi modò centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris, quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos; & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuò inciderint, & ſic deinceps in infinitum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuò in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas, ſimili cum motu, utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROP.

PROP. XXXIII. THEOR. XXVII.

Liber Secundus.

Iiſdem poſitis, dico, quòd Syſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum ſuarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis, quibus particulæ ſyſtematum ſe mutuò agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur; id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per hypotheſin) ut quadrata velocitatum directè, & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſè, & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directè; ideoque, cùm diſtantiæ particularum ſyſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in ſyſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum; reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium ſyſtematum. Q. E. D. Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, & ſpatia inter earum reflexiones inverſè. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo Elaſtica, ad modum Aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia, & partibus Fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices,

ratrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuò agitant, sint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia, ac diametris suis proportionalia, describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido Projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuò agitant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur Media tria A, B, C, ex partibus similibus, & æqualibus, & secundum distantias æquales regulariter dispositis, constantia. Partes Mediorum A & B fugiant se mutuò viribus quæ sint ad invicem ut T & V; illæ Medii C ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his Mediis moveantur; priora duo D & E in prioribus duobus A & B, & altera duo F & G in tertio C: sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in subduplicatâ ratione virium T ad vires V: resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F, & resistentia corporis E ad resistentiam corporis G, in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F ut resistentia corporis E ad resistentiam corporis G. Sunto corpora D & F æquivelocia, ut & corpora E & G; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum Medii B in eâdem ratione duplicatâ, accedet Medium B ad formam & conditionem Medii C pro libitu; & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his Mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quàm data quævis. Proinde cùm resistentiæ corporum D & F sint ad invicem ut resistentiæ corporum E & G, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F, ubi velocissimè moventur, resistentiæ sunt æquales quàm proximè: & propterea cùm resistentia corporis F sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

Corol.

Corol. 3. Corporis in Fluido quovis Elastico velocissimè moti eadem ferè est resistentia, ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuò non fugerent: si modo Fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit, ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes distantes se mutuò non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum resistentiæ, in Fluido Elastico, ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora similia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuò non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motûs quantitatem imprimant, & vicissim (per motûs Legem Tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam, quòd in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistentiæ quàm proximè; sive Fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistentia Projectilium, celerrimè motorum, non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quòd si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minùs liberi: resistentia, ob minorem Medii Fluiditatem, erit major quàm in superioribus Corollariis.

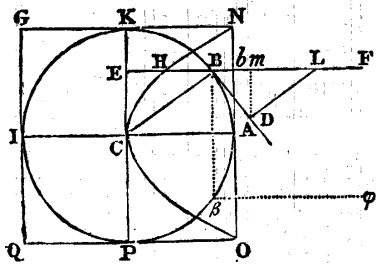
PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris descripti, in Medio Raro, ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia Globi duplo minor quàm resistentia Cylindri.

Nam quoniam actio Medii in corpus eadem est (per Legum Co-

De Motu Corporum

rol. 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ, eâdem cum velocitate, impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus, quo impetu urgebitur à Medio movente. Deſignet igitur ABKI corpus Sphæricum, centro C, ſemidiametro CA deſcriptum; & incidant particulæ Medii, datâ cum velocitate, in corpus illud Sphæricum, ſecundum rectas ipſi AC parallelas: ſitque FB ejuſmodi recta. In eâ capiatur LB ſemidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ ſphæram tangat in B. In KC & BD demittantur perpendiculares BE, LD; & vis, quâ particula Medii, ſecundum rectam FB obliquè incidendo, Globum ferit in B, erit ad vim, quâ particula eadem Cylindrum ONGQ, axe ACI circa Globum deſcriptum, perpendiculariter feriret in *b*, ut LD ad LB, vel BE ad BC. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum Globum, ſecundum incidentiæ ſuæ



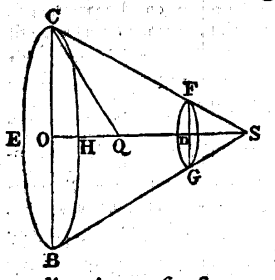
plagam FB vel AC, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum Globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ BC quâ Globum directè urget, ut BE ad BC (a). Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ in Globum ſecundum rectam FB obliquè incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi in *b*E, quæ perpendicularis eſt ad Cylindri baſem circularem, NAO, & æqualis radio AC, ſumatur

(a) Nam à puncto D in rectam BL rectâ *Dm* ad perpendiculum demiſſâ, vis DL in duas *Lm*, *m*D reſolvitur, quarum illa *Lm*, cum axe AC parallela, motui corporis ſecundum axem adverſatur. Pars altera MD, cum rectâ KP parallela, motum aliquem in corpore ſecundum rectam illam excitaret, niſi effectus ejus vi æquali et contrariâ tolleretur, à corpuſculo illo oriundâ, quod ſuperficiei ſphæricæ in puncto β impinget, ubi recta à B in axem AC ad perpendiculum demiſſa cum ſuperficie ſphæricâ iterum concurrit. Vis igitur totius LB, pars BD tollitur per ſuperficiei figuram. Reliquæ LD pars *Dm* tollitur per vim contrariam corpuſculi puncto β impingentis. Relinquitur ſola vis *Lm*, quæ, in impetu corporis reſtinguendo, effectum ſuum edere poſſit. Hæc autem *Lm* ad totam LB rationem habet ejus quam recta LD ad rectam LB duplicatam. Ac proinde, in Sphærâ, duplicatam ejus quam BE habet ad CB. Et in omni Solido rotundo (Rotundum dico quod tali figurâ ſit præditum, ut plana omnia, quæ ſuper rectâ quâdam poſitione datâ, quam axem voco, ad perpendiculum erigantur, ſuperficiem ſolidi ſecando, circulos effecerint), in omni inquam iſtius modi Solido, quod per materiam aliquam fluidam raram, undique uniformem, ſecundum axis ſui directionem progrediatur, par erit ratio vis renixûs, quam ſuperficiei pars quæque percipiet. Nempe

ſumatur *b*H æqualis $\frac{\text{BE quad.}}{\text{CB}}$: erit *b*H ad *b*E ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea Solidum, quod à rectis omnibus *b*H occupatur, erit ad Solidum, quod à rectis omnibus *b*E occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed Solidum prius eſt Parabolois, vertice C, axe CA, & latere recto CA deſcriptum (b); & Solidum poſterius eſt Cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt, quòd Parabolois ſit ſemiſſis Cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eſt duplo minor quàm ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia Globi duplo minor quàm reſiſtentia Cylindri. Q. E. D. Liber Secundus.

Scholium.

Eâdem methodo Figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt; eæque inveniri, quæ ad motus ſuos, in Mediis reſiſtentibus, continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari CEBH, quæ centro O, radio OC deſcribitur, & altitudine OD, conſtruendum ſit fruſtum Coni (c) CBGF, quod omnium, eâdem baſi & altitudine conſtructorum, & ſecundum plagam axis ſui verſus D progredientium fruſtorum, minimè reſiſtatur: biſeca altitudinem OD in Q, & produc OQ ad S, ut ſit QS æqualis QC; & erit S vertex coni cujus fruſtum quæritur (d).



Unde

Nempe ut vis corpuſculi cujuſque, quod in punctum quodpiam B impingat, ad motum corporis reſtinguendum, ad vim quâ idem corpuſculum polleret, ſi eâdem cum velocitate ſuperficiem ad perpendiculum feriret, eam rationem habeat quæ duplicata ſit ejus quam ſinus anguli LBD, obliquitatis utique ictûs in loco B, ad radium habet.

(b) Nam cùm rectangulum CB × *b*H, ſive CA × *b*H, quadrato ex BE æquale ſit, hoc eſt, rectangulo KE × EP, ſive N*b* × *b*D, idcirco punctum H erit ad Parabolam, vertice C, axe CA, parametro quæ datæ CA ſit æqualis, in plano rectanguli CN ſcribendam. Ac proinde, plano illo poſitione non dato, ad ſuperficiem Paraboloideos, converſione talis Parabolæ circa axem CA, poſitione datum, generandam.

(c) Recti ſcilicet.

(d) Vis renixûs quam ſuperficies Coni recti SCB, cujus vertex S, baſis circulus CEBH, percipiet, ad eam quam Cylindrus Rectus perciperet, qui eundem circulum baſim haberet, ſi eâdem cum velocitate quâ conus, per ſimilem materiam fluidam, ſecundum axem OS Coni et Cylindri commu-

De Motu Corporum

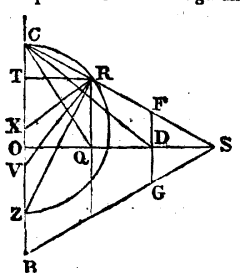
Unde obiter, cùm angulus CSB ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quòd ſi Solidum ADBE convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis, ADBE, circa axem AB factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus, FG, GH, HI, in punctis F, B & I; eâ lege, ut GH ſit perpendicularis ad axem in puncto contactûs B, & FG, HI cum eâdem GH contineant angulos, FGB, BHI, graduum 135; Solidum, quod convolutione figuræ ADFGHIE circa axem eundem AB generatur, minùs reſiſtitur quàm Solidum prius; ſi modò utrumque ſecundum plagam axis ſui AB progrediatur, & utriuſque terminus B præcedat. Quam quidem Propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

Quòd ſi figura DNFG ejuſmodi ſit Curva, ut, ſi ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto

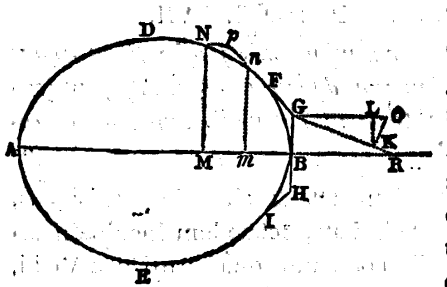
nem ferretur, eam rationem habet, quam quadratum ex CO ad quadratum ex CS. Id enim ex iis quæ ſuprà oſtendimus (Not. [2]) quivis opinor intelliget. Similiter vis renixûs, quam ſuperficies Coni SFG percipiet, ad vim quam perciperet Cylindrus, cujus baſis circulus FG, rationem habet quam quadratum ex FD ad quadratum ex FS, ſive eam quam quadratum ex CO ad quadratum ex CS. Hinc ſi vis renixûs, quam Cylindrus, baſi circulo CEBH, ſuſtineret, exponatur per co^2, erit FD^2 vis renixûs quam Cylindrus baſe FG perciperet, ſi eadem cum velocitate, quâ alter cylindrus, ferretur: erit autem $co^2 \times \frac{co^2}{cs^2}$ vis quam ſuperficies Coni SCE, et $FD^2 \times \frac{co^2}{cs^2}$ vis quam ſuperficies Coni minoris SFG percipiet. Unde vis illa quam ſuperficies conica, circulis FG, CB intercepta, percipiet, ea erit $\overline{co^2 - FD^2} \times \frac{co^2}{cs^2}$. Sed vis renixûs quam fruſtum conicum GYCB percipiet, ea componetur ex vi illâ, quàm ſuperficies conica circulis FG, CB interjecta perceperit, et ex illâ quam circulus minor FG. Hæc ita ſe habent, ſi fruſtum conicum FCBG, ſecundum directionem axis ſui progrediatur, antecedente utique circulo anguſtiore FG. Erit igitur vis renixus quam fruſtum Coni percipiet, ut $\overline{co^2 - FD^2} \times \frac{co^2}{cs^2} + FD^2$. Secetur Conus SCB plano per axem; quod in baſe et ſuperficie Conicâ triangulum BBC efficiat, & in plano circuli minoris rectam FG. Per Q agatur QE cum baſium diametris, CB, FG, parallela; quæ coni lateri SC in R occurrat. Et agatur RT cum axe SO parallela, quæ rectæ BC in T occurrat. Propter æquales OQ, OD, è tribus rectis CO, RQ, FD, media RQ eâdem differentiâ minimam FD exſuperabit, quâ ipſa à maximâ CO exſuperata eſt. Erit igitur $2RQ = CO + FD$. Et $CO - FD = 2CT$. Quare $4RQ \times CT = \overline{CO + FD} \times \overline{CO - FD} = CO^2 - FD^2$. Hinc vis renixûs, quam fruſtum conicum percipiet, exponetur per $4RQ \times CT \times \frac{co^2}{cs^2}$ $+ \overline{CO - 2CT}\Big|^2$. Hoc eſt, quoniam $co^2 : cs^2 = CT^2 : CR^2$, per $\frac{4RQ \times CT^3}{CR^2} + \overline{CO - 2CT}\Big|^2$. Vel ſi CT deſignetur litera x; OQ, vel TR, literâ a; OC literâ b; vis renixûs in fruſtum conicum erit ut $\frac{\overline{b - 4x}\cdot x^3}{a^2 + x^2} + \overline{b - 2x}\Big|^2 = \frac{= 4bx^3 - 4x^4 + b^2a^2 - 4ba^2x + 4a^2x^2 + b^2x^2 - 4bx^3 + 4x^4 =}{a^2 + x^2}$

$\frac{= b^2a^2 + b^2x^2 - 4ba^2x + 4a^2}{a^2 + x^2}$. Et hujus fluxio $= \frac{+ 8a^2 \dot{x} + 2b^2 x\dot{x} - 4ba^2\dot{x}}{a^2 + x^2} - \frac{+ 8a^2 + 2b^2x^2\dot{x} - 8ba^2x^2\dot{x}}{\overline{a^2 + x^2}\Big|^2} = \dot{x} \times$

$8a^4x +$



Liber Secundus.



to dato O ducatur recta GR, quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum ſecet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4BR \times GBq$; Solidum, quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ deſcribitur, in Medio Raro prædicto ab A verſus B movendo, minùs reſiſtetur, quàm aliud quodvis, eâdem longitudine & latitudine deſcriptum, Solidum circulare (c).

PROP.

$\frac{8a^4x + 4ba^2x^2 - 4ba^4}{\overline{a^2 + x^2}\Big|^2}$

Ut vis renixûs in fruſtum minima fiat, hæc fluxio nihilo æquanda eſt. Et ex hâc fluxione nihilo æquatâ veniet, $4ba^2x^2 + 8a^4x - 4ba^4 = 0$. Unde etiam $x^2 + \frac{2a^2}{b}x = a^2$. Ex hâc denique æquatione facilè efficitur rectarum QE, QC inter ſe æqualitas. Junctâ enim CD, conſtituatur angulus TRV angulo DCO æqualis. Et propter angulos ad T, O rectos, triangula VTR, DOC erunt inter ſe ſimilia; et VT erit ad TR vel a, ut DO vel $2a$ ad OC, vel b. Quare $VT = \frac{2a^2}{b}$. Et $x^2 +$ $VT \cdot x = a^2$; hoc eſt $CT^2 + VT \times TC$, ſive $VC \times CT = TR^2$. Si igitur capiatur TZ æqualis illi VC, rectangulum ZT × TC quadrato ex TR æquale erit; junctâque ZR, angulus ZRC erit rectus. Punctum igitur R erit ad ſemicirculum, diametro CZ conſtitutum. Et ſi CZ in puncto X media dividatur, junctâ XR utrique XC, XZ æqualis erit. Triangulum igitur XRZ iſoſceles erit, et anguli XRZ, XZR erunt inter ſe æquales. Sed propter æquales CV, TZ, erunt CT, VZ inter ſe æquales. Unde propter æquales etiam XC, XZ, erunt XT, XV inter ſe æquales. Quare VX ſemiſſis erit rectæ VT. Sed et DQ ſemiſſis rectæ DO. Quare VX eſt ad VT ut DQ ad DO. Sed propter triangula COD, RTV inter ſe ſimilia, anguloſque eorum ad D et V, O et T ſingulatim inter ſe æquales; erit VT ad VR ut DO ad DC. Ex æquo igitur VX erit ad VR ut DQ ad DC. Triangula igitur XVR, QDC inter ſe ſimilia, et anguli XRV, DCQ inter ſe æquales erunt. Rurſum propter angulos ZRC, RTZ rectos, angulus RZT angulo CRT, ac propterea angulo CSD, æqualis erit. Sed et angulus RVT angulo CDO. Hoc eſt $RZV + VRZ = CSD + DCS$. Quare et VRZ, DCS inter ſe æquales. Totus igitur XRZ, ex illis XRV, VRZ compoſitus, toti QCS, ex illis DCQ, DCS compoſito, æqualis erit. Sed XRZ oſtenſus eſt æqualis illi XZR, cui etiam CSD, ſive QSC. Anguli igitur QCS, QSC inter ſe æquales. Quare et rectæ QC, QS inter ſe æquales. Q. E. D.

Cor. H. Hinc fruſtum Coni recti tenuiſſimum, cui ſecundum axis ſui directionem progrediendum eſt, minimum impedimenti à renixu materiæ circumfuſæ percipiet, ſi angulus ad verticem Coni, à quo fruſtum fuerit reciſum, rectus fuerit. Hoc eſt ſi latera Coni angulos ſemirectos cum baſium diametris faciant.

Nam ſi fruſtum Coni recti, FCBG, tale ſit, cui, ſecundum axem progredienti, renixus materiæ circumfuſæ minimum impedimenti afferat, erunt QS, QC inter ſe æquales, et anguli QSC, QCS inter ſe æquales. Et evaneſcente fruſti altitudine OD, rectarum QS, QC, angulorumque QSC, QCS inter ſe æqualitas uſque manebit. At verò altitudine illâ OD in nullam tandem redactâ, angulus QCO in nihilum abierit, et angulus QCS in totum OCS ultimò crevcrit. Fient igitur anguli OCS, OSC ultimò inter ſe æquales. Quapropter, cùm rectus ſit angulus ad O, illorum OSC, OCS uterque ſemirectus erit. Q. E. D.

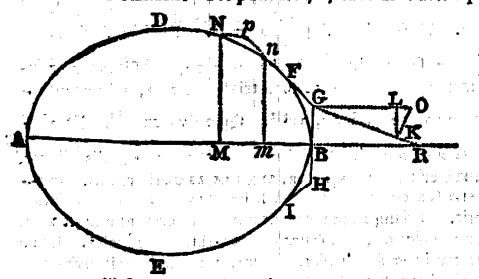
(c) Nimirum ſi tale ſit Solidum, converſione Curvæ NFG circum axem AB genitum, quod, ſecundum axem illum progrediendo, minus impedimenti ex renixu materiæ circumfuſæ percipiat, quàm aliud quodcunque Solidum rotundum, quod cùm eundem habeat axem, eandem axis longitudinem, eoſdemque circulos extremos, pari cum velocitate ſecundum axis directionem feratur:

De Motu Corporum

PROP. XXXV. PROB. VII.

Si Medium Rarum ex particulis quàm minimis quiescentibus, æqualibus, & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam Globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus, eâdem diametro & altitudine descriptus, progredi intelligatur, eâdem velocitate, secundum longitudinem axis sui, in eodem Medio. Et ponamus, quòd particulæ Medii, in quas Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quàm maximâ resiliant. Et cùm resistentia Globi (per Propositionem noviſſimam)



si tale inquam, fit Solidum conversione Curvæ NFG circa axem ABG genitum, superficies ejus convexa vim renixûs omni parte minùs percipiet, quàm aliûs cujusvis Solidi convexa superficies, quâ parte circulis eisdem hinc inde intercepta est. Nempe hoc dico. Sint MN, *mn* duæ quælibet Curvæ NFG ordinatæ. Per puncta N, *n*, ducatur Curvæ quævis *Npn*, à Curvâ NFG diversa. Superficies convexa, quam, conversione sui circa axem AB, arcus *Nn* generaverit, vim renixûs minùs sentiet, quàm alia illa superficies convexa, quam arcus *Npn* unà conversus generaverit. Nam si aliter se res habeat, omninò Solidum, conversione figuræ *NpnFG* genitum, vim renixûs minùs, vel non magis, percipiet, quàm illud, quod unum ex omnibus quàm minimè eam percipere posuimus. Quod est absurdum. Superficies igitur, quam Curvæ NFG arcus *Nn* generaverit, vim renixûs una ex omnibus, quæ circulis quorum radii sunt MN, *mn* interciplantur, quàm minimè percipiet: idque in omni circulorum illorum distantiâ, magna illa parvave fuerit. Accedat igitur Ordinata *mn* illam MN, ut distantia *Mm*, sensim evanescens in nihilum ultimò abeat. Corpuscula omnia, quæ superficiei ab arcu evanescente *Nn* genitæ ultimò impingunt, vi æquali eam feriunt, cùm omnium similes ultimò sint obliquitates. Quare vis, quam superficies illa evanescens ultimò percipiet, erit ut corpusculorum numerus et singulorum vis conjunctim. Agatur per G recta GO cum axe AB parallela. Et capiatur GO datæ cujusvis longitudinis. A puncto O in rectam GR deducatur ad perpendiculum recta OK; et à puncto K in rectam GO ad perpendiculum deducatur KL. Cùm angulus OGK fit obliquitas, quâ corpuscula materiæ fluidæ Solidi superficiei in loco N impingunt, erit vis uniuscujusque, ibi loci impingentis, ad vim quâ pollerent singula ad perpendiculum incursantia, ut recta LO ad datam GO (Not. [a].) Numerus autem eorum, quæ superficiei, evanescente arcu *Nn* genitæ, impingunt, est ultimò ut circuitus circuli cujus radius MN; hoc est, ut recta ipsa MN. Vis igitur, quam superficies illa evanescens ultimò percipiet, erit ut rectangulum MN × LO. Cùm igitur superficies illa una ex omnibus, quæ circulis quorum radii MN, *mn* intercipiantur, vim renixûs quàm minimè semper percipiat; ad naturam Curvæ NFG definiendam, illud disquirendum est, quænam ejus figura esse oporteat, ut in omni datâ magnitudine rectæ MN, rectangulum MN × LO minimum fit. At verò minimum fiet rectangulum illud, exsistente LO minimâ. Est autem LO ad OG ut OK^2 ad OG^2. Et propter angulos ad K et B rectos, angulosque OGK, GRB inter se æquales, triangula OGK, GRB erunt inter se similia, et OK^2 erit ad OG^2 ut GB^2 ad GR^2. Quare LO erit ad OG ut GB^2 ad GR^2. Solidum igitur LO × GR^2 dato Solido OG × GB^2 æquale. Ac proinde minimâ exsistente LO erit GR maxima. Sed maximâ exsistente GR propter datam GB, erit BR quoque maxima. Quare minimâ exsistente LO, erit BR maxima. Et si litera *a* rectam quandam magnitudine stabilem designet, minimo exsistente rectangulo MN × LO, rectangulum *a* × BR maximum erit. Ac proinde rectangulorum illorum differentia maxima vel minima, prout excessus pe-

Liber Secundus.

mam) sit duplo minor quàm resistentia Cylindri, & Globus sit ad Cylindrum ut duo ad tria; & Cylindrus, incidendo perpendiculariter in particulas ipsasque quàm maximè reflectendo, duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: Cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum Cylindri motum ut densitas Medii ad densitatem Cylindri; & Globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformiter progrediendo describit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum Globi motum ut densitas Medii ad densitatem Globi. Et propterea Globus resistentiam patitur,

nes hoc vel illud fuerit. Hoc est spatium $a \times BR - MN \times LO$ maximum, vel $MN \times LO - a \times BR$ minimum. Illud igitur nos disquirere oportet, quænam Curvæ NFG figura efficiat, ut rectangulorum illorum differentia maxima vel minima fit. Hunc in finem ponatur $\dot{a} \times \dot{BR} - \dot{MN} \times LO = 0$. Erit igitur $\dot{MN}$ ad a ut $\dot{BR}$ ad $\dot{LO}$. Sed propter Solidum $LO \times GR^2$ magnitudine datum, Solida $\dot{LO} \times GR^2$, $2GR.GR.\dot{LO}$ inter se æqualia erunt. Unde $\dot{LO}$ erit ad $\dot{GR}$ ut 2LO ad GR. Rursum propter quadratum ex GR duobus è GB, BR æquale, quorum illud è GB datum est; erunt rectangula $\dot{GR} \times GR$, $\dot{BR} \times BR$ inter se æqualia. Quare $\dot{GR}$ erit ad $\dot{BR}$ ut BR ad GR. Cùm igitur fit $\dot{LO} : GR = 2LO : GR = 2LO \times BR : BR \times GR$; et $\dot{GR} : \dot{BR} = BR : GR = BR \times GR : GR^2$; ex æquo erit $\dot{LO}$ ad $\dot{BR}$ ut $2LO \times BR$ ad GR^2. At vero a erat ad MN ut $\dot{LO}$ ad $\dot{BR}$. Quare a erit ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Ut verò hoc semper obtineat in omni magnitudine rectæ MN, manente magnitudine rectæ a; illa a haud pro arbitrio, sed certæ sumenda erit longitudinis. Quæ qualis esse debeat, exploremus. Puta MN in locum B transferri, ut fit MN = BG. Talis igitur sumenda est a, quæ sit ad BG ut $2LO \times BR$ ad GR^2. At vero ordinata BG ad Curvam NFG necesse est angulo semirecto inclinata fit. Aliter enim Solidum, conversione ejus Curvæ circa axem AB genitum, & ad circulum, cujus radius BG, terminatum, minimè illud erit, quod, secundum axis AB directionem progrediendo, minimum impedimenti à renixu materiæ circumfusæ percipiet. (Vide Not. [d], Cor.) Sed tale illud Solidum posuimus. Ordinata igitur BG angulo semirecto ad Curvam inclinata est. Angulus igitur BGR, congruente MN cum BG, fit semirectus. Rectæ igitur GB, BR fient inter se æquales, et quadratum ex GR duplum erit quadratum ex GB. Talis igitur sumenda erit a, quæ sit ad BG ut $2LO \times GB$ ad $2GB^2$, hoc est ut LO ad GB. Igitur sumenda erit illa a æqualis rectæ LO, qualis utique illa fit, quando angulus BGR est semirectus. Tunc verò, propter triangula GOK, RGB semper inter se similia, angulus KOG semirectus, et LO semissis erit rectæ GO. Quare a sumenda erit datæ GO semissis. Et si talis sumatur a, erit semper a ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Hoc est $\frac{1}{2}$ GO erit ad MN ut $2LO \times BR$ ad GR^2. Invertendo MN ad $\frac{1}{2}$ GO ut GR^2 ad $2LO \times BR$. Quare $MN \times GR$ erit ad $\frac{1}{2}GO \times GR$ ut GR^2 ad $2LO \times BR$. Permutando MN erit ad GR ut $\frac{1}{2}GO \times GR$ ad $2LO \times BR$, sive ut $GR \times GO$ ad $4BR \times LO$. Habebit igitur MN ad GR rationem eam, quæ componitur è rationibus rectæ GR ad 4BR rectæque GO ad LO. Sed ratio rectæ GO ad LO eadem est, quæ quadrati ex GR ad quadratum ex GB. Id enim suprà nos ostendimus. Ratio igitur rectæ MN ad rectam GR componitur è rationibus rectæ GR ad 4BR, quadratique ex GR ad quadratum ex GB. Sed ex eisdem composita est ratio Cubi ex GR ad Solidum $4BR \times GB^2$. Quare $MN : GR = GR^3 : 4BR \times GB^2$, sicut Newtonus pronunciavit. Q. E. D.

Reconditissimi Problematis, quod viros ingenio præstantissimos, Fatium, Craigium, Hospitalium, Bernouillium, aliosque exercuit, si quid aut lucis aut elegantiæ præ aliis nostra fortè enodatio habeat, illud omne summo viro Maclaurino referendum est. Qui, si non eandem, simillimam certè in eximio suo Opere De Fluxionibus hujus Problematis resolutionem attulit. *(Vide Treatise of Fluxions by Colin Maclaurin*, § 606 & 607.)

quæ

quæ ſit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri poſſit, vel generari, quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Caſ. 2. Ponamus quòd particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus, incidendo perpendiculariter in particulas, ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quàm in priore caſu; & reſiſtentia Globi erit etiam duplo minor quàm priùs.

Caſ. 3. Ponamus quòd particulæ Medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, ſed mediocri aliquâ reſiliant à Globo; & reſiſtentia Globi erit in eâdem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc ſi Globus & particulæ ſint infinitè dura, & vi omni elaſticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis, deſtituta: reſiſtentia Globi erit ad vim, quâ totus ejus motus vel auferri poſſit, vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Corol. 2. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas Medii.

Corol. 5. Reſiſtentia Globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione denſitatis Medii (f).

Corol. 6. Et motus Globi, cum ejus reſiſtentiâ, ſic exponi poteſt. Sit AB tempus, quo Globus, per reſiſtentiam ſuam uniformiter

(f) Vis renixus dicatur R. Diameter globi *d*. Velocitas globi C. Tempus, quo velocitate C ſpatium $\frac{4}{3}d$ confecerit, dicatur T. Vis, quâ, tempore T, motus globi, celeritate C lati, vel generari vel extingui poſſit, dicatur V. Denſitas materiæ fluidæ dicatur D, globi Δ.

Jam ex hac Propoſitione $R : V = D : \Delta$. Quare $R = \frac{V \times D}{\Delta}$. Sed V erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times C}{T}$. Et T erit ut $\frac{4d}{C}$. Quare V erit ut $\frac{d^3 \times \Delta \times C^2}{\frac{4}{3}d}$, hoc eſt ut $d^2 \times \Delta \times C^2$. Hinc autem R $(= \frac{V \times D}{\Delta})$ erit ut $d^2 \times C^2 \times D$. Quod eſt Corollarium Quintum Newtoni.

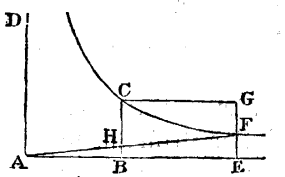
Datis autem *d*, et C, erit R ut D: quod eſt Quartum Newtoni Corollarium.

Et datis D et C, erit R ut d^2: quod Tertium eſt Newtoni Corollarium.

Et datis *d* et D erit R ut C^2: quod eſt Secundum Newtoni Corollarium.

(g) Modò illud intelligatur, quod ſatis apertum eſt, rectam CB ad BH rationem habere duplicatam

miter continuatam, totum ſuum motum amittere poteſt. Ad AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C, Aſymptotis AD, AB, deſcribatur Hyperbola CF.



Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF, hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum CBEG, & agatur AF ipſi BC occurrens in H. Et ſi Globus, tempore quovis BE, motu ſuo primo BC uniformiter continuato, in Medio non reſiſtente, deſcribat ſpatium CBEG per aream parallelogrammi expoſitum; idem, in Medio reſiſtente, deſcribet ſpatium CBEF per aream hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam EF, amiſſâ motûs ejus parte FG. Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem BH, amiſſâ reſiſtentiæ parte CH. Patent hæc omnia per Corol. 1 & 3. Prop. V. Lib. II (g).

Corol. 7. Hinc ſi Globus, tempore T, per reſiſtentiam R uniformiter continuatam, amittat motum ſuum totum M: idem Globus, tempore *t*, in Medio reſiſtente, per reſiſtentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decreſcentem, amittet motûs ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium motu uniformi M, eodem tempore *t*, deſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$: propterea quòd area hyperbolica BCFE eſt ad rectangulum BCGE in hâc proportione (h).

Scholium.

catam ejus, quam eadem CB habet ad EF. Namque propter hyperbolam erit CB ad EF ut AE ad AB. Et propter rectas EF, BH inter ſe parallelas, erit AE ad AB ut EF, BH. Quare erit CB ad EF ut EF ad BH.

(h) Nempe ſi AB dicatur T; EB, M; BF, *t*; erit EF, pars motûs reliqua, $= \frac{AB \times BC}{AE} = \frac{TM}{T \times t}$. Unde FG, pars motûs amiſſa, $= M - \frac{TM}{T \times t} = \frac{tM}{T \times t}$.

Rurſum, ſi pro Modulo logarithmorum ex hyperbolâ CF, ponatur 1, et B pro Modulo Briggiano, erit CBEF ad logarithmum numeri $\frac{T \times t}{T}$ Briggianum ut 1 ad B. Unde CBEF $=$ Log. $\frac{T \times t}{T} \times \frac{1}{B}$. Sed $\frac{1}{B} = 2{,}302585092994$, vid. Coteſ. Harmon. Menſ. Prop. II. Quare CBEF $=$

De Motu Corporum

Scholium.

In hâc Propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis; & oſtendi, quòd hæc reſiſtentia ſit ad vim, quâ totus Globi motus vel tolli poſſit, vel generari, quo tempore Globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuatâ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi, ſi modò Globus & particulæ Medii ſint ſummè elaſtica, & vi maximâ reflectendi polleant: quòdque hæc vis ſit duplo minor, ubi Globus & particulæ Medii ſunt infinitè dura, & vi reflectendi prorſus deſtituta. In Mediis autem Continuis, qualia ſunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum Vivum, in quibus Globus non incidit immediatè in omnes Fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantùm proximas particulas, & hæ premunt alias, & hæ alias; reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique, in hujuſmodi Mediis fluidiſſimis, reſiſtentiam patitur, quæ eſt ad vim, quâ totus ejus motus vel tolli poſſit, vel generari, quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROP. XXXVI. PROB. VIII.

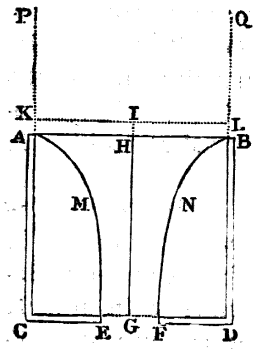
Aquæ de vaſe Cylindrico, per foramen in fundo factum, effluentis definire motum (i).

Sit ACDB vas Cylindricum; AB, ejus orificium ſuperius; CD fundum horizonti parallelum; EF, foramen circulare in medio fundi; G centrum foraminis; & GH, axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge Cylindrum glaciei APQB ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuò deſcendere; & partes ejus, quàm primùm attingunt ſuperficiem AB, liqueſcere, &, in aquam converſas, gravitate ſuâ defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ ABNFEM cadendo formare, & per foramen EF tranſire, idemque adæquatè

Log. $\frac{T \times t}{T} \times 2{,}302585092994$. Rectangulum autem BG $= tM$. Sed propter AB $\times$ BC, ſive TM, $= 1$ erit M $= \frac{1}{T}$. Quare BG $= \frac{t}{T}$. Quare CBEF : BG $=$ Log. $\frac{T \times t}{T} \times 2{,}302585092994 : \frac{t}{T}$.

implere.

Liber Secundus.



implere. Ea verò ſit uniformis velocitas Glaciei deſcendentis, ut & Aquæ contiguæ in circulo AB, quam aqua, cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IH, acquirere poteſt; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela, & lateribus Glaciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ, effluentis per foramen EF, ea erit, quam aqua, cadendo ab I & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt. Ideoque, per Theoremata *Galilæi*, erit IG ad IH in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB; hoc eſt, in duplicatâ ratione circuli AB ad circulum EF; nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hîc non conſideratur. Supponimus quidem, quòd partes aquæ aliquantulum cohærent, &, per cohæſionem ſuam, inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos; ut unicam tantùm efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: ſed motum horizonti parallelum, à cohæſione illâ oriundum, hîc non conſideramus.

Caſ. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis ABNFEM, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem, tanquam per infundibulum, tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantùm non tangat; vel, quod perinde eſt, ſi tangat, & per glaciem, propter ſummam ejus polituram, quàm liberrimè & ſine omni reſiſtentiâ labatur; hæc defluet per foramen EF eâdem velocitate ac priùs, & pondus totum columnæ aquæ ABNFEM impendetur in defluxum ejus generandum uti priùs, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

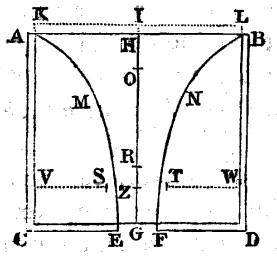
(i) Locum hunc de motu Aquarum, quæ è vaſe cylindraceo, tenui foramine pertuſo, profluant, multis tractârunt Jurinus in Actis Philoſophicis, Maclaurinus in præclaro ſuo Opere de Fluxionibus, D. Bernoullius in Hydrodynamicâ, et Polenus.

Liquefcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac priùs. Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere, niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quàm priùs. Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quàm in ipſo foramine; exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quàm proximè, ſi modò diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam, pertenuem, in medio perforatam; exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur, & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis affixi; ſic ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum eſſet, aperui foramen, ut aqua effluëret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine, quàm accuratiſſimè menſurata prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproximè. Aqua igitur, tranſeundo per foramen, convergit undique; & poſtquam effluxit ex vaſe, tenuior redditur convergendo; & per attenuationem acceleratur, donec ad diſtantiam ſemiſſis digiti à foramine pervenerit, & ad diſtantiam illam tenuior & celerior fit, quàm in ipſo foramine, in ratione 25×25 ad 21×21, ſeu 17 ad 12, quamproximè; id eſt in ſubduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta verò conſtat, quòd quantitas aquæ, quæ, per foramen circulare in fundo vaſis factum, dato tempore effluit, ea ſit, quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet

bet deorſum, in ipſo foramine, quam grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproximè. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo, donec ad diſtantiam à foramine diametro foraminis propè æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproximè.

In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus, quod vocavimus EF. Et plano foraminis EF parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius, VW, ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter, & foramine majore ST pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius, EF, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio Problematis poſtulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio Problematis ſimplicior ſit & magis mathematica,



præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quòd Aqua, quæ per Glaciem, ceu per infundibulum, defluebat, & è vaſe per foramen EF in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuò ſervet, & Glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit ST diameter foraminis circularis, centro Z deſcripti, per quod cataracta effluit ex vaſe, ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit EF diameter foraminis, per quod cataracta cadendo adæquatè tranſit, ſive Aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius ST, ſive cadat per medium Glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ, è vaſe per foramen ST exeuntis, ea erit in ipſo foramine deorſum, quam corpus cadendo à dimidio

dimidio altitudinis IZ acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG acquiret.

Caſ. 2. Si foramen EF non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac prius, ſi modò eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam, quàm per lineam perpendicularem; ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies AB & KL quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quòd velocitas aquæ effluentis ea ſit, quàm corpus ab aquæ, in vaſe ſtagnantis, altitudine HG, vel IG, cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni, quòd ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum, & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo, quod in planum illud à foramine demittebatur, captam. Nam ſine reſiſtentiâ, vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ, in vaſe ſtagnantis, altitudinem GH, vel GI; niſi quatenus aſcenſus ejus ab Aeris reſiſtentiâ aliquantulum impediatur; ac proinde eâ effluit cum velocitate, quam, ab altitudine illâ cadendo, acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per Prop. XIX. Lib. 2.) &, preſſioni cedendo, æquali impetu in omnes partes fertur; ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem, & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem, quâ aqua effluit, eam eſſe, quam in

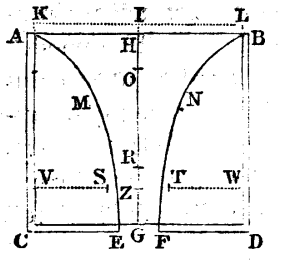
hâc Propoſitione aſſignavimus, non ſolùm ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.

Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas, ſive figura foraminis ſit circularis, ſive quadrata, vel triangularis, aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, ſed oritur ab ejus altitudine infra planum KL.

Caſ. 6. Si vaſis ABDC pars inferior in aquam ſtagnantem immergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas, quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR, acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe, quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo, CA, producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicatâ ratione areæ foraminis, in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli AB: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC, acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo 2GI vel 2CK. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.



Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe ABDC eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum AB & EF ad duplum circulum EF. Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta, cadendo ab I, deſcribere poſſet altitudinem IG, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus EF & altitudo eſt 2IG; id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo eſt 2IO:

De Motu Corporum

nam circulus EF eſt ad circulum AB in ſubduplicatâ ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta, cadendo ab I, deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro, cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo eſt 2IH: & quo tempore gutta, cadendo ab I per H ad G, deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in Solido ABNFEM, æqualis erit differentiæ Cylindrorum; id eſt, Cylindro cujus baſis eſt AB, & altitudo 2HO. Et propterea aqua tota in vaſe ABDC eſt ad aquam totam cadentem in Solido ABNFEM ut HG ad 2HO, id eſt, ut HO+OG ad 2HO, ſeu IH+IO ad 2IH. Sed pondus aquæ totius, in Solido ABNFEM, in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut IH+IO ad 2IH; atque ideo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe ABDC eſt ad ponderis partem alteram, quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum AB & EF ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF ad duplum circulum minorem EF, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF; ſive ut circulus AB ad exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum. Nam ponderis pars, qua ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum AB & EF ad ſummam eorundem circulorum, per Cor. 4: & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF, vel exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum (k).

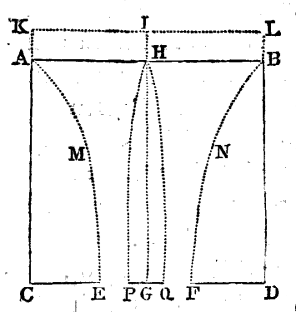
Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur circellus PQ, centro

(k) Sextum hoc Corollarium à Cotesio eſt.

G de-

Liber Secundus.

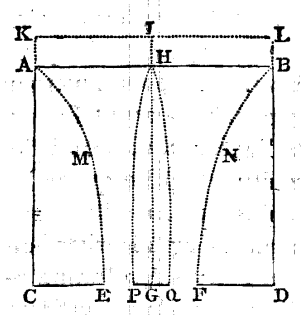
G deſcriptus, & horizonti parallelus: pondus aquæ, quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo eſt GH. Sit enim ABNFEM cataracta, vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut ſuprà;



& congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quàm ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit PHQ columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens H, & altitudinem GH. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere, & non incumbere in PHQ, nec eandem premere, ſed liberè & ſine frictione præterlabi; niſi fortè in ipſo Glaciei vertice, quo cataracta, ipſo cadendi initio, incipiat eſſe cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata, AMEC, BNFD, convexa eſt in ſuperficie internâ, AME, BNF, verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna PHQ convexa erit verſus cataractam; & propterea major Cono, cujus baſis eſt circellus ille PQ, & altitudo GH; id eſt, major tertiâ parte Cylindri eâdem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ; id eſt, pondus, quod pondere Coni, ſeu tertiæ partis Cylindri illius, majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valdè parvus PQ ſuſtinet, minor eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille, & altitudo eſt HG. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium Sphæroidis, cujus baſis eſt circellus ille, & ſemiaxis ſive altitudo eſt HG. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius, & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ, cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maximè directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi, PQ, in angulo nonnihil acuto; propterea quòd aqua, cadendo, perpetuò acceleratur, &, propter accelerationem, fit tenuior; & cùm angulus ille ſit recto minor, hæc columna, ad inferiores ejus partes, jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem verò ſurſùm acuta erit, ſeu cuſpidata; ne horizontalis motus aquæ, ad verticem Sphæroidis, ſit

De Motu Corporum



infinitè velocior quàm ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus PQ, eo acutior erit vertex columnæ; &, circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, seu duabus tertiis partibus Cylindri, cujus basis est circellus ille, & altitudo GH. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ, quam circellus valdè parvus, PQ, sustinet, æquale est ponderi Cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}$GH quamproximè. Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valdè parvus, sed augeatur, donec æquet foramen EF; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

Corol. 10. Et (quantùm sentio)(l) pondus, quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille, & altitudo est $\frac{1}{2}$GH, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproximè.

LEMMA

(l) *—quantum sentio.*] Nimirum proportio ponderum, quam in hoc Corollario Newtonus constituit, ita obtinebit, si is sit motus aquæ per rimam annularem, quam circulus PQ, in medio foramine EF collocatus, circa se relinquit, quo per eandem rimam è vase cylindraceo ea profluëret, quod basin haberet circulum BF, altitudinem rectæ GH æqualem. Quod sic ostendimus.

Tantilla ponatur circuli PQ superficies, ut foraminis totius EF pars sit multesima. Sustinebit igitur vim, quæ ponderi Cylindri aquei, cujus basis circulus ille PQ, altitudo dimidia recta GH, æquelis erit. Manente circulo PQ, contrahatur sensim foramen EF, quo datam circuli PQ magnitudinem paulatim accedat. Sit v linea recta eâ lege mutabilis, ut in omni magnitudine foraminis EF, illa v ad datam quandam p rationem habeat, quam vis, quâ premitur circulus PQ, ad pondus Cylindri aquei, cujus basis PQ altitudo $\frac{1}{2}$GH. Dico v esse semper ad P ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, modò is sit aquarum, per rimam EPQF profluentium, motus, quo per eandem rimam è vase cylindraceo, cujus basis EF, altitudo GH, prorumperent. Aquâ enim per rimam illam è tali vase profiliente, vis quâ fundus ejus vasis premitur, erit ad pondus Cylindri aquei, qui in eodem vase fundum ad perpendiculum infistit, ut EF^2 ad $EF^2 + EF^2 - PQ^2$, hoc est ut EF^2 ad $2EF^2 - PQ^2$ (per Cor. 6.) Jam verò cùm v fit ad P ut vis, quâ aquæ premant circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei $PQ \times \frac{1}{2}$GH; cùm præterea pondus hujus Cylindri sit ad pondus Cylindri aquei, cujus basis circulus

LEMMA IV.

Liber Secundus.

Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentiâ Circuli eâdem diametro descripti, & eâdem velocitate secundum lineam rectam, plano ipsius perpendicularem, progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minimè opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in Circulum vertitur.

PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Cylindri, qui in Fluido compresso infinito, & non elastico, secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproximè.

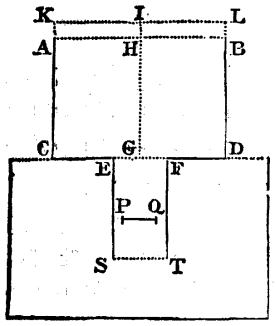
Nam si vas ABDC fundo suo, CD, superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum EFTS, horizonti perpendicularem, in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur CA ad K, ut sit AK ad CK in duplicatâ ratione, quam habet excessus orificii canalis EF supra circellum PQ ad circulum

lus idem PQ altitudo tota recta GH, ut 1 ad 2: erit v ad 2P ut vis, quâ aquæ premunt circulum PQ, ad pondus Cylindri aquei qui in vase cylindraceo, quale posuimus, circulum PQ ad perpendiculum insistit; hoc est ut EF^2 ad $2EF^2 - PQ^2$. Est autem $2EF^2 - PQ^2$ ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ$ ut 2 ad 1, hoc est ut 2P ad P. Cùm igitur fit $v : 2P = EF^2 : 2EF^2 - PQ^2$. Et $2P : P = 2EF^2 - PQ^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$; ex æquo erit $v : P = EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. Q. E. D.

Habes, ni fallor, firmissimam hujus Corollarii probationem, modò vera sint ea quæ in novem superioribus et in ipsâ Propositione XXXVI. allegata sunt, atque illud præterea concesseris, motum aquarum, è vase cylindraceo ampliſſimo, ACDB, per rimam tenuissimam, EFQF, profluentium, eundem fore, quo ex angustissimo ejusdem altitudinis, quod basem circulum EF haberet, per eandem rimam fluerent. Illud autem Newtonus cùm per experimenta non satis exploratum haberet, idcirco istud suum *quantum sentio*, ut opinor, interposuit. Cæterùm hujus Corollarii rationes in sexto positas esse, è literis quibusdam Cotesii ad Newtonum primùm intellexi. In quibus Cotesius, postquam sextum illud Corollarium exposuerit, hæc subjungit. "Hoc Corollarium lucem aliquam tuo in Corollario decimo *quantum sentio* offundere possit."

Sed ne quid dissimulem, cum iis suffragium fero, qui hanc Propositionem XXXVI^m. cum decem quæ ei comitantur, Corollariis, suspectam habent.

De Motu Corporum



AB: manifeſtum eſt (per Caſ. 5. Caſ. 6. & Cor. 1. Prop. XXXVI.) quòd velocitas aquæ, tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit, quam aqua cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC, vel IG, acquirere poteſt.

Et (per Corol. 10. Prop. XXXVI.) ſi vaſis latitudo ſit infinita, ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$IG, ut EFq ad EF$q - \frac{1}{2}$PQq quàm proximè. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ, in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in Fluido undique compreſſo, &, aſcenſu ſuo, cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ; & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis, quâ præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut EFq − PQq ad EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ ſuprà oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare, dum circellus interea immotus manet; id eſt, velocitati, quam aqua, cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac priùs (per Legum Corol. v.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus Cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille

(m) Hæc demonſtratio à Cotesio tota eſt. Cùm verò tota poſita eſt in Propoſitione ſuperiore, cujus doctrinam multi ſuſpectam habuere, et in Corollario ejus decimo, quod vel ipſe Newtonus non niſi dubitanter allegavit, rem Phyſicis ut opinor haud ingratam fecero, ſi Viri Clariſſimi Henrici Pembertoni Propoſitiones duas, quæ in manus fortè noſtras pervenerunt, in lucem emiſero. Quarum ope quæ Newtono in hâc Propoſitione tradita ſunt, de vi renixûs, quâ liquores compreſſi ad motus corporum reſtinguendos polleant, ea ſubtiliſſimis quidem, eiſdem verò quàm maximè perſpicuis, rationibus confirmantur; nullâ ſuſpectæ Propoſitionis XXXVI. ratione habitâ. Sanè quæ ſuper quæſtione graviſſimâ, et è difficillimis unâ, quæ in Phyſicis tractari ſolent, tanto viro tam feliciter ſunt elucubrata, apud nos premere & abſcondere piaculum eſſet.

HEN-

ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$IG, ut EFq ad EF$q - \frac{1}{2}$PQq quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua, cadendo, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirit, ut EFq − PQq ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter EFq − PQq & EFq, interque EFq & EF$q - \frac{1}{2}$PQq accedent ultimò ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit, quam aqua, cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG, acquirere poteſt; reſiſtentia verò ejus æqualis evadet ponderi Cylindri, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, à quâ Cylindrus cadere debet, ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hâc velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem Cylindri, hâc velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentiâ circelli (per Lemma IV.) ideoque æqualis eſt vi, quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproximè.

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eâdem ratione; ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus, ut & vis, quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproximè. Q.E.D.(m)

Fluidum

HENRICI PEMBERTONI

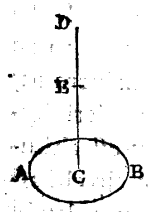
DE VI RENIXUS IN LIQUORIBUS COMPRESSIS PROPOSITIONES.

PROPOSITIO PRIMA. THEOREMA.

Aquâ, vel alio quovis Liquore, dato quovis foramine cum velocitate quâlibet æquabili prorumpente, quantitas motûs in liquore illo, qui dato quovis tempore effluxerit, ejus æqualis erit, quam vis gravitatis eodem tempore generaverit, in mole quâdam ejuſdem liquoris ſive Cylindraceâ ſive Priſmaticâ, quæ baſem illud

Fluidum autem comprimi debet, ut ſit continuum: continuum verò eſſe debet, & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione

illud ipſum foramen habeat, quo liquor prorumpit, altitudinem verò ejus altitudinis duplam, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius, quâ liquor profluit, æqualem.



Sit AB foramen illud quo Liquor profluit; CD ſpatium quod corpus, rectâ progrediendo, eâ cum velocitate quâ liquor fertur, dato tempore T confecerit. Ponatur CE altitudini æqualis, à quâ ſi grave cadat, velocitatem eam, quæ profluentis eſt liquoris, adeptum erit. Ac primùm, datum tempus T illud ipſum ſit, quo corpus, rectâ cadendo, ſpatium CE confecerit. Erit igitur longitudo CD illius CE dupla. At verò Liquor omnis, qui dato tempore, T, foramine AB profluxerit, Cylindri vel Priſmatis, qui pro baſe foramen illud AB habeat, altitudinem ipſam CD, mole ſuâ æqualis erit; hoc eſt Cylindri vel Priſmatis qui baſem habeat AB, altitudinem duplam rectæ CE. Et velocitas profluendi eadem eſt, quam vis gravitatis tempore caſûs recti per CE, hoc eſt dato tempore T, generaverit. Motus igitur Cylindri ejus vel Priſmatis, iſtâ cum velocitate profluentis, is erit, quem in eodem Cylindro vel Priſmate vis gravitatis, eodem tempore T, generaverit. Nimirum cùm tantundem fuerit materiæ motæ eademque velocitas.

Jam verò tempus datum T, aliud ſit ab illo, quo corpus grave, caſu recto, ſpatium CE confecerit, Nihilominus illud omne liquoris, quod foramine AB, dato tempore T, profluxerit, Cylindri vel Priſmatis qui baſem AB, altitudinem illam CD habeat, mole ſuâ æquale erit. Et illud omne quod tempore caſûs recti per CE profluxerit, mole itidem ſuâ, Cylindri vel Priſmatis qui baſem habeat AB, altitudinem 2CE, æquale erit. Unde illud omne liquoris, quod dato tempore T profluxerit, ad illud omne quod profluxerit tempore caſûs recti per CE, rationem habebit quam CD ad duplam CE. Sed et tempus datum T ad tempus caſûs recti per CE rationem habet quam CD ad 2CE; nimirum cùm illa CD, 2CE ſint ſpatia temporibus illis, pari velocitatis gradu, æquabiliter confecta. Velocitates autem, quas vis gravitatis temporibus diverſis generat, ſunt ſemper inter ſe ut tempora, quibus generantur. Velocitas igitur, quam vis gravitatis dato tempore T generaverit, ad velocitatem quam tempore caſûs recti per CE generaverit, hoc eſt ad liquoris profluendi velocitatem, rationem habebit quam CD ad 2CE. Cùm igitur liquoris illud omne, quod foramine AB dato tempore T profluxerit, ad illud omne quod ejuſdem liquoris Cylindrus vel Priſma in ſe contineret, cujus baſis AB, altitudo dupla illius, à quâ grave cadendo liquoris profluentis velocitatem adeptum eſſet, cùm, inquam moles illa liquoris, dato tempore T profuſa, ad hanc alteram ejuſdem liquoris molem rationem habeat, quam CD ad 2CE, hoc eſt quam velocitas dato tempore T à gravitate generanda ad ipſam profluendi velocitatem; motus utique liquoris, qui dato tempore T profluxerit, illius æqualis erit, quem vis gravitatis dato tempore T in mole illâ alterâ Cylindraceâ vel Priſmaticâ generaret. Nimirum propter materiæ quantitates velocitatum rationibus contrariè reſpondentes. Q. E. D.

Cor. 1. Vis quâ liquor foramine dato AB prorumpat, æqualis erit ponderi molis cujuſdam ejuſdem liquoris, ſive cylindraceæ ſive priſmaticæ, quæ baſem AB, altitudinem verò ejus altitudinis duplam habeat, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius, quâ liquor profluit, æqualem. Namque cùm æquales ſemper ſint motus, quos vis ponderis hujus Cylindri vel Priſmatis, viſque, quâ liquor per foramen propellitur, eiſdem temporibus generaverint, vires utique genetrices inter ſe æquales erunt.

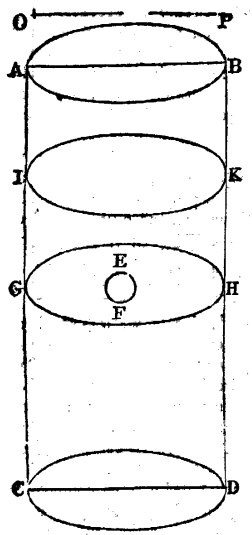
Cor. 2. Motus varii, quos liquor, ſi dato foramine variis cum velocitatibus profluxerit, temporibus æqualibus generaverit, ii rationem inter ſe velocitatum duplicatam gerent. Namque motus illi ſunt iidem, quos vis gravitatis, dato tempore profluendi, in Cylindris vel Priſmatis liquoris profluentis generaverit, qui pro baſi foramen datum communiter omnes habeant, altitudines earum ſingulatim duplas, à quibus gravia ſi cadant velocitates adepta erunt earum, quibuſcum liquor profluere intelligitur, æquales. Sed motus, quos vis gravitatis in corporibus diverſis dato tempore generat, quantitatum materiæ in eiſdem rationem gerunt; quæ corporum ipſorum ratio erit, ſi ex ſimili materiâ conſtant. Corpora autem illa, Cylindracea vel Priſmatica, ex ſimili materiâ conſtant, et altitudinum inter ſe rationem gerunt. Quare motus de quibus agitur, erunt inter ſe ſicut Cylindrorum iſtorum vel Priſmatum altitudines. Altitudines autem illæ, ſecundum Doctrinam Galilæi, duplicatam velocitatum rationem gerunt. Quare et motus de quibus agitur duplicatam inter ſe velocitatum rationem ſervant.

PROPO-

compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, &, in omnes motî corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſſio

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

Invenire vim venixûs in Liquore quovis Compreſſo, ad motum corporis Cylindracei reſtinguendum, quod ſecundum axis ſui directionem per liquorem illum progrediatur.

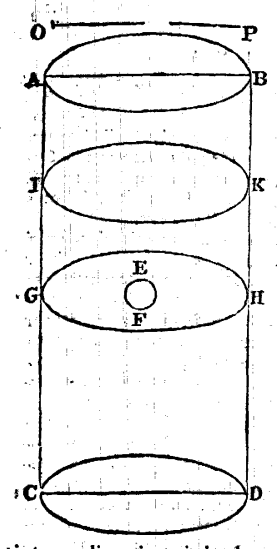


Puta iſtiuſmodi Liquorem aliquem per canalem cylindraceum ACDB, cum velocitate æquabili, ſecundum directionem axis Cylindri ferri. Tum in hoc canali ponatur circulus quidam EF, tali ſitu ut cum baſibus canalis parallelus ſit. His poſitis, impetus liquoris G in hunc circulum videamus quſnam erit.

Nempe Liquor, qui, dum nullus erat in canali circulus, omni parte æquabiliter progrediebatur, nunc incitatiùs feretur inter latera canalis et circulum, quàm ubi circulum nondum attigerit: eâ quidem ratione, quâ canalis baſis ſpatium illud inter latera canalis et circulum exſuperaverit. Quare ſi canalis plano GH per circulum ſecetur, alioque IK quod cum priore parallelum ſit, ab eâ parte unde curſus ſit liquoris; velocitas liquoris in ſpatio GEHF ad velocitatem ejus in plano IK rationem habebit eam, quam circulus IK ad ſpatium GEHF. Atqui major illa liquoris velocitas, inter circulum et latera canalis, argumento eſt, partem liquoris illam, quæ circulum præterlabitur, vi aliquâ à partibus ulterioribus propelli. Unde hæ viciſſim ab illâ repellentur. Unde ſequetur, liquorem inter circulum & latera canalis velociùs, ante circulum, ut in plano IK, tardiùs ferri, quàm ſi circulus in canali nullus eſſet; licet ab eâdem vi externâ, ſive adſit circulus, ſive ille abſit, moles liquida incitetur. Quin et major liquoris in ſpatio GEHF velocitas ad minorem ejus in plano IK velocitatem eam neceſſe eſt rationem habeat, quæ efficiat, ut decrementum motûs, dato tempore genitum, in liquore qui per circulum IK profluxerit, æquale ſit incremento motûs, eodem tempore genito, in liquore illo qui per ſpatium GEFH evaſerit. Verùm hunc in finem velocitas quæ, abſente circulo, liquoris fuerit, ea velocitatum quando adſit circulus, in plano IK, & in ſpatio GEHF, inæqualium, proportione media eſſe debet. Ita enim, quoniam velocitas in ſpatio GEHF ad velocitatem in plano IK, quando adſit circulus, rationem habet quam circulus IK ad ſpatium illud GEHF; circulus utique IK ad ſpatium GEHF rationem habebit duplicatam ejus, quam velocitas liquoris in ſpatio GEHF ad primariam ejus, qualis abſente circulo ea fuerit, velocitatem; necnon duplicatam ejus quam velocitas hæc liquoris primaria, ad imminutam ejus, adveniente circulo EF, in plano IK velocitatem. Circulus igitur IK erit ad ſpatium GEHF, ut motus, dato quovis tempore in liquore illo genitus, qui, circulo EF in medio canali poſito, per ſpatium GEHF evaſerit, ad motum eodem tempore generandum in liquore, qui, abſente circulo, cum primariâ ſuâ velocitate per idem ſpatium GEHF profluxiſſet. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad ſpatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui cum primariâ velocitate per circulum IK profluxiſſet, ad motum, eodem tempore, in eâ liquoris ejus parte generandum, quæ, cum eâdem velocitate, per ſpatium GEHF profluxiſſet. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore illo, qui per ſpatium inter circulum EF, in medio canali poſitum, et latera canalis evaſerit, ei æqualis erit, qui, abſente circulo EF, in liquore, cum primariâ ſuâ velocitate per circulum IK profluente, eodem tempore generatus eſſet. (El. v. 9.) Rurſum cùm circulus IK ad ſpatium GEHF rationem habeat duplicatam ejus, quam velocitas liquoris primaria ad imminutam ejus in plano IK velocitatem (id enim antè oſtenſum fuit) eam utique habebit circulus ille IK ad ſpatium GEHF quam motus, dato tempore in liquore generandus, qui cum primariâ velocitate, abſente circulo EF, per circulum IK profluxiſſet, ad motum eodem tempore genitum in liquore illo, qui, circulo EF in medio canali poſito, per eundem circulum IK tardiùs profluxerit. (Prop. I. Cor. 2.) Sed ut circulus IK ad ſpatium GEHF, ita erit motus dato tempore in liquore illo omni generandus, qui, circulo EF abſente, per circulum IK cum primariâ velocitate profluxiſſet, ad motum eodem tempore in eâ liquoris ejus parte generandum,

De Motu Corporum

fio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium



dum, quæ cum eâdem velocitate per ſpatium GEHF profluxiſſet. Motus igitur, dato tempore genitus, in liquore, qui, circulo EF in medio canali poſito, per circulum totum IK cum imminutâ velocitate profluxerit, æqualis erit ei, qui, circulo EF abſente, eodem tempore in liquore genitus eſſet cum primariâ ſuâ velocitate per ſpatium GEHF profluente. (El. v. 9.) Ex hiſce verò ſequitur, quantum motûs liquori in circulo IK deceſſerit, circulo utique EF in medio canali poſito, tantundem ei in ſpatio GEHF, inter circulum EF et latera canalis, reſtitui. Etenim quando motus in toto circulo IK in eum minuerit, quî, ſi abeſſet circulus EF, in ſpatio minore GEHF eſſet, tum motus in minore illo ſpatio GEHF in eum increverit, qui antè in toto circulo IK fuerat.

Jam ſit baſis canalis, ſive circulus IK, ad ſpatium GEHF ut M^2 ad N^2. Sit etiam O ad P ut velocitas liquoris primaria ad minorem eam liquoris per circulum IK profluentis, quando adſit circulus EF in medio canali. Erit igitur P ad O ut N ad M, et P ad O − P ut N ad M − N, ſive ut $N \times \overline{M+N}$ ad M^2-N^2. Solidum igitur $P \times M^2-N^2$ Solido $N \times \overline{M+N} \times \overline{O-P}$ æquale erit; et $\overline{M^2-N^2} \times P$ erit ad $M^2 \times \overline{O-P}$ ut $N \times M+N \times \overline{O-P}$ ad $M^2 \times \overline{O-P}$; hoc eſt ut $N \times M+N$ ad M^2, ſive ut $M \times N+N^2$ ad M^2. Hinc omnis illa liquoris moles, cui circulus EF, in medio canali poſitus, tranſitum per IK dato quovis tempore negaverit; hæc ad molem illam, quæ, ut obſiſtat circulus EF, parte tamen quâvis plani IK circulo EF æquali, eodem tempore profluxerit: moles, inquam, liquoris, cui circulus EF, in medio canali poſitus, per IK tranſitum negaverit, ad hanc alteram molem rationem habebit quam M^2 ad $M \times N+N^2$; ſive eam, quam baſis canalis ad illud habet quo circulum EF ipſa baſis exſuperat, unà cum illo quod hujus exſuperantiæ et ipſius baſis proportione medium eſt. Namque prior moles ad alteram rationem habebit, quæ componitur è ratione velocitatis, in plano IK extinctæ, ad velocitatem in illo plano ſuperſtitem (hoc eſt è ratione O − P ad P), cum ratione baſis canalis ad circulum EF; hoc eſt cum ratione ipſius M^2 ad M^2-N^2. Verùm ex eiſdem rationibus compoſita eſt ratio ſolidi $M^2 \times \overline{O-P}$ ad $\overline{M^2-N^2} \times P$; ſive quadrati ex M ad ſpatium $MN+N^2$.

Hæc erit Circuli immobilis efficientia ad ſiſtendum Liquoris curſum. Deinceps diſquiramus, quænam Liquoris futura ſit ad impediendum Circuli motum, ſi ille ſecundum axem canalis propellatur.

Quoniam ea erat Circuli EF immobilis efficientia, quâ ſe ad liquoris curſum objiciendo, molem ejus, quæ dato tempore per canalis circulum quemvis IK profluëret, minorem redderet; ſi circulus ille EF vim omnem molis ejus liquidæ ſuſtinuiſſet, cujus corpuſcula ad perpendiculum ei illidebantur, omnem utique eorum corpuſculorum motum extinxiſſet, ſimul atque eâ in eum impingerentur. Unde liquoris moles, cui circulus iſte tranſitum per IK dato quovis tempore negâſſet, ea fuiſſet, quæ parte quâvis circuli IK ipſi EF æquali, eo tempore, profluëret. Unde circulus ipſe EF vim ſuſtinuiſſet ejus æqualem, quâ liquor aliquis, ejus ſimilis quem in canali ponimus, tali foramine prorumpat; ſive eam, quæ ponderi columnæ cujuſdam ejus liquoris cylindraceæ æqualis eſſet, quæ baſem haberet circulum EF, altitudinem verò duplam illius, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit æquabilis illius æqualem, quâcum liquor in Canali per IK profluebat. (Prop. I. Cor. 1.) Verùm minor erat liquoris moles, cui circulus EF tranſitum negabat; ſiquidem M^2 minus fuerit quàm $MN+N^2$, modò circulus EF præ latitudine canalis perexiguus ſit. Liquor igitur, qui in circulum EF illidebatur, eâ duntaxat velocitatis ſuæ parte eum urgebat, cujus extinctione minor illa moles liquida, cui circulus EF tranſitum negabat, retinenda et curſu ſiſtenda erat. Et cùm vis liquoris alicujus profluentis velocitatum profluendi rationem duplicatam ſervet (Prop. I. Cor. 2.) vis, quam circulus ille EF immotus ſuſtinebat, ad pondus columnæ liquoris, cujus diximus, cylindraceæ rationem habuerit ejus duplicatam, quam baſis Canalis ad illud quo baſis circulum EF exſuperet, unà cum illo quod ejus exſuperantiæ et ipſius baſis proportione medium ſit.

Claudatur jam canalis; & in liquore undique compreſſo et ſtagnante, puta circulum EF, ſecundum

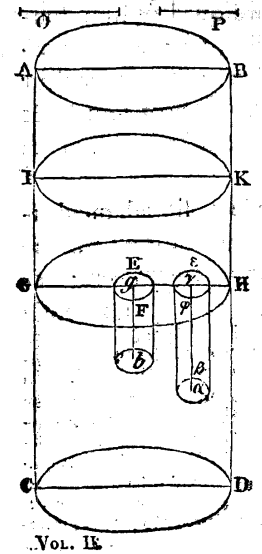
Liber Secundus.

partium Fluidi generandum, & reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ

dum directionem axis canalis cylindracei ACDB, verſus IK incitari. Circulus, movendo, Liquori aliter immoto motum dabit; qui talis erit, ut velocitas liquoris, circulo cedentis, quâcum inter circulum & latera canalis feretur, ad circuli ipſius velocitatem rationem habeat, quam area circuli ad ſpatium GEHF. Quapropter hæ velocitates ſimul ſumptæ, ſive velocitas illa omnis, quâcum liquor et circulus ſe mutuò præterlabuntur, ad ſolam circuli velocitatem, ſive ad eam quâcum partes liquoris ulteriores ad circulum admoventur, rationem habebit quam tota baſis Canalis ad ſpatium GEHF. Hinc motus liquoris, Circuli ratione, idem prorſus erit, qui antè erat; quando, Circulo immoto, Liquor propio motu in eum impetum faciebat. Igitur Circulus eam percipiet vim renixûs, quæ æqualis erit ponderi columnæ cujuſdam Liquoris cylindraceæ, quæ baſem habeat circulum EF, altitudinem verò, quæ ad duplam illius, à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat duplicatam ejus, quæ eſt circuli GH ad ſpatium GEHF unà cum illo, quod circuli GH et ſpatii GEHF proportione medium eſt. Atqui ratio illa duplicata, ſi amplitudo canalis infinitè augeatur, ultimò unitatis ad quaternarium erit. Et vis, quam Circulus percipiet, æqualis fiet ponderi cylindraceæ cujuſdam Liquoris columnæ, quæ baſem Circulum ipſum habeat, altitudinem verò ejus altitudinis dimidiam, à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit.

Univerſè vis renixûs in Circulum ea erit, quæ ad pondus cylindraceæ cujuſdam liquoris columnæ, cujus baſis circulus ipſe, altitudo dimidia ejus à quâ ſi grave cadat velocitatem circuli adeptum erit, rationem habeat ejus rationis duplicatam, quam dupla baſis canalis habet ad illud quo baſis illa circulum exſuperet, unà cum illo quod exſuperantiæ illius & ipſius baſis proportione medium ſit."

Hæc ferè Pembertonus; niſi quòd nonnulla, quæ nimis breviter eum dixiſſe exiſtimavimus, nos, Latinè convententes quæ ille Anglicè ſcripſerat, explicatiùs dicere conati ſumus. Ex his autem illud facilè comprobari poſſit, quod Newtonus in Propoſitione ſuâ XXXVII. conſtituere voluit, de vi renixûs quâ pollerent Liquores Compreſſi, quorum moles infinitæ eſſent, ad motum corporis cujuſvis Cylindracei reſtinguendum, quod ſecundum axis ſui directionem in tali liquore progrederetur. Ea nempe illa vis renixûs erit, quæ ad vim aliam, quæ totum corporis Cylindracei motum vel generare vel extinguere poſſet, tempore ejus æquali, quo velocitate ſuâ æquabili quadruplam longitudinem ſuam Cylindrus ille conficeret, rationem habebit quam Liquoris denſitas ad denſitatem materiæ in Cylindro.

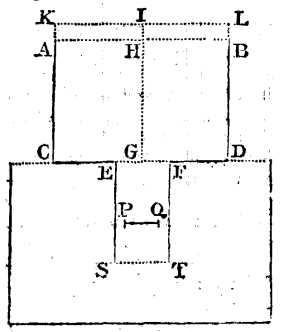


Intelligatur è quâvis materiâ Cylindrus baſe circulo $\iota\phi$, axe $\gamma\alpha$, qui in liquore aliquo infinito, maximè compreſſo, ſecundum directionem axis ſui $\gamma\alpha$ progrediatur. Sit D ad Δ ut denſitas liquoris ad denſitatem materiæ, quâ Cylindrus $\iota\phi\gamma\alpha$ factus eſt. Significet litera V datam quandam vim, quæ motum omnem Cylindri illius vel generare vel tollere poſſet, tempore ejus æquali, quo velocitate ſuâ æquabili longitudinem $4\gamma\alpha$ Cylindrus ille conficeret. Deſignet litera R vim renixûs in liquore, ad motum corporis $\iota\phi\gamma\alpha$ reſtinguendum. Dico talem eſſe R, quæ ſit ad V ut D ad Δ. Capiatur enim $\gamma\beta$ dimidia ejus altitudinis, à quâ ſi grave cadat velocitatem adeptum erit ejus, quâcum cylindrus $\iota\phi\gamma\alpha$ progreditur, æqualem. Baſe circulo EF, ipſius $\iota\phi$ æquali, altitudine $g\delta$ ipſius $\gamma\beta$ æquali, intelligatur Cylindrus è materiâ quâdam, cui denſitas eadem quæ Liquoris ſit. Hic Cylindrus, pari cum altero illo, $\iota\phi\gamma\alpha$, velocitate, ſecundum axis ſui directionem in liquore progrediatur. Motus cylindri totius $\iota\phi\gamma\alpha$ ad motum in eâ ejus parte, cujus longitudo $\gamma\beta$, rationem habet quam $\gamma\alpha$ ad $\gamma\beta$. Eadem verò tempus, quo cylindrus ille longitudinem $4\gamma\alpha$, ad tempus, quo longitudinem $4\gamma\beta$ conficeret, habet. Vis igitur V, quæ motum cylindri totius vel generare vel extinguere poſſit, tempore ejus æquali, quo cylindrus ille longitudinem $4\gamma\alpha$ conficeret; eadem, quæ tempore cylindrus longitudinem $4\gamma\beta$ conficeret, motum ejus partis, cujus longitudo eſt $\gamma\beta$, vel generare vel extinguere poſſet. Jam verò vis R, cùm ex iis quæ nos cum Pembertono oſtendimus, ponderi Cylindri EFgδ æqualis ſit, cûmque pondus cylindri EFgδ motum ejus cylindri totum vel ge-

De Motu Corporum

quæ oritur à compreſſione Fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus Fluidi Continui, nullam omninò inducit motûs mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certè actio Fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hâc Propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quàm in poſticas, ſi modò propagatio ejus infinitè velocior ſit, quàm motus corporis preſſi. Infinitè autem velocior erit, & propagabitur in inſtanti, ſi modò Fluidum ſit Continuum, & non Elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis Mediorum (n).



Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed Cylindrus in Medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: reſiſtentia ejus erit ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ſemel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis (o), & ratione denſitatis Medii ad denſitatem Cylindri.

Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quòd longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq ſemel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: reſiſtentia

nerare vel tollere poſſet, tempore ejus æquali, quo cylindrus velocitate ſuâ æquabili quadruplum ſuæ longitudinis conficeret; ſiquidem velocitas cylindri æquabilis ea eſt, quam corpus grave, rectâ cadendo per ſpatium $2gb$, adeptum erit; hæc cùm ita ſint, vis R talis erit, quæ motum omnem cylindri $EFgb$, tempore ejus æquali quo longitudinem $4gb$ ille conficeret, generare vel tollere poſſet. Jam verò cùm æquales ſint Cylindrorum, $EFgb$, $\iota\varphi\gamma\beta$, progrediendi velocitates, cùm longitudines etiam gb, $\gamma\beta$ inter ſe æquales ſint, idcirco æqualia erunt tempora, quibus Cylindri illi longitudines æquales, $4gb$, $4\gamma\beta$, conficiant. Vires autem R, V erunt inter ſe, ut motus quos, temporibus illis æqualibus, generare vel extinguere poſſent; hoc eſt ut motus Cylindrorum æqualium, $EFgb$, $\iota\varphi\gamma\beta$, pari cum velocitate progredientium; ſive ut denſitates materiæ

Liber Secundus.

ſiſtentia Cylindri erit ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri.

Scholium.

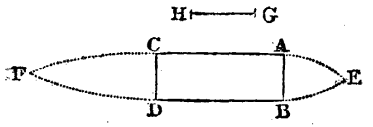
In hâc Propoſitione Reſiſtentiam inveſtigavimus, quæ oritur à ſolâ magnitudine tranſverſæ ſectionis Cylindri, neglectâ reſiſtentiæ parte, quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo Propoſitionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vaſe undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hâc Propoſitione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes Cylindri; efficitque ut Fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur, & reſiſtentiam auget, idque in eâ ferè ratione, quâ effluxum aquæ è vaſe diminuit, id eſt, in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter, & maximâ copiâ tranſirent per foramen EF, ponendo, quòd omnis aqua in vaſe, quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hâc Propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ, motu maximè directo & breviſſimo cedentes, facillimum præbeant tranſitum Cylindro, & ſola maneat reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum Cylindri; concipiendum eſt, quòd partes Fluidi, quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. [Sit ABCD rectangu-

riæ in Cylindris illis: Sed denſitas materiæ in Cylindro $EFgb$ denſitati Liquoris poſita eſt æqualis; ſive ei, quæ ad denſitatem materiæ in Cylindro $\iota\varphi\gamma\beta$ rationem habeat quam D ad Δ. Vis igitur R talis erit quæ ad vim V rationem habebit quam D ad Δ. Q. E. D.

(n) Hujus demonſtratio eadem ferè quæ Corollarii 5. Prop. XXXV.

(o) Pro hâc ratione compoſitâ, in hoc & proximo etiam Corollario, ſubſtituenda eſt duplicata ejus quam habet $2.EF^2$ ad $EF^2 - PQ^2 + EF\sqrt{EF^2 - PQ^2}$, ut ex iis quæ cum Pembertono oſtendimus manifeſtum eſt. Cæterùm ratio Pembertoni duplicata à compoſitâ illâ, quam Newtonus poſuit, haud multum abibit, niſi magnus fuerit circulus PQ ratione baſis canalis.

De Motu Corporum



lum, & ſint AE & BE arcus duo Parabolici, axe AB deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpatium HG, deſcribendum à Cylindro cadente, dum velocitatem ſuam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}$AB. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto, quod ſit prioris lateris recti quadruplum, deſcripti] (P); & convolutione figuræ circum axem EF generetur Solidum; cujus media pars ABDC ſit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ, ABE & CDF, contineant partes Fluidi inter ſe quieſcentes, & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque, tanquam caput & cauda, adhæreant. Et Solidi EACFDB, ſecundum longitudinem axis ſui FE in partes verſus E progredientis, reſiſtentia, ea erit quamproximè, quam in hâc Propoſitione deſcripſimus; id eſt, quæ rationem illam habet ad vim, quâ totus Cylindri motus, interea dum longitudo 4AC motu illo uniformiter continuato deſcribatur, vel tolli poſſit vel generari, quam denſitas Fluidi habet ad denſitatem Cylindri quamproximè. Et hâc vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt quàm in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.

LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphæroïs, quorum latitudines ſunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur ſucceſſivè, ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam ſpatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem, per quæ aqua tranſit, ſunt æqualia: & aqua per æqualia ſpatia æqualiter tranſit.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd aqua omnis ſupra Cylindrum Sphæram vel Sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ tranſitum non requiritur, ut in Corol. 7. Prop. XXXVI. explicui.

LEMMA

(P) A Coteſio ſunt quæ uncis inclufimus. Eorum rationes in Corollariis Propoſitionis XXXVI. ſeptimo

Liber Secundus.

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per Lemma v. & Motûs Legem tertiam. Aqua utique & corpora in ſe mutuò æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex Lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his Lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & Medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam; & quòd partes Fluidi, quæ, motibus ſuis obliquis & ſuperfluis, fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ, quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora Fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut Fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figurâ ſint obtuſâ; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt, quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in Fluidis Elaſticis mota, ſi antè & pòſt obtuſa ſint, Fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem, & paulo magis re-

ſeptimo et octavo poni nemo non intelligit: infido ſanè ſolo, ut mea fert opinio.

laxant

De Motu Corporum

laxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt, quàm si capite & caudâ sint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propositionibus non agimus de Fluidis Elasticis, sed de non Elasticis; non de insidentibus Fluido, sed de altè immersis. Et ubi resistentia corporum in Fluidis non Elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum, tam in Fluidis Elasticis, qualis est Aer, quàm in superficiebus Fluidorum stagnantium, qualia sunt Maria & Paludes.

PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

Globi, in Fluido compresso, infinito, & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi quamproximè.

Nam Globus est ad Cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet, interea dum Globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem Cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas Fluidi ad densitatem Cylindri vel Globi per Prop. XXXVII. & resistentia Globi æqualis est resistentiæ Cylindri per Lem. V, VI, VII. Q. E. D.

Corol. 1. Globorum, in Mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione, quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum Globus, vi ponderis sui comparativi, in Fluido resistente potest descendere, ea est, quam acquirere

(q) Designante literâ d diametrum Globi, designet litera s spatium quod conficeret, quo tempore motus ejus, ex renixu liquoris circumfusi, parte dimidiâ minuerit. Jam in figurâ Cor. 6. Prop. XXXV. quando EF semissis est rectæ BC, erit et AB semissis rectæ AE. Unde designante t tempus illud, per BE expositum, quo Globi motus parte dimidiâ minor factus fuerit, literâ verò T tempus expositum per AB, quo vis renixûs, qualis initio motûs erat, omnem globi motum extingueret, erit nimirum $T + t$, sive AE, $= 2T$ sive 2.AB; et $T = t$. Quare (per Cor. 7. Prop. XXXV.) spatium s ad spatium illud quod Globus, cum motu illo quem initio habuit, tempore t æquabiliter confeciſſet, rationem habebit quam numerus, qui factus fuerit è logarithmo binarii Briggiano in numerum 2,30258+ multiplicato, ad unitatem habet. Sed spatium illud quod Globus, cum motu quem initio habuit tempore t æquabiliter confeciſſet, huic $\frac{2}{3}d$ æquale. Nam propter æquales AE, BE (fig. Cor. 6. Prop. XXXV.) erunt rectangula AB × EC, BG inter se æqualia. Sed BG est ad AB × BC ut spatium, quod globus cum motu suo primario, BC, tempore t, vel BE, confeciſſet, ad spatium quod confeciſſet tempore T vel AB, quo vis aliqua, æqualis ejus quæ initio fuit liquoris circumfusi vis renixûs, motum omnem BC extingueret. Quare hæc spatia inter se æqualia erunt. Horum verò posterius, propter æqualem materiæ in Globo et Liquoris circumfusi densitatem, spatio $\frac{2}{3}d$ æquale erit (per Prop. XXXVIII.) Quare et prius eidem $\frac{2}{3}d$ æquale. Quapropter $s : \frac{2}{3}d = \log. 2 \times 2{,}30258 : 1$. Hinc $s = d \times 1{,}848$. Ergo spatium s minus quàm $2d$.

Liber Secundus.

acquire potest Globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo, & casu suo describendo spatium, quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas Globi ad densitatem Fluidi. Nam Globus tempore casûs sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas Globi ad densitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore Globus octo tertias diametri suæ eâdem velocitate describit, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi: ideoque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea Globum accelerare non potest.

Corol. 3. Datâ & densitate Globi, & velocitate ejus sub initio motûs, ut & densitate Fluidi compressi quiescentis, in quâ Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi, & ejus resistentia, & spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

Corol. 4. Globus in Fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motûs sui partem priùs amittet, quàm longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. 7 (q).

PROP. XXXIX. THEOR. XXXI.

Globi per Fluidum, in canali cylindrico clausum & compressum, uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum Globi (r), *& ratione densitatis Fluidi ad densitatem Globi quamproximè.*

(r) Pro ratione ex duabus hisce compositâ, ratio duplicata, quæ in Corollariis Prop. XXXVII. secundo tertioque substituebatur, eadem hic substituenda est.

Patet

De Motu Corporum

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII. procedit verò demonſtratio quemadmodum in Propoſitione præcedente.

Scholium.

In Propoſitionibus duabus noviſſimis (perinde ut in Lem. V.) ſuppono quòd aqua omnis congelatur quæ Globum præcedit, & cujus fluiditas auget reſiſtentiam Globi. Si aqua illa omnis liqueſcat, augebitur reſiſtentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his Propoſitionibus parvum erit, & negligi poteſt; propterea quòd convexa ſuperficies Globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROP. XL. PROB. IX.

Globi, in Medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per Phænomena.

Sit A pondus Globi in Vacuo; B, pondus ejus in Medio reſiſtente; D, diameter Globi; F ſpatium, quod ſit ad $\frac{4}{3}$ D ut denſitas Globi ad denſitatem Medii, id eſt, ut A ad A − B; G, tempus, quo Globus, pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo, deſcribit ſpatium F; & H, velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima

(*) Designet litera V velocitatem quam Globus, per liquorem compreſſum cadendo, tempore P adeptus fuerit.

In figurâ Propoſitionis nonæ hujus Libri ſit AP ad AC ut V ad H. Per punctum T, hyperbolæ AVZ, ducatur recta ΠT cum rectâ AC parallela; quæ cum hyperbolâ AVZ iterum in τ conveniat, cum aſymptotâ DC in Π. Tribus rectis Πτ, AC, ΠT continua erit proportionis convenientia. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVII.) Quare Πτ erit ad ΠT ut $\Pi\tau^2$ ad AC^2. Convertendo Πτ ad τT ut $\Pi\tau^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Sed τT eſt ad τx ut x ad 1. Quare Πτ erit ad τx ut $2\Pi\tau^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Et dividendo Πx ad xτ vel xT ut $\Pi\tau^2 + AC^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Sed propter rectas Πx, CA parallelas, erit Πx ad xT ut AC ad AP, id eſt ut H ad V. Quare H erit ad V ut $\Pi\tau^2 + AC^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Jam ſit N quantitas quæ ſit ad unitatem ut $\Pi\tau^2$ ad AC^2. Erit igitur N + 1 ad N − 1 ut $\Pi\tau^2 + AC^2$ ad $\Pi\tau^2 - AC^2$. Quare H : V = N + 1 : N − 1. Et $V = \frac{N-1}{N+1} H$.

Deſignet litera β Modulum ſyſtematis logarithmorum Briggiani. Sector hyperbolicus ADT eſt ad triangulum ADC ut logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad Πτ, ad Modulum ſyſtematis ſui. (Cotes. Harmon. Menſ. Part I. Prop. IV.) Sed ſector ADT ad triangulum ADC rationem habet quam P ad G. (Prop. IX. hujus Libri Cor. 5.) Erit igitur P ad G ut Logarithmus quivis rationis, quam AC habet ad Πτ, ad Modulum ſyſtematis ſui. Quare 2P erit ad G ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam AC^2 habet ad $\Pi\tau^2$, ſive ejus quam 1 habet ad N, ad Modulum ſyſtematis ſui. Unde 2P : G = Log. Brigg. N : β. Et $\frac{2P}{G} \times \beta$ = Log. Brigg. N. Sed β = 0,4342944819, (Coteſ. Harmon. Menſ. Pars I. Prop. II. Cor.) Quare N eſt quantitas illa cujus Logarithmus eſt $\frac{2P}{G} \times 0{,}4342944819$.

Et

Liber Secundus.

maxima quâcum globus, pondere ſuo B, in Medio reſiſtente poteſt deſcendere, per Corol. 2. Prop. XXXVIII. & Reſiſtentia, quam Globus eâ cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: Reſiſtentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. 1. Prop. XXXVIII.

Hæc eſt Reſiſtentia, quæ oritur ab inertiâ materiæ Fluidi. Ea verò quæ oritur ab Elaſticitate, Tenacitate, & Frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur Globus, ut pondere ſuo B in Fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus, N, qui congruit logarithmo $0{,}4342944819 \frac{2P}{G}$, ſitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1} H$, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611\,F + 4{,}6051701861\,LF$. Si Fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus $4{,}6051701861\,LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611\,F$ altitudo deſcripta quamproximè. Patent hæc per Libri Secundi Propoſitionem Nonam & ejus Corollaria; ex hypotheſi quòd Globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam, niſi quæ oritur ab inertiâ materiæ (*). Si

Et velocitas tempore P partu à Newtono recte definita eſt. Videamus de ſpatio quod caſu conficitur: quod dicatur A. Spatium verò quod corpus aliquod cum velocitate H, eodem tempore P, æquabiliter conficeret, dicatur S. In figurâ Propoſitionis nonæ ponitur AB pars quarta rectæ AC. Unde rectangulum AB × AC trianguli ADC dimidium erit. Area autem hyperbolica ABNK eſt ad rectangulum AB × AC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum ſyſtematis ſui. (Cotes. Harmon. Menſ. Part I. Prop. IV.) Quare area ABNK erit ad ½ ADC, ſive 2ABNK ad ADC, ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam CK habet ad AC, ad Modulum ſyſtematis ſui. Ponuntur autem tres illæ AC, AP, AK proportione convenientes. Quare AC : AK = $AC^2 : AP^2$. Et convertendo AC : CK = $AC^2 : AC^2 - AP^2$. Sed $AC^2 : AC^2 - AP^2 = H^2 : H^2 - V^2 = H^2 : H^2 - \frac{\overline{N-1}^2}{\overline{N+1}^2} H^2 = 1 : 1 - \frac{\overline{N-1}^2}{\overline{N+1}^2} = 1 : \frac{\overline{N+1}^2 - \overline{N-1}^2}{\overline{N+1}^2} = 1 : \frac{4N}{\overline{N+1}^2} = \overline{N+1}^2 : 4N$.

Igitur CK : AC = $4N : \overline{N+1}^2$. Et 2ABNK erit ad ADC ut Logarithmus quivis rationis ejus, quam 4N habet ad $\overline{N+1}^2$, ad Modulum ſyſtematis ſui; ſive ut Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}^2}{4N}$ ad β. Sed ex iis quæ ſuprà oſtenſa ſunt, ADC eſt ad ſectorem 2ADT = (G : 2P =) β : Log. Brigg. N.

Cùm igitur ſit 2ABNK : ADC = Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}^2}{4N}$: β; et ADC : 2ADT = β : Log. Brigg. N.

Ex æquo erit ABNK : ADT = Log. Brigg. $\frac{\overline{N+1}^2}{4N}$: Log. Brigg. N. Sed (per Cor. 1. Prop. IX.)

De Motu Corporum

Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis, in Fluido cadentis, velocitas & descensus facilius innotescant, composui Tabulam sequentem, cujus columna prima denotat Tempora descensûs; secunda exhibet Velocitates cadendo acquisitas, existente velocitate maximâ 1000000000; tertia exhibet

Tempora P	Velocitates cadentis in Fluido.	Spatia cadendo descripta in Fluido.	Spatia motu maximo descripta.	Spatia cadendo descripta in Vacuo.
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,00998334 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,03973361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,08868151 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,15590701 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,24022901 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,34027061 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,45454051 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,58150711 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,71966091 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,86756171 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,65000551 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,61865701 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,61437651 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,61337641 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,61371791 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,61370731 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,61370591 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,61370571 F	18 F	81 F
10 G	99999999	18,61370561 F	20 F	100 F

ADNK : ADT = A : S. Quare $A : S = \text{Log. Brigg.} \frac{\overline{N+1}^2}{4N} : \text{Log. Brigg. } N$. Et $A \times \text{Log. Brigg. } N. = S. \times \text{Log. Brigg.} \frac{\overline{N+1}^2}{4N}$. Jam verò cum S, & 2P, sint spatia illa, quæ corpora, cum velocitate H æquabiliter progredientia, temporibus P & G, conficerent, erit $S : 2P = P : G$, et $S = \frac{2PP}{G}$.

Unde rursum $A \times \text{Log. Brigg. } N = 2PP \times \text{Log. Brigg.} \frac{\overline{N+1}^2}{4N} = \frac{2PP}{G} \times \text{Log. Brigg.} \frac{\overline{N+1}^2 \times N}{4NN} = \frac{2PP}{G} \times 2L + \text{Log. Brigg. } N - \text{Log. Brigg. } 4$. Hoc est, cùm ostensus sit Log. Brigg. $N = \frac{2P}{G} \times \beta$, erit $A \times \frac{2P}{G}\beta = \frac{2P}{G} \times P \times 2L + P \times \frac{2P}{G}\beta - P \times \text{Log. Brigg. } 4$. Quare $A = \frac{2PP}{G} + P \times \frac{2L}{\beta} - \frac{P \times \text{Log. Brigg. } 4}{\beta}$.

Sed

Liber Secundus.

hibet Spatia temporibus illis cadendo descripta, existente 2F spatio, quod corpus, tempore G, cum velocitate maximâ describit; & quarta exhibet Spatia, iisdem temporibus, cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2P}{G}$; & subducendo numerum 1,3862944 − 4,6051702L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ; & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F, ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta, iisdem temporibus, à corpore, vi ponderis sui comparativi B, in Vacuo cadente.

Scholium.

Ut Resistentias Fluidorum investigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi Aquâ Pluviali; & Globis ex cerâ & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensûs Globorum, existente descensûs altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* Aquæ Pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus, seu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in Medio Aeris, vel grana 132,8 in Vacuo; & globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in Vacuo supra pondus ejus in Aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in Aere

Sed $\beta = 0{,}4342944819$.
Et Log. Brigg. $4 = 0{,}6020599913$.
Quare $\frac{2}{\beta} = 4{,}6051701\,86$.
Et $\frac{\text{Log. Brigg. } 4}{\beta} = 1{,}3862943611$.

Unde A, five altitudo casu recto tempore P confecta, ea erit $\frac{2PP}{G} - 1{,}3862943611\,F + 4{,}6051701\,86\,LF$; omninò qualis à Newtono definita est.

Quòd si permagna fit altitudo A, ut AP in figurâ Prop. IX. rectæ AC propemodum æqualis fiat, permagnum erit quadratum ex Πr ratione quadrati ex AC; unde numerus N permagnus, et $\frac{N+1}{N}$ tate vix major erit. Ejus igitur Logarithmus L in nihilum propemodum abierit, & membrum $\frac{F \times 2L}{\beta}$ negligere licebit, sicut Newtonus statuit.

De Motu Corporum

& 77 granorum in Aquâ, altitudinem totam, digitorum 112, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, Globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in Vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in Aquâ eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in Vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi; & ita partes octo tertiæ diametri globi (viz. 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2F, quod perinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in Vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, ſine reſiſtentiâ cadendo in Aquâ deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicatâ ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum poteſt in Aquâ deſcendere. Eſt igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus deſcribet ſpatium, 2F, digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum, quod globus cadendo in Aquâ, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus, cadendo in Aquâ, in hoc vaſe ligneo, tempore minutorum quatuor ſecundorum per Theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in Aere & $5\frac{1}{176}$ granorum in Aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & unuſquiſque cecidit in Aquâ tempore minutorum ſecundorum

ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112. Liber Secundus.

Computum ineundo prodeunt Pondus globi in Vacuo $76\frac{5}{14}$ *gran.* Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in Aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* Diameter globi 0,81296 *dig.* Octo Tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* Spatium 2F 2,3217 *dig.* Spatium, quod globus pondere $5\frac{1}{176}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribat, 12,808 *dig.* & Tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum poteſt in Aquâ vi ponderis $5\frac{1}{176}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore, in vaſe latiſſimo cadendo, deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per Theoriam quamproximè. Deſcripſit vero digitos 112 per Experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in Aere & 1 *gran.* in Aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & cadebant in Aquâ temporibus 46′, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quòd tardiùs ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ, quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis, tribuendum ſit; an potiùs bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel manûs globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in Aquâ debet eſſe plurium granorum, ut Experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cepi, ut inveſtigarem Reſiſtentias Fluidorum, antequam Theoria, in Propoſitionibus proximè præcedentibus expoſita, mihi innoteſceret. Poſtea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{1}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente.

De Motu Corporum

te. Deinde ex cerâ & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in Aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in Aquâ. Et hos demiſi, ut tempora cadendi in Aquâ per Pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in Aquâ, & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus, ex aquâ extantis, deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitus immerſi quieſcebant, demittebantur quàm cautiſſimè, ne impulſum aliquem à manu demittente acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſivè temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50, & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulo frigidior erat, quàm cùm globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53; ac tertio, temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento ſæpiùs capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardiùs cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt Pondus globi in Vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum: Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in Aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2r 2,8066 *dig.* Spatium, quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit, 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maximâ, quâcum poteſt in Aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,4466 digitorum, & tempore 25″, ſeu oſcillationum 50, ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum

micirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe, tempore oſcillationum 50, deſcribere debuit per Theoriam quamproximè. Deſcripſit verò ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$, vel 50, per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor, pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30; & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitddinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque, pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $79\frac{1}{4}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor, pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in Aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproximè.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citiùs alii tardiùs caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra; latere illo, quod fortè gravius eſſet, primùm deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quàm ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motûs proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minùs retardatur. Quinetiam globus recedit ſemper à latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit; &, recedendo, appropinquat lateribus vaſis, & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt,

eſt, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſûs. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minores quàm priùs, & globi temporibus minùs inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in Aere & $6\frac{1}{2}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quàm 52, non pauciorum quàm 50, & maximâ ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in Aere & $140\frac{3}{4}$ in Aquâ, ſæpiùs demiſſi ceciderunt temporibus oſcillationum non pauciorum quàm 12, non plurium quàm 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in Aere & $119\frac{1}{2}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam verò cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in Aere & $3\frac{29}{31}$ in Aquâ, ſæpè demiſſi ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in Aere & $4\frac{3}{8}$ in Aquâ, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum

tionum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per hæc Experimenta manifeſtum eſt, quòd, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per Theoriam: at ubi globi velociùs ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, reſiſtentia paulo major extitit quàm in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi, inter cadendum, oſcillant aliquantulum; & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardiùs cadentibus, ob motûs languorem, citò ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motûs fortitudinem diutiùs durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aquâ ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minùs premuntur à Fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuò augeatur, ſpatium vacuum tandem à tergo relinquent, niſi compreſſio Fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio Fluidi (per Prop. XXXII. & XXXIII.) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minùs premuntur à tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur Theoria cum Phænomenis corporum cadentium in Aquâ. Reliquum eſt ut examinemus Phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Eccleſiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, menſe Junio 1710, Globi duo vitrei ſimul demittebantur; unus Argenti Vivi plenus, alter Aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo, huic Tabulæ impoſiti, ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum ope fili ferrei, ad terram uſque demiſſi, ut Tabula, polis ferreis ſolummodo innixa, ſuper iiſdem devolveretur; &, eodem temporis momento, Pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum illud ferreum tractum, demit-

De Motu Corporum

teretur, & oſcillare inciperet. Diametri & Pondera globorum, ac Tempora cadendi exhibentur in Tabulâ ſequente.

Globorum Mercurio plenorum			Globorum Aere plenorum.		
Pondera	Diametri	Tempora cadendi.	Pondera	Diametri	Tempora cadendi.
908 gran.	0,8 digit.	4″	510 gran.	5,1 digit.	8″½
983	0,8	4 −	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterùm Tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi)* minutis quatuor ſecundis deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantùm 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardiùs devolvebatur quàm par erat, & tardâ ſuâ devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propriores erant axi ejus quàm peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus, qui Tabulæ devolventi paulo diutiùs incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi ſex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur Aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque, pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore 8″ 12‴, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus Aquæ huic globo æqualis eſt 16600 granorum; & pondus Aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in Vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus Aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2F ad octo tertias partes diametri globi; id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in Vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſuprà, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, & eodem tempore 483 *gran.* etiam in Vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore

(t) — *ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis*] Sic habent Editionis tertiæ exemplaria, quotquot in chartâ minore ſunt expreſſa. Nos damus quæ in chartis majoribus leguntur. Quod ideo monendum

Liber Secundus.

tempore 57‴ 58‴, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in Aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore 8″ 12‴, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore 8″ 12‴, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 220 pedum per Experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos Aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.	Spatia deſcribenda per Theoriam.	Exceſſus.
510 gran.	5,1 digit.	8″ 12‴	226 ped. 11 dig.	6 ped. 11 dig.
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

Exper. 14. Anno 1719, menſe Julio, D. Deſaguliers hujuſmodi Experimenta iterum cepit; formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum, ope ſphæræ ligneæ concavæ (t), quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce, arefactas & exemptas, demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotundâ fornicatâ, nempe ab altitudine pedum 272; &, eodem temporis momento, demittendo etiam globum plumbeum, cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur Pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum, qui in terrâ ſtabant, unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam, affabrè conſtructam, cum Pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum, qui ſtabant in ſummi-

monendum duximus, nequis, cui ad manum fortè ſit exemplar duntaxat è minoribus, aut fidem noſtram aut diligentiam in otioſâ iſtâ voce *ambientis* deſideret.

tate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum, pro lubitu, vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum, quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14\frac{''r}{2}$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$, & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota, quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}$, $22'$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterùm veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta, nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectiùs veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat, & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis, filo tenuiſſimo bis circundato, menſuratis. Et Theoriam contuli cum Experimentis in Tabulâ ſequente; aſſumendo denſitatem Aëris eſſe ad denſitatem Aquæ Pluvialis ut 1 ad 860, & computando ſpatia, quæ globi per Theoriam deſcribere debuerunt cadendo.

Veſicarum pondera.	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.	Spatia iiſdem temporibus deſcribenda per Theoriam.	Differentia inter Theor. & Exper.
128 gran.	5,28 dig.	19″	271 ped. 11 dig.	— 0 ped. 1 dig.
156	5,19	17	272 0½	+ 0 0½
137½	5,3	18½	272 7	+ 0 7
97	5,26	22	277 4	+ 5 4
99½	5	21½	282 0	+10 0

Globorum, igitur tam in Aëre quàm in Aquâ motorum, Reſiſtentia propè omnis per Theoriam noſtram rectè exhibetur, ac denſitati Fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In Scholio, quod Sectioni Sextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus, per Experimenta Pendulorum, quòd Globorum æqualium & æquivelocium, in Aëre, Aquâ, & Argento Vivo motorum, reſiſtentiæ ſunt ut Fluidorum denſitates. Idem hîc oſtendimus magis accuratè per Experimenta corporum cadentium in Aëre & Aquâ. Nam Pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in Fluido motui Penduli redeuntis ſemper contrarium; & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili, quo Pendulum ſuſpendebatur, totam Penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt, quàm reſiſtentia quæ per Experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta Pendulorum in Scholio illo expoſita, Globus ejuſdem denſitatis cum Aquâ, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in Aëre, amittere deberet motûs ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam, in hâc ſeptimâ ſectione expoſitam & Experimentis cadentium comfirmatam, Globus idem, deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motûs ſui partem tantùm $\frac{1}{4586}$; poſito, quòd denſitas Aquæ ſit ad denſitatem Aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta Pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quàm per experimenta Globorum cadentium; idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cùm Pendulorum, in Aëre, Aquâ & Argento Vivo oſcillantium reſiſtentiæ à cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his Mediis, tam per experimenta Pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, ſatis rectè exhibebitur. Et inde concludi poteſt, quòd corporum, in Fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum, Reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates Fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem Globus quilibet, in Fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi; & V velocitas ejus ſub initio motûs; & T tempus, quo globus velocitate V in Vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$D ut denſitas Globi ad denſitatem Fluidi: & globus in Fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente pate $\frac{TV}{T+t}$; & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in Vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum

$\frac{t}{T}$,

De Motu Corporum

$\frac{t}{T}$, per Corol. 7. Prop. XXXV. In motibus tardis Reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quòd figura Globi paulo aptior ſit ad motum, quàm figura Cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus Reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quòd Elaſticitas & Compreſſio Fluidi non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hîc non expendo.

Et quamvis Aër, Aqua, Argentum Vivum & ſimilia Fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent Media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minùs reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in Propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt, & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium Fluidi, reſiſtentia, quæ oritur à Tenacitate & Frictione partium, diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non minuitur; &, manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui Reſiſtentia, de quâ hîc agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc Reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis, per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia cœleſtia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in partes omnes liberrimè, & ſine omni motûs diminutione ſenſibili, perpetuò moventur, Fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi fortè vapores longè tenuiſſimos, & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in Fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis Fluidi, ad Projectilis partes anticas, ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas; & non minor eſſe poteſt in Mediis infinitè fluidis quàm in Aere, Aquâ & Argento Vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſuâ, non tantum motum ciet in Fluido, ſed etiam agit in Projectile ad motum ejus retardandum: & propterea Reſiſtentia, in omni Fluido, eſt ut motus in Fluido à Projectili excitatus; nec minor eſſe poteſt in Æthere ſubtiliſſimo pro denſitate ætheris, quàm in Aëre, Aquâ & Argento Vivo pro denſitatibus horum Fluidorum.

SECTIO

Liber Secundus.

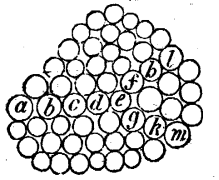
SECTIO VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROP. XLI. THEOR. XXXII.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

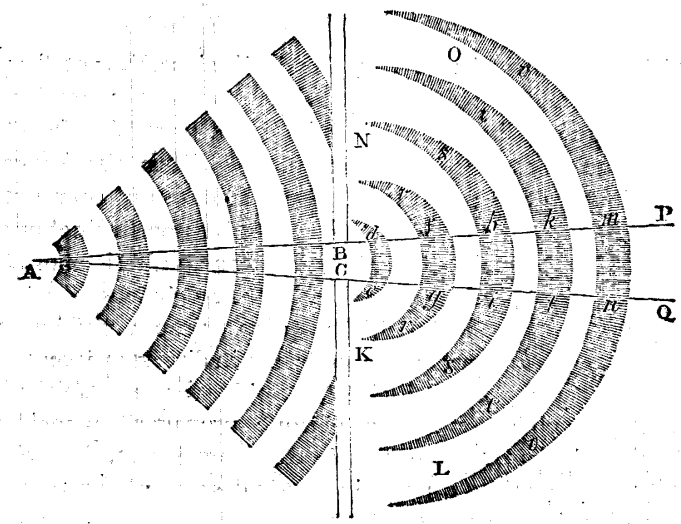
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, poteſt quidem preſſio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè poſitas, *f* & *g*, obliquè; & particulæ illæ, *f* & *g*, non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur à particulis ulterioribus, *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem, niſi fulciantur ab ulterioribus, *l* & *m*, eaſque premant; & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quàm primùm propagatur ad particulas, quæ non in directum jacent, divaricare incipiet, & obliquè propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit obliquè propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. Q. E. D.



Corol. Si preſſionis, à dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia ponè obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto A (*vid. fig. p.* 432) propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo NBCK perforato in BC, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem APQ, quæ per foramen circulare BC tranſit. Planis tranſverſis, *de*, *fg*, *hi*, diſtinguatur conus APQ in fruſta; & interea dum conus ABC, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motûs Legem tertiam) quòd fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter

De Motu Corporum

inter conum *Ade* & fruſtum *fbig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu, quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cùm rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) ex-



curret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quàm fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minùs propagabitur à lateribus *df*, *eg* in ſpatia NO, KL hinc inde, quàm propagatur à ſuperficie *fg* verſus PQ. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR. XX.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit à recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus à puncto A per foramen BC, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico BCQP, ſecundum lineas rectas divergentes à puncto A. Et ponamus primò, quòd motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis Aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*,

kl, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt, quàm in Fluidi partibus immotis LK, NO, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus KL & NO: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt, quàm in Fluidi partibus immotis KL, NO; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum Juga, poſteriore Valles, hinc inde dilatantur, & propagantur verſus KL & NO. Et quoniam motus undarum ab A verſus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque celerior non eſt quàm pro celeritate deſcenſûs; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus KL & NO eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus KL & NO eâdem velocitate, quâ undæ ipſæ ab A verſus PQ rectâ progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus KL & NO ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. Q. E. D. Hæc ita ſe habere quilibet in Aquâ ſtagnante experiri poteſt. Liber Secundus.

Caſ. 2. Ponamus jam, quòd *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus à puncto A, per Medium Elaſticum, ſucceſſivè propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones Medii, ſic ut pulſûs cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum A deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignet autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen BC propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt, quàm in ſpatiis hinc inde verſus KL & NO, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa KL, NO utrinque ſita, quàm verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens è regione intervallorum, ac denſius è regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eâdem ferè celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulſus illi eâdem ferè celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota KL, NO, quâ propagantur directè à centro A; ideoque ſpatium totum KLON occupabunt. Q. E. D. Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes

De Motu Corporum

cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppositis, quàm à fenestrâ directè propagati, quantùm ex sensu judicare licet.

Cas. 3. Ponamus denique, quòd motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio ista non fit, nisi quatenus partes Medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minùs premuntur: recedent eædem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales KL & NO, quàm anteriores PQ; eoque pacto motus omnis, quàm primùm per foramen BC transiit, dilatari incipiet, & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. Q. E. D.

PROP. XLIII. THEOR. XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in Medio verò non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli, vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt; dein, reditu suo, sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce Medii partes, hæ, similibus tremoribus agitatæ, agitabunt partes sibi proximas; eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur, & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ, quoties eunt, condensabuntur, & quoties redeunt, sese expandent (a). Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ab invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt, dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo

(a) Cave sic intelligas, quasi partes Liquoris, dum progrediantur, magis usque se condensent, dum redeant, rarescant; id enim neutiquam verum est. Sed illud modò vult Newtonus, partes Liquoris

Liber Secundus.

do condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus, tremoribus suis singulis, singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & à corpore illo tremulo, tanquam centro communi, secundum superficies propemodùm sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis; quæ, si digito tremulo excitentur, non solùm pergent hinc inde secundum plagam motûs digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam Gravitas undarum supplet locum vis Elasticæ.

Cas. 2. Quòd si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes, à corporis tremuli partibus vibratis pressæ, condensari nequeunt, propagabitur motus, in instanti, ad partes ubi Medium facillimè cedit; hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium, cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed, in circulum eundo, pergit ad spatia, quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur, & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. Q. E. D.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad pressionem, per Medium ambiens, secundum lineas

Liquoris euntes magis densas, redeuntes rariores esse, quàm si tota moles liquida, ab omni vi externâ immunis, stagnaret, et uniformem ubique densitatem servaret. *Pemberton.*

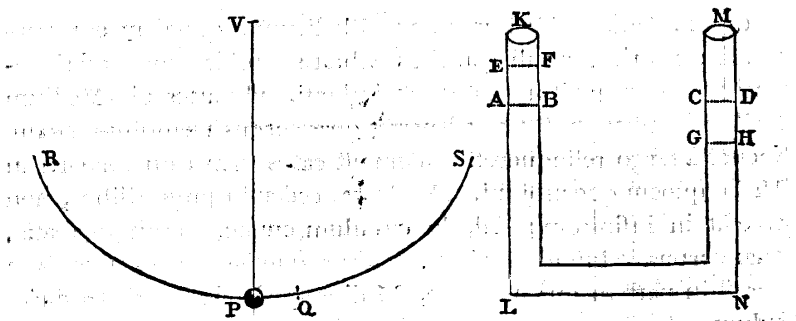
De Motu Corporum

rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſolâ partium flammæ, ſed à totius dilatatione derivari.

PROP. XLIV. THEOR. XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis, KL, MN, *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum, cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico, quòd Aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus, quibus Pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hîc non conſidero. Deſignent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utro-



que; & ubi aqua in crure KL aſcendit ad altitudinem EF, deſcenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum; VP filum; V punctum ſuſpenſionis; RPQS Cyclois, quam Pendulum deſcribat; P ejus punctum infimum; PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero: ideoque, ubi aqua in crure KL aſcendit ad EF, & in crure altero deſcendit ad GH, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ EABF; & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut AE, ſeu PQ, ad VP, ſeu PR. Vis etiam, quâ pondus P, in loco quovis Q, acceleratur & retardatur in Cycloide (per Corol. Prop.

Liber Secundus.

Prop. LI.) (b) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia PQ à loco infimo P, ad Cycloidis longitudinem PR. Quare Aquæ & Penduli, æqualia ſpatia AE, PQ deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi Aqua & Pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam Pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROP. XLVI. THEOR. XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

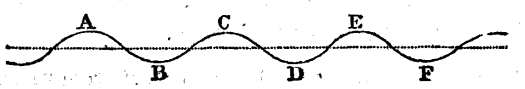
Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

PROP. XLVI. PROB. XII.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore Pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet ABCDEF ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcenden-

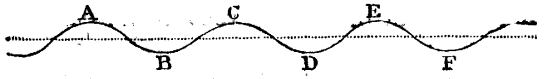


tem ac deſcendentem; ſintque A, C, E, &c. undarum culmina, &

(b) Libri Primi.

De Motu Corporum

B, D, F, &c. valles intermediæ. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes A, C, E, &c. quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt



pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in Canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima A, C, E & infima B, D, F æquentur duplæ Penduli longitudini (c); partes altiſſimæ A, C, E, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuò aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore Pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore Pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. Q. E. I.

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproximè.

Corol. 2. Et Undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent, ex hypotheſi quòd partes aquæ rectâ aſcendunt vel rectâ deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille veriùs fit per circulum, ideoque tempus, hâc Propoſitione, non niſi quamproximè definitum eſſe affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

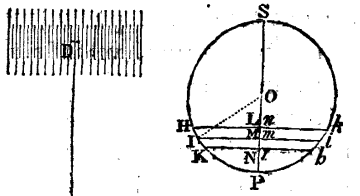
Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.

Deſignet AB, BC, CD, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; ABC, plagam motûs pulſuum ab A verſus B propagati;

E,

(c) Id eſt, ſi diſtantia loci cujuſque altiſſimi A, vel C, vel E, ab infimorum proximo B, vel D, vel

Liber Secundus.

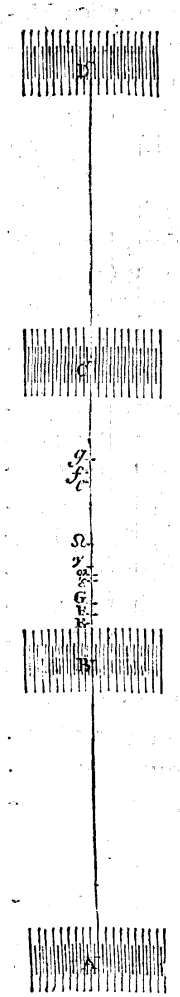


E, F, G, puncta tria phyſica Medii quieſcentis, in rectâ AC ad æquales ab invicem diſtantias ſita; Ee, Ff, Gg, ſpatia æqualia perbrevia, per quæ puncta illa, motu reciproco, ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ, loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG, lineolas phyſicas, ſeu Medii partes lineares, punctis illis interjectas, & ſucceſſivè tranſlatas in loca εφ, φγ & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS. Biſecetur eadem in O, centroque O & intervallo OP deſcribatur circulus SIPi. Per hujus circumferentiam totam, cum partibus ſuis, exponatur tempus totum vibrationis unius, cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis PH vel PHSb, ſi demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur Ee æqualis PL vel Pl, punctum phyſicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes ſingulas peraget, cum oſcillante Pendulo. Probandum eſt, quòd ſingula Medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu, à cauſâ quâcunque, cieri; & videamus, quid inde ſequatur.

In circumferentiâ PHSb capiantur æquales arcus HI, IK, vel hi, ik; eam habentes rationem ad circumferentiam totam, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN, vel im, kn, quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſivè agitantur, & vibrationes ſuas integras, ex itu & reditu compoſitas, interea peragunt, dum pulſus transfertur à B ad C; ſi PH, vel PHSb, ſit tempus ab initio motûs puncti E, erit PI, vel PHSi, tempus ab initio motû puncti F; & PK, vel PHSk, tempus ab initio motûs puncti G; & propterea

vel E æquetur duplæ Penduli longitudini.

De Motu Corporum



terea Eε, Fφ, Gγ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipſis P*l*, P*m*, P*n* in punctorum reditu, æquales reſpectivè. Unde εγ, ſeu EG+Gγ−Eε, in itu punctorum æqualis erit EG−LN, in reditu autem æqualis EG+*ln*. Sed εγ latitudo eſt ſeu expanſio partis Medii EG in loco εγ; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut EG−LN ad EG; in reditu autem ut EG+*ln*, ſeu EG+LN, ad EG. Quare, cùm ſit LN ad HK ut IM ad radium OP, & KH ad EG ut circumferentia PHS*b*P ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC, ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG, punctive phyſici F, in loco εγ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut V−IM ad V in itu, utque V+*im* ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco εγ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut HL−KN ad V, ſi modò (ob anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinitè minores eſſe quantitate V. Quare cùm quantitas

(d) Poſuit nimirum Newtonus Liquorem aliquem Elaſticum tali motu, à quâcunque demum cauſâ, agitari, quo ſingula ejus corpuſcula vias rectas breviſſimas eant redeantque, motu ad legem corporis penduli, in Cycloide oſcillantis, attemperato. Tum illud agit, ut exploret, quibuſnam viribus acceleratricibus corpuſcula ejus Liquoris urgeri debeant, ad motum qualem poſuit præſtandum. Eas verò tales eſſe oportere comperit, quæ cum diſtantiis corpuſculorum à medio itineris cujuſque ſui puncto proportione conveniant. Jam verò corpuſcula Liquoris Elaſtici quem corpus quodlibet tremulum agitaverit, ea quoque vias rectas breviſſimas eunt redeuntque; certiſ. utique

tas V detur, differentia virium eſt ut HL−KN, hoc eſt (ob proportionales HL−KN ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi F*f* biſecetur in Ω, ut Ωφ. Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ phyſicæ εγ eſt ut Ωφ. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ) eſt vis, quâ interjecta Medii lineola phyſica, εγ, acceleratur in itu, & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix lineolæ phyſicæ εγ, eſt ut ipſius diſtantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) rectè exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis εγ lege præſcriptâ movetur, id eſt, lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. Q. E. D (d).

Liber Secundus.

Corol. Hinc patet quòd numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola phyſica εγ, quamprimùm ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur, quamprimùm pulſus à corpore tremulo propagari deſinunt.

utique viribus acceleratricibus, à tremoribus corporibus tremuli, incitata. Eæ autem quænam erunt? Nempe ſi tales ſint, quæ cum diſtantiis corpuſculorum, à medio itineris cujuſque puncto, proportione conveniant, eum illæ corpuſculorum ſingulorum motum efficient, qui ad legem corporis penduli, in Cycloide oſcillantis, attemperatus erit: quoniam motus corpuſculorum ſingulorum, ad eam legem attemperatus, tales vires acceleratrices flagitare oſtenſus ſit: et fieri nullâ ratione poteſt, ut à viribus ſimilibus diſſimiles motus in eâdem materiâ concitentur. Tales autem eſſe vires quibus incitantur corpuſcula Liquoris Elaſtici, à corpore tremulo agitati, Newtonus tacitè aſſumpſit. Et in hoc aſſumpto omnis hujus Propoſitionis poſita eſt demonſtratio: quæ nulla planè erit, ſi hoc aſſumptum negaveris. Imo ſiquis oſtenderit vires acceleratrices non eſſe tales, is vel ex iis ipſis, quæ à Newtono ſunt oſtenſa, contra Newtonum obtinebit motus corpuſculi cujuſque Liquoris Elaſtici motum corporis penduli in Cycloide neutiquam æmulari. Vellem Newtonus ipſe aſſumpti ſui rationes explicaſſet. Mihi ſanè non niſi probabili ratione colligendum videtur, ex eo quod in Nervo tenſo accidere novimus; cujus quidem puncta ſingula vibrantis viribus incitantur, quæ cum diſtantiis punctorum à locis mediis proportione conveniant. Quòd ſi corpus ottine tremulum nihil aliud ſit, quàm contextus quidam fibrarum trepidantium, quarum unaquæque pro nervo tenſo habenda ſit, et ſi corporis totius tremor confectus ſit ex fibrarum omnium tremoribus; ſanè veriſimile erit, corpuſcula ſingula corporis tremuli ſimili modo, quo puncta ſingula Nervi tenſi vibrantis, incitari. Denique ſi corpus tremulum in corpuſculis Liquoris Elaſtici non alios motus efficere poſſit, niſi qui ſimiles ſint eorum, quos ipſius corpuſcula proprios habent, corpuſcula utique Liquoris Elaſtici, quem corpus tremulum agitet, motus punctorum Nervi tenſi æmulari veriſimillimum erit.

Cæterùm de Motu Nervi Tenſi conſulendus eſt Taylorus in *Methodo Increment. Part.* II. Unum moneo, pro eo quod apud Taylorum in demonſtratione Lemmatis IX. legimus, eſſe *tr* ad *t*B ut B*b* ad Bs, omnino legendum, eſſe *tr* ad *t*B ut B*b* ad 2Bs. Cujus emendationis ratio, ex iis quæ ad Lemma tertium hujus libri diſputavimus, ſatis patet.

De Motu Corporum

PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII.

Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè; ſi modò Fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Veruntamen niſi contractiones & dilatationes ſint valdè intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro phyſicè accuratâ haberi poteſt. Sunt autem vires elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium, ſimul genitæ, ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos, per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui, tempore itûs & reditûs unius, latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ, ſeu longitudines, ſint majores in uno Medio quàm in altero; ponamus, quòd partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, ſingulis vicibus eundo & redeundo, deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices, quibus reciproco motu agitantur. Materia autem, his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo: & in eâdem ratione eſt ſpatium, per quod ſingulis vicibus, eundo & redeundo, moveri debent. Eſtque tempus itûs & reditûs unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii (e), atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem, temporibus itûs & reditûs unius eundo, latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

(e) Per Prop. XLVII. et Prop. XXIV. Cor. 5.

Caſ.

Liber Secundus.

Caſ. 3. In Mediis igitur denſitate & vi elaſticâ paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quòd ſi Medii vel denſitas vel vis elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac priùs, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ (f). Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis Medii inverſè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè. Q. E. D.

Hæc Propoſitio ulteriùs patebit ex conſtructione ſequentis.

PROP. XLIX. PROB. XI.

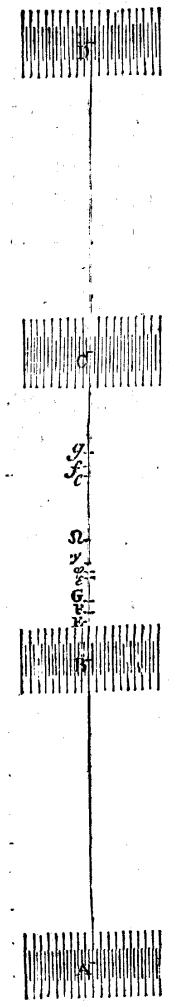
Datis Medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aëris noſtri, comprimi; ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, ſit A: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram, ex itu & reditu compoſitam, peragit, eodem Pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli, radio A deſcripti, æquale.

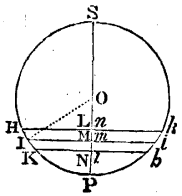
Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica EF, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS, urgeatur in extremis itûs & reditûs cujuſque locis, P & S, à vi elaſticâ quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas, quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo, quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cùm oſcillationum tempora ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis ½PS, ſeu PO, ad longitudinem A. Sed vis elaſtica, quâ lineola phyſica, EG, in locis ſuis extremis, P, S, exiſtens urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII.)

(f) Prop. XLVII. et Prop. XXIV.

De Motu Corporum



ad ejus vim totam elaſticam ut HL−KN ad V, hoc eſt (cùm punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; ideoque ex æquo, vis, quâ lineola EG in locis ſuis P & s urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut HK × A ad V × EG, ſive ut PO × A ad VV, nam HK erat ad EG ut PO ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicatâ ratione VV ad PO × A, atque ideo ad tempus oſcillationis Penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione VV ad PO × A, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius, ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eâdem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. Q.E.D.



Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt Gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſûs hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium, quod erit æquale totæ altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius, ex itu & reditu compoſitæ, percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſûs ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cùm altitudo illa A ſit ut Fluidi vis elaſtica directè & denſitas ejuſdem inverſè; velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

PROP. L. PROB. XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium, quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſûs unius latitudo. Q. E. I.

Scholium.

Spectant Propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cùm propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſolâ (per Prop. XLI & XLII.) conſiſtere nequit. Soni verò, propterea quòd à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quàm Aëris pulſus propagati, per Prop. XLIII. Comfirmatur id ex tremoribus, quos excitant in corporibus objectis, ſi modò vehementes ſint & graves, quales ſunt ſoni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficiliùs excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatum etiam ex velocitate ſonorum. Nam cum pondera ſpecifica Aquæ Pluvialis & Argenti Vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{1}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum Aëris & Aquæ Pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera ſpecifica Aëris & Argenti Vivi ut 1 ad 11890. Proinde cùm altitudo Argenti Vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërum noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa, quam, in conſtructione ſuperioris Problematis, nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 186768. Et cùm Pendulum digitos

De Motu Corporum.

digitos $39\frac{1}{2}$ longum oscillationem, ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29,725, seu digitos 356700, longum oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore Sonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterùm in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cùm pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint ferè duplo densiores quàm aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos Sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{272}{9}$, seu 109, circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic Sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde, quòd vappores in aëris latentes, cùm sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri, quo Soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celeriùs propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut si Atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quàm si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus sonorum, suprà inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto Sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore Verno & Autumnali, ubi Aër per calorem temperatum rarescit, & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At Hyberno tempore, ubi Aër per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; & viciſſim Æstivo tempore debet esse velocior.

Constat

Liber Secundus.

Constat autem per experimenta, quòd soni, tempore minuti unius secundi, eundo conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* verò 1070.

Cognitâ sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis à se experimentis, quòd fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi $10\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est, quòd latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutiùs audiuntur, ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quàm cùm proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVII. libri hujus. Sed & cur soni in tubis stentorophonicis valdè augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causâ generante augeri solet. Motus autem in tubis, dilatationem sonorum impedientibus, tardiùs amittitur & fortiùs recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO IX.

De motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes Fluidi separantur ab invicem.

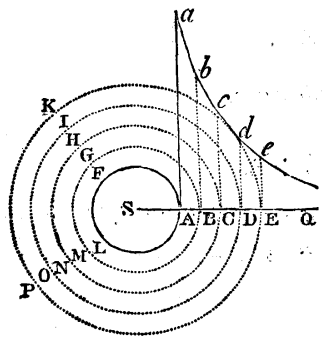
PROP.

De Motu Corporum

PROP. LI. THEOR. XXXIX.

Si Cylindrus ſolidus infinitè longus in Fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem, perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico, quòd tempora periodica partium Fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri.

Sit AFL Cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. diſtinguatur Fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum (a), impreſſiones contiguorum orbium, in ſe mutuò factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde, cùm impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inverſè ut ſuperficies, hoc eſt, inverſè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium, circa axem, ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inverſè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inverſè. Quare, ſi ad infinitæ rectæ SABCDEQ partes ſingulas erigantur perpendicula, A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. ipſarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium



(a) Vide Prop. LII. Not. c & d.

Liber Secundus.

um duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*; id eſt, ſi, ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, &c. Et tempora, motibus angularibus reciprocè proportionalia, erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis D reciprocè ut area D*d*Q; hoc eſt (per notas Curvarum Quadraturas) directè ut diſtantia SD. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum Fluidi ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si Fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret Fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si Cylindro & Fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium Fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti Cylindrorum & Fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis Cylindri exterioris, habebitur motus Fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi Fluido & Cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis Fluido, & paulatim per totum Fluidum propagabitur; nec priùs deſinet augeri, quàm Fluidi partes ſingulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam Fluidum conatur motum ſuum adhuc latiùs propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violentur detentus; & accelerabitur ejus motus, quoad

De Motu Corporum

uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quòd ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum Fluidi retardare; &, niſi cylindrus interior, vi aliquâ extrinſecus impreſſâ, motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in Aquâ profundâ ſtagnante experiri licet.

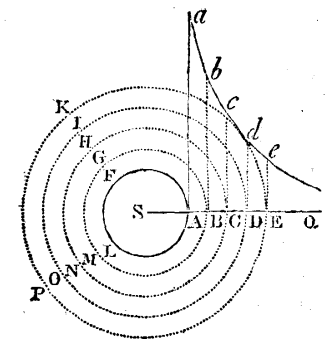
PROP. LII. THEOR. XL.

Si Sphæra ſolida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum, uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem; perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico, quòd tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro Sphæræ.

Caſ. 1. Sit AFL Sphæra uniformiter circa axem S in orbem acta, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. diſtinguatur Fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis (b). Finge autem orbes illos eſſe ſolidos (c); & quoniam homogeneum eſt Fluidum (d), impreſſiones contiguorum orbium, in ſe mutuò factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies continuæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt, vel minor, ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu, vel in contrariam, dirigitur. Proinde, ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde, cùm impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inverſè ut ſuperficies, hoc eſt, inverſè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum

(b) Centro ſcilicet S, in plano aliquo per ſphæræ polos ducto, intelligantur circuli innumeri omnium magnitudinum, qui circa axem ſphæræ converſi, ſphæricas ſuperficies innumeras circum centrum commune S efficiant, quibus tota moles liquida diſtinguatur in orbes innumeros ejuſdem craſſitudinis. Circuli BGM, CHN, DIO, EKP lineationis Newtonianæ ſunt horum orbium Æquatores.

(c) Congelato utique liquore in orbibus ſingulis ſeparatim; ita tamen ut denſitas materiæ uniformis, quæ antè fuit, maneat. Dico liquorem in *orbibus ſingulis* ſeparatim congelandum eſſe. Nempe



Liber Secundus.

motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inverſè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut cubi diſtantiarum inverſè. Quare ſi ad rectæ infinitæ SABCDEQ partes ſingulas erigantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, &c. ipſarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*: id eſt (ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, &c. Et tempora periodica, motibus angularibus reciprocè proportionalia, erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis DIO reciprocè ut area D*d*Q, hoc eſt, per notas Curvarum Quadraturas, directè ut quadratum diſtantiæ SD. Id quod volui primò demonſtrare.

Caſ. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuò ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros (e) ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem, & duos laterales (f). Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſûs primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectâ pergens, movebi-

Nempe ut corpora ſolida diſjuncta tot efficiat, quot ſint orbes, nec in unum corpus ſolidum concreſcat.

(d) Quoniam homogeneum erat Fluidum, & denſitas materiæ quæ Liquoris erat, ea in corporibus ſolidis, ex liquoris concretione factis, manet, ideirco denſitas materiæ in unoquoque orbe uniformis, & in omnibus eadem erit. Quapropter *impreſſiones contiguorum orbium*, &c.

(e) Cum æquatoris plano parallelos.

(f) Nempe ſuperiorem alterum, alterum inferiorem in eâdem ſphæricâ ſuperficie.

tur pro lege casûs primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus est (g); neque ideo motum, quò minùs hâc lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter distant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta Polos quam juxta Eclipticam (h), tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuò, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casûs primi. Non impedit igitur hic attritus, quo minùs motus fiat secundum legem casûs primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro globi. Quod volui secundò demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motûs circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodò conducunt, perseverabit motus circularis ut priùs. His sectionibus annuli omnes quàm minimi asperitatem & vim attritûs mutui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. Q. E. D. Cæterùm cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam (h) quàm ad Polos; debebit causa aliqua adesse, quâ particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad Eclipticam est (h), recedat semper à centro, &, per exteriora Vorticis, migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam (h) circulatione perpetuâ revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium Fluidi circa axem globi, sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in Fluido quiescente, similari & infinito, circa axem positione datum, uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus Fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque priùs cessabit in singulis Fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica singularum

(g) Propter æquales motus angulares annulorum omnium ejusdem solidi orbis sphærici.

partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores, ob majorem suam velocitatem, atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis eâ actione perpetuò communicant; & exteriores illi eandem motûs quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eâque actione servant quantitatem motûs sui planè invariatam; patet, quòd motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quòd motum omnem, à materiâ interiore, acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Sine tali principio necesse est, ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim, & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici, ad certam ab ipsius centro distantiam, innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur Fluidum in vorticem: & primò revolveretur hic Vortex novus & exiguus, unà cum globo, circa centrum alterius, & interea latiùs serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus; sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuò, ob motum illum circularem, fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea, si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3 & 4. assignatam) & Vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures, datis in locis, circum axes positione datos, certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eâ-

(h) Intellige Æquatorem.

De Motu Corporum

dem ratione, quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut Fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu, qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuò paulatim excurrent; globique, per actiones Vorticum in ſe mutuò, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in Corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis, quæ, in globos conſtanter impreſſæ, conſervant hoſce motus, materia, ob rationem in Corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet, & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si Fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi, in centro conſiſtentis, uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes Fluidi non priùs perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro Vorticis. Alia nulla Vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari, circa axem quemvis datum, revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium Fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit, ut attritu ex uno latere non magis tardetur, quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus Fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi, & motu

(i) Hujus Corollarii veritatem ſic oſtendimus. A Vaſe, Globo, et Liquore interpoſito, pro lege Corollarii 7. circumactis, auferatur motus quivis angularis communis z. Motus angularis qui in Globo reliquus eſt, dicatur G; qui in orbe quovis Liquoris CHN, S; qui in orbe extimo EKF, ſeu vaſis orbe, E. Erit igitur G+z ad C+z ut SC² ad SA². Et C+z ad E+z ut SE² ad SC² (per Cor. 7). Unde etiam G+z ad E+z ut SE² ad SA². Hinc ſi ponatur E=0, ut vas ablatâ motûs ejus angularis parte z, ad quietem redigatur, erit G+z ad z ut SE² ad SA²; et C+z : z = SE² : SC². Plani, motu ejus qui globi eſt contrario circumacti, dicatur motus angularis P. Tempus converſionis ejuſdem plani dicatur π; Globi, γ. Erit igitur, π : γ = G : P; et π+γ : γ = G+P : P. Sed π+γ : γ = SE² : SA². (Id enim Newtonus poſuit.) Quare G+P : P = SE² : SA². At vero SE² : SA² = G+z : z, modò talis ſit z, qui efficiat ut vas quieſcat. Id enim à nobis oſtenſum

motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium Fluidi, reſpectu plani hujus, erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi (i).

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem, datâ cum velocitate quâcunque moveatur, dabitur motus Fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui priùs, per Corol. 8. Et motus iſti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & Fluidum quieſcant, & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per Fluidum totum in vas, & circumagetur vas, niſi violentur detentum; neque priùs deſinent Fluidum & vas accelerari, quàm ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quòd ſi vas vi aliquâ detineatur, vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad ſtatum motûs in Corollariis 8, 9 & 10, definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde verò, ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus Mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante Fluido, neque motus ſuos in ſe mutuò per Fluidum propagare priùs ceſſabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum, ad inſtar corporis unius ſolidi, ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono Fluidum ex materiâ, quoad denſitatem & fluiditatem, uniformi conſtare. Tale eſt, in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in Fluido

tenſum eſt.) Unde G+z : z = G+P : P. Et dividendo G : z = G+P. Unde z = P. Quare cùm ſit C+z : z = SE² : SC² (id enim à nobis oſtenſum.) erit C+P : P = SE² : SC². Eſt autem P ad P+C ut motus angularis Plani, contrariè circumacti, ad motum angularem, quo partes Liquoris in orbe CHN Plano illi admoventur. Unde P erit ad P+C ut tempus converſionis orbis CHN, ratione ejus Plani, ad tempus quo Planum ipſum convertetur. Quare cùm ſit etiam P : P+C = SC² : SE², tempus primum erit ad poſterius ut quadratum ex SC ad quadratum ex SE. Et ſimili modo de alio quovis orbe Liquoris oſtendetur, ejus tempus convertendi, ratione Plani contrariè circumacti, ad tempus, quo Planum ipſum convertitur, rationem habere quam quadratum ex orbis ejus ſemidiametro ad quadratum ex ſemidiametro vaſis. Q. E. D.

conſtitutus,

De Motu Corporum

conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia, per motum ſuum circularem, recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc preſſione fit attritus partium fortior, & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes Fluidi ſunt alicubi craſſiores, ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem, vel lubricitate partium, vel lentore, aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia, ubi minùs fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit; ideoque motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit, quàm pro ratione ſuperiùs aſſignatâ. Si figura vaſis non ſit ſphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus, ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus; ubi anguſtiora, velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minùs curvos, & conatus recedendi à centro non minùs diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longiùs à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in Fluido infinito conſtitutio Vorticum innoteſcit, per Propoſitionis hujus Corollarium ſextum.

Proprietates autem Vorticum hâc Propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem, ſiquâ ratione Phænomena Cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt, quòd Planetarum, circa Jovem revolventium, tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Jovis; & eadam regula obtinet in Planetis, qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in Planetis utriſque quàm accuratiſſimè, quatenus Obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidere. Ideoque ſi Planetæ illi à Vorticibus, circa Jovem & Solem revolventibus, deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica

Liber Secundus.

periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro motûs: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, niſi vel materia Vorticis eo fluidior ſit, quo longiùs diſtat à centro; vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, ex auctâ velocitate, quâ partes Fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione, quàm ea eſt, in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minùs fluidæ, niſi graves ſint in centrum, circumferentiam petent; & veriſimile eſt, quòd, etiamſi demonſtrationum gratiâ hypotheſin talem, initio Sectionis hujus, propoſuerim, ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione, quàm ea velocitatis eſt. Quo conceſſo, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quòd ſi Vortices (uti aliquorum eſt opino) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs uſque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio ſeſquiplicatâ, neque alia quævis certa ac determinata, obtinere poteſt. Viderint itaque Philoſophi, quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per Vortices explicari poſſint.

PROP. LIII. THEOR. LXI.

Corpora, quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eâdem lege cum ipſius partibus, quoad velocitatem & curſûs determinationem moventur

Nam ſi Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ, ſeu puncta phyſica, datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contrà, ſi Vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo Vortice, & reſolvatur in Fluîdum; movebitur hæc eâdem lege ac priùs, niſi quatenus ipſius particulæ, jam fluidæ factæ, moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac priùs. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium, à centro æqualiter diſtan-

De Motu Corporum

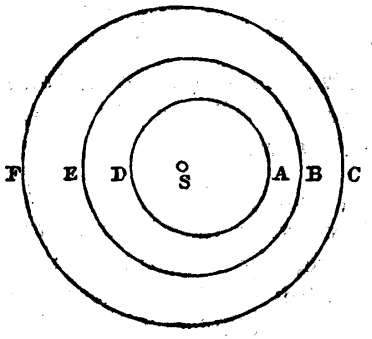
tium, propterea quòd Solidum, in Fluidum resolutum, sit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo Solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs; ideoque Vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ, tanquam in æquilibrio constitutum, retinebatur, jam superans, recedet à centro, & revolvendo describet Spiralem, non ampliùs in eundem orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum Fluido. Eo autem in casu ostensum est, quòd revolveretur eâdem lege cum partibus Fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo Solidum, quod in Vortice revolvitur, & in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in Fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si Vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem, ad quamlibet à centro Vorticis distantiam, revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ, secundum hypothesin *Copernicæam*, circa Solem delati revolvuntur in Ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, &, radiis ad Solem ductis, areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent AD, BE, CF, orbes tres circa Solem S descriptos; quorum extimus, CF, circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint A, B, & Periphelia D, E. Ergo corpus, quod revolvitur in orbe CF, radio ad Solem ducto, areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem, quod revolvitur in orbe BE, tardiùs movebitur in Aphelio B, & velociùs in Periphelio E, secundum leges Astronomicas; cùm tamen, secundum leges Mechanicas, materia Vorticis,



Liber Secundus.

in spatio angustiore inter A & C, velociùs moveri debeat, quàm in spatio latiore inter D & F; id est, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi Piscium ut ternarius ad binarium circiter; & propterea materia Vorticis, inter orbes illos, in principio Piscium debet esse velocior, quàm in principio Virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo angustius est spatium, per quod eadem materiæ quantitas, eodem revolutionis unius tempore, transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra, in hâc materiâ cœlesti relativè quiescens, ab eâ deferretur, & unâ circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialterâ. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, & in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta & octo: cùm tamen (experientiâ teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. Itaque hypothesis Vorticum cum Phænomenis Astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos, quàm ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis, sine Vorticibus, peraguntur, intelligi potest ex Libro Primo, & in Mundi Systemate jam pleniùs docebitur.

FINIS TOMI SECUNDI.

... BIBLIOTECA S. CUORE
... BIBLIOTECA
numero 100532
dono
cambio
data

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

Pag. 98, lin. 32, pro *locum*, lege *loci*.
Pag. 273, lin. 6, pro *velocitatum*, lege *velocitatis*.

CORRIGENDA ET ADDENDA IN NOTIS.

P. 51, *Notæ* [l], *hæc addantur*. Cor. H. Velocitas corporis in Circulo circumacti, ea erit, quam corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ ejus ſit æqualis quæ in circuli circuitu viget, ſpatium dimidii radii cadendo adeptum eſſet. Sumatur enim AE (fig. Not. [l]) radii AD ſemiſſis, arcuſque AF æqualis radio. Erit igitur AC : AF = AF : AE. Arcus igitur AF motu corporis per circulum æquabili, et ſpatium AE caſu recto, hoc eſt motu æquabiliter accelerato, eodem tempore conficientur. At verò eodem tempore quo caſu recto conficitur ſpatium AE, conficiatur, velocitate illâ quam corpus in E adeptum erit, duplum ſpatium AE, ſive radius AD. Arcus igitur AF et radius AD æqualibus temporibus conficiantur, velocitate uterque æquabili; ille quidem eâ quæ eſt corporis in Circulo circumacti, hic verò eâ quam corpus, rectâ cadendo, in loco E adeptum eſſet. Sunt autem arcus AF, radiuſque AD inter ſe æquales. Quare et velocitates quibus ſpatia illa æqualia temporibus æqualibus conficerentur, eæ inter ſe æquales erunt. Velocitas igitur corporis in Circulo velocitati corporis rectâ cadentis in loco E æqualis. Q. E. D.

Cor. H. 2. Tempus quo corpus, urgente vi quâdam uniformi, quæ æqualis ſit ejus quæ in Circuli circuitu viget, caſu recto dimidium radium conficiat, ad tempus converſionis integræ in Circulo rationem habet, quam radius ad circuli circuitum. Patet ex demonſtratione ſuperioris.

P. 83, *Notæ* [dd], *hæc addantur*. Cor. H. 2. Si corpus aliquod à loco R in locum T rectâ cadat, urgente utique vi quâdam uniformi, quæ ejus ſit æqualis, quâ corpus per Ellipſin PAP incedens urgetur verſus umbilicum G in loco P (fig. Not. [dd]); tum ſi ea ſit longitudo ſpatii RT, ut corporis rectâ cadentis eadem ſit, in loco T, quæ alterius, per Ellipſin lati, in loco P velocitas; rectangulum ſub RT et axe tranſverſo Ellipſeos rectangulo ſub rectis PG, PS, à puncto Ellipſeos P ad umbilicos ductis, æquale erit. Capiatur enim RV dimidiæ PG æqualis. Velocitas corporis rectâ cadentis, in loco V, ea erit quâcum Corpus, urgente vi centrali qualis eſt in loco Ellipſeos P, in circulo circum centrum G in diſtantiâ GP circumageretur. (Lib. I. Sect. II. Not. [l], Cor. H.) Sed recta TR ad rectam TV rationem habet duplicatum ejus quam velocitas in loco T ad velocitatem in loco V: duplicatam igitur ejus quam velocitas in loco P, corporis per Ellipſin lati, ad velocitatem corporis circum centrum G in diſtantiâ GP circumacti. Harum autem velocitatum duplicata ratio ea eſt quam SP habet ad CA. Erit igitur TR ad TV ut SP ad CA. Quare TR : 2TV vel PG = SP : 2CA. Quare TR × 2CA = PS × PG. Q. E. D. Pulcherrimum hoc Theorema Boſcovicii eſt. Demonſtratio à nobis.

Pag. 145, lin. not. 10, pro *evadit*, lege *evadet*.
Pag. 181, lin. penult. pro *interceptæ*, lege *intercepta*.
Pag. 210, not. [f], lin. 2, dele *necnon SK, ST*.
Pag. 244, not. [d], lin. 6, pro *curvi linearis*, lege *curvilinearis*.
Pag. 275, lin. not. 5, pro *repreſentari*, lege *repræſentari*.
Pag. 281, lin. not. 1, pro ** formulis & Ideâ generationis quantitatum **, lege *formulis * & Ideâ generationis quantitatum **.
Pag. 287, lin. not. 2. In membro æquationis ultimo in numeratore lege $\frac{1}{2} So^3$.
Pag. 320, lin. not. 37, pro *conſenda*, lege *cenſenda*.
Pag. 369, lin. not. ult. pro *efficiet*, lege *efficiat*.
Pag. 386, lin. not. 12, pro *iſtius modi*, lege *iſtiuſmodi*.
Pag. 419, lin. not. 9, pro *tate*, lege *unitate*.



FA 7 A 222-III

OPERUM NEWTONI.

TOMUS TERTIUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

TOM. III.

LONDINI:
EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXXII.

IN HOC TOMO CONTINENTUR

IPSIUS NEWTONI,

I. *Principiorum Liber Tertius, de Systemate Mundi*, Pag. 1
II. *De Mundi Systemate*, 176
III. *Theoria Lunæ*, 243
IV. *Lectiones Opticæ*, 250

EDITORIS,

De Viribus Centralibus quæ rationem triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servant.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI TERTII PRINCIPIORUM.

	Regulæ Philoſophandi.	Pag. 1
	Phænomena.	5
SECT. I.	*De Cauſis Syſtematis Mundani.*	11
SECT. II.	*De Quantitate Errorum Lunarium.*	57
SECT. III.	*De Quantitate Æſtûs Marini.*	104
SECT. IV.	*De Præceſſione Æquinoctiorum.*	111
SECT. V.	*De Cometis.*	121

DE

MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur; uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt, ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea, ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur, qui principia priùs evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quàm plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulò legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones, hîc citatas, pro lubitu conſulat.

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & veræ ſint, & earum phænomenis explicandis ſufficiant.

DICUNT utique Philoſophi: Natura nihil agit fruſtra; & fruſtra fit per plura, quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt, & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque Effectuum naturalium ejuſdem generis eædem aſſignandæ ſunt Cauſæ, quatenus fieri poteſt.

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtiâ; deſcenſûs lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terrâ & in Planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt; ideoque generales ſtatuendæ ſunt, quotquot cum experimentis generaliter

neraliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem ſomnia temerè confingenda non ſunt, nec à Naturæ analogiâ recedendum eſt, cùm ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium; & inde non horum tantùm corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi, & duras eſſe, & impenetrabiles, & mobiles, & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas, & ſibi mutuò contiguas, ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus; & partes diviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe, ex Mathematicâ certum eſt. Utrum verò partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi, & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento, quòd particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quòd non ſolùm partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quòd indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Liber Tertius.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuò, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem in Solem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit, per hanc Regulam, quòd corpora omnia in ſe mu-

De Mundi Systemate

tuò gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de Gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen Gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minimè affirmo. Per vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt. Gravitas, recedendo à Terra, diminuitur.

REGULA IV.

In Philoſophiâ experimentali, Propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accuratè, aut quamproximè, haberi debent, donec alia occurrerint Phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur, aut exceptionibus obnoxiæ.

Hoc fieri debet, ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

(a) Confer Librum poſthumum de Syſtemate Mundi § 6.

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Liber Tertius.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

CONSTAT ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronomi; & idem ex Tabulâ ſequente manifeſtum eſt (a).

Satellitum Jovialium tempora periodica.

$1^d.18^h.27'.34''.$ $3^d.13^h.13'.42''.$ $7^d.3^h.42'.36''.$ $16^d.16^h.32'.9\frac{6}{10}''.$

Diſtantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex obſervationibus	I	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis.
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299 (b)	

(b) TEMPORA

Quibus Satellites Jovis converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	I	II	III	IV
Temporum rat.	152854″	306822″	618156″	1441929″
	1	2,007	4,044	9,433
Rat. dupl.	1	4,028	16,353	88,983

DISTANTIÆ

Satellitum à Centro Jovis ex Eclipſibus Satellitum à Caſſino obſervatis.

	I.	II.	III	IV.
Diſtantiarum rat.	5,666	9	14,383	25,3
	1	1,5882	2,5383	4,4646
Rat. Triplicatæ	1	4,006	16,354	88,991

Vides miram planè convenientiam Rationum quæ diſtantiarum ſunt triplicatæ, cum iis quæ ſunt duplicatæ temporum.

De Mundi Systemate

Elongationes ſatellitum Jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit, ut ſequitur. Elongatio maxima heliocentrica Satellitis quarti à centro Jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit; & prodiit, in mediocri Jovis à Terrâ diſtantiâ, 8′. 16″ circiter. Ea Satellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit; & prodiit, in eâdem Jovis à Terrâ diſtantiâ, 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum Satellitum, in eâdem Jovis à Terrâ diſtantiâ, ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56′. 47‴, & 1′. 51″. 6‴.

Diameter Jovis micrometro in teleſcopio pedes 123 longo ſæpiùs capta fuit; & ad mediocrem Jovis à Sole vel Terrâ diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quàm 40″, nunquam minor quàm 38″, ſæpiùs 39″. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt 40″ vel 41″. Nam lux Jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum Jovis in longioribus & perfectioribus teleſcopiis, quàm in brevioribus & minùs perfectis. Tempora quibus Satellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus Jovis, ab initio ingreſſûs ad initium exitûs, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ diſtantiâ, prodiit, per tranſitum Primi ſatellitis, $37\frac{1}{8}''$; & per tranſitum Tertii, $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam, quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus Jovis obſervatum fuit, & inde diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ diſtantiâ, prodiit 37″ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris Jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpectivè.

P H Æ-

(c) TEMPORA

Quibus Satellites Saturni converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	I	II	III	IV	V
	163107″	236482″	390312″	1377672″	6853620″
Temporum rationes	1	1,450	2,393	8,446	42,02
Rationes dulplicatæ	1	2,102	5,726	71,33	1765,6

DISTANTIÆ

PHÆNOMENON II.

Planetas Circumſaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro. LIBER TERTIUS.

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d.21^h.18'.27''$. $2^d.17^h.41'.22''$. $4^d.12^h.25'.12''$. $15^d.22^h.41'.14''$. $79^d.7^h.48'.00''$.

Daſtantiæ Satellitum à centro Saturni in ſemidiametris Annuli.

Ex obſervationibus	$1\frac{10}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis	1,93.	2,47.	3,45.	8.	23,35. (c)

Quarti ſatellitis elongatio maxima à centro Saturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproximè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro Saturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ Satellitum à centro Saturni in ſemidiametris Annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum Annuli ut 3 ad 7, & diameter Annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719, prodiit 43″. Et inde diameter Annuli, in mediocri Saturni à Terrâ diſtantiâ, eſt 42″; & diameter Saturni, 18″. Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quòd magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilata-

DISTANTIÆ Satellitum à centro Saturni. Caſſini obſervatæ.

	II	II	III	IV	V
	1,95	2,5	3,5	8	24
Diſtantiarum rationes	1.	1,2820	1,7950	4,1025	12,307
Rationes triplicatæ	1.	2,107	5,783	69,05	1864,9

tionem

De Mundi Systemate

tionem lucis in terminis illorum corporum quàm in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter Saturni haud major quàm 16″.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios, Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum, orbibus ſuis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi, ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt; dimidiatâ è regione Solis; falcatâ cis Solem, per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plenâ facie, prope Solis conjunctionem, & gibboſâ in quadraturis, certum eſt, quòd is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur: hos enim luce à Sole mutuatâ ſplendere, ex umbris ſatellitum in ipſos projectis manifeſtum eſt.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel Solis circa Terram vel Terræ circa Solem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ mediocrium diſtantiarum à Sole.

Hæc à *Keplero* (d) inventa ratio in confeſſo ad apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, cædemque orbium dimenſiones, ſive Sol circa Terram, ſive Terra circa Solem revolvatur. Ac de menſurâ quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent,

(d) Vide Kepleri Harmonicen Mundi, p. 189, et Epitomen Aſtron. Copern. p. 501.

(*) TEMPORA

Quibus Planetæ converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	☿	♀	☉	♂	♃	♄
	Dies					
Temporum rationes	88,—	224,666	365,25	687,—	4332,5	10759,33
	1	2,553	4,150	7,807	49,23	122,26
Rationes duplicatæ	1	6,516	17,22	60,941	2423,0	14947,0

DISTANTIÆ

dent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabulâ ſequente videre licet. Liber Tertius.

Planetarum ac Telluris tempora periodica circa Solem reſpectu Fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	☉	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac Telluris diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	☉	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710. (*)

De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole diſputandi non eſt locus, cùm hæ per eorum elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes ſatellitum Jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas deſcribere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu Terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: at Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celeriùs tamen in Periheliis ac tardiùs in Apheliis, ſic ut arearum æquabi-

DISTANTIÆ

Planetarum à Sole medias ſumendo earum quæ à Keplero et Bullialdo poſitæ ſunt.

	☿	♀	☉	♂	♃	♄
	3869	7240	10000	15235	52108	95260
Diſtantiarum rationes	1	1,8713	2,5846	3,9372	13,468	24,621
Rationes triplicatæ	1	6,551	17,26	61,03	2443	14925

De Mundi Systemate

lis fit descripto. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprimè demonstratur per Eclipses satellitum; quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias à Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce Phænomenis negligo (f).

(f) Locum hunc de Phænomenis in Libro posthumo de Mundi Systemate eleganter pertractatum habes, § 1—9.

PROPO-

PROPOSITIONES.

SECTIO I.

Liber Tertius.

De Causis Systematis Mundani.

PROP. I. THEOR. I.

Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

PATET pars prior Propositionis per Phænomenon primum, & Propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per Phænomenon primum, & Corollarium sextum Propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon secundum.

PROP. II. THEOR. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon quintum, & Propositionem secundam libri primi: & pars posterior per Phænomenon quartum, & Propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quàm minima à ratione duplicatâ (por Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) motum Apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem, efficere deberet.

De Mundi Systemate

PROP. III. THEOR. III.

Vim, quâ Luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere Terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per Phænomenon ſextum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantùm trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) quòd ſi diſtantia Lunæ à centro Terræ ſit ad ſemidiametrum terræ ut D ad 1; vis, à quâ motus talis oriatur, ſit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciprocè ut ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quàm duplicata inverſè, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit. Oritur verò ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hîc negligendus eſt. Actio Solis quatenus Lunam diſtrahit à Terrâ, eſt ut diſtantia Lunæ à Terrâ quamproximè; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. 1.) eſt ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ Solis vi tantillâ, vis reliqua, quâ Luna retinetur in orbe, erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam pleniùs conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris, quâ Luna retinetur in orbe, augeatur primò in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ ſemidiametri Terræ ad mediocrem diſtantiam centri Lunæ à centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad ſuperficiem Terræ; poſito quòd vis illa, deſcendendo ad ſuperficiem Terræ, perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROP.

(e) Posito utique Lunam, in orbe circulari, cujus diameter bis ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium eſſet, circum Terram in centro ejus circuli immobilem, ſpatio menſis quem vocant periodici, æquabili cum motu ferri; calculis exquiſitè ſubductis, invenio rectam, quæ diametri ejus circuli arcúſque à Lunâ ſcrupuli primi ſpatio conficiendi proportione ſit tertia, invenio, inquam, hanc rectam pedum Pariſienſium 15,009. Atque hoc eſt ſpatium, quod corpus, vi illâ incitatum, quâ Luna in orbe illo circulari retinenda eſſet, rectâ cadendo, ſcrupuli primi ſpatio conficeret.

Prop.

Liber Tertius.

PROP. IV. THEOR. IV.

Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à Terrâ in ſyzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum* & pleroſque Aſtronomorum, 59; ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium*, 60; ſecundum *Copernicum*, $60\frac{1}{3}$; ſecundum *Streetum*, $60\frac{2}{5}$; & ſecundum *Tychonem*, $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quàm Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecimâ vel decimâ quintâ parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti à *Gallis* menſurantibus definitum eſt: & ſi Luna motu omni privari fingatur, ac demitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per Corol. Prop. III.) in orbe ſuo retinetur, deſcendat in Terram; hæc, ſpatio minuti unius primi cadendo, deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propoſitionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propoſitionis quartæ ejuſdem libri, confecto. Nam arcûs illius, quem Luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15, dig. 1, & lin. $1\frac{4}{9}$ (g). Unde cùm vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicatâ diſtantiæ ratione inverſâ, ideoque ad ſuperficiem Terræ major ſit partibus 60×60 quàm ad Lunam; corpus, vi illâ in re-

(Prop. IV. Cor. 9.) Sed vis, quæ Lunam in orbe illo retineret, cùm differentia ſit virium quarum major centrum Terræ, minor centrum Solis reſpicit, vi illâ centrum Terræ reſpiciente minor erit: atque eâ ratione minor quâ numerus 17775 minor numero 17875. (Prop. III. Cor.) Augeatur igitur ſpatium illud pedum pariſienſium 15,009 pro hâc ratione; veniet ſpatium ped. pariſ. 15,093 = 15 ped. 1 dig. 1 lin. $\frac{7}{17}$.

gionibus

De Mundi Systemate

gionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet, ſpatio minuti unius primi, pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi Gravia reverâ deſcendunt in Terram. Nam Penduli, in latitudine Lutetiæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius*. Et altitudo, quam Grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem Penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius)* ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis, quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem Terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos; ideoque (per Reg. I & II.) eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab eâ diverſa eſſet, corpora, viribus utriſque conjunctis Terram petendo, duplo velociùs deſcenderent; & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcriberent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam (h).

Calculus hic fundatur in hypotheſi, quòd Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna moveantur circum Solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, diſtantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri poteſt per Prop. LX. Lib. 1. (i)

Scholium.

Demonſtratio Propoſitionis ſic fuſiùs explicari poteſt. Si Lunæ plures circum Terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate Saturni vel Jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem Planetarum à *Keplero* detectam; & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Terræ, per Prop. I. hujus. Et ſi earum infima

(h) Vid. De Syſt. Mundi § 10.

(i) Nempe radius orbis circularis, quem Luna circum Terram, in centro orbis immobilem, menſis periodici quem vocant ſpatio, conficeret, is minor eſſet quàm Lunæ, circum centrum gravitatis, quod ipſi cum Terrâ eſt commune, circumactæ, à centro Terræ diſtantia. (Lib. I. Prop. LX.) Hanc ob cauſam Newtonus radium orbis illius circularis 60 ſemidiametrorum terreſtrium poſuit, cùm diſtantia Lunæ, ſi maximæ minimæque ſumatur media, ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium

Liber Tertius.

infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium propè tangeret: hujus vis centripeta, quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè; efficeretque, ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ, quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in Terram; idque eâdem cum velocitate, quâ Gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa, quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à Gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in Terram, more corporum in verticibus montium: eadem lunula, vi utrâque conjunctâ, duplo velociùs deſcenderet. Quare cùm vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum Terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per Reg. I & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, quâ Luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos Gravitatem dicere ſolemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplo velociùs cadat, quàm corpora gravia ſolent cadere.

PROP. V. THEOR. V.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumſaturnios in Saturnum, & Circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri (k).

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumſaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumſolarium circa Solem, ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea (per Reg. II.) à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cùm demonſtratum ſit quòd vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Sa-

trium cum ſemiſſe haud minor ſit. Quâ in re non malè ſe conjeciſſe ex eo perſuadere inſtituit, quòd ſi radium illum ſemidiametrorum ſexaginta pro eâ ratione augeas, quâ, manente gravitatis lege, diſtantia Lunæ à Terrâ mobili radium illum ſuperare debet, veniet planè longitudo ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium cum ſemiſſe pro diſtantiâ illâ, qualem ferè eam Aſtronomi conſtituerunt. Vide Opus Poſth. De Syſtem. Mundi §. 11.

(k) De Syſt. Mundi § 12.

De Mundi Systemate

turno & Sole decreſcant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terrâ.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cùm attractio omnis per motûs legem tertiam mutua ſit, Jupiter in ſatellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuò per Corol. 1 & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem, ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares; Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam, quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur, Centripetam appellavimus. Eandem jam Gravitatem eſſe conſtat, & propterea Gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ Luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes Planetas per Reg. I, II & IV.

PROP. VI. THEOR. VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis (l).

Deſcenſus gravium omnium in Terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aëris perexiguâ reſiſtentiâ oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervârunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arenâ, Sale communi, Ligno, Aquâ, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis.

(l) De Syſt. Mund. § 18, 19.

Liber Tertius.

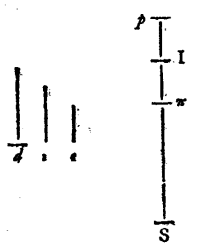
Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & Aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unà & redibant diutiſſimè. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1 & 6. Prop. XXIV. Lib. 2.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis Actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem Lunæ, & unà cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; &, per jam antè oſtenſa, certum eſt quòd temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Lunâ, ideoque quòd ſunt ad quantitatem materiæ in Lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus, ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc Terrâ noſtrâ. Et eodem argumento Planetæ circumſolares, ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quàm maximè regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. 1. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quàm cæteri: motus ſatellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. 1.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à Sole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate materiæ ſuæ, quàm Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum

De Mundi Systemate

trum orbis Satellitis, major ſemper foret quàm diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione ſubduplicatâ quàm proximè; uti calculo quodam inito inveni. Et ſi Satelles minùs gravis eſſet in Solem in ratione illâ *d* ad *e*, diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole minor foret quàm diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illâ ſubduplicatâ (m). Ideoque ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in ſolem, parte tantùm milleſimâ gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole major vel minor quàm diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quintâ diſtantiæ ſatellitis extimi à centro Jovis (n): quæ quidem orbis eccentricitas foret valdè ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia. Aliqua autem ſunt per Corol. 1 & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minùs, quàm pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratiâ corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

(m) Nempe ut diſtantiarum inæqualitas virium inæqualitatem compenſaret. Sit SI diſtantia Jovis à Sole media. Vis autem acceleratrix illa quæ unum aliquem ex ejus ſatellitibus, puta extimum, ad diſtantiam SI à ſole conſtitutum, verſus centrum Solis impelleret, major ſit vi acceleratrice quæ Jovem ipſum impellit, pro ratione rectæ *d* ad *e*. Duarum *d*, *e* capiatur *s* proportione media. Capiatur $s\rho$, ad quam SI rationem habeat eam quam *s* ad *d*. Si Satelles extimus in orbe quodam circumagatur, cujus centrum ſit ρ, erit $s\rho$ media Satellitis, orbem illum percurrentis, à Sole diſtantia. Vis autem, quâ Satelles in Solem impellitur in ρ, erit ad vim quæ eundem impelleret in I, ut SI^2 ad $S\rho^2$, ſive ut e^2 ad d^2, ſive denique ut *e* ad *d*. Sed vis, quâ Jupiter in Solem impellitur in I, ad vim, quæ Satellitem in I in ſolem impelleret, rationem habet quam *e* ad *d*. Vis igitur acceleratrix, quâ Satelles in Solem impellitur in diſtantiâ $s\rho$, æqualis erit vi quâ Jupiter in Solem impellitur in diſtantiâ SI. In orbe igitur illo, cujus centrum eſſet ρ, Satelles, ad mediam à Sole diſtantiam conſtitutus, pariter cum



Liber Tertius.

pore Lunæ: ſi horum pondera eſſent ad corpora partium exterNarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quàm ſuprà oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa Terram ſunt, gravia ſunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per Reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si Æther, aut corpus aliud quodcunque, vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minùs gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in Formâ materiæ, poſſet idem per mutationem Formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quàm maximè gravitant; & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quàm probatum eſt in Corollario ſuperiore.

Coröl. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica Fluidi quo regio Aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ Argenti Vivi, vel Auri, vel corporis alterius

cum Jove ipſo pro materiæ ſuæ modo in Solem impelleretur. In ulteriori orbis ſuæ ſemicirculo minùs, in citeriori magis. Quamobrem haud multo magis ab hoc orbe aberraret, quàm ab illo cujus centrum corpus ipſum Jovis occuparet, ſi vires æquales in æqualibus à Sole diſtantiis corpus utrumque, Jovis et Satellitis, in Solem urgerent. Quòd ſi vis quæ Satellitem, ad diſtantiam SI conſtitutum, in Solem impelleret, vi Jovem impellente minor eſſet pro ratione rectæ *e* ad *d*, ſimili prorſus argumentatione efficeretur, centrum orbitæ, quam Satelles ſine inſigni aliquâ motûs ſui perturbatione percurrere poſſet, in puncto π conſtituendum; cujus diſtantia à Sole, Sπ, ad Jovis à Sole diſtantiam SI, rationem haberet quam *e* ad *s*.

(n) Nempe diſtantia ρ, vel Iπ : SI = 1 : 2000. Sed SI eſt ad mediam Satellitis extimi à Jove diſtantiam ut 443 ad 1; Aſtronomis ſic definientibus (*De La Caille Leçons Element.* § 673.) Ex æquo perturbatè $I\rho$ vel Iπ ad mediam Satellitis extimi à Jove diſtantiam ut 443 ad 2000; major itaque $I\rho$ vel Iπ quàm ut habeat ad mediam Satellites extimi à Jove diſtantiam rationem eam quàm 1 ad 5.

De Mundi Systemate

cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec Aurum neque aliud quodcunque corpus in Aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in Fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quòd ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, Vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis Gravitatis diverſi eſt generis à vi Magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minùs, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ quàm vis gravitatis, & in receſſu à Magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicatâ, ſed ferè triplicatâ, quantùm ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

PROP. VII. THEOR. VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis (°).

Planetas omnes in ſe mutuò graves eſſe jam antè probavimus, ut & gravitatem in unumquemque, ſeorſim ſpectatum, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde conſequens eſt (per Prop. LXIX. Lib. 1. & ejus Corollaria) Gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porro cùm planetæ cujuſvis, A, partes omnes graves ſint in planetam quemvis B, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motûs Legem tertiam) æqualis ſit; planeta B in partes omnes planetæ A viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. Q. E. D.

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus

(°) De Syſt. Mund. § 20—24.

in

Liber Tertius.

in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in Gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire, & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quòd corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hâc lege gravitare deberent in ſe mutuò, cùm tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: reſpondeo, quòd gravitas in hæc corpora, cùm ſit ad gravitatem in Terram totam ut ſunt hæc corpora ad Terram totam, longè minor eſt, quàm quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. 1.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra (P).

Poſtquam inveniſſem Gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciprocè proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus: dubitabam, an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compoſitâ, an verò quàm proximè. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accuratè obtineret, prope ſuperficiem Planetæ, ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV & LXXVI. Libri primi & ipſarum Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de quâ hîc agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas (Q). Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. 1.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inverſè; & pondera ad ſuperficies Planetarum, aliaſve quaſvis à centro diſtantias, majora ſunt vel mi-

(P) De Syſt. Mund. § 25, 26. (Q) De Syſt. Mund. § 13—17.

nora

De Mundi Systemate

nora (per hanc Propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circum Terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantiâ mediocri Veneris à Sole, & cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis à centro Jovis, 8′. 16″. satellitis Hugeniani à centro Saturni 3′. 4″. & Lunæ à centro terræ 10′. 33″. computum ineundo (r), inveni quòd corporum æqualium, & à centro Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, pondera sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{30217}$, & $\frac{1}{169282}$ respectivè; & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium

(r) *Computationis ineundæ hæc est ratio.*

Datur, ex Astronomorum decretis, ratio triplicata ejus quam media Stellæ Veneris à Sole distantia habet ad distantiam Stellæ Jovis à Sole mediam. Sed et distantiæ Jovis à Sole ad Satellitis extimi à Jove distantiam triplicata ratio datur. Dabitur igitur ratio triplicata ejus, quam distantia Satellitis extimi Jovialis à Jove habet ad mediam stellæ Veneris à Sole distantiam. (Dat. 8.) Hæc autem ejus rationis duplicata erit, quam tempus conversionis Satellitis extimi circa Jovem ad tempus habet, quo satelles ille conversionem suam absolveret, si distantia ejus à Jovis centro in eam diduceretur, quæ mediæ Veneris à Sole distantiæ æqualis esset. (Lib. 1. Prop. xv.) Datur autem tempus conversionis Satellitis extimi circa Jovem. Dabitur igitur tempus, quo idem Satelles, ad distantiam à Jovis centro mediæ Stellæ Veneris à Sole distantiæ æqualem evectus, conversionem absolveret. (Dat. 2.) Sed datum est tempus conversionis Veneris circa Solem. Data est igitur horum temporum duplicata ratio. Quare et temporum duplicatæ contraria dabitur. Sed duplicatæ horum temporum contraria est ipsa Virium ratio, quibus Satelles extimus in Jovem, & Venus in Solem impellerentur, in æqualibus utique hujusce à Sole illius à Jove distantiis. Quare et virium illarum ratio data. Q. E. I.

Formulæ computandi Algebraicæ.

Notis ♀, ☉, ♃, ♄ significentur mediæ stellæ Veneris, Telluris nostræ, Jovis et Saturni à Sole distantiæ. Notis ☽, A, B mediæ Lunæ nostræ, Satellitis extimi Jovialis, et Satellitis Hugeniani à centro Terræ, Jovis, vel Saturni distantiæ. Literâ *v* significetur tempus conversionis stellæ Veneris in orbe suo: literis *l*, *j*, *b*, tempora quibus Luna nostra, Satelles extimus Jovialis, et Satelles Hugenianus conversiones suas absolvunt: literis S, T, J, Σ significentur vires acceleratrices quibus in æqualibus à centro Solis, Terræ, Jovis vel Saturni distantiis corpora in centra illa singulatim impelluntur.

Jam $\text{♀}^3 : \text{♃}^3 = 6{,}551 : 2443$. (Not. c.)

Et $\text{♃}^3 : \text{A}^3 = \text{R}^3 : \overline{\text{sin. } 8' - ''16}^3$.

Ex æquo $\text{♀}^3 : \text{A}^3 = 6{,}551 \times \text{R}^3 : 2443 \times \overline{\text{sin. } 8' - ''16}^3$.

Literâ *x* significetur tempus, quo Satelles extimus Jovialis conversionem suam absolveret, si ad illam evectus esset à Jovis centro distantiam, quæ distantiæ ♀ à Sole æqualis esset.

Erit igitur $2443 \times \overline{\text{sin. } 8' - ''16}^3 : 6{,}551 \times \text{R}^3 \; (= \text{A}^3 : \text{♀}^3) = j^2 : x^2$. (Lib. 1. Prop. xv.)

Unde $x^2 = \frac{j^2 \times 6{,}551 \times \text{R}^3}{2443 \times \overline{\text{sin. } 8' - ''16}^3}$.

Sed

Liber Tertius.

um corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè (s). Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicetur in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris; id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terrâ sunt ut $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{30217}$, & $\frac{1}{169282}$ respectivè (t). Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quàm 10′. 30″, debebit quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pon-

Sed $\text{v}^2 : x^2 = 1 : s$. Quare $s = \frac{x^2 \times 1}{\text{v}^2}$; vel pro 1 scribendo 1, $s = \frac{j^2 \times 6{,}551 \times \text{R}^3}{2443 \times \overline{\text{sin. } 8' - ''16}^3 \times \text{v}^2}$ $= 1064$: nimirum pro j^2, v^2, positis $\overline{16{,}689}^2$, $\overline{224{,}666}^2$. Quare vis Jovialis erit ad vim Solarem ut 1 ad 1064.

Simili modo si pro Σ scribatur 1, efficietur $s = \frac{b^2 \times 6{,}551 \times \text{R}^3}{14925 \times \overline{\text{sin. } 3' - ''41}^3 \times \text{v}^2} = 3114$, nimirum pro v^2 posito, ut antè, $\overline{224{,}666}^2$; pro b^2, $\overline{15{,}945}^2$. Quare vis Saturnia erit ad vim Solarem ut 1 ad 3114.

Ad vim Terrestrem inveniendam, statuo parallaxin Solis horizontalem, in mediâ ejus à Tellure distantiâ, ″8,83, sive ″8 − ″50, qualis ea à Cl. Maskelyno definita est. (Mayer. Tab.) Pro mense, quem vocant, periodico, per literam *l* designato, usurpo brevius quoddam temporis spatium, quod ad tempus illud *l* rationem habeat ejus, quæ est numeri 17775 ad numerum 17875, subduplicatam. Nam tali tempore Luna conversionem suam absolveret, si cessante vi Solari vim Terrestrem solam et integram perciperet. Hoc tempus literâ λ significetur. Radium denique orbitæ circularis, quam Luna, cessante tum vi Solis, tum propriâ quâ ipsa Terram incitat, circum Terram immobilem tempore λ scriberet; hujus orbitæ radium cum Newtono statuo sexaginta semidiametrorum terrestrium. Et calculis ad priorum exemplum subductis, posità $\text{T} = 1$, veniet $s = \frac{\lambda^2 \times 6{,}551 \times \text{R}^3}{17{,}26 \times \overline{\text{sin. } 8' - ''50}^3 \times \text{v}^2} = 329006$. Quare vis Terrestris erit ad vim Solarem ut 1 ad 329006.

Pondera igitur Corporum æqualium in Solem, Jovem, Saturnum et Terram, in æqualibus à centris eorum distantiis erunt ut $1, \frac{1}{1064}, \frac{1}{3114}, \frac{1}{329006}$, sive ut numeri 10000. 9,3972. 3,2108. 0,030394.

(s) Nimirum si Jovis, Saturni et Telluris nostræ semidiametri è Sole visæ, necnon Solis semidiameter è tellure visa, in mediâ utique corporis cujusque à Sole distantiâ, tales essent quales cum sui seculi Astronomis Newtonus eas æstimavit, veras diametrorum rationes numeri à Newtono positi satis exquisitè exhiberent; 10000, 997, 791, 109. Cùm verò semidiametri è Sole visæ, in mediis à Sole distantiis, Jovis quidem sit ″18,5; Saturni, ″8; Terræ, ″8,83 (modò rectè eas Juniores definiant) existente Solis ipsius semidiametro, qualis è Tellure maximam inter minimamque media cernitur, ″16 − ″3, veræ semidiametrorum rationes hisce ferè numeris exponendæ erunt

☉ 10000 ♃ 1001,0 ♄ 791 ♁ 91,69.

Inde verò, et ex virium in æqualibus distantiis rationibus, quas suprà posuimus, venient virium in superficiebus rationes, quales hi numeri præ se ferunt

☉ 10000 ♃ 937,7 ♄ 512,69 ♁ 361,5.

(t) Verius $1, \frac{1}{1064}, \frac{1}{3114}, \frac{1}{329006}$.

De Mundi Systemate

dera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. 1. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109; & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè; & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400 (u). Denſitas Terræ, quæ prodit ex hoc computo, non pendet à parallaxi Solis, ſed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hîc rectè definitur (x). Eſt igitur Sol paulo denſior quàm Jupiter, & Jupiter quàm Saturnus, & Terrâ quadruplo denſior quàm Sol. Nam per ingentem ſuum calorem Sol rareſcit. Luna verò denſior eſt quàm Terra, ut in ſequentibus patebit.

Corol 4. Denſiores igitur ſunt Planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt Planetæ, cæteris paribus, qui ſunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diverſis utique diſtantiis à Sole collocandi erant Planetæ, ut quilibet, pro gradu denſitatis, calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi Terra locaretur in orbe Saturni, rigeſceret; ſi in orbe Mercurii, in vapores ſtatim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe Mercurii

(u) Quod ſi tales ſint diametrorum inter ſe, & ponderum rationes, quales nos poſuimus; Denſitates horum numerorum inter ſe proportiones gerent 100; 93,67; 64,78; 394,26. Poſtremò ſi omnia cum terrenis conferre placeat, Terræ, Jovis, Saturni et Solis diametri his ferè numeris

	⊕	♃	♄	☉
exponi poſſint;	1	11	8,6	109
Hiſce magnitudines	1	1331	636	1295029
Hiſce, vires abſolutæ ſive corpora	1	309	105+	329006
Hiſce vires ad ſuperficies	1	2,6	1,4	27,66
Hiſce denique denſitates	1	$\frac{10}{42}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{39}$

(x) Significent literæ D, d Solis et Terræ diametros; literæ Δ, δ denſitates, ſignificantibus utique literis S, T, vires Solis Terræque abſolutas. Erit igitur $\Delta : \delta = S \times d^3 : T \times D^3$. Unde $\delta = \frac{T \times D^3 \times \Delta}{S \times d^3}$. Vel pro Δ ſcribendo 1, $\delta = \frac{T \times D^3}{S \times d^3}$. Significet litera s Solis ſemidiametrum è Terrâ viſam, in mediâ utique Solis diſtantiâ; litera π, parallaxin ejus horizontalem mediam. Erit igitur $D^3 : d^3 = \overline{\text{ſin. } 1}^3 : \overline{\text{ſin. } \pi}^3$. Unde $\frac{D^3}{d^3} = \frac{\overline{\text{ſin. } s}^3}{\overline{\text{ſin. } \pi}^3}$. Hinc $\delta = \frac{T \times \overline{\text{ſin. } s}^3}{S \times \overline{\text{ſin. } \pi}^3}$. Jam vero $\frac{T}{S} =$ $\frac{27{,}26 \times}{}$

Liber Tertius.

Mercurii quàm apud nos: & Thermometro expertus ſum, quòd ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium verò non eſt, quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cùm materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROP. IX. THEOR. IX.

Gravitatem, pergendo à ſuperficiebus Planetarum deorſum, decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quàm proximè.

Si materia Planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc Propoſitio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. 1. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROP. X. THEOR. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In Scholio Propoſitionis XL. Lib. 2. oſtenſum eſt quòd globus Aquæ congelatæ, in Aëre noſtro liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentiâ Aëris amitteret motûs ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quàm proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum Terræ noſtræ denſiorem eſſe, quàm ſi totus ex Aquâ conſtaret, ſic

$\frac{17{,}26 \times \overline{\text{ſin. } 8' - ''50}^2 \times v^2}{\lambda^2 \times 6{,}551 \times R^3}$ (per formulam generalem vis Solaris ſuprà traditam (Not. u.) Vel, ſi pro quantitate datâ $\frac{17{,}26 \times v^2}{\lambda^2 \times 6{,}551 \times R^3}$ ponatur A, $\frac{T}{S} = A \times \overline{\text{ſin. } 8' - ''50}^2$. Vel magis generaliter $\frac{T}{S} = \frac{A \times R^3 \cdot \overline{\text{ſin. } \pi}^3}{d^3}$, ſignificante literâ R radium orbitæ circularis, quam Luna, ceſſante tum Solis vi, tum ipſius propriâ, tempore λ circa Terram immobilem conficeret. Nam $\overline{\text{ſin. } 8' - ''50}^2$ illud eſt, quod fit augendo cubum è ſinu parallaxeos ſolis horizontalis pro ratione triplicatâ ejus, quam ſemidiameter Terræ ad radium illius orbitæ Lunaris habet. Hinc autem efficietur $\delta = \frac{A \times R^3 \cdot \overline{\text{ſin. } \pi}^3 \times \overline{\text{ſin. } s}^3}{d^3 \times \overline{\text{ſin. } \pi}^3} = \frac{A \times R^3 \times \overline{\text{ſin. } s}^3}{d^3}$. Literâ ρ ſignificetur parallaxis Lunæ horizontalis, qualem utique ad diſtantiam R ea haberet. Erit $R^3 : d^3 = R^3 : \overline{\text{ſin. } \rho}^3$. Unde $\frac{R^3}{d^3} = \frac{R^3}{\overline{\text{ſin. } \rho}^3}$, et $\delta = \frac{A \times R^3 \times \overline{\text{ſin. } s}^3}{\overline{\text{ſin. } \rho}^3}$. Quare δ, Terræ denſitas, è ſinu anguli ρ definienda eſt, nullâ parallaxeos ſolaris ratione habitâ. Angulus autem ille ρ ad veram Lunæ parallaxin mediam rationem datam habet; eam utique, quam media Lunæ à Terrâ mobili diſtantia ad diſtantiam R.

De Mundi Systemate

colligo. Si globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eâque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quàm aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppositâ. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc, si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento, maculæ solares leviores sunt quàm materia lucida solaris, cui supernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materia omnis gravior, quo tempore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cùm terra communis suprema quasi duplo gravior sit quàm aqua, & paulo inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est, quòd copia materiæ totius in Terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit, quàm si tota ex Aquâ constaret; præsertim cùm Terram quasi quadruplo densiorem esse quàm Jovem jam antè ostensum sit. Quare si Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, amitteret, in Medio ejusdem densitatis cum Aëre nostro, motûs sui partem ferè decimam (y). Verùm cùm resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut Aqua, quæ partibus $13\frac{3}{5}$ levior est quàm Argentum Vivum, minùs resistat in eâdem ratione; & Aer, qui partibus 860 levior est quàm Aqua, minùs resistat in eâdem ratione: si ascendatur in cœlos, ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia propè cessabit. Ostendimus utique in Scholio ad Prop. XXII. Lib. 2. quòd

(y) Nimirum si litera D significet diametrum Jovis, litera T tempus quo stella Jovis, cum velocitate illâ quam maximæ minimæque mediam habet, spatium in inani conficeret, quod esset ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas materiæ quæ est in corpore Jovis ad densitatem liquoris ejus, per quem iter ei faciendum est; tempore quovis alio t, globus Jovialis ex liquoris illius renixu partem velocitatis suæ amittet, quæ erit ad eam, quæ initio fuit, ut t ad T + t. (Lib. 2. Prop. XXXV. Cor. 7.) Puta igitur materiam quæ est in Jove pari cum Aquâ nostrâ densitate præditam; globum autem Jovis per liquorem aliquem ferri, qui Aerem nostrum densitate referat. Ita erit densitas materiæ Jovialis ad densitatem liquoris, per quem iter ei faciendum est, ut 860 ad 1. Et cùm Jovis diameter è Sole visa amplitudinem habeat "37, amplitudo arcûs cælestis, qui ad $\frac{8}{3}$ D rationem habeat quam 860 ad 1, ea erit 23°—'36—"16. Talem verò arcum stella Jovis, cum velocitate mediâ, spatio dierum 283 cum semisse ferè absolverit. Atque hoc erit spatium tempore, quod literâ T designavimus, conficiendum. Unde si pro t ponatur spatium dierum 30, erit t ad T + t ut 30 ad 310,5, hoc est ut 1 ad 10 propemodum. Velocitas igitur quam stella Jovis, si per Aerem nostrum ferretur spatio dierum

quòd si ascenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum supra Terram, Aër ibi rarior foret quàm ad superficiem Terræ in ratione 30 ad 0,00000000000003998, seu 75000000000000 ad 1 circiter (z). Et hinc stella Jovis in Medio ejusdem densitatis cum aere illo superiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex resistentiâ Medii non amitteret motûs sui partem decimam centesimam millesimam (aa). In spatiis utique Terræ proximis, nihil invenitur, quod resistentiam creet, præter aërem, exhalationes, & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentissimè exhaustis, gravia intra vitrum liberrimè & sine omni resistentiâ sensibili cadunt; ipsum Aurum & Pluma tenuissima simul demissa æquali cum velocitate cadunt, & casu suo describendo altitudinem pedum quatuor, sex, vel octo, simul incidunt in fundum, ut experientiâ compertum est. Et propterea si in cœlos ascendatur, aëre & exhalationibus vacuos, Planetæ & Cometæ, sine omni resistentiâ sensibili, per spatia illa diutissimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum Systematis Mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram, alii Solem in centro systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

PROP. XI. THEOR. XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel pro-

dierum 30 amitteret, pars quasi decima totius esset.

(z) Vide De System. Mundi § 68. & confer Sect. VI. Dissertationis nostræ de Aere et Barometro inter Acta Philosophica Anni 1774 editæ.

(aa) Imo partem hujus decimæ centesimæ millesimæ sexagesimâ haud multo majorem. Cùm enim stella Jovis, si cum velocitate suâ mediâ per inane ferretur, spatio dierum $283\frac{1}{2}$ longitudinem conficeret, quæ esset ad $\frac{8}{3}$ D ut 860 ad 1 (Not. y); omnino longitudinem, quæ esset ad $\frac{8}{3}$ D ut 860 × 75000000000000 ad 1, non nisi spatio dierum $283\frac{1}{2} \times 75000000000000$ conficeret. Si igitur stella Jovis per liquorem feratur eâ densitate præditum, quæ sit ad corporis Jovialis densitatem, ut 1 ad 860 × 75000000000000, pro tempore T, in Corollario 7. Prop. XXXV. Libri secundi, ponendi erunt dies 21625000000000000, sive Anni Ægyptiaci 58100000000000. Unde si pro t ponantur Anni Ægyptiaci 1000000, erit t ad T + t ut 1 ad 58200001; sive numeris quod aiunt rotundis, ut 1 ad 60000000. Pars igitur velocitatis, quæ spatio annorum Ægyptiacorum 1000000 amittitur, ea decimæ centesimæ millesimæ quasi sexagesima erit.

De Mundi Systemate

gredietur uniformiter in directum. Sed, centro illo semper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur, contra Hypothesin.

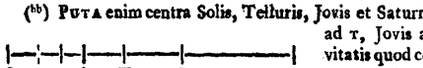
PROP. XII. THEOR. XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cùm (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & distantia Jovis à Sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo supra superficiem solis. Eodem argumento, cùm materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 3021 ad 1, & distantia Saturni à Sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo, si Terra & Planetæ omnes ex unâ solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ solis diametro à centro Solis distaret ([bb]). Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cùm centrum illud gravitatis perpetuò quiescit, Sol, pro vario Planetarum situ, in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longè recedet ([cc]).

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cùm Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuò, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motûs perpetuò agitentur: perspicuum est, quòd horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset,

([bb]) Puta enim centra Solis, Telluris, Jovis et Saturni ad rectam esse: Solis quidem ad s, Terræ ad T, Jovis ad J, Saturni ad ſ. Sit ı locus centri gravitatis quod corporum duorum, Solis Jovisque, est commune. Quod trium, Solis, Jovis, et Saturni, est commune, ejus locus sit σ; quod horum denique trium cum quarto terrestri est commune, ejus locus sit ☉. Dico rectam s☉ diametro Solis minorem esse. Ponatur semidiameter Solis = 1, ut diameter integra sit 2. Jam cùm amplitudo semidiametri Solaris, qualis media ferè è tellure cernitur, sit 31′6″—″3, erit sT = 214. Unde cùm distantiæ Planetarum à Sole rationes inter se habeant quales suprà expositimus (Not. [c]) erit sı = 1116,1 et sſ = 2040,4.



Jam verò cùm corpus Solis sit ad corpus Jovis ut 1064 ad 1 (Not. [r]) erit sJ ad sı ut 1065 ad 1. Sed sJ = 1116,1. Ergo sı = 1,048. Sed sſ = 2040,4. Quare ıſ = 2039,352.

Rursum cùm corpus Solis sit ad corpora Jovis et Saturni ut 10000 ad 9,3972 & 3,2108 (Not. [r])

esset, in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cùm autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, à quo centrum solis quàm minimè discedit, & à quo idem adhuc minùs discederet, si modò sol densior esset & major, ut minùs moveretur. Liber Tertius.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Planetæ moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis; &, radiis ad centrum illud ductis, areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro solis; si Sol quiesceret, & Planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum Elliptici, solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I & XI. & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. 1.) Actiones autem Planetarum in se mutuò perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus planetarum in Ellipsibus circa solem mobilem minùs perturbant (per Prop. LXVI. Lib. 1.) quàm si motus isti circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omninò contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni à Jove est ad distantiam Saturni à Sole ferè ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1067, seu 1 ad 211 circiter. Et

erunt corpora Solis Jovis et Saturni ad corpus Saturni ut 10012,6 ad 3,211. Unde ıſ ad ıσ ut 10012,6 ad 3,211. Sed ıſ = 2039,352. Ergo ıσ = 0,654.

Rursus cùm corpus Solis sit ad corpus Terræ ut 10000 ad 0,0304 (Not. [r]) calculis similiter subductis invenietur σ☉ = 0,0006.

Hinc sı = 1,048
ıσ = 0,654
σ☉ = 0,0006
Quare s☉ = 1,703 Sed diameter Solis erat 2. Quare s☉ minor erit diametro Solari. Martis, Veneris, et Mercurii quanta sint corpora, ignotum est. Haud tamen verisimile est tanta ea esse, ut, centris omnium ad rectam sr positis, distantia centri gravitatis systematis totius distantiâ s☉ eâ ratione major sit, quâ numerus vicenarius numero 17 major est. At eâ ratione augeri oportet rectam s☉, ut diametro Solari æqualis evadat.

([cc]) De System. Mundi § 28.

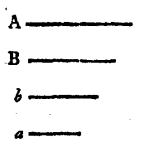
hinc

De Mundi Systemate.

hinc oritur perturbatio orbis Saturni, in ſingulis planetæ hujus cum Jove conjunctionibus, adeo ſenſibilis, ut ad eandem Aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur; Aphelium nunc promovetur, nunc fortè retrahitur; & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem, à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari ferè poteſt, conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. 1.) Et propterea, ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum, & Jovis in Solem ſunt ferè ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 156609, ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longè minor eſt quàm ea ſaturnii ([dd]). Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longè minores, præterquam quòd orbis Terræ ſenſibiliter perturbatur à Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, ellipſin circum Solem in umbilico poſitum percurrit; &, radio ad ſolem ducto, areas in eâdem temporibus proportionales deſcribit; Terra verò circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur ([ee]).

PROP.

([dd]) Vide Tabulas Halleii Fff. 2. paginâ verſâ.
([ee]) De Syſtem. Mund. § 29.
([ff]) De Syſtem. Mund. § 30.



([gg]) Exponatur data quævis recta A; ſit alia a quæ ad illam A rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ terreſtris, qualem dato quovis temporis ſpatio, puta centum annis, vis Jovis effecerit, ad motum angularem habet, quem eodem temporis ſpatio vis Jovis in Aphelio orbitæ Martis effecerit. Motus autem angulares dico, quales è centro Solis, in mediâ corporis cujuſque à Sole diſtantiâ, cernerentur. Dico A ad a rationem habere ſuſquiplicatam ejus, quam diſtantia ſtellæ Martis à Sole media ad mediam Telluris ab eodem diſtantiam habet. Capiatur recta B, quæ habeat ad A rationem eam, quam motus angularis, quem ſpatio converſionis ſtellæ Martis circum Solem vis Jovis in Aphelio orbitæ ejus ſtellæ effecerit, ad motum angularem ejuſdem Aphelii â vi Jovis, dato quale poſuimus temporis ſpatio, efficiendum. Capiatur alia b quæ ad illam B rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ Terreſtris unius anni ſpatio à vi Jovis efficiendus, ad motum angularem Aphelii orbitæ Martis, qualem converſionis integræ ſtellæ Martis ſpatio vis Jovis in eo effecerit. Ità b ad a rationem habebit eam, quam motus angularis annuus Aphelii orbitæ Terreſtris, à vi Jovis oriundus, ad motum ejuſdem Aphelii, dato quali poſuimus temporis ſpatio, conficiendum. Sit recta c, quæ ad duas alias, P, p, rationes habeat quas datum temporis ſpatium, quo conficiuntur motus A, a, ad annos, ſi ita loqui liceat, Martialem et Terreſtrem ſingulatim. Jam cùm A et B ſint ut ſpatia motu æquabili, temporibus quæ ſunt ut c, P, conficienda, erit A ad B ut c ad P; vel ut rectangulum c × P ad quadratum ex P. Et cùm B et b ſint ut motus angulares, quos in apheliis Martis et Telluris vis Jovis, annorum Martialis Terreſtriſque ſpatiis, ſingulatim effecerit; et cùm anni illi ſint ut P, p, erit B ad b ut P^2 ad p^2. (Princip. Lib. 1. Prop. LXVI. Cor. 16.) Rurſum cùm b & a ſint ut ſpatia motu æquabili (nam de mediis Apheliorum motibus hic agitur) temporibus quæ ſunt ut p, c conficienda, erit b ad a ut p ad c, vel ut quadratum ex p ad rectangulum c × p.

Cùm igitur ſit $A : B = c \times P : P^2$; et $B : b = P^2 : p^2$; et $b : a = p^2 : p \times c$; ex æquo erit $A : a = P : p$.

Liber Tertius.

PROP. XIV. THEOR. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quieſcunt.

Aphelia quieſcunt, per Prop. XI. Lib. 1. ut & orbium plana, per ejuſdem libri Prop. 1. &, quieſcentibus planis, quieſcunt Nodi. Attamen à planetarum revolventium & cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hîc contemni poſſunt ([ff]).

Corol. 1. Quieſcunt etiam ſtellæ fixæ, propterea quòd datas ad Aphelia Nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque cùm nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis, ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum, ob immenſam corporum diſtantiam, nullos edent ſenſibiles effectus in regione ſyſtematis noſtri. Quinimo Fixæ, in omnes cœli partes æqualiter diſperſæ, contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per Prop. LXX. Lib. 1.

Scholium.

Cùm planetæ ſoli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parùm agant in ſe invicem: horum Aphelia & Nodi quieſcent, niſi quatenus à viribus Jovis, Saturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et inde colligi poteſt, per Theoriam gravitatis, quòd horum Aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu Fixarum, idque in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à Sole (gg). Ut ſi Aphelium

De Mundi Systemate

Aphelium Martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in consequentia respectu Fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ respectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc Propositione.

PROP. XV. PROB. I.

Invenire Orbium principales diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione sesquiplicatâ temporum periodicorum, per Prop. xv. Lib. 1. deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. 1.

PROP. XVI. PROB. II.

Invenire orbium Eccentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. XVIII. Lib. 1.

PROP.

Motus igitur angulares, quos in orbitarum Martialis Terrestrisque apheliis, dato quovis temporis spatio, vis Jovis effecerit, ii temporum, quibus Martis Telluriſque globi conversiones suas singulatim absolvunt, inter se rationem habent. Quæ autem temporibus illis ratio intercedit, ea sesquiplicata est ejus, quæ orbitarum axibus transversis. (Lib. 1. Prop. xv.) Motus igitur apheliorum angulares, à vi Jovis, rationem inter se habent distantiarum planetarum à Sole sesquiplicatam. Simili argumento concludemus motus angulares, à vi Saturni oriundos, eandem sequiplicatam distantiarum rationem inter se servare. Quare et motus integri, à viribus illis conjunctis oriundi, eandem inter se rationem gerent. Q. E. D.

Ita ni fallor firmissimis rationibus geometricis probavimus, quæ de sequisplicatâ distantiarum ratione inter motus Apheliorum servandâ Newtonus pronuntiavit. Num igitur injuriâ dixero deliràsse planè virum clarissimum J. Bernouillum, cùm Newtonum dicat " nullo fundamento merâ- " que apparentiâ nixum videri in constituendâ hâc ratione sesquiplicatâ." (Dissert. de System. Cartesii.)

(hh) *Ex Institutionibus Astronomicis Nicolai Mercatoris, p. 285 & seq.*

" Observatum est, quod præter motum in longitudinem & latitudinem, qualem Lib. 2. Sect. " II. expositimus, habeat quoque varias librationes circa sui centrum, quibus maculæ transfe- " runtur à medio orbe in ortum, occasum, septentrionem & austrum; & dum aliæ ex parte il- " luminatâ transeunt in obscuram, aliæ contrà emergunt ex obscurâ, & in lucidam concedunt. " Adhibito globo terrestri, & elevato polo boreo ad ipsum Zenith, elige insulam quandam sub " æquatore sitam, v. gr. D. Thomæ, quam ipsi cardini austri adjunges, ubi Meridianus Hori- " zontem secat, & oculum tenebis in rectâ à centro per dictam insulam continuatâ. Tum co- " gitato, hanc insulam referre maculam Lunarem in ipso centro disci positam; & voluto globo " versus sinistram, donec Insula septem circiter gradûs conficiat in Horizonte, videbis omnes re- " liquas

PROP. XVII. THEOR. XV.

Liber Tertius.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motûs Legem 1. & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. 1. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56′; Mars horis 24. 39′; Venus horis 23 circiter; Terra horis 23. 56′; Sol diebus $25\frac{1}{2}$, & Luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita se habere ex phænomenis manifestum est. Maculæ in corpore Solis ad eundem situm in disco solis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu Terræ; ideoque respectu fixarum Sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam verò Lunæ, circa axem suum uniformiter revolventis, dies menstruus est: hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus semper respiciet quamproximè, & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc est libratio Lunæ in longitudinem: nam libratio in latitudinem orta est ex latitudine Lunæ & inclinatione axis ejus ad planum Ecliptice. Hanc librationis lunaris Theoriam D. *N. Mercator*, in Astronomiâ suâ initio anni 1676 editâ, ex literis meis plenius exposuit (hh). Simili motu extimus Saturni satelles circa axem suum revolvi

" liquas partes telluris conspicuas eodem motu vergere in ortum. Mox reductâ insulâ ad Meri- " dianum, & porro ad dextram septem gradibus, videbuntur omnes partes globi conspicuæ ver- " gere in occasum. Talis est libratio Lunæ in ortum & occasum; quæ absolvitur, dum Luna " ab Apogeo redit ad Apogeon, perambulans octavam circiter partem diametri Lunaris prope " centrum. Rursus dictam insulam pone sub Meridiano; & fixo globo, move polum ultra & " citra verticem ad septem vel octo graduum ab eo distantiam; tum videbis, & insulam, & re- " liquas partes globi nunc in septentrionem abscedere, nunc rursus in austrum nutare. Atque " hujusmodi est libratio Lunæ in septentrionem & austrum, quæ absolvitur, dum Luna à Nodo " ascendente revertitur ad eundem, & quam non ineptè vocaveris *Librationem in latum*, estque " priori illâ *in longum* aliquantò major. Cæterùm hæ duæ librationes Lunæ sunt solutæ, nulli " cum Sole congressui alligatæ, quanquam earum prior ab inæqualitate Lunæ menstruâ nonni- " hil augetur in quadraturis. Tertia verò respicit partem Lunæ illuminatam & obscuram, ideó- " que partim phasibus menstruis, partim verò situi nodorum accepta ferenda est. Concipietur " autem quodammodo, si polum utrumque globi terrestris deponas in Horizonte ligneo, ita ut " alteruter eorum referat maculam in centro disci Lunaris, & oculum teneas in axe continuato; " Meridianum verò intelligas referre circulum illuminationis, qui discernat hemisphærium Lunæ " obscurum ab illuminato, & sit (phantasiæ juvandæ gratiâ) pars ad lævam luci Solis expositа, " dum altera versatur in umbrâ; & nequid desit, pone primum Meridianum terrestrem sub Me- " ridiano æneo. Jam si paululum dimoveas Meridianum primum ab æneo versus lævam, videbis " partes superiores globi excedere è tenebris, & in lucem erumpere, dum inferiores è luce in " tenebras abscedunt: factâque reciprocatione, si revolvas primum Meridianum ad æneum, & " ultrà ad dextram; contrarium evenire. Hæc libratio secundum Hevelium 5 circiter gradibus " continetur, in limbo Lunæ computandis.

" Harum tam variarum atque implicitarum Librationum causas Hypothesi elegantissimâ ex- " plicavit

De Mundi Systemate

revolvi videtur, eâdem ſui facie ſaturnum perpetuò reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam, in eâ corporis parte quæ Terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quòd in parte corporis Jovi averſâ maculam habeat, quæ tanquam in corpore Jovis cernitur, ubicunque ſatelles inter Jovem & oculos noſtros tranſit.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Axes planetarum diametris, quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur, minores eſſe.

Planetæ, ſublato omni motu circulari, diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit, ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia, ſi fluida ſit, aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit; axem verò, deſcenſu ſuo ad polos, diminuet. Sic Jovis diameter (conſentientibus Aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento,

" plicavit nobis Vir Cl. Iſaac Newton, cujus Humanitati hoc & aliis nominibus plurimum de-
" bere me lubens profiteor. Hanc igitur hypotheſin, Lectori gratificaturus, exponam verbis,
" ut potero; nam delineationes in plano vix ſufficiunt huic negotio, præterquam quòd iis jam
" abundat hoc enchiridion. Itaque reverſus ad globum, cogita nunc illum repræſentare ſphæ-
" ram, in quâ movetur Luna, cujus centrum occupet Tellus. Ipſum verò Lunæ globum cre-
" dito polis & axe ſuo inſtructum, circa quem revolvatur motu æquabili ſemel menſe fiderio, dum
" à Fixâ aliquâ digreſſa ad eandem revertitur; & æquator Lunaris ad firmamentum continuatus
" intelligatur congruere plano Horizontis lignei, & polus æquatoris Lunaris in firmamento im-
" mineat polo boreo globi ad Zenith elevato. Orbitam verò Lunæ concipito partim ſupra Ho-
" rizontem ligneum attolli, partim verò infra eundem deprimi; quemadmodum in hoc ſitu glo-
" bi conſpicitur Ecliptica (licèt angulus Æquatoris Lunaris & ejus Orbitæ fortè non ſit æquè
" magnus, atque hic, quem globus exhibet). Deinde finge tibi globulos duos æquales; quo-
" rum uterque Polis, Æquatore, & Meridiano unico primario inſigniatur; & uterque filo ſuſpen-
" datur alterutri polorum alligato. Horum alter referat Lunam fictitiam motu æquabili ſecun-
" dum ductum Horizontis lignei circumlatam, atque eodem tempore circa axem ſuum revolutam
" reſpectu firmamenti; ita ut planum Meridiani primarii Lunaris perpetuò tranſeat per centrum
" Terræ. Alter verò globulus, veram Lunam imitatus, in orbitâ ſuâ feratur motu inæquali, nunc
" ſupra Horizontem ligneum emergens, nunc rurſus infra eundem deſcendens; ita ut planum
" Æquatoris hujus Lunæ veræ ſemper parallelum maneat plano Horizontis lignei, & planum
" Meridiani primarii ejuſdem Lunæ veræ ſemper parallelum plano Meridiani primarii Lunæ fictæ.
" Ita fiet, ut Luna ficta eandem nobis faciem obvertens ſemper, nulli prorſus librationi ſit ob-
" noxia.

mento, niſi Terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quàm ad polos, maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent. Liber Tertius.

PROP. XIX. PROB. III.

Invenire proportionem Axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noſter circa annum 1635 menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & obſervando differentiam latitudinum 2 *gr.* 28′ collegit menſuram gradûs unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt, hexapedarum Pariſienſium 57300 (kk).

Picartus menſurando arcum gradûs unius & 22′. 55″ in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradûs unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. *Caſſinus* ſentior menſuravit diſtantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Rouſſilion* ad obſervatorium Pariſienſe; & filius ejus addidit diſtantiam ab obſervatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Diſtantia tota erat hexapedarum $486156\frac{1}{2}$, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. $11\frac{5}{6}$″. Unde arcus gradûs unius prodit hexapedarum Pariſienſium 57061. Et ex his menſuris colligitur ambitus Terræ pedum Pariſienſium 123249600,

" noxia. At Luna vera, dum à Perigeo pergit ad Apogeon, præcedens Lunam fictam, Meri-
" dianum ſuum primarium oſtendit in medietate ſiniſtrâ ſui diſci, tot gradibus abeuntem à medio,
" quot ſunt inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. Ab Apogeo verò ad Perigeon deſcendens
" Luna vera ſequitur fictam, atque tum Meridianus primus veræ Lunæ recedit ab ejus medio ad
" dextram; hoc eſt, maculæ omnes vergunt in occaſum. Et cùm differentia inter mediam &
" veram Lunæ longitudinem in quadraturis evadat major, propter evectionem Syſtematis Luna-
" ris à centro Telluris; hinc eſt, quòd in quadraturis librationes in longum cernuntur majores.
" Similiter intelligitur cauſa librationis in latum, quando Luna ſuperato nodo aſcendente (ſive
" ſectione Horizontis lignei & Orbitæ ſuæ) tendit ad limitem boreum; tum enim nobis, in centro
" Sphæræ poſitis, polus Lunæ boreus, & quæ ſint circa eum maculæ, abſconduntur; & polus auſ-
" tralis cum ſuis maculis in conſpectum venit: unde maculæ omnes conſpicuæ in boream ten-
" dere videntur. Contrarium accidit, Lunâ ad limitem auſtralem accedente. Ab iiſdem cauſis
" procedit macularum ex parte lucidâ in obſcuram tranſitus, & viciſſim. Nam in limite auſtrali
" polus Lunæ boreus à Sole illuſtratur, & quicquid eſt Zonæ frigidæ Arctico Lunari inclusum;
" dum frigida auſtralis in tenebris verſatur. Quòd ſi igitur Solem concipias in eadem plagâ cum
" limite auſtrali, & Lunam poſt conjunctionem inde procedere ad nodum aſcendentem; tum
" maculæ ſuperiores, apud polum boreum ſitæ, paulatim unà cum ſuo polo à luce in tenebras con-
" cedunt, dum inferiores maculæ cum nodo auſtrali ex tenebris in lucem prorepunt. Contrari-
" um eveniet ſemeſtri pòſt, cum Sol acceſſit ad limitem Lunæ boreum." Confer Lib. De Syſt. Mund. § 36.

(kk) Veriùs 57424.

De Mundi Systemate

& ſemidiameter ejus pedum 19615800, ex hypotheſi quòd Terra ſit ſphærica.

In latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit pedes Pariſienſes 15 dig. 1 lin. $1\frac{7}{9}$ ut ſuprà, id eſt, lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus pondus amiſſum eſſe partem undecimam milleſimam ponderis totius, & corpus illud grave, cadendo in Vacuo, deſcribet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius ſecundi.

Corpus in circulo, ad diſtantiam pedum 19615800 à centro, ſingulis diebus ſidereris horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens, tempore minuti unius ſecundi deſcribet arcum pedum 1433,46 ([ll]), cujus ſinus verſus eſt pedum 0,0523656, ſeu linearum 7,54064 ([mm]). Ideoque vis, quâ gravia deſcendunt in latitudine *Lutetiæ*, eſt ad vim centrifugam corporum in æquatore, à Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064 ([nn]).

Vis centrifuga corporum in æquatore Terræ eſt ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à Terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in duplicatâ ratione radii ad ſinum complementi latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267 ([oo]). Addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine illâ *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ, vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribet lineas 2177,267 ([pp]), ſeu pedes

([ll]) Verius ni fallor 1430,4.
([mm]) Veriùs pedum 0,0519151, ſeu linearum 7,47577.
([nn]) Ut 2174 ad 7,47577.
([oo]) Ut 7,47577 ad 3,23885.
([pp]) 2177,239, ſeu pedes Pariſienſes 15, dig. 1, lin. 5,239.
([qq]) Ut 2177,239 ad 7,47577.
([rr]) 291,2 ad 1. Si igitur numeris quod aiunt rotundis rationem vis totius gravitatis Lutetiæ ad vim centrifugam corporum ſub æquatore eam ſtatueris, quam numerus 290 ad unitatem habet, haud multum à vero ut opinor aberraveris.

([ss]) Ad vires æſtimandas quibus Terra corpuſculum in polo Q poſitum verſus centrum ſui, C, trahat, intelligatur punctum P, in figurâ Cor. 2. Prop. XCI. Lib. 1. evaneſcente rectâ PA, cum ipſo A conjungi. Ita fient PS, AS æquales; & vires, quibus ſphærois ACBG corpuſculum in A vel P poſitum in centrum ſui trahat, ad vires quibus ſphæra, diametro AB ſcripta, idem corpuſculum incitaret, rationem habebunt quam $\frac{AS \times CS^2 - AS \times KMRK}{CS^2}$ ad $\frac{1}{3}AS$, ſive eam quam $CS^2 - KMRK$ ad $\frac{1}{3}CS^2$. Dato igitur quadrato ex CS, ad virium æſtimationem opus erit definire aream KMRK, ſive AMA, fig. p. 38. Hunc in finem ſectio conica, ARM ſpecie et magnitudine definienda erit.

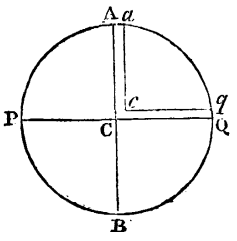
Jam verò (in fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. 1.) ſi ſphæroideos axis AB diametro ejus CG ſit minor, ſectio conica KRM Ellipſis erit. Sit Z centrum ejus (fig. p. 38). Erit ZA ſemiaxis ejus tranſverſus. Ponatur zr ſemiaxis ſecundus. E naturâ Ellipſeos erit $ZA^2 - ZB^2 : ZA^2 - ZS^2 = BM^2 : ST^2$.

Convertendo

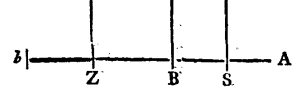
Liber Tertius.

pedes Pariſienſes 15 dig. 1 & lin. 5,267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2177,267 ad 7,54064 ([qq]) ſeu 289 ad 1 ([rr]).

Unde ſi APBQ figuram Terræ deſignet jam non amplius ſphæricam, ſed revolutione ellipſeos circum axem minorem PQ genitam, ſitque ACQ*qca* canalis aquæ plena, à polo Q*q* ad centrum C*c*, & inde ad æquatorem A*a* pergens: debebit pondus aquæ, in canalis crure A*cca*, eſſe ad pondus aquæ in crure altero Q*ccq* ut 289 ad 288; eo quòd vis centrifuga, ex circulari motu orta, partem unam è ponderis partibus 289 ſuſtinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure ſuſtinebit reliquas. Porro (ex Propoſitionis XCI. Corol. 2. Lib. 1.) computationem ineundo, invenio quòd ſi Terra conſtaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, & eſſet ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram foret ad gravitatem in eodem loco Q in ſphæram, centro C, radio PC vel QC deſcriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in ſphæroidem, convolutione ellipſeos APBQ circa axem AB deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, ut 125 ad 126 ([ss]). Eſt autem gravitas in loco A in Terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem.



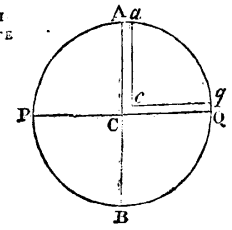
Convertendo & invertendo $zs^2 - zB^2 : zA^2 - zB^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Hoc eſt, ſi capiatur $zb = zB$, $bs \times BS : bA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Invertendo $bA \times AB$, ſive $2bA \times SB : bS \times SB = BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Sive $2bA : bS = BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Quare $bA : bS = \frac{1}{2}BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Dividendo $AS : Sb = ST^2 - \frac{1}{2}BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Sed punctis P, A (in fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. 1.) coeuntibus, erunt iliæ BM, ST ipſis AB, AC æquales.
Quare $AS : Sb = AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 : AB^2 - AC^2$.
Sed $AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 = AS^2 + SC^2 - 2AS^2 = SC^2 - AS^2$.



Quare $AS : Sb = SC^2 - AS^2 : AB^2 - AC^2$.
Quare $Sb = \frac{AB^2 - AC^2}{SC^2 - AS^2} AS$.
Ponatur $AB^2 - AC^2 = p$, & $SC^2 - AS^2 = q$.
Erit igitur $Sb = \frac{p}{q} AS$: et $Bb = \frac{p}{q} AS - AS$. Quare $ZB = \frac{p}{2q} AS - \frac{1}{2} AS$.
Quare $ZA = \frac{p}{2q} AS + \frac{1}{2} AS = \frac{p+3q}{2q} AS$.
Vel, poſito $p + 3q = r$, $ZA = \frac{r}{2q} AS$. Unde datis AS, SC dabitur ZA.

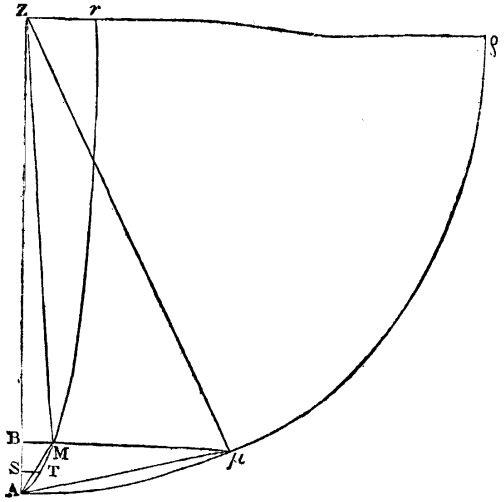
Jam

De Mundi Systemate



ſphæroidem & ſphæram: propterea quòd ſphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura, diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in A, in caſu utroque,

Jam $ZA^2 : Zr^2 = ZA^2 - ZB^2 : BM^2$ vel AB^2.
Permutando $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = Zr^2 : AB^2$.
Sed $ZA^2 : ZB^2 = r^2 : p^2 - 2pq + q^2$.
Quare $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = r^2 : r^2 - p^2 + 2pq - q^2$.
Sed $r^2 = p^2 + 6pq + 9q^2$.
Quare $r^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 8pq + 8q^2$.
Quare $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$.
Hinc $Zr^2 : AB^2$ vel $4AS^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$. Quare $Zr^2 : AS^2 = r^2 : 2pq + 2q^2$.
Sed $AS^2 : ZA^2 = 4q^2 : r^2$.
Ex æquo perturbatè $Zr^2 : ZA^2 = 2q : p + q$.
Unde $Zr : ZA = \sqrt{2}\sqrt{q} : \sqrt{p+q} = \sqrt{2}\sqrt{SC^2 - AS^2} : \sqrt{2AS^2}$.
Invertendo $ZA : Zr = AS : \sqrt{SC^2 - AS^2}$.



Datis igitur AS, SC, propter ZA jam antè inventam, dabitur etiam Zr.

Centro Z, radio ZA, ſcribatur circulus; qui rectis Zr, BM in punctis ϱ, μ occurrat: et jungatur Aμ.

Jam datis ZA, ZB, dabitur ſector circularis ZAμ, necnon triangulum Zμa. Dabitur igitur ſegmentum circuli AμA, quo triangulum illud à ſectore abeſt. Dato autem ſegmento circulari AμA, dabitur Ellipticum AMA, quod ad circulare datam rationem habet, quam Zr ad ZA.

Ponatur jam AS = 100, SC = 101; ut ſphærois ACBG (fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. 1.) figuram induat, quam Newtonus Terræ poſuit.

Ita erit $p = 3 \times \overline{100}^2 - \overline{101}^2$
$q = \overline{101}^2 - \overline{100}^2 = 201$
$3q = 3 \times \overline{101}^2 - 3 \times \overline{100}^2$
$r = p + 3q = 2 \times \overline{101}^2$
$\frac{r}{2q} = \frac{\overline{101}^2}{201}$
Quare ZA = 5075,12.

Rurſum

que, diminuitur in eâdem ratione quàm proximè. Eſt igitur gravitas in A in ſphæram, centro C radio AC deſcriptam, ad gravitatem

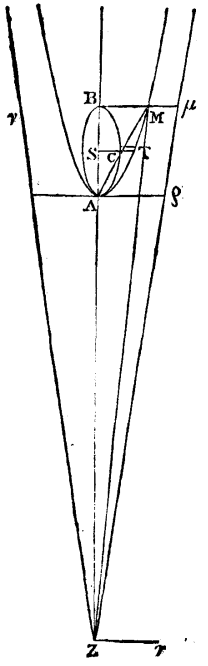
Rurſum cùm ſit $ZA : Zr = AS : \sqrt{SC^2 - AS^2} = 100 : \sqrt{201}$ = erit $Zr = 719{,}523$.
Rurſum $ZB = ZA - AB = 5075{,}1 - 200 = 4875{,}1$.

Hinc arcus Aμ, cujus eſt coſinus ZB pro radio ZA, = 16° − 8′ − 20″.
Quare ſector circularis ZAμ = 3627522.
Sed Bμ, ſinus arcûs Aμ pro radio ZA, = 1410,7
Quare triangulum Zμa = 3579744.
Hinc ſegmentum circulare AμA = 47778.
Et ſegmentum Ellipſeos AMA, cùm ad ſegmentum circulare rationem habeat quam Zr ad ZA, hoc eſt eam quam 719,5 ad 5075,1; idcirco AMA = 6773,7.

Jam verò $CS^2 = 10201$.
Quare $CS^2 - AMA = 3427{,}3$.
Sed $\frac{CS^2}{3} = 3400{,}3$.
Quare $CS^2 - AMA : \frac{CS^2}{3} = 3427{,}3 : 3400{,}3 = 125{,}99+ : 125 = 126 : 125$ quam proximè.

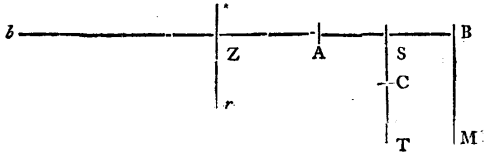
Vires igitur, quibus Terra corpuſculum in Polo poſitum verſus centrum incitaret, ſi talis ejus figura eſſet, qualem ad computationem faciliùs ineundam Newtonus poſuit, eæ ad vires quibus polleret ſphæra, quæ ipſum axem diametrum haberet, rationem eam, quæ à Newtono allegata eſt, ſatis exquiſitè ſervarent.

Vires autem, quibus ſphærois converſione meridiani terreſtris circa diametrum æquatoris generata corpuſculum, in diametri illius extremitate poſitum, in centrum urgeret, ad vires ſphæræ, quæ æquatorem terreſtrem circulum in ſuis maximum haberet, rationem modò allegatæ contrariam gerere, calculis ſimiliter ſubductis oſtendemus.



Nempe in figurâ Cor. 2. Prop. XCI. Lib. 1. ſi axis ſphæroideos AB diametro ejus CG ſit major, ſectio conica KRM ſeu ARM Hyperbola erit. Sit Z centrum ejus, ut ſit ZA ſemiaxis tranſverſus, & ponatur Zr ſemiaxis ſecundus. Sint rectæ Zμ, Zν ejuſdem aſymptotæ; quarum alteri occurrat BM in μ. Eidem in ϱ occurrat recta Aϱ, quæ hyperbolam in vertice A contingat. Jungatur ZM.

Jam è naturâ Hyperbolæ $ZB^2 - ZA^2 : ZS^2 - ZA^2 = BM^2 : ST^2$.
Convertendo & invertendo $ZB^2 - ZS^2 : ZB^2 - ZA^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$.



Hoc eſt poſitis ZB, Zb æqualibus, $bs \times SB : bA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Id eſt $bs \times SB : 2bA \times SB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Quare $bs : 2bA = BM^2 - ST^2 : BM^2$. Et $bs : bA = BM^2 - ST^2 : \frac{1}{2}BM^2$.
Convertendo et invertendo $AS : sb = \frac{1}{2}BM^2 - ST^2 : BM^2 - ST^2$.
Id eſt $AS : sb = \frac{1}{2}AB^2 - AC^2 : AB^2 - AC^2 = AS^2 - SC^2 : AB^2 - AC^2$.
Hinc $sb = \frac{AB^2 - AC^2}{AS^2 - SC^2}$ AS.
Ponatur $AB^2 - AC^2 = p$. Et $AS^2 - SC^2 = q$.
Tum $sb = \frac{p}{q}$ AS. Et $Bb = \frac{p}{q}$ AS + AS.

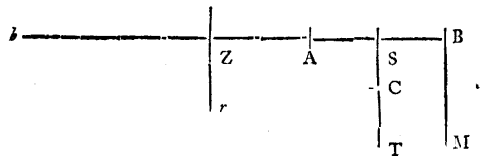
Quare

De Mundi Systemate

vitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$; & gravitas in loco Q in ſphæram, centro C radio QC deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco A in ſphæram, centro C radio AC deſcriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. 1.) id eſt, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126\times126\times100$ ad $125\times125\frac{1}{2}\times101$, ſeu ut 501 ad 500 (tt).

Jam cùm (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. 1.) gravitas in canalis crure utrovis AC*ca*, vel QC*cq*, ſit ut diſtantia locorum à centro Terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure AC*ca* ad pondera partium totidem in crure altero

Quare $ZB=\frac{p}{2q}AS+\frac{1}{2}AS$. Et $ZA=ZB-AB=ZB-2AS=\frac{p}{2q}AS-\frac{1}{2}AS=\frac{p-3q}{2q}AS$. Vel poſito $p-3q=r$, $ZA=\frac{r}{2q}AS$.



Unde datis AS, SC dabitur ZA.

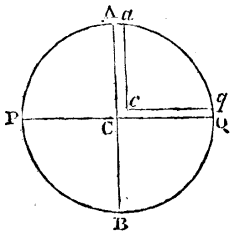
Jam $ZA^2:Zr^2=ZB^2-ZA^2:BM^2$ vel $4AS^2$. Permutando $ZA^2:ZB^2-ZA^2=Zr^2:4AS^2$.
Sed $ZA^2:ZB^2=r^2:p^2+2pq+q^2$.
Quare $ZA^2:ZB^2-ZA^2=r^2:p^2+2pq+q^2-r^2$.
Sed $r^2=p^2-6pq+9q^2$. Quare $p^2+2pq+q^2-r^2=8pq-8q^2$.
Quare $ZA^2:ZB^2-ZA^2$, ſive $Zr^2:4AS^2$, $=r^2:8pq-8q^2$.
Quare rurſum $Zr^2:AS^2=r^2:2pq-2q^2$.
Sed $AS^2:ZA^2=4q^2:r^2$.
Ex æquo perturbatè $Zr^2:ZA^2=2q:p-q$.
Invertendo $ZA^2:Zr^2=p-q:2q=2AS^2:2AS^2-2SC^2$.
Quare $ZA:Zr=AS:\sqrt{AS^2-SC^2}$.
Datis igitur AS, SC, propter ZA jam ſuprà inventam, dabitur etiam Zr.

Jam datarum ZA, ZB ratio dabitur. (Dat. 1.) Quare et illarum $A\varrho$, $B\mu$ (fig. p. 39) ratio data. Sed $A\varrho$ magnitudine data eſt, nempe datæ Zr æqualis. Quare $B\mu$ magnitudine dabitur (Dat. 2.) Sed BM magnitudine data eſt, quippe datæ AB æqualis. Quare μM magnitudine data. Datarum igitur μM, $A\varrho$ ratio data. (Dat. 1.) Sed hujus rationis ſector hyperbolicus AZM eſt logarithmus, pro modulo utique triangulari $ZA\varrho$. Sed datis ZA, $A\varrho$, triangulum $ZA\varrho$ magnitudine datum. Quare ſector hyperbolicus ZAM magnitudine datus. Sed triangulum ZAM magnitudine datum, propter datas ZA, BM. Segmentum igitur hyperbolicum AM, quo ſector hyperbolicus à triangulo abeſt, magnitudine datum.

Ponatur jam AS = 101
SC = 100;
nempe ut ſphærois ACBG ejus ſphæroideos figuram induat, quam meridianus terreſtris, eâ figurâ præditus quam Newtonus poſuit, circum axem ſuum tranſverſum convertendo generaverit.

Liber Tertius.

altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501.



Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure AC*ca*, ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea Fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verùm vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289; hoc eſt, vis centrifuga, quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$, eſt tantùm pars $\frac{1}{289}$. Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quòd ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure AC*ca* ſuperet altitudinem aquæ in crure QC*cq* parte centeſimâ

Ita erit $p=3\times\overline{101}^2-\overline{100}^2$
$q=\overline{101}^2-\overline{100}^2=201$
$3q=3\times\overline{101}^2-3\times\overline{100}^2$
$r=p-3q=2\times\overline{100}^2$
$\frac{r}{2q}=\frac{\overline{100}^2}{201}=49{,}751$
$ZA=\frac{r}{2q}AS=49{,}751\times101=5024{,}851.$

Rurſum $ZA:Zr=AS:\sqrt{AS^2-SC^2}=101:\sqrt{\overline{101}^2-100^2}=101:\sqrt{201}$.
Quare $Zr=705{,}34$
Jam cùm $ZA=5024{,}851$
et $AB=202$,
Erit $ZB=5226{,}851$
Sed $ZA:ZB=A\varrho$ vel $Zr:B\mu$.
Quare $B\mu=733{,}697$
Et $BM=202$
Quare $\mu M=531{,}697$

Triangulum $ZA\varrho=ZA\times\frac{1}{2}Zr$	$=177212$
Quare ſector hyperbolicus ZAM	$=500816{,}4$
Triangulum $ZAM=ZA\times\frac{1}{2}BM=5024{,}851\times101$	$=507509{,}9$
Quare ſegmentum hyperbolicum AMA	$=6693{,}5$
Sed CS^2	$=10000$
Quare CS^2-AMA	$=3306{,}5$
Sed $\frac{1}{3}CS^2$	$=3333{,}3$

Quare vires, quibus ſphærois BCAG trahit corpuſculum in A poſitum, ad vires ſphæræ, cujus diameter AB, rationem habent quam 3306,5 ad 3333,3. Sed $3306{,}5:3333{,}3=125:126{,}014=125:126$ propemodum.

(tt) Nimirum cùm gravitas in Terram in loco Q ſit ad gravitatem in ſphæram, cujus radius QC, ut 126 ad 125; et gravitas in hanc ſphæram in loco Q ad gravitatem in ſphæram alteram, cujus radius AC in loco A, ut 100 ad 101; et gravitas in hanc alteram ſphæram ad gravitatem in Terram in loco A ut 126 ad $125\frac{1}{2}$; ex æquo Gravitas in Terram in loco Q erit ad gravitatem in Terram in loco A ut $126\times126\times100$ ad $125\times125\frac{1}{2}\times101$; ſive ut $126\times126\times4$ ad $5\times125\frac{1}{2}\times101$; ſive ut 63504 ad 63377,5. Sed 63377,5 ad 63504 ut 500 ad 500,998+, ſive ut 500 ad 501 propemodum. Quare Gravitas in Terram in loco Q ad gravitatem in Terram in loco A ut 501 ad 500.

De Mundi Systemate

totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure ACca ſit altitudinis in crure altero QCcq pars tantùm $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter Terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cùm Terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quòd milliare ſit menſura pedum 5000) Terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si Planeta major ſit vel minor quàm Terra, manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem; & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione; & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et ſi denſitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ, vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cùm Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & revolventium denſitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum Jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè (uu). Eſt igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cùm ejus diameter major ſit 37″, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33″. 25‴. Pro luce erraticâ addantur 3″ circiter; & hujus planetæ diametri apparentes evadent 40″ & 36″. 25‴: quæ ſunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita ſe habet ex hypotheſi quòd corpus Jovis ſit uniformiter denſum. At ſi corpus ejus ſit denſius verſus planum æquatoris quàm verſus polos, diametri ejus poſſunt eſſe ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel fortè 14 ad 13. Et *Caſſinus*

(uu) Verùs ut 1 ad 9,4; modò in corporibus Terræ Joviſque ea ſit denſitatum ratio quam nos ſuprà

Caſſinus quidem anno 1691 obſervavit, quòd Jovis diameter, ab oriente in occidentem porrecta, diametrum alteram ſuperaret parte ſui circiter decimâ quintâ. *Poundus* autem noſter teleſcopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros Jovis, anno 1719, menſuravit ut ſequitur.

Liber Tertius.

Tempora.		Diam. max.	Diam. min.	Diametri ad invicem.	
	dies hor.	part.	part.		
Jan.	28 6	13,40	12,28	ut 12	ad 11
Mar.	6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
Mar.	9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr.	9 9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur Theoria cum phænomenis. Nam Planetæ magis incaleſcunt ad lucem Solis verſus æquatores ſuos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quàm verſus polos.

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam Terræ noſtræ minui ſub æquatore, atque ideo Terram ibi altiùs ſurgere quàm ad polos (ſi materia ejus uniformiter denſa ſit) patebit per experimenta Pendulorum, quæ recenſentur in Propoſitione ſequente.

PROP. XX. PROB. IV.

Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in Terræ hujus regionibus diverſis.

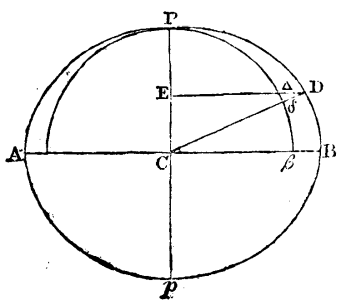
Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aquæ ACQqca æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro Terræ. Proinde ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ, conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ

ſuprà conſtituimus; ut denſitas Jovis ſit ad denſitatem Terræ ut 10 ad 42. Vide ſuprà Not. (u).

De Mundi Systemate

locorum à centro; & propterea, ex hypothesi quòd Terra sphæroïs sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema; quòd incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ; vel quod perinde est, ut quadratum sinûs recti latitudinis. Et in eâdem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano (xx). Ideoque cùm latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48gr. 50′, ea locorum sub æquatore 00gr. 00′, & ea locorum ad polos 90gr. & duplorum sinus versi sint 11334,00000 & 20000, existente radio 10000; & gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad polum



(xx) Ellipsis cujus centrum C, axis transversus AB, secundus Pp, meridianum aliquem è terrestribus refert: ut sint P, p poli telluris, B, locus aliquis in æquatore. Sit D locus aliquis in meridiano PBpA, inter polum & æquatorem, & jungatur CD. In locis B, D, P collocari puta corpora tria inter se æqualia ex materiâ simili. Jam cùm pondera horum corporum rationem inter se gerant distantiarum eorum à centro C contrariam; distantiarum autem maxima sit CA, minima CP, maximæ minimæque intermedia quædam CD; et eo minor cùm sit CD quo minor distantia loci D à polo: hæc cùm ita sint, corporis quod in B situm est pondus minimum erit; ejus quod in P, maximum; ejus quod in D, majus quidem pondere corporis quod in A, minus autem quàm ejus quod in P; eo autem majus quo minor loci D à polo distantia. Dicit Newtonus, illud quo pondus corporis in D exsuperat pondus corporis in B esse ut quadratum ex sinu latitudinis loci; id est, illud quo pondus corporis in polo P exsuperat pondus ejus quod in B, ad illud quo pondus corporis in D exsuperat pondus ejus quod in B, rationem habere quam quadratum radii ad quadratum ex sinu latitudinis loci D; sive ad quadratum ex sinu anguli BCD. Nam cùm Ellipsis BPAp parum admodum à Circulo recedit, angulus BCD angulo latitudinis loci D tantùm non æqualis erit.

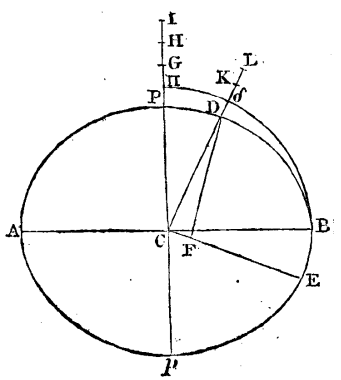
A puncto D in axem Ellipseos secundum, AB, ad perpendiculum deducatur DE. Centro C, radio CP, scribatur circulus; qui rectis CD, ED, CB in punctis δ, Δ, β occurrat. Jam cùm pondus corporis quod in P positum est ad pondus ejus quod in B rationem habeat quam CB ad CP; id est, eam quam CB ad Cβ: dividendo, illud quo pondus illius in P pondus hujus in B exsuperat ad pondus ipsum corporis in B rationem habebit quam Bβ ad Cβ. Simili argumento efficietur, pondus corporis in B ad illud, quo abest à pondere ejus quod in D, rationem habere quam Cδ vel Cβ ad δD. Ex æquo, illud quo pondus corporis in P exsuperat ejus quod in D, ad illud quo pondus corporis in D pondus corporis in B exsuperat, rationem habebit quam Bβ ad δD. Ratio autem rectæ Bβ ad δD composita est è rationibus rectæ Bβ ad ΔD, rectæque ΔD ad Dδ. Sed propter Ellipsin, Bβ erit ad ΔD ut CB ad DE. Et cùm Ellipsis à circulo parum admodum recedat, figura ΔDδ à triangulo DCE specie parum differt, et ratio rectæ ΔD ad Dδ ejus, quam CD habet ad DE, haud multùm absimilis erit. Quare ratio rectæ βB ad Dδ haud multum ab eâ aberit, quæ componitur è rationibus rectæ CB ad DE rectæque CD ad DE, sive eam quæ est rectanguli CB × CD ad quadratum ex DE. Sed, propter CB, CD tantùm non æquales, rectangulum CB × CD quadrato ex CD tantùm non æquale. Ratio igitur rectæ Bβ ad Dδ eam, quæ est quadrati ex CD ad quadratum ex DE, proximè referet. Et CD ad DE (propter figuram Ellipseos BPAp à circulari parùm abhorrentem) rationem habebit ab eâ, quæ est radii ad sinum latitudinis loci D, parùm diversam. Est igitur Bβ ad Dδ, sive illud quo pondus corporis in polo pondus ejus quod in æquatore exsuperat, ad illud quo pondus corporis in loco D pondus ejus quod in æquatore exsuperat, ut quadratum radii

Liber Tertius.

polum ad gravitatem sub æquatore ut 1 ad 229: erit excessus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cùm longitudines Pendulorum, æqualibus temporibus oscillantium, sint ut gravitates; & in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo Penduli, singulis minutis secundis oscillantis, sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius, ob pondus Aëris, $8\frac{5}{9}$: longitudo Penduli sub æquatore superabitur à longitudine synchroni Penduli Parisiensis, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo confit Tabula sequens.

radii ad quadratum ex sinu latitudinis loci D. Q. E. D.

Sed dicit etiam Newtonus, incrementis Graduum in meridiano eandem ferè rationem intercedere. Id nos etiam sic ostendimus.



Ellipsis BPAp ut priùs referat meridianum terrestrem; ut sint P, p poli, B locus aliquis in æquatore. Sit D, locus aliquis in meridiano BPAp inter polum et æquatorem. Jungatur CD, & ducatur Ellipseos semidiameter CE illius CD conjugata; et à puncto D in CE ad perpendiculum deducatur DF. Circulus, centro C, radio CB scriptus, rectis CP, CD in punctis H, I occurrat. Capiatur CG ad quam CH, et CH ad quam CG, et CI ad quam CH rationem habeat quam CP ad CH, vel CB. Rursum capiatur CK ad quam CI, et CL ad quam CK rationem habeat quam CD ad CI.

Longitudinem gradûs meridiani sub ipso P ad longitudinem gradûs circa B rationem habere triplicatam ejus quam CB vel CH ad CP, sive eam quam CH ad CP, ex Conicis notissimum est. Necnon longitudinem gradûs meridiani circa B ad longitudinem ejus qui circa D, rationem habere rectæ CP ad CE triplicatam. Quare et dividendo, longitudo illa quâ gradus circa B abest à gradu circa D ad longitudinem ipsam gradûs circa B rationem habebit quam $CE^3 - CP^3$ ad CP^3.

Sed è naturâ Ellipseos rectangula CP × CB, DF × CE inter se sunt æqualia. Quare $CP^3 : CE^3 = DF^3 : CB^3$. Sed (propter figuram Ellipseos BPAp à circulari parùm abhorrentem) recta DF semidiametro CD tantùm non æqualis est. Quare et cubi ex illis DF, CD tantùm non æquales. Quare ratio CP^3 ad CE^3 à ratione ipsius CD^3 ad CB^3 vel CI^3, sive ab eâ quæ est rectæ CD ad CL, parùm aberit. Ac proinde parùm aberit, quin $CE^3 - CP^3$ ad CP^3 rationem habeat quam LD ad CD. Longitudo igitur, quâ gradus circa B abest à gradu circa D, ad longitudinem ipsam gradûs circa B rationem habebit ab eâ quæ est LD ad DC parùm diversam.

Jam verò cùm longitudo gradûs sub polo P sit ad gradum circa B ut CH ad CP^2, hoc est ut CI ad CH; dividendo, longitudo quâ gradûs sub polo P exsuperat gradum circa B erit ad gradum ipsum circa B ut HI ad CH. Et ostensum est gradum circa B ad longitudinem illam, quâ abest à gradu circa D, rationem habere ab eâ quæ est CD ad DL parum diversam. Quare longitudo quâ gradus sub ipso polo exsuperat gradum circa B ad illam, quâ gradus circa D eundem circa B exsuperat, rationem habebit ab eâ, quæ est rectanguli HI × CD ad rectangulum CH × DL, sive rectæ HI ad LD, parùm diversam. Parùm igitur diversam ab eâ quæ est IP ad Dδ. Namque propter CH, CP; Cδ, CD tantùm non æquales, erit HI = 3IP, & LD = 3Dδ. Ratio autem illius IP ad Dδ à duplicatâ ejus, quæ est radii ad sinum latitudinis loci D, parùm recedere ostensa est. Constat igitur Propositum.

Constat

Latitudo loci.	Longitudo penduli.		Menſura gradûs unius in meridiano.
grad.	ped.	lin.	hexapedæ.
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Conſtat autem per hanc Tabulam quòd graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus geographicis figura Terræ pro ſphæricâ haberi poſſit: præſertim ſi Terra paulo denſior ſit verſus planum æquatoris quàm verſus polos.

Jam verò Aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes aſtronomicas faciendas miſſi, obſervârunt quòd horologia oſcillatoria tardiùs moverentur prope Æquatorem quàm in regionibus noſtris. Et primò quidem D. *Richer* hoc obſervavit, anno 1672 in inſulâ *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum Fixarum per meridianum menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardiùs moveri quàm pro medio motu Solis, exiſtente differentiâ 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda, per horologium optimum menſurata, oſcillaret, notavit longitudinem Penduli ſimplicis; & hoc fecit

ſæpiùs ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli Pariſienſis, (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Poſtea *Halleius* noſter, circa annum 1677 ad inſulam *Sanctæ Hellenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardiùs moveri quàm *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit pluſquam octavâ parte digiti, ſeu lineâ unâ cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cùm longitudo cochleæ in imo parte Penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli, ſingulis minutis ſecundis oſcillantis, in Obſervatorio Regio Pariſienſi eſſe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in inſulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem Penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, exiſtente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac D. *Couplet* filius, anno 1697, menſe *Julio*, horologium ſuum oſcillatorium ad motum Solis medium in Obſervatorio Regio Pariſienſi ſic aptavit, ut tempore ſatis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyſſipponem* navigans invenit, quòd menſe *Novembri* proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, exiſtente differentiâ 2′. 13″ in horis 24. Et menſe *Martio* ſequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium ſuum tardiùs ire quàm *Pariſiis*, exiſtente differentiâ 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat Pendulum, ad minuta ſecunda oſcillans, brevius fuiſſe *Ulyſſipponi* lineis $2\frac{1}{2}$, & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quàm *Pariſiis*. Rectiùs poſuiſſet differentias eſſe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4. 12 reſpondent. Craſſioribus hujus obſervationibus minùs fidendum eſt.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes*, ad *Americam* denuò navigans, determinavit quòd in inſulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli, ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſet paulo minor quàm ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quódque in inſulâ *S. Chriſtophori* longitudo

De Mundi Systemate

illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quòd in insulâ *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem Penduli, ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantùm $5\frac{7}{12}$; id est, tribus ferè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante observatione. Nam deinde ab insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli isochroni esse pedum tantùm trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est 6^{gr}. 38′ ad austrum, & ea *Portobeli* 9^{gr}. 33′ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè 4^{gr}. 55′, 14^{gr}. 40′, 14^{gr}. 00′, 14^{gr}. 44′. 12^{gr}. 6′, 17^{gr}. 19′, & 19^{gr}. 48′ ad boream. Et excessus longitudinis Penduli Parisiensis, supra longitudines Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quàm pro Tabulâ longitudinum Penduli superiùs computata. Et propterea Terra aliquanto altior (yy) est sub Æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem, nisi fortè calores in zonâ torridâ longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Observavit utique D. *Picartus* quòd virga ferrea, quæ tempore hyberno, ubi gelabant frigora, erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quartâ parte lineæ. Deinde D. *de la Hire* observavit, quòd virga ferrea, quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi soli æstivo exponebatur, evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quàm in posteriore, in hoc verò major fuit quàm calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad solem æstivum valdè incalescunt. At virga Penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quàm hyberno, sed excessu quartam partem lineæ unius vix

(yy) Imo humilior si hisce experimentis fidendum est. Nempe si Pendulum polare æquatoreum magis exsuperet quàm si sphæroïs homogenea esset, diameter æquatoris minus exsuperabit axem, &

Liber Tertius.

vix superante. Proinde differentia tota longitudinis Pendulorum, quæ in diversis regionibus isochrona sunt, diverso calori attribui non potest. Sed neque erroribus Astronomorum, è *Galliâ* missorum, tribuenda est hæc differentia. Nam quamvis eorum observationes non perfectè congruant inter se, tamen errores sunt adeo parvi, ut contemni possint. Et in hoc concordant omnes, quòd isochrona Pendula sunt breviora sub Æquatore quàm in Observatorio Regio Parisiensi, existente differentiâ non minore quàm lineæ unius cum quadrante, non majore quàm linearum $2\frac{5}{9}$. Per observationes D. *Richeri*, in *Cayennâ* factas, differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum semisse, vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minùs accuratas prodiit eadem quasi duarum linearum. Et hæc discrepantia partim ab erroribus observationum, partim à dissimilitudine partium internarum Terræ & altitudine montium, & partim à diversis Aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior est quàm tempore æstivo, sextâ parte lineæ unius, quantum sentio. Ob calores sub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante, à *Richero* observatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum lineâ $1\frac{87}{1000}$, per Theoriam jam antè collectâ, probè congruit. *Richerus* autem observationes, in *Cayennâ* factas, singulis septimanis per menses decem iteravit; & longitudines Penduli, in virgâ ferreâ ibi notatas, cum longitudinibus ejus in *Galliâ* similiter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis observatoribus defuisse videtur. Si hujus observationibus fidendum est, Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium septendecim circiter, ut suprà per Theoriam prodiit.

PROP. XXI. THEOR. XVII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & Axem terræ, singulis revolutionibus annuis nutando, bis inclinari in Eclipticam, & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. 1. Motus tamen iste nutandi perexiguus esset debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis (zz).

& viciſſim: ut certiſſimis argumentis evicerunt Clairaultius & Simſonus noſtras.

(zz) Vide De Syst. Mund. § 37.

De Mundi Systemate

PROP. XXII. THEOR. XVIII.

Motus omnes Lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis principiis conſequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes planetas deferre, & minores illos in Ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. 1. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iiſque adficientur inæqualitatibus, quæ in Lunâ noſtrâ notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4 & 5. Prop. LXVI.) velociùs movetur, ac radio ad Terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, orbemque habet minùs curvum, atque ideo propiùs accedit ad Terram, in ſyzygiis quàm in quadraturis; niſi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima eſt (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum lunæ in ſyzygiis verſatur, & minima ubi idem in quadraturis conſiſtit; & inde Luna in Perigæo velocior eſt & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior, in ſyzygiis quàm in quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8. Prop. LXVI.) velociùs progreditur in ſyzygiis ſuis, tardiùs regreditur in quadraturis; & exceſſu progreſſûs ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per Corol. 2. Prop. LXVI.) quieſcunt in ſyzygiis ſuis, & velociſſimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in ſyzygiis: & motus medius tardior in Perihelio terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ (α).

Sunt etiam aliæ quædam, à prioribus Aſtronomis non obſervatæ, inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates

(α) Vid. De Syſt. Mund. § 32.

(β) De Syſt. Mund. § 32.

(γ) Litera N ſignificet motum medium nodorum Lunæ, ſpatio menſis quem vocant periodici. Litera n motum medium nodorum Satellitis extimi à Jovialibus, eodem temporis ſpatio. Litera v motum medium nodorum Satellitis ejuſdem, propriæ converſionis circum Jovem ſpatio. Literæ T, τ, J ſignificent ſpatia converſionum Terræ & Jovis circum Solem. Literæ, l, ſ ſpatia converſionum Lunæ & Satellitis extimi Jovialis, illius circum Terram, hujus circum Jovem. Jam (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. 1.) N : v = J² : T² + l : ſ² = J² × l² : T² × ſ².

Sed v : n = ſ : l (nempe cùm motus medii ſint æquabiles) = T² × ſ² : T² × l.

Ex æquo N : n = J² × l² : T² × l = J² × l : T² × ſ.

Et invertendo n : N = T² × ſ : J² × l. Q. E. D.

Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in ſyzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis ſolaris. Et Variatio præterea augetur vel minuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quàm proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. 1.) Sed hæc inæqualitas in calculo aſtronomico ad proſthaphæreſin lunæ referri ſolet, & cum eâ confundi (β).

PROP. XXIII. PROB. V.

Motus inæquales ſatellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi lunarum ſeu ſatellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius nodorum ſatellitis extimi Jovialis, eſt ad motum medium nodorum lunæ noſtræ, in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (γ) (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. 1.) ideoque annis centum conficit nodus iſte 8gr. 24′, in antecedentia. Motus medii nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hîc exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum et Augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis Lunæ reſpectivè, ut motus nodorum &

De Mundi Systemate

augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio satellitis è Jove spectati, est ad variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum, temporibus quibus satelles & luna ad solem revolvuntur, per idem Corollarium; ideoque in Satellite extimo non superat $5''.12'''$ (δ).

PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus, tam lunaribus quàm solaribus, bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI. Lib. 1. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi; ut fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei*, ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit; nisi ubi motus ab oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam quintam, sextam, septimam, aut ultrà, retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quàm supra; & per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad meridianum loci revertitur. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu, & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit; id quod fiet spatio horæ unius duarumve; sed sæpiùs ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium, si mare sit vadosum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol at-

(δ) De Syst. Mund. § 34.

tollet

Liber Tertius.

tollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus, qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius est; ideoque in transitu Lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem, in transitu Lunæ à quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardiùs ad ἀκμὴν venient.

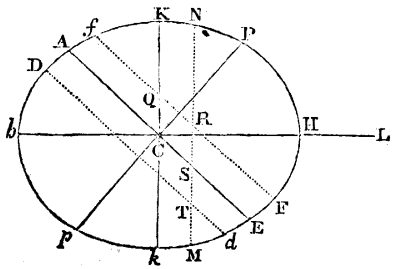
Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis à Terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis paulo majores sint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in syzygiis continuis se mutuò non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione, seu distantiâ ab Æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione & remissione, ideoque nullam motûs reciprocationem cieret. Igitur luminaria, recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent; & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eo quòd Lunæ, jam in æquatore constitutæ, effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias, & minimi in quadraturas lumina ium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum

De Mundi Systemate

in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant æquinoctium vernum quàm ſequantur, & ſæpiùs ſequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum Latitudine. Deſignet APEP Tellurem aquis profundis undique coopertam; C, centrum ejus; P, *p*, polos; AE, æquatorem; F, locum quemvis extra æquatorem; *Ff*, parallelum loci; D*d*, parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; L, locum, quem Luna tribus antè horis occupabat; H, locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h*, locum huic oppoſitum; K, *k*, loca inde gradibus 90 diſtantia; CH, C*h*, maris altitudines maximas menſuratas à centro telluris; & CK, C*k*, altitudines minimas. Et ſi axibus H*h*, K*k* deſcribatur Ellipſis; deinde, ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem H*h*, deſcribatur ſphærois HPK*hpk*: deſignabit hæc figuram maris quàm proximè; & erunt CF, C*f*, CD, C*d* altitudines maris in locis F, *f*, D, *d*. Quinetiam ſi in præfatâ ellipſeos revolutione punctum quodvis N deſcribat circulum MN, ſecantem parallelos, F*f*, D*d*, in locis quibuſvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo maris in locis omnibus R, S, T, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; poſtea defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimò defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in F. Diſtinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemiſphæricos; unum, in hemiſphærio KH*k*, ad boream vergentem; alterum, in hemiſphærio oppoſito K*hk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet. Hi fluctus, ſemper ſibi mutuò oppoſiti, veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium



lunarium duodecim. Cúmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & accidunt. Æſtus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; &, Lunâ declinationem mutante, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quòd æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos, & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*. Liber Tertius.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motûs impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit, ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius, vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citiùs tranſeat per aliqua freta quàm per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad meridianum portûs. Si Luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient, ut aqua tranquillè ſtagnet.

Si

De Mundi Systemate

Si Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum; & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantùm perveniet ad maximam altitudinem, & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batſham*, ſub latitudine boreali $20^{gr}. 50'$, *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua, die tranſitum Lunæ per æquatorem ſequente, ſtagnat; dein Lunâ ad boream declinante, incipit fluere & defluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cùm Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum; dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet; alter ab oceano *Sinenſi*, inter continentem & inſulam *Luconiam*; alter à mari *Indico*, inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus, ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi*, per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum reliquo (*).

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

(*) De Syſt. Mund. § 38—47.

SECTIO

SECTIO II.

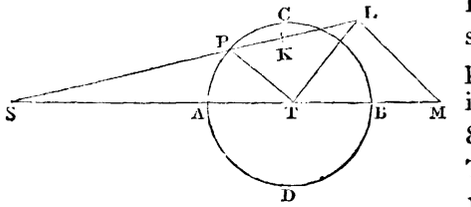
Liber Tertius.

De quantitate Errorum Lunarium.

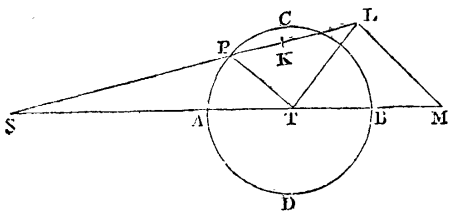
PROP. XXV. PROB. VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet S Solem, T Terram, P Lunam, CADB orbem Lunæ.



In SP capiatur SK æqualis ST; ſitque SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM: & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam ST, vel SK; erit SL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipſius SM pars TM, perturbat motum Lunæ, ut in Libri Primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud à viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas, YM & ML, deſignare. Vis ML, in mediocri ſuâ quantitate, eſt ad vim centripetam, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT, revolvi poſſet, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. 1.) hoc eſt, in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in Propoſitione quartâ quòd, ſi Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium terræ quamproximè. Et vis quâ luna in orbe circa terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris



ML est ad vim gravitatis in superficie terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæ sunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q.E.I.

PROP. XXVI. PROB. VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe circulari describit.

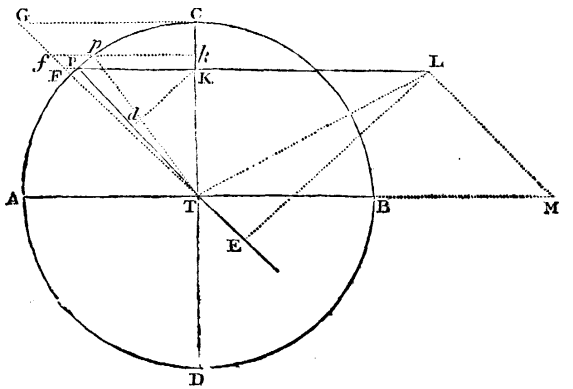
Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hîc investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hîc agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam, ponamus etiam lineas SP, ST sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis LM reducetur semper ad mediocrem suam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem suam quantitatem 3PK (a). Hæ vires (per legum Corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, si in radium TP demittatur perpendiculum LE, resolvitur in vires TE, EL; quarum TE, agendo semper secundum radium TP, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL, agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantùm accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in transitu ipsius à quadraturâ

(a) Vid. Lib. 1. Sect. II. Not. f.

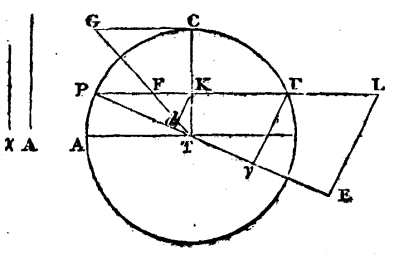
(b) Nimirum propter angulus ad K & E rectos, angulumque LPE triangulis duobus LPE, TPK communem, triangula illa sunt inter se similia sed contrariè posita. Quapropter recta PL erit ad rectam LE, ac proinde vis PL seu 3PK ad vim LE, ut recta PT ad rectam TK. Quare $EL \times TP = 3PK \times TK$, sive $EL = 3PK \times \frac{TK}{TP}$.

(c) Nimirum hæc est argumentatio Newtoni. Positis TC, CG æqualibus, ductâque TG, quæ rectæ KP in F occurrat, erit fluxio rectæ CK ad fluxionem arcûs CP ut KP ad TP. (Introduct. ad

quadraturâ C ad conjunctionem A, singulis temporis momentis facta, est ut ipsa vis accelerans EL, hoc est, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$ (b). Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (quod eodem



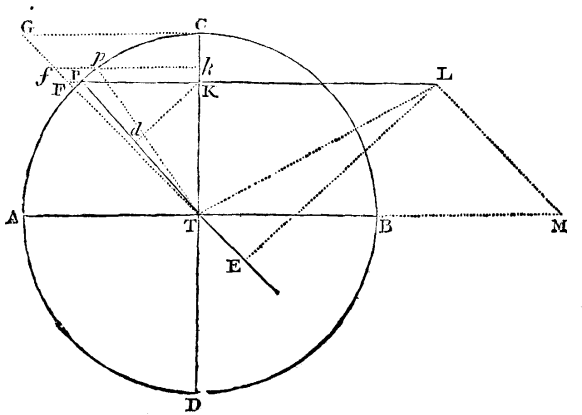
ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipsi CT æqualis. Et diviso arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ Temporis exponi possint, ductâque *pk* perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, *kp* productis occurrens in F & *f*; & erit FK æqualis TK, & K*k* erit ad PK ut P*p* ad T*p*, hoc est in datâ ratione; ideoque $FK \times K\!k$, seu area FK*kf*, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; & compositè, area tota GCKF ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in Lunam; atque ideo etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti (c). Vis quâ Luna



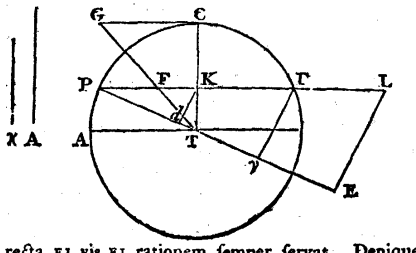
ad Quad. Curv. § 4.) Sint χ, A rectæ quædam, eâ lege sive altera sive utræque mutabiles, ut velocitatum crescendi rectæ CK arcûsque CP rationes semper referant; secundum doctrinam Def. v. Geometriæ nostræ Fluxionum. Erit igitur χ ad A ut KP ad TP. Permutando χ erit ad KP ut A ad TP. Jam verò propter æquabilem Lunæ motum (talis enim ponitur) quo arcus CP scribitur, fixa manet rectæ A longitudo. (Geometr. Flux. Def. v.) Sed data etiam TP. Quare datarum A, TP ratio data. Data igitur ratio rectæ χ ad PK. Quare,

De Mundi Systemate

Luna circa Terram quiescentem ad distantiam TP, tempore suo periodico CADB dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}$CT, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, quâ Luna in orbe suo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. 1 ([d]). Cùm autem perpendiculum K*d*, in TP demissum, sit ipsius EL pars



tertia, & ipsius TP, seu ML, in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, ubi maxima est ([e]), superabit vim ML in ratione 3 ad 2; ideoque erit ad vim illam, quâ Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$, seu 11915; & tempore CT velocitatem generare deberet, quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris; tempore autem CPA, velocitatem majorem generaret, in ratione CA ad CT seu TP. Exponatur vis maxima



Quare, propter FK, TK inter se æquales, rectanguli $\chi \times$ FK ad rectangulum PK × TK ratio data. Quare rectanguli $\chi \times$ FK ad rectangulum 3PK × TK ratio data; sive ad rectangulum TP × EL, quod rectangulo 3PK × TK ostensum est æquale. (Not. [c].) Verùm rectangulum $\chi \times$ FK fluxio est trapezii GCKF (De Quad. Curv. Prop. I.) Fluxio igitur trapezii GCKF rectanguli TP × EL rationem semper servat. Sed, propter rectam TP magnitudine datam, rectangulum illud TP × EL rectæ EL, & recta EL vis EL rationem semper servat. Denique vis EL est semper ut fluxio velocitatis quam in Lunâ generaverit. Hinc fluxio trapezii GCKF est semper ut fluxio velocitatis, quam vis EL in Lunâ generaverit. Quare cùm trapezium illud GCKF, & velocitas, quam vis EL in Lunâ generaverit, simul à nihilo generari inceperint, Lunâ utique in puncto C posità, trapezium GCKF velocitatis

maxima EL in octantibus per aream FK × K*k*, rectangulo $\frac{1}{2}$TP × P*p* æqualem ([f]). Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}$TP × CP ad aream KCGF: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}$TP × CA & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. 5. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915+50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in syzygiâ A, ac differentia 11915−50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ, temporibus æqualibus in syzygiis & quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium FKCG ad triangulum TCG (vel quod perinde est, ut quadratum sinûs PK ad quadratum radii TP, id est, ut P*d* ad TP) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P.

Liber Tertius.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quòd Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cùm autem periodus synodica lunaris verè sit dierum 29. hor. 12. & min. 44, augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hac pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$

tatis illius rationem semper servabit. (Geometr. Flux. Prop. IV.)

([d]) Vid. Lib. 1. Sect. II. Not. [1], Cor. H. 1 & 2.

([e]) Vim EL tunc maximam esse, quando Luna octantem teneat, eo patet quòd vis illa EL rectanguli 3PK × TK rationem semper servet. Maxima igitur erit, quando rectangulum illud maximum; id est quando PK × TK, rectangulum sub sinu & cosinu arcûs CP, maximum. Hoc autem ita maximum erit, si arcus CP quadrantis semissis sit.

([f]) Nempe vim EL fluxionis trapezii GFKC, sive rectanguli $\chi \times$ FK, rationem servare suprà ostendimus. (Not. [c].) Sed si punctum P arcum CA medium dividat, ut maxima sit vis EL, punctum F cum ipso P congruet, et PK, FK erunt inter se æquales. Quapropter cùm sit semper $\chi : A = PK : TP$, ac proinde $\chi \times FK : A \times TP = FK \times PK : TP^2$; erit in tali situ puncti P, $\chi \times FK$ ad A × TP, sive fluxio trapezii GKFC ad fluxionem rectanguli CP × TP, ut PK^2 ad TP^2, id est ut 1 ad 2. Id est fluxio trapezii GFKC, fluxioni dimidii rectanguli CP × TP, in tali situ puncti P æqualis erit. Quare vis EL, quæ per fluxionem trapezii GFKC semper exponi potest, ea, quando maxima est, per fluxionem dimidii rectanguli CP × TP exponenda erit.

momenti

De Mundi Systemate

momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in syzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, seu 10973 ad 11073; & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973+P*d*, existente videlicet TP æquali 100.

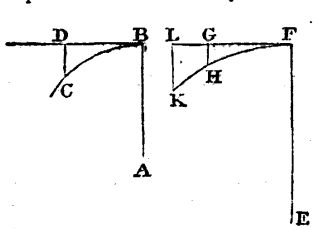
Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219,46 & sinûs versi duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius est unitas (g). Hæc ita se habent ubi Variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eâdem ratione.

PROP. XXVII. PROB. VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea distantia Lunæ à Terra

(g) Nimirum incrementum areæ est ut 109,73+P*d*, si circuli radius TP sit unitas; hoc est ut 2×109,73+2P*d*; id est ut 219,46+2P*d*. Sed 2P*d* æqualis est sinui verso duplæ distantiæ Lunæ à quadraturâ. Occurrat enim PK circulo iterum in T (vid. fig. Not. c), & ducatur T*p* cum illâ P*d* parallela, quæ rectæ TP in *p* occurrat. Jam arcûs CP quo, Luna à quadraturâ distat, hujus duplus est arcûs PCT: et hujus PCT sinus versus est recta P*p*, quæ dupla est illius P*d*.



(h) Sint Curvæ BC, FH, quas circuli, centris A, E, radiis AB, EF scripti, in punctis B, F osculentur; rectæ verò BD, FG in punctis eisdem B, F Curvas contingant. Jam si in Curvis inscribantur æquales rectæ BC, FH, & à punctis H, C in tangentes FG, BD deducantur ad perpendiculum CD, HG; vel si in tangentibus sumantur æquales BD, FG, et à punctis D, G, educantur ad perpendiculum DC, GH, quæ Curvis in punctis C, H occurrant: erunt DC, GH sinus angulorum contactûs, ad B & F, pro radiis æqualibus BC, FH; vel tangentes eorundem pro radiis æqualibus BD, FG. Jam verò quæ, arcubus BC, FH infinitè imminutis, rectarum DC, GH evanescentium ultima est ratio, eam curvaturis in locis B, F interesse Newtonus posuit. Nec ineptè sanè: cùm evanescentium illarum ratio ultima radiorum AB, EF contraria fit. Namque arcubus BC, FH infinitè imminutis, puncta C, H quæ semper sunt ad Curvas, ea ultimò ad circulos etiam erunt radiis AB, EF scribendos. Et ex naturâ circuli, rectangula AB×CD, EF×GH, erunt ultimò inter se ut quadrata ex BD, FG. Sed quadrata ex BD, FG ultimò saltem inter se æqualia, nimirum cùm ipsæ BD, FG, ultimò saltem, inter se æquales. Rectangula igitur AB×CD, EF×GH ultimò inter se æqualia. Ac proinde CD : GH ultimò = EF : AB. Quæ igitur radiorum AB, EF inter ipsos est ratio, ea, contrariè sumpta, evanescentium DC, GH ultima erit. Sed quæ radiis circulorum osculantium est ratio, ejus contraria curvaturæ ratio est.

(Geometr.

Terra est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè & subduplicatâ ratione motûs horarii inversè. Q. E. I. Liber Tertius.

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantia à Terrâ. Tentent astronomi quàm probè hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PROP. XXVIII. PROB. IX.

Invenire diametros orbis in quo Luna, sine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, si secundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultimâ proportione sinuum vel tangentium, angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur (h). Attractio autem Lunæ in Terram in syzygiis est excessus gravitatis ipsius in terram supra vim solarem 2PK (vide *fig. pag.* 428) quâ gravitas acceleratrix Lunæ in Solem

(Geometr. Analyt. C. VII. § 1.) Curvaturæ igitur in locis B, F rationem eam, quæ est ultima evanescentium DC, GH, Newtonus rectè posuit.

Sed intelligantur Curvæ BC, FH, motu corporum quorundam generari, quæ è locis B, F, secundum rectas BD, FG, cum certâ unumquodque velocitate emissa, viribus incitentur, quæ, initio saltem, secundum rectas BA, FE agant. Dicit Newtonus curvaturam in B ad curvaturam in F rationem habere ex duabus compositam; quarum altera virium in locis B, F est ratio, altera duplicatæ velocitatum, quibuscum corpora è locis illis emittuntur, contraria. Id verò sic ostendimus. Sint BC, FK arcus quilibet Curvarum BC, FH, quos corpora simul confecerint; et à punctis C, K in tangentes BD, FG deducantur ad perpendiculum CD, KL. Intelliguntur arcus BC, FK infinitè minui, eâ tamen lege, ut, sensim evanescendo, tales semper sint quos corpora simul confecerint. Jam rectangula 2AB×CD, 2EF×KL, quadratis ex BD, FL, ac proinde quadratis ex BC, FK ultimò fiunt æqualia. Quare AB×CD : EF×KL ultimò = BC² : FK² Sed EF×KL : EF×CD = KL : CD. Quare AB : EF = BC² : FK² ultimò + KL : CD ultimò. Invertendo EF : AB = FK² : BC² ultimò + CD : KL ultimò.

Habet igitur EF ad AB rationem è duabus compositam; quarum altera evanescentium CD, KL est ultima, altera ejus quæ longitudinum BC, FK ultimò duplicata est, contraria. Sed propter arcus BC, FK simul confectos, rectæ CD, KL erunt ultimò inter se ut spatia, quæ corpora à viribus, quales in locis B, F vigeant, incitata, casu recto simul conficerent; hoc est, ut vires illæ. Et quæ longitudinum BC, FK ultimò duplicata est ratio, ea velocitatum, quibuscum corpora è locis B, F emittuntur duplicata erit. Habet igitur EF ad AB rationem è duabus compositam; quarum altera virium in locis B, F, est ratio, altera duplicatæ velocitatum, quibuscum corpora è locis illis emittuntur, contraria. Jam verò curvaturæ in B ad curvaturam in F eadem quæ rectæ EF ad rectam AB erit ratio: ac proinde ex eisdem rationibus componetur. Curvaturæ igitur in B ad curvaturam in F ea erit ratio, quam Newtonus allegavit.

superat

De Mundi Systemate

ſuperat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem, vel ab eâ ſuperatur. In quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis Lunæ in Terram & vis ſolaris KT, quâ Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{AT^q} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{AT^q} + \frac{1000}{AT \times N}$ quàm proximè; ſeu ut $178725\,N \times CT^q - 2000\,AT^q \times CT$ & $178725\,N \times AT^q + 1000\,CT^q \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK, & Lunam trahit in Terram; erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit 3000; de quâ, ſi vis mediocris ML ſubducatur, manebit vis 2000, quâ Luna in ſyzygiis diſtrahitur à Terrâ, quamque jam antè nominavi 2PK (i). Velocitas autem lunæ in ſyzygiis A & B eſt ad ipſius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, deſcribit in ſyzygiis ad momentum ejuſdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut 11073 CT ad 10973 AT. Sumatur hæc ratio bis inverſè & ratio prior ſemel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,AT^q \times CT^q \times N - 120406729 \times 2000\,AT^{qq} \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,AT^q \times CT^q \times N + {}^{\cdot}122611329 \times 1000\,CT^{qq} \times AT$, i. e. ut $*2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT\,cub.$ ad $\dagger 2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT\,cub.$

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice aſſumamus Ellipſin DBCA, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major DC quadraturis, minor AB ſyzygiis interjaceat. Cùm autem planum Ellipſeos hujus motu angulari circa Terram revolvatur,

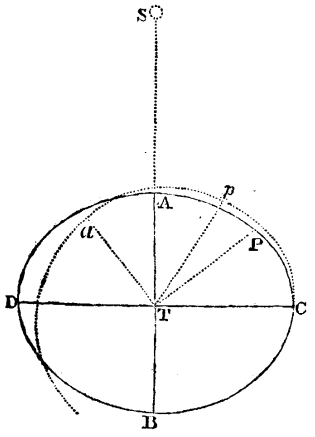
(i) Jam verò cùm vis terreſtris, quâ Luna urgetur in diſtantiâ N, ſit 178725, vis terreſtris in diſtantiâ AT erit $\frac{178725 \times N^2}{AT^2}$. Et cùm vis ſolaris, quæ in coitu Lunæ vi terreſtri obluctetur, quando Luna intervallo N à terrâ diſtet, ſit 2000; et in aliis Lunæ à terrâ diſtantiis diſtantiæ rationem conſtanter ſervet: ea in coitu Lunæ erit $\frac{2000 \times AT}{N}$. Unde vis tota è terreſtri et ſolari compoſita, quâ Luna in coitu urgetur in centrum Terræ, erit $\frac{178725 \times N^2}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N}$. Simili modo oſtendetur vim totam è terreſtri & ſolari compoſitam, quæ dimidiatam Lunam in Terram urgeat, eam eſſe $\frac{178725 \times N^2}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N}$.

Quare vis prior ad poſteriorem ut $\frac{178725 \times N^2}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N}$ ad $\frac{178725 \times N^2}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N}$.

Sive

Liber Tertius.

tur, & trajectoria, cujus curvaturam conſideramus, deſcribi debet in plano quod omni motu angulari omninò deſtituitur: conſideranda erit figura quam Luna, in ellipſi illâ revolvendo, deſcribit in hoc plano, hoc eſt figura c*pa*; cujus puncta ſingula, *p*, inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipſi, quod locum Lunæ repræſentet, & ducendo T*p* æqualem TP, eâ lege, ut angulus PT*p* æqualis ſit motui apparenti ſolis à tempore quadraturæ c confecto; vel (quod eodem ferè recidit) ut angulus CT*p* ſit ad angulum CTP ut tempus revolutionis ſynodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ, ſeu $29^d.\,12^h.\,44'$, ad $27^d.\,7^h.\,43'$ (k). Capiatur igitur angulus CT*a* in eâdem ratione ad angulum rectum CTA, & ſit longitudo T*a* æqualis longitudini TA; & erit *a* Apſis ima, & c Apſis ſumma, orbis hujus c*pa*. Rationes autem ineundo, invenio quòd differentia inter curvaturam orbis c*pa* in vertice *a*, & curvaturam Circuli centro T intervallo TA deſcripti, ſit ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicatâ ratione angulî CTP ad angulum CT*p*; & quòd curvatura Ellipſeos in A ſit ad curvaturam Circuli illius, in duplicatâ ratione TA ad TC; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC deſcripti, ut TC ad TA; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipſeos in C, in duplicatâ ratione TA ad TC; & differentia inter curvaturam Ellipſeos



Sive ut $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N \times N^2}$ ad $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N \times N^2}$.

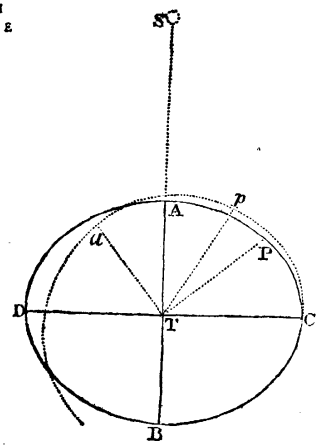
Verùm cùm perexigua ſit duarum AT, CT differentia, rectæ N, quæ duarum AT, CT arithmeticâ ratione media eſt, huic ea, quæ geometricâ ratione earundem eſt media, tantùm non æqualis erit. Unde in hoc negotio ponere licet $N^2 = AT \times CT$. Ita verò ratio vis, quæ Lunam in coitu vel plenam in terram urget, ad vim quæ dimidiatam urget, erit ut $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{N \times CT}$ ad $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{N \times AT}$; prorſus ut Newtonus conſtituit. *(Le Sœur & Jacquier ad locum.)*

* Veriùs ni fallor 2151974.

† Veriùs ni fallor 2191365.

(k) Lib. I. Prop. XLIII.

De Mundi Systemate



in vertice c & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *cpa* in vertice c & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicatâ ratione anguli CT*p* ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactûs ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura figuræ c*pa* in *a* ad ipſius curvaturam in c, ut AT *cub.* + $\frac{16824}{100000}$ CT*q* × AT ad CT *cub.* + $\frac{16824}{100000}$ AT*q* × CT (l). Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CT*p* applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum 27d. 7h. 43′, & 29d. 12h. 44′,

(l) Litera *t* menſem quem vocant periodicum, litera *s* ſynodicum ſignificet. Erit igitur angulus CTP ad angulum CT*p* ut *t* ad *s*. Quare vis centralis in orbe mobili in loco *a* erit ad vim centralem in Ellipſi CAD in loco A, ut $\frac{s^2 \cdot TA}{CT^3} + \frac{\frac{TA^2}{TC} s^2 - \frac{TA^2}{TC} t^2}{TA^3}$ ad $\frac{t^2 \times TA}{TC^3}$. Id enim efficietur ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. ſi in formulâ generali illius Corollarii t^2 ſcribatur pro FF, TA pro A, TC^3 pro T cub, $\frac{TA^2}{TC}$ pro R, & s^2 pro GG. Ducendo omnia in $CT^2 \times TA$, efficietur vis centralis in ellipſi mobili in loco *a* ad vim centralem in ellipſi CAD in loco A, ut $t^2 \times TA^2 + CT^2 s^2 - CT^2 t^2$ ad $t^2 \times TA^2$.

Jam verò velocitas in Ellipſi mobili in loco *a* ad velocitatem in Ellipſi ſtabili CAD in loco A ut *t* ad *s*. Velocitatum igitur in locis illis duplicata ratio ea erit, quæ s^2 ad t^2, ſive $s^2 \times TA^2$ ad $t^2 \times TA^2$. Ratio igitur quæ componitur è ratione virium cum contrariâ ejus quæ duplicata eſt velocitatum, ea erit quæ quantitatis $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad quantitatem $s^2 \times TA^2$. Atque hæc erit ratio curvaturæ orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam ellipſeos CAD in A. Radius circuli, qui Ellipſin in A oſculatur, ſemiaxium TA, TC proportione tertius eſt. Quapropter radius ejus circuli ad ſemiaxem TA rationem habet quam TC^2 ad TA^2. Ac proinde Curvatura Ellipſeos in A ad curvaturam circuli cujus radius TA rationem habet, quam TA^2 ad TC^2; ſive eam quam $s^2 \times TA^2$, $s^2 \times TC^2$.

Jam cùm curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos CAD in loco A rationem habeat quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times TA^2$; cùm præterea curvatura Ellipſeos in loco A ad curvaturam Circuli, cujus radius TA, rationem habeat quam $s^2 \times TA^2$ ad $s^2 \times TC^2$: ex æquo Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam circuli, cujus radius TA, rationem habebit quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times CT^2$. Curvatura autem circuli cujus radius TA ad curvaturam circuli cujus radius TC rationem habet quam TC ad TA; ſive eam, quam TC × TA ad TA^2. Et hujus circuli curvatura ad curvaturam Ellipſeos in loco c rationem habet quam TA^2 ad TC^2. Nempe cùm radius circuli, qui Ellipſin in c oſculetur, ſemiaxium TC, TA proportione ſit tertius. Ex æquo Curvatura circuli cujus radius TA ad curvaturam Ellipſeos in loco c rationem habet, quam TC × TA ad TC^2; ſive eam, quam TA ad TC. Cùm igitur Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Circuli, cujus radius TA, rationem habeat quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} CT^2$ ad $s^2 \times TC^2$, curvatura autem circuli

44′, applicatam ad quadratum temporis 27d. 7h. 43′. Liber Tertius.

Igitur cùm *a* deſignet ſyzygiam Lunæ, & c ipſius quadraturam; proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis Lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſuprà invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad AT × CT applicati, fiunt 2062,79 CT*qq* − 2151969 N × CT *cub.* + 368676 N × AT × CT*q* + 36342 AT*q* × CT*q* − 362047 N × AT*q* × CT + 219137 I N × AT *cub.* + 4051,4 AT*qq* = 0. Hîc pro terminorum AT & CT ſemiſummâ N ſcribo I, & pro eorundem ſemidifferentiâ ponendo *x*, fit CT = I + *x*, & AT = I − *x*: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur *x* æqualis 0,00719: & inde ſemidiameter CT fit 1,00719; & ſemidiameter AT, 0,99281: qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quàm proximè (m). Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terrâ in ſyzygiis ad ipſius

circuli cujus radius TA ad curvaturam Ellipſeos in loco c eam, quam TA ad TC; Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos CAD in loco c rationem habebit, quæ componitur è rationibus quantitatis $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times TC^2$, rectæque TA ad rectam TC; ſive eam quam quantitas $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $s^2 \times TC^2$.

Rurſum vis centralis, quâ corpus in Ellipſi CAD retinendum eſſet, in loco c, ad vim centralem in eodem loco in orbe c*pa* rationem habet quam $t^2 \times CT^2$ ad $t^2 \times CT^2 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2$. Id quod efficitur ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. ſi in Corollarii illius formulâ generali, pro FF, GG, R, & T cub. ſcribantur, ſicut antè, t^2, s^2, $\frac{TA^2}{TC}$, TC^2, & TC pro A.

Velocitas autem corporis, per Ellipſin illam CAD delati, ad velocitatem corporis orbem c*pa* ſcribentis, in loco communi c, rationem habet quam *t* ad *s*. Quare duplicata velocitatum ratio ea erit quam t^2 habet ad s^2, vel $t^2 \times CT^2$ ad $s^2 \times CT^2$. Quæ igitur ex virium ratione cum duplicatæ velocitatum contrariâ compoſita eſt ratio, ea erit quam $s^2 \times CT^2$ habet ad $t^2 \times CT^2 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2$, ſive $s^2 \times CT^3$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$. Atque hæc eſt ratio curvaturæ Ellipſeos in loco c ad curvaturam orbitæ c*pa* in eodem loco.

Jam verò cùm curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos in c rationem habeat quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $s^2 \times TC^2$; cùm præterea curvatura Ellipſeos in loco c ad curvaturam orbitæ c*pa* in eodem loco rationem habeat quam $s^2 \times CT^2$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$; ex æquo, Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam ejuſdem in loco c rationem habebit quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$; ſive eam, quam $TA^2 + \frac{s^2 - t^2}{t^2} CT^2 . TA$ ad $CT^3 + \frac{s^2 - t^2}{t^2} TA^2 . CT$.

Sed $s^2 : t^2 = 100000 : 116823{,}4$.

Quare $\frac{s^2 - t^2}{t^2} = \frac{16824}{100000}$.

Quare curvatura figuræ c*pa* in loco *a* erit ad ejuſdem curvaturam in c, ut $TA^2 + \frac{16824}{100000} CT^2 . TA$ ad $CT^3 + \frac{16824}{100000} TA^2 . CT$.

(m) Majoris evidentiæ gratiâ calculos ſubduco.

De Mundi Systemate

ipſius diſtantiam in quadraturis (ſepoſitâ ſcilicet eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

PROP. XXIX. PROB. X.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ Ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna, radio ad Terram ducto, deſcribit. Si Luna P in ellipſi DBCA [*fig. p.* 66] circa Terram in centro ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio TP ad terram ducto deſcriberet aream CTP tempori proportionalem; eſſet

Cùm ſit $2151974AT \times CT \times N - 24081AT^3$ ad $2191365AT \times CT \times N + 12261CT^3$ ut $AT^3 + \frac{s^2-t^2}{t^2} CT^2 \times AT$ ad $CT^3 + \frac{s^2-t^2}{t^2} AT^2 \times CT$; ponatur $2151974 = a$. $2191365 = b$. $24081 = c$. $12261 = d$. $s^2 - t^2 = e$.

Ita erit $a.AT \times CT \times N - c.AT^3 : b.AT \times CT \times N + d.CT^3 = AT^3 + \frac{e}{t^2} CT^2 \times AT : CT^3 + \frac{e}{t^2} AT^2 \times CT$.

Et permutando $a \times CT \times N - c.AT^2 : AT^2 + \frac{e}{t^2} CT^2 = b \times AT \times N + d.CT^2 : CT^2 + \frac{e}{t^2} AT^2$.

Ponatur $N = 1$. $CT = 1 + x$. $AT = 1 - x$.

Unde $a \times \overline{1+x-c \times \overline{1-x}}^2 : \frac{t^2.\overline{1-x}^2 + e.\overline{1+x}^2}{t^2} = b \times 1 - x + d \times \overline{1+x}^2 : \frac{t^2.\overline{1+x}^2 + e.\overline{1-x}^2}{t^2}$.

Et permutando $a \times \overline{1+x-c \times \overline{1-x}}^2 : b \times 1 - x + d \times \overline{1+x}^2 = t^2.\overline{1-x}^2 + e.1 + x^2 : t^2.\overline{1+x}^2 + e.\overline{1-x}^2$.

Hoc eſt cùm x perexigua ſit, ut quadratum ejus negligi poſſit, $a + ax - c + 2cx : b - bx + d + 2dx = s^2 - 2t^2x + e + 2ex : t^2 + 2t^2x + e - 2ex$.

Id eſt $\overline{a-c} + \overline{a+2c}|x : \overline{b+d} + \overline{2d-b}.x = s^2 + \overline{2e-2t^2}\,x : s^2 + \overline{2t^2-2e}.x$.

Ponatur $a - c = \alpha$. $a + 2c = \beta$. $b + d = \gamma$. $2d - b = \delta$. $2e - 2t^2 = -\epsilon$. $2t^2 - 2e = \zeta$.

Ita erit $\alpha + \overline{\beta-\alpha}x : \gamma + \delta x = s^2 - \epsilon x : s^2 + \zeta x$.

Quare $\overline{\alpha + \overline{\beta-\alpha}x} \times s^2 + \zeta x = \overline{\gamma + \delta x} \times s^2 - \epsilon x$.

Id eſt $s^2\alpha + s^2\overline{\beta-\alpha}x + \alpha\zeta x = s^2\gamma + s^2\delta x - \gamma\epsilon x$.

Quare $s^2.\overline{\beta-\alpha-\delta}x + \overline{\alpha+\gamma}.\zeta x = s^2 \times \gamma - \alpha$.

Hinc $x = \frac{\overline{\gamma-\alpha} \times s^2}{\overline{\alpha+\gamma} \times \zeta + \overline{\beta-\alpha-\delta} \times s^2} = \frac{\overline{b+c+d-a} \times s^2}{a+b+d-c \times \overline{4t^2-2s^2} + a + 2c - 2d + b|s^2}$.

Sive $x = \frac{\overline{b+c+d-a} \times s^2}{\overline{4t^2-s^2}|a+b| + c - d \times 4e}$.

Jam vero $b + c + d - a = 75733$. $a + b = 4343339$. $4t^2 - s^2 = 183176$. Quare $\overline{a+b} \times \overline{4t^2-s^2} = 1229290000000$. $c - d = 11820$. Et $4e = 4 \times 16824$. Quare $c - d \times 4e = 795438720$. Quare $\overline{4t^2-s^2}|a+b| + c - d$. $4e = 1230724438720$.

Quare $x = \frac{75733 \times 116824}{1230724438720} = \frac{75733}{10534859} = 0{,}007188+$.

Erit igitur $CT = 1{,}00719$.
$AT = 0{,}99281$.

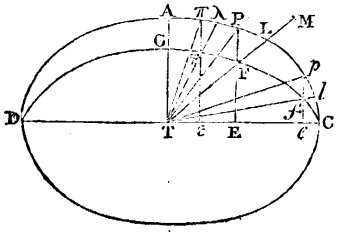
Sed

Liber Tertius.

eſſet autem ellipſeos ſemidiameter maxima CT ad ſemidiametrum minimam TA ut 70 ad 69: foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motûs medii, à quadraturâ C computati, ut ellipſeos ſemidiameter TA ad ejuſdem ſemidiametrum TC, ſeu 69 ad 70. Debet autem deſcriptio areæ CTP, in progreſſu Lunæ à quadraturâ ad ſyzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygiâ Lunæ ſit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti, in loco quovis intermedio P, ſupra momentum in quadraturâ, ſit ut quadratum ſinûs anguli CTP (n). Id quod ſatis accuratè fiet, ſi tangens anguli CTP diminuatur in ſubduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69 (o). Quo pacto tangens

Sed 1,00719 : 0,99281 = 7,05033 : 6,94967 = $7\frac{1}{20}$: $6\frac{19}{20}$ propemodum.

(n) Prop. XXVI. hujus Libri.



(o) Ellipsis CAD, cujus ſemiaxes, TC, TA, inter ſe rationem habeant quam numerus 70 ad numerum 69, orbem Lunæ referat; eâ utique figurâ præditum, quam ex circulari vis Solis efficeret. Hujus centrum, T, terra teneat. Axis tranſverſi vertex, C, Lunæ dimidiatæ locus erit; ſecundi, A, plenæ vel novæ. Capiatur TG, ad quam TA rationem habeat ejus quam 11073 ad 10973 ſubduplicatam. Centro T, ſemiaxibus TC, TG, ſcribatur Ellipſis alia CGD. Ellipſeos CAD capiatur ſector CTP, ad quem area integra ellipſeos rationem habeat, quam tempus converſionis Lunæ in orbe elliptico CAD ad minus quodvis tempus *t*. A puncto P in axem tranſverſum DC ad perpendiculum deducatur PE, quæ Ellipſi CGD in F occurrat. Junctæ TF orbitæ Lunari in L occurrat. Erit punctum L verus Lunæ locus, quo tempore punctum P appelleret, ſi vis Solis, orbitâ circulari in ellipticam CAD mutatâ, æquabilem arearum in hâc orbitâ circa centrum T confectionem nihil perturbaret: ſaltem à loco vero illud L perpaululum aberraverit. Id quod ita perſpicuum erit, ſi oſtenderimus fluxionem areæ CTL in puncto C ad fluxionem ejus in puncto A rationem habere quam 10973 ad 11073, & in alio quovis loco fluxionem areæ CTL fluxionem ejus minimam, in loco C, tali quantitate exſuperare, quæ ad illam, quâ fluxio maxima in A eandem minimam in C exſuperat, rationem habeat ejus quam ſinus anguli CTL ad radium duplicatam: quin præterea aream CTL, in ipſo loco C naſcentem, ejus primùm quidem æqualem eſſe, quam primam ibi loci Luna vero ſuo motu ſimul ſcribat.

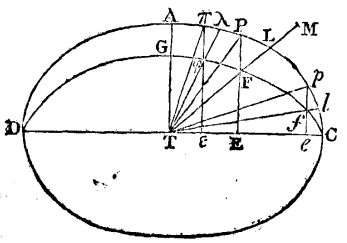
Transferatur punctum P, primum quidem in locum quendam *p* puncti C vicinum, tum in locum *π*, tali diſtantiâ à puncto A diſſitum, ut ſectores CT*p*, AT*π* inter ſe æquales ſint. Et à punctis *p*, *π*, in axem tranſverſum DC demiſſis ad perpendicula *pϵ*, *πϵ*, quæ ellipſi interiori CGD in punctis *f*, *φ* occurrant, jungatur TF, T*φ*ϕ quæ productæ orbitæ Lunari in punctis *l*, λ occurrant. Erunt *l*, λ loca puncti L, puncto P in locum *p* vel *π* tranſlato.

Jam verò evaneſcentibus angulis CT*l*, ATλ, ratio ultima evaneſcentis areæ CT*l* ad evaneſcentem CT*p* ea erit, quam *ef* habet ad *ep*, ſive eam quam TG ad TA, vel TG^2 ad TG × TA. Sed evaneſcentis AT*π*, vel CT*p* ad evaneſcentem ATλ ratio ultima, ea arcûs quoque A*π* ad arcum Aλ ultima erit: ſive ultima rectæ A*π* − *πφ* ad AT, ſive eadem quæ eſt TG ad TA, vel TG × TA ad TA^2. Cùm igitur ſit area CT*l* ad aream CT*p* ultimò ut TG^2 ad TG × TA; et area CT*p* ad aream ATλ ultimò ut TG × TA ad TA^2: ex æquo, ratio ultima evaneſcentis CT*l* ad evaneſcentem ATλ erit

De Mundi Systemate

gens anguli CTP jam erit ad tangentem motûs medii ut 68,6877 ad 70, & angulus CTP in octantibus, ubi motus medius est $45^{gr.}$ invenietur $44^{gr.}\ 27'.\ 28''$. (p) qui subductus de angulo motûs medii $45^{gr.}$ relinquit Variationem maximam $32'.\ 32''$. (q) Hæc ita se haberent si Luna, pergendo à quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum CTA graduum tantùm nonaginta. Verùm ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur; Luna, priusquam solem assequitur, describit angulum CT*a* angulo recto majorem, in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^{d.}\ 12^{h.}.\ 44'.$ ad $27^{d.}.\ 7^{h.}.\ 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, & Variatio maxima, quæ secus esset $32'.\ 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'.\ 10''$. (r).

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ Solis à Terrâ, neglectis



erit quam TG^2 habet ad TA^2, sive ea quam 10973 ad 11073. Quod primò demonstrandum erat.

Rursum in loco quovis P, locorum c, A intermedio, erit $\dot{CTF} : \dot{CTL} = TF^2 : TL^2$. Id est, si capiatur TM, duarum TF, TL proportione tertia, erit $\dot{CTF} : \dot{CTL} = TF : TM$. Invertendo et dividendo $\dot{CTL} - \dot{CTF} : \dot{CTF} = MF : TF$. Sed cùm illæ TF, TL tantùm non æquales sint, erunt FL, LM tantùm non æquales, & MF duplâ LF vix major. Ponatur igitur $MF = 2IF$. Erit igitur $\dot{CTL} - \dot{CTF} : \dot{CTF} = 2LF : TF$.

Jam verò, cùm è naturâ Ellipseon quarum axis est communis, sit $\dot{CTP}$ ad $\dot{CTF}$ ut PE ad FE, cùm præterea rectarum PE, FE sit ratio data, idcirco fluxionum $\dot{CTP}$, $\dot{CTF}$ ratio data est. Sed fluxio $\dot{CTP}$ data, propter fluxum areæ CTP æquabilem. Quare fluxio $\dot{CTF}$ data. Id est areæ CTF fluxus est æquabilis. Quare $\dot{CTF} = \dot{CTf}$. Sed evanescente angulo CT*l*, areæ CTf, CT*l*, necnon earum fluxiones, in ipso puncto c, fiunt inter se æquales. Quare si fluxio areæ CT*l*, qualis est in ipso puncto c, significetur hâc notâ, $\dot{c}$; erit in omni situ puncti L, $\dot{CTL} - \dot{CTF} = \dot{CTL} - \dot{c}$. Et cùm ostensum sit illam $\dot{CTL} - \dot{CTF}$ ad $\dot{CTF}$ rationem habere quam 2LF ad TF, erit utique $\dot{CTL} - \dot{c} : \dot{CTF} = 2LF$ ad TF. Ponatur recta $N = \frac{CT + TG}{2}$. Et fit $TF = N \pm x$. Erit igitur $\dot{CTL} - \dot{c} : \dot{CTF} = 2LF : N \pm x$. Sed propter perexiguam duarum CT, TG differentiam, fieri nequit quin *x* perexigua fit. Ratio igitur rectæ 2LF ad $N \pm x$ vix alia erit, ac ea quam eadem 2LF ad datum N habet. Ratio igitur illius $\dot{CTL} - \dot{c}$ ad datam $\dot{CTF}$ vix alia erit, ac ea quam 2LF habet ad datam N. Quare si per datam N exponatur fluxio data $\dot{CTF}$, illa $\dot{CTL} - \dot{c}$ per rectam quandam mutabilem exponenda erit, quæ, in omni situ puncti L, rectæ mutabili 2LF tantùm non æqualis erit. (Geometr. Flux. Def. v.) Quare ponere licet $\dot{CTL} - \dot{c} = 2LF$. Puncto igitur L in A translato,

neglectis differentiis, quæ à curvaturâ orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quàm in gibbosam & plenam, oriri possint. In aliis distantiis Solis à Terrâ, Variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis synodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione distantiæ Solis à Terrâ inversè. Ideoque in apogæo solis, Variatio maxima est $33'.\ 14''$, & in ejus perigæo $37'.\ 11''$, si modo eccentricitas solis sit ad orbis magni semidiametrum transversam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000 (s).

Liber Tertius.

Hactenus Variationem investigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique Luna in octantibus suis semper est in mediocri suâ distantiâ à Terrâ. Si Luna propter eccentricitatem suam, magis vel minus distat à Terrâ quàm si locaretur in hoc orbe, Variatio paulo major esse potest vel paulo minor quàm pro regulâ hîc allatâ : sed

translato, si fluxio areæ ATL in ipso puncto A significetur hâc notâ $\dot{a}$, erit $\dot{a} - \dot{c} = 2AG$. Quare $\dot{CTL} - \dot{c} : \dot{a} - \dot{c} = LF : AG$.

Jam verò ratio LF ad AG composita est è rationibus rectæ LF ad PF rectæque PF ad AG. Sed, propter exiguam semiaxium ellipseos CAD differentiam, angulus FLP tantùm non rectus erit. Quare LF : PF = EF : FT propemodum. Et è naturâ Ellipseos, PF : AG = FE : TG. Ratio igitur rectæ LF ad AG componitur è rationibus rectæ EF ad FT rectæque EF ad TG. Ea igitur erit, quam quadratum ex EF habet ad rectangulum FT × TG. Sed, propter TG, TF tantùm non æquales, erit rectangulum TF × TG quadrato ex TF tantùm non æquale. Haud multum igitur aberit quin LF fit ad AG ut EF^2 ad TF^2. Quare et $\dot{CTL} - \dot{c}$ ad $\dot{a} - \dot{c}$ rationem habet ab eâ quam EF^2 ad TF^2, sive ab eâ quam sinus anguli CTL ad radium habet duplicatâ, haud multum abhorrentem.

Ex hisce verò constat fluxum areæ CTL legibus eisdem, vel parum saltem diversis, attemperari, atque illius quam Luna, vi Solis obnoxia, in orbe suo CAD circum centrum T scribit. Sed et aream nascentem CTL, in ipso loco c, ejus primum quidem æqualem esse, quam Luna, ipso motûs initio, primam simul scripserit, ex eo patet quod suprà probavimus; aream utique nascentem CT*l* ad aream motûs medii CT*p* simul nascentem rationem habere quam TG ad TA; id est eam, quam numerus 10973 and numerum 11023; sive eam, quam velocitas Lunæ vera in orbe CAD in loco c ad mediam cujus in eodem orbe velocitatem. Sed quæ veræ velocitatis Lunæ ad velocitatem ejus mediam ratio, eadem et areæ, quam vero motu scribat, ad aream motûs medii, nascentis ad nascentem, prima erit. Area igitur CTL areæ illius quam Luna, vi solis obnoxia, in orbe suo CAD simul scripserit, nascens nascentis, in ipso loco c primùm quidem æqualis erit. Areæ autem legibus eisdem generatæ, si nascendi initio æquales fuerint, manebunt semper inter se æquales, & punctum L, modo quo præscripsimus definitum, verum Lunæ locum in orbe suo CAD satis exquisitè semper referet. Q. E. D.

(p) $44° - 27' - 30,7$.

(q) $32' - 29,3$.

(r) Verius $35' - 7$.

(s) Motus horarius medius Lunæ à sole, exsistente Terrâ in Aphelio, vel in Perihelio, vel in medio orbis sui loco, erit $36' - 05$, vel $35' - 55$, vel $36' - 00$, prout motus medios ab Halleio in Tabulis suis æstimari video. Hinc spatia mensis quem vocant synodici, quando Terra Aphelium, Perihelium, vel medium orbis sui locum teneat, erunt ut $35' - 55$, $36' - 05$, $36' - 0$. Sive ut numeri 2155, 2165, 2160. Sumptis igitur telluris à Sole distantiis, quales à Newtono constitutæ sunt, positâque Variatione maximâ, in mediâ telluris à Sole distantiâ, $35' - 7$, invenio Variationem maximam in apogæo Solis $33' - 27$; in ejus perigæo $36' - 51$.

excessum

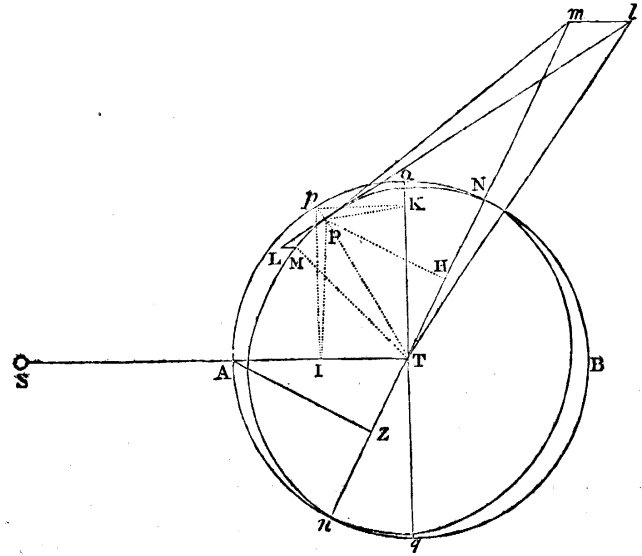
De Mundi Systemate

exceſſum vel defectum ab Aſtronomis per phænomena determinandum relinquo.

PROP. XXX. PROB. XI.

Invenire motum horarium Nodorum lunæ in orbe circulari.

Deſignet S ſolem, T terram, P lunam, NP*n* orbem Lunæ, N*pn* veſtigium orbis in plano Eclipticæ; N, *n* nodos, *n*TN*m* lineam nodorum infinitè productam; PI, PK perpendicula demiſſa in lineas ST, Q*q*; P*p* perpendiculum demiſſum in planum Eclipticæ; A, B ſyzygias Lunæ in plano Eclipticæ; AZ perpendiculum in lineam Nodorum N*n*; Q, *q* quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & *p*K perpendiculum in lineam Q*q* quadraturis interjacentem. Vis



(t) —& ML *lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ* 3IT, *eodem tempore deſcribere poſſet.*] Vitioſa ſunt hæc. Reponenda, quæ in Editione Primâ & Secundâ Newtonus dederat.—& ML *lineolam quam Luna, impellente vi præfatâ* 3IT, *eodem tempore deſcribere paſſet.* EMERSONUS. Aſſentior Emerſono.

(u) —*quâ dimidium lineolæ* LM.] Editio Prima & Secunda, *quâ lineola* LM. Rectè. Inducenda ſunt etiam quæ uncis inclusimus, quæ in editione Primâ & Secundâ aberant. Quòd verò vis ſolaris efficaciam eo modo conſiderari jubet, quaſi *tota ſimul & ſemel in loco* P *impreſſa eſſet*, id non

Liber Tertius.

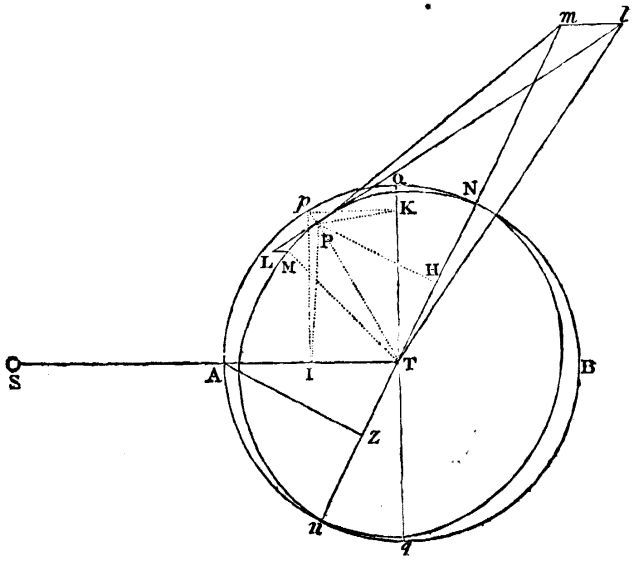
Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex eſt; altera lineæ LM in ſchemate Propoſitionis illius, altera lineæ MT proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, poſteriore in Solem ſecundum lineam rectæ ST, à Terrâ ad Solem ductæ, parallelam trahitur. Vis prior LM agit ſecundum planum orbis lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT, quâ planum orbis lunaris perturbatur, eadem eſt cum vi 3PK, vel 3IT. Et hæc vis (per Prop. XXV.) eſt ad vim, quâ Luna in circulo circa Terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut 3IT ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterùm in hoc calculo, & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes à Lunâ ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ, quæ à Terrâ ad Solem ducitur; propterea quòd inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Deſignet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quàm minimo deſcribit; & ML lineolam, cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ 3IT, eodem tempore deſcribere poſſet (t). Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi ſecent planum Eclipticæ; inque T*m* demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela eſt plano Eclipticæ, ideoque cum rectâ *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non poteſt, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi LMP*ml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea ſimilia erunt triangula LMP, *lm*P. Jam cùm MP*m* ſit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum *m* in lineam N*n* per orbis illius nodos, N, *n*, ductam. Et quoniam vis, quâ dimidium lineolæ LM (u) generatur, ſi tota ſimul &

non aliter accipio, ac ſi dixiſſet, cogitari oportere arcum PM infinitè minui, & velocitatem motûs Nodi, in loco P, ex illâ ratione æſtimandam, quàm angulus naſcens MTL ad alium quendam, motu æquabili naſcentem, primam habeat. Quod ipſum ſi dixiſſet, clariùs multo, me judice, locutus fuiſſet. Nempe recta LM ſenſim generata eſt, non ictu ſubito, ſed lentâ quâdam et perpetuâ virium uſque renaſcentium efficaciâ; quæ Lunam, totum illud tempus quod arcui PM conficiendo ea impenderit, ſecundum rectas cum rectâ TS parallelas incitârunt. Amplior fiat arcus PM: plures fuerint vires, quæ ad rectam LM generandam, ſuo quæque ordine & loco, operas contulerint. Contrahatur arcus PM; fuerint illæ pauciores: & quo magis ille uſque contrahatur, eo illæ uſque pauciores. Unde ſi arcus ille evaneſcat, & coeuntibus punctis PM in nihilum tandem abeat,

De Mundi Systemate

& ſemel in loco P impreſſa eſſet, [generaret lineam illam totam; &] efficeret, ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet LP, atque ideo transferret lunam de plano MP*m*T in planum LP*l*T;



motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo *m*T*l*. Eſt autem *ml* ad *m*P ut ML ad MP; ideoque cùm MP, ob datum tempus, data ſit, eſt *ml* ut rectangulum ML×*m*P, id eſt, ut rectangulum IT×*m*P. Et angulus *m*T*l*, ſi modò angulus T*ml* rectus

abeat, vires omnes rectæ LM genitrices in ſimplicem, ſi ita dicam, ictum vis illius 3IT in loco P ultimò abierint; id eſt in vim, quæ tota ſimul & ſemel in loco P impreſſa fuerit. Qui igitur eo ſermone uſus eſt, "*vim quâ linea* LM *generatur totam ſimul & ſemel in loco* P *imprimi*," is ſcilicet arcum PM infinitè imminui intellexit, & vim illam ſimplicem & primam cogitavit, quæ rectæ LM naſcendi quaſi initia ſuppeditat.

(x) Nempe in hanc ſententiam Newtonus diſputat. Vis terreſtris, quæ, extinctâ vi ſolari, Lunam in orbe circulari retineret, ea, quo tempore Luna per arcum PM ferretur, id utique efficeret, ut Luna curſum rectum, quem, è loco P egreſſa, vi inſitâ tenuiſſet, ſi vis omnis centralis ibi loci extincta eſſet, eum in M delata cum alio mutaret, qui ad priorem illum angulo ipſius MTP æquali inclinatus eſſet. Nam curſus rectus, qui Lunæ, per orbem circularem in locum P vel M delatæ, deinceps ob vim inſitam tenendus eſſet, ſi in utrovis loco vis centralis ſubito deficeret, is quidem orbem ipſum ibi loci contingeret. Quæ verò circulum eundem, in locis diverſis, lineæ rectæ contingunt, eæ angulum inclinationis mutuæ ejus æqualem faciunt, qui, ad centrum circuli conſtitutus, arcum ipſum contactûs punctis interceptum, baſin habet. Rectæ igitur quæ orbem Lunæ circularem, NP*q*, in punctis P, M contingunt, mutuæ inclinationis angulum ipſius MTP æqualem habent. Et talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis illa quâ in orbe NP*q* retinenda eſſet, tempore, quo per arcum PM ferretur, ceſſante vi ſolari, ſola efficeret.

rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{TP}$, id eſt (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideoque ob datam TP, ut IT×PH. Quòd ſi angulus T*ml*, ſeu STN, obliquus ſit, erit angulus *m*T*l* adhuc minor, in ratione ſinûs anguli STN ad radium, ſeu AZ ad AT. Eſt igitur velocitas nodorum ut IT×PH×AZ, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN. Liber Tertius.

Si anguli illi, nodis in quadraturis, & Lunâ in ſyzygiâ exiſtentibus, recti ſint, lineola *ml* abibit in infinitum, & angulus *m*T*l* evadet angulo *m*P*l* æqualis. Hoc autem in caſu, angulus *m*P*l* eſt ad angulum PTM, quem Luna eodem tempore motu ſuo apparente circa Terram deſcribit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus *m*P*l* æqualis eſt angulo LPM; id eſt, angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem ſola vis præfata ſolaris 3IT, ſi tum ceſſaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare poſſet; & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis ſolaris 3IT, eodem tempore generaret (x). Et hæ vires, ut ſuprà diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cùm motus medius horarius Lunæ reſpectu fixarum ſit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc caſu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium TPI, PTN, & STN (ſeu diſtantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole) ad cubum radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in

ret. Jam verò vis ſolaris 3IT, quæ Lunam eo ipſo temporis puncto, quo ſimplici vi terreſtri incitata, locum M appuliſſet, apud punctum L conſtituit; hæc inquam vis ſolaris, eo temporis ſpatio quo Luna arcum PM abſolverit, id utique effecerit, ut Luna viam circularem PM cum aliâ viâ curvâ, per puncta P, L ducendâ, mutaverit; et impetum, quem in loco P habuit progrediendi ſecundum rectam quæ arcum PM in P contingeret, cum alio mutaverit, progrediendi ſecundum rectam quæ aliam illam viam curvam in L contingat. Et qualiſcunque ſit rectarum inclinatio mutua, quæ Curvas PM, PL in punctis P, L contingant, talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis ſolaris 3IT, tempore quo motu medio Lunæ conficitur arcus PM, ceſſante vi terreſtri, ſola generaret. At verò arcubus PM, PL infinitè imminutis, eorum chordæ PM, PL cum rectis contingentibus ultimò congruunt, & angulum inclinationis mutuæ eum ultimò quem tangentes habent. Angulorum igitur naſcentium PTM, LPM ea prima erit inter ipſos ratio, quæ Lunæ à recto tramite deflexionum prima, quas vis terreſtris & vis Solaris 3IT eodem tempore ſingulatim generaverint; id eſt, eadem quæ mutationum, quas vires illæ in vi inſitâ Lunari ſimul primas effecerint. Hæc autem haud alia erit præter virium rationem. Erit igitur motus horarius nodorum, in eo qui poſitus eſt ſitu Nodorum & Lunæ, ad motum horarium Lunæ medium à ſtellis fixis ſicut 1 ad 59,575.

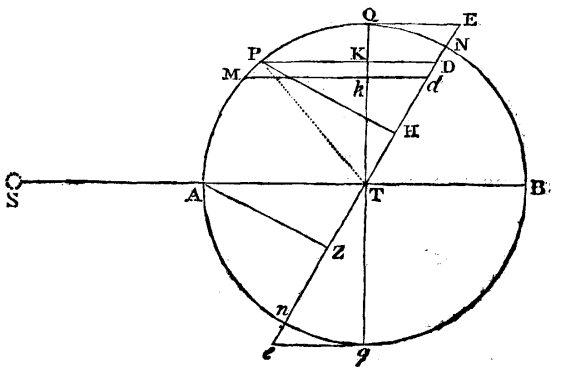
Qui angulum deflexionis Lunæ à recto tramite aliter intelligunt quàm nos interpretati ſumus, decipiuntur.

 negativum,

De Mundi Systemate

negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut nodi regrediantur, quoties Luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſûs ſupra progreſſum ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi à dati arcûs quàm minimi PM terminis, P & M, ad lineam quadraturas jungentem, Q*q*, demittantur perpendicula PK, M*k*, eademque producantur donec ſecent lineam nodorum N*n* in D & *d*; erit motus horarius nodorum ut area MPD*d* &



quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres ſinus. Nempe PK, ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ; PH, ſinus diſtantiæ Lunæ à nodo; & AZ, ſinus diſtantiæ nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum PK × PH × AZ. Eſt autem PT ad PK ut PM ad K*k*, ideoque, ob datas PT & PM, eſt K*k* ipſi PK proportionalis. Eſt & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo PD × AZ proportionalis; & conjunctis rationibus, PK × PH eſt ut contentum K*k* × PD × AZ, & PK × PH × AZ ut K*k* × PD × AZ *qu.* id eſt, ut area PD*d*M & AZ *qu.* conjunctim. Q. E. D.

Corol. 2. In datâ quâvis Nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motûs horarii in ſyzygiis Lunæ, ideoque eſt ad 16″. 35‴. 16ᴵᵛ. 36ᵛ. ut quadratum ſinûs diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii, ſive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam ſi Luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum QA*q*, ſumma

ma omnium arearum PD*d*M, quo tempore Luna pergit à Q ad M, erit area QM*d*E, quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum *n*, ſumma illa erit area tota EQA*n*, quam linea PD deſcribit; dein Lunâ pergente ab *n* ad *q*, linea PD cadet extra circulum, & aream *nqe*, ad circuli tangentem *qe* terminatam, deſcribet; quæ, quoniam nodi priùs regrediebantur, jam vèrò progrediuntur, ſubduci debet de areâ priore, & cùm æqualis ſit areæ QEN, relinquet ſemicirculum NQA*n*. Igitur ſumma omnium arearum PD*d*M, quo tempore Luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt area circuli totius. At area PD*d*M, ubi luna verſatur in ſyzygiis, eſt rectangulum ſub arcu PM & radio PT; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cùm ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quàm rectangulum priùs. Proinde Nodi, eâ cum velocitate, uniformiter continuatâ, quam habent in ſyzygiis lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent, quàm reverâ deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium à ſe inæquabili cum motu reverâ confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motûs quem habent in ſyzygiis Lunæ. Unde cùm motus horarius maximus, ſi nodi in quadraturis verſantur, ſit 33″. 10‴. 33ᴵᵛ. 12ᵛ, motus mediocris horarius in hoc caſu erit 16″. 35‴. 16ᴵᵛ. 36ᵛ. Et cùm motus horarius nodorum ſemper ſit ut AZ *qu.* & area PD*d*M conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in ſyzygiis Lunæ ut AZ *qu.* & area PD*d*M conjunctim, id eſt (ob datam aream PD*d*M in ſyzygiis deſcriptam) ut AZ *qu.* erit etiam motus mediocris ut AZ *qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas verſantur, erit ad 16″. 35‴. 16ᴵᵛ. 36ᵛ. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Q. E. D.

PROP. XXXI. PROB. XII.

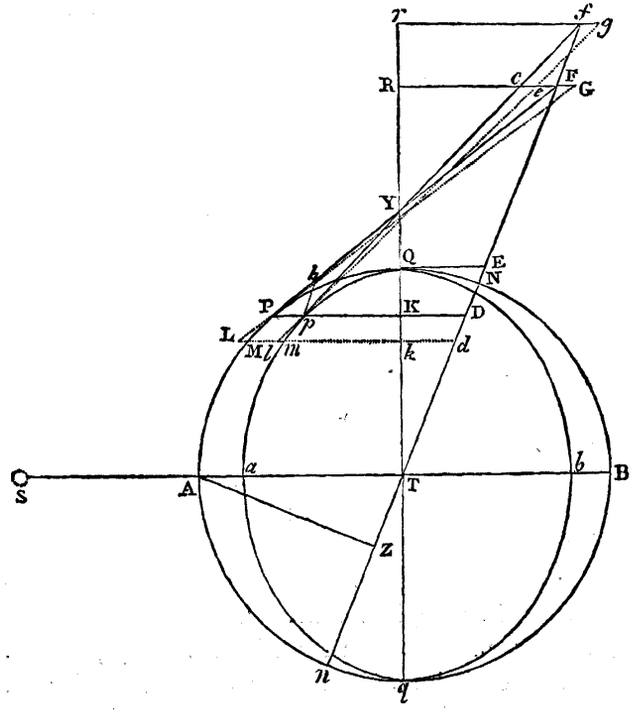
Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in orbe Elliptico.

Deſignet Q*pmaq* Ellipſin, axe majore Q*q*, minore *ab* deſcriptam; QA*q*B, circulum circumſcriptum; T, terram in utriuſque centro

tro

De Mundi Systemate

tro communi; S, Solem; *p*, Lunam in ellipſi motam; & *pm*, arcum quem datâ temporis particulâ quàm minimâ deſcribit; N & *n*, nodos lineâ N*n* junctos; *p*K & *mk*, perpendicula in axem Q*q* de-



miſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ nodorum in D & *d*. Et ſi Luna, radio ad terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus horarius Nodi in Ellipſi ut area *PDdm* & AZ*q* conjunctim.

Nam ſi PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F; & *pf* tangat ellipſin in *p*, & producta occurrat eidem TN in *f*; conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Y; & ſi ML deſignet ſpatium, quod Luna, in Circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædictâ 3IT, ſeu 3PK, motu tranſverſo deſcribere poſſet; & *ml* deſignet ſpatium quod Luna, in Ellipſi revolvens, eodem tempore, urgente etiam vi 3IT, ſeu 3PK, deſcribere poſſet; & producantur LP & *lp*, donec occurrant plano

plano Eclipticæ in G & *g*; & jungantur FG & *fg*, quarum FG producta ſecet *pf*, *pg* & TQ in *c*, *e* & R reſpectivè, & *fg* producta ſecet TQ in *r*: quoniam vis 3IT, ſeu 3PK, in circulo eſt ad vim 3IT ſeu 3*p*K in ellipſi, ut PK ad *p*K, ſeu AT ad *a*T; erit ſpatium ML, vi priore genitum, ad ſpatium *ml*, vi poſteriore genitum, ut PK ad *p*K; id eſt, ob ſimiles figuras PYK*p* & FYR*c*, ut FR ad *c*R. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc eſt (ob parallelas L*k*, PK, GR) ut *pl* ad *pe*, id eſt (ob ſimilia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inverſè (γ) ut LM eſt ad *lm*, ſeu FR ad *c*R, ita eſt FG ad *ce*. Et propterea, ſi *fg* eſſet ad *ce* ut *f*Y ad *c*Y, id eſt, ut *fr* ad *c*R (hoc eſt, ut *fr* ad FR & FR ad *c*R conjunctim, id eſt, ut *f*T ad FT & FG ad *ce* conjunctim) quoniam ratio FG ad *ce* utrinque ablata relinquit rationes *fg* ad FG & *f*T ad FT, foret *fg* ad FG ut *f*T ad FT; atque ideo anguli, quos FG & *fg* ſubtenderent ad terram T, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM, in Ellipſi arcum *pm*, percurrit: & propterea motus nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modò *fg* eſſet ad *ce* ut *f*Y ad *c*Y; id eſt, ſi *fg* æqualis eſſet $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob ſimilia triangula *fgp*, *cep*, eſt *fg* ad *ce* ut *fp* ad *cp*; ideoque *fg* æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem *fg* reverâ ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem FG ſubtendit, hoc eſt, motus nodorum in Ellipſi ad motum nodorum in Circulo, ut hæc $\frac{ce \times fp}{cp}$, ſeu $\frac{ce \times fY}{cY}$, ad priorem *fg*, ſeu $\frac{ce \times fY}{cY}$; id eſt, ut *fp* × *c*Y ad *f*Y × *cp*, ſeu *fp* ad *f*Y & *c*Y ad *cp*; hoc eſt, ſi *ph*, ipſi TN parallela, occurrat FP in *h*, ut F*h* ad FY & FY ad FP; hoc eſt, ut F*h* ad FP, ſeu D*p* ad DP; ideoque ut area D*pmd* ad aream DPM*d*. Et propterea, cùm (per Corol. I. Prop. XXX.) area poſterior & AZ*q* conjunctim proportionalia ſint motui horario nodorum in Circulo, erunt area prior & AZ*q* conjunctim proportionalia motui horario nodorum in Ellipſi. Q. E. D.

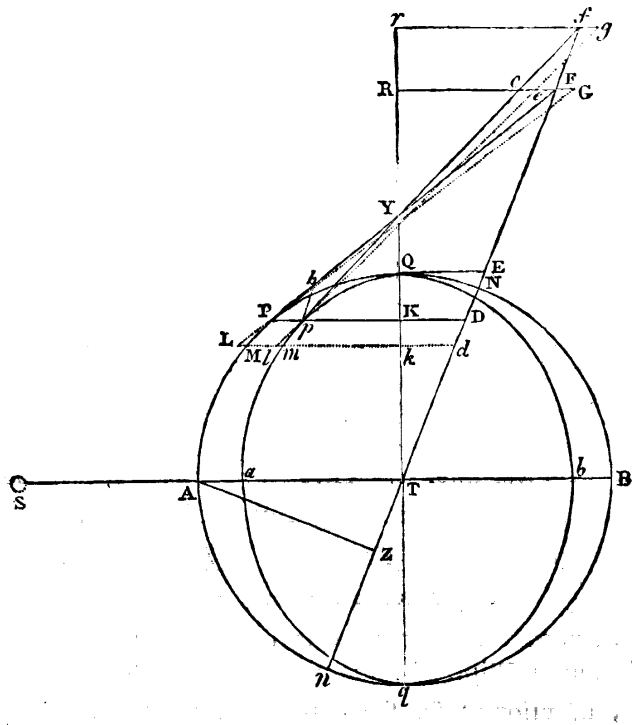
Corol. Quare cùm, in datâ Nodorum poſitione, ſumma omnium arearum *PDdm*, quo tempore Luna pergit à quadratura ad locum quemvis *m*, ſit area *mpQE*d, quæ ad ellipſeos tangentem QE ter-

(γ) — *inverſè*] permutando.

minatur;

De Mundi Systemate

minatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, ſit area Ellipſeos totius: motus mediocris nodorum in Ellipſi erit ad motum mediocrem nodorum in Circulo, ut Ellipſis ad Circulum; id eſt, ut T*a* ad TA, ſeu 69 ad 70. Et propterea,



cùm (per Corol. 2. Prop. XXX.) motus mediocris horarius nodorum in circulo ſit ad 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* ſi capiatur angulus 16″. 21‴. 3ⁱᵛ. 30ᵛ. ad angulum 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in Ellipſi ad 16″. 21‴. 3ⁱᵛ. 30ᵛ. ut AZ*q* ad AT*q*; hoc eſt, ut quadratum ſinûs diſtantiæ nodi à Sole ad quadratum radii.

Cæterùm Luna, radio ad terram ducto, aream velociùs deſcribit in ſyzygiis quàm in quadraturis; & eo nomine tempus in ſy-

(*) Prop. XXVI. hujus Libri.

(aa) Vel quod eodem redit, ut illud quo finus verſus duplæ diſtantiæ à quadraturis abeſt à radio.

zygiis

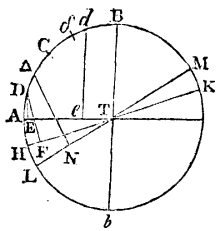
Liber Tertius.

zygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis Lunæ ad ejus momentum in ſyzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in octantibus eſt ad exceſſum in ſyzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in ſingulis orbis particulis æqualibus ſit reciprocè ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad exceſſum temporis in quadraturis, ac defectum in ſyzygiis, ab hâc cauſâ oriundum, ut 11023 ad 50 quàm proximè. Pergendo autem à quadraturis ad ſyzygias, invenio quòd exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in quadraturis, ſit ut quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à quadraturis quàm proximè (z); & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à quadraturis & quadratum ſinûs graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii (aa); & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore Luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum Luna percurrit PM (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicatâ ratione temporis. Quare motus Nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quàm proximè. Decrementum autem in locis inter octantes & ſyzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, eſt quàm proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in ſyzygiis, & differentia inter quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſem quadrati radii ad ſemiſſem quadrati radii conjunctim (bb). Unde ſi nodi in quadraturis verſentur,

(bb) Planum orbitæ Lunaris, Fixarum uſque ſphæram productum, ſuperficiem ejus ſecando circulum AB*b* efficiat, cujus punctum A locus ſit quo cernitur Luna nova, vel plena; punctum B

De Mundi Systemate

sentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, & alia duo à syzygiâ & quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam & octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in syzygiâ: uti rationem



ille quo dimidiata; arcumque AB punctum C medium dividat. Sit D locus aliquis Lunæ inter punctum C & punctum coitûs A. A puncto D in rectam TA deducatur ad perpendiculum recta DE, ut sit TE æqualis sinui arcûs BD, quo Luna à loco B abest. Si Luna, in orbe suo, ex circulari in Ellipsin per vim Solis transformato, areas circum Terram, in centro positam, æquabili motu scriberet; motus horarius Nodi orbitæ Lunaris, sive velocitas ejus sub Ecliptica, in dato quovis situ Solis, Lunæ, et Nodi, talis esset, qualem Newtonus in hâc Propositione constituit. Lunâ igitur locum D obtinente, literâ N significetur angulus, quem Nodus orbitæ Lunaris è terrâ visus, in dato quovis ejus tam ad Solem quàm ad Lunam ipsam situ, cum velocitate illâ, quam pro hâc Propositione haberet, dato quovis tempore sub Ecliptica conficeret. Sit $N-y$ angulus ille minor, quem eodem tempore cum minore illâ velocitate conficeret, quam, in eodem ipsius ad Lunam et ad Solem positu, Lunâ locum D obtinente, reverâ habet, propter arearum utique circum centrum confectionem in orbe Lunari Elliptico reverâ inæquabilem. Literâ A significetur angulus, quem nodus, Lunâ in locum A translatâ, eodem tempore conficeret, cum velocitate illâ quam pro hâc Propositione haberet; literâ etiam a significetur illud, quo angulus A ab angulo illo minore abest, quem eodem tempore, Nodus, similiter ad Lunam et ad Solem positus, verâ suâ velocitate scriberet. Dicit Newtonus y ad a rationem habere, quæ componitur è rationibus anguli N ad angulum A, spatiique $TE^2-\frac{1}{2}TA^2$ ad $\frac{1}{2}TA^2$. Id nos ostendimus hoc modo.

Literâ L significetur angulus, quem Luna, cum velocitate illâ mediâ quam in loco C habeat, circum centrum T eo tempore conficeret, quo Nodus orbitæ Lunaris angulum $N-y$. Sit $L+x$ angulus, quem eodem tempore Luna conficeret, cum majore illâ velocitate quam in D habet; et $L+l$ angulus, quem eodem etiam tempore conficeret, cum velocitate quæ ei in coitu maxima est. Tempus igitur, quo Luna, cum velocitate illâ quam in D habet, angulum L conficeret, ad tempus quo eundem angulum conficeret cum velocitate suâ mediâ, rationem habebit quam L ad $L+x$. Jam verò anguli $N-y$, N, erunt inter se ficut velocitates quibuscum dato tempore conficiantur; et velocitates illæ temporum, quibus generatæ fuerint, rationem duplicatam gerent; id est duplicatam temporum, quibus Luna, cum velocitatibus quas in locis D, C diversas habet, angulum L conficeret. Erit igitur $N-y$ ad N ut L^2 ad $\overline{L+x}|^2$; sive cùm angulus x perexiguus sit ratione illius L, ut L ad $L+2x$. Invertendo & convertendo, $N:y=L+2x:2x$. Vel cùm x perexiguus sit ratione anguli L, $N:y=L:2x$. Invertendo $y:N=2x:L$. Quod cùm generaliter verum sit, ubivis loci sumatur punctum D, modò inter A, C; idcirco erit et $A:a=L:2l$. Cùm igitur sit $y:N=2x:L$, et $A:a=L:2l$, idcirco, rationes similes componendo, erit $y\times A:N\times a=x:l$. Sed $N\times a:A\times a=N:A$. Quare similes rationes iterum componendo, $y:a=x\times N:l\times A$. Sed x ad l rationem habet, quam $TE^2-\frac{1}{2}TA^2$ ad $\frac{1}{2}TA^2$. Quare $y:a=N\times\overline{TE^2-\frac{1}{2}TA^2}:A\times\frac{1}{2}TA^2$.

Quòd si locus d sumatur inter B et C, & symbolis $N+y$, $L-x$, significentur anguli, quos Nodus orbitæ Lunaris, & Luna ipsa dato quodam tempore, cum veris suis velocitatibus conficerent; literis autem N, L anguli, quos eodem tempore conficerent, si Luna mediâ suâ velocitate, Nodus cum eâ ferretur, quam, manente ipsius tam ad Solem quàm ad Lunam situ, Lunâque etiam punctum d obtinente, ipse haberet, si Luna areas circum centrum in orbe Elliptico æquabiliter scriberet; tum si à puncto d in rectam TA deducatur ad perpendiculum de; similibus planè argumentis efficiendum erit, $y:a=N\times\overline{TE^2-\frac{1}{2}TA^2}:A\times\frac{1}{2}TA^2$.

Universè igitur decrementum motûs horarii Nodi in locis inter C et A, & incrementum in locis inter C et B (decrementum loquimur et incrementum ab inæquabili arearum generatione in orbe

Liber Tertius.

nem ineunti facilè constabit (cc). Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygiâ. Motus totus horarius nodorum in syzygiis, ubi Luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur, erat 32″. 42‴. 7ᴵᵛ. Et decrementum motus nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073;

Lunari Elliptico) erit quàm proximè ad decrementum in ipso Lunæ coitu, ut motus totus horarius in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ à dimidiatæ loco et semisse quadrati radii, ad semissem quadrati Radii conjunctim. Vel quod perinde est, ut motus totus in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & illud, quo sinus versus duplæ distantiæ Lunæ à dimidiatæ loco abest à radio, ad radium ipsum conjunctim.

(cc) Capiantur puncta Δ, δ, à puncto C hinc inde æqualiter remota. Et capiantur AD, $B\delta$ arcuum $C\Delta$, $C\delta$ æquales: qui proinde et inter se æquales. Notis $\dot{A}$, $\dot{D}$, $\dot{\Delta}$, $\dot{\delta}$, $\dot{d}$ significentur motus horarii Nodorum Lunæ, puncta B, b, in orbe Lunæ ipsa loca A, D, Δ, δ, d obtineat. Notis autem $\ddot{A}$, $\ddot{D}$, $\ddot{\Delta}$, $\ddot{\delta}$, $\ddot{d}$ significentur motûs nodorum horarii decrementa in locis A, D, Δ, incrementa in locis δ, d, à perturbato Lunæ motu circum centrum orbis Elliptici oriunda. Capiatur arcus AH illius AD æqualis. Junctaque TH circulo iterum in K occurrat; et in eam ad perpendiculum deducatur DF. Arcus BK æqualis erit arcui BD. Erit igitur KBD dupla distantia puncti D à loco lunæ dimidiatæ B, & KF duplæ illius distantiæ finus versus. Quapropter $\ddot{D}$ ad $\ddot{A}$ rationem habebit compositam è rationibus quam $\dot{D}$ ad $\dot{A}$, quamque TF ad TA. (Not. bb.) Nodo autem in B posito, $\dot{D}$ erit ad $\dot{A}$ ut rectangulum sub sinubus distantiarum loci Lunæ D & B et à Nodo, id est ut quadratum è sinu arcûs BD, ad quadratum è radio: sive ut sinus versus dupli BD ad diametrum: id est ut KF ad 2TA. Habet igitur $\ddot{D}$ ad $\ddot{A}$ rationem quæ componitur è rationibus rectæ TF ad TA rectæque KF ad 2TA; sive eam quam $KF\times TF$ ad duplum quadrati ex TA.

Rursum propter arcum AH ipsi AD æqualem, erunt AH, $B\delta$ inter se æquales. Quapropter arcus DH duplus erit $B\delta$, rectaque HF dupli $B\delta$ sinus versus erit. Unde eisdem planè argumentis quibus superiora effecimus, ostendere licet $\ddot{d}$ ad $\ddot{A}$ rationem habere quam $HF\times TF$ ad duplum quadrati ex TA.

Cùm igitur sit $\ddot{D}:\ddot{A}=KF\times TF:2.TA^2$,

Et $\ddot{d}:\ddot{A}=HF\times TF:2TA^2$.

Erit $\ddot{D}-\ddot{d}:\ddot{A}=\overline{KF-HF}\times TF:2.TA^2$. (El. v. 24.) Sed $KF-HF=2TF$. Quare $\ddot{D}-\ddot{d}:\ddot{A}=2.TF^2:2.TA^2=TF^2:TA^2$.

Simili modo, accepto arcu AL ipsius AΔ æquali, & in junctam TL (quæ circulo iterum in M occurrat) deductâ ad perpendiculum rectâ ΔN, ostendemus $\ddot{\Delta}-\ddot{\delta}$ ad $\ddot{A}$ rationem habere quam TN^2 ad TA^2.

Cùm igitur fit $\ddot{D}-\ddot{d}:\ddot{A}=TF^2:TA^2$.

Et $\ddot{\Delta}-\ddot{\delta}:\ddot{A}=TN^2:TA^2$.

Erit $\ddot{D}+\ddot{\Delta}-\ddot{d}-\ddot{\delta}:\ddot{A}=TF^2+TN^2:TA^2$.

Jam verò TF^2, TN^2 quadrato è radio TA simul sumpta sunt æqualia. Arcus enim AD, cùm sit æqualis illi $C\Delta$, arcus AΔ ille erit quo AD abest à CA. Unde duplus AΔ ille erit quo duplus AD abest à duplo CA, id est, à quadrante. Quare arcus ΔL, qui est duplus ΔA, ille erit quo DH, qui est duplus AD, abest à quadrante. Quare recta TN, quæ cosinus est arcûs ΔL, sinui arcûs DH, sive rectæ DF, æqualis erit. Quare $TN^2+TF^2=DF^2+TF^2=TD^2$, vel TA^2.

Erunt igitur TF^2, TN^2 simul sumpta quadrato ex TA æqualia. Et illud $\ddot{D}+\ddot{\Delta}-\ddot{d}-\ddot{\delta}$, cùm habeat ad $\ddot{A}$ rationem eam quam TN^2+TF^2 ad quadratum ex TA, ipsi utique $\ddot{A}$ æquale erit. Q. E. D.

De Mundi Systemate

ideoque decrementum illud eſt $17'''.\ 14^{iv}.\ 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$. motu horario mediocri ſuperiùs invento $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Et decrementa motuum, à cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus; ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut AZ *qu.* ad AT *qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.*; id eſt, ut quadratum ſinûs diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii.

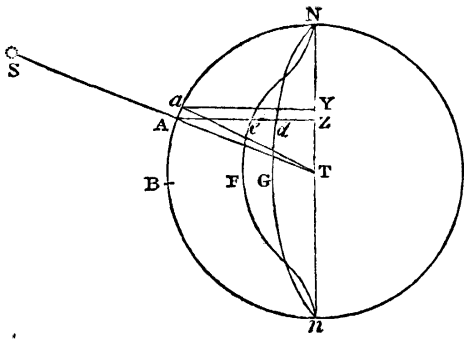
PROP. XXXII. PROB. XIII.

Invenire motum medium Nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in N, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò Solem S, per motum Terræ, progredi à nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem A*a* arcus datus quàm minimus, quem recta TS, ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli NA*n*, dato tempore quàm minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZ*q*, id eſt (ob proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt, ut area AZY*a*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *a*YZA, id eſt, ut area NAZ. Eſt autem maxima AZY*a* æqualis rectangulo ſub arcu A*a* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo

(dd) Ea ſit Curvæ N*dn* natura, ut fluxio areæ N*zd* ad fluxionem ſectoris circularis NTA rationem

mo reſpondens, erat $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab N ad A, eſt ad $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. ut area NAZ ad circulum totum.

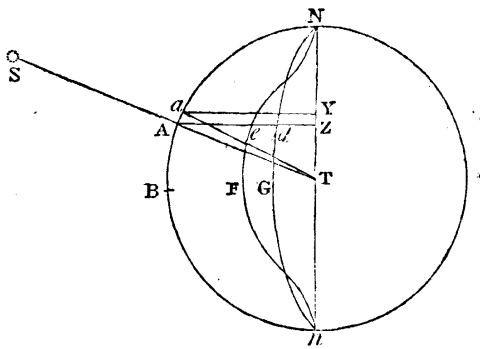


Liber Tertius.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut Sol anno toto completo ad nodum eundem redeat, à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit, ut Sol citiùs ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cùm Sol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis N ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut AZ*q* ad AT*q*: erit motus ſolis ad motum nodi in N, ut 360 AT*q* ad 39,6355 AZ*q*; id eſt, ut 9,0827667 AT*q* ad AZ*q*. Unde ſi circuli totius circumferentia, NA*n*, dividatur in particulas æquales, A*a*, tempus quo ſol percurrat particulam A*a*, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus unà cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827667 AT*q* ad 9,0827667 AT*q* + AZ*q*. Nam tempus eſt reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur; & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum Solis & nodi. Igitur ſi tempus, quo Sol ſine motu nodi percurreret arcum NA, exponatur per ſectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum A*a*, exponatur per ſectoris particulam AT*a*; & (perpendiculo *a*Y in N*n* demiſſo) ſi in AZ capiatur *dz*, ejus longitudinis ut ſit rectangulum *dz* in ZY ad ſectoris particulam AT*a* ut AZ*q* ad 9,0827646 AT*q* + AZ*q*; id eſt, ut ſit *dz* ad $\frac{1}{2}$AZ ut AT*q* ad 9,0827646 AT*q* + AZ*q* (dd): rectangulum

nem habeat quam quadratum ex AZ ad *a*.AT^3 + AZ^3, deſignante *a* datam quamlibet quantitatem Arithmeticam.

De Mundi Systemate



rectangulum dz in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit Curvam Ndgn, area curvilinea Ndz erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus sectoris NAT supra aream Ndz erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore minore minor est in ratione temporis,

Arithmeticam. Dico dz esse ad $\frac{1}{2}$AZ ut AT^2 ad a.AT^2+AZ^2. Fluxio arcûs circularis NA dicatur $\dot{z}$; fluxio rectæ NZ, $\dot{x}$; ut fluxio sectoris circularis ATa sit $\frac{1}{2}$AT.$\dot{z}$, fluxio areæ Nzd, $zd \times \dot{x}$.

Erit $dz \times \dot{z} : dz \times \dot{x} = \dot{z} : \dot{x} =$ TA : AZ = TA × AZ : AZ^2.

Sed $dz \times \dot{x} : \frac{1}{2}$AT × $\dot{z} =$ AZ^2 : a.AT^2+AZ^2. (Id enim positum est.)

Ex æquo $dz : \frac{1}{2}$AT = TA × AZ : a.AT^2+AZ^2.

Quare dz × AT : $\frac{1}{2}$AT^2 = TA × AZ : a.AT^2+AZ^2.

Permutando dz : AZ = $\frac{1}{2}$AT^2 : a.AT^2+AZ^2.

Quare $dz : \frac{1}{2}$AZ = AT^2 : a.AT^2+AZ^2. Q. E. D.

(ee) Area Nen haud aliâ ratione promptiùs credo definietur, quàm si exquiramus quanta sit NFnBN, quâ prior illa à semicirculo abest. A T ad perpendiculum educatur TB, quæ circulo in B, Curvæ NFn in F occurrat. Jam cùm sit ze : AZ = AZ^2 : a.AT^2+AZ^2, invertendo & convertendo AZ : eA = a.AT^2+AZ^2 : a.AT^2. Ponatur AT = 1, TZ = x. Ita erit AZ = $\sqrt{1-x^2}$, et $\sqrt{1-x^2}$: eA = a+1−x^2 : a. Unde $e\mathrm{A} = \frac{a\sqrt{1-x^2}}{a+1-x^2}$. Et $e\mathrm{A} \times \dot{x}$, sive fluxio areæ BF$e$A, $= \sqrt{1-x^2} \times \frac{a}{a+1-x^2}\dot{x}$; vel si pro a+1 scribatur c, erit $e\mathrm{A} \times \dot{x} = \dot{x}\sqrt{1-x^2} \times \frac{a}{c-x^2}$; vel si quantitas $\frac{a}{c-x^2}$ in seriem infinitam divisionis operâ resolvatur, $e\mathrm{A} \times \dot{x} = \dot{x}\sqrt{1-x^2} \times \frac{a}{c} + \frac{a}{c^2}x^2 + \frac{a}{c^3}x^4 + \frac{a}{c^4}x^6 + \frac{a}{c^5}x^7$. Hinc $\overline{e\mathrm{A} \times \dot{x}}$, sive area BF$e$A, ex areis Curvarum innumerabilium est conflata, quarum omnium cùm communis sit abscissa x, ordinatæ sunt hæ: Primæ, $\frac{a}{c}\sqrt{1-x^2}$; Secundæ, $\frac{a}{c^2}x^2\sqrt{1-x^2}$; Tertiæ, $\frac{a}{c^3}x^4\sqrt{1-x^2}$; Quartæ, $\frac{a}{c^4}x^6\sqrt{1-x^2}$; eodemque deinceps usque modo.

Area Curvæ quæ abscissam habet x, ordinatam $\sqrt{1-x^2}$, quæ est area ipsa circularis BTZA, significetur literâ A; area Curvæ, cujus abscissa x ordinata $x^2\sqrt{1-x^2}$, significetur literâ B. Literis etiam, C, D, E significentur singulatim Curvarum areæ, quarum omnium abscissa communis x, ordinatæ singularum $x^4\sqrt{1-x^2}$, $x^6\sqrt{1-x^2}$, $x^8\sqrt{1-x^2}$. Areæ igitur BFeA hujus seriei summa ultimò æqualis erit, $\frac{a}{c}$A + $\frac{a}{c^2}$B + $\frac{a}{c^3}$C + $\frac{a}{c^4}$D + $\frac{a}{c^5}$E, &c. Ad aream igitur BFeA definiendam illud

opus

poris, debebit etiam area AaYZ diminui in eâdem ratione. Id quod fiet, si capiatur in AZ longitudo ez, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad 9,0827646 ATq+AZq. Sic enim rectangulum ez in ZY erit ad aream AZYa ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiescerer: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motûs nodi. Et si punctum e tangat Curvam NeFn, area tota Nez, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus, quo tempore arcus totus NA, per Solis & nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò area semicirculi est ad aream figuræ NeFn, per methodum serierum infinitarum quæsitam, ut 793 ad 60 quamproximè (ee). Motus autem qui respondet circulo-

Liber Tertius.

opus erit, areas literis A, B, C, D, E, &c. significatas definire. Harum autem illâ A, per circuli quadraturam, datâ, reliquæ etiam per Prop. VII. Libri De Quadraturâ Curvarum dabuntur. Nempe hoc modo; $\mathrm{B} = \frac{x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}} - \mathrm{A}}{-4} = \frac{\mathrm{A} - x \times \overline{1-x}^{\frac{1}{2}}}{4.}$. (Id enim efficitur per Æquationem Canonicam Primi Casûs ejus Propositionis primam, scribendo 1 pro θ, $\frac{1}{2}$ pro λ, 2 pro n, 1 pro e, −1 pro f.) Et per eandem æquationem, scribendo 3 pro θ, B pro A, & C pro B, invenietur $\mathrm{C} = \frac{3\mathrm{B} - x^3 \times \overline{1-x}^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{3\mathrm{A}}{4\times 6} - \frac{3x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{4.6.} - \frac{x^3 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{6}$.

Rursum $\mathrm{D} = \frac{5\mathrm{C} - x^5 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{8} = \frac{3.5.\mathrm{A}}{4.6.8} - \frac{3.5.x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{4.6.8} - \frac{5.x^3 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{6\,8.} - \frac{x^5 \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{8.}$

Rursum $\mathrm{E} = \frac{7\mathrm{D} - x^7 \times \overline{1-x}^{\frac{3}{2}}}{10} = \frac{3.5.7.\mathrm{A}}{4.6.8.10} - \overline{\frac{3.5.7.x}{4\,6.8.10} + \frac{5.7.x^3}{6.8.10} + \frac{7.x^5}{8.10} + \frac{x^7}{10}}\,\overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}$.

Hinc area BFeA $= \frac{a}{c}$A + $\frac{a}{4c^2}$A − $\frac{a}{4c^2}x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{3a}{4.6c^3}$A − $\overline{\frac{3ax}{4.6c^3} + \frac{ax^3}{6c^3}}\,\overline{1-x}^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{3.5.a.\mathrm{A}}{4.6.8.c^4}$ − $\overline{\frac{3.5.a.x}{4.6.8.c^4} + \frac{5ax^3}{6.8.c^4} + \frac{ax^5}{8.c^4}}\,\overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{3.5.7.a\mathrm{A}}{4.6.8.10.c^5}$ − $\overline{\frac{3.5.7.ax}{4.6.8.10.c^5} + \frac{5.7.ax^3}{6.8.10.c^5} + \frac{7ax^5}{8.10.c^5} + \frac{ax^7}{10.c^5}}\,\overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}$ &c.

$= \mathrm{A} \times \frac{a}{c} + \frac{a}{4c^2} + \frac{3a}{4.6.c^3} + \frac{3.5.a}{4.6.8.c^4} + \frac{3.5.7.a}{4.6.8.10.c^5}$ + &c.

$- \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}} \times \frac{a}{4c^2}x + \frac{ax^3}{6.c^3} + \frac{ax^5}{8.c^4} + \frac{ax^7}{10.c^5}$ +

$+ \frac{3ax}{4.6.c^3} + \frac{5ax^3}{6.8.c^4} + \frac{7.a.x^5}{8.10.c^5}$ +

$+ \frac{3.5.ax}{4.6.8.c^4} + \frac{5.7.ax^3}{6.8.10.c^5}$ +

$+ \frac{3.5.7.ax}{4.6.8.10.c^5}$ +

Hinc

De Mundi Systemate

culo toti erat $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. & propterea motus, qui figuræ NefN duplicatæ reſpondet, eſt $1^{gr}.\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore ſubductus relinquit $18^{gr}.\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum nodi reſpectu Fixarum inter ſui ipſius conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit $341^{gr}.\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum Solis inter eaſdem conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}.\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}.\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. Hic eſt motus medius Nodorum in anno ſidereo. Idem per tabulas aſtronomicas eſt $19^{gr}.\ 21'.\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor eſt parte trecenteſimâ motûs totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

PROP. XXXIII. PROB. XIV.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod eſt ut area NTA−Ndz, *(in fig. præced.)* motus iſte eſt ut area NA*e*, & inde datur. Verùm ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem Problematis conſtructionem adhibere. Centro c, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus BEFD. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motûs veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis; id eſt, ut $19^{gr}.\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$, atque adeo BC ad AC

Hinc quando TZ in ipſam TN increverit, ut ſit $x = 1$, & $\overline{1-x^2}^{\frac{1}{2}} = 0$, erit area BFNB $= AX\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{4c^3} + \frac{3\cdot a}{4.6.c^5} + \frac{3\cdot 5\cdot a}{4.6.8.c^7} + \text{&c.}\right)$. Et area quadrantis BFN ad hanc aream rationem habebit quam $\frac{1}{a}$ ad $\frac{1}{c} + \frac{1}{4c^3} + \frac{3}{4.6.c^5} + \frac{3\cdot 5}{4.6.8.c^7} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4.6.8.10.c^9}$ &c.

Jam verò cùm ſit $a = 9{,}0827667$, erit $\frac{1}{a} = 0{,}110098$.

$$\frac{1}{c} = 0{,}099179170$$

$$\frac{1}{4c^3} \quad 0{,}002459126$$

$$\frac{3}{4.6.c^5} \quad 0{,}000121947$$

$$\frac{3\cdot 5}{4.6.8.c^7} = 0{,}000007559$$

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7}{4.6.8.10.c^9} \quad 0{,}000000525$$

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4.6.8.10.12.c^{11}} \quad 0{,}000000039$$

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{4.6.8.10.12.14.c^{13}} \quad 0{,}000000003$$

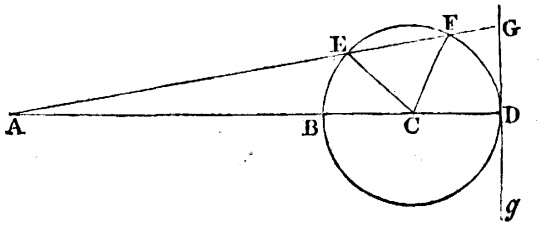
Summa 0,101768369

Hinc area quadrantis ad aream NFB, ac proinde area ſemicirculi ad aream NAFN, rationem habet quam 110098 ad 101768. Convertendo area ſemicirculi ad aream NEFN rationem habet quam 110098 ad 8330; id eſt eam quam 793 ad 60 propemodum. Nam 8330 : 110098 = 60 : 793,02 +.

3·5

Liber Tertius.

AC ut motuum differentia $0^{gr}.\ 31'.\ 2''.\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur angulus BCE, vel BCF, æqualis duplæ diſtantiæ Solis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF ſecans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus, qui ſit ad motum totum nodi inter ipſius ſyzygias (id eſt, ad $9^{gr}.\ 11'.\ 3''$.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro



quo angulus DAG uſurpari poteſt) ad motum medium nodorum addatur, ubi nodi tranſeunt à quadraturis ad ſyzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur, ubi tranſeunt à ſyzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quàm proximè cum motu vero, qui prodit exponendo tempus per aream NTA−Ndz, & motum nodi per aream NA*e*; ut rem perpendenti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus nodorum. Eſt & æquatio menſtrua, ſed quæ ad inventionem latitudinis Lunæ minimè neceſſaria eſt. Nam cùm variatio inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, al-

De Mundi Systemate

teri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua Nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinandâ latitudine Lunæ negligi poſſint.

Corol. Ex hâc & præcedente Propoſitione liquet quòd Nodi in ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''.\ 19'''.\ 26^{iv}$. Et quòd æquatio motus Nodorum in octantibus ſit $1^{gr}.\ 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœleſtibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum Nodorum *J. Machin Aſtron. Prof. Greſham.* & *Hen. Pemberton*, M. D. ſeorſum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta eſt (ff). Et utriuſque chartæ, quas vidi, duas Propoſitiones continebant, & inter ſe in utriſque congruebant. Chartam verò D. *Machin*, cùm prior in manus meas venerit, hîc adjungam.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

" *Motus Solis medius à Nodo, definitur per medium proportionale* " *geometricum, inter motum ipſius Solis medium, & motum illum* " *mediocrem quo Sol celerrimè recedit à Nodo in quadraturis.*

" Sit T locus ubi Terra; Nn, linea Nodorum lunæ ad tempus " quodvis datum; KTM, huic ad rectos angulos ducta; TA, recta " circum centrum revolvens, eâ cum velocitate angulari, quâ ſol " & nodus à ſe invicem recedunt; ita ut angulus inter rectam " quieſcentem N*n* & revolventem TA, ſemper fiat æqualis diſtan- " tiæ locorum ſolis & nodi. Jam ſi recta quævis TK dividatur in " partes TS & SK, quæ ſint ut motus ſolis horarius medius ad mo- " tum horarium mediocrem nodi in quadraturis, & ponatur recta " TH media proportionalis inter partem TS & totam TK, hæc rec- " ta inter reliquas proportionalis erit motui medio ſolis à nodo.

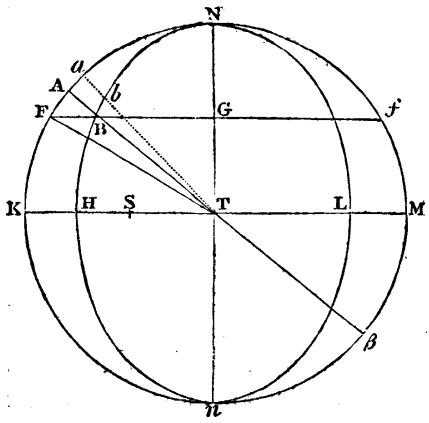
" Deſcribatur enim Circulus NK*n*M, centro T, & radio TK; eo-

(ff) In Epiſtolâ Pembertoni ad Amicum de Cotesii Inventis, p. 6 & 7.

" demque

Liber Tertius.

" demque centro, & ſemiaxibus TH & TN, deſcribatur Ellipſis " NH*n*L; & in tempore quo ſol à nodo recedit per arcum N*a*, ſi " ducatur recta T*ba*, area ſectoris NT*a* exponet ſummam motuum " nodi & ſolis in eodem tempore. Sit igitur arcus *a*A quàm mi- " nimus, quem recta T*ba*, præfatâ lege revolvens, in datâ tem-

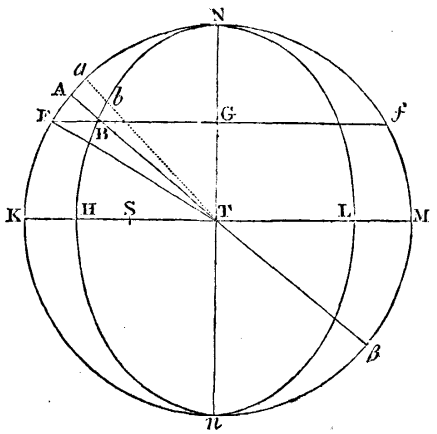


" poris particulâ uniformi- " ter deſcribit, & ſector " quàm minimus TA*a* erit " ut ſumma velocitatum " quâ ſol & nodus tum tem- " poris ſeorſim feruntur. " Solis autem velocitas ferè " uniformis eſt, utpote cu- " jus parva inæqualitas vix " ullam inducit in medio " nodorum motu varieta- " tem. Altera pars hujus " ſummæ, nempe velocitas " nodi in mediocri ſuâ quan- " titate, augetur in receſſu à ſyzygiis in duplicatâ ratione ſinûs " diſtantiæ ejus à ſole; per Corol. Prop. XXXI. Lib. 3^{tii}. Princip. " & cùm maxima eſt in quadraturis ad ſolem in K, eandem ra- " tionem obtinet ad ſolis velocitatem, ac ea quam habet SK ad TS " hoc eſt ut (differentia quadratorum ex TK et TH vel) rectangu- " lum KHM ad TH quadratum. Sed Ellipſis NBH dividit ſectorem " AT*a*, ſummæ harum duarum velocitatum exponentem, in duas " partes AB*ba* & BT*b* ipſis velocitatibus proportionales. Produ- " catur enim BT ad circulum in β; & à puncto B demittatur ad " axem majorem perpendicularis BG, quæ, utrinque producta, oc- " currat circulo in punctis F & *f*; & quoniam ſpatium AB*ba* eſt ad " ſectorem TB*a* ut rectangulum ABβ ad BT quadratum (rectangu- " lum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA & TB " ob rectam Aβ æqualiter & inæqualiter ſectam in T & B); hæc " igitur ratio, ubi ſpatium AB*ba* maximum eſt in K, eadem erit " ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum. Sed maxima Nodi " mediocris velocitas erat ad Solis velocitatem in hâc ratione. Igi- " tur in quadraturis ſector AT*a* dividitur in partes velocitatibus

 " proportionales.

De Mundi Systemate

" proportionales. Et quoniam rectang. KHM eſt ad HT quadr. ut " FB*f* ad BG quad. & rectangulum ABβ æquatur rectangulo FB*f*: " erit igitur areola AB*ba* " ubi maxima eſt ad reli- " quum ſectorem TB*b*, ut " rectang. ABβ ad BG quadr. " Sed ratio harum areola- " rum ſemper erat ut ABβ " rectang. ad BT quadratum; " & propterea areola AB*ba* " in loco A minor eſt ſimili " areolâ in quadraturis, in " duplicatâ ratione BG ad " BT; hoc eſt in duplicatâ ra- " tione ſinûs diſtantiæ ſolis " à nodo. Et proinde ſum-



" ma omnium areolarum AB*ba*, nempe ſpatium ABN, erit ut motus " Nodi, in tempore quo ſol digreditur à nodo per arcum NA. Et " ſpatium reliquum, nempe ſector ellipticus NTB, erit ut motus ſo- " lis medius in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus " motus nodi medius, is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum " ſuam abſolverit, motus nodi medius à ſole erit ad motum ip- " ſius ſolis medium, ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut " recta TK ad rectam TH, mediam ſcilicet proportionalem inter " TK ad TS; vel, quod eodem redit, ut media proportionalis TH ad " rectam TS.

" PROPOSITIO II.

" *Dato motu medio Nodorum lunæ invenire motum verum.*

" Sit angulus A diſtantia ſolis à loco nodi medio, ſive motus " medius ſolis à nodo. Tum ſi capiatur angulus B, cujus tangens " ſit ad tangentem anguli A ut TH ad TK, hoc eſt in ſubdupli- " catâ ratione motûs mediocris horarii ſolis ad motum mediocrem " horarium ſolis à nodo, in quadraturis verſante; erit idem an- " gulus B diſtantia Solis à loco Nodi vero. Nam jungatur FT; & " ex demonſtratione Propoſitionis ſuperioris erit angulus FTN " diſtantia

" diſtantia ſolis à loco nodi medio, angulus autem ATN diſtantia Liber " à loco vero, & tangentes horum angulorum ſunt inter ſe ut TK Tertius. " ad TH.

" *Corol.* Hinc angulus FTA eſt Æquatio Nodorum lunæ, ſinuſ- " que hujus anguli, ubi maximus eſt in octantibus, eſt ad radium " ut KH ad TK+TH. Sinus autem hujus æquationis in loco quo- " vis alio A eſt ad ſinum maximum, ut ſinus ſummæ angulorum " FTN+ATN ad radium: hoc eſt ferè ut ſinus duplæ diſtantiæ ſo- " lis à loco nodi medio (nempe 2FTN) ad radium.

" *Scholium.*

" Si motus Nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit 16″. " 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. hoc eſt in anno toto ſidereo 39°. 38′. 7″. 50‴. " erit TH ad TK in ſubduplicatâ ratione numeri 9,0827646 ad nu- " merum 10,0827646; hoc eſt ut 18,6524761 ad 19,6524761. " Et propterea TH ad HK ut 18,6524761 ad 1. hoc eſt ut mo- " tus Solis in anno ſidereo ad motum Nodi medium 19°. 18′. 1″. " 23‴$\frac{2}{3}$.

" At ſi motus medius Nodorum Lunæ in 20 annis Julianis ſit " 386°. 50′. 15″. ſicut ex obſervationibus in Theoriâ Lunæ adhi- " bitis deducitur: motus medius Nodorum in anno ſidereo erit " 19°. 20′. 31″. 58‴. Et TH erit ad HK ut 360^{gr}. ad 19°. 20′. " 31″. 58‴. hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde motus mediocris " horarius Nodorum in quadraturis evadet 16″. 18‴. 48^{iv}. Et " Æquatio nodorum maxima in octantibus 1°. 29′. 57″."

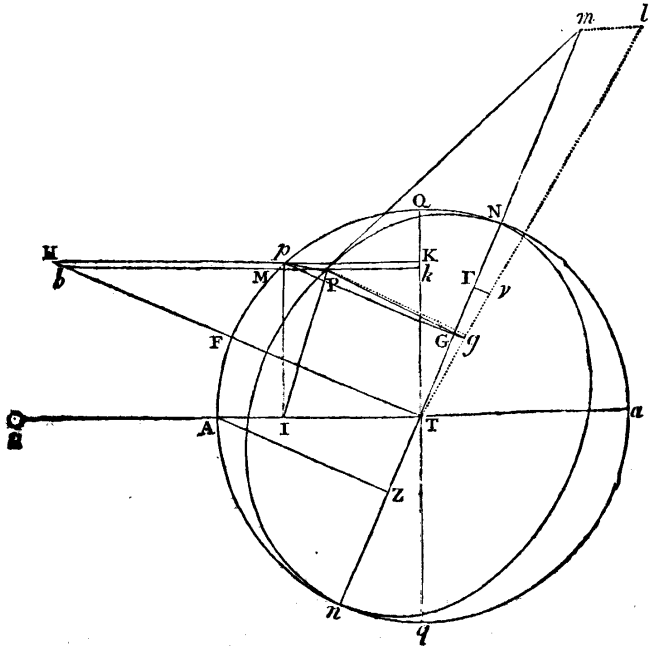
PROP. XXXVI. PROB. XV.

Invenire variationem horariam Inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticæ.

Deſignent A & *a* ſyzygias; Q & *q*, quadraturas; N & *n*, Nodos; P, locum Lunæ in orbe ſuo; *p*, veſtigium loci illius in plano Eclipticæ; & *m*T*l*, motum momentaneum nodorum ut ſuprà. Et ſi ad lineam T*m* demittatur perpendiculum PG, jungatur *p*G, & producatur ea donec occurrat T*l* in *g*, & jungatur etiam P*g*: erit angulus P*gp* Inclinatio orbis lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna verſatur in P; & angulus P*gp* Inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis

De Mundi Systemate

temporis completum; ideoque angulus GP*g* variatio momentanea Inclinationis. Eſt autem hic angulus GP*g* ad angulum GT*g* ut TG ad PG & P*p* ad PG conjunctim (gg). Et propterea ſi pro momento



temporis ſubſtituatur hora; cùm angulus GT*g* (per Prop. XXX.) ſit ad angulum 33″. 10‴. 33ⁱᵛ. ut IT × PG × AZ ad AT *cub.* erit angulus

(gg) Capiatur TΓ æqualis rectæ PG, & à Γ in rectam T*l* deducatur ad perpendiculum recta Γν. Jam cùm anguli exigui GP*g*, GT*g* ſinuum ſuorum inter ſe rationem gerant, ſi à puncto G in rectam P*g* recta quædam ad perpendiculum deducatur, angulus GP*g* ad GT*g* rationem habebit quam, deducta illa ad Γν; ſive eam quæ componitur è rationibus deductæ illius ad G*g*, ipſiuſque G*g* ad Γν. Sed deducta illa ad G*g* rationem habet quam ſinus anguli P*g*ϕ, vel PGϕ, ad radium: hoc eſt, cùm angulus GP*p* à recto haud multùm abſit, eam quam P*p* ad *p*G, vel PG. Recta verò G*g* ad Fν rationem habet quam TG ad Tν vel illi æqualem PG. Quare angulus GP*g* ad GT*g* rationem habet, quæ componitur è rationibus rectæ P*p* ad PG, rectæque TG ad PG; ſive eam, quam rectangulum P*p* × TG ad quadratum ex PG.

(hh) Per puncta Q, *q*, ducantur rectæ Qϱ, *q*w, quæ circulum AQ*qq*, in punctis Q, *q*, contingant. Recta TF utrinque producta circulo iterum in *f*, rectis Qϱ, *q*w, in punctis ϱ, w, occurrat. Recta AZ × $\frac{TZ}{M\rho}$ × $\frac{P\rho}{PG}$ ſignificetur literâ B. Lunâ per arcum F*q* incedente, inclinatio orbitæ perpetuò augetur; et Solidum $\overline{Fq}$w × B referet incrementorum ſummam. Rurſum Lunâ per arcum

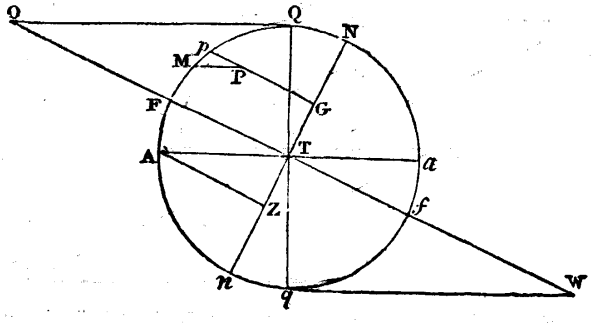
gulus GP*g* (ſeu Inclinationis horaria variatio) ad angulum 33″. 10‴. 33ⁱᵛ. ut IT × AZ × TG × $\frac{P\rho}{PG}$ ad AT *cub.* Q. E. I. Liber Tertius.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quòd Luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quòd ſi orbis ille ellipticus ſit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſuprà expoſitum eſt. Et in eâdem ratione minuetur etiam Inclinationis variatio.

Corol. 1. Si ad N*n* erigatur perpendiculum TF, ſitque *p*M motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendiculum *p*K, M*k* in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & *h*: erit IT ad AT ut K*k* ad M*p*, & TG ad H*p* ut TZ ad AT; ideoque IT × TG æquale $\frac{K\kappa \times H\rho \times TZ}{M\rho}$, hoc eſt, æquale areæ H*p*M*h* ductæ in rationem $\frac{TZ}{M\rho}$: & propterea Inclinationis variatio horaria ad 33″. 10‴. 33ⁱᵛ. ut H*p*M*h* ducta in AZ × $\frac{TZ}{M\rho}$ × $\frac{P\rho}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi Terra & Nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſinus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad 33″. 10‴. 33ⁱᵛ, ut aggregatum omnium arearum H*p*M*h*, in revolutione puncti *p* genitarum, & ſub ſignis propriis + & − conjunctarum, ductum in AZ × TZ × $\frac{P\rho}{PG}$ ad M*p* × AT *cub.* id eſt, ut circulus totus Q*Aqa*(hh) ductus in AZ × TZ × $\frac{P\rho}{PG}$ ad M*p* × AT *cub.* hoc

arcum *qf* incedente, inclinatio orbitæ perpetuò minuetur; et Solidum $\overline{fq}$w × B referet decremen-



torum

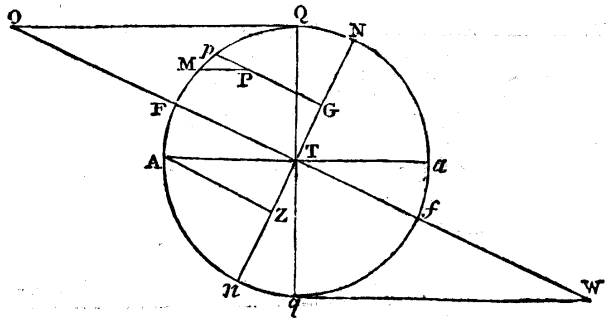
De Mundi Systemate

hoc eſt, ut circumferentia Qqq ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex quâ, per menſem uniformiter continuatâ, variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id eſt (cùm Pp ſit ad PG ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quaniam Inclinationis horaria variatio, ubi Nodi in quadraturis verſantur, eſt (per hanc Propoſitionem) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc ſitu Nodorum tranſit à quadraturâ ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$) erit ad ſummam totidem angulorum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$, ſeu $5878''$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit 5^{gr}.

torum ſummam. Quare Solidum $\overline{Fnqw - fqw} \times B$, id eſt ſemicylindrus qui baſin habet ſemicir-



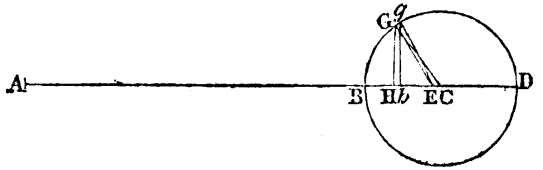
culum Fnf, altitudinem ipſam B, illud omne referet quo aucta fuerit inclinatio, toto illo tempore

$5^{gr}.\ 1'$, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex ſummâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, eſt $163''$, ſeu $2'.\ 43''$. Liber Tertius.

PROP. XXXV. PROB. XVI.

Dato tempore invenire Inclinationem orbis lunaris ad planum Eclipticæ.

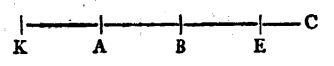
Sit AD ſinus Inclinationis maximæ, & AB ſinus Inclinationis minimæ. Biſecetur BD in C, & centro C, intervallo BC deſcribatur circulus BGD. In AC capiatur CE, in eâ ratione ad EB quam



EB habet ad 2BA (ii): et ſi dato tempore conſtituatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cùm 2EC detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam Nodorum à quadraturis, poſt datum aliquod momentum temporis completum; & arcus Gg, ob datum angulum GEg, erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hb ad Gg ut GH ad GC; & & propterea Hb eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut

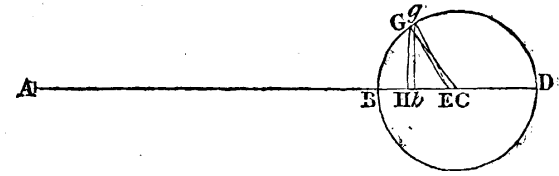
pore quo Luna à loco F in *f* tranſlata fuerit. Similiter oſtendatur ſemicylindrum, cujus baſis ſemicirculus *f*AE, altitudo recta B, illud omne referre, quo inclinatio aucta fuerit, toto illo tempore quo Luna à loco *f* in F per ſemicirculum *f*AE reverteretur. Cylindrus igitur, cujus baſis circulus totus F*Af*, altitudo recta B, illud omne referet, quo aucta fuerit inclinatio orbitæ, toto illo temporis ſpatio quo Luna à loco maximæ ſuæ latitudinis abſcedens in eundem redierit; manente utique Nodorum ad Solem ſitu.



(ii) Id quod hâc ratione efficiatur. Producatur CA ad K, ut ſit AK æqualis ipſi AB. Ad rectam KB, applicetur rectangulum dato CB × BK æquale, eâ lege ut quadrato excedat. Exceſſus latitudo ſit BE. Dico factum eſſe quod faciendum erat; id eſt, rectam CE ad EB rationem habere quam EB ad duplam AB. Nam propter rectangula CB × BK, KE × EB inter ſe æqualia, erit CB ad BE ut KE ad KB. Dividendo CE ad EB ut EB ad BK, vel 2BA. Q. E. D.

$\frac{GH}{GE}$

De Mundi Systemate $\frac{GH}{GE} \times GEq$, seu $\frac{GH}{GE} \times AH$; id est, ut AH & sinus anguli AEG conjunctim. Igitur si AH in casu aliquo sit sinus Inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu Inclinationis, per Corol. 3. Pro-



positionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed AA, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. Q. E. D.

In hâc demonstratione supposui angulum BEG, qui est duplicata distantia Nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & in hoc casu Gg esse augmentum horarium duplæ distantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut contentum sub inclinationis sinu AH & sinu anguli recti BEG, qui est duplicata distantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris Inclinationis sinus AH ad radium quadruplicatum; hoc est (cùm Inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{gr}.\ 8'\frac{1}{2}$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem variatio tota, sinuum differentiæ BD respondens, ad variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD et tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à quadraturis ad syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota BD ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa BD prodibit $16'.\ 32''\frac{1}{2}$ (kk).

Hæc est Inclinationis variatio maxima, quatenus locus Lunæ in orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si Nodi in syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in quadraturis consistunt, inclinatio minor est ubi Luna versatur in syzygiis, quàm ubi ea versatur in quadraturis, excessu $2'.\ 43''$; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessûs dimidio, $1'.\ 21''\frac{1}{2}$, variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipsius autem syzygiis aucta fit $17'.\ 45''$. Si Luna igitur in syzygiis constituatur, variatio tota in transitu nodorum à quadraturis ad syzygias erit $17'.\ 45''$: ideoque si Inclinatio, ubi Nodi in syzygiis versantur, sit $5^{gr}.\ 17'.\ 20''$; eadem, ubi Nodi sunt in quadraturis, & Luna in syzygiis, erit $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex observationibus.

Si jam desideretur orbis Inclinatio illa, ubi Luna in syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut sinus graduum 4. 59'. 35", ad sinum graduum 5. 17'. 20", & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à quadraturis; & erit AH sinus Inclinationis quæsitæ. Huic orbis Inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat $90^{gr}.$ à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compensatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motûs Nodorum (ut suprà diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi potest.

Scholium.

Hisce motuum lunarium computationibus ostendere volui, quòd motus Lunares per Theoriam Gravitatis à causis suis computari possint. Per eandem Theoriam inveni præterea quòd Æquatio Annua medii motûs Lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. 1. Hæc vis in Perigæo Solis major est, & orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor est, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato Luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & Æquatio Annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla est, in mediocri Solis à Terrâ distantiâ ad $11'.\ 50''$ circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri Solis proportionalis est; & additur medio motui Lunæ, ubi Terra pergit ab Aphelio suo ad Perihelium; &, in oppositâ orbis parte, subducitur. Assu-

(kk) Veriùs ut opinor $''16 - ''24$. Nobis enim calculi reddunt $'16 - ''23 - '''59 - ''''58$.

De Mundi Systemate

mendo radium orbis magni 1000, & eccentricitatem Terræ $16\frac{1}{2}$, hæc æquatio, ubi maxima eſt, per Theoriam Gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas Terræ paulo major eſſe videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

Inveni etiam quòd in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi lunæ velociùs moventur quàm in Aphelio ejus; idque in triplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè. Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus autem ſolis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè, & maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt 1gr. 56′. 20, prædictæ Solis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. Quòd ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inverſè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam 2gr. 54′. 30″. Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, ſunt ad 2gr. 54′. 30, ut motus medius diurnus Apogæi, & motus medius diurnus Nodorum Lunæ ſunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit æquatio maxima medii motûs Apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motûs Nodorum 9′. 24″. Additur verò æquatio prior, & ſubducitur poſterior, ubi Terra pergit à Perihelio ſuo ad Aphelium: & contrarium fit in oppoſitâ orbis parte.

Per Theoriam Gravitatis conſtitit etiam quòd actio Solis in Lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per Solem, quàm ubi eadem ad rectos eſt angulos cum lineâ Terram & Solem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quàm in poſteriore. Et hinc oritur alia æquatio motûs medii lunaris, pendens à ſitu Apogæi Lunæ ad Solem; quæ quidem maxima eſt, cùm Apogæum Lunæ verſatur in octante cum Sole; & nulla, cùm illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motu medio additur, in tranſitu Apogæi Lunæ à Solis quadraturâ ad ſyzygiam; & ſubducitur in tranſitu Apogæi à ſyzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus Apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri Solis diſtantiâ à Terrâ. Augetur verò ac diminuitur

Liber Tertius.

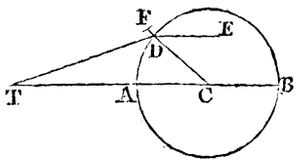
tur in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis inverſè, ideoque in maximâ Solis diſtantiâ eſt 3′. 34″, & in minimâ 3′. 56″ quamproximè: ubi verò Apogæum Lunæ ſitum eſt extra octantes, evadit minor; eſtque ad æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium.

Per eandem Gravitatis theoriam actio Solis in Lunam paulo major eſt ubi linea recta, per Nodos lunæ ducta, tranſit per Solem, quàm ubi linea illa ad rectos eſt angulos cum rectâ Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo; quæque maxima eſt, ubi Nodi in Solis octantibus verſantur; & evaneſcit, ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis; & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ Nodi alterutrius à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ: additur verò medio motui Lunæ, ſi Sol diſtat à Nodo ſibi proximo in antecedentia; ſubducitur, ſi in conſequentia; & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcendit ad 47″ in mediocri Solis diſtantiâ à Terrâ, uti ex theoriâ Gravitatis colligo. In aliis Solis diſtantiis hæc æquatio maxima in octantibus Nodorum eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ Solis à Terrâ; ideoque in Perigæo Solis ad 49″, in Apogæo ejus ad 45″ circiter, aſcendit.

Per eandem Gravitatis theoriam Apogæum Lunæ progreditur quàm maximè, ubi vel cum Sole conjungitur, vel eidem opponitur; & regreditur, ubi cum Sole quadraturam facit. Et eccentricitas fit maxima in priore caſu, & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. 1. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & æquationem principalem Apogæi generant, quam ſemeſtrem vocabo. Et æquatio maxima ſemeſtris eſt 12gr. 18′ circiter, quantum ex obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter Lunam in Ellipſi circum Terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum Ellipſeos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ, in progreſſu & regreſſu Apogæi, & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris Lunæ à Terrâ in partes 100000, & referat T terram, & TC eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut ſit CB ſinus æquationis maximæ ſemeſtris 12gr. 8′ ad radium

De Mundi Systemate

dium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB descriptus, erit epicyclus ille, in quo centrum orbis lunaris locatur, & secundum ordinem literarum BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ semel æquato, & erit CTD æquatio semestris Apogæi lunæ, & TD eccentricitas orbis ejus in Apogæum secundò æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & eccentricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in orbe, & distantia ejus à Terrâ, idque per methodos notissimas.



In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum orbis Lunæ velociùs movetur circum centrum C quàm in Aphelio, idque in triplicatâ ratione distantiæ Terræ à Sole inversè. Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis Lunæ velociùs movetur in epicyclo BDA in duplicatâ ratione distantiæ Terræ à Sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiæ inversè; ab orbis centro, D, agatur recta DE versus Apogeum Lunæ, seu rectæ TC parallela; & capiatur angulus EDF æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam Apogæi Lunæ à Perigæo Solis in consequentia; vel quod perinde est, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et sit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad distantiam mediocrem Solis à Terrâ, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & 52′. 27″. 16‴ ad 59′. 8″. 10‴ conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis Lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum est D, & radius DF, interea revolvi, dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli DABD. Hâc enim ratione velocitas, quâ centrum orbis Lunæ in lineâ quâdam curvâ, circum centrum C descriptâ, movebitur, erit reciprocè ut cubus distantiæ solis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Computatio motûs hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris Lunæ à Terrâ

Terrâ sit partium 100000, & eccentricitas, TC, sit partium 5505 ut suprà: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta DF partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam TC subtendit angulum ad Terram, quem translatio centri orbis à loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata, in situ parallelo, ad distantiam superioris umbilici orbis Lunæ à Terrâ, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici; & ad distantiam Lunæ à Terrâ subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri secunda dici potest. Et hæc æquatio, in mediocri Lunæ distantiâ à Terrâ, est ut sinus anguli, quem recta illa DF cum rectâ à puncto F ad Lunam ductâ continet quamproximè; & ubi maxima est, evadit 2′. 25″. Angulus autem, quem recta DF & recta à puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum EDF ab anomaliâ mediâ Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ à Sole ad distantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2′. 25″. sunt ad æquationem centri secundam; addendam, si summa illa sit minor semicirculo; subducendam, si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

Cùm Atmosphæra terræ, ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40, refringat lucem Solis, & refringendo spargat eandem in umbram Terræ, & spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria verò Lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Observatorio Regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20gr. 43′. 40″, & Apogæi ejus ♋ 7gr. 44′. 30″; & motum medium Lunæ ♈♈ 15gr. 21′. 00″, & Apogæi ejus ♓ 8gr. 20′. 00″, & Nodi ascendentis ♌ 27gr. 24′. 20″; & differentiam Meridianorum Observatorii hujus & Observatorii Regii *Parisiensis* 0hor. 9min. 20sec. Motus autem

De Mundi Systemate

autem medii Lunæ & Apogæi ejus nondum satis accuratè habentur.

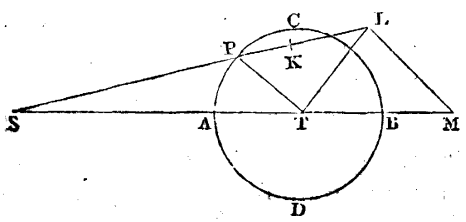
SECTIO III.

De quantitate Æstûs Marini.

PROP. XXXVI. PROB. XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML, seu PT, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per. Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis TM−LM, seu 2PK, in syzygiis lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum à centro Terræ, id est, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in superficie Terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hâc vi Mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus distant à Sole. Vi alterâ, quæ duplo major est, Mare elevatur & sub Sole, & in regione Soli oppositâ. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant à Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac si tota in regionibus sub Sole, & Soli oppositis, mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant à Sole, nil ageret.



Hæc est vis Solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur, quàm in mediocri suâ distantiâ à Terrâ. In aliis Solis positionibus vis, ad Mare attollendum, est ut sinus versus duplæ altitudinis solis supra horizontem loci directè & cubus distantiæ Solis à Terrâ inversè ([11]).

([11]) Vide Lib. De Syst. Mund. § 51.

Corol.

Liber Tertius.

Corol. Cùm vis centrifuga partium Terræ, à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensurâ pedum *Parisiensium* 25472, ut suprà in Prop. XIX; vis solaris, de quâ egimus, cùm sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200, seu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant à Sole, mensurâ tantùm pedis unius *Parisiensis* & digitorum undecim cum tricesimâ parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROP. XXXVII. PROB. XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Brisiolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione & oppositione luminarium, observante *Samuele Sturmio*, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantùm 25. Altitudo prior ex summâ virium, posterior ex earundem differentiâ oritur. Solis igitur & Lunæ, in æquatore versantium, & mediocriter à Terrâ distantium sunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æstus maris, ex observatione *Samuelis Colepressi*, ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur; ac tempore verno & autumnali altitudo æstûs in syzygiis superare potest altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$, seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem æstûs in portu *Brisoliæ*, observationibus *Sturmii* magis fidendum esse videtur, ideoque donec aliquid certius constiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterùm ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium syzygias, sed sunt tertii à syzygiis, ut

De Mundi Systemate

dictum fuit; seu proximè sequuntur tertium Lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potiùs (ut à *Sturmio* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, seu post harum à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt verò in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè sequuntur appulsum lunæ ad meridianum, ubi Luna distat à Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas & hyems maximè vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi Sol distat à solstitiis decimâ circiter parte totius circuitûs; seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna distat à Sole decimâ circiter parte motûs totius ab æstu ad æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis, in hâc distantiâ Lunæ à syzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris, à vi Lunæ oriundum, quàm in ipsis syzygiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ, seu anguli graduum 37; hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355 (mm). Ideoque in analogiâ superiore pro s scribi debet 0,7986355 s (nn).

Sed & vis Lunæ in quadraturis, ob declinationem Lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis, ad mare movendum, diminuitur in duplicatâ ratione sinûs complementi inclinationis quamproximè. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis est tantùm 0,8570327 L. Est igitur L + 0,7986355 s ad 0,8570327 L − 0,7986355 s ut 9 ad 5.

Præterea

(mm) Imo, ut mihi videtur, in duplicatâ ratione radii ad cosinum hujus distantiæ. Et persuadere mihi nequeo, quin id ipsum Newtonus voluerit.

(nn) At si diminutio vis Solaris ea fit quam modò posuimus (Not. II) in analogiâ superiore pro s scribi debet 0,899317 s.

(oo) Calculis subductis, eam invenio Lunæ à centro Terræ distantiam, quando arcu graduum 18 cum semisse à loco coitûs vel à dimidiatæ loco remota sit, quæ ad distantiam mediam rationem habeat quam 69,10068 vel 69,89932 ad 69,5. Quare si ea sit vis solaris diminutio, quam suprà posuimus (Not. II) analogia à Newtono posita in hanc migraverit.

1,017292 L + 0,899317 s : 0,982861 × 0,8570327 L − 0,899317 s = 9 : 5.

Unde ea efficietur vis Lunaris, quæ ad Solarem rationem habeat quam 5,0469 ad 1.

Si

Præterea diametri orbis, in quo Luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia Lunæ à Terrâ in syzygiis est ad distantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à syzygiis, ubi æstus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad mare movendum sunt in triplicatâ ratione distantiarum inversè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantiâ ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 s ad 0,9830427 × 0,8570327 L − 0,7986355 s ut 9 ad 5. Et s ad L, ut 1 ad 4,4815 (oo). Itaque cùm vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum tricesimâ parte digiti, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $7\frac{5}{12}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum semisse, & ubi Luna est in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum semisse & ultrà, præsertim ubi æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè sufficit, & quantitati motuum probè respondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latiùs patet, æstus dicuntur esse majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* ascensus aquæ intra tropicos minor est quàm in zonis tempe-

Si enim pro coefficiente 1,017292 scribatur litera *a*; pro 0,899317 litera *b*, pro 0,982861 × 0,8570327 litera *c*, erit $aL + bs : cL - bs = 9 : 5$.

Quare $5aL + 5bs = 9cL - 9bs$. Et $14b.s = 9c - 5a.L$.

Sed $9c = 7{,}581102$

$5a = 5{,}086460$

$9c - 5a = 2{,}494642$

Quare $2{,}494642.L = 14.b.s$.

Et $0{,}178189.L = b.s = 0{,}899317.s$.

Quare $s : L = 178189 : 899317 = 1 : 5{,}0469$.

De Mundi Systemate

ratis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque, & orientale & occidentale, ſimul deſcendat: cùm tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Eâ de cauſâ fluxus & refluxus in inſulis, quæ à littoribus longiſſimè abſunt, perexiguus eſſe ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores; uti ad *Plymuthum*, & pontem *Chepſtowæ* in *Angliâ*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches*) in *Normanniâ*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *Indiâ* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa millaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & ampliùs. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici*, & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſûs & recurſûs ſupra modum augetur. Ad littora verò quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtûs reſpondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cùm vis Lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400; perſpicuum eſt, quòd vis illa ſit longè minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 4. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum eſt ad Solis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. 1.) ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Lunæ erit ad denſitatem Solis ut 4,4815 ad 1 directè, & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inverſè: id eſt (cùm diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis ſint 31′. 16″½ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ ut

ut 4891 ad 4000, ſeu 11 ad 9. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quàm Terra noſtra. Liber Tertius.

Corol. 4. Et cùm vera diameter Lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum Terræ ut 100 ad 365; erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ erit quaſi triplo minor quàm gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri Lunæ à centro Terræ erit ad diſtantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri Lunæ à centro Terræ in octantibus Lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam Terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum Terræ & Lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per Corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cùm Luna revolvatur, reſpectu Fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{6}$; ſinus verſus anguli, quem Luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illâ, quâ retinetur in orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe Lunæ per Corol. Prop. III. Et hâc vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ Lunæ à centro Terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 19789573 à centro Terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt Terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per Tabulam præcedentem in Prop. XX. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum*, exiſtente

De Mundi Systemate

exiſtente exceſſu quaſi $\frac{1}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur, per hoc computum, in latitudine *Lutetiæ* cadendo in Vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno Terræ in illâ latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hâc velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſuprà oſtenſum eſt ad Prop. IV. & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in ſyzygiis Lunæ, eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum Terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis Lunæ, diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum Terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam mediocrem Lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per Prop. XXVIII.

Corol. 9. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in ſyzygiis Lunæ, eſt ſexaginta ſemidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte ſemidiametri. Et in quadraturis Lunæ, diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt ſexaginta & unius ſemidiametrorum mediocrium Terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri.

Corol. 10. In ſyzygiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt 57′. 20″, 57′. 16″, 57′. 14″, 57′. 12″, 57′. 10″, 57′. 8″, 57′. 4″, reſpectivè.

In his computationibus attractionem magneticam Terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt, & ignoratur. Si quando verò hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum Maris, & Parallaxis Lunæ, cum diametris apparentibus Solis & Lunæ, ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

PROP. XXXVIII. PROB. XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus lunare fluidum eſſet, ad inſtar maris noſtri, vis Terræ, ad Fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet

eſſet ad vim Lunæ, quâ mare noſtrum in partibus & ſub Lunâ & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id eſt, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1081 ad 100. Unde cùm Mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{3}$, Fluidum lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de cauſâ figura Lunæ ſphæroïs eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 186. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. Q. E. I. Liber Tertius.

Corol. Inde verò fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium, eſſent longè tardiſſimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in Prop. XVII. allatam) reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi, & in Terram converti.

SECTIO IV.

De Præceſſione Æquinoctiorum.

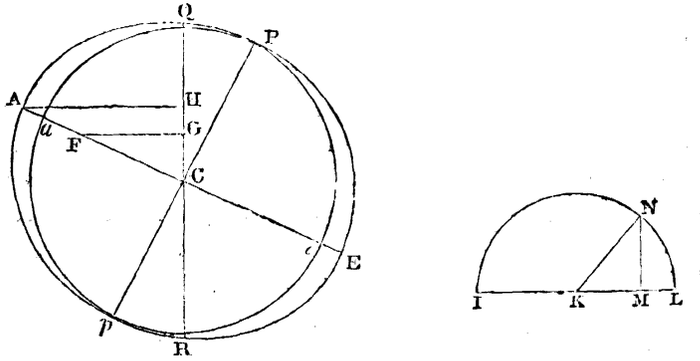
LEMMA I.

Si APEp *Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C, *& poliſ* P, p, *& æquatore* AE, *delineatam; & ſi centro* C, *radio* CP, *deſcribi intelligatur ſphæra* PapE; *ſit autem* QR *planum, cui recta à centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter inſiſtit; & Terræ totius exterioris* PapAPEpE, *quæ ſphærâ modò deſcriptâ altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia à plano: dico primò, quòd tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè diſtat, conſiſtentium vim & efficaciam, ad Terram conſimili motu circulari circum*

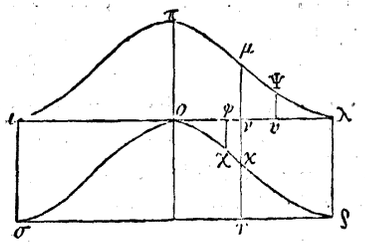
De Mundi Systemate

centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus ille circularis circum axem, in communi sectione æquatoris & plani QR *jacentem, peragetur.*

Nam centro K, diametro IL, describatur semicirculus INLK. Dividi intelligatur semicircumferentia INL in partes innumeras æquales; & à partibus singulis, N, ad diametrum, IL, demittantur sinus NM. Et summa quadratorum ex sinibus omnibus, NM, æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus KM, & summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semidiametris KN; ideoque summa quadratorum ex omnibus MN erit duplo



minor quàm summa quadratorum ex totidem semidiametris KN (a). Jam



(a) Puta rectam λι, positione datam, semicirculo ILNI æqualem esse. Media dividatur recta λι in puncto ο. Et in rectis οπ, λϱ, ισ ad perpendiculum eductis, capiantur οπ, λϱ, ισ semicirculi LNI radio, KL, singulatim æquales. Semicirculi arcui cuilibet LN ponatur recta λν æqualis. Et in recta μνξ, quæ rectam λι in puncto ν ad perpendiculum insistat, capiatur hinc inde μν, νξ; quarum altera quidem μν, duarum KL, NM, altera verò νξ duarum KL, KM, proportione sit tertia; ut sint rectangula KL × μο, KL × νξ quadratis ex NM, KM singulatim æqualia. Sint λπι, ϱσσ Curvæ, ad quas sunt puncta μ, ξ. Completoque rectangulo λισϱ; dico aream, λπισοϱλ, Curvis conclusam huic rectangulo æqualem. Quin et areas λπι, ϱσσιολ inter se æquales.

Primùm enim, productæ μξ rectæ σϱ in τ occurrat. Jam cùm sint rectangula KL × νμ, KL × νξ quadratis ex NM, KM singulatim æqualia; rectangula illa simul sumpta quadratis simul sumptis æqualia erunt. Sed rectangula illa simul sumpta rectangulo KL × μξ sunt æqualia; et quadrata simul sumpta quadrato ex KN, vel KL. Quare et rectangulum KL × μξ quadrato ex KL æquale erit. Quare

Liber Tertius.

Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales; & ab earum unâquâque, F, ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypothesin; & hæc vis ducta in distantiam CG erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut FG × GC ad AH × HC, hoc est, ut FC*q* ad AC*q*; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium FC*q* ad summam totidem AC*q*, hoc est (per jam demonstrata) ut unum ad duo. Q. E. D.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quàm in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quòd vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circuli AE *uniformiter per totum circuitum in morem*

Quare recta μξ rectæ KL, sive νπ æqualis. Et in omni magnitudine rectæ λν, seu arcûs LN, manebit rectarum μξ, νπ æqualitas. Quare fluente rectâ λν, erit $\mu\xi \times \dot{\lambda\nu} = \nu\pi \times \dot{\lambda\nu}$. Sed $\mu\xi \times \dot{\lambda\nu}$ fluxio est areæ λϱμλ, et $\nu\pi \times \dot{\lambda\nu}$ rectanguli λϱπτ est fluxio. Quare fluentes ipsæ, nempe area curvis conclusa λϱμλ, et area rectanguli λϱπτ, quoniam cum ipsâ rectâ λν simul à nihilo generari inceperint, erunt semper inter se æquales. Quare et area tota λϱσιπχ rectangulo λσ æqualis erit. Quod primùm demonstrandum erat.

Dico præterea areas λπιλ, ϱσιλ inter se æquales.

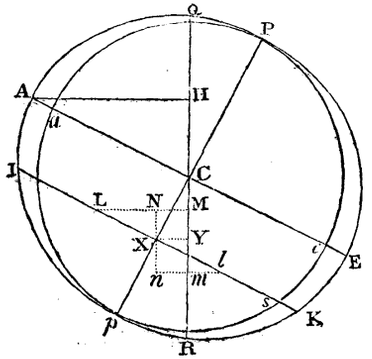
Capiantur enim λυ, οφ inter se æquales; quæ eâ lege fluant, ut semper inter se æquales maneant. Et à punctis υ, φ, educantur ad perpendiculum υψ, φχ, quarum illa υψ Curvæ λπ in ψ, altera φχ Curvæ ϱο in χ occurrat. E naturâ Curvæ λπ, rectangulum KL × υψ æquale erit quadrato à sinu arcûs λυ. Et è naturâ Curvæ ϱο, rectangulum KL × φχ quadrato è sinu arcûs οφ æquale erit. Sed arcus illi, λυ, οφ, cùm sint inter se æquales, sinus etiam æquales habent. Rectangula igitur KL × υψ, KL × φχ inter se æqualia. Quare et rectæ υψ, φχ inter se æquales. Sed $\dot{\lambda\upsilon} = \dot{o\varphi}$. Quare $\upsilon\psi \times \dot{\lambda\upsilon} = \varphi\chi \times \dot{o\varphi}$. Id est fluxio areæ λυψ fluxioni areæ οφχ æqualis. Quare et areæ ipsæ, quoniam cum rectis λυ, οφ simul à nihilo generari incipiant, erunt semper inter se æquales. Quare tota area λπι, areæ toti οϱλ æqualis.

Simili modo ostendetur area ισπ areæ σιο æqualis. Quare et area tota λπι toti λϱσιολ æqualis. Q. E. D.

De Mundi Systemate

annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim IK circulus quilibet minor, æquatori AE parallelus; sintque L, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum QR, quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula LM, *lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum QR, proportionales erunt perpendiculis illis LM, *lm*. Sit autem recta L*l* plano *Pape* parallela, & bisecetur eadem in X; & per punctum X agatur N*n*, quæ parallela sit plano QR, & perpendiculis LM, *lm* occurrat in N ac *n*, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. Et particularum L & *l* vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut LM × MC & *lm* × *mc*; hoc est, ut LN × MC + NM × MC & *ln* × *mc* − *nm* × *mc*, seu LN × MC + NM × MC & LN × *mc* − NM × *mc*: & harum differentia, LN × M*m* − NM × MC + *mc*, est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa, LN × M*m*, seu 2LN × NX, est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim 2AH × HC, ut LX*q* ad AC*q*. Et pars negativa, NM × MC + *mc*, seu 2XY × CY, ad particularum earundem in A consistentium vim 2AH × HC, ut CX*q* ad AC*q*. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & *l* simul sumptarum vis ad Terram rotandam, est ad vim particularum duarum iisdem æqualium & in loco A consistentium ad terram itidem rotandam, ut LX*q* − CX*q* ad AC*q*. Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur in



(b) Intellige materiam in perimetro circuli IK extra Globi superficiem sitam; sive materiam perimetro circuli IK sphæroidis, & perimetro circuli *os* Globi interjectam.

(c) LEMMA II. I.

Quantitas motûs in Circulo, cum datâ velocitate angulari circa centrum proprium circumacto, erit ut cubus è radio.

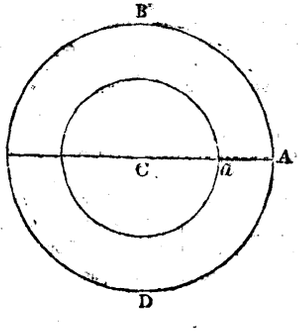
Multitudo corpusculorum in totâ superficie circulari, cujus radius C*a*, erit ut superficies ipsa: id

in particulas innumeras æquales, L, erunt omnes LX*q* ad totidem IX*q* ut 1 ad 2 (per Lem. 1.) atque ad totidem AC*q*, ut IX*q* ad 2AC*q*; & totidem CX*q* ad totidem AC*q* ut 2CX*q* ad 2AC*q*. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut IX*q* − 2CX*q* ad 2AC*q*: & propterea (per Lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut IX*q* − 2CX*q* ad AC*q*. Liber Tertius.

Jam verò si sphæræ diameter P*p* dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IX*q* (b): ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut IX*q* in IX*q* − 2CX*q*. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IX*q* in AC*q*. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IX*q* in IX*q* − 2CX*q* ad totidem IX*q* in AC*q*; hoc est, ut omnia AC*q* − CX*q* in AC*q* − 3CX*q* ad totidem AC*q* − CX*q* in AC*q*; id est, ut omnia AC*qq* − 4AC*q* × CX*q* + 3CX*qq* ad totidem AC*qq* − AC*q* × CX*q*; hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est AC*qq* − 4AC*q* × CX*q* + 3CX*qq*, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est AC*qq* − AC*q* × CX*q*; ac proinde per methodum fluxionum, ut AC*qq* × CX − $\frac{4}{3}$AC*q* × CX *cub.* + $\frac{3}{5}$CX*qc* ad AC*qq* × CX − $\frac{1}{3}$AC*q* × CX *cub.* id est, si pro CX scribatur tota *cp* vel AC, ut $\frac{4}{15}$AC*qc* ad $\frac{2}{3}$AC*qc*; hoc est, ut duo ad quinque. Q. E. D.

LEMMA III (c).

Iisdem positis: dico tertiò quòd motus Terræ totius circum axem jam antè descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit

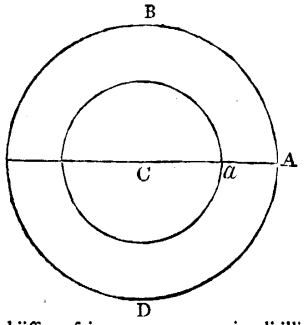


id est ut quadratum è radio. Fluente igitur radio C*a*, fluxio materiæ erit ut $2Ca \times \overline{Ca}$. Sed datâ velocitate angulari, velocitas corpusculi cujusque in circuitu circuli cujus radius C*a*, erit ut C*a*. Quare fluente radio C*a*, fluxio motûs erit ut $2Ca^2 \times \overline{Ca}$, et motus ipse ut $\frac{2Ca^3}{3}$, id est ut Ca^3.

Cor. Circulo, cujus radius CA, circum centrum proprium C circumacto, si vi quâdam efficiatur, ut materia omnis in areâ totâ circulari, à centro undique recedat, & in fornicem quendam circularem compingatur, cujus radius

De Mundi Systemate

erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque ad duo quadrata ex diametro; id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.



Eſt CA, quique eâdem velocitate angulari, quâcum priùs area tota circularis, circum centrum c circumagatur; motus hujus fornicis ad motum, qui antè areæ circularis erat, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Nam fluente radio c*a*, in circulo cujus ille c*a* radius fluxio motûs erit $2ca^2 \times \dot{ca}$; et motus totus in circulo illo $\frac{2}{3}ca^3$. Puta corpuſcula omnia, quæ erant in circuitu circuli cujus radius c*a*, in circuitum circuli extùni, cujus radius CA, aufugiſſe. Motus, qui horum corpuſculorum acceſſione fornici ABD accreverit, erit ut $2ca \times \dot{ca} \times CA$. Hæc erit fluxio motûs fornicis. Unde motus ejus totus erit ut $ca^2 \times CA$; cùm motus totus areæ circularis, cujus radius c*a*, erat $\frac{1}{3}ca^3$; nimirum dum materia, quam in fornicem abiiſſe poſuimus, per aream circuli illius æqualiter undique ſpargeretur. Hinc ſi c*a* in ipſam CA increverit, motus fornicis erit ut CA^3 cùm motus circuli fuerit ut $\frac{1}{3}CA^3$. Motus igitur fornicis ad motum circuli rationem habet quam 3 ad 2.

Cor. 2. Motus circuli ad motum annuli tenuiſſimi circularis, qui pari velocitate angulari circum centrum circumagatur, rationem habebit quam duplum materiæ in Circulo ad triplum materiæ in annulo.

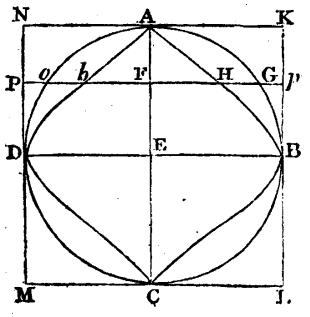
Cor. 3. Si Cylindri, qui æquali ſint altitudine, cum pari velocitate angulari circum axem quiſque proprium circumagantur, Motûs quantitates erunt ut cubi ex baſium radiis.

Cor. 4. Si materia omnis in Cylindro, vi quâdam ab axe undique fugata, in ipſâ ſuperficie cylindraceâ in parietem quendam rotundum compingatur, qui eâdem velocitate angulari, quâcum antè totum corpus cylindraceum, circum axem circumagatur; motus hujus parietis ad motum, qui cylindri antè fuerat, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Cor. 5. Si altitudine ſenſim imminutâ, paries ipſe, manente tam tenuiſſimâ ipſius craſſitudine, quàm latitudine ſpatii vacui quod intus habet, ſenſim ſe contrahat, & in Zonam ſive Annulum tenuiſſimum ultimò abeat; manente utique in pariete in annulum contracto, quæ antè ei inerat, materiâ, motus manebit; qui proinde ad motum, qui primùm erat Cylindri, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Cor. 6. Motus Cylindri circum axem circumacti ad motum annuli tenuiſſimi, qui cylindrum cingat, rationem habet quam duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in Annulo.

LEMMA II. PROB.



Circulo ABCD, *cujus centrum* E, *magnitudine & poſitione date, à puncto quolibet* F, *in diametro quâdam circuli poſitione datâ, eductam puta ad perpendiculum rectam* FG; *& in eâ ſumatur* FH, *ad quam* FG *rationem habeat quam quadratum ex radio* EA *ad quadratum ex* FG. *Invenienda ſit area Curvæ, ad quam eſt punctum* H.

Per centrum E ducatur diameter DB ad perpendiculum cum diametro CA. Satis patet puncta D, B ad Curvam eſſe quâ de agitur, & aream Curvæ à diametris AC, DB in partes quatuor æquales dividi. E naturâ Curvæ, ſolidum $EA^2 \times FH$ cubo ex FG æquale erit. Quare ſi pro radio EA ponatur 1, & x pro EF, erit $FH = \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}$, cùm propter circulum ſit $FG = \sqrt{1-x^2}$. Quamobrem ſi detur area cujus fluxio eſt $FG \times \dot{x}$,

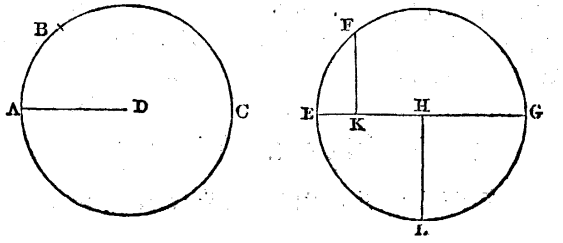
Liber Tertius.

Eſt enim motus cylindri, circum axem ſuum immotum revolventis, ad motum ſphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcrip-

$FG \times \dot{x}$, ſive area circularis BEFG, dabitur area cujus fluxio eſt $FH \times \dot{x}$, id eſt area BEFH (per Quad. Curv. Prop. VII. Caſ. 2.) Nimirum ſi area BEFG ſignificetur literâ A, area BEFH ſignificabitur hoc ſymbolo, $\frac{3A + x \times \overline{1-x^2}^{\frac{3}{2}}}{4}$. Id enim efficitur per Æquationem Canonicam ſecundi caſûs ejus Propoſitionis primam, ſi area BEFH ſcribatur pro A, 1 pro θ, $\frac{3}{4}$ pro λ, 2 pro n, 1 pro e. Quare ſi EF, ſive x, in ipſam EA, ſive 1, increverit, erit area tota BEAHB $= \frac{3}{4}A$, ſignificante jam literâ A circuli quadrantem. Hinc pars quarta areæ quæ definienda erat ad partem quartam circuli, ac proinde area tota ad circulum, rationem eam quam ternarius ad quaternarium habet. Q. E. I.

LEMMA III.

Sint duo annuli æquales ABC, EFG, *quorum centra* D, H. *Horum alter* ABC, *circum centrum ſuum* D *in plano immobili; alter* EFG *circum unam aliquam è diametris ſuis, puta* EG, *poſitione datam, ceu axem,*



intelligatur converti; eâ motûs lege, quâ radius HL *annuli* EFG, *qui axem* EG *ad perpendiculum inſiſtat, angulos ſcribat in plano illo cui rectus eſt axis* EG, *eorum æquales quos iiſdem temporibus radius quilibet annuli alterius* ABC *in annuli ipſius plano. Dico motum annuli* ABC *ad motum alterius* EFG *rationem habere quam circuli circuitus ad duplam diametrum.*

Capiantur arcus AB, EF æquales, & à puncto F in rectam EG ad perpendiculum deducatur FK. Velocitas corpuſculi cujuſque in annulo ABC ad velocitatem corpuſculi in loco F annuli alterius, EFG, rationem habet quam DA, vel HE, ad FK. Quare ſi arcus AB, EF eâ lege fluant, ut ſemper inter ſe æquales maneant, fluxio motûs in arcu AB ad fluxionem motûs in arcu EF rationem habebit quam EH ad FK; ſive eam quam $\dot{EF}$ ad $\dot{EK}$. Recta M eâ lege fluat, ut arcui AB, vel EF, ſemper ſit æqualis. Itaque cùm motus in arcu AB annuli ABC ſit ſemper ut arcus ipſe, recta mutabilis M motûs in arcu AB rationem ſemper ſervabit. Sit alia *m*, eâ lege mutabilis,

M ——————

m ——————

ut ad illam M rationem ſemper habeat, quam motus in arcu EF annuli EFG ad motum in arcu AB annuli ABC. Recta igitur *m* motûs in arcu EF rationem ſemper ſervabit. Quare et fluxio rectæ M ad fluxionem rectæ *m* rationem habebit quam fluxio motûs in arcu AB annuli ABC ad fluxionem motûs in arcu EF annuli EFC. Hoc eſt $\dot{M} : \dot{m} = \dot{EF} : \dot{EK}$. Sed propter rectam M arcui EF ſemper æqualem, erunt $\dot{M}$, $\dot{EF}$ ſemper inter ſe æquales. Quare et $\dot{m}$, $\dot{EK}$ inter ſe æquales erunt. Quare et fluentes *m*, EK, quæ, naſcente primùm arcu EF, ſimul à nihilo generari inceperint, erunt ſemper inter ſe æquales. Erit igitur $M : m = EF : EK$. Et quando arcus AB, EF in ſemicirculos ABC, EBG adoleverint, erit M ad *m*, id eſt motus in ſemicirculo ABC annuli ABC ad motum in ſemicirculo EFG annuli EFG, ut EFG ad EG; id eſt ut ſemiſſis circuitûs circuli ad diametrum, ſive ut circuitus ad duplam diametrum. Et cùm motus totus in annulo ABC duplus ſit ejus qui in ſemicirculo ABC, et motus totus in annulo EFC duplus ejus qui in ſemicirculo EFG, hi motus eandem inter ſe rationem gerent. Q. E. D.

tis

De Mundi Systemate

tis (d): & motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo (e); & annuli motus iste, circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri (f).

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus, Terrâ omni reliquâ sublatâ, solus in orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferratur, & interea circa axem suum, ad planum Ecliptica in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materiâ rigidâ & firmâ constaret.

PROP. XXXIX. PROB. XX.

Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in orbe circulari, ubi

(d) Puta sphæram et cylindrum plano quodam secari secundum axem communem; quod planum, cylindrum secando, efficiat quadratum KNMA (vid. fig. Lemm. H. II.) & sphæram secundo, circulum ABCD quadrato inscriptum. In axe AC capiatur punctum quodvis F. Puta sphæram & cylindrum denuò secari plano ad planum primùm recto, & cum plano æquatoris parallelo, quod per punctum F transeat, & secando planum illud primum faciat rectam *pP*, quæ axem ABC ad perpendiculum insistat. Occurrat recta *pP* circulo in punctis G, *a*; & capiatur FH, ad quam FG rationem habeat quam quadratum ex EA, vel *pF*, ad quadratum ex GF. Sit AHBEDA Curva, quæ, fluente recta AF, locus erit punctorum H. Fluxio motûs in Cylindro NKP erit ut motus in circulo, cujus radius est *pF*. Et fluxio motûs in sphæræ segmento OAG erit ut motus in circulo, cujus radius FG. Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphæræ rationem habebit, quam cubus ex *pF* ad cubum ex FG (Lemm. H. I); sive eam, quam cubus ex *pF* ad solidum $pF^2 \times FH$; sive eam quam recta *pF* ad rectam FH. Sed *pF* ad FH rationem habet quam fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ HA*b*. Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphæræ rationem habet, quam fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ HA*b*. Jam verò fluente rectâ AF, rectangulum KP ita fluet, ut motûs in cylindro fluente KNPI rationem semper servet. Nam motus in cylindro erit semper ut cylindrus; et cylindrus erit semper ut AF; id est ut rectangulum KN or AF, sive KP. Literâ Z significetur spatium, quod eâ lege fluat, ut ad rectangulum KP rationem habeat, quam motus in segmento fluente sphæræ, GAO, ad motum in Cylindro fluente PKNP. Spatium igitur Z motûs in segmento sphæræ GAO rationem semper servabit. Quare et fluxio rectanguli KP erit ad fluxionem spatii Z ut fluxio motûs in cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphæræ, sive ut fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ AH*b*. Quare $\dot{Z} = AH\dot{b}$. Quare et fluentes ipsæ, Z, AH*b* cùm nascente primùm rectâ AF simul à nihilo generari inceperint, erunt semper inter se æquales. Quare $Z : KP = AH\dot{b} : KP$. Id est motus in sphæræ segmento OAG ad motum in cylindro KNP*p* ut area AH*b* ad rectangulum KP. Quare motus in sphærâ totâ ad motum in cylindro circumscripto rationem habebit quam tota area AHBCD*b*A ad quadratum KM: sive eam, quæ componitur è rationibus areæ AHBCD*b*A ad circulum ABCD circulique ad quadratum circumscriptum. Sed area AHBCD*b*A ad circulum ABCD rationem habet quam 3 ad 4. (Lemm. H. III.) Quare motus in sphærâ ad motum in Cylindro rationem habet, quæ componitur è rationibus ternarii ad quaternarium circulique ad quadratum circumscriptum: sive eam, quam tres circuli æquales ad quatuor quadrata circumscripta. Q. E. D.

(e) Lemma H. I. Cor. 6.

(f) Lemma H. III. Jam verò literâ *r* significetur circuli radius; literâ *q* arcus quadrantis; literâ M, materia in cylindro; literâ *m*, materia in sphærâ inscriptâ; literâ μ, materia in annulo Cylindrum & sphæram, apud contactum communem, ambiente.

Motus Annuli circum diametrum propriam erit ad motum ejus circum axem sphæræ ut $r : q$. (Lemma H. III.)

Motus annuli circum axem sphæræ ad motum cylindri ut $3\mu : 2M$. (Lemma H. Cor. 6.)

Motus Cylindri ad motum sphæræ ut $4r^3 : \frac{3rq}{2} = 8r : 3q$.

Quare motus Annuli ad motum sphæræ ut $8r^2\mu : 2q^2M$.

Sed $M = \frac{1}{2}m$.

Quare motus Annuli ad motum sphæræ ut $8r^2\mu : 3q^2m$.

Sed $8r^2 : 3q^2 = 1000000 : 925275$.

Erit igitur motus Annuli ad motum sphæræ ut $1000000 \times \mu$ ad $925275 \times m$. Q. E. D.

(g) Si hoc verè dictum fit, nescio qui fieri possit, ut alius sit punctorum æquinoctialium motus, à vi solis oriundus, quàm calculi Newtoniani suadent. Quem tamen longè alium invenerunt viri permagni Eulerus & Simsonus nostras; quos velim Lector consulas. Ipse nil definio.

Liber Tertius.

ubi Nodi sunt in quadraturis, erat $16''.35'''.16^{iv}.36^{v}$, & hujus dimidium $8''.17'''.38^{iv}.18^{v}$. (ob rationes suprà explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; sitque anno toto sidereo $20^{gr}.11'.46''$. Quoniam igitur nodi Lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}.11'.46''$ in antecedentia; & si plures essent Lunæ, motus Nodorum cujusque (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. 1.) forent ut tempora periodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}.11'.46''$ ut dies sidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuò non contingant, sive liquefcant, & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat, & inflexibilis reddatur (g).

Fingamus igitur quòd annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni PapAPepE, quæ globo Pape superior est; (vid. fig. pag. 114) & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut *ac qu.* ad AC *qu.*−*ac qu.* id est (cùm Terræ semidiameter minor FC vel *ac* sit ad semidiametrum majorem AC ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secun-

De Mundi Systemate

dum æquatorem cingeret, & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. 3.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius Nodi, seu Puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus, qui restabit in annulo, erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis, ex annulo & globo compositi, ad motum $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem, quibus Nodi Lunarum (ut suprà explicui) atque ideo quibus Puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur, id est vires 31T *in fig. pag.* 72 & 74, sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano QR, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. 2.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ PAPEPE, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda Puncta Æquinoctialia, evaderet minor quàm priùs in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''.\ 56'''.\ 50^{iv}$.

Cæterùm hic motus ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ minuendus est, idque in ratione sinûs 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet $9''.\ 7'''.\ 20^{iv}$. Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda est ad vim Solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio, à vi Lunæ oriunda, $40''.\ 52'''.\ 52^{iv}$, ac tota Præcessio annua, à vi utrâque oriunda, $50''.\ 00'''.\ 12^{iv}$. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum

noctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minutorum secundorum plus minus quinquaginta. Liber Tertius.

Si altitudo Terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quàm $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quàm ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Descripsimus jam systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum. Superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

SECTIO V.

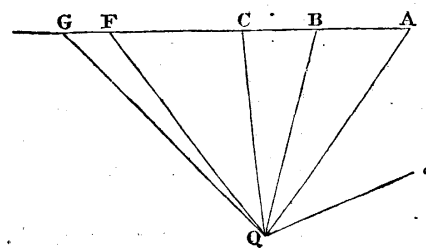
De Cometis.

LEMMA IV.

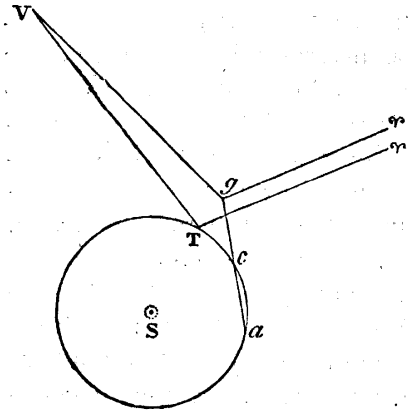
Cometas esse Lunâ superiores & in regione Planetarum versari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores, si Terra vergit ad oppositionem. Et contrà, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi, si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis; qui pro motu Terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum Cometâ, & motu angulari circa Solem tanto celeriùs fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa è Terrâ spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem, vel retardatione, vel motu retrogrado, distantia Cometæ in hunc mo-

De Mundi Systemate



dum colligitur. Sunto ♈QA, ♈QB, ♈QC obſervatæ tres longitudines Cometæ ſub initio motûs; ſitque ♈QF longitudo ultimò obſervata, ubi Cometa videri deſinit. Agatur recta ABC, cujus partes, AB, BC, rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur AC ad G, ut ſit AG ad AB ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur QG. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈QG longitudo Cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈QG, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: ſin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terrâ, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel fortè retrogradum; uti modò expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus eſt; neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit.



Diſtantia verò Cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet S ſolem; *ac* T, orbem magnum; *a*, locum Terræ in obſervatione primâ; *c*, locum Terræ in obſervatione tertiâ; T, locum Terræ in obſervatione ultimâ; & T♈, lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈TV æqualis angulo

angulo ♈QF, hoc eſt, æqualis longitudini Cometæ, ubi Terra verſatur in T. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut AG ad AC; & erit *g* locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi T♈ parallela, & capiatur angulus ♈*g*V angulo ♈QG æqualis, erit hic angulus ♈*g*V æqualis longitudini Cometæ è loco *g* ſpectati; & angulus T*g*V parallaxis erit, quæ oritur è tranſlatione Terræ de loco *g* in locum T: ac proinde V locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus, V, orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet (a).

Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in Circulis maximis quamdiu moventur celeriùs; at in fine curſûs, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his Circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt, quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propiùs adſunt, deſcendunt ſæpiùs infra orbes Martis & inferiorum Planetarum (b).

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à Sole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia; dicendo quòd diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione ſubduplicatâ lucis ad lucem inverſè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata, & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem, ſeu ſtella, in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce

(a) De Syſt. Mund. § 58.
(b) Vid. Lib. De Syſt. Mund. § 59.

De Mundi Systemate

verò & claritate capitis ſuperabat caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia Cometæ ad diſtantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverſè, & 12″ ad 30″ directè, id eſt, ut 24 ad 30, ſeu 4 ad 5. Rurſus Cometa anni 1665, menſe Aprili, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſuâ penè Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′; at nucleus, cum Planetis ope tubi optici collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cùm diameter capillitii Cometarum rarò ſuperet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet ſtellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cùm lux earum cum luce Saturni non rarò conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt, quòd Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longè ſupra. Errant igitur toto cœlo, qui Cometas in regionem Fixarum propè ablegant: quâ certe ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quàm Planetæ, qui hîc ſunt, illuſtrantur à ſtellis fixis (c).

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propiùs ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copiâ lucis à ſe reflexæ Planetas æmuletur. Inde veriſimile ſit Cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda

(c) De Syſt. Mund. § 61.

Liber Tertius.

nuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus, à capite ſemper ortus, per ſpatia nimis ampla, incredibili cum velocitate & expanſione, propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari, & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis iluſtrabitur à Sole, ideoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas, inſtar trabium ignitarum, nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem, ne dicam Veneres plures conjunctas, quandoque ſuperaret (d).

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terrâ Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior anni 1665 (obſervante *Hevelio*) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo apparente, ideoque præterierat Perigæum; ſplendor verò capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa, radiis ſolaribus obtectus, deſiit apparere. Cometa anni 1683 (obſervante eodem *Hevelio*) in fine menſis Julii, ubi primùm conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur uſque ad *Sept.* 4, quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis, micrometro menſuratâ, colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6, eſſe tantùm 6′. 5″ incluſâ comâ, at *Sept.* 2, eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motûs; at initio tamen in viciniâ ſolis longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium menſis *Decembris*,

(d) De Syſt. Mund. § 62.

&

De Mundi Systemate

& iſte anni 1680, circa finem ejuſdem menſis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in Perigæis. Verùm ſplendor maximus capitum contigit ante duas ferè ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis ſolaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate ſolis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1, majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parùm, ſplendore ſeu claritate luminis, plurimùm defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris in diſtantiâ novem graduum à Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velociſſimè motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3, apparebat ut ſtella quartæ. *Jan.* 9, ut ſtella quintæ. *Jan.* 13, ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25, vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita, quæ, temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à Terrâ diſtantias æqualiter lucere debuiſſent, in plagâ Solis maximè ſplenduere, ex alterâ Perigæi parte evanuere. Igitur ex magnâ lucis in utroque ſitu differentiâ, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere, ubi capita velociſſimè moventur, atque ideo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in viciniâ Solis (e).

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à ſe reflexâ.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur, cur Cometæ tantoperè frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verùm percurrendo hiſtorias Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio Solem verſus, quàm in hemiſphærio oppoſito; præter alios proculdubio non paucos, quos lux

(e) De Syſt. Mund. § 63 & 64.

ſolaris

ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à Sole, ut nudis oculis ſe priùs detegendos exhibeant, quàm ſint ipſo Jove propiores. Spatii autem, tantillo intervallo circa Solem deſcripti, pars longe major ſita eſt à latere Terræ, quod Solem reſpicit; inque parte illâ majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent (f). Liber Tertius.

Corol. 3. Hinc etiam manifeſtum eſt, quòd Cœli reſiſtentiâ deſtituuntur. Nam Cometæ, vias obliquas & nonnunquam curſui Planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos, etiam contra curſum Planetarum diutiſſimè conſervant. Fallor ni genus Planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quòd ſcriptores aliqui Meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmoſphæris ingentibus cinguntur; & Atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic Terra, ſi è Planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus propè deliteſceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficiliùs cernitur. Et multo magis corpora Cometarum ſub Atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

PROP. XL. THEOR. XX.

Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri Primi, collatum cum Prop. VIII. XII & XIII. Libri Tertii (g).

Corol 1. Hinc ſi Cometæ in orbem redeunt; orbes erunt Ellipſes, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione ſeſquiplicatâ. Ideoque Come-

(f) De Mund. Syſt. § 65.
(g) De Mund. Syſt. § 71, 72, 73, 74.

tæ,

De Mundi Systemate

tæ, maximâ ex parte ſupra Planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardiùs revolventur. Ut ſi axis orbis Cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id eſt, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. 1.) velocitas Cometæ omnis, erit ſemper ad velocitatem Planetæ cujuſvis, circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ Planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam Cometæ à centro ſolis quaxproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu Ellipſeos in quâ Terrâ revolvitur ſemidiametrum maximam, eſſe partium 100000000: & Terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa, in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum reciprocè, ideoque datur.

Corol. 4. Unde ſi latus rectum Parabolæ quadruplo majus ſit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area, quam Cometa radio ad Solem ducto ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione ſubduplicatâ.

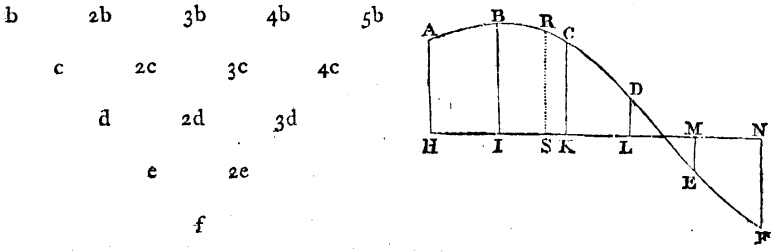
LEMMA V.

Invenire lineam Curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam, HN, demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Liber Tertius.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. ſecundas, c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias, d, $2d$, $3d$, &c. id eſt, ita ut ſit AH−BI=b, BI−CK=$2b$, CK−



DL=$3b$, DL+EM=$4b$, −EM+FN=$5b$, &c. dein $b-2b=c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hîc eſt f. Deinde erectâ quâcunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad Curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic AH=a; −HS=p; $\frac{1}{2}p$ in −IS=q; $\frac{1}{3}q$ in +SK=r; $\frac{1}{4}r$ in +SL=s; $\frac{1}{5}s$ in +SM=t; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probè obſervatis, erit RS=$a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Caſ. 2. Quòd ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas, per intervalla perpendiculorum diviſas, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; ſecundas, per intervalla bina diviſas, c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias, per intervalla terna diviſas, d, $2d$, $3d$, &c. quartas, per intervalla quaterna diviſas, e, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. poſtea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic AH=a; −HS=p; p in −IS=q; q in +SK=r; r in +SL=s; s in +SM=t; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata RS=$a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Corol. 1. Hinc areæ Curvarum omnium inveniri poſſunt quam-

De Mundi Systemate

proxime. Nam si Curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ Curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

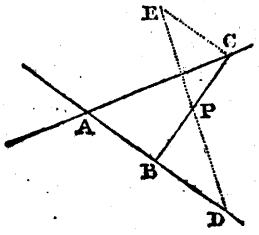
Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes *(in fig. præced.)* HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque longitudines Cometæ; HS, tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur Curva regularis ABCDE; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantùm 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

LEMMA VII.

Per datum punctum, P, *ducere rectam lineam,* BC, *cujus partes,* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*



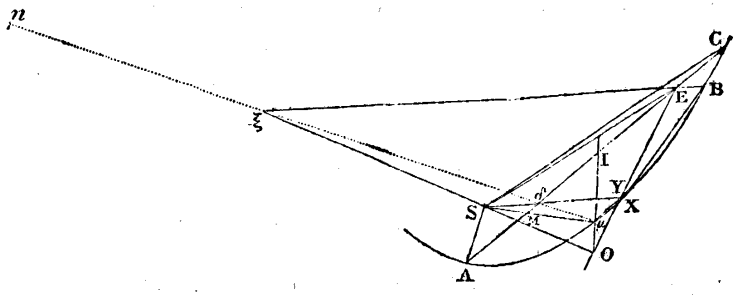
A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD, & producatur eadem versus rectam alteram AC usque ad E, ut sit PE ad PD in datâ illâ ratione. Ipsi AD parallela sit EC; & si agatur CPB, erit PC ad PB ut PE ad PD. Q. E. F.

LEMMA

Liber Tertius.

LEMMA VIII.

Sit ABC *Parabola, umbilicum habens* S. *Chordâ* AC *bisectâ in* I *abscindatur segmentum* ABCA, *cujus diameter sit* Iμ *& vertex* μ.



In Iμ *productâ capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* ξ, *ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quòd punctum* E *abscindet de chordâ* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim EO secans arcum parabolicum ABC in Y, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea AEXμA ad aream curvilineam ACYμA ut AE ad AC. Ideoque cùm triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eâdem ratione, erit area tota ASEXμA ad aream totam ASCYμA ut AE ad AC. Cùm autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX(b), erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si ad aream ASEXμA addatur triangulum EXB, & de summâ auferatur triangulum SEB, manebit area ASBXμA areæ ASEXμA æqualis, atque ideo ad aream ASCYμA ut AE ad AC. Sed areæ ASBXμA æqualis est area ASBYμA quamproximè, & hæc area ASBYμA est ad aream ASCYμA, ut tempus descripti arcûs AB ad tempus descripti arcûs totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè. Q. E. D.

Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accurate.

(b) ——*si jungatur* BX] si jungantur BX, SB.

De Mundi Systemate

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ, & in eâ capiatur ξn, quæ sit ad μB ut 27MI ad 16Mμ: acta Bn secabit chordam AC in ratione temporum magis accuratè quàm priùs. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, si punctum B magis distat à vertice principali Parabolæ quàm punctum μ; & citrà, si minus distat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

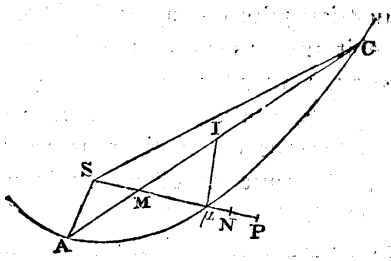
Rectæ Iμ *&* μM *&* *longitudo* $\frac{\text{AIC}}{4\text{S}\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam 4Sμ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *sit pars tertia ipsius* μI, *&* SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ: *Cometa, quo tempore describit arcum* AμC, *si progrederetur eâ semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; area, quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ ASCμ. Ideoque contentum sub longitudine in tangente descriptâ & longitudine Sμ esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM, ut area ASCμ ad triangulum ASC, id est, ut SN ad SM. Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut Sμ ad SN. Cùm autem velocitas cometæ in altitudine SP sit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. 1.) ad ejus velocitatem in altitudine Sμ, in subduplicatâ ratione SP ad Sμ inverse, id est, in ratione Sμ ad SN; longitudo, hâc velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut Sμ ad SN. Igitur



AC

AC & longitudo hâc novâ velocitate descripta, cùm sint ad longitudinem in tangente descriptam in eadem ratione, æquantur inter se. Q. E. D. LIBER TERTIUS.

Corol. Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine Sμ + $\frac{2}{3}$Iμ, eodem tempore describeret chordam AC quamproximè.

LEMMA XI.

Si Cometa, motu omni privatus, de altitudine SN *seu* Sμ + $\frac{1}{3}$Iμ *demitteretur, ut caderet in Solem, & eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in Solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describat arcum* AC, *descensu suo describeret spatium longitudini* Iμ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore describat arcum parabolicum AC, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per Lemma novissimum) describet chordam AC, ideoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. 1.) eodem tempore in circulo, cujus semidiameter esset SP, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcûs parabolici chordam AC, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illâ in solem, describeret semisse temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. 1.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id est, spatium $\frac{\text{AI}q}{4\text{SP}}$. Unde cùm pondus cometæ in solem in altitudine SN sit ad ipsius pondus in solem in altitudine SP, ut SP ad Sμ :: Cometa, pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in solem cadendo, describet spatium $\frac{\text{AI}q}{4\text{S}\mu}$; id est, spatium longitudini Iμ vel Mμ æquale. Q.E.D.

PROP. XLI. PROB. XXI.

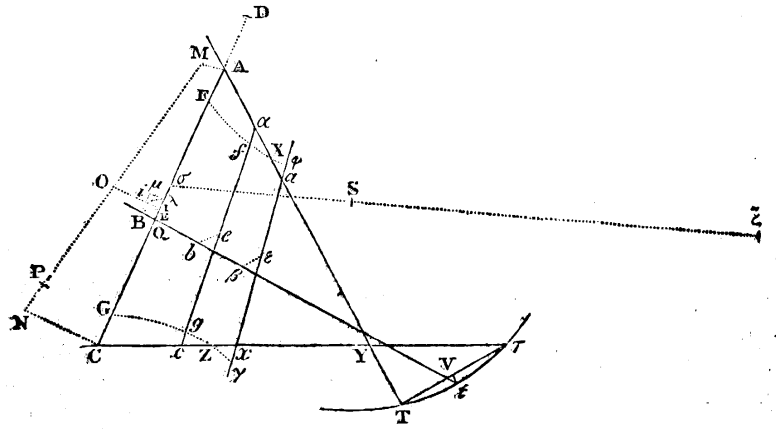
Cometæ in Parabolâ moti Trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro Primo, quæ ad ejus solutionem

De Mundi Systemate

nem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi Cometa tardiùs movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum E (in fig. Lem. VIII.) incidat in punctum M quamproximè, &



inde aberret verſus *t* potius quàm verſus A. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus Cometæ locus per Lemma ſextum.

Deſignent S ſolem; T, *t*, *τ*, tria loca Terræ in orbe magno; TA, *t*B, *τ*C, obſervatas tres longitudines Cometæ; v, tempus inter obſervationem primam & ſecundam; w, tempus inter ſecundam ac tertiam; x, longitudinem, quam Cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à ſole diſtantiâ, deſcribere poſſet, quæque (per Corol. 3. Prop. XL. Lib. 3.) invenienda eſt; & *t*v, perpendiculum in chordam T*τ*. In obſervatâ longitudine mediâ, *t*B, ſumatur utcunque punctum B, pro loco Cometæ in plano Eclipticæ; & inde verſus ſolem, S, ducatur linea BE, quæ ſit ad ſagittam *t*v, ut contentum ſub SB & S*t quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt SB & tangens latitudinis cometæ in obſervatione ſecundâ ad radium *t*B. Et per punctum

Liber Tertius.

punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC, ad rectas TA & *τ*C terminatæ, ſint ad invicem ut tempora v & w: & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modò B ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum I*i*. Per punctum B age occultam B*i* ipſi AC parallelam. Junge occultam S*i* ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum *i*Iλ*μ*. Cape Iσ æqualem 3Iλ, & per ſolem, S, age occultam σξ æqualem 3Sσ+3*i*λ. Et deletis jam literis A, F, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE; quæ ſit ad priorem BE in duplicatâ ratione diſtantiæ BS ad quantitatem S*μ*+⅓*i*λ. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac priùs, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes v & w. Et erunt A & C loca Cometæ magis accuratè.

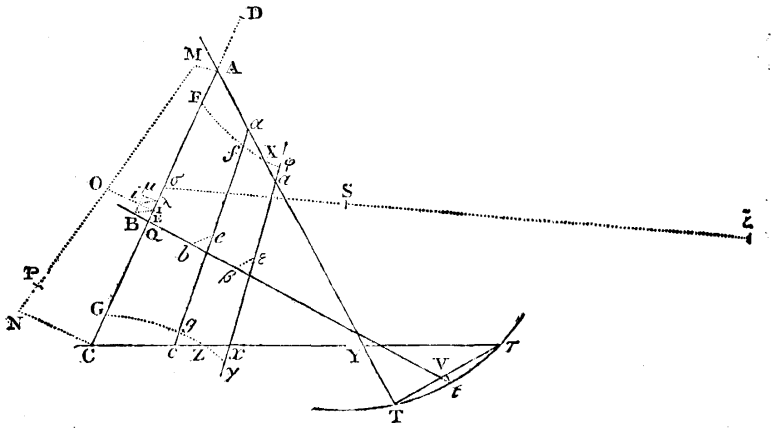
Ad AC, biſectam in I, erigantur perpendicula AM, CN, IO, quorum AM & CN ſint tangentes latitudinum in obſervatione primâ ac tertiâ ad radios TA & *τ*C. Jungatur MN ſecans IO in O. Conſtituatur rectangulum *i*Iλ*μ* ut priùs. In IA productâ capiatur ID æqualis S*μ*+⅔*i*λ. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſuprà inventam X, in ſubduplicatâ ratione mediocris diſtantiæ telluris à ſole (ſeu ſemidiametri orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca Cometæ, per quæ orbis ejus in plano Eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in rectâ AC capiatur CG ipſi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eaſdem partes rectæ NC jaceant.

Eâdem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex aſſumpto puncto B inventa ſunt, inveniantur, ex aſſumptis utcunque punctis aliis *b* & *β*, puncta nova *e*, *a*, *c*, *g*, & ε, α, *x*, *γ*. Deinde ſi per G, *g*, *γ* ducatur circumferentia circuli G*gγ*, ſecans rectam *τ*C in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in AC, *ac*, *αx* capiantur AF, *af*, *αφ*, ipſis CG, *cg*, *xγ* reſpectivè æquales; & per puncta F, *f*, *φ* ducatur circumferentia circuli F*fφ*, ſecans rectam AT in X: erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios TX & *τ*Z; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per

Prop.

De Mundi Systemate

Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo deſcribatur Parabola, & hæc erit trajectoria Cometæ. Q. E. I.



Conſtructionis hujus demonſtratio ex lemmatibus conſequitur: quippe cùm recta AC ſecetur in E in ratione temporum, per Lemma VII. ut oportet per Lem. VIII. & BE per Lem. XI. ſit pars rectæ BS vel Bξ, in plano Eclipticæ, arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. X.) longitudo ſit chordæ arcûs, quem Cometa in orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi MN æqualis fuerit, ſi modò B ſit verus cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterùm puncta B, *b*, β non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQ*t*, in quo veſtigium orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecat rectam *t*B, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ ſit ad $\frac{4}{3}$Tτ in ſubduplicatâ ratione SQ ad S*t*. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini V*t*, determinabitur punctum B, quod primâ vice uſurpare licet. Tum rectâ AC deletâ & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ductâ, & inventâ inſuper longitudine MP; in *t*B capiatur punctum *b*, eâ lege, ut ſi TA, τC ſe mutuò ſecuerint in Y, ſit diſtantia Y*b* ad diſtantiam YB, in ratione compoſitâ ex ratione MP ad MN & ratione ſubduplicatâ SB ad S*b*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium β, ſi modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes

duæ

Libri Tertius.

duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia B*b* perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta F, *f* & G, *g*, actæ rectæ F*f* & G*g* ſecabunt TA & τC in punctis quæſitis X & Z *.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, Tabula ſequens exhibet.

	Tem. appar.	Tem. verum.	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Lat. bor.
	h.	h.	°	°	°
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♑ 1 . 51 . 23	♑ 6 . 32 . 30	8 . 28 . 0
21	6 . 22½	6 . 36 . 59	11 . 6 . 44	♒ 5 . 8 . 12	21 . 42 . 13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14 . 9 . 26	18 . 49 . 23	25 . 23 . 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16 . 9 . 22	28 . 24 . 13	27 . 0 . 52
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19 . 19 . 43	♓ 13 . 10 . 41	28 . 9 . 58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20 . 21 . 9	17 . 38 . 20	28 . 11 . 53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26 . 22 . 18	♈ 8 . 48 . 53	26 . 15 . 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0 . 29 . 2	18 . 44 . 4	24 . 11 . 56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1 . 27 . 43	20 . 40 . 50	23 . 43 . 52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4 . 33 . 20	25 . 59 . 48	22 . 17 . 28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16 . 45 . 36	♉ 9 . 35 . 0	17 . 56 . 30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21 . 49 . 58	13 . 19 . 51	16 . 42 . 18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 52	24 . 46 . 59	15 . 13 . 53	16 . 4 . 1
5	6 . 50	7 . 4 . 43	27 . 48 . 52	16 . 59 . 6	15 . 27 . 3

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

	Temp. appar.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Latitudo.
	h. ′	° ′ ″	° ′ ″
1681. *Feb.* 25	8 . 30	♉ 26 . 18 . 35	12 . 46 . 46
27	8 . 15	27 . 4 . 30	22 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 4	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

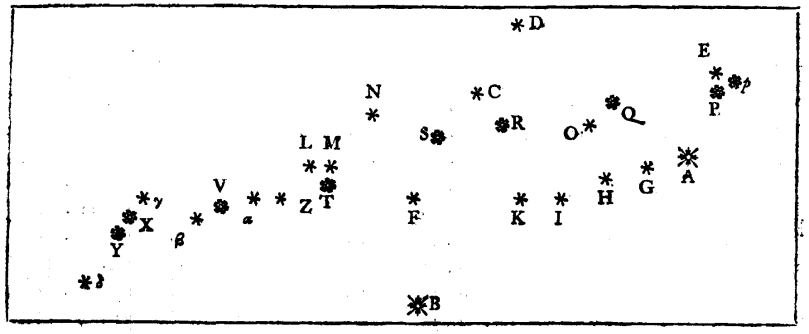
Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis & po-

* Confer Problemata ad finem Libri de Syſt. Mund.

ſitiones

De Mundi Systemate

ſitiones fixarum inter ſe & poſitiones cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet A ſtellam quartæ magnitudinis in ſiniſtro calcaneo Perſei *(Bayero o)* B ſtellam ſequentem tertiæ magnitudinis in ſiniſtro pede *(Bayero ζ)* & C ſtellam ſextæ magnitudinis *(Bayero n)* in talo ejuſdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *p*, P, Q, R, S, T, V, X, loca cometæ in obſervationibus ſuprà deſcriptis: & exiſtente diſtantiâ AB partium $80\frac{7}{12}$, erat AC partium $52\frac{1}{4}$, BC $58\frac{5}{6}$, AD $57\frac{5}{12}$, BD $82\frac{6}{11}$, CD $23\frac{2}{3}$, AE $29\frac{4}{7}$, CE $57\frac{1}{2}$, DE $49\frac{11}{12}$, AI $27\frac{7}{12}$,



BI $52\frac{1}{69}$, CI $36\frac{7}{142}$, DI $53\frac{5}{12}$, AK $38\frac{2}{39}$, BK 43, CK $31\frac{5}{9}$, FK 29, FB 23, FC $36\frac{1}{4}$, AH $18\frac{6}{7}$, DH $50\frac{7}{8}$, BN $46\frac{5}{12}$, CN $31\frac{1}{3}$, BL $45\frac{5}{12}$, NB $31\frac{5}{7}$. Ho erat ad HI ut 7 ad 6, & producta tranſibat inter ſtellas D & E, ſic ut diſtantia ſtellæ D ab hâc rectâ eſſet $\frac{1}{6}$CD. LM erat ad LN ut 2 ad 9, & producta tranſibat per ſtellam H. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Tandem *Poundius* noſter iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in Tabulam ſequentem retulit.

Fixarum

Liber Tertius.

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26 . 41 . 50	12 . 8 . 36
B	28 . 40 . 23	11 . 17 . 54
C	27 . 58 . 30	12 . 40 . 25
E	26 . 27 . 17	12 . 52 . 7
F	28 . 28 . 37	11 . 52 . 22
G	26 . 56 . 8	12 . 4 . 58
H	27 . 11 . 45	12 . 2 . 1
I	27 . 25 . 2	11 . 53 . 11
K	27 . 42 . 7	11 . 53 . 26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29 . 33 . 34	12 . 7 . 48
M	29 . 18 . 54	12 . 7 . 20
N	28 . 48 . 29	12 . 31 . 9
Z	29 . 44 . 48	11 . 57 . 13
α	29 . 52 . 3	11 . 55 . 48
β	♊ 0 . 8 . 23	11 . 48 . 56
γ	0 . 40 . 10	11 . 55 . 16
δ	1 . 3 . 20	11 . 30 . 42

Poſitiones verò cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. Cometæ in *p* exiſtentis diſtantia à ſtellâ E erat minor quàm $\frac{3}{13}$AE, major quàm $\frac{1}{5}$AE, ideoque æqualis $\frac{3}{14}$AE proximè; & angulus A*p*E nonnihil obtuſus erat, ſed ferè rectus. Nempe ſi demitteretur ad *p*E perpendiculum ab A, diſtantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$*p*E.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, Cometæ in P exiſtentis diſtantia à ſtellâ K erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$AE, minor quàm $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$AE, ideoque æqualis $\frac{1}{4}$AE, ſeu $\frac{8}{39}$AE quamproximè. A perpendiculo autem à ſtellâ A ad rectam PD demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$PE.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. Cometæ in Q exiſtentis diſtantia à ſtellâ O æquabat diſtantiam ſtellarum O & H, & recta QO producta tranſibat inter ſtellas K & B. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. Cometa, in R exiſtens, ſtellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$CK, & paulo minor quàm $\frac{1}{3}$CK+$\frac{1}{8}$CR, ideoque æqualis $\frac{1}{3}$CK+$\frac{1}{16}$CR, ſeu $\frac{16}{45}$CK.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. Cometæ exiſtentis in S diſtantia à ſtellâ C erat $\frac{4}{9}$FC quamproximè. Diſtantia ſtellæ F à rectâ CS productâ erat $\frac{1}{24}$FC; & diſtantia ſtellæ B ab eâdem rectâ erat quintuplo major quàm diſtantia ſtellæ F. Item recta NS producta tranſibat inter ſtellas H & I, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ H quàm ſtellæ I.

Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m. Cometâ exiſtente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}$ML, & recta LT producta tranſibat inter B

De Mundi Systemate

& F, quadruplo vel quintuplo propior F quàm B, auferens à BF quintam vel ſextam ejus partem verſus F. Et MT producta tranſibat extra ſpatium BF ad partes ſtellæ B, quadruplo propior exiſtens ſtellæ B quàm ſtellæ F. Erat M ſtella perexigua, quæ per teleſcopium videri vix potuit, & L ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Die lunæ *Mart.* 7. hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. Cometâ exiſtente in v, recta vα producta tranſibat inter B & F, auferens à BF verſus F $\frac{1}{10}$BF, & erat ad rectam vβ ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ à rectâ $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2}$vβ.

Die mercurii *Mart.* 9. horâ $8\frac{1}{2}$. p. m. Cometâ exiſtente in x, recta γx æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γx erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometâ exiſtente in Y, recta γY æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γY æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$, vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa, ob viciniam horizontis, cerni vix potuit, nec locus ejus tam diſtinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes derivabam longitudines & latitudines Cometæ, & *Poundius* noſter ex correctis fixarum locis loca Cometæ correxit, & loca correcta habentur ſuprà. Micrometro parum affabrè conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores, quatenus ex obſervationibus noſtris oriantur, minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem, juxta obſervationes noſtras, in fine motûs ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, à parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis tres, quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni *st* partium 9842,1 & v*t* partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo *t*B partium 5657; inveni sB 9747, BE primâ vice 412, sμ 9593, *i*λ 413: BE ſecundâ vice 421, OD 10186, X 8528,4, MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem diſtantias TX 4775 & TZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ☋ &

Liber Tertius.

& aſcendentem in ♈1^{gr}. 53′; inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61^{gr}. 20′$\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo 8^{gr}. 38′, & eſſe in ♐27^{gr}. 43′ cum latitudine auſtrali 7^{gr}. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8^{d}. 0^{h}. 4′ p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum, ex Tabulâ ſinuum naturalium collectas, determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis $16\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tandem ut conſtaret an Cometa in orbe ſic invento verè moveretur, collegi, per operationes partim arithmeticas partim graphicas, loca cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in Tabulâ ſequente videre licet.

	Diſtant Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obſ.	Lat. Obſ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr.	gr.		
Dec. 12	2792	♍ 6. 32′	8. 18½	♍ 6. 31¼	8. 26	+1′	− 7¾
29	8403	♐ 13. 13¾	28. 0	♐ 13. 11¼	28. 10$\frac{1}{12}$	+2	−10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17. 0	15. 29½	♉ 16. 59¼	15. 27¼	+0	+ 2¼
Mar. 5	21737	29. 19¼	12. 4	29. 20⅝	12. 3¼	−1	+ ⅝

Poſtea verò *Halleius* noſter orbitam per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quàm per deſcriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ☋ & ♈1^{gr}. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad Eclipticam 61^{gr}. 20′$\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* 8^{d}. 0^{h}. 4′: diſtantiam verò perihelii à nodo aſcendente, in orbitâ cometæ menſuratam, invenit eſſe 9^{gr}. 20′, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis à terrâ diſtantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè inſtituto, loca Cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tempus

Tempus verum.	Distantia Cometæ à ☉.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h.		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46	28028	♍ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	−3. 5	−2. 0
21. 6.37	61076	♏ 5. 6.30	21.43.20	−1.42	+1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	−1. 3	−0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	−1.28	0.44
29. 8. 3	84021	♐ 13.12.40	28.10.10	+1.59	+0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28 11.20	+1.45	−0.33
Jan. 5. 6. 1½	101440	♑ 8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	−1.20	+1.25
30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	−2.10	−0.11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	−2.42	+0.14
5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	−0.41	+2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	−2.49	+1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Apparuit etiam hic Cometa menſe *Novembri* præcedente, & *Coburgi* in *Saxonia* à D^no^. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas, ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentiâ longitudinum *Coburgi* & *Londini*, graduum undecim, & locis Fixarum, à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca Cometæ determinavit ut ſequitur.

Novem. 3^d^. 17^h^. 2′, tempore apparente *Londini*, Cometa erat in ♌ 29^gr^. 51′ cum lat. bor. 1^gr^. 17′. 45″.

Novem. 5^d^. 15^h^. 58′ Cometa erat in ♍ 3^gr^. 23′ cum lat. bor. 1^gr^. 6′.

Novem. 10^d^. 16^h^. 31′ Cometa æqualiter diſtabat à ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abfuit ab eâ. In ſtellarum catalogo *Flamſtediano* σ tunc habuit ♍ 14^gr^. 15′ cum lat. bor. 1^gr^. 41′ fere, τ verò ♍ 17^gr^. 3′½, cum lat. auſtr. 0^gr^. 34′. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ 15^gr^. 39′¼, cum lat. bor. 0^gr^. 33′½. Sit diſtantia Cometæ à rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum 7′½, circiter. Et inde Cometa erat in ♍ 15^gr^. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Obſervatio

Obſervatio prima, ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas, abundè ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in obſervatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29^gr^. 30′. 22″. latitudo borealis 1^gr^. 25′. 7″. & diſtantia ejus à ſole 115546.

Porro *Halleius*, obſervando quòd Cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſſ.* anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & inſigni (præterquam quòd ſub mortem *Cæſaris*, cauda, ob incommodam telluris poſitionem, minùs apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum, cujus axis major eſſet partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ 2^gr^. 2′; inclinationem plani orbis ad planum Eclipticæ 61^gr^. 6′. 48″; perihelium Cometæ in hoc plano ♐ 22^gr^. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7^d^. 23^h^. 9′; diſtantiam perihelii à nodo aſcendente in plano Eclipticæ 9^gr^. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: computavit motum Cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus, tam ex obſervationibus deducta quàm in hoc orbe computata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

Tempus

De Mundi Systemate

Tempus verum.	Long. obs.	Lat. Bor. obs.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
5.15.37	♍ 3.23. 9	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18.	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec. 12. 4.46	♑ 6.22.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
25. 7.59	♉ 9.53. 0	17 56.30	♉ 9.34 11	17.56. 6	−0.49	−0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes Cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quàm motus Planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis; & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hîc rectè definitum fuiſſe.

In Tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*, Filis ad fixas applicatis, cometam obſervârunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr.

Liber Tertius.

0gr. 30′. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id eſt, horâ matutinâ 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr. fine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id eſt, horâ 5. 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexienſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in rectâ lineâ in virginis auſtrali manu, *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ, *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′ cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ* in latitudine 42½ graduum, horâ quintâ matutinâ (id eſt *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30′, uti à cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. horâ mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à ſpicâ ♍ quaſi 2gr. boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ 19gr. 23′. 47″ cum lat. auſtr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ*, cometa diſtabat à ſpicâ ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in inſulâ *Jamaicâ*, cometa diſtabat à ſpicâ intervallo quaſi gradûs unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½gr. horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 10ª *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpicâ propemodum conjunctum, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem quaſi ¾gr. Et ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo, quòd horâ 9. 44′ *Londini* Cometa erat in ♎ 18gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 25′ circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine auſtrali 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, horâ ſextâ matutinâ *Venetiis* (id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30′. Eodem die *Boſtoniæ*,

De Mundi Systemate

distabat cometa à spicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7½ cometam observârunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine australi 1gr. 16′, *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in insulâ *Jamaicâ* cometa visus est prope principium scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum spicâ virginis, id est, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* in *Indiâ Orientali* (id est ad horam noctis præcedentis 11h. 20′ *Londini*) capta est distantia cometæ à spicâ ♍ 7gr. 35′ in orientem. In lineâ rectâ erat inter spicam & lancem, ideoque versabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. australi 1gr. 11′ circiter; & post horas 5 & 40′ (ad horam scilicet quintam matutinam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. austr. 1gr. 16′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine australi 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa visus est à *Montenaro* in ♏ 2gr. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♏ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac priùs, id est, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♏ 1gr. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* horâ mat. 6½ *Hookius* noster cometam vidit in ♏ 3gr. 30′ circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per spicam virginis & cor leonis; non exactè quidem, sed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quòd linea à cometâ per spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus cordis leonis, interposito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & spicam virginis transiens, Eclipticam secuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′. Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ, in ♏ 3gr., ejus latitudo fuisset 2gr. 26′. Sed cùm cometa, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem spicæ ♍, eratque 1gr. 30′ circiter; &, consentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone*, perpetuò augebatur; ideoque jam sensibiliter major erat quàm 1gr. 30′. Inter limites autem jam constitutos 2gr. 26′ & 1gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′ circiter. Cauda

cometæ,

Liber Tertius.

cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad spicam ♍, declinans aliquantulum à stellâ istâ, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & cauda, æquatori ferè parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id est horâ 4½ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♏ 8gr. 8′, cum latitudine australi 2gr. 31′, captis scilicet ejus distantiis à stellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum solis cometa visus est à *Montenaro* in ♏ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & spicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quàm 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulo major erat quàm 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decrevisse volunt, & *Cellius* & observator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradûs unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præsertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores sunt eæ, quæ per positiones cometæ ad Fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & observatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♏ 11gr. 45′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♏ 13gr. circiter. Per theoriam verò cometa jam erat in ♏ 13gr. 22′. 42″.

Nov. 25. Ante ortum solis *Montenarus* cometam observavit in ♏ 17¾gr. circiter. Et *Cellius* observavit eodem tempore, quòd cometa erat in lineâ rectâ inter stellam lucidam in dextro femore virginis & lancem australem libræ, & hæc recta secat viam cometæ in ♏ 18gr. 36′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♏ 18⅓gr. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ, quatenus congruunt inter se; & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad usque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis secuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam se-

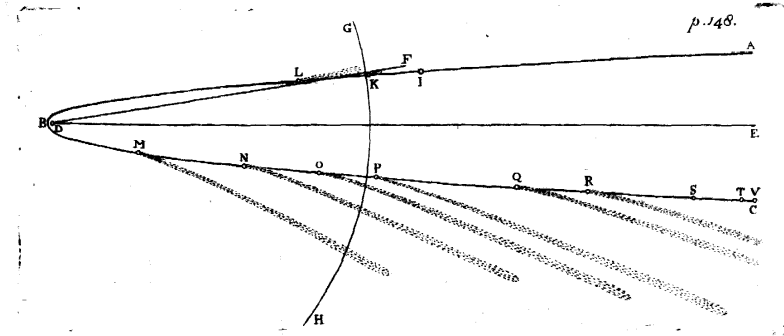
cuit

De Mundi systemate

cui non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab Eclipticâ in austrum declinabat; & postea, mense *Decembri*, gradibus 29 vergebat ab Eclipticâ in septentrionem; partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in solem & redibat à sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per signa novem, à leonis scilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter signum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris* descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantùm 40; postea verò, motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque eadem observat leges cum theoriâ Planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.

Cæterùm trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram, quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere *(vid. Tab.)*: ubi ABC denotat trajectoriam cometæ, D solem, DE trajectoriæ axem, DF lineam nodorum, GH intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, I locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, K locum ejusdem *Nov.* 11, L locum *Nov.* 19, M locum *Dec.* 12, N locum *Dec.* 21, O locum *Dec.* 29, P locum *Jan.* 5 *sequent.* Q locum *Jan.* 25, R locum *Feb.* 5, S locum *Feb.* 25, T locum *Mar.* 5, & U locum *Mar.* 9. Observationes verò sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4 & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta, non nisi semissem gradûs unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Pontbæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30^{ar}. longa, solique directè opposita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam δ, quæ



quæ tunc erat in ♒ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali alâ, & deſinebat prope ſtellas A, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♒ 19½gr. cum latitudine boreali 34gr¼. circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero* α, β) deſinens in ♒ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longè ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali 42gr. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, horâ 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Pontheo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hâc ſtellâ ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à ſtellâ illâ 2gr. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22gr. cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr. circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat ferè ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans à β & *Schedir*, & diſtantiam ab utrâque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24gr. cum latitudine 47½gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54gr; ideoque deſinebat in ♉ 19gr. cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat 40gr; curva autem erat, & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum, & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſimâ deſinebat è regione ſtellæ ζ in latere *Perſei*. Diſtantia termini caudæ à circulo ſolem & cometam jungente erat 3gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8½gr. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel

De Mundi Systemate

6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente, ubi cœlum valdè serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim, & paulo ultrà. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25 & deinceps Cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti, & reliqua Cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quòd corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce, in transitu suo per viciniam Solis, statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à Sole. Ideoque cùm distantia Cometæ à centro Solis *Decemb.* 8. ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ à centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major, quàm calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si rectè conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud Cometam in Perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in Perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis, digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius, in aëre consistens, vix amitteret. Globus autem major calorem diutiùs conservaret in ratione diametri, propterea quòd superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor est pro quantitate materiæ

teriæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem *, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quòd duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quàm ea diametri: & optârim rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quòd Cometa mense *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longè majorem & splendidiorem quàm antea mense *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è Cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor, quòd cauda nihil aliud sit quàm vapor tenuissimus, quem caput seu nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterùm de Cometarum Caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse Solis, per translucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis, in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram; vel denique nubem esse, seu vaporem, à capite Cometæ jugiter surgentem, & abeuntem in partes à Sole aversas. Opinio prima eorum est, qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideoque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius est, & ægriùs sentitur: in Cœlis autem sine materiâ reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum, luce Solis illustratum, uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum, distinctè ad nos transmissa, demonstrat Medium cœleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse,

* Rectius ut opinor diebus 20000000.

id,

De Mundi Systemate

id, quoniam rariſſimè contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones, tum oculorum, tum Aëris tremuli, referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt, quòd ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſat: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos, ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat, quòd Caudæ non ſoleant videri in Cometis, cùm eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: ſciendum eſt, quòd lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: Cometæ autem ſæpè caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valdè obtuſa. Sic enim Cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſuâ vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat, ſplendore notabili, uſque ad gradus 40, 50, 60 & 70 longitudinis & ultrà: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantùm magnitudinis; cauda verò, luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili, longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultrà: ut ſuprà dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10, ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa, in iiſdem cœli regionibus, in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa anni 1680 *Decemb.* 28. horâ $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, verſabatur in ☌ $8^{gr}.\ 41'$, cum latitudine boreali $28^{gr}.\ 6'$, Sole exiſtente in ♑ $18^{gr}.\ 26'$. Et cometa anni 1577, *Dec.* 29 verſabatur in ☌ $8^{gr}.\ 41'$ cum latitudine boreali $28^{gr}.\ 40'$, Sole etiam exiſtente in ♑ $18^{gr}.\ 26'$ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione

Liber Tertius.

poſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri, & in regiones à Sole averſas aſcendere, confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quòd in planis orbium Cometarum, per Solem tranſeuntibus, jacentes deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quòd ſpectatori, in his planis conſtituto, apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propiùs accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quòd caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quòd curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quòd deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque ideo quòd cauda, convexo ſui latere, partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quòd caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores, & limite minùs indiſtincto terminatæ, quàm ad concava. Pendent igitur phænomena Caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectâ petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit, à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit, ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in viciniâ Solis, & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate

De Mundi Systemate

incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſiùs reflectet, & limite minùs indiſtincto terminabitur. De Caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hîc nihil adjicio; propterea quòd vel à mutationibus Aeris noſtri, & motibus nubium, caudas aliquâ ex parte obſcurantium, oriantur; vel fortè à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari (i).

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate Aeris noſtri. Nam Aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus, quàm Aqua ejuſdem ponderis; ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem Aëris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò, per regulam multis experimentis confirmatam, quòd compreſſio Aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quódque gravitas ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Terræ, computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. 2. ineundo, inveni quòd Aer, ſi aſcendatur à ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quàm apud nos in ratione longè majori, quàm ſpatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus Aeris noſtri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine ſemediametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones uſque ad ſphæram Saturni, & longè ultra. Proinde cùm Aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma, ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quàm ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altiùs aſcendat, debebit cauda eſſe quàm rariſſima. Et quamvis ob longè craſſiorem Cometarum atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem

(i) De Mund. Syſt. §. 67. & 70.

Liber Tertius.

vitationem Solem verſus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in ſe mutuò, fieri poſſit ut Aer in ſpatiis cœleſtibus, inque Cometarum caudis, non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè ſufficere, ex hâc computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudinè ſuâ paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat, & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum craſſitudinem, luce pariter ſolari illuſtratam, aſtra minima ſine claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quàm Aeris noſtri in tenebroſo cubiculo, latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis (k).

Quo temporis ſpatio vapor à capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci ferè poteſt ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi rectâ aſcendat à Sole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectâ aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſûs ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à lineâ caudæ divergat. Hoc pacto inveni quòd vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat à capite ante *Dec.* 11, ideoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore Perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio, in vicinià Solis, celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiu apparuit, ex vapore ferè omni conſtabat, qui à tempore Perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non priùs evanuit, quàm ob nimiam ſuam tam à Sole illuſtrante quàm ab oculis noſtris diſtantiam vi-

(k) De Mund. Syſt. § 68.

deri

De Mundi Systemate

deri defiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum, quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum, quem habuere ſub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrimè peragunt, ac diutiſſimè conſervant.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum, & progreſſum in partes à Sole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à ratione prorſus alienum, non obſtante quòd ſubſtantiæ craſſæ impediti ſſimis in regionibus noſtris à radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quàm graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu Aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii ſolares non agitant Media, quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa, calore ſibi communicato, rarefiet; & ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam, quâ prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes, ex quibus cauda componitur. Ad aſcenſum vaporum conducit etiam, quòd hi gyrantur circa Solem, & eâ actione conantur à Sole recedere: at Solis Atmoſphæra, & materia cœlorum, vel planè quieſcit, vel motu ſuo quem à Solis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſûs caudarum in viciniâ Solis, ubi orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & eâ ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt,

Liber Tertius.

conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur, & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet, ut caudæ poſtea decidant à capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadent, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quo minùs caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque, facillimè accipiant, & poſtea liberrimè ſervent (l).

Caudæ igitur, quæ in Cometarum Periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde, poſt longam annorum ſeriem, cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubinde in Periheliis Cometarum illorum, qui ad uſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit, ac dilatatur. Quâ ratione fit, ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quàm juxta caput Cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem, & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi, & cum eorum Atmoſphæris miſceri, rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omninò requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſè ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & Terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur, & in Terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus om-

(l) De Mund. Syſt. § 69.

ninò

De Mundi Systemate

ninò creſcunt, dein magnâ ex parte in Terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ indies augetur; & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuò decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor Spiritum illum, qui Aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipuè venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem excurrendo in caudas, diminuuntur; &, eâ certe in parte quæ Solem reſpicit, anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum à Sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modò ad ſolem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ, de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ diſtantiis obſcurius apparuit poſt Perihelium ſuum quàm antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigienſi*, *Novem.* 19, Cometa hicce luce ſuâ quantumvis plumbeâ & obtuſâ, æquabat Spicam Virginis, & clariùs micabat quàm poſtea. Et *Montenaro Nov.* 20. ſt. vet. Cometa apparebat major ſtellis primæ magnitudinis, exiſtente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ, qui menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quòd materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur, quòd capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſcura & exigua. Nam anno 1668 *Mart.* 5. ſt. nov. horâ ſeptimâ veſpertinâ *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo

Liber Tertius.

nimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Luſitaniâ* quartam ferè cœli partem (id eſt, gradus 45) occupâſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt, quòd caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et in Chronico *Saxonico* ſimilis legitur cometa anni 1106, *cujus ſtella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex eâ exivit valdè clarus, & quaſi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio menſis *Februarii*, ac deinceps circa veſperam, ad occaſum Solis brumalem. Inde verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno, ab horâ tertiâ* [rectiùs ſextâ] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quòd ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente verò die quantum potuit viſum eſt. Nam quàm minimâ fieri poteſt diſtantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cùm* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt, ad 60^gt.] *extendit. Apparuit autem tempore byberno* [An. 4. Olymp. 101.] *& aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis ſolaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare, vel paulo ſuperare, videbatur; ſed majores apparuere Cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem, vel etiam Lunam æquâſſe traduntur.

Diximus

De Mundi Systemate

Diximus Cometas esse genus Planetarum in orbibus valdè eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur; sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propiùs accedunt, ut plurimum minores esse, nè Solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium verò transversas diametros, & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iisdem orbibus, post longa temporum intervalla, redeuntium, determinanda reliquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROP. XLII. PROB. XXII.

Inventam Cometæ Trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quàm maximè distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longè à Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. 1. institutas, describatur sectio conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. 1. inventâ, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut suprà: deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint *d* & *e*, nec non tempus totum *t*, quo area tota *d* + *e* describi debeat.

Oper.

Liber Tertius.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ describi debeat.

Jam sit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis + & − probè observatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut sit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et si in operatione primâ 1 designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem nodi alterutrius; erit $1+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè; erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum latus transversum trajectoriæ, quam Cometa describit. Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. Q. E. I.

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem Cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures Cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem Cometam, in eodem orbe revolventem. Et tum demum, ex revolutionum temporibus, dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypothesi quòd sint Parabolicæ. Nam hujusmodi Trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ Cometæ anni 1680, quam cum observationibus suprà contuli, sed etiam ex eâ Cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio*

De Mundi Systemate

obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, ſed minùs accuratè. Ex iiſdem obſervationibus *Halleius* noſter loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis ſic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum aſcendentem in ♊ 21^{gr}. 13′. 55″; Inclinationem orbitæ ad planum Eclipticæ 21^{gr}. 18′. 40″; diſtantiam Perihelii à Nodo in orbitâ 49^{gr}. 27′. 30″; Perihelium in ♌ 8^{gr}. 40′. 30″ cum latitudine auſtrinâ heliocentricâ 16^{gr}. 1′. 45″; Cometam in Perihelio *Novem.* 24^{d}. 11^{h}. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13^{h}. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri; & latus rectum Parabolæ 410286, exiſtente mediocri Terræ à Sole diſtantiâ 100000. Quàm probè loca Cometæ in hoc orbe computata congruunt cum obſervationibus, patebit ex Tabulâ ſequente ab *Halleio* ſupputatâ.

Temp.

Liber Tertius.

Temp. Appar. *Genadi*, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.		Loca obſervata.		Loca computata in Orbe.	
		gr. ′ ″		gr. ′ ″		gr. ′ ″
Decemb. 3^{d}.18^{h}.29½	à Corde Leonis	46.24.20	Long. ♎	7. 1. 0	♎	7. 1.29
	à Spicâ Virginis	22.52.10	Lat. auſt.	21.39. 0		21.38.50
4.18. 1½	à Corde Leonis	46. 2.45	Long. ♎	16.15. 0	♎	6.16. 5
	à Spicâ Virginis	23.52.40	Lat. auſt.	22.24. 0		22.24. 0
7.17.48	à Corde Leonis	44.48. 0	Long. ♎	3. 6. 0	♎	3. 7.33
	à Spicâ Virginis	27.56.40	Lat. auſt.	25.22. 0		25.21.40
17.14.43	à Corde Leonis	53.15.15	Long. ♌	2.56. 0	♌	2.56. 0
	ab Hum. Orionis dext.	45.43.30	Lat. auſt.	49.25. 0		49.25. 0
19. 9.25	à Procyone	35.13.50	Long. ♊	28.40.30	♊	28.43 0
	à Lucid Mandib. Ceti	52.56. 0	Lat. auſt.	45.48. 0		45.46. 0
20. 9.53½	à Procyone	40.49. 0	Long. ♊	13. 3. 0	♊	3. 5. 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	40. 4. 0	Lat. auſt.	39.54. 0		39.53. 0
21. 9. 9½	ab Hum. dext. Orionis	26.21.25	Long. ♊	2.16. 0	♊	2.18 30
	à Lucid Mandib. Ceti	29.28. 0	Lat. auſt.	23.41. 0		33.39.40
22. 9. 0	ab Hum. dext. Orionis	29.47. 0	Long. ♉	24.24. 0	♉	24.27. 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	20.29.30	Lat. auſt.	27.45. 0		27 46. 0
26. 7.58	à Lucidâ Arietis	23.20. 0	Long. ♉	9. 0. 0	♉	9. 2.28
	ab Aldebaran	26.44. 0	Lat. auſt.	12.36. 0		12.34 13
27. 6.45	à Lucidâ Arietis	20.45. 0	Long. ♉	7. 5.40	♉	7. 8.45
	ab Aldebaran	28.10. 0	Lat. auſt.	10.23. 0		10.23.13
28. 7.39	à Lucidâ Arietis	18 29. 0	Long. ♉	5 24.45	♉	5.27.52
	à Palilicio	29.37. 0	Lat. auſt.	8.22.50		8.23.37
31. 6.45	à Cing. Androm.	30.48.10	Long. ♉	2. 7.40	♉	2. 8.20
	à Palilicio	32.53.30	Lat. auſt.	4.13. 0		4.16.25
Jan. 1665. 7. 7.37½	à Cing. Androm.	25.11. 0	Long. ♈	28.24.47	♈	28.24. 2
	à Palilicio	37.12.25	Lat. bor.	0.54 0		0.53. 0
13. 7. 0	à capite Androm.	28. 7.10	Long. ♈	27. 6.54	♈	27. 6.39
	à Palilicio	38.55.20	Lat. bor.	3. 6.50		3. 7.40
24. 7.29	à Cing. Androm.	20.32.15	Long. ♈	26.29.15	♈	26.28.50
	à Palilicio	40. 5. 0	Lat. bor.	5.25.50		5.26. 0
Feb. 7. 8. 57			Long. ♈	27. 4.46	♈	27.24 55
			Lat. bor.	7. 3.29		7. 3.15
22. 8.46			Long. ♈	28.29.46	♈	28.29.58
			Lat. bor.	8.12.36		8.10.25
Mar. 1. 8.16			Long. ♈	29.18.15	♈	29.18.20
			Lat. bor.	8.38.26		8.36.12
7. 8.37			Long. ♉	0. 2.48	♉	0. 2.42
			Lat. bor.	8.56.30		8.56.56

De Mundi Systemate

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis, quam in ſequentibus vocabo γ, erat in Υ 28^{gr}. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7^{gr}. 8′. 58″. Secunda arietis erat in Υ 29^{gr}. 17′. 18″ cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 16″. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo A, erat in Υ 28^{gr}. 24′. 45″ cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 33″. Cometa verò *Feb.* 7^{d}. 7′. 30″ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* 7^{d}. 8′. 37″ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & A rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ à ſtellâ γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & A, id eſt 1^{gr}. 19′. 46″ in circulo magno, atque ideo ea erat 1^{gr}. 20′. 46″ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1^{gr}. 20′. 26″, manebit longitudo Cometæ Υ 27^{gr}. 9′. 49″. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione Cometam poſuit in Υ 27^{gr}. 0′ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in Υ 26^{gr}. 59′. 24″. Ratione mediocri poſui eundem in Υ 27^{gr}. 4′. 46″. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem Cometæ jam poſuit 7^{gr}. & 4′ vel 5′ boream verſus. Eandem rectiùs poſuiſſet 7^{gr}. 3′. 29″, exiſtente ſcilicet differentiâ latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & A.

Feb. 22^{d}. 7^{h}. 30′ *Londini*, id eſt *Feb.* 22^{d}. 8^{h}. 46′ *Gedani*, diſtantia Cometæ à ſtellâ A, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam A & primam arietis, ſeu 15′. 57″. Et diſtantia cometæ à lineâ jungente ſtellam A & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4′. Ideoque Cometa erat in Υ 28^{gr}. 29′. 46″, cum lat. bor. 8^{gr}. 12′. 36″.

Mart. 1^{d}. 7^{h}. 0′ *Londini*, id eſt *Mart.* 1^{d}. 8^{h}. 16′ *Gedani*, Cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1^{gr}. 33′, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia Cometæ à ſecundâ arietis erat 8′. 16″ ſecundum *Hookium*, vel 8′. 5″ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa verò ſecundum *Gottignies* jam modò prætergreſſus fuerat ſecundam arietis, quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id eſt 1′. 35″ circiter (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta 1′. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo Cometæ Υ 29^{gr}. 18′, & latitudo borealis 8^{gr}. 36′. 26″.

Liber Tertius.

Mart. 7^{d}. 7^{h}. 30′ *Pariſiis* (id eſt *Mart.* 7^{d}. 8^{h}. 37′ *Gedani*) ex obſervationibus *Auzoutii* diſtantia Cometæ à ſecundâ arietis æqualis erat diſtantiæ ſecundæ arietis à ſtellâ A, id eſt 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & ſecundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. Ideoque Cometa erat in Υ 0^{gr}. 2′. 48″. Ex ſchemate obſervationum *Auzoutii*, quod *Petitus* conſtruxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8^{gr}. 54′. Sed ſculptor viam cometæ ſub finem motûs ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in ſchemate obſervationum *Auzoutii*, à ſe conſtructo, incurvationem irregularem correxit, & ſic latitudinem cometæ fecit eſſe 8^{gr}. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere poteſt 8^{gr}. 56′, vel 8^{gr}. 57′.

Viſus etiam fuit hic Cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in Υ 0^{gr}. 18′, cum lat. bor. 9^{gr}. 3½′ circiter.

Apparuit hic Cometa menſes tres, ſignaque ferè ſex deſcripſit, & uno die gradus ferè virginti confecit. Curſus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, theoria à principio ad finem cum obſervationibus non minus accuratè congruit, quàm theoriæ Planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent; ut inſpicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta ſecunda ab angulo inter nodum aſcendentem & perihelium, ſeu conſtituendo angulum illum 49^{gr}. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) parallaxis annua inſignis fuit; & inde demonſtratur motus annuus Terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano Eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♎ 23^{gr}. 23; inclinatio orbitæ ad Eclipticam 83^{gr}. 11′; Perihelium in ♊ 25^{gr}. 29′. 30″; diſtantia Perihelia à Sole 56020, exiſtente radio orbis magni

De Mundi Systemate

100000, & tempore perihelii *Julii* 2^{d}. 3^{h}. 50′. Loca autem Cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Comp. Lat. Bor.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37. 4	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	—1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	—0.53	—1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	—0.39	—0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	—2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29 32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	—0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	—1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	—1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	—2. 2	—0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	—4.30	—5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	—1.12	—0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Auſtr.	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Auſtr.	—3.48	—2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.53	11. 7.12	5.16.50	—0. 2	—0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	—1. 1	—0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	—1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21^{gr}. 16′. 30″; Inclinatio orbitæ ad planum Ecliptiçæ 17^{gr}. 56′. 0″; Perihelium in ♒ 2^{gr}. 52′. 50″; Diſtantia Perihelia à Sole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000; et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4^{d}. 7^{h}. 39′. Loca verò ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1682

Liber Tertius.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis.	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	—0.12	+0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0. 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	—0.47	+2.26
22. 8. 8	9.33.35	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	—0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	—0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.19	+3.49	+3.11
4. 7.22	22 11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+1.22	—0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	—0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum Cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus Nodus aſcendens (computante D. *Bradleo*, Aſtronomiæ apud *Oxonienſes* Profeſſore *Saviliano*) erat in ♈ 14^{gr}. 16′; Inclinatio orbitæ ad planum Eclipticæ 49^{gr}. 59′; Perihelium in ♉ 12^{gr}. 15′. 20″; Diſtantia Perihelia à Sole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000; & tempore æquato Perihelii *Septem.* 16^{d}. 16^{h}. 10′. Loca verò Cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à ſeipſo & patruo ſuo D. *Pound*-dio, & à D. *Halleio* obſervatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1723 Temp. Æquat.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Com. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9.8. 5	♒ 7.22.15	5. 2. 0	♒ 7.21.20	5. 2.47	+49	—47
10.6.21	6.41.12	7.44.13	6.41.42	7.43.18	—50	+55
12.7.22	5.39.58	11.55. 0	5.40.19	11.54.55	—21	+ 5
14.8.57	4.59.49	14.43.50	5. 0.37	14.44. 1	—48	—11
15.6.35	4.47.41	15.40.51	4.47.45	15.40.55	— 4	— 4
21.6.22	4. 2.32	19.41.49	4. 2.21	19.42. 3	+11	—14
22.6.24	3.59. 2	20. 8.12	3.59.10	20. 8.17	— 8	— 5
24.8. 2	3.55.29	20.55.18	3.55.11	20.55. 9	+18	+ 9
29.8.56	3.56.17	22.20.27	3.56.42	22.20.10	—25	+17
30.6.20	3.58. 9	22.32.28	3.58.17	22.32.12	— 8	+16
Nov. 5.5.53	4.16.30	23.38.33	4.16.23	23.38. 7	+ 7	+26
8.7. 6	4.29.36	24. 4.30	4.29.54	24. 4.40	—18	—10
14.6.20	5. 2.16	24.48.46	5. 2.51	24.48.16	—35	+30
20.7.45	5.42.20	25.24.45	5.43.13	25.25.17	—53	—32
Dec. 7.6.45	8. 4.13	26.54.18	8. 3.55	26.53.42	+18	+36

His

De Mundi Systemate

His exemplis abundè satis manifestum est, quòd motus Cometarum per Theoriam à nobis expositam non minùs accuratè exhibentur, quàm solent motus Planetarum per eorum theorias. Et propterea orbes Cometarum per hanc theoriam enumerari possunt, & tempus periodicum Cometæ, in quolibet orbe revolventis, tandem sciri, & tum demum orbium Ellipticorum latera transversa, & Apheliorum altitudines innotescent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, descripsit orbem, cujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20^{gr}. 21′; Inclinatio plani orbis ad planum Eclipticæ erat 17^{gr}. 2′; Perihelium erat in ♒ 2^{gr}. 16′; & distantia Perihelia à Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* 16^{d}. 3^{h}. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe Cometæ, qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa spatio annorum 75, & axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt[3]{c}$: 75×75 ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. Et distantia Aphelia Cometæ hujus à Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ à Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si Cometa spatio annorum septuaginta quinque in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur, & altiùs ascendere.

Cæterùm Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum à Sole distantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in se mutuò nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non est expectandum, ut Cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quàm quæ à causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco, more Planetarum, sed inde migrent, & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis suis, ubi tardissimè moventur, quàm longissimè distent ab invicem, & se mutuò quàm minimè trahant. Quâ de causâ Cometæ,

Liber Tertius.

tæ, qui altiùs descendunt, ideoque tardissimè moventur in Apheliis, debent altiùs ascendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à Sole in Perihelio suo quàm parte sextâ diametri Solis (m); & propter summam velocitatem in vicinià illâ, & densitatem aliquam Atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad Solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio, ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari potest, & subinde in Solem incidere. Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, & sub initio quàm maximè splendent, & subinde paulatim evanescunt. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ, quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, lustrando illam cœli partem nocte serenâ minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus splendidiorem, & luce suâ vix cedentem Veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; & ex eo tempore paulatim decrescentem, & spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense *Novembri*, ubi primùm apparuit, Venerem luce suâ æquabat. Mense *Decembri*, nonnihil diminuta, Jovem æquare videbatur. Anno 1573, mense *Januario* minor erat Jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evasit æqualis. Mense *Aprili* & *Maio*, stellis secundæ magnitudinis; *Junio*, *Julio* & *Augusto*, stellis tertiæ magnitudinis; *Septembri*, *Octobri* & *Novembri*, stellis quartæ; *Decembri*, & anni 1574 mense *Januario*, stellis quintæ; & mense *Februario* stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, & mense *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, & anni 1573 mense *Martio* rutilans instar Martis aut stellæ Aldebaran; *Maio* autem albitudinem sublividam induxit, qualem in Saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede Serpentarii, quam *Kepleri* discipuli anno 1604, die 30 *Septembris* st. vet. ap-

(m) De Mund. Syst. § 75, 76, 77.

De Mundi Systemate

parere cœpiſſe obſervârunt, & luce ſuâ ſtellam Jovis ſuperâſſe, cùm nocte præcedente minimè apparuiſſet. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtellâ novâ, ſupra modum ſplendente, *Hipparchus* ad Fixas obſervandas, & in catalogum referendas, excitatus fuiſſe dicitur. Sed Fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſuâ fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex Sole & ſtellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in Atmoſphæras Planetarum, & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos; & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypothesis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unuſquiſque radio ad Solem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole. Ut periodica Planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicatâ diſtantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conſerventur, & tranquillè natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus Vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus Cometarum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi Vortices tollantur.

Projectilia, in Aere noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato Aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat; ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc Vacuo

Liber Tertius.

cuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſupra Atmoſphæram Terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrimè moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis, ſecundum leges ſuprà expoſitas, perpetuò revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitus acquirere per leges haſce minimè potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eâdem motûs directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eâdem motûs directione, in planis orbium Planetarum quamproximè. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis Mechanicis; ſiquidem Cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur: quo motûs genere Cometæ per orbes Planetarum celerrimè & facillimè tranſeunt; & in Apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutiùs morantur, quàm longiſſimè diſtant ab invicem, ut ſe mutuò quàm minimè trahant. Elegantiſſima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non niſi conſilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi ſtellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum, hæc omnia, ſimili conſilio conſtructa, ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cùm lux Fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux Solis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne Fixarum ſyſtemata per gravitatem ſuam in ſe mutuò cadant, hic eadem immenſam ab invicem diſtantiam poſuerit.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, ſed ut univerſorum Dominus. Et propter dominium ſuum, Dominus Deus * Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam Deus eſt vox relativa, & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio Dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus Deus eſt Anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt Ens æternum, infinitum, abſolutè perfectum: ſed Ens, utcunque perfectum, ſine dominio, non eſt Dominus Deus. Dicimus enim Deus meus, Deus veſter, Deus *Iſraelis*, Deus deorum, & Dominus dominorum: ſed non dicimus Æternus meus, Æternus veſter, Æternus *Iſraelis*, Æternus deorum; non dicimus Infinitus meus, vel Perfectus

* Id eſt Imperator univerſalis.

De Mundi Systemate

fectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox Deus paſſim † ſignificat Dominum: ſed omnis Dominus non eſt Deus. Dominatio Entis ſpiritualis Deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur Deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & Infinitus, Omnipotens & Omniſciens; id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique; & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cùm unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivè in duratione, co-exiſtentes in ſpatio, neutræ in Perſonâ hominis, ſeu principio ejus cogitante; & multo minùs in ſubſtantiâ cogitante Dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem Deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantiâ ſubſiſtere non poteſt. In ipſo ‡ continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentiâ Dei. Deum ſummum neceſſariò exiſtere in confeſſo eſt: et eâdem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam

† *Pocockus* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ du* (& in caſu obliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc cenſu principes vocantur dii, *Pſalm.* lxxxiv. 6. & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſò propter defectum dominii.

‡ Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Natura deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius* Georgic *lib.* 4. *v.* 220, & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio. *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri, ut *Paulus* in Act. xvii. 27, 28. *Johannes* in Evang. xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7, 8, 9. *Salomon* 1 Reg viii. 27. *Job* xxii. 12, 13, 14. *Jeremias* xxiii. 23, 24. Fingebant autem Idololatræ Solem, Lunam, & Aſtra, animas hominum & alias Mundi partes eſſe partes Dei ſummi, & ideo colendas, ſed falſò.

ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus Deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorſus deſtituitur; ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minimè cognoſcimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores; audimus tantùm ſonos; tangimus tantùm ſuperficies externas; olfacimus odores ſolos; & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nullâ actione reflexâ cognoſcimus; & multo minùs ideam habemus ſubſtantiæ Dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi; & Deus ſine dominio, providentiâ, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quàm Fatum & Natura. A cæcâ neceſſitate metaphyſicâ, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate Entis, neceſſariò exiſtentis, ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem Deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de Deo à rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis diſſerere, ad Philoſophiam Naturalem pertinet.

Hactenus Phænomena cælorum & maris noſtri per vim gravitatis expoſui; ſed cauſam gravitatis nondum aſſignavi. Oritur utique hæc vis à cauſâ aliquâ, quæ penetrat ad uſque centra Solis & Planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum, in quas agit (ut ſolent cauſæ Mechanicæ) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicatâ ratione diſtantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in ſingulas Solis particulas; & recedendo à Sole decreſcit accuratè in duplicatâ ratione diſtantiarum ad uſque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifeſtum eſt, &

Liber Tertius.

ad

De Mundi Systemate

ad uſque ultima Cometarum Aphelia, ſi modò Aphelia illa quieſcant. Rationem verò harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *Hypotheſis* vocanda eſt; & hypotheſes, ſeu Metaphyſicæ, ſeu Phyſicæ, ſeu Qualitatum Occultarum, ſeu Mechanicæ, in *Philoſophiâ Experimentali* locum non habent. In hâc Philoſophiâ Propoſitiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum, & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quòd Gravitas reverâ exiſtat, & agat ſecundum leges à nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quàm attrahendo corpuſcula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Senſatio omnis excitatur; & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus Spiritûs, per ſolida nervorum capillamenta, ab externis ſenſuum organis ad cerebrum, & à cerebro in muſculos, propagatis. Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritûs accuratè determinari & monſtrari debent.

FINIS PRINCIPIORUM.

DE

MUNDI SYSTEMATE

LIBER.

DE

MUNDI SYSTEMATE

LIBER.

FIXAS in ſupremis mundi partibus immotas perſiſtere, & Planetas his inferiores circa Solem revolvi, Terram pariter moveri curſu annuo, diurno verò circa axem proprium, & Solem, ceu focum Univerſi, in omnium centro quieſcere, antiquiſſima fuit Philoſophantium ſententia. Sic enim ſenſerant olim *Philolaus*, *Ariſtarchus Samius*, *Plato* ætate maturiore, *Pythagoreorum* turba (a), & his antiquior *Anaximander*, & *Romanorum* Rex ille ſapientiſſimus *Numa Pompilius*. Is in ſymbolum Orbis rotundi & ignis Solaris in centro, templum erexit *Veſtæ*, formâ rotundâ, & ignem perpetuum in medio aſſervari ſanxit. Ab *Ægyptiis* autem, aſtrorum antiquiſſimis obſervatoribus, propagatam eſſe hanc ſententiam verſimile eſt. Etenim ab illis, & à gentibus conterminis, ad *Græcos*, gentem magis Philologicam quàm Philoſophi-

Cœlos eſſe fluidos.

Archimedes in Arenario. Ariſtot. lib. 2. de cœlo. Plutarch. lib. 3. de placitis Philoſ. & in Numâ.

(a) De antiquiſſimis Pythagoreis gravem mihi dubitationem movet Timæus Locrus, qui in libro περὶ ψυχᾶς κόσμου Terram diſertiſſimè conſtituit in centro Mundi: ſupra hanc Lunam; ſupra Lunam Solem, anni ſpatio circulum ſuum abſolventem. Hunc æquis ferè paſſibus comitari dicit Mercurium et Venerem. Tum Planetis tribus reliquis, Marti, Jovi et Saturno, ſuam cuique velocitatem, ſuum converſionis ſpatium tribuit. Omnes autem intra ſphæram Primi Mobilis contineri ait, cujus vertigine, cum alia omnia inferiora, tum Solem ipſum abripi.

cam, Philoſophia omnis antiquior juxtà & ſanior manâſſe videtur: & ſacra *Veſtæ* ingenium *Ægyptiorum* ſapiunt, myſteria, captum vulgi ſuperantia, ſacris ritibus & Hieroglyphicis pingentium. Subinde docuerunt *Anaxagoras*, *Democritus*, & alii nonnulli, Terram in centro mundi immotam ſtare, & aſtra omnia in occaſum aliqua celeriùs alia tardiùs moveri, idque in ſpatiis liberrimis. Namque orbes ſolidi poſtea ab *Eudoxo*, *Callippo*, *Ariſtotele*, introducti ſunt; declinante indies Philoſophiâ primitus introductâ, & novis *Græcorum* commentis paulatim prævalentibus. Cum his orbibus malè conſiſtunt Phænomena Cometarum. Hos, inter corpora cœleſtia à multis olim numeratos, *Chaldæi*, rerum Aſtronomicarum peritiſſimi, pro ſtellis errantibus habuere (b): quaſi ſemel ſingulis revolutionibus, in orbium valdè excentricorum partes infimas deſcendendo, ſe nobis per vices conſpiciendos exhiberent. Eoſdem poſtea, in regiones infra Lunam neceſſariò detruſit iſta orbium ſolidorum hypotheſis; & his iiſdem viciſſim per nuperas Aſtronomorum obſervationes in cœlos Lunâ ſuperiores reſtitutis, confracti ſunt illi orbes, & ex æthere deturbati.

Principium motûs circularis in ſpatiis liberis.

2. Quibus vinculis Antiqui Planetas in ſpatiis liberis retineri, deque curſu rectilineo perpetuò retractos, in orbem regulariter agi docuere, non conſtat. In hujus rei explicationem orbes ſolidos excogitatos fuiſſe opinor. Philoſophi recentiores aut vortices eſſe volunt, ut *Keplerus* & *Carteſius*, aut aliud aliquod ſive impulſûs ſive attractionis principium, ut *Borellus*, *Hookius*, & ex noſtratibus alii. Ex motûs lege primâ certiſſimum eſt vim aliquam requiri. Nobis propoſitum eſt quantitatem & proprietates ipſius eruere, atque effectus in corporibus movendis inveſtigare mathematicè: proinde ne ſpeciem ejus hypotheticè determinemus, diximus ipſam generali nomine centripetam, quæ tendit in centrum aliquod; vel etiam, ſumpto nomine de centro, circumſolarem, quæ tendit in Solem; circumterreſtrem, quæ in Terram; circumjovialem, quæ in Jovem; & ſic in cæteris.

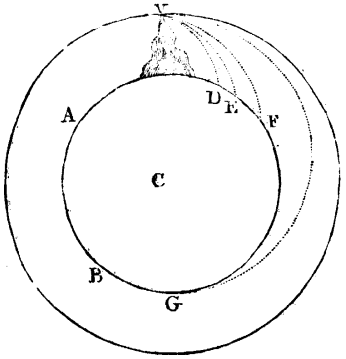
Effectus virium centripetarum.

3. Viribus centripetis Planetas in orbibus certis retineri poſſe, intelligetur ex motibus projectilium. Lapis projectus, urgente gravitate ſuâ, deflectitur de curſu rectilineo, &, curvam lineam in aëre deſcribendo, tandem cadit in terram; ſi motu velociore

(b) Vide Diodor. Sic. Lib. 15. C. 1. et Senecæ Quæſt. Nat. Lib. 7.

projiciatur,

projiciatur, pergit longiùs. Augendo velocitatem, fieri poſſet, ut arcum deſcriberet milliaris unius, duorum, quinque, decem, centum, mille; ac tandem ut, pergendo ultra terminos Terræ, non amplius in terram caderet. Deſignet AFB ſuperficiem Terræ; C centrum ejus; & VD, VE, VF, lineas curvas, quas projectile de montis prælti vertice V, ſecundum lineas horizonti parallelas, auctis cum velocitatis gradibus, ſucceſſivè emiſſum deſcribat. Et ne aëris reſiſtentia, quâ motus cœleſtes vix retardantur, in computum veniat, fingamus hunc omnem tollI, vel ſaltem nil reſiſtere. Et eâdem ratione quâ corpus velocitate minore



deſcribit arcum minorem VD, & majore arcum majorem VE, & auctâ adhuc velocitate pergit longiùs ad F, & longiùs ad G; idem tandem, ſi augeatur ſemper velocitas, ſuperabit totum telluris ambitum, & redibit ad montem, unde fuerat projectum. Cúmque area, quam, radio ad centrum terræ ducto, deſcribit, ſit (per Prop. I. Lib. 1. Princip. Math.) proportionalis tempori, velocitas ejus in reditu ad montem non minor erit quàm ſub initio: ſervatâ autem velocitate, poteſt idem ſæpiùs eâdem lege revolvi. Imaginemur jam corpora de regionibus altioribus ſecundum lineas horizontales projici; puta de locis milliaria quinque, decem, centum, mille vel plura, totidemve Telluris ſemidiametros, altis; &, pro variâ corporum velocitate, & vi gravitatis in ſingulis regionibus exercitâ, deſcribentur arcus Telluri vel concentrici, vel variè excentrici; inque his trajectoriis pergent corpora ad modum Planetarum cœlos tranſcurrere.

Certitudo argumenti.

4. Et quemadmodum ex deſcenſu lapidis demiſſi, demonſtrativè colligitur eundem gravitare, neque minùs certum gravitatis indicium eſt perpetua illa projectorum deflexio in terram: ſic omnis omnium in ſpatiis liberis motorum corporum de recto tramite deviatio, & perpetua in locum quemvis deflexio, certiſſimum eſt indicium, vim aliquam extare, quâ corpora undique in locum illum urgentur. Utque ex conceſſâ gravitate neceſſe eſt corpora

omnia

omnia in his terris inferiora petere; atque adeo, vel rectâ cadere, si quiescentia demittantur, vel de recto tramite perpetuò deflectere in terram, si projiciantur obliquè: ita, ex concessâ vi in centrum quodcunque tendente, non minùs necessarium est omnia, in quæ vis illa exercetur, vel rectâ descendere ad centrum illud; vel si obliquè moveantur, perpetuò de recto tramite in centrum vergere. Quâ autem ratione vires ex motibus, & motus ex viribus colligendi sunt, copiosè expositum est in Libris de Motu.

Vires centripetas ad singula Planetarum centra tendere.

5. Tendere autem vires centripetas ad corpora Solis, Telluris, & Planetarum, sic colligo. Gyratur Luna circa Terram nostram, radiisque ad ipsius centrum ductis, describit areas temporibus proportionales quàm proximè. Id ex velocitate Lunæ, cum ipsius apparentibus diametris collatâ, certissimum est: diametro minore, quæ majorem arguit distantiam, tardior est motus; majore velocior. Motibus magis regularibus gyrantur Satellites Jovis circa Jovem, circulos Jovi concentricos æquabili motu describentes quoad sensum. Sic & comes Saturni circa hunc Planetam motu satis circulari & æquabili revolvitur, excentricitate vixdum animadversâ. Venerem & Mercurium circa Solem revolvi, demonstratur ex eorum phasibus lunaribus: plenâ facie siti sunt ultra Solem, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem, per discum ejus nonnunquam transeuntes. Et Venus quidem orbem circularem, Solique concentricum, uniformi motu describit quamproximè. Mercurius autem, motu magis excentrico, ad Solem notabiliter accedit, & inde per vices recedit: sed velocior semper est ubi Soli propior, quo fit, ut, radio ad Solem ducto, describat areas temporibus proportionales. Terram denique circa Solem, aut Solem circa Terram, radio intercedente areas describere temporibus exactè proportionales, demonstratur ex Solis diametro apparente cum ipsius motu apparente collatâ. Hæc sunt experimenta Astronomica: & ex his (per Libri Primi Propositiones tres primas & earum Corollaria) consequens est, quòd dentur vires centripetæ, aut accuratè aut sine errore notabili, ad centra Terræ, Jovis, Saturni, & Solis tendentes. In Mercurio, Venere, Marte, & Planetis minoribus, cùm desint experimenta, valeat argumentum ex analogiâ.

6. Ex

Vires centripetas decrescere in duplicatâ ratione distantiarum à Planetarum centris.

6. Ex Propositionis autem quartæ Corollario sexto consequitur, quòd hæ vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum à centro Planetæ cujusque. Nam tempora periodica Satellitum Jovis sunt inter se in sesquiplicatâ proportione distantiarum à centro hujus Planetæ. In his jam diu notata fuit hæc proportio; eamque tam accuratè obtinere, quàm sit possibile sensibus discernere, significavit mihi *Flamstedius* noster, has distantias micrometro & per satellitum eclipses sæpiùs mensus. Easdem, ante inventionem micrometri, *Galilæus*, pergendo ab intimo Satellite ad extimum, definivit esse semidiametrorum Jovis 6, 10, 16, 28, respectivè; *Simon Marius*, 6, 10, 16, 26; *Cassinus*, 5, 8, 13, 23; *Borellus* magis exactè, $5\frac{2}{3}$, $8\frac{2}{3}$, 14, $24\frac{2}{3}$. Et, post inventionem micrometri, *Tounleius*, 5,51. 8,78. 13,47. 24,72; *Flamstedius* autem, 5,31. 8,85. 13,98. 24,23. & exactiùs per eclipses 5,578. 8,876. 14,159. 24,903. Sunt autem Satellitum ex observationibus *Flamstedianis* periodica tempora, $1^d.\ 18^h.\ 28'.\ 36''$; $3^d.\ 13^h.\ 17'.\ 54''$; $7^d.\ 3^h.\ 59'.\ 36''$; & $16^d.\ 18^h.\ 5'.\ 13''$: & ex his derivatæ distantiæ ut numeri, 5,578. 8,878. 14,168. 24,968. qui cum distantiis observatione collectis satis accuratè congruunt. In Planetis autem circumsolaribus, Mercurio & Venere, proportio illa obtinet accuratissimè; quantum hactenus dimensiones orbitarum, ex observationibus melioris notæ, determinârunt Astronomi.

Planetas superiores Solem cingere, & radiis ad ipsum ductis areas describere temporibus proportionales.

7. Martem quoque circa Solem revolvi, demonstratur ex ipsius phasibus, & proportione diametrorum apparentium. Nam ex phasi plenâ prope conjunctionem Solis, & gibbosâ in quadraturis, certum est, quòd is Solem ambit: & cùm diameter ejus quasi quintuplo major appareat in oppositione Solis quàm in conjunctione, & distantia ejus à Terrâ sit reciprocè ut diameter apparens, erit distantia illa quintuplo minor circiter in oppositione quàm in conjunctione; at Martis à Sole eadem circiter erit distantia, in utroque casu, cum distantiâ ejus in quadraturis, quæ ex phasi gibbosâ colligitur. Utque Solem æquabili ferè distantiâ, Terram valdè inæquabili cingit: sic etiam, radio ad Solem ducto, describit aream satis uniformiter; at radio ad Terram ducto, nunc velox est, nunc stationarius, nunc retrogradus. Jovem Marte superiorem esse, & motu quoque, quoad distantiam & areæ descriptionem, satis æquabili Solem circuire, sic colligo. In literis

ad

ad me datis ſcripſit *Cl. Flamſtedius*, omnes intimi Satellitis, quas noverat hactenus accuratè obſervatas, Eclipſes cum theoriâ ſuâ, abſque errore duorum in tempore ſcrupulorum primorum, congruere.; extimum non multo magis errare, penextimum vix triplo magis; penintimum verò multo magis; ſed minùs tamen à computationibus ſuis diſſidere, quàm ſolet Luna à Tabulis vulgaribus: ſe verò per ſolos Satellitum motus medios, & æquationem lucis à *Romero* inventam, Eclipſes computare. Ponamus igitur Theoriam à motu Satellitis extimi, hactenus obſervato, minùs diſſidere quàm errore duorum ſcrupulorum primorum: et erit ut Periodus integra dierum 16. 18^{hor}. 5′. 13″, ad tempus 2′, ita circulus integer graduum 360, ad arcum 1′. 48″ (*). Proinde error computi *Flamſtediani*, ad orbitam Satellitis reductus, minor erit quàm 1′. 48″; id eſt longitudo Satellitis, è centro Jovis ſpectati, determinabitur abſque errore 1′. 48″. At longitudo illa, ubi Satelles in medio umbræ verſatur, eadem eſt cum Jovis longitudine heliocentricâ; & propterea hypotheſis quam *Flamſtedius* ſequitur, nempe *Keplero-Copernicæa*, à ſe nuper (quoad motum Jovis) correcta, longitudinem illam rectè exhibet abſque errore 1′. 48″. Hâc longitudine, & notiſſimâ ſemper longitudine geocentricâ, determinatur diſtantia Jovis à Sole: quæ proinde ea ſemper eſt, quam exhibet iſta hypotheſis. Namque maximus ille in longitudine heliocentricâ error, 1′. 48″, inſenſibilis ferè eſt, & planè contemnendus; ſed & ex Satellitis ignotâ excentricitate oriri poteſt. Longitudine autem & diſtantiâ rectè definitis, neceſſe eſt ut Jupiter, radio ad Solem ducto, deſcribat areas eâ lege quam hypotheſis requirit, & propterea tempori proportionales. Idem de Saturno ex hujus aſſeclâ, per obſervationes *Hugenii* & *Halleji*, colligere licebit; quanquam obſervationum ſeries diuturnior in rei confirmationem & calculum ſatis accuratum deſideretur.

Vim, quâ Planetæ ſuperiores reguntur, non dirigiad Terram. Eandem dirigi ad Solem.

8. Jupiter igitur, ſiquis hunc ſpectaret à Sole, nunquam appareret retrogradus, nunquam ſtationarius, ut ex Terrâ cernitur, ſed motu ſatis uniformi ſemper progrederetur. Ex motûs apparentis geocentrici inæqualitate ſummâ colligitur, per Propoſitionis tertiæ Corollarium quartum, quòd vis illa, quâ Jupiter deflectere cogitur

(*) Quòd ſi tempus converſionis Satellitis extimi veriùs ſumas $16^d - 16^h - '32 - ''9$, tamen arcus circularis,

cogitur de motu rectilineo, & in orbem revolvitur, non dirigitur ad centrum Terræ. Et idem valet argumentum in Marte & Saturno. Quærendum eſt, per Prop. II & III. & hujus Corollaria, aliud harum virium centrum; circum quod, radiis intercedentibus, æquabilis ſit arearum deſcripto: et hoc eſſe Solem, jam probatum eſt in Marte quidem & Saturno præterpropter, in Jove verò abundè ſatis accuratè. Fingere licet Solem & Planetas vi quâvis aliâ æqualiter, & ſecundum lineas parallelas, urgeri. Verùm tali vi, per Legum Corol. 6. non mutabitur ſitus Planetarum inter ſe; nullus producetur effectus ſenſibilis: nos autem agimus de cauſis effectuum ſenſibilium. Rejiciatur igitur hujuſmodi vis omnis ut precaria, & ad cœlorum phænomena nil ſpectans; & vis omnis reliqua, quâ ſtella Jovis urgetur, tendet, per Propoſitionis tertiæ Corollarium primum, ad centrum Solis.

Vim circumſolarem per omnes Planetarum regiones decreſcere, in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole.

9. Diſtantiæ Planetarum à Sole eædem prodeunt, ſive Terram cum *Tychone*, ſive Solem cum *Copernico*, collocemus in centro ſyſtematis: & veras eſſe has diſtantias, jam probavimus in Jove. In his definiendis *Keplerus* & *Bullialdus* apprimè navarunt operam: unde & cum cœlis meliùs concordant ipſorum Tabulæ. Sunt autem harum diſtantiarum cubi in omnibus Planetis, in Jove inquam & Marte, Saturno & Tellure, æquè ac in Venere & Mercurio, ut quadrata temporum periodicorum; & propterea, per Corol. 6. Prop. IV. vis centripeta circumſolaris decreſcit, per univerſa Planetarum cœla, in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole. In examinandâ hâcce proportione ſumendæ ſunt diſtantiæ mediocres, ſive orbium ſemiaxes tranſverſi (per Prop. XV.) & negligendæ minutiæ, quæ, in definiendis orbibus, ex inſenſibilibus obſervationum erroribus oriri potuerint, quæve cauſis poſt aſſignandis tribuendæ ſunt. Sic incidetur ſemper in proportionem præfinitam exactè. Nam cùm diſtantiæ Saturni, Jovis, Martis, Terræ, Veneris & Mercurii à Sole, ex obſervationibus Aſtronomicis collectæ, ſint inter ſe, juxta computum *Kepleri*, ut numeri 951000, 519650, 152350, 100000, 72400, 38806; juxtaque computum *Bullialdi*, ut numeri 954198, 522520, 152350, 100000, 72398, 38585; eædem ex temporibus periodicis col-

circularis, qui ad integrum circuitum rationem habeat quam ſpatium illud temporis ad ſpatium '2, is amplitudinem '1 − ''48 non ſuperabit.

lectæ, ſunt ut numeri 953806, 520116, 152399, 100000, 72333, 38710. Diſtantiæ *Kepleri* & *Bullialdi*, vix differunt ſenſibiliter, & ubi maximè differunt, claudunt inter ſe diſtantias ex temporibus periodicis collectas.

Vim circumterreſtrem decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum à Terrâ. Probatur ex hypotheſi quòd Terra quieſcit.

10. In duplicatâ itidem diſtantiarum proportione vim circumterreſtrem decreſcere, ſic colligo. Lunæ diſtantia mediocris à centro Terræ eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum*, *Keplerum* in Ephemeridibus, *Bullialdum*, *Hevelium*, & *Ricciolum*, 59; ſecundum *Flamſtedium*, $59\frac{1}{3}$; ſecundum *Vendelinum*, 60; ſecundum *Copernicum*, $60\frac{1}{3}$; ſecundum *Kircherum*, $62\frac{1}{2}$; ſecundum *Tychonem*, $56\frac{1}{2}$: verùm *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ, omninò contra naturam lucis, majores quàm Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem; hoc eſt, quaſi duodecimâ, vel decimâ quintâ, parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi 61 ſemidiametrorum terreſtrium; ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, uti ab Aſtronomis definitum eſt: &, per Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ, corpus, revolvendo in aëre noſtro juxta ſuperficiem Terræ quieſcentis, vi centripetâ, quæ eſſet ad vim eandem in diſtantiâ Lunæ in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro Terræ reciprocè, hoc eſt ut 3600 ad 1; revolutionem, ſublatâ aëris reſiſtentiâ, compleret horâ 1, minutis primis 24, ſecundis 27. Pone ambitum Terræ eſſe pedum *Pariſienſium* 123249600, uti à *Gallis* menſurantibus nuper definitum eſt: & corpus idem, ſublato motu ſuo circulari, & urgente eâdem vi centripetâ ac prùis, deſcriberet cadendo pedes *Pariſienſes* $15\frac{1}{12}$ tempore minuti unius ſecundi. Colligitur hoc ex calculo per Propoſitionem XXXVI. inito, & congruit cum experientiâ. Nam factis Pendulorum experimentis, & computo inde inito, demonſtravit *Hugenius*; quòd corpora, omni illâ cujuſcunque generis vi centripetâ, quâ juxta ſuperficiem Terræ urgentur, deſcendentia, deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes *Pariſienſes* $15\frac{1}{12}$.

Probatur ex Hypotheſi quòd terra movetur.

11. Quòd ſi motus concedatur Terræ, gyretur hæc & Luna, per Legum Corol. 4. & Prop. LVII. circa commune gravitatis centrum

centrum. Et Luna (per Prop. LX.) eodem tempore periodico dierum 27, hor. 7. 43′, vi eâdem circumterreſtri diminutâ in duplicatâ ratione diſtantiæ, revolvetur in orbitâ, cujus ſemidiameter eſt ad ſemidiametrum prioris, hoc eſt ad 60 ſemidiametros terreſtres, ut ſumma corporum Terræ & Lunæ, ad primam duarum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus terræ: hoc eſt, ſi ponamus Lunam, ob mediocrem ſuam diametrum apparentem $31'\frac{1}{2}$, eſſe quaſi quadrageſimam ſecundam partem Terræ, ut 43 ad $\sqrt[3]{42 \times 43^2}$; ſive ut 128 ad 127 circiter: ideoque ſemidiameter hujus orbitæ, hoc eſt diſtantia inter centra Lunæ & Terræ, jam erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut aſſignavit *Copernicus*, non abludentibus obſervationibus *Tychonicis*. In hâc diſtantiâ valet igitur duplicata illa proportio decrementi virium. Augmentum orbitæ ab actione Solis oriundum, ut planè contemnendum neglexi: eo ſubducto, relinquetur vera diſtantia quaſi $60\frac{4}{9}$ ſemidiametrorum terreſtrium.

Decrementum in duplicatâ ratione diſtantiarum à Terrâ & Planetis, probatur ex Planetarum excentricitate & Apſidum motu tardiſſimo.

12. Confirmatur præterea hæc ratio decrementi virium ex Planetarum excentricitate, & Apſidum tardiſſimo motu. Nam (per Corollaria Prop. XLV.) manifeſtum eſt, quòd nullâ aliâ ratione poſſint Planetæ omnes circumſolares, ſingulis revolutionibus, ſemel ad minimam à Sole diſtantiam deſcendere, & ſemel ad maximam aſcendere, atque loca harum diſtantiarum manere immobilia. Parvus error in ratione duplicatâ efficeret motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem. At motus ille in Orbibus Planetarum circumſolarium vixdum poſt innumeras revolutiones ſenſibilis extitit. Aſtronomorum aliqui motum omnem negant; cæteri non majorem ſtatuunt quàm qui ex cauſis poſt aſſignandis facilè oriri poſſit, quique in quæſtione, de quâ agitur, nullius eſt momenti. Sed & motus longe major Aphelii Lunaris, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum trium, contemni poteſt. Hoc motu demonſtratur vim circumterreſtrem decreſcere in ratione diſtantiæ non minori quàm duplicatâ, & longè minori quàm triplicatâ: nam ſi ratio duplicata mutetur gradatim in triplicatam, augebitur motus Aphelii in infinitum, adeoque mutatione perexiguâ ſuperabit motum Aphelii Lunaris. Oritur motus ille tardiſſimus ex actione vis circumſolaris, ut poſthac dicetur.

cetur. Tollendo hanc cauſam quieſcet Apogæum Lunæ, & pervenietur ad proportionem duplicatam.

Quantitas virium tendentium ad ſingulos Planetas. Ingens vis circumſolaris.

13. Stabilitâ hâc proportione, conferri jam licet Planetarum vires inter ſe. In mediocri diſtantiâ Jovis à Terrâ, elongatio maxima Satellitis extimi à centro Jovis, ex obſervationibus *Flamſtedii*, eſt 8′. 13″. adeoque diſtantia Satellitis à centro Jovis, ad mediocrem diſtantiam Jovis à centro Solis, ut 124 ad 52012; ad mediocrem verò diſtantiam Veneris à centro Solis, ut 124 ad 7234. Sunt autem eorum tempora periodica $16\frac{3}{4}$ dierum, & $224\frac{2}{3}$ dierum. Et inde, per Corollarium ſecundum Propoſitionis quartæ, dividendo diſtantias per quadrata temporum, deducitur, vim, quâ Satelles urgetur in Jovem, eſſe ad vim quâ Venus urgetur in Solem, ut 442 ad 143: et minuendo vim, quâ Satelles urgetur, in duplicatâ ratione diſtantiæ 124 ad 7234, prodibit vis circumjovialis, in diſtantiâ Veneris à Sole, ad vim circumſolarem quâ Venus urgetur, ut $\frac{13}{100}$ ad 143, ſeu 1 ad 1100. Proinde ad æquales diſtantias vis circumſolaris 1100 vicibus major eſt quàm vis circumjovialis. Simili computo ex Satellitis Saturnii tempore, periodico dierum 15, horarum $22\frac{2}{3}$, & maximâ ipſius à Saturno, mediocriter à nobis diſtante, elongatione 3′. 20″. colligo diſtantiam hujus Satellitis à centro Saturni eſſe ad diſtantiam Veneris à Sole, ut $92\frac{2}{5}$ ad 7234; & inde vim abſolutam circumſolarem majorem eſſe quàm vis abſoluta circumſaturnia, vicibus 2360.

Exigua vis circumterreſtris.

14. Ex regulari Veneris, Jovis, & aliorum Planetarum heliocentrico motu & irregulari geocentrico manifeſtum eſt (per Corol. 4. Prop. III.) quòd vis circumterreſtris collata cum vi circumſolari ſit perquàm exigua. Parallaxin Solis, ex dichotomiâ Lunæ Teleſcopiis notatâ, *Ricciolus* & *Vendelinus* ſeorſim determinare conati ſunt, eamque conſtituêre non majorem dimidio minuti unius primi. *Keplerus* parallaxin Martis acronychi, quæ multo major eſt, tam *Tychonicis* quàm propriis obſervationibus inſenſibilem reperit. *Flamſtedius* eandem micrometro aggreſſus, idque in perigæo Martis, nunquam reperit majorem viginti quinque minutis ſecundis; & inde concludit parallaxin Solis eſſe ſummùm decem minutorum ſecundorum. Unde conſequens eſt, quòd diſtantia Lunæ à Terrâ non habet majorem rationem ad diſtantiam Terræ à Sole, quàm 29 ad 10000; neque majorem ad diſtantiam Veneris

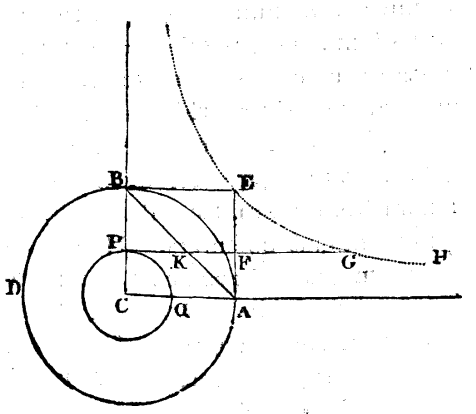
Veneris à Sole, quàm 29 ad 7233. Inde & ex temporibus periodicis, methodo jam expoſitâ, deducetur, quòd vis abſoluta circumſolaris ſit major quàm vis abſoluta circumterreſtris, vicibus 229400 ad minimum. Quòd ſi conſtaret tantùm ex obſervationibus *Riccioli* & *Vendelini*, parallaxin eſſe minorem dimidio minuto primo, tamen inde ſequeretur vim abſolutam circumſolarem ſuperare vim circumterreſtrem vicibus 8500.

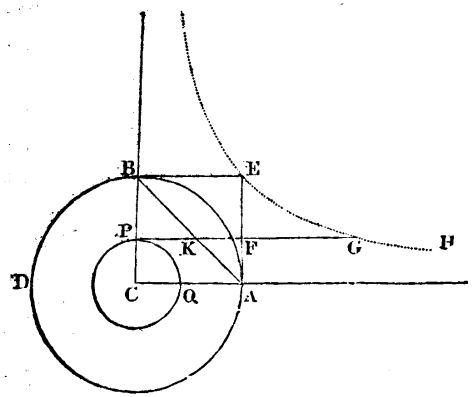
Planetarum diametri apparentes.

15. Similibus computis incidi in analogiam inter vires & corpora Planetarum: ſed antequam hanc expono, definiendæ ſunt Planetarum apparentes diametri in mediocribus diſtantiis eorum à Terrâ. Diametrum Jovis, *Flamſtedius* micrometro menſus eſt 40″ vel 41″, eamque annuli Saturni 50″, & Solis quaſi 32′. 13″. Diameter corporis Saturnii eſt ad diametrum annuli, juxta *Hugenium* & *Halleium*, ut 4 ad 9, juxta *Galletium* ut 4 ad 10, juxta *Hookium* (teleſcopio pedum ſexaginta uſum) ut 5 ad 12. Ex ratione mediocri 5 ad 12 colligitur diameter corporis quaſi 21″.

Correctio diametrorum apparentium.

16. Et hæ ſunt magnitudines apparentes. Verùm puncta omnia lucida, per inæqualem lucis refrangibilitatem, dilatantur in Teleſcopiis, occupantque in foco vitri objectivi ſpatium circulare latitudine quaſi quinquageſimæ partis aperturæ vitri: ita tamen ut lux in circuitu rariſſima vix aut ne vix quidem ſentiatur; in medio verò, ubi conſtipatior eſt, ſenſumque ſatis ferit, lucidum conſtituat circellum, cujus latitudo pro ſplendore puncti lucentis varia ſit, ac tertiam circiter quartamve aut quintam ferè partem latitudinis totius ut plurimum adæquet. Deſignet ABD circulum lucis totius; PQ, circellum luce ſatis conſpicuâ clarentem; C, centrum utriuſque; CA, CB, ſemidiametros circuli majoris rectum continentes angulum C; ACBE, quadratum his diametris comprehenſum; AB, diagonalem ejus; EGH, Hyperbolam





perbolam centro C, asymptotis CA, CB, descriptam; PG, perpendiculum ad ipsius BC punctum quodvis, P, erectum, & occurrens Hyperbolæ in G, rectisque AB, AE in K & F: & lucis densitas in loco quovis P erit, ex computo meo, ut longitudo FG, adeoque in centro infinita, prope circumferentiam quàm minima: lux autem tota intra circellum PQ est ad totam extra, ut area quadrilatera CAKP ad triangulum PKB. Ibi concipe circellum PQ terminari, ubi lucis densitas FG minor esse incipit, quàm quæ sensui movendo sufficit. Et hinc est, quòd ignis trium pedum latitudinis, in distantiâ 191382 pedum, per Telescopium tripedale apparuit *Picarto* quasi 8″ latus, qui solùm 3′. 14″. latus apparere debuisset. Hinc est, quòd Fixarum lucidiores per telescopia apparent latæ 5″. vel 6″; idque luce satis plenâ, luce autem debiliore latiùs excurrunt. Hinc est, quòd *Hevelius*, minuendo aperturam Telescopii, sustulit bene magnam partem lucis in circuitu, effecitque ut discus Stellæ distinctiùs circinaretur, & minor evaderet, verùm tamen etiamnum latus appareret 5″, vel 6″: *Hugenius* autem, vitris juxta oculum fuligine leviter infectis, lucem undique erraticam adeo extinxit, ut Stellæ, punctorum instar, sensibili omni latitudine privatæ viderentur. Hinc est, quòd *Hugenius* latitudine obstaculi quod lucem omnem interciperet, majores exhibuit Planetarum diametros, quàm ab aliis Micrometro definitum est: nam lux erratica, tecto Planetâ, latiùs cernitur, radiis fortioribus non ampliùs obscurata. Hinc denique est, quòd Planetæ in Sole tam graciles appareant, luce dilatatâ attenuati. Neque enim Mercurius *Hevelio*, *Galletio* & *Halleio*, superavit 12″, vel 15″, & Venus *Crabtrio* solùm 1′. 3″, *Horroxio* 1′. 12″, occupare visa est; quæ tamen, juxta mensuras *Hevelii* & *Hugenii* extra discum Solis captas, implere debuisset 84″, ad minimum.

nimum. Sic & Lunæ diameter apparens, quæ anno 1684, paucis diebus ante & post eclipsin Solis, mensurata fuit in Observatorio *Parisiensi* 31′. 30″, in ipsâ eclipsi non superabat 30′, vel 30′. 5″. Igitur diametri Planetarum extra Solem minuendæ sunt, & intra augendæ, minutis aliquot secundis. At in mensuris micrometro captis errores videntur esse solito minores. Semidiametrum Jovis, ex umbræ diametro per Eclipses Satellitum inventâ, *Flamstedius* determinavit esse ad elongationem maximam Satellitis extimi, ut 1 ad 24,903. Unde cùm elongatio illa sit 8′. 13″, diameter Jovis erit $39\frac{1}{2}$. Igitur diameter micrometro inventa, 40″, vel 41″, rejiciendo lucem erraticam, reducitur ad $39\frac{1}{2}$″. Et simili correctione minuenda est Saturni diameter 21″, & statuenda 20″, vel paulo minor. At Solis diameter ob lucem fortiorem paulo magis, ni fallor, minuenda est, & statuenda quasi 32′ vel 32′. 6″.

17. Corpora, magnitudinis tam diversæ, ad analogiam cum viribus tam propè accedere, mysterio certè non caret. Possibile est ut Planetæ ulteriores, defectu caloris, careant substantiis illis metallicis & mineris ponderosis, quibus Terra referta est: utque corpora Veneris & Mercurii, majore Solis calore, magis concocta & coagulata sint. Experimento speculi ustorii constat calorem augeri cum densitate lucis; hæc autem augetur in duplicatâ ratione accessûs ad Solem. Inde colligitur calorem Solis ad Mercurium septuplo majorem esse quàm apud nos tempore æstivo; tanto autem calore aqua ebullit, & graves illi Vitrioli & Mercurii spiritus leniter exhalant, ut thermometro expertus sum: proinde nulli apud Mercurium consistunt liquores nisi graviores, qui magnum sustinent calorem, & ex quibus substantiæ densissimæ nascantur. Quidni si Deus corpora singula, calore temperiei conveniente alenda, in totidem à Sole distantiis locaverit; sintque adeo densiora semper, quæ Soli propriora: eâ ratione constabit optimè, pondera Planetarum omnium esse inter se ut vires. Pervelim verò diametros Planetarum definiri exactiùs. Id fiet, si Lampas ad magnam aliquam distantiam luceat per foramen circulare, & minuatur tum foramen tum lux Lampadis, usque eò ut spectrum per Telescopium appareat instar Planetæ, & iisdem mensuris definiatur. Tum latitudo foraminis erit ad sui ipsius distantiam à vitro objectivo, ut vera Planetæ diameter ad ipsius distantiam à nobis.

Cur Planetæ sint aliqui magis alii minus densi, sintque vires ut quantitas materiæ in singulis.

nobis. Diminui potest lux Lampadis interpositione pannorum, aut vitri infecti fuligine.

Alia virium & corporum analogia. Probatur in cœlestibus.

18. Analogiæ jam descriptæ affinis est altera inter vires & attracta corpora. Quoniam actio vis centripetæ in Planetas decrescit in duplicatâ ratione distantiæ, & tempus periodicum augetur in ratione sesquiplicatâ; manifestum est, quòd in æqualium Planetarum æqualibus à Sole distantiis, æquales forent actiones, & æqualia tempora periodica: quòdque in æqualibus inæqualium distantiis, actiones collectitiæ forent ut Planetarum corpora. Namque actiones, quæ non essent ut corpora movenda, non possent corpora illa æqualiter retrahere de tangentibus orbitarum; & efficere ut revolutiones, æqualibus temporibus, in Orbitis item æqualibus complerentur. Sed nec motus Satellitum Jovis tam regulares esse possent, nisi vis circumsolaris æqualiter in Jovem & Satellites omnes, pro ratione ponderum, exerceretur. Estque eadem ratio Saturni & Satellitis ipsius; ut & Terræ & Lunæ nostræ, uti (ex Corol. 2 & 3. Prop. LXV.) manifestum est. Paribus igitur distantiis æqualis est actio vis centripetæ in omnes Planetas, pro ratione corporum, seu quantitate materiæ in corporibus; atque adeò in omnes etiam ejusdem quantitatis particulas, ex quibus Planetæ componuntur. Nam si actio major esset in particulas unius generis, minor in illas alterius, quàm pro ratione quantitatis materiæ, foret etiam actio major vel minor in Planetas, non solùm pro ratione quantitatis, sed etiam pro genere materiæ quæ in uno copiosiùs, in alio parciùs, reperiretur.

Probatur in terrestribus.

19. Analogiam certè in corporibus diversorum generum quæ in Terrâ nostrâ extant, tentavi quàm accuratissimè. Actio vis circumterrestris, corporibus movendis proportionalis, movebit eadem æqualibus temporibus, æquali cum velocitate (per Motus Leg. 2.) facietque tum omnia demissa, temporibus æqualibus, per æqualia spatia descendere; tum omnia, filis æqualibus suspensa, æqualibus temporibus oscillari. Actione majore minora erunt tempora, minore majora. Descensus autem corporum omnium (demptâ saltem aëris perexiguâ resistentiâ) æqualibus temporibus fieri jamdudum observârunt alii: & exactissimè notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, sale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam

parabam pyxides duas ligneas æquales: unam implebam ligno, & idem auri pondus suspendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oscillationis. Æqualibus, pedum undecim, filis pendentes pyxides constituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aëris resistentiam omninò paria: & paribus oscillationibus juxta positæ ibant unà, & redibant diutissimè. Proinde copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad actionem ejus in totum lignum; hoc est, ut pondus ad pondus: & sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuisset.

Analogiarum consensus.

20. Cùm autem actio vis centripetæ in corpus attractum, paribus distantiis, proportionalis sit materiæ in hoc corpore; rationi etiam consentaneum est, ut sit etiam proportionalis materiæ in corpore trahente. Etenim actio mutua est, facitque corpora conatu mutuo (per Motûs Legem 3.) accedere ad invicem, & proinde sibi ipsi conformis esse debet in corpore utroque. Considerari potest corpus unum ut attrahens, alterum ut attractum, sed hæc distinctio magis mathematica est quàm naturalis. Attractio reverâ est corporis utriusque in utrumque, atque adeo ejusdem generis in utroque.

Et coincidentia.

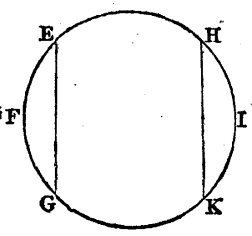
21. Et hinc est quòd vis attractiva reperiatur in utroque. Sol trahit Jovem & cæteros Planetas, Jupiter trahit Satellites; & paritate rationis, Satellites agunt in se invicem & in Jovem, & Planetæ omnes in se mutuò. Et quamvis binorum Planetarum actiones in se mutuò distingui possint ab invicem, &, ut actiones binæ, quibus uterque trahit alterum, considerari: tamen quatenus intermediæ sunt, non sunt binæ, sed operatio simplex inter binos terminos. Contractione funiculi unius intercedentis possunt bina corpora ad invicem trahi. Causa actionis gemina est, nimirum dispositio utriusque corporis; actio item gemina, quatenùs in bina corpora: at quatenùs inter bina corpora, simplex est & unica. Non est una operatio quâ Sol v. g. trahit Jovem, & alia operatio quâ Jupiter trahit Solem, sed una operatio quâ Sol & Jupiter conantur ad invicem accedere. Actione, quâ Sol trahit Jovem, conantur Jupiter & Sol ad se mutuò accedere (per Motûs Leg. 3.) & actione, quâ Jupiter trahit Solem, conantur etiam Ju-

piter & Sol ad se mutuò accedere: Sol autem non attrahitur actione duplici in Jovem, neque Jupiter actione duplici in Solem, sed una est actio intermedia, quâ ambo accedunt ad se mutuò. Ferrum trahit magnetem, æquè ac magnes ferrum; nam ferrum omne in viciniâ magnetis trahit etiam aliud ferrum. At actio inter magnetem & ferrum simplex est, & à Philosophis consideratur ut simplex: operatio ferri in magnetem ipsa est magnetis operatio seipsum inter & ferrum, quâ ambo conantur accedere ad se mutuò. Id ex eo manifestum est, quòd sublato magnete cessat propè vis tota ferri. Ad hunc modum concipe simplicem exerceri inter binos Planetas ab utriusque conspirante naturâ oriundam operationem; & hæc eodem modo se habebit ad utrumque: adeò proportionalis existens materiæ in uno eorum, proportionalis erit materiæ in altero.

Insensibiles esse corporum parvorum vires.

22. Dicet fortè quis, corpora omnia hâc lege se mutuò trahere debere, contra experientiam in terrestribus. Sed respondeo, quòd experientia in terrestribus planè nulla est. Sphærarum homogenearum attractiones, juxta superficies earum, sunt (per Prop. LXXII.) ut diametri: unde sphæra, Terræ homogenea, diametroque pedis unius descripta, minùs trahet corpusculum juxta superficiem suam, quàm Terra juxta suam, vicibus 20000000 circiter: et vis tantilla nullos edet sensibiles effectus. Hujusmodi globi duo, quartâ tantùm digiti parte ab invicem distantes, in spatiis liberis, haud minori quàm mensis unius intervallo, vi mutuæ attractionis accederent ad invicem. Globorum minorum coitus esset tardior in ratione diametrorum. Sed nec montes toti suffecerint ad sensibiles effectus: ad radices montis hemisphæricis alti tria milliaria & lati sex, Pendulum, vi montis attractum, non deviabit scrupulis duobus primis à perpendiculo. Vires hasce in solis Planetarum ingentibus corporibus intueri licet; nisi forte de minoribus disputemus in hunc modum.

Tendere tamen vires ad corpora omnia terrestria proportionales quantitati materiæ.



23. Designet EFGI globum Telluris, sectum plano quovis EG, in partes duas EFG, EIG. Pars EFG, incumbendo in partem EIG, premit ipsam toto suo pondere. Nec potest pars EIG hanc pressionem sustinere, & immota persistere, nisi æquali conatu in contrarium.

contrarium. Partes igitur ponderibus suis se mutuò æqualiter urgent, id est, trahuntur in se mutuo æqualiter, ut lex tertia requirit: adeoque distractæ ab invicem & demissæ caderent in se mutuò, cum velocitatibus, quæ essent reciprocè ut corpora. Quæ omnia in magnete experiri & intueri licet. Designet jam EFG corpus aliquod exiguum in superficie Terræ: & quoniam particulæ hujus & Terræ reliquæ, EIG, attractiones in se mutuò sunt æquales; attractio autem particulæ in Terram (nimirum pondus ejus) est ut materia particulæ, uti experimento Penduli probatum est; erit etiam attractio Terræ in particulam ut materia particulæ: adeoque corporum omnium terrestrium vires attractivæ, ut quantitas materiæ in singulis.

Probatur easdem vires in corpora cœlestia tendere.

24. Vires autem, quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus terrestribus, atque adeo non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis, tam cœlestibus, quàm terrestribus; & in omnibus esse proportionales materiæ: eò quòd hæc omnia, non genere substantiæ, sed formis & modificationibus solummodo, differunt. Id verò sic etiam probatur in cœlestibus. Constitit actionem vis circumsolaris in omnes Planetas, ad æqualitatem distantiarum reductos, esse ut materia in Planetas: idem similiter constat de actione vis circumjovialis in Satellites Jovis; & par est ratio attractionis omnium Planetarum in unumquemque. Inde verò sequitur (per Prop. LXIX.) quòd eorum vires attractivæ sunt ut materia in singulis.

Decrescere vires à Planetarum superficiebus extrorsum in duplicatâ ratione, introrsum in ratione distantiarum à centris.

25. Igitur ut partes Terræ se mutuò trahunt, sic etiam faciunt partes Planetarum. Si Jupiter & Satellites ejus coirent, & in unum formarentur globum; pergerent singuli proculdubio se mutuò trahere ut priùs: & vice versâ, si corpus Jovis resolveretur in globos plures, credendum est, quòd hi non minùs traherent se mutuò, quàm trahunt Satellites. His attractionibus fit, ut corpora Telluris & omnium Planetarum sphæricam affectent figuram, utque partes eorum cohæreant, & non spargantur per æthera. Oriri verò has vires ex universali naturâ materiæ jam constitit, & propterea ex particularum viribus componi vim globi totius. Inde verò consequens est (per Corol. 3. Prop. LXXIV.) quòd vis particulæ cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiæ ab eâdem

particulâ; & (per Prop. LXXIII. & LXXV.) quòd vis globi totius decreſcit à ſuperficie ſuâ extrorſum in duplicatâ ratione, & introrſum in ratione ſimplici diſtantiarum à centro, ſi modò globus ex uniformi materia conſtat: & quamvis globi in progreſſu à centro ad circumferentiam non ſint uniformes, valebit tamen decrementum in ratione duplicatâ diſtantiæ extrorſum (per Prop. LXXVI.) ſi modò ſimilis ſit inæquabilitas undique in progreſſu per circuitum: & hujuſmodi globi duo (per eandem Propoſitionem) ſe mutuò trahent, vi decreſcente in duplicatâ ratione diſtantiæ inter centra.

Quantitates virium & motuum inde oriundorum in ſingulis corporibus.

26. Eſt igitur globi cujuſque vis abſoluta ut quantitas materiæ in ipſo. Vis autem motrix, quâ globus unuſquiſque trahitur in alterum, quamque vulgus in terreſtribus per vocem ponderis deſignat, eſt ut contentum ſub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum diſtantiæ inter centra (per Corol. 4. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis eſt quantitas motûs, quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum: vis autem acceleratrix, quâ globus unuſquiſque pro ratione materiæ ſuæ attrahitur in alterum, eſt ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra (per Corol. 2. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis eſt velocitas, quâ globus attractus, dato tempore, movebitur in alterum. Quibus probè intellectis, jam facile fuerit determinare motus corporum cœleſtium inter ſe.

Planetas omnes circa Solem revolvi.

27. Collatis Planetarum viribus, vidimus circumſolarem cæteris majorem eſſe mille vicibus & ampliùs. Urgente autem vi tantâ neceſſe eſt, ut corpora omnia inter ſpatium ſyſtematis Planetarum, & longè ultra, rectâ deſcendant in Solem; niſi aliò moveantur. Neque Terra de numero talium corporum excludenda eſt. Luna certè de genere Planetarum eſt, & iiſdem attractionibus obnoxia cum cæteris Planetis: nam & vi circumterreſtri retinetur in orbe ſuo. Terram verò & Lunam æqualiter trahi in Solem probavimus ſuprà: ſed & corpora omnia communibus attractionum legibus obnoxia eſſe jam antè probavimus. Quanto autem

(d) Vide Princip. Lib. 1. Prop. XXXVI. Cor. H.

(e) Subductis calculis comperimus caſu recto Solem uſque delatum iri ſtellam Veneris ſpatio dierum

autem tempore corpus unumquodque, motu circumſolari privatum, deſcenderet, & cadendo perveniret uſque ad Solem, innoteſcit (per Prop. XXXVI.) ex diſtantiâ ejus à Sole: nimirum dimidio temporis periodici, quo corpus ad diſtantiam duplo minorem revolvi poſſet (d); ſive tempore quod eſt ad tempus periodicum Planetæ, ut 1 ad $4\sqrt{2}$. Ut, quòd Venus cadendo perveniret ad Solem, ſpatio dierum quadraginta; Jupiter ſpatio annorum duorum & menſis unius; Terra & Luna ſpatio dierum 66 & horarum 19 (e). Quod cùm non accidit, neceſſe eſt ut hæc corpora moveantur aliorſum: nec ſufficit motus quilibet; ad impediendum deſcenſum requiritur velocitas ſatis magna. Et inde valet etiam argumentum in Planetis tardeſcentibus. Niſi vis circumſolaris decreſcat in duplicatâ ratione tarditatis, exceſſus ejus efficiet ut corpora deſcendant in Solem: verbi gratiâ, ſi motus, cæteris paribus, fiat duplo tardior, Planeta parte quartâ vis circumſolaris prioris retinebitur in orbitâ ſuâ, & exceſſu cæterarum trium partium quartarum deſcendet in Solem. Proinde Planetæ, Saturnus, Jupiter, Mars, Venus, & Mercurius, non retardantur verè in Perigæis, neque fiunt verè ſtationarii, & lento motu retrogradi. Iſta omnia ſunt apparentia tantùm: & motus abſoluti, quibus Planetæ perſeverant in orbitis ſuis, ſunt ſemper directi, & æquabiles quamproximè. Tales autem motus circa Solem peragi probavimus, & propterea Sol, ut centrum abſolutorum motuum, quieſcit: nam Terræ quies omninò deneganda eſt, ne Planetæ in Perigæis verè tardeſcant, & fiant verè ſtationarii lentéque retrogradi; & ſic defectu motûs deſcendant in Solem. Porrò quoniam Planetæ, Venus, Mars, Jupiter, cæterique, radiis ad Solem ductis deſcribunt orbes regulares, areaſque temporibus, uti oſtenſum eſt, quoad ſenſum proportionales: conſequens eſt (per Prop. III. & Corol. 3. Prop. LXV.) quòd Sol nullâ vi notabili urgetur, niſi quâ Planetæ omnes æqualiter, pro corporum quantitatibus, & ſecundum lineas parallelas, urgentur, adeoque ſyſtema totum tranſfertur in directum. Rejiciatur tranſlatio illa ſyſtematis totius, & Sol propemodum quieſcet in ipſius centro. Si Sol revolveretur circa Terram, & Planetas reliquos circum ſe deferret,

dierum 39, cum horis $17\frac{16}{100}$; ſtellam Jovis ſpatio annorum duorum cum diebus 35, horis $9\frac{12}{100}$; Tellurem denique noſtram ſpatio dierum 64 cum horis $13\frac{46}{100}$.

deberet

deberet Terra Solem trahere vi magnâ; Planetas autem circumsolares vi nullâ sensibilem effectum habente (omninò contra Corol. 3. Prop. LXV.) Adde, quòd si Terra, ob gravitatem partium, in infimâ mundi regione à pleriſque hactenus locata fuit: jam Sol potiori jure, ob vim ſuam centripetam mille vicibus & ampliùs gravitate terreſtri majorem, in locum infimum detrudi debebit, centrumque ſyſtematis conſtitui. Vera autem ſyſtematis conſtitutio ſic pleniùs & exactiùs intelligetur.

Planetarum omnium commune gravitatis centrum quieſcere, & Solem tardiſſimè moveri. Definitur motus Solis.

28. Quoniam Fixæ quieſcunt inter ſe, concipiamus Solem, Terram & Planetas, tanquam ſyſtema corporum utcunque moventium inter ſe, & omnium commune centrum gravitatis (per Legum Corollarium quartum) vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum. Caſu poſteriore movebitur etiam ſyſtema totum uniformiter in directum. Dura eſt hæc hypotheſis: eâ rejectâ, quieſcet commune illud centrum gravitatis. Ab eodem centro Sol nunquam longè recedit. Incidit Solis & Jovis commune gravitatis centrum in ſuperficiem Solis (f). Si Planetæ omnes ad eandem Solis partem cum Jove locarentur, commune Solis & omnium centrum vix duplo longius à centro Solis recederet (g). Igitur Sol, pro vario Planetarum ſitu diverſimodè agitatus, & motu quodam libratorio lentè ſemper errans, nunquam integrâ ſui diametro à centro quieſcente Syſtematis totius recedit. Ex Solis autem & Planetarum ponderibus ſuprà inventis, & ſitu omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum: eoque dato, locus Solis ad tempus propoſitum.

Planetas nihilo minus revolvi in Ellipſibus umbilicos habentibus in Sole; & radiis ad Solem ductis areas deſcribere temporibus proportionales.

29. Circa Solem, hoc modo libratum, revolvuntur cæteri Planetæ in Orbibus Ellipticis, & radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales quamproximè, ut (in Prop. LXV.) expoſitum eſt. Si Sol quieſceret, & Planetæ cæteri non agerent in ſe invicem, forent Orbes Elliptici, & areæ temporibus proportionales exactè (per Prop. XI. & Corol. 1. Prop. XIII.) Actiones Planetarum in ſe invicem, collatæ cum actionibus Solis in Planetas, nullius ſunt momenti, neque adeò ſenſibiles errores inducunt: ſuntque errores illi minores in revolutionibus circa Solem more jam deſcripto agitatum, quàm in revolutionibus circa Solem quieſcentem (per Prop. LXVI. & Corol. Prop. LXVIII.) præſertim ſi

(f) Vide Princip. Lib. 3. Not. cc. (g) Ibid.

Orbis

Orbis cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis Planetarum omnium interiorum: nimirum umbilicus Orbis Mercurii in centro Solis, umbilicus Orbis Veneris in communi centro gravitatis Mercurii & Solis, umbilicus Orbis Telluris in communi centro gravitatis Veneris, Mercurii & Solis; & ſic deinceps. Hoc pacto umbilici Orbium Planetarum omnium, præter Saturnum, non diſtabunt ſenſibiliter à centro Solis; neque umbilicus Orbis Saturni recedet ſenſibiliter à communi centro gravitatis Jovis & Solis. Proinde centrum Solis non malè ſtatuitur ab Aſtronomis umbilicus communis Orbium cunctorum. In ipſo Saturno error inde ortus non eſt major quàm 1′. 45″. Si Orbis iſte, locando umbilicum in communi centro gravitatis Jovis & Solis, melius congruerit cum phænomenis, inde confirmabuntur hæc omnia quæ diximus.

De Orbium dimenſionibus, deque motu Apheliorum & Nodorum.

30. Si Sol quieſceret, & Planetæ nil agerent in ſe invicem, quieſcerent etiam eorum Aphelia & Nodi (per Prop. I. XI. & Cor. Prop. XIII.) & forent Orbium Ellipticorum axes majores ut latera cubica quadratorum temporum periodicorum (per Prop. XV.) adeoque ex datis temporibus periodicis darentur. Menſuranda ſunt hæc tempora non à mobilibus æquinoctiorum punctis, ſed à ſtellâ primâ arietis. Ex motu autem Solis augetur ſemiaxis quilibet, quaſi tertiâ parte diſtantiæ centri Solis à communi centro gravitatis Solis & Planetæ (per Prop. LX.) & actionibus Planetarum exteriorum in interiores nonnihil augentur tempora periodica interiorum, at vix ſenſibiliter, & Aphelia moventur tardiſſimè in conſequentia (per Corol. 6 & 7. Prop. LXVI.) Sic & actionibus Cometarum, ſiqui ultra Saturnum verſentur, augebuntur periodica tempora Planetarum omnium; & maximè ea exteriorum: & Aphelia omnium movebuntur in conſequentia. Progredientibus autem Apheliis, regredientur Nodi (per Corol. 11 & 13. Prop. LXVI.) & regreſſus eorum, ſi fortè quieſcat planum Eclipticæ, erit (per Corol. 16. Prop. LXVI.) ad progreſſum Aphelii in Orbe unoquoque, ut regreſſus Nodorum Lunæ ad progreſſum Aphelii ipſius quamproximè; hoc eſt ut 10 ad 21 circiter. Confirmare autem videntur obſervationes aſtronomicæ Aphelia tardiſſimè progredi, & Nodos regredi, reſpectu Fixarum. Et inde verſimile eſt, Cometas in regionibus ultra Planetas verſari. Hi in Orbibus

valde

valde excentricis revoluti, tranſcurrunt velociter perihelia ſua, &, motu in apheliis longè tardiſſimo, tempus ferè totum conterunt in regionibus ſupra Planetas, ut poſthac fuſiùs explicabitur.

Ex principiis allatis derivantur motus omnes Lunares hactenus ab Aſtronomis notati.

31. Planetas in hunc modum revolventes poſſe alios, ceu Satellites, aut Lunas, circum ſe deferre, conſtat (ex Propoſitione LXV.) Actione autem Solis fit, ut Luna noſtra velociùs moveatur, & radio ad terram ducto deſcribat aream pro tempore majorem, Orbemque habeat minùs curvum, atque adeò propius accedat ad Terram, in ſyzygiis quàm in quadraturis, niſi quatenus impedit motus excentricitatis. Namque excentricitas maxima eſt, ubi apogæum Lunæ in ſyzygiis verſatur, & minima ubi idem in quadraturis conſiſtit; & inde Luna in perigæo velocior eſt & nobis proprior, in apogæo autem tardior, & remotior in ſyzygiis quàm in quadraturis. Progreditur inſuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, ſed motu inæquabili: & Apogæum quidem velociùs progreditur in ſyzygiis ſuis, tardius regreditur in quadraturis, &, exceſſu progreſſûs ſupra regreſſum, annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem quieſcunt in ſyzygiis ſuis, & velociſſimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major eſt Lunæ latitudo maxima in ipſius quadraturis quàm in ſyzygiis: & motus medius tardior in perihelio Terræ quàm in ipſius aphelio. Plures inæqualitates in motu Lunari nondum ab Aſtronomis notantur. Hæ autem omnes conſectantur ex principiis noſtris (per Corol. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Prop. LXVI.) & in cœlis reverâ extare noſcuntur. Id in *Horroxii* hypotheſi illâ ingenioſiſſimâ, &, ni fallor, omnium accuratiſſimâ, quam *Flamſtedius* ad cœlos aptavit, videre licet. Corrigendæ tamen ſunt hypotheſes Aſtronomicæ in motu Nodorum. Hi æquationem, ſeu proſthaphæreſin, maximam admittunt in Octantibus ſuis, eſtque hæc inæqualitas maximè conſpicua ubi Luna in Nodis, atque adeò in Octantibus, verſatur. Inde Tycho, & poſt eum alii, rejecerunt hanc inæqualitatem in octantes Lunæ, eamque fecerunt menſtruam. Docent autem rationes à nobis allatæ hanc ad octantes Nodorum referri debere, & annuam conſtitui.

Ut & alii nonnulli nondum obſervati motus inæquabiles.

32. Præter inæqualitates ab Aſtronomis notatas, extant aliæ nonnullæ, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates

locitates enim, ſeu motus horarii, Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis ſolaris. Eſtque Variatio præterea in ratione duplicatâ temporis inter quadraturas quamproximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI.) Sunt & inæqualitates omnes in parte orbis Solem verſus paulò majores quàm in parte oppoſitâ, ſed differentiâ vix aut ne vix quidem ſenſibili.

Et diſtantiæ Lunæ à Terrâ ad tempus datum.

33. Per computationem quandam, quam brevitatis gratiâ non deſcribo, invenio etiam, quòd area, quam Luna radio ad terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, ſit quamproximè ut ſumma numeri $237\frac{3}{10}$, & ſinûs verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius eſt unitas; atque adeò quòd quadratum diſtantiæ Lunæ à Terrâ ſit ut ſumma illa diviſa per motum horarium Lunæ (b). Hæc ita ſe habent, ubi Variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris: ſin Variatio major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione. Tentent Aſtronomi, quàm probè diſtantiæ ſic inventæ congruerint cum Lunæ diametris apparentibus.

Derivantur motus Satellitum Jovis & Saturni ex motibus Lunæ.

34. Ex motibus Lunæ noſtræ, derivare licet motus Lunarum, ſeu Satellitum, Jovis & Saturni. Namque motus medius nodorum ſatellitis extimi Jovialis eſt ad motum medium nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte 8^{gr}. 24′ in antecedentia. Motus medii Nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis ſatellitis cujuſque, in conſequentia, eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ſunt ad æquationes

(b) Vide Princip. Lib. 3. Prop. XXVI & XXVII.

maximas nodorum & augis Lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. Variatio ſatellitis, è Jove ſpectati, eſt ad variationem Lunæ, ut ſunt motus toti nodorum temporibus periodicis ſatellitis & Lunæ ad invicem (per idem Corollarium) adeoque in ſatellite extimo non ſuperat 5″. 12‴. Parvitate harum inæqualitatum, & tarditate motuum, fit, ut motus ſatellitum tam regulares reperiantur; utque Aſtronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut aſſerant tardiſſimè retrogradum.

Planetas reſpectu Fixarum æquabili motu circum axes ſuos revolvi; hunc motum ad æquationem temporis aptiſſimum eſſe.

35. Interea dum Planetæ in hunc modum circum centra longinqua in orbem redeunt, rotantur ſinguli circum axes proprios; Sol quidem diebus 26; Jupiter horis 9, minutis primis 56; Mars horis $24\frac{2}{3}$; Venus horis 23; idque in planis ad planum Eclipticæ non multùm inclinatis, & ſecundum ordinem ſignorum; ut ex maculis in eorum corporibus per vices in conſpectum redeuntibus definiunt Aſtronomi. Similis eſt revolutio Terræ noſtræ facta horis 24. Hos motus actionibus virium centripetarum non accelerari nec retardari conſtat (per Corol. 22. Prop. LXVI.) Sunt igitur præ cæteris omnibus æquabiles, atque adeo ad menſuram temporis aptiſſimi. Sed revolutiones ex reditu, non ad Solem, ſed ad Stellam aliquam fixam definiendæ ſunt æquabiles. Nam ſitu Planetarum ad Solem inæquabiliter variato, revolutiones eorum à Sole ad Solem redduntur inæquabiles.

Lunam pariter motu diurno circa axem ſuum revolvi, & inde libration-em ipſius oriri.

36. Sic & Luna revolvitur circa axem proprium, motu maximè æquabili reſpectu Fixarum. Revolvitur autem tempore dierum 27, horarum 7. min. 43. id eſt menſe ſidereo; ita ut motus iſte diurnus æqualis ſit motui medio Lunæ in orbe ſuo. Proinde eadem Lunæ facies convertetur ſemper in centrum, circa quod motus iſte medius peragitur; hoc eſt, in orbis lunaris umbilicum exteriorem quamproximè. Inde oritur deflexio faciei de Terrâ, nunc in Orientem quidem, nunc verò in Occidentem, pro ſitu umbilici quem reſpicit; eſtque deflexio illa æqualis proſthaphæreſi orbis lunaris, ſeu differentiæ inter motum medium & verum. Hæc eſt libratio Lunæ in longitudinem. Eſt & libratio in latitudinem, orta ab inclinatione axis lunaris ad planum orbis in quo Luna

Luna circa Terram revolvitur. Servat enim axis ille ſitum ſuum ad Fixas quamproximè, & inde poli nobis per vices in conſpectum veniunt. Id intelligere licet ex motu Telluris, cujus poli, ob inclinationem axis ad planum Eclipticæ, per vices illuſtrantur à Sole. Situm axis ad Fixas, & ſitûs hujus variationem exactè determinare, Problema eſt Aſtronomo dignum.

De præceſſione æquinoctiorum, deque motu libratorio axis Telluris & Planetarum.

37. Ex Planetarum revolutionibus diurnis conatur materia recedere ab axibus hujus motûs; & inde partes liquidæ ſurgunt paulò altiùs juxta Æquatorem quàm juxta Polos, parteſque ſolidas inundabunt niſi pariter ſurgentes. Ideò Planetæ paulò craſſiores ſunt juxta Æquatorem quàm juxta Polos, & eorum puncta æquinoctialia propterea regrediuntur; axeſque motu oſcillatorio bis in ſingulis revolutionibus nutant, & bis redeunt ad inclinationem priorem; ut in Corol. 18. Prop. LXVI. expoſitum eſt. Nam & Jupiter, prælongis tubis viſus, non omnino rotundus cernitur, ſed illius diameter Eclipticæ parallela paulo eſt oblongior, quàm quæ à Septentrione in Auſtrum ducitur.

Mare bis fluere debere & bis refluere ſingulis diebus, & æſtum incidere in horam tertiam ab appulſu luminaris ad meridianum loci.

38. A Telluris etiam motu diurno & attractionibus Solis & Lunæ, mare noſtrum ſingulis diebus, tam Lunaribus, quàm Solaribus, bis intumeſcere debet, & bis defluere (per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI.) & aquæ altitudo maxima præcedere horam ſextam diei utriuſque, & ſequi duodecimam præcedentem. Tarditate motûs diurni retrahitur æſtus ad horam duodecimam; & vi motûs reciprocationis protrahitur idem, & in horam ſextæ propiorem differtur. Interea dum tempus per phænomena certiùs determinabitur, quidni, rationem mediocrem tenentes, conjiciamus æſtum maximum in horam tertiam? Hoc pacto aqua toto tempore aſcendet, quo vis Luminarium ad ipſam attollendam major eſt; deſcendetque, toto tempore quo minor eſt. Namque vis illa major eſt ab horâ nonâ ad horam tertiam, & minor à tertiâ ad nonam. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm ſupra: & per horas diei Lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad Meridianum loci revolvitur.

Æſtus maximos in ſyzygiis Luminarium ac Terræ, minimos

39. Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur diſtinctè, ſed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium conjunctione vel oppoſitione conjungentur eorum

in quadraturis fieri; idque horâ tertiâ ab appulsu Lunæ ad Meridianum loci: aſt extra ſyzygias & quadraturas deviare aliquantulùm ab horâ illâ tertiâ in horam tertiam ab appulſu ſolis.

effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam, ubi Luna deprimit; deprimetque, ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teſte, major eſt effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra ſyzygias & quadraturas, æſtus maximus, qui ſolâ vi lunari incidere ſemper deberet ad horam tertiam lunarem, & ſolâ ſolari in tertiam ſolarem; compoſitis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius eſt; adeoque in tranſitu Lunæ à ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam lunarem, in tranſitu Lunæ à quadraturis ad ſyzygias.

Majores eſſe æſtus ubi Luminaria ſunt in perigæis.

40. Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis à Terrâ. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in ſyzygiis majores ſint, & in quadraturis minores (cæteris paribus) quàm tempore æſtivo; & Luna in perigæo, ſingulis menſibus, majores ciet æſtus quàm ante vel poſt dies quindecim, ubi in apogæo verſatur. Unde fit, ut æſtus duo omninò maximi in ſyzygiis continuis ſe mutuò non ſequantur.

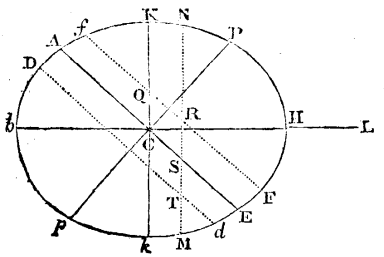
Majores eſſe æſtus circa æquinoctia.

41. Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius declinatione, ſeu diſtantiâ ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque motûs reciprocationem nullam cieret. Igitur Luminaria, recedendo de æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eò quòd Lunæ, jam in æquatore conſtitutæ, effectus maximè ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias, & minimi in quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque; & æſtuum maximum

maximum in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æſtivo, fit, ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant Æquinoctium vernum, quàm ſequantur; & ſæpiùs ſequantur autumnale, quàm præcedant.

Æſtus extra Æquatorem vicibus alternis majores & minores fieri.

42. Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine.



Deſignet APEP Tellurem, aquis profundis undique coopertam; C, centrum ejus; P, *p*, polos; AE, æquatorem; F, locum quemvis extra æquatorem; F*f*, parallelum loci; D*d*, parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; L, locum quem Luna ante horas tres occupabat; H, locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h*, locum huic oppoſitum; K, *k*, loca inde gradibus 90 diſtantia; CH, C*h*, Maris altitudines maximas menſuratas à centro Telluris; & CK, C*k*, altitudines minimas: & ſi axibus H*h*, K*k* deſcribatur Ellipſis; deinde Ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem, H*h*, deſcribatur Sphærois HPK*hpk*; deſignabit hæc figuram maris quamproximè; & erunt CF, C*f*, CD, C*d*, altitudines maris in locis F, *f*, D, *d*. Quinetiam ſi in præfatâ Ellipſeos revolutione punctum quodvis, N, deſcribat circulum NM, ſecantem parallelos F*f*, D*d* in locis quibuſvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo Maris in locis omnibus R, S, T, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem; poſtea defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f*, horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt ortum Lunæ: & affluxus poſterior, in *f*, erit minor quàm affluxus prior in F. Diſtinguitur enim mare totum in duos omninò fluxus ingentes & hemiſphæricos; unum in hemiſphærio KH*k*c, ad boream vergentem; alterum in Hemiſphærio oppoſito K*hk*c; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet. Hi fluctus, ſemper ſibi mutuò oppoſiti, veniunt per vices ad Meridianos locorum ſingulorum, interpoſito

intervallo

intervallo horarum Lunarium duodecim. Cúmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem. Æſtus autem major, declinante Lunâ in verticem loci, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, &, Lunâ declinationem mutante, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos, & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum; obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Per motus impreſſi conſervationem minui differentiam æſtuum, & fieri quoque ut æſtus maximus menſtruus ſit tertius à Syzygiâ.

43. Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motûs impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minores. Unde fit, ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ad invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii.

Motus maris impedimento alveorum retardari.

44. Fieri etiam poteſt, ut æſtus omnium maximus ſit quartus vel quintus à ſyzygiis, vel tardiùs adveniat; eò quòd retardantur motus marium in tranſitu per loca vadoſa ad littora. Sic enim æſtus accedit ad littus occidentale *Hiberniæ*, horâ tertiâ lunari; & poſt horam unam & alteram ad portus in littore auſtrali ejuſdem inſulæ; ut & ad *Inſulas Caſſiterides*, vulgo *Sorlings* dictas: dein ſucceſſivè ad *Falmuthum*, *Plymuthum*, *Portlandiam*, *Inſulam Vectam*, *Winchelſejam*, *Doveriam*, oſtium *Tameſis* & pontem *Londinenſem*, conſumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipſius alveis haud ſatis profundis impeditur æſtuum propagatio. Incidit enim æſtus ad *Inſulas Fortunatas*, & ad occidentalia marique *Atlantico* expoſita littora *Hiberniæ*, *Galliæ*, *Hiſpaniæ* & *Africæ* totius, uſque ad *Caput bonæ ſpei*, in horam tertiam lunarem; præterquam in locis nonnullis vadoſis, ubi æſtus impeditus tardiùs

diùs advenit, inque *Freto Gaditano*, quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æſtuat. Pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras *Americæ*, accedit æſtus primò ad *Braſiliæ* littora maximè orientalia circa horam lunarem quartam vel quintam; deinde ad oſtium *Fluvii Amazonum* horâ ſextâ; ad inſulas verò adjacentes horâ quartâ; poſtea ad *Inſulas Bermudas* horâ ſeptimâ; & ad *Floridæ* portum *S. Auguſtini* horâ $7\frac{1}{2}$. Tardiùs igitur progreditur æſtus per Oceanum, quàm pro ratione motûs Lunæ. Et perneceſſaria eſt hæcce retardatio, ut mare eodem tempore deſcendat inter *Braſiliam* & *Novam Franciam*, aſcendatque ad *Inſulas Fortunatas* & litora *Europæ* & *Africæ*, & vice verſâ. Namque mare aſcendere nequit in uno loco, quin ſimul deſcendat in altero. Lege jam deſcriptâ agitari quoque *Mare Pacificum* veriſimile eſt. Namque æſtus altiſſimi in litore *Chilienſi* & *Peruviano* incidere dicuntur in horam tertiam lunarem; ſed quâ velocitate propagantur inde ad litus orientale *Japoniæ* & ad *Inſulas Philippinas*, cæteraſque regno *Sinarum* adjacentes, nondum reperi.

Ex alveorum & litorum impedimentis varia oriri phænomena: ut quòd mare non niſi ſemel intumeſcat diebus ſingulis.

45. Porrò fieri poteſt ut æſtus propagetur ab Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citiùs tranſeat per aliqua freta quàm per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtum dividi in duos æquales, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam vel tertiam, vel viceſimam ſeptimam, ab impulſu Lunæ ad Meridianum portûs. Si Luna in hocce ad Meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Sin Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet, ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio; & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantùm perveniet ad maximam altitudinem, & ſemel

ad

ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum habemus, in portu regni *Tunquini* ad *Batſham* in latitudine boreali 20gr. 50′. Ibi aqua, die tranſitum Lunæ per æquatorem ſequente, ſtagnat; dein, Lunâ ad boream declinante, incipit fluere & refluere, non bis ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum: cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum; dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; &, Lunâ declinationem mutante, ceſſat, & mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ, & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus de Oceano in hunc portum duplex patet: unus rectior & brevior inter *Inſulam Hainan* & litora *Quantungi*, Provinciæ *Sinarum*; alter per circuitum inter Inſulam eandem & litora *Cochini*. Per breviorem citiùs propagatur æſtus ad *Batſham*.

Phil. Tranſ. Num. 162.

Tempora æſtuum intra fluviorum alveos eſſe magis inæqualia quàm in Oceano.

46. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum curſu. Nam curſus ille faciet aquam tardiùs influere ex mari, & in mare citiùs & velociùs refluere, atque adeò diutiùs refluere quàm influere; præſertim ſi longè in flumen aſcenditur, ubi minor eſt vis maris. Sic in fluvio *Anovæ*, ad tertium lapidem infra *Briſtoliam*, refert *Sturmius* aquam horis quinis influere, ſeptenis refluere: ſupra *Briſtoliam*, ut ad *Caneſham* vel *Bathoniam*, differentia proculdubio major eſt. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam prope Luminarium ſyzygias, vehementior maris motus, faciliùs ſuperando reſiſtentiam fluminum, faciet aquam citiùs ac diutiùs influere, adeoque minuet hanc differentiam. Interea verò dum Luna ad ſyzygias properat, neceſſe eſt ut flumina, ob curſus ſuos per magnitudinem æſtuum impeditos, magis impleantur, & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè poſt Syzygias, quàm proximè antea. Eâ de cauſâ æſtus omnium tardiſſimi non incident in ipſas ſyzygias, ſed paulò præcedent. Dixi æſtus etiam ante ſyzygias retardari vi Solis. Conjungatur cauſa utraque, &

æſtuum retardatio et major erit, & ſyzygias magis præcedet. Quæ omnia ita ſe habere colligo ex Tabulis æſtuum, quas *Flamſtedius* ex obſervationibus quàm plurimis conſtruxit.

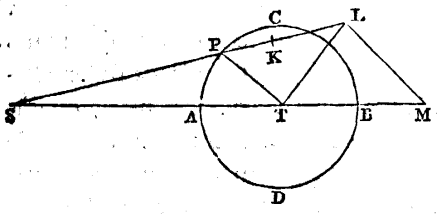
Æſtus à mari majore & profundiore majores oriri, & majores eſſe ad littora Continentium quàm in medio mari ad inſulas, atque adhuc majores in ſinubus vadoſis, orelato in Oceanum patentibus.

47. Legibus hactenus deſcriptis reguntur æſtuum tempora. Magnitudo pendet à magnitudine marium. Deſignet C centrum Terræ; EADB, ovalem maris figuram; CA, ovalis hujus ſemiaxem majorem; CB, ſemiaxem minorem priori inſiſtentem ad angulum rectum; D, punctum medium inter A & B; & ECF, vel *ecf*, angulum ad centrum Terræ, quem maris, litoribus E, F vel *e*, *f* terminati, latitudo ſubtendit. Verſetur autem punctum A in medio inter puncta E, F, & punctum D in medio inter puncta *e*, *f*; & ſi per differentiam altitudinum CA, CB exponatur quantitas æſtûs in mari profundiſſimo, Terram totam cingente, deſignabit exceſſus altitudinis CA ſuper altitudinem CE vel CF, quantitatem æſtûs in medio maris EF, litoribus E, F terminati; & exceſſus altitudinis C*e* ſuper altitudinem C*f*, quantitatem æſtûs ad litora ejuſdem maris quamproximè. Unde liquet æſtus in medio mari longè minores eſſe quàm ad litora, & æſtus ad litora eſſe propemodum ut maris latitudo EF, arcu quadrantali non major. Et hinc eſt quòd prope æquatorem, ubi mare inter *Africam* & *Americam* anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quàm hinc inde in Zonis Temperatis, ubi maria latè patent, inque *Maris Pacifici* litoribus ferè cunctis, tam *Americanis* quàm *Sinicis*, & inter Tropicos & extra; quódque ad Inſulas medio in mari ſitas vix aſſurgant ultra pedes duos vel tres; in litoribus autem magnarum Continentium ſint triplo vel quadruplo majores, & ultrà: præſertim ſi motus de Oceano patente venientes gradatim contrahantur in ſpatium anguſtum, & aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur: ut ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Angliâ*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgò *Auranches* dictam) in *Normanniâ*; ad *Cambajam* & *Pegu* in *Indiâ orientali*. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc

inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus accedendi vel recedendi priùs frangi poteſt, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes, 40, vel 50, & ampliùs. Sic & freta oblonga, vadoſa, & oſtiis reliquo alveo amplioribus & profundioribus in Oceanum patentia, cujus generis ſunt *Britannicum*, & *Magellanicum* ad introitum orientalem, magis fluent & refluent, curſumve intendent & remittent; eâque de cauſâ altiùs aſcendent ac deprimentur. Ad littora *Americæ auſtralis*, *Mare Pacificum* non rarò in refluxu ſuo remeare dicitur ad milliaria duo, & fugere viſum in litore ſtantis. Unde & ibi æſtus fiunt ſolito altiores. In aquis autem profundioribus ſemper minor eſt fluendi & refluendi velocitas, & propterea minor quoque aſcenſus ac deſcenſus. Nec Oceanus talibus in locis ad pedes pluſquam ſex, octo vel decem, aſcendere noſcitur. Aſcenſus verò quantitatem ſic computo.

Ex Principiis allatis computatur vis Solis ad perturbandos motus Lunæ.

48. Deſignet S Solem; T, Terram; P, Lunam; PADB, orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST, & SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM; & ſi vis mediocris circumſolaris agens in Terram exponatur per diſtantiam ST, vel SK; erit SL vis circumſolaris agens in Lunam. Ea componitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipſius SM pars TM, perturbat motum Lunæ (ut in Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt). Quatenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur, urgebitur Terra viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas, TM & ML, deſignare. Vis ML, in mediocri ſuâ quantitate, eſt ad vim, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam PT revolvi poſſet, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI.) hoc eſt in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, min. 43, ad dies 365, hor. 6, min. 9, id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{25}{1000}$. Vis, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$, revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ



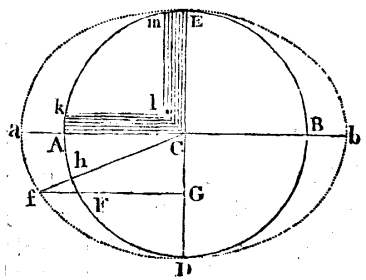
eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60. Ideoque vis mediocris ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{25}{1000}$, ſeu 1 ad 638092,6. Unde datur etiam vis TM, ex proportione linearum TM, ML. Hæ ſunt vires Solis, quibus motus Lunæ perturbatur.

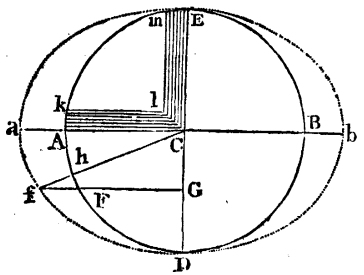
Computatur vis Solis ad mare movendum.

49. Si deſcendatur de orbe Lunæ ad ſuperficiem Terræ, minuentur hæ vires in ratione diſtantiarum $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis ML jam fiet 38604600 vicibus minor quàm vis gravitatis. Hæc vis, Terram undique æqualiter urgendo, vix aut ne vix quidem mutabit motum marium, adeoque in explicatione motûs illius negligi poſſit. Vis altera TM, in locis in quorum Zenith vel Nadir Sol conſtituitur, eſt triplo major quàm vis ML, adeoque 12868200 vicibus minor quàm vis gravitatis.

Computatur altitudo æſtûs ſub æquatore ex vi Solis orienda.

50. Deſignet jam ADBE Telluris ſuperficiem ſphæricam; *a*D*b*E, aquam ſupernatantem; C, centrum utriuſque; A, locum cui Sol perpendiculariter imminet; B, locum oppoſitum; D, E, loca inde gradibus nonaginta diſtantia; ACE *mlk*, canalem cylindricum rectangulum tranſeuntem per centrum Terræ. Vis ML, in loco quolibet, eſt ut diſtantia loci à plano DE, cui recta AC perpendicularis eſt; adeoque in canalis parte EC*lm*, nulla eſt; in parte alterâ AC*lk*, eſt ut gravitas in ſingulis altitudinibus. Nam gravitas in deſcenſu ad centrum Terræ eſt ubique ut altitudo (per Prop. LXXIII.) Igitur vis ML, urgendo aquam ſurſum minuet gravitatem ejus in canalis crure AC*lk* in datâ ratione. Et propterea aqua in hoc crure aſcendet, ut defectus gravitatis compenſetur majore altitudine; neque priùs ſtabit in æquilibrio, quàm gravitas totius æquetur gravitati totius in canalis crure C*lm*E. Quoniam gravitas particulæ cujuſque eſt ut diſtantia ipſius à centro Terræ, creſcet pondus aquæ totius in crure canalis in duplicatâ ratione altitudinis; adeoque altitudo aquæ in crure AC*lk* fiet ad altitudinem aquæ in crure C*lm*E, in dimidiatâ ratione numeri 12868201 ad 12868200; ſive in ratione numeri 25623053 ad





numerum 25623052; & altitudo in crure alterutro, EC*lm*, ad differentium altitudinum ut 25623052 ad 1. Eſt autem altitudo illa in crure EC*lm* pedum *Pariſienſium* 19615800, ut à *Gallis* nuper definitum eſt: & inde per analogiam illam prodit differentia altitudinum $9\frac{1}{5}$ digitorum hujus pedis. Igitur vi Solis major erit altitudo maris ad A quàm ad E digitis circiter novem (l). Et quamvis aqua in canali AC*Emlk* congeletur, & rigeat; manebunt tamen altitudines aquarum, Terræ ſupernatantium, ad A & E, locaque omnia intermedia.

Computatur altitudo æſtûs ſub parallelis ex vi ſolis oriunda.

51. Deſignet A*a* exceſſum illum altitudinis digitorum novem ad *a*; & *bf*, exceſſum altitudinis in alio quovis loco *b*; & ad DC, demittatur normalis *f*G, occurrens ſphæræ in F. Ob ingentem Solis diſtantiam, quâ fit ut lineæ omnes ad Solem tendentes pro parallelis haberi poſſint, eſt vis TM in loco quovis *b* vel *f*, ad vim illam in loco A, ut ſinus FG ad radium AC; adeoque cùm vires illæ tendant ſecundum lineas parallelas in Solem, generabunt hæ parallelas altitudines F*f*, A*a*, in eâdem ratione. Et propterea figura aquæ D*faEb* ſphærois erit, facta per revolutionem Ellipſeos circa majorem axem *ab*. Eſt inſuper altitudo perpendicularis *fb* ad altitudinem obliquam *f*F, ut *f*G ad *f*C, ſeu FG ad AC; & propterea altitudo *fb* eſt ad altitudinem A*a* in duplicatâ ratione FG ad AC; id eſt, in ratione quam habet ſinus verſus anguli DC*f* duplicati ad duplicatum radium, & inde datur. Et hinc Sole circa Terram apparenter revolvente, innoteſcit ratio intumeſcentiæ ac detumeſcentiæ ſingulis momentis in loco quolibet ſub Æquatore. Innoteſcit etiam decrementum æſtûs maris tàm ex latitudine locorum quàm ex declinatione Solis oriundum. Nimirum quòd ex latitudine locorum, aſcenſus & deſcenſus maris in locis ſingulis diminuitur in ratione duplicatâ ſinûs complementi latitudinis; quódque ex declinatione Solis, aſcenſus & deſcenſus ille ſub Æquatore diminuitur in ratione duplicatâ ſinûs complementi declinationis: ſed & extra æquatorem ſemiſumma aſcenſûs matutini

(l) Princip. Lib. 3. Prop. XXXVI.

& aſcenſûs veſpertini, id eſt aſcenſus mediocris, diminuitur in eâdem ratione quamproximè.

Ratio æſtuum ſub æquatore in ſyzygiis & quadraturis ex vi Solis & Lunæ conjunctim.

52. Deſignent S & L vires Solis & Lunæ in Æquatore verſantium, & mediocriter diſtantium à Terrâ; R, radium; T & U, ſinus verſos duplicatorum complementorum declinationis Solis & Lunæ ad tempus datum; D & E, mediocres diametros apparentes Solis & Lunæ; F ac G, earum diametros apparentes ad tempus illud datum; & erunt vires, ad æſtus ſub æquatore ciendos, in ſyzygiis quidem $\frac{VG^3}{2RE^3}L + \frac{TF^3}{2RD^3}S$; in quadraturis autem, $\frac{VG^3}{2RE^3}L - \frac{TF^3}{2RD^3}S$. Si eadem æſtuum ratio obſervetur etiam ſub parallelis, habebimus ex obſervationibus, in boreali noſtrâ regione exactè factis, proportionem inter vires L & S. Et tum demum per hanc regulam prædicere licebit quantitates æſtuum ad ſingulas ſyzygias & quadraturas.

Computatur vis Lunæ ad æſtus ciendos & altitudo aquæ inde oriunda.

53. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali, totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt quaſi pedum 45; in quadraturis autem pedum tantùm 25. Luminarium diametros apparentes, quæ hîc non definiuntur, aſſumamus eſſe mediocres; ut & Lunæ declinationem in quadraturis æquinoctialibus mediocrem eſſe, ſeu graduum $23\frac{1}{2}$; & ſinus verſus duplicati complementi erit 1682 poſito radio 1000. Solis autem in æquinoctiis, & Lunæ in ſyzygiis, declinatio nulla eſt; & ſinus verſus duplicati complementi 2000. Inde fit vis in ſyzygiis $L+S$, in quadraturis $\frac{1682}{2000}L-S$, æſtuum altitudinibus 45 pedum & 25 pedum, ſeu 9 paſſuum & 5 paſſuum, proportionalis. Et ductis extremis & mediis in ſe, fit $5L+5S=\frac{15138}{2000}L-9S$, ſeu $L=\frac{28000}{5138}S=5\frac{5}{11}S$. Porro tempore æſtivo aſcenſum maris in ſyzygiis eſſe ad aſcenſum in quadraturis ferè ut 5 ad 4 memini me audiſſe. In ipſis ſolſtitiis veriſimile proportionem paulo minorem eſſe, puta 6 ad 5. Inde verò conſectatur eſſe $L=5\frac{1}{6}S$. Donec aliquid certius ex obſervationibus conſtiterit, aſſumamus $L=5\frac{1}{3}S$; & cùm æſtus ſint ut vires, vis autem Solaris cieat æſtum altum novem digitos, vis Lunaris ciebit æſtum altum pedes quatuor. Demus altitudinem illam, per vim reciprocationis aquarum, quâ motus ſemel impreſſus aliquamdiu conſervatur, duplicari, vel fortè

triplicari;

triplicari; & generabitur æſtuum quantitas illa omnis, quæ in Oceanis reverâ conſpicitur.

Has vires Solis & Lunæ vix aliter quàm per æſtus Maris ſentiri poſſe.

54. Sufficiunt igitur hæ vires commovendo Mari: aſt alios tamen effectus ſenſibiles in hâc Terrâ, quantum animadverto, producent nullos. Nam cùm granum unum in pondere granorum 4000, ope libræ exactiſſimæ, ſentiri vix poſſit, vis autem ſolaris ad ciendos æſtus ſit 12868200 vicibus minor vi gravitatis; & ſumma virium Solis & Lunæ, major exiſtens in ratione $6\frac{1}{3}$ ad 1, ſit 2032890 vicibus minor vi eâdem gravitatis: perſpicuum eſt, quòd conjunctæ illæ vires ſint vicibus quingentis minores, quàm quæ pondus corporis cujuſvis, in librâ appenſi, ſenſibiliter augere vel minuere poſſint; & propterea corpus nullum appenſum movebunt ſenſibiliter. Unde nec in experimentis Pendulorum, Barometrorum, Inſidentium Aquæ ſtagnanti, & Staticis ſimilibus, ſenſibiles edent effectus. Atmoſphæra quidem his viribus fluet & refluet ad modum maris, ſed motu tam exiguo ut exinde ventus nullus ſenſibilis oriatur (m).

Corpus Lunare eſſe quaſi ſextuplo denſius quàm Solare.

55. Si Lunæ & Solis tam effectus in æſtibus ciendis, quàm diametri apparentes, æquarentur inter ſe; forent horum vires abſolutæ ut magnitudines (per Corol. 14. Prop. LXVI.) At lunaris effectus eſt ad effectum Solis, ut $5\frac{1}{3}$ ad 1 circiter: & diameter minor, in ratione $31\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{5}$, ſeu 45 ad 46. Augenda eſt autem vis Lunæ in ratione effectûs directè, inque ratione triplicatâ diametri inverſè: eoque pacto fiet vis Lunæ, collata cum ipſius magnitudine, ad vim Solis collatam cum hujus magnitudine, ut $5\frac{1}{3}$ ad 1 ſemel, & 45 ad 46 ter; id eſt ut $5\frac{7}{10}$ ad 1 circiter. Habet igitur Luna vim abſolutam centripetam majorem in ratione $5\frac{7}{10}$ ad 1 pro magnitudine corporis ſui, quàm Sol pro magnitudine ſui; adeoque denſior eſt in eâdem ratione.

Lunam denſiorem eſſe Terrâ noſtrâ in ratione 3 ad 2 circiter.

56. Tempore $27^d. 7^h. 43'$, quo Luna revolvitur circa Terram, revolvi poſſet Planeta circa Solem ad diſtantiam 18,954 diametrorum Solis ab ipſius centro, poſito quòd Solis diameter mediocris apparens ſit $32'\frac{1}{5}$. Hoc tempore revolvi poſſet Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam 30 diametrorum terreſtrium. Si idem eſſet numerus diametrorum in utroque caſu, foret vis abſoluta circumterreſtris ad vim abſolutam circumſolarem, ut magnitudo

(m) Delirant igitur, qui cœli mutationes ex vi Lunæ arceſſunt.

nitudo Terræ ad magnitudinem Solis (per Corol. 2. Prop. LXXII.) Quoniam plures ſunt diametri terreſtres in ratione 30 ad 18,954, minus erit corpus Telluris in ratione illâ triplicatâ, hoc eſt in ratione $3\frac{28}{29}$ ad 1. Eſt igitur vis Telluris, pro magnitudine corporis ſui, ad vim Solis, pro magnitudine ſui, ut $3\frac{28}{29}$ ad 1; atque adeo denſitas Terræ ad denſitatem Solis in eâdem ratione. Cùm igitur denſitas Lunæ ſit ad denſitatem Solis ut $5\frac{7}{10}$ ad 1, erit denſitas Lunæ ad denſitatem Terræ ut $5\frac{7}{10}$ ad $3\frac{28}{29}$, ſeu 23 ad 16. Unde cùm magnitudo Lunæ ſit ad magnitudinem Terræ ut 1 ad $41\frac{1}{2}$ circiter, erit vis abſoluta centripeta Lunæ ad vim abſolutam centripetam Terræ, ut 1 ad 29 circiter; nec non quantitas materiæ in Lunâ ad quantitatem materiæ in Terrâ, in eâdem ratione. Hinc datur commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ exactiùs quàm antè: quo cognito, licebit jam diſtantiam Lunæ à Terrâ magis accuratè colligere. Sed malim expectare donec proportio corporum Lunæ ac Terræ ad invicem ex phænomenis æſtûs marini determinetur exactiùs: ſperans etiam interea confore, ut ambitus Terræ ex majoribus ſtationum intervallis menſuretur, quàm hactenus à quoquam factum fuit.

De Fixarum diſtantiâ.

57. HACTENUS expoſui Syſtema Planetarum. Stellas autem fixas immenſis intervallis ab hoc ſyſtemate diſtare, colligitur ex defectu parallaxeos annuæ. Hanc minuto primo minorem eſſe certiſſimum eſt, & propterea diſtantias Fixarum ſuperare diſtantiam Saturni à Sole, vicibus pluſquam 360. Qui Terram Planetis, & Solem Fixis annumerant, longiùs amovebunt Fixas argumentis ſequentibus. Ex Telluris motu annuo oriri debet tranſlatio Fixarum inter ſe, parallaxi duplicatæ propemodum æqualis. At Stellæ majores & propiores, reſpectu ulteriorum, quæ per Teleſcopia ſolummodo viſuntur, nondum moveri notantur. Demus motum eorum minorem eſſe minutis viginti ſecundis, & diſtantia Fixarum proximarum ſuperabit mediocrem diſtantiam Saturni vicibus 2000. Rurſus Saturnus diſco ſuo 17″, vel 18″, lato excipit $\frac{1}{2100000000}$ partem circiter lucis Solaris. Namque tanto minor eſt diſcus ille ſuperficie totâ ſphæricâ orbis Saturnii. Si Saturnus reflectere ſupponatur quaſi partem quartam hujus lucis,

lux

lux tota quæ ab ejus hemiſphærio lucido reflectitur, erit quaſi $\frac{1}{41000000}$ pars lucis totius manantis ab hemiſphærio Solis. Ergo cùm lux rareſcat in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis lucentis, ſi Sol magis diſtaret quàm Saturnus vicibus $10000 \times \sqrt{42}$, hic appareret æquè lucidus ac jam Saturnus apparet, abſque annulo ſuo; atque adeò paulo lucidior foret quàm Stella fixa primæ magnitudinis. Ponamus igitur diſtantiam, quâ Sol luceret ut Fixa, majorem eſſe quàm diſtantia Saturni quaſi vicibus 100000, & ipſius diameter apparens erit $7''''.16'''''$. parallaxis autem à Terræ motu annuo orta $13''''$. Atque tanta erit diſtantia, diameter apparens, & parallaxis Fixarum magnitudinis primæ, Soli noſtro, quoad magnitudinem & lucem, æqualium. Fingere quidem licet partem bene magnam lucis Fixarum, in tranſitu ſuo per tanta ſpatia, ſiſti & interire, adeoque Fixas propiùs admoveri debere: verùm hâc ratione Fixæ ulteriores vix conſpici poſſent. Demus verbi gratiâ tres quartas lucis partes interire in tranſitu à Fixis proximis ad nos, & partes tres quartæ bis interibunt in tranſitu per duplum ſpatium, ter in tranſitu per triplum, & ſic deinceps; adeoque Fixæ quæ ſunt duplo remotiores erunt ſexdecim vicibus obſcuriores; nimirum quadruplo obſcuriores ob diminutam diametrum apparentem, atque rurſus quadruplo obſcuriores ob amiſſam lucem; & eodem argumento Fixæ triplo remotiores erunt $9 \times 4 \times 4$, ſeu 144, vicibus obſcuriores; & Fixæ quadruplo remotiores erunt $16 \times 4 \times 4 \times 4$, ſeu 1024, vicibus obſcuriores. Tanta autem lucis diminutio cum phænomenis, & hypotheſi quòd Fixarum diverſæ ſunt diſtantiæ, neutiquam conſiſtit.

Cometas, quoties in conſpectum veniunt, eſſe Jove propiores, probatur ex parallaxi in longitudinem.

58. Tantis igitur intervallis ab invicem diſtantia ſidera nec trahent ſe mutuò ſenſibiliter, nec à Sole noſtro trahentur. At Cometas vi circumſolari obnoxios eſſe neceſſe eſt: etenim ut defectus parallaxeos diurnæ extulit eos regionibus ſublunaribus, ſic ex parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes, ſub exitu apparitionis, aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores, ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum, ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi Terra

Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ſitu. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometâ & celeriùs fertur, Cometa fit retrogradus; ſi tardiùs, fit ſaltem tardior; & Terra pergente ad contrarias partes, celerior. Et colligendo differentias inter motus celeriores & tardiores, atque ſummas motuum celeriorum & retrogradorum, eaſque cum ſitu & motu Terræ, ex quibus oriuntur, conferendo; prodiit mihi, ex hâc parallaxi, diſtantia Cometarum, quo tempore nudis oculis videri deſinunt, minor ſemper quàm diſtantia Saturni, & ut plurimum minor quàm diſtantia Jovis.

Probatur ex parallaxi in latitudinem.

59. Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis, quamdiu moventur celeriùs; at in fine curſûs, ubi motus apparens à parallaxi oriundus majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas meo computo collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt, quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendant ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Probatur aliter ex parallaxi.

60. Confirmatur præterea tanta propinquitas ex parallaxi orbis annui, quatenus ea præterpropter colligitur per hypotheſin, quòd Cometæ moventur uniformiter in lineis rectis. Nota jam eſt methodus (à *Keplero* tentata, à *Walliſio* & *Wrennio* perfecta) colligendi diſtantiam Cometæ juxta hanc hypotheſin ex quatuor obſervationibus: & Cometæ ad hanc regularitatem reducti tranſire ſolent per medium regionis Planetarum. Ut Cometæ annorum 1607 & 1618 inter Solem & Terram, definiente *Keplero*; ille anni 1664, infra orbem Martis; & iſte anni 1680, infra orbem Mercurii; definientibus *Wrennio* & aliis. Per ſimilem hypotheſin rectilineam, *Hevelius* Cometas omnes, quorum obſervationes extant, locavit infra orbem Jovis. Errant igitur, & abſque calculo Aſtronomico loquuntur, qui, ex regulari motu Cometarum, vel ablegant eos in regiones Fixarum, vel motum Telluri denegant; cùm non poſſint eorum motus ad omnimodam regularitatem ſatis reduci, niſi ex admiſſo tranſitu per regiones

Telluri moventi vicinas. Et hæc ſunt argumenta ex parallaxi, quatenus ea abſque exactâ cognitione orbium & motuum Cometarum determinari poſſit.

Ex luce capitum probatur Cometas deſcendere ad orbem Saturni.

61. Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ; in duplicatâ ratione ob auctam diſtantiam à Sole, & in alia duplicatâ ratione ob diminutam apparentem diametrum. Inde intelligitur, quòd Saturnus ob duplam diſtantiam & dimidiam ferè diametrum apparentem, apparere debet quaſi 16 vicibus obſcurior quàm Jupiter; & quòd, ſi diſtantia ejus eſſet quadruplo major, foret lux ejus 256 vicibus minor, adeoque nudis oculis cerni vix poſſet. Cometæ autem non rarò æquant Saturnum luce ſuâ, nec tamen ſuperant ipſum diametris apparentibus. Cometa anni 1678, juxta obſervationem *Hookii*, æquabat luce ſuâ Fixas primæ magnitudinis; & caput ejus, ſeu Stella in medio comæ, per teleſcopium pedum quindecim viſum, apparebat æquè lucidum ac Saturnus propè Horizontem; diameter verò capitis erat ſolummodo 25″, id eſt eâdem ferè cum diametro circuli æquantis Saturnum cum annulo. Coma capiti circumfuſa erat quaſi decuplo latior, nimirum $4\frac{1}{6}$ min. Rurſus Cometæ anni 1682 minima capillitii diameter, per tubum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem, ſeu Stella in medio, vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantùm 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis ſuperabat Cometam anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Adde quòd Cometa anni 1665, menſe *Aprili*, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſuâ pene Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′; at nucleus cum Planetis, ope Tubi optici, collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Adde annulum, & Saturni facies jam dupla erit; lux verò haud intenſior quàm Cometæ; proindeque Cometa propior erat Soli quàm Saturnus. Ex proportione nuclei ad capillitium

tium, his obſervationibus patefactâ, & latitudine, quæ rarò ſuperat 8′ vel 12′, patet ſtellas Cometarum, ut plurimum, ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis; lucem verò interea cum luce Saturni non rarò conferri poſſe, eamque aliquando ſuperare. Et inde diſtantias eorum in periheliis vix eſſe majores quàm Saturni. In diſtantiâ duplo majore lux foret quadruplo minor, & fuſco pallore tantum cederet luci Saturni, quantum lux hujus cedit ſplendori Jovis: quæ differentia facilè notari poſſet. In diſtantiâ verò decuplo majore, corpora eorum ſuperarent corpus Solis, lux autem cederet luci Saturni vicibus centum. Inque diſtantiis majoribus corpora longe ſuperarent Solem, at in tenebris profundis conſtituta non amplius cernerentur. Tantùm abeſt ut, Sole noſtro in Fixis numerato, Cometæ ad medias regiones inter Solem & Fixas amoveantur. Ibi certè non multo magis illuſtrari deberent à Sole, quàm nos illuſtramur à maximâ Fixarum.

Ut & longè infra orbem Jovis, & quandoque infra orbem Terræ.

62. Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circumdatur, quaſi per nubem obtuſè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propiùs ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copiâ lucis, à ſe reflexæ, Planetas æmuletur. Inde veriſimile ſit, Cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, ut ex parallaxi probavimus. Idem verò quàm maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu, minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus, à capite ſemper ortus, per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. Poſteriore, referenda eſt lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Quòd ſi imagineris lucem hanc omnem congregari, & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò propior. Sic Cometa anni 1679, *Decembris* 12 & 15 ſtylo veteri, quo tempore caudam clariſſimam emittebat, & luci multorum Jovium, per tantum ſpatium diffuſæ, ac dilatatæ, non imparem; magnitudine nuclei (ut obſervabat *Flamſtedius*) cedebat Jovi, adeoque erat Soli longè vicinior. Quini-

mo minor erat Mercurio: nam die 17 menſis hujus, ubi Terræ propior erat, apparuit *Caſſino* per teleſcopium pedum 35, paulo minor globo Saturni. Die octavo menſis hujus, tempore matutino, vidit *Hallejus* caudam perbrevem & latam, & quaſi ex corpore Solis jamjam orituri exeuntem, ad inſtar nubis inſolito more fulgentis, nec prius diſparentem quàm Sol ipſe inciperet ſupra horizontem conſpici. Superabat igitur hic ſplendor lucem nubium uſque ad ortum Solis; &, immediato Solis ſplendori ſolùm cedendo vincebat longè lucem omnium ſtellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipſa Luna, in tantâ Solis orientis vicinitate, cerni ſolet. Fingas lucem hancce dilatatam congregari, & in orbem nuclei Cometici, Mercurio minorem, coarctari: & ſplendore longè fortiori jam reddita magis conſpicua, Mercurium longè ſuperabit, adeoque erit Soli vicinior. Diebus 12 & 15 ejuſdem menſis, cauda hæc, per ſpatium longè majus diffuſa, apparuit rarior; at luce tamen adeo forti, ut, ſtellis fixis vixdum apparentibus, cerneretur; & mox trabis mirum in modum fulgentis ſpeciem exhibuit. Ex longitudine quadraginta vel quinquaginta graduum & latitudine duorum quantitatem lucis totius computes.

Idem probatur ex inſigni ſplendore caudarum in vicinià Solis.

63. Confirmatur verò tantus Cometarum ad Solem acceſſus, ex ſitu eorum ubi maximè fulgent. Nam capite per Solem tranſeunte, & ſub radiis Solaribus adhuc latente, narrantur caudæ omnium fulgentiſſimæ de horizonte ad modum trabium igneârum exiiſſe; dein, capite in conſpectum veniente & longiùs à Sole recedente, ſplendorem ſemper minui, & in pallorem viæ lacteæ ſimilem, ſed imprimis multò magis conſpicuam, poſteà verò langueſcentem abire. Talis erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus *lib.* 1. *Meter.* 6. cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quòd ante Solem vel ſaltem ſub radiis Solaribus occidiſſet; ſequente verò die, quantum potuit viſum eſt. *Nam quàm minimâ fieri poteſt diſtantiâ, Solem reliquit, & mox occubuit.* Ob nimium ardorem, caudæ ſcilicet, nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed *procedente tempore* (ait *Ariſtoteles*) *cùm* cauda *jam minus flagraret, reddita eſt* capiti *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem,* id eſt ad 60^{gr}. *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum* Orionis *ibi evanuit.* Ejuſdem generis Cometas duos *Juſtinus lib.*

37 deſcribit, quos ait ita luxiſſe, *ut Cœlum omne conflagrare videretur, & magnitudine ſui quartam Cœli partem occupâſſe, & fulgore ſui Solis nitorem viciſſe.* Quibus ultimis verbis juxtapoſitio ardoris Cometici & Solis orientis vel occidentis inſinuatur. Accedit Cometa anni 1101, vel 1106, cujus ſtella erat parva & obſcura, ut ille anni 1680; *ſed ſplendor, qui ex eâ exivit, valde clarus, & quaſi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat,* ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi Monacho:* apparuit initio menſis *Feb.* circa veſperum ad occaſum Solis brumalem. Inde & ex ſitu caudæ, colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole,* inquit *Matthæus Pariſienſis, diſtabat quaſi cubito uno, ab horâ tertiâ,* rectius ſextâ, *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Cometa anni 1264, menſe *Julio,* aut circa Solſtitium, præcedebat Solem orientem, magnâ luce uſque ad medium Cœli verſus occidentem radios ſuos emittens. Et initio paulum aſcendebat ſupra horizontem; ſed, progrediente Sole, diſcedebat indies ab horizonte, donec tandem ipſum Cœli medium præteriret. Dicitur autem fuiſſe principio magnus & clarus, comam habens latam, quæ de die in diem cœpit deficere. Deſcribitur autem in *Append. Matth. Paris, Hiſt. Angl.* in hunc modum. *A. C.* 1265 *apparuit Cometa tam notabilis, ut nullus tunc vivens viderit talem priùs. Ab oriente enim cum magno fulgore ſurgens, uſque ad medium Hemiſphærii verſus occidentem omnia perlucidè pertrahebat.* Anno 1401, vel 1402, Sole infra horizontem demerſo, apparuit in occidente *Cometa lucidus ac clarus, comam erectam explicans ignis flammantis ſpecie, non ſecus ac haſtam ab occaſu in ortum radios jaculans; à Sole, infra horizontem demerſo, propriis radiis effuſis omnes orbis Terræ terminos coluſtrabat; nec aliis ſtellis lumen exſerere concedebat, aut aerem noctis umbrâ infuſcari: quòd ejus lumen aliorum ſplendorem vinceret, & ad Cœli verticem flammans protenderetur quamdiu ſupra horizontem extabat, &c. Hiſt. Byzant. Ducæ Michaelis Nepotis, cap.* 16. Ex ſitu caudæ, & tempore hujus primæ apparitionis, colligitur caput tunc fuiſſe vicinum Soli, & indies à Sole receſſiſſe: nam Cometa ille tres menſes perduravit. Anno 1527, *Aug.* 11, circa horam quartam matutinam viſus eſt per totam ferè *Europam* Cometa terrificus in *Leone,* duravitque per horam unam & quadrantem quotidiè flagrans. A ſubſolano ortus eſt

verſuſque meridiem, & occidentem aſcendit longitudine immenſâ; ſub ſeptentrione autem maximè conſpicuus fuit, & nube (id eſt caudâ) terribilis deſcribitur, ex mente plebis formam habens brachii incurvati cum gladio ingentis magnitudinis. Anno 1618, diebus extremis *Novembris*, increbuit rumor apparere ſub ortum Solis trabem candidam, quæ fuit nimirum cauda Cometæ, capite adhuc intra radiorum claritatem deliteſcente. *Novemb.* 24. & deinceps viſus eſt Cometa clarâ luce, capite & caudâ clariſſimis. Longitudo caudæ, quæ primùm graduum erat 20, vel 30, crevit uſque ad *Decemb.* 9, quando evaſerat graduum 75, at luce dilutiore ſemper & rariore quàm ſub initio. Anno 1668, *Mart.* 5, *ſt. n.* horâ ſeptimâ veſp. *Pater Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit horizonti proximum, ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in litore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; cauda ſub initio ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela, ſpeciem habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum. Poſtea verò luce decreſcente, aucta eſt magnitudine, quoad uſque Cometa apparere deſiit. Unde & *Caſſinus Bononiæ Martii* 10, 11 & 12, de horizonte exeuntem vidit ad longitudine graduum 32. In *Portugalliâ* verò quartam ferè Cœli partem, id eſt gradus 45, occupâſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenta, nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ manifeſtum eſt, quòd caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, ubi cauda maximè ſplendebat. His omnibus adde Cometam anni 1680, cujus inſignem ſplendorem, in conjunctione capitis cum Sole, jam antè deſcripſi. Arguit autem tantus ſplendor Cometas hujus generis reverâ tranſire per fontem luminis, præſertim cùm caudæ nunquam ita luceant in oppoſitione Solis, neque ibi legantur trabes igneæ apparuiſſe.

Probatur ex luce capitum quatenus ea cæteris paribus major eſt in vicinià Solis.

64. Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terrâ Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior anni 1665, obſervante *Hevelio*, ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque præterierat perigæum; ſplendor verò capitis

capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa, radiis Solaribus obtectus, deſiit apparere. Cometa anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine menſis *Julii*, ubi primùm conſpectus eſt, tardiſſimè movebatur minutos primos 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur, uſque ad *Sept.* 4, quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat: id quod etiam ex diametro capitis, micrometro menſuratâ, colligitur; quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6, eſſe tantùm 6′. 5″, incluſâ comâ; at *Sept.* 2, eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longè minus apparuit, quàm in fine motûs: at initio tamen, in viciniâ Solis, longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium menſis *Decembris*, & iſte anni 1680, circa finem ejuſdem menſis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in perigæis: verùm ſplendor maximus capitum contigit ante duas ferè ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis ſolaribus, & ſplendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate Solis. Die 12 menſis *Decembris*, conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantiâ novem graduum à Sole, id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17, apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velociſſimè motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat *Ori Pegaſi*, ſtellæ tertiæ magnitudinis; *Jan.* 3, apparebat ut ſtella quartæ; *Jan.* 9, ut ſtella quintæ; *Jan.* 13, ob ſplendorem Lunæ creſcentis, diſparuit; *Jan.* 25, vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Caput verò Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1, majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parvum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7, *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Si ſumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita, in longinquis regionibus poſita, luxiſſent ante & poſt æqualiter; id adeo ob æquales diſtantias à Terrâ. Quòd uno caſu maximè luxerunt, altero evanuerunt, vicinitati Solis in priore caſu,

casu, distantiæ ejus in posteriore ascribendum est. Et ex magna illâ lucis utriusque differentiâ concluditur magna vicinitas in priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere, ubi capita velocissimè moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in viciniâ Solis.

Idem confirmatur ex magno numero Cometarum visorum in regione Solis.

65. Ex his intellexi tandem, cur Cometæ tantopere frequentent regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent sæpiùs apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores, qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verùm percurrendo historias Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio Solem versus, quàm in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem, tantillo intervallo circa Solem descripti, pars longè major sita est à latere Terræ, quod Solem respicit; inque parte illâ majore, Soli utplurimum viciniores, magis illuminari solent. Per orbium quoque insignem excentricitatem fit, ut Apsides imæ sint Soli longè propiores, quàm si revolutiones in circulis Soli concentricis peragerentur.

Confirmatur etiam ex caudis majoribus & splendidioribus post conjunctionem capitum cum Sole quam antea.

66. Hinc etiam intelligimus, quare Cometarum caudæ in capitibus ad Solem properantibus raræ semper & breves apparent, & vix longitudinem graduum 15 vel 20 superâsse leguntur; at in recessu capitum à Sole, fulgent sæpe ad instar trabium ignitarum, & mox ad gradus 40, 50, 60, 70, & ultra, in longum porriguntur. Oritur utique tantus caudarum splendor tantaque longitudo ex calore Solis Cometam prætereuntem calefaciente. Et inde colligere videor, Cometas omnes, quorum tales sunt caudæ, transiisse per viciniam Solis.

Cauda oriri ex atmosphæris Cometarum.

67. Inde etiam colligere licet, quòd caudæ oriantur ex Atmosphæris capitum. Est autem de Caudâ opinio triplex: eam vel jubar esse Solis, per translucidum Cometæ caput propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram; vel denique nubem, esse seu vaporem, à capite Cometæ jugiter surgentem, & abeuntem in partes à Sole adversas. Opinio prima

prima eorum est, qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur à pulverum & fumorum particulis per aërem semper volitantibus: adeoque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aëre clariore, tenuius, & ægrè sensibile; in Cœlis autem, absque materiâ reflectente, nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, & eâ ratione res redit ad opinionem tertiam. Nam materia illa reflectens non alibi reperiri debet quàm in regione caudæ, ne Cœlum totum, luce Solis illustratum, uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus; qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum, distinctè ad nos transmissa, demonstrat Medium cœleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quòd dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissimè contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ sunt; quippe quæ admotis oculo telescopiis evanescunt. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde est, quòd scintillatio in priore casu generetur, in posteriore verò cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos, absque omni refractione sensibili. Nequis contendat, quòd caudæ non soleant videri in Cometis, cùm eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos; & propterea caudas Fixarum non cerni; sciendum est, quòd lux Fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est, & valdè obtusa. Sic enim Cometa anni 1680, mense *Decembri*, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gra-

dus 40, 50, 60, longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28, caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantùm magnitudinis, cauda verò, luce quidem pertenui at ſatis ſenſibili, longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum, vel paulo ultra. Sed & *Feb.* 9 & 10, ubi caput nubis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa, in iiſdem cœli regionibus, in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa anni 1680 *Decemb.* 28, hora $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, verſabatur in ♓. 8°. 41′, cum latitudine boreali 28°. 6′; Sole exiſtente in ♍. 18°. 26′. Et Cometa anni 1577, *Decemb.* 29. verſabatur in ♓. 8°. 41′, cum latitudine boreali 28°. 40′, Sole etiam exiſtente in ♍. 18°. 26′, circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ, ex meis & aliorum obſervationibus, declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore verò, ex obſervationibus *Tychonis*, declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur, repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut phænomena Caudarum ex materiâ aliquâ reflectente deriventur. Vapores autem qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum atmoſphæris oriri poſſe ſic facilè intelligetur.

Aeris & vaporum immenſam eſſe raritatem in ſpatiis cœleſtibus: & perexiguam vaporum quantitatem ad phænomena caudarum efficere.

68. Aer, juxta ſuperficiem Terræ, ſpatium occupare noſcitur quaſi 1200 vicibus majus quàm Aqua ejuſdem gravitatis; adeoque aëris columna cylindrica pedes 1200 alta, ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea, ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 1200 dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ pedum 32. Igitur in altitudine pedum 1200, ſeu ſtadiorum duorum, eſt pondus aëris incumbentis minus, atque adeo raritas aëris compreſſi major, quàm juxta ſuperficiem Terræ, in proportione 33 ad 32. Quo

(m) Vide Tractatum Noſtrum de Atmoſphærâ, in Actis Philoſophicis Societatis Regiæ Londinenſis.

Quo cognito computare jam licet raritatem aëris per regiones univerſas (ſubſidio Corollarii Propoſitionis XXII. *Libri Secundi Principiorum*) ex hypotheſi quòd Aeris expanſio ſit compreſſioni reciprocè proportionalis: comprobata eſt enim hæc proportio tum *Hookii* tum aliorum experimentis. Computationem ſubjunximus in Tabulâ ſequente, ubi columna prima deſignat altitudinem Aeris in milliaribus, quorum 4000 æquent ſemidiametrum Terræ; ſecunda, compreſſionem Aeris, ſeu pondus incumbens; ac tertia, raritatem ſeu extenſionem Aeris ejuſdem, poſito quòd gravitas decreſcat in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro Terræ. Latinorum verò characteres numerales hîc uſurpantur pro certo circulorum numero, ut ſcribendo 0,XVII 1224 pro 0,00000000000000001224 & 26956XV pro 26956000000000000000 (m). Ex hâc Tabulâ liquet Aerem in progreſſu ad ſuperiora rarefieri; ut aëris, qui Terræ proximus eſt, ſphæra, diametro digiti unius deſcripta, & eâdem deinceps rarefactione dilatata, in altitudine ſemidiametri unius Terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones aduſque ſphæram Saturni, & longè ultra; atque in altitudine decem ſemidiametrorum Terreſtrium, impleret plus ſpatii quàm cœlum univerſum (juxta computationem ſuperiorem) cis Fixas occupat. Et quamvis ob longè craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque vim centripetam circumſolarem; fieri poſſit, ut Aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat: perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde ſufficere, ex hâc computatione perſpicuum eſt; nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris, luce Solis ſplendens, craſſitudine paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum

AERIS

Altitudo.	Compreſſio.	Exporrectio.
0	33	1
5	17,8515	1,8486
10	9,6717	3,4151
20	2,852	11,571
40	0,2525	136,83
400	0,XVII 1224	26956 XV
4000	0,CV 4465	73907 CII
40000	0,CXCII 1628	20263 CLXXXIX
400000	0,CCX 7895	41798 CCVII
4000000	0,CCXII 9878	33414 CCIX
Infinita.	0,CCXII 6041	54622 CCIX

craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur.

Quo pacto Caudæ oriri poſſint ex atmoſphæris capitum.

69. Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum, & progreſſum in partes à Sole averſas, *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere non eſt à ratione prorſus alienum, non obſtante quòd ſubſtantiæ craſſæ, impeditiſſimis in regionibus noſtris, à radiis ſenſibiliter propelli nequeant. Auctor alius particulas tam leves quàm graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, adeoque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum oriri. Aſcendit fumus in camino, impulſu aëris cui innatat. Aer ille, per calorem rarefactus, aſcendit ob diminutam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media, quæ permeant, niſi in reflexione & refactione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa, calore ſibi communicato, rarefiet; &, ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam quâ prius tendebat in Solem, aſcendet inſtar fluminis (n), & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: impetu etiam lucis ſolaris, ut jam dictum eſt, aſcenſum promovente.

Eaſdem ex his atmoſphæris oriri docetur ex ipſarum variis phænomenis.

70. Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averſas aſcendere, confirmatur præterea, ex legibus quas obſervant. Ut quòd in planis orbium Cometarum, per Solem tranſeuntibus, jacentes deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quòd ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor eſt, ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ; ut & ubi caput ad Solem propiùs accedit. Quòd caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurventur. Quòd curvatura major

(n) Fallor ni auctor ſcripſerit, *inſtar funi*.

eſt,

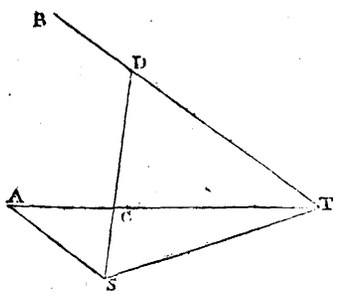
eſt, ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quòd deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque adeo quòd cauda, convexo ſui latere, partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quòd caudæ, quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulò ſplendidiores, & limite minus indiſtincto terminatæ quàm ad concava. Pendent igitur Phænomena cauda à motu capitis, non autem à regione cœli in quo caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel oblique ſi corpus moveatur in latus; ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole, uti jam dictum eſt; & ſuperiora vel rectâ petere, ſi corpus fumans quieſcit, vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit, à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit, ubi aſcenſus vaporis velocior eſt, nimirum in viciniâ Solis & juxta corpus fumans. Namque ibi potentior eſt vis illa Solaris, quâ vapor aſcendit. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna, & quia vapor in columnæ latere præcedente paulò recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſiùs reflectet, & limite minùs indiſtincto terminabitur; vapore ad latus alterum paulatim langueſcente, & ex oculis ſenſim evaneſcente.

Cometas infra orbem Mercurii quandoque deſcendere probatur ex caudis.

71. Cæterùm rerum naturalium cauſas reddere non eſt hujus inſtituti: vera an falſa fuerint hæc quæ modò dicta ſunt, id ſatem in ſuperioribus confecimus; Radios à caudis Cometarum ſecundum lineas rectas per cœlos propagari, adeoque à partibus cœlorum venire, in quibus caudæ ſpectatoribus ubicumque conſtitutis apparent, quæque adeo à capitibus Cometarum in regiones à Sole averſas, porriguntur. Et hoc fundamento limitem denuò Cometarum diſtantiis in hunc modum ponimus.

Repreſentet S Solem; T, Terram; STA, diſtantiam Cometæ à Sole; & ATB, apparentem longitudinem caudæ. Et quoniam lux propaga-

tur



tur à termino caudæ ſecundum lineam rectam TB, reperietur terminus ille alicubi in lineâ TB. Sit ipſe punctum D, jungeque DS, ſecantem lineam TA in C. Et quia cauda ſemper opponitur Soli quamproximè; & propterea Sol, caput Cometæ, & terminus caudæ jacent in directum: reperietur caput Cometæ in C. Ipſi TB parallelam age SA, occurrentem lineæ TA in A, & Cometæ caput C neceſſariò reperietur inter T & A; eò quòd terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ TB, & lineæ omnes SD, quæ ab S ad lineam TB duci poſſunt, ſecant lineam TA alicubi inter T & A. Quare Cometa non poteſt longiùs abeſſe à Terrâ, quàm intervallo TA; nec à Sole, quàm intervallo SA ultra Solem, vel ST citra. Exempli gratiâ, *Decemb.* 12, 1680, Cometa diſtabat $9^{gr.}$ à Sole, & longitudo caudæ erat $35^{gr.}$ ad minimum. Conſtituatur ergo triangulum TSA; cujus angulus T æquetur diſtantiæ graduum 9; & angulus A, angulo ATB ſeu longitudini caudæ graduum 35; & erit SA ad ST, id eſt limes maximæ poſſibilis diſtantiæ Cometæ à Sole, ad ſemidiametrum orbis magni, ut ſinus anguli T ad ſinum anguli A, hoc eſt ut 3 ad 11 circiter. Quare Cometa eo tempore minus diſtabat à Sole quàm $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ Terræ à Sole; & propterea verſabatur aut intra orbem Mercurii, aut inter orbem illum & Terram. Rurſus *Decemb.* 21. diſtantia Cometæ à Sole erat $32\frac{2}{5}^{gr.}$ & longitudo caudæ $70^{gr.}$ Ergo ut ſinus $32\frac{2}{5}^{gr.}$ ad ſinum $70^{gr.}$ hoc eſt ut 4 ad 7, ita erat limes intervalli inter Cometam & Solem ad diſtantiam Terræ à Sole; & propterea Cometa nondum exceſſerat orbe Veneris. *Decemb.* 28. diſtantia Cometæ à Sole erat $55^{gr.}$ & longitudo caudæ $56^{gr.}$ Ergo limes intervalli inter Cometam & Solem nondum æquabat diſtantiam Terræ à Sole: & propterea Cometa nondum exceſſerat orbe Telluris. Ex parallaxi autem colligitur, quòd exceſſus ille incidit in *Jan.* 5, circiter, quódque Cometa deſcendebat longè infra orbem Mercurii. Concedamus ipſum in perihelio fuiſſe *Decemb.* 8. quo tempore cum Sole conjungebatur; & in itinere à perihelio ad exitum de orbe Telluris,

conſumentur dies 28, adeoque diebus viginti ſex vel ſeptem ſequentibus, quibus oculo inermi videri deſiit, vix duplicabat diſtantiam ſuam à Sole. Iiſdem argumentis limitando diſtantias aliorum Cometarum, pervenitur tandem ad hanc concluſionem: quòd Cometæ omnes, quamdiu ſe nobis oſtendunt, verſantur intra ſpatium ſphæricum centro Sole & intervallo Solis ac Terræ vel duplicato, vel ad ſummum triplicato, deſcriptum.

Cometas moveri in Sectionibus Conicis umbilicum habentibus in centro Solis: & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribere temporibus proportionales.

72. Verſantur igitur Cometæ, toto apparitionis tempore, intra ſphæram activitatis vis circumſolaris, adeoque agitantur ipſius impulſu & propterea (per Corol. 1. Prop. XIII. *Libri* 1. *Princip.*) deſcribunt Conicas Sectiones umbilicos habentes in centro Solis, & radiis ad Solem ductis conficiunt areas proportionales temporibus. Nam vis illa, in immenſum propagata, reget motus corporum longè ultra orbem Saturni.

Sectiones illas Conicas eſſe Parabolis finitimas. Id ex velocitate Cometarum colligitur.

73. Cæterùm de Cometis Hypotheſis eſt triplex: eos vel generari & interire, quoties apparent & evaneſcunt; vel dé Fixarum regionibus venientes præterire ſyſtema noſtrorum Planetarum; vel denique circa Solem in orbibus valde excentricis perpetuò revolvi. Caſu primo Cometæ, pro variâ ſuâ velocitate, movebuntur in Sectionibus quibuſcunque Conicis; ſecundo, movebuntur in Hyperbolis; utroque indifferenter frequentabunt regiones omnes tam Polorum quàm Eclipticæ; tertio, motus peragentur in Ellipſibus valde excentricis, & ad ſpeciem Parabolarum quamproximè accedentibus; orbes autem, ſi lex Planetarum ſervetur, haud multum divaricabunt à plano Eclipticæ. Et quantum hactenus animadvertere potui, caſus tertius obtinet. Nam Cometæ maximè frequentant Zodiacum, & vix unquam pertingunt ad latitudinem heliocentricam graduum quadraginta. Moventur etiam in orbibus quamproximè Parabolicis, uti colligo ex eorum velocitate. Nam velocitas quâ Parabola deſcribetur, eſt ubivis ad velocitatem, quâ Cometa vel Planeta in circulo ad eandem à Sole diſtantiam revolvi poſſet, in dimidiatâ ratione numeri binarii ad unitatem (per Corol. 7. Prop. XVI.) Et meo quidem calculo talis circiter reperta eſt Cometarum velocitas. Rem examinavi, colligendo præterpropter velocitates ex diſtantiis, ac diſtantias ex parallaxi & phænomenis caudæ conjunctim. Errores in velocitates exceſſu, vel defectu, haud majores obvenere, quàm qui ex erroribus

bus in distantiis, eâ ratione collectis, oriri potuerint. Sed & usus sum hujusmodi ratiocinio.

Quanto tempore Cometæ in Trajectoriis Parabolicis percurrant orbem magnum.

74. Diviso orbis magni radio in partes mille, designent numeri in Tabulæ sequentis columnâ primâ distantiam verticis Parabolæ à centro Solis in his partibus; & Cometa, temporibus in columnâ secundâ expressis, movebitur à Perihelio ad superficiem sphæræ, quæ centro Sole & radio orbis magni describitur; & temporibus in Corol. 3, 4 & 5. expressis duplicabit, triplicabit & quadruplicabit eandem suam à Sole distantiam.

T A B. I.

Distantia inter centrum Solis & perihelium Cometæ.	Tempus transitûs Cometæ à Perihelio ad distantiam à Sole radio Orbis magni											
	Æqualem.			Duplicato æqualem.			Triplicato æqualem.			Quadruplicato æqualem.		
	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.
0	27.	11.	12	77.	16.	28	142.	17.	14	219.	17.	30
5	27.	16.	7	77.	23.	14						
10	27.	21.	0	78.	6.	24						
20	28.	6.	40	78.	20.	13	144.	03.	19	221.	8.	54
40	29.	1.	32	79.	23.	34						
80	30.	13.	25	82.	4.	56						
160	33.	5.	29	86.	10.	26	153.	16.	8	232.	12.	20
320	37.	13.	46	93.	23.	38						
640	37.	9.	49	105.	1.	28						
1280	.	.	.	106.	06.	35	200.	6.	43	297.	3.	46
2560	.	.	.	.	.	.	147.	22.	31	300.	6.	03

Quo tempore Cometæ ingrediuntur orbem magnum, & egrediuntur eodem.

Quo tempore Cometa ingreditur sphæram orbis magni, vel de eâdem egreditur, innotescit præterpropter ex parallaxi; expeditiùs autem per hanc Tabulam.

T A B.

T A B. II.

Distantia apparens Cometæ à Sole.	Cometæ motus apparens diurnus in orbe suo.		Distantia Cometæ à Terrâ in partibus quarum 1000 sunt radius orbis magni.
	Directus.	Retrogradus.	
gr.	gr. min.	gr. min.	
60	2. 18	0. 20	1000
65	2. 33	0. 35	845
70	2. 55	0. 57	684
72	3. 7	1. 9	618
74	3. 23	1. 25	551
76	3. 43	1. 45	484
78	4. 10	2. 12	416
80	4. 47	2. 49	347
82	5. 45	3. 47	278
84	7. 18	5. 20	209
86	10. 27	8. 19	140
88	18. 37	16. 39	70
90	Infin.	Infin.	00

Quâ velocitate Cometæ anni 1680 orbem magnum trajecerint.

75. Incidit ingressus vel egressus in tempus distantiæ Cometæ à Sole in Columnâ primâ è regione motûs diurni expressæ. Sic anno 1681 *Jan.* 4. *st. v.* motus diurnus apparens Cometæ in orbe ipsius erat quasi 3^{gr}. 5′. Huic respondens distantia est $71\frac{2}{3}^{gr}$. Et affecutus est Cometa hanc à Sole distantiam *Jan.* 4. circa horam sextam pomeridianum. Rursus anno 1680, *Novembris* 11, Cometæ qui tunc apparuit motus diurnus erat quasi $4\frac{2}{3}^{gr}$. & huic respondens distantia $79\frac{2}{3}^{gr}$. incidit in *Novemb.* 10, paulo antè mediam noctem. Hisce quidem temporibus Cometæ affecuti sunt distantiam quam habuit Terrâ à Sole, & Terrâ jam ferè in Perihelio versabatur. Computata est autem Tabula prior pro mediocri distantiâ Terræ à Sole assumpta partium 1000, & major est hæc distantia intervallo, quod Terra quasi spatio diei unius motu suo annuo, vel Cometa spatio horarum 16 motu suo percurrere potest. Ut Cometa reducatur ad mediocrem hanc distantiam partium 1000, addantur tempori priori & auferantur posteriori horæ sexdecim, & tempus prius evadet *Jan.* 4, horâ vespertinâ 10; posterius *Novemb.* 10, horâ matutinâ 6 circiter. Ex motuum diurnorum tenore & progressu colligitur quòd conjungebatur Cometa uterque cum Sole inter *Dec.* 7, & *Dec.* 9. Inde

ad *Jan.* 4, hor. 10 vesp. ex unâ parte, & *Nov.* 10, hor. 6 mat. ex alterâ, sunt dies quasi 28. Atque tot dies (per Tab. I.) in trajectoriis Parabolicis consumi debebant.

Cometas hosce non fuisse duos sed unum & eundem Cometam. Quo orbe & qua velocitate hic cœlos trajecit docetur exactius.

76. Cæterum ex coincidentiâ Periheliorum & velocitatum consensu verisimile fit, Cometas hosce, quos ut duos jam consideravi, non duos fuisse sed unum & eundem Cometam. Eâ lege orbita hujus Cometæ vel Parabola erit, vel Conisectio à Parabolâ parum discrepans, & superficiem Solis propemodum tanget in vertice. Namque ex Tabulâ II. distantia Cometæ à Terrâ erat *Novemb.* 10, partium 360 circiter, & *Jan.* 4, partium 360 circiter. Inde & ex longitudinibus & latitudinibus Cometæ colligitur distantiam locorum à se invicem in quibus Cometa tunc versabatur, fuisse partium quasi 280. Hujus dimidium 140 est ordinatim applicatam ad orbitam Cometæ, abscindens partem axis ejus radio orbis magni, seu partibus 1000, æqualem circiter. Et inde dividendo quadratum ordinatæ 140 per axis partem abscissam 1000, invenietur latus rectum 19,6, seu numero rotundo 20: cujus pars quarta 5 est distantia inter verticem orbitæ & centrum Solis. Distantiæ partium 5 in Tabulâ primâ congruunt dies 27, horæ 16, min. 7. Tanto igitur tempore Cometa conficiet iter in orbe Parabolico inter Perihelium suum & superficiem sphæricam orbis magni radio partium 1000 descripti, atque adeo tempus illud duplicatum seu dies 55 & horas $1\frac{1}{4}$ consumet motu suo toto intra orbem magnum. Atque ita se res habet. Namque à *Novemb.* 10, hor. 6 mat. quando Cometa hunc orbem ingressus est ad *Jan.* 4, hor. 10 vesp. quando is eodem egressus est sunt dies 55 & horæ 16. Differentia horarum $7\frac{3}{4}$ in rudi hocce computo contemnenda est, & fortè ex motu paulo tardius in orbitâ Ellipticâ confecto oriri potest. Inter ingressum & egressum tempus medium incidit in *Decemb.* 8. *hor.* 2 *mat.* Igitur hoc tempore debuit Cometa reperiri in Perihelio. Et ecce *Hallejus* hoc ipso die proximè ante ortum Solis caudam perbrevem latam & fulgentissimam, uti diximus, ex horizonte perpendiculariter surgentem vidit. Ex situ caudæ colligitur Cometam jam prætergressum fuisse Eclipticam, & latitudinem borealem habuisse; adeoque Perihelium, quod ex alterâ parte Ecliptice jacebat, jam tum præteriisse, nondum tamen perveniisse ad meridianum Solis. Inter Perihelium itaque & conjunctionem

junctionem Solis Cometa jam consistens versabatur ante horas paucas in Perihelio. Namque in tantâ Solis viciniâ moveri debuit celerrimè & singulis horis gradus fere dimidios apparenter percurrere.

Quâ velocitate Cometæ moventur, docetur pluribus exemplis.

77. Similibus computis colligo quòd Cometa anni 1618 ingressus erat sphæricum limitem orbis magni *Decemb.* 7, ad Solis occasum. Incidit autem ipsius conjunctio cum Sole in *Novemb.* 9 vel 10 circiter; dies intercedunt quasi 28, ut in Cometa superiore: nam & ex caudæ magnitudine, quâ par fuit Cometæ superiori, verisimile est ipsum pariter propemodum rasisse Solare corpus. Fulserunt hoc anno Cometæ quatuor, quorum hic fuit ultimus: secundum, qui primo conspectus est in viciniâ Solis orientis *Octob.* 31, & mox sub radiis Solaribus evanuit, suspicor eundem fuisse cum quarto, qui de radiis Solaribus emersit circa *Novemb.* 9. His adde quòd Cometa anni 1607 sphæram orbis magni ingressus fuit, *Sept.* 14. *st. vet.* & accessit ad minimam suam à Sole distantiam circa *Octob.* 19; dies intercedunt 35. Distantia illa Perihelii à Sole subtendebat angulum apparentem quasi 23^{gr}. ad Terram, adeoque erat partium 390: tot autem partibus in Tab. I. respondent dies 34 circiter. Porrò Cometa anni 1665 in sphæram orbis annui intrabat circa *Mart.* 17, & ad Perihelium accedebat circa *Apr.* 16; intercedentibus diebus 30. Distantia inter Perihelium & Solem subtendebat angulum quasi 7^{gr}. ad Terram, adeoque erat partium quasi 122: & his partibus in Tab. I. respondent dies 30. Rursus Cometa anni 1682 intrabat in sphæram orbis magni circa *Aug.* 11, & in Perihelio versabatur circa *Sept.* 16, à Sole tunc distans intervallo partium quasi 350, quibus in Tab. I. congruunt dies $33\frac{1}{2}$. Quinetiam celebris ille Regiomontani Cometa, qui anno 1472, per regionem poli borealis trajiciendo, confecit uno die iter graduum quadraginta, limitem orbis magni ingrediebatur *Jan.* 21, quo tempore polum præteribat: & inde properans ad Solem occultabatur sub radiis Solaribus in ultimis diebus *Februarii.* Unde verisimile est quòd dies triginta, aut paulò plures, consumpti sint inter ingressum illum & Perihelium Cometæ, quodque adeo Cometa iste reverâ non celerior fuerit aliis Cometis, neque aliunde quàm ex transitu suo per viciniam Terræ tantam assecutus sit celeritatem apparentem.

Proponitur inventio Trajectoriæ Cometarum.

78. Eſt igitur Cometarum velocitas, quatenus ea per hujuſmodi computationes nimium rudes definiri queat, ea ipſa quâcum Parabolæ, vel his affines Ellipſes, deſcribi debeant: & propterea, ex datâ inter Cometam & Solem diſtantiâ, datur quamproximè. Et hinc oritur Problema tale.

P R O B.

Datur relatio inter velocitatem Cometæ & diſtantiam ipſius à centro Solis; requiritur Trajectoria.

Soluto autem hoc Problemate, habebitur tandem methodus determinandi Trajectorias Cometarum quam exactiſſimè. Nam ſi relatio illa bis aſſumatur, & inde trajectoria bis computetur, deinde ex obſervationibus inveniatur error Trajectoriæ utriuſque; poteſt aſſumptio per regulam falſæ poſitionis corrigi, & ſic tertia inveniri trajectoria quæ cum obſervationibus plane congruet. Et hac methodo determinando Cometarum trajectorias ſciri tandem poteſt exactius quaſnam regiones hæc corpora percurrunt, quantæ ſint eorum velocitates, cujus generis trajectorias deſcribunt, & quænam ſint caudarum veræ magnitudines & formæ pro variis capitum diſtantiis à Sole. Quin etiam ſperandum eſt quod hac methodo ſciri tandem poſſit, utrum Cometæ ſtatis temporibus in orbem redeant, & quibus temporum periodis revolutiones ſingulorum compleantur. Solvitur autem Problema colligendo primum ex tribus vel pluribus obſervationibus motum horarium Cometæ ad tempus datum, deinde ex hoc motu Trajectoriam derivando. Sic pendet inventio Trajectoriæ ab unicâ obſervatione motuque horario tempore illius obſervationis, atque adeo ſeipſam vel probabit vel redarguet: nam concluſo, quæ ex motu horæ unius & alterius & hypotheſi falſâ deducitur, nunquam congruet cum motibus Cometarum à principio ad finem. Methodus computationis totius ita ſe habet.

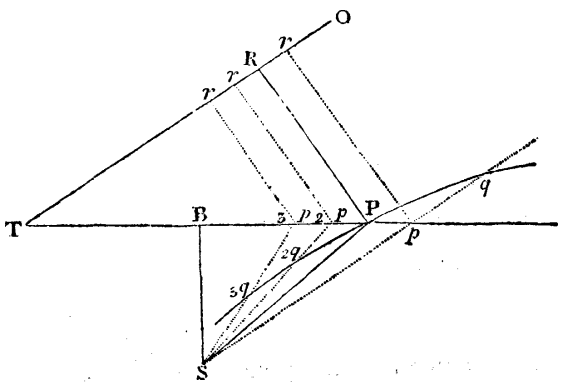
LEMMA

LEMMA I.

In Problematis ſolutionem præmittuntur Lemmata.

Datas poſitione duas rectas OR, TP, *tertiâ* RP *ad rectum angulum* TRP *ſecare, eâ lege ut ſi ad datum aliquod punctum* S *ducatur recta* SP, *datum ſit contentum Solidum ſub ductâ illâ* SP *& quadrato rectæ* OR *terminatæ ad datum punctum* O.

Conſit graphicè ſic. Sit contentum illud datum $M^2 \times N$. Ad rectæ OR punctum quodvis *r* erige perpendiculum *rp* occurrens ipſi TP in *p*. Et per puncta S, *p*, age S*q* æqualem $\frac{M^2 \times N}{OR^2}$. Simili Methodo age tres vel plures rectas S2*q*, S3*q*, &c. & per puncta

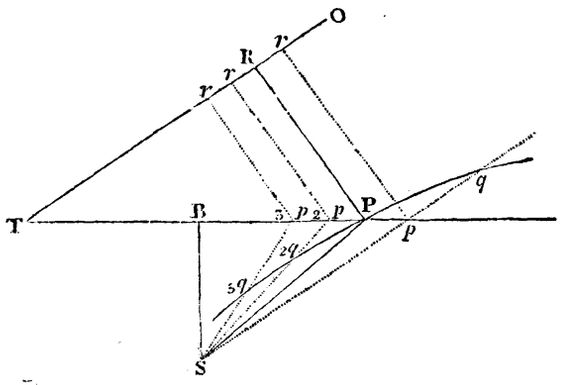


omnia *q*, 2*q*, 3*q* acta linea regularis *q*, 2*q*, 3*q* ſecabit rectam TP in puncto P, à quo demittendum eſt perpendiculum PR. Q. E. F.

Trignometricè ſic. Aſſumatur linea noviſſimè inventa TP, & inde in triangulis TPR, TPS dabuntur perpendicula TR, SB, & in triangulo SBP latus SP & error $\frac{M^2 \times N}{OR^2} - SP$. Fac ut error iſte puta D ſit ad errorem novum puta E, ut error $2p2q \pm 3p3q$ ad errorem $2p3p$, vel error $2p2q \pm D$ ad errorem $2pP$; & error ille novus additus vel ſubductus longitudini TP dabit longitudinem correctam $TP \pm E$. Electio additionis vel ſubductionis inſpectione Schematis dirigitur. Siquando opus fuerit ulteriore correctione, operationem repete.

Arithmeticè ſic. Puta factum, ſitque lineæ TP graphicè inventæ correcta longitudo $TP + e$: & correctæ longitudines linea-

rum OR, BP & SP erunt $OR - \frac{TR}{TP}e$, $BP + e$ & $\sqrt{SP^2 + 2BPe + ee} =$ $\frac{M^2 \times N}{OR^2 + \frac{2OR \times TR}{TP}e + \frac{TR^2}{TP^2}ee}$. Unde per methodum ſerierum conver-

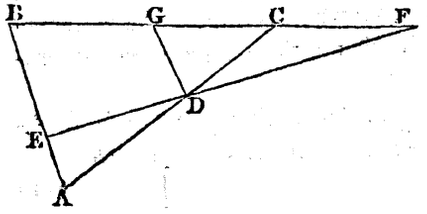


gentium fit, $SP + \frac{BP}{SP}e + \frac{SB^2}{2SP^2}ee$ &c. $= \frac{M^2N}{OR^2} + \frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2N}{OR^3}e + \frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2N}{OR^4}ee$ &c. Pro datis $\frac{M^2N}{OR^2} - SP$, $\frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2N}{OR^3} - \frac{BP}{SP}$, $\frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2N}{OR^4} - \frac{SB^2}{2SP^3}$, ſcribe F, $\frac{F}{G}$; $\frac{F}{GH}$, & ſignis probe ob ſervatis fiet $F + \frac{F}{G}e + \frac{F}{GH}ee = o$, & $e + \frac{ee}{H} = -G$. Hinc, neglecto termino perexiguo $\frac{ee}{H}$, prodit $e = -G$. Si error $\frac{ee}{H}$ non eſt contemnendus, pone $-G - \frac{GG}{H} = e$.

Et notâ quòd his inſinuatur Methodus generalis ſolvendi difficiliora Problemata tam Trigonometricè quam Arithmeticè abſque perplexis illis computis & reſolutionibus affectarum æquationum quæ hactenus in uſu fuerunt.

LEMMA II.

Datas poſitione tres rectas quartâ ſecare, cujus partes interceptæ datam habeant proportionem ad invicem, quæque tranſeat per punctum quod in unâ earum datur.



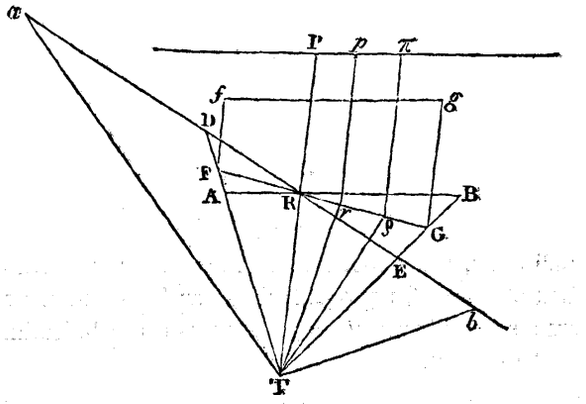
Dentur poſitione AB, AC, BC, & in AC detur punctum D. Ipſi AB agatur parallela DG occurrens BC in G; capiatur GF ad BG in datâ illâ ratione, & agatur FDE: erit FD ad DE ut FG ad BG. Q. E. F.

Trigonometricè ſic. In triangulo CGD dantur anguli & latus CD, & inde latera reliqua, & ex datis rationibus dantur lineæ GF & BE.

LEMMA III.

Ad datum tempus invenire & graphicè exponere motum horarium Cometæ.

Ex obſervationibus probæ fidei dentur tres Longitudines Cometæ. Sunto harum differentiæ ATR, RTB, & requiratur motus horarius ad tempus obſervationis longitudinis intermediæ TR. Ducatur (per Lemma II.) recta ARB, cujus partes interceptæ AR, RB



ſint ut tempora inter obſervationes. Et ſi corpus tempore toto totam percurrat lineam AB uniformiter, & interea ſpectetur de loco T, is erit motus ejus apparens circa punctum R qui fuit Cometæ tempore obſervationis TR quamproximè.

Idem accuratius.

Dentur longitudines hinc inde magis diſtantes T*a*, T*b*, & (per Lemma II.) ducatur *a*R*b*, cujus partes *a*R, R*b* ſint ut tempora inter obſervationes *a*TR, RT*b*. Secet hæc lineas TA, TB, in D & E; quoniam error inclinationis TR*a* creſcit quaſi in duplicatâ ratione temporis

temporis inter obſervationes, age FRG, eâ lege ut vel angulus DRF ad angulum ARF, vel linea DF ad lineam AF ſit in duplicatâ ratione temporis totius inter obſervationes *aTb* ad tempus totum inter obſervationes ATB, atque loco lineæ AB ſuperius inventæ uſurpetur linea jam inventa FG.

Convenit angulos ATR, RTB, *a*TA, BT*b* haud minores adhiberi quam decem vel quindecim graduum, ac tempora ipſis reſpondentia haud majora quam dierum octo vel duodecim, atque longitudines capi ubi Cometa celerrimè movetur. Hoc enim pacto errores obſervationum minorem habebunt rationem ad differentias longitudinum.

LEMMA IV.

Ad data tempora invenire longitudines Cometæ.

Fit capiendo in linea FG diſtantias R*r*, Rϱ temporibus proportionales, & ducendo lineas T*r*, Tϱ. Operatio trigonometrica palam eſt.

LEMMA V.

Invenire latitudines.

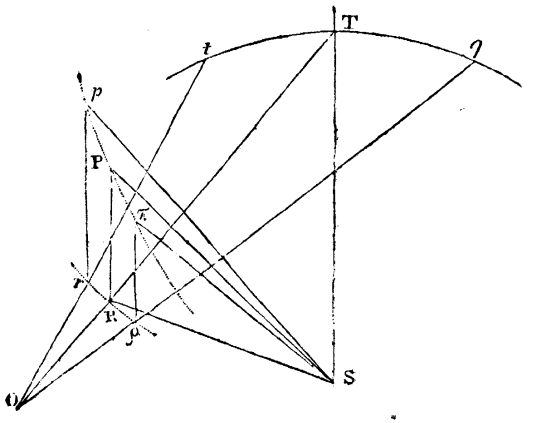
Ad radios TF, TR, TG erigantur normaliter tangentes obſervatarum latitudinum F*f*, RP, G*g*. Ipſi *fg* parallela ducatur PH. Huic occurrentia perpendicula *rp*, $\varrho\pi$, tangentes erunt latitudinum quæſitarum ad radios T*r*, Tϱ.

PROB. I.

Ex aſſumpta ratione velocitatis determinare Trajectoriam Cometæ.

Solvitur Problema.

Deſignet S Solem; *t*, T, γ loca tria æquidiſtantia Telluris in ipſius Orbitâ; *p*, P, π loca totidem reſpondentia Cometæ in ipſius Trajectoria, interpoſitis inter ſingula intervallis horæ unius; *pr*, PR, $\pi\varrho$, perpendicula demiſſa ad planum Eclipticæ, & *r*Rϱ veſtigium Trajectoriæ in hoc plano. Jungantur S*p*, SP, Sπ, SR, ST, *tr*, TR, Tϱ, TP, & coeant *tr*, Tϱ in O: converget TR ad idem O quamproximè, error ſaltem contemnendus erit. Per Lemmata præcedentia dantur anguli *r*OR, RORϱ & proportiones *pr* & *tr*, PR ad TR, $\pi\varrho$ ad Tϱ. Datur etiam figura *t*Tγ magnitudine & poſitione, una cum diſtantiâ TS & angulis STR, PTR, STP. Aſſumamus velocitatem Cometæ, in loco P, eſſe ad velocitatem Planetæ gyrantis in circulo ad eandem à Sole diſtantiam SP, ut *v* ad I; & determinanda erit linea *p*Pπ hâc lege; ut ſit ſpatium à Cometâ duabus horis deſcriptum *p*π, ad ſpatium $v \times t\gamma$, hoc eſt ad ſpatium quod Tellus eodem tempore deſcribit multiplicatum per numerum *v*, in dimidiatâ ratione diſtantiæ Telluris à Sole ST ad diſtantiam Cometæ à Sole SP; utque ſit ſpatium *p*P, horâ primâ à Cometâ deſcriptum, ad ſpatium Pπ horâ ſecundâ à Cometâ deſcriptum, ut velocitas in *p* ad velocitatem in P; hoc eſt in dimidiatâ ratione diſtantiæ SP ad diſtantiam S*p*, ſive in ratione 2SP ad SP+S*p*. Minutias enim toto hoc opere negligo, quæ errorem ſenſibilem creare nequeunt.



Imprimis igitur, ut in reſolutione æquationum affectarum Mathematici primâ vice radicem conjecturâ colligunt, ſic in hoc opere analytico, conjecturam faciendo, aſſequor, ut poſſim, diſtantiam quæſitam TR, & (per Lemma II.) duco rϱ, primùm ita ut *r*R & Rϱ æquentur; deinde (ubi proportio SP ad S*p* hinc innotuerit) ita ut ſit *r*R ad Rϱ, uti 2SP ad S*p*+SP: & invenio rationes linearum *p*π, rϱ, & OR ad invicem. Ponatur eſſe M ad $v \times t\gamma$ ut OR ad *p*π; &, ob proportionalia $p\pi^2 : \overline{v \times t\gamma}|^2 :: ST : SP$, erit ex æquo $OR^2 : M^2 :: ST : SP$; adeoque contentum ſolidum $OR^2 \times SP$ æquale dato $M^2 \times ST$.

Unde, ſi triangula STP, PTR, jam locentur in eodem plano, dabuntur TR, TP, SP, PR (per Lemma I.) Hæc omnia perago primum graphicè, opere celeri & rudi; dein graphicè majori cum diligentiâ; ultimò per computationem numeralem. Tum denuò ſitum linearum $r\varrho$, $p\pi$, determino accuratiſſimè una cum nodis & inclinatione plani $sp\pi$ ad planum Eclipticum; inque plano illo $sp\pi$ (per Prop. XVI. Libri I. Princip. Math.) deſcribo Trajectoriam, in quâ corpus movebitur emiſſum de dato loco P, ſecundum datam rectam $p\pi$, eâ cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem Telluris ut $p\pi$ ad $v \times t$]. Q. E. F.

PROB. II.

Aſſumptam velocitatis rationem & inventam Trajectoriam corrigere.

Adhibeatur obſervatio Cometæ ſub finem motûs, aliave aliqua quàm longiſſimè diſtans ab obſervationibus priùs adhibitis; & radii, qui in illâ obſervatione ad Cometam ducitur, planique $sp\pi$ quæratur interſectio, ut & locus Cometæ in trajectoriâ ad tempus illius obſervationis. Si interſectio iſta incidit in hunc locum, argumento eſt Trajectoriam rectè inventam eſſe. Sin minus, ſumendus erit novus numerus v, & trajectoria nova invenienda; dein locus Cometæ in hâc Trajectoriâ, tempore obſervationis illius probatoriæ, & interſectio radii cum plano Trajectoriæ determinandi ut priùs. Et ex variatione erroris, collatâ cum variatione aliarum quantitatum, colligetur, per regulam auream, quantæ debeant eſſe variationes ſeu correctiones illarum aliarum quantitatum, ut error evadat quàm minimus. Quibus adhibitis correctionibus, habebitur Trajectoria exactè ſatis; poſito quòd computatio innixa fuit obſervationibus exactis, quódque non multum erratum fuit in aſſumptione quantitatis v. Nam ſi multum erratum fuit, iterandum eſt opus eouſque dum Trajectoria inveniatur exactè ſatis. Q. E. F.

THEORIA LUNÆ.

OBSERVATORIUM *Grenovicenſe* occidentalius eſt *Pariſienſi* $2^{gr}.\ 19'$; *Uraniburgo* $12^{gr}.\ 51'.\ 30''$; & *Gedano* $18^{gr}.\ 48'$. Epochæ motûs medii Solis et Lunæ.

2. Solis & Lunæ motus medios ab æquinoctio verno, in meridiano *Grenovicenſi*, pono ſequentes: nempe *anno* 1680, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis eſt $9^{fig}.\ 20^{gr}.\ 34'.\ 46''$. Apogæi Solis $3^{fig}.\ 7^{gr}.\ 23'.\ 30''$. Motus medius Lunæ $6^{fig}.\ 1^{gr}.\ 35'.\ 45''$. Apogæi Lunæ $8^{fig}.\ 4^{gr}.\ 28'.\ 5''$. Nodi aſcendentis Orbitæ Lunaris $5^{fig}.\ 24^{gr}.\ 14'.\ 35''$. Et *anno* 1700, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis eſt $9^{fig}.\ 20^{gr}.\ 43'.\ 50''$. Apogæi Solis $3^{fig}.\ 7^{gr}.\ 44'.\ 30''$. Motus medius Lunæ $10^{fig}.\ 15^{gr}.\ 19'.\ 50''$. Apogæi Lunæ $11^{fig}.\ 8^{gr}.\ 18'.\ 20''$. & Nodi aſcendentis $4^{fig}.\ 27^{gr}.\ 24'.\ 20''$. Viginti enim annis *Julianis*, ſive diebus 7305, Solis motus eſt $20^{rev}.\ 0^{fig}.\ 0^{gr}.\ 9'.\ 4''$. Motus Apogæi Solis $21'.\ 00''$. Lunæ Motus eſt $247^{rev}.\ 4^{fig}.\ 13^{gr}.\ 34'.\ 5''$. Apogæi Lunaris Motus $2^{rev}.\ 3^{fig}.\ 3^{gr}.\ 50'.\ 15''$. Nodi Motus $1^{rev}.\ 0^{fig}.\ 26^{gr}.\ 50'.\ 15''$. Omnes prædicti Motus ſunt à puncto æquinoctii verni. Quòd ſi ab illis ſubducatur ipſius æquinoctialis puncti motus, in antecedentia interea factus, ſc. $16'.\ 40''$; manebunt motus reſpectu Fixarum in annis 20 *Julianis:* nempe Motus Solis $19^{rev}.\ 11^{fig}.\ 29^{gr}.\ 52'.\ 24''$. Apogæi Solis $4'.\ 20''$. Lunæ $247^{rev}.\ 4^{fig}.\ 13^{gr}.\ 17'.\ 25''$. Apogæi Lunæ $2^{rev}.\ 3^{fig}.\ 3^{gr}.\ 33'.\ 35''$. Nodi Lunæ $1^{rev}.\ 0^{fig}.\ 27^{gr}.\ 6'.\ 55''$.

3. Secundum hunc computum Annus Tropicus eſt $365^{dier}.\ 5^{hor}.\ 48'.\ 57''$. Annuſque Sidereus $365^{dier}.\ 6^{hor}.\ 9'.\ 14\frac{1}{2}''$. Annus.

4. Motus Medii Luminarium ſuprapoſiti variis afficiuntur inæqualitatibus.

Et

Et primò ſunt annuæ æquationes dictorum motuum mediorum Solis & Lunæ, & Apogæi Nodique lunæ.

Æquationes Annuæ.

5. Æquatio annua Motûs medii Solis pendet ab excentricitate Orbitæ Telluris circa Solem, quæ eſt partium $16\frac{11}{12}$, qualium mediocris diſtantia Solis à Terra eſt 1000; indeque vocatur Æquatio Centri: eſtque, cùm maxima, $1^{gr}. 56'. 20''$.

Maxima æquatio annua motûs medii Lunæ eſt $11'. 49''$; Apogæi ejus, $20'$; Nodique $9'. 30''$.

Atque quatuor iſte æquationes annuæ ſunt ſemper ſibi mutuò proportionales. Ideoque cùm earum aliqua eſt maxima, tres reliquæ ſunt etiam maximæ; diminutâ vero quâvis, minuuntur etiam & reliquæ in eâdem ratione: unde datâ æquatione annuâ centri Solis, dantur & tres reliquæ annuæ æquationes congruæ; illius igitur Tabula ſufficit. Nam ſi æquatio annua centri Solis, tempori cuivis congrua, inde deprompta vocetur P; & fiat $\frac{1}{10}P=Q$, $Q+\frac{1}{60}Q=R$, $\frac{1}{6}P=D$, $D+\frac{1}{30}D=E$, & $D-\frac{1}{60}D=2F$; erit æquatio annua eidem tempori congrua Lunæ quidem R; Apogæi Lunaris, E; & Nodi, F. Adnotandum, ſi æquatio centri Solis eſt addenda, æquationem Lunæ prædictam eſſe ſubducendam, Apogæi Lunaris æquationem addendam, Nodi verò æquationem ſubducendam; & è contra, ſi æquatio centri Solis eſt ſubducenda, addenda erit Lunæ æquatio, Apogæi verò ſubducenda, & Nodi addenda.

Æquatio Lunæ Prima.

6. Alia eſt æquatio motûs medii Lunæ, pendens à ſitu apogæi Lunaris reſpectu Solis; quæ maxima eſt, cùm apogæum Lunæ verſatur in octante cum Sole; & nulla, cùm illud ad ſyzygias vel quadraturas pervenerit. Æquatio hæc, quando maxima, ad $3'. 56''$. aſcendit, Sole in perigæo verſante; ſi verò Sol apogæum teneat, non ultra $3'. 34''$. In aliis diſtantiis Solis à Terrâ æquatio hæc maxima eſt reciproce ut cubus iſtius diſtantiæ. At cùm Lunæ apogæum eſt extra octantes, æquatio dicta evadit minor; eſtque ad maximam, poſitâ eâdem diſtantiâ Terræ & Solis, ut ſinus duplæ diſtantiæ lunaris apogæi à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium. Additur hæc motui Lunæ, dum lunæ Apogæum tranſit à Solis quadrato ad ſyzygiam; ſed inde ſubducitur, in tranſitu Apogæi à ſyzygiâ ad quadratum.

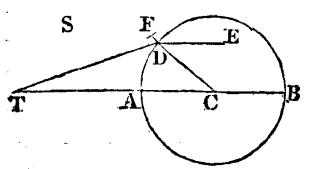
Æquatio Lunæ ſecunda.

7. Alia porro eſt motûs Lunæ æquatio, pendens ab aſpectu Nodorum

dorum orbitæ lunaris cum Sole: eſtque maxima, cùm nodi in Solis octantibus verſantur; evaneſcitque, cùm hi ad ſyzygias aut aſpectum quadratum appellunt. Æquatio hæc proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ, cúmque maxima ad $47''$ aſcendit. Additur hæc motui Lunæ, dum Nodi tranſeunt à Solis ſyzygiis ad ejuſdem quadraturas; & ſubducitur, in eorum tranſitu à quadraturis ad ſyzygias.

Argumentum Annuum, Eccentricitas, et Æquatio ſecunda Apogæi.

8. A Solis loco vero aufer motum medium apogæi Lunæ æquatum, ut ſuprà eſt oſtenſum; reſiduum erit argumentum annuum dicti apogæi. Exinde computentur lunæ Excentricitas & ſecunda æquatio ejus Apogæi, modo ſequenti. Referat T Terram; TS, rectam conjungentem Terram & Solem; TACB, rectam à Terrâ ductam ad locum medium Apogæi lunaris, ut ſuprà æquatum; angulus STA, argumentum annuum dicti apogæi; TA, lunaris orbitæ Excentricitatem minimam; TB, ejuſdem Excentricitatem maximam. Biſeca AB in C; centro C per A deſcribe circulum ADB; fiat angulus BCD æqualis duplo argumento annuo: juncta recta TD erit lunaris orbitæ Excentricitas, anguluſque BTD erit ſecunda Apogæi lunæ æquatio. Ad horum determinationem ſit mediocris diſtantia Lunæ à Terrâ, ſive orbitæ lunaris ſemidiameter, partium 1000000: ejus maxima excentricitas, TB, erit partium 66782, & minima TA earundem 43319; adeo ut maxima orbis ejus æquatio, cum ſc. apogæum eſt in ſyzygiis, ſit $7^{gr}. 39'. 30''$, vel forſan $7^{gr}. 40'. 00''$ (ſuſpicio enim eſt hanc mutari pro ſitu apogæi in ♋ vel ♑); cùm verò illud in Solis quadrato hæret, dicta maxima æquatio ſit $4^{gr}. 57'. 56''$; & ut maxima apogæi æquatio ſit $12^{gr}. 15'. 4''$.



Æquatio centri Lunæ.

9. Conſtructâ ex hiſce principiis Tabulâ æquationum Apogæi lunæ & Excentricitatum ejus orbitæ ad ſingulos gradus argumenti annui; unde excentricitas TD & angulus BTD (ſc. æquatio ſecunda & præcipua apogæi) dato tempori congruentes facilè poſſint depromi: ad locum apogæi Lunæ primò æquatum, ut ſuprà, addatur æquatio modò inventa, ſi argumentum annuum minus ſit 90^{gr}, aut majus 180^{gr}, minus verò quàm 270^{gr}; ſecus

verò

verò ab eo ſubducatur : ſumma vel differentia erit Apogæi lunaris locus ſecundò æquatus ; quo ſubducto ex Lunæ loco tertiò æquato, relinquitur lunæ Anomalia Media dato tempori congrua. Porro, ex hâc anomaliâ Lunæ mediâ & modò inventâ orbis excentricitate habebitur (ope Tabulæ æquationum centri Lunæ ad ſingulos anomaliæ mediæ gradus, & aliquot excentricitates *v. g.* 45000, 50000, 55000, 60000 & 65000 fabricatæ) proſthaphæreſis ſive æquatio centri Lunæ, ut vulgò ; quâ ſubductâ, in priori anomaliæ mediæ ſemicirculo, additâ verò in poſteriori, ad locum Lunæ hactenus ter æquatum, prodit Lunæ locus quartò æquatus.

Variatio. 10. Maxima Lunæ variatio, ſc. quæ contingit cùm Luna eſt in octantibus Solis, eſt ferè reciprocè ut cubus diſtantiæ Solis à Terrâ. Capiatur ea 37′. 25″ cùm Sol eſt in Perigæo, & 33′. 4″ cùm in Apogæo : fiantque Variationis hujus in octantibus differentiæ reciprocè ut differentiæ cuborum diſtantiarum Solis à Terrâ, & exinde conſtruatur Tabula prædictæ Variationis lunæ in octantibus Solis (ejuſve logarithmi) ad ſingulos denos vel ſenos vel quinos gradus Anomaliæ Mediæ : et pro Variatione extra octantes, fiat ut radius ad ſinum duplæ diſtantiæ Lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ita ſuprà inventa Variatio in octante ad Variationem dato aſpectui congruam ; quæ addita loco Lunæ ſuprà invento, in primo & tertio quadrante (computando à Sole) aut ab eodem ſubducta, in ſecundo & quarto, exhibet Lunæ locum quintò æquatum.

Æquatio Lunæ ſexta. 11. Rurſus, ut radius ad ſinum ſummæ diſtantiarum Lunæ à Sole & Apogæi lunæ ab Apogæo ſolis (vel ſinum exceſſûs iſtius ſummæ ſupra 360$^{gr.}$) ita 2′. 10″ ad ſextam loci Lunæ æquationem ; ſubducendam, ſi prædicta ſumma, vel dictus exceſſus, minor ſit ſemicirculo ; addendam, ſi major.

Æquatio Lunæ ſeptima. 12. Fiat etiam ut radius ad ſinum diſtantiæ Lunæ à Sole ita 2′. 20″ ad æquationem ſeptimam. Hanc aufer, quando Lunæ lumen augetur ; &, è contra, adde cùm illud minuitur ; & prodibit Lunæ locus ſeptimò æquatus, quique eſt locus ejus in propriâ orbitâ. Notandum æquationem, quæ hîc effertur per mediocrem quantitatem 2′. 20″, non eſſe ejuſdem ſemper magnitudinis, ſed augeri & minui pro ſitu lunaris Apogæi. Nam ſi apogæum lunare

nare conjunctum fuerit cum Solis apogæo, prædicta æquatio eſt circiter 54″ major ; ſin illi oppoſitum, tantundem minor : libratque inter maximam quantitatem 3′. 14″ minimamque 1′. 26″. Atque hæc obtinent, ubi Apogæum lunare eſt in Solis ſyzygiis ; ubi verò illud in Solis quadrato hæret, minuenda eſt æquatio prædicta 50 circiter ſcrupulis ſecundis ; aut integro ſcrupulo primo, quando apogæum lunæ & ſolis apogæum conjuncta ſunt ; ſi verò ſunt oppoſita, propter obſervationum penuriam affirmare nequeo augendane ſit illa, an minuenda. Immo de ſuprapoſitis incremento & decremento æquationis 2′. 20″, propter obſervationum ſatis accuratarum defectum, certo ſtatuere non auſim.

Emendatio æquationum ſextæ ſeptimæque. 13. Si æquationes ſexta & ſeptima augeantur vel minuantur in ratione reciprocâ diſtantiæ Lunæ à Terrâ, hoc eſt, in directâ ratione parallaxis horizontalis Lunæ ; accuratiores fient. Atque iſtud prompte fiet, ſi priùs Tabulæ fuerint conſtructæ ad ſingula ſcrupula dictæ parallaxis, ſinguloſque ſenos vel quinos gradus cum argumenti æquationis ſextæ pro æquatione ſextâ, tum diſtantiæ Lunæ à Sole pro ſeptimâ.

Æquatio Nodi ſecunda. 14. A loco Solis vero aufer medium motum Nodi aſcendentis Lunæ æquatum, ut ſuprà ; reſiduum erit Nodi argumentum annuum ; unde ejus æquatio ſecunda computabitur modo ſequenti. In figurâ præcedente referat ut priùs T Terram ; Ts, rectam jungentem Terram & Solem : referat porro TACB lineam ductam ad locum Nodi aſcendentis lunæ, ut ſuprà æquatum ; & STA, argumentum annuum nodi. Capiatur TA ad AB ut 56 ad 3, ſive $18\frac{2}{3}$ ad 1. Biſeca BA in C ; & centro C, intervallo CA, vel CB, deſcribe circulum ADB ; fiatque angulus BCD æqualis duplo argumento nodi annuo, ut ſuprà invento ; eritque BTD angulus æquatio ſecunda Nodi aſcendentis, addenda in tranſitu Nodi à Solis quadrato ad ſyzygiam, ſubducenda in ejuſdem tranſitu à ſyzygiâ ad quadraturam. Atque ſic habetur locus verus Nodi orbitæ lunaris : unde ex Tabulis, methodo vulgari conſtructis, ſupputabitur Lunæ latitudo & reductio Lunæ ab orbitâ ſuâ ad eclipticam, poſitâ inclinatione orbis lunaris ad planum Eclipticæ 4$^{gr.}$ 59′. 35″, cùm nodi ſunt in Solis quadrato ; & 5$^{gr.}$ 17′. 20″ cùm iidem in ſyzygiis verſantur. Ex modò inventis longitudine &

latitudine, & datâ obliquitate eclipticæ $23^{gr}. 29'$, Lunæ aſcenſio recta & declinatio eruentur.

Lunæ Parallaxis horizontalis, Motus horarius, et Diameter.

15. Lunæ in ſyzygiis, mediocriter diſtantis à Terrâ, parallaxin horizontalem pono $57'.30''$; Motum horarium, $33'. 32''. 32'''$; & diametrum apparentem $31'. 30''$. In quadraturis verò, mediocriter à Terrâ diſtantis parallaxin pono $56'. 40''$; Motum horarium, $32'. 12''. 2'''$; & diametrum apparentem $31'. 3''$. Lunæ in Solis octante, mediocriter diſtantis, centrum diſtat à centro Terræ quaſi $60\frac{2}{9}$ ſemidiametrorum Terræ.

Solis Parallaxis horizontalis et diameter.

16. Solis parallaxin horizontalem pono $10''$; & $32'. 15''$ apparentem ejus diametrum in mediocri diſtantiâ à Terrâ.

Umbra Atmoſphæræ terreſtris.

17. Telluris atmoſphæra, refringendo & diffipando Solis lumen, umbram projicit, perinde ac ſi opaca foret, ad altitudinem minimùm 40 aut 50 milliarium geographicorum: (Milliare geographicum appello partem ſexageſimam gradûs magni circuli in telluris ſuperficie): umbra hæc, in eclipſi lunari in lunam incidens, telluris umbram auctiorem reddit. Et ſingulis milliaribus atmoſphæræ terreſtris reſpondent ſingula ſcrupula ſecunda in lunæ diſco. Adeoque umbræ terreſtris ſemidiameter, in Lunæ diſcum projecta, augenda eſt 50 circiter ſecundis; aut, quod eodem recidit, in eclipſi lunari Lunæ parallaxis horizontalis augenda eſt in ratione circiter 70 ad 69.

LECTIONES OPTICÆ

Annis MDCLXIX, MDCLXX & MDCLXXI.

IN

SCHOLIS PUBLICIS CANTABRIGIENSIUM

EX CATHEDRA LUCASIANA HABITÆ.

ARGUMENTA CAPITUM

PARTIS PRIMÆ LECTIONUM OPTICARUM.

SECT. I.	*Radiorum diverſam eſſe refrangibilitatem.*	Pag. 253
SECT. II.	*De Menſurâ Refractionum.*	272
SECT. III.	*De Planorum Refractionibus.*	294
SECT. IV.	*De Refractionibus curvarum ſuperficierum.*	330

OPTICÆ PARS PRIMA.

DE RADIORUM LUCIS REFRACTIONIBUS.

SECTIO PRIMA.

Radiorum diverſam eſſe Refrangibilitatem.

INVENTIO Teleſcopiorum nupera pleroſque Geometras ita exercuit, ut nihil in Opticâ non tritum, nullum inventioni præterea locum aliis reliquiſſe videantur. Et inſuper, cùm Diſſertationes, quas hîc non ita pridem audiviſtis, tantâ rerum Opticarum varietate, novarum copiâ, & accuratiſſimis earundem demonſtrationibus fuerint compoſitæ; fruſtranei forte videantur conatus & labor inutilis, ſi ego ſcientiam hanc iterum tractandam ſuſcepero. Verùm cùm Geometras in quâdam Lucis proprietate, quæ ad Refractiones ſpectat, hucuſque hallucinantes videam, demonſtrationes ſuas in hypotheſi quâdam Phyſicâ, haud bene ſtabilitâ, tacitè fundantes; non ingratum me facturum judico, ſi principia ſcientiæ hujus examini ſeveriori ſubjiciam; & quæ ego de iis ſimul excogitavi, & experientiâ multiplici habeo comperta, ſubnectam iis, quæ Reverendus meus Anteceſſor hîc (a) loci poſtrema dixit.

(a) Barrovius.

Imaginantur

Radiorum diversa

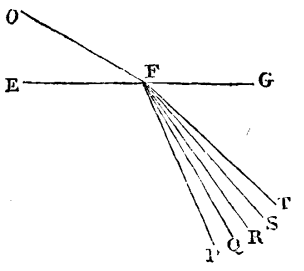
Imaginantur Dioptricês ſtudioſi, quòd Perſpicilla ad quemlibet perfectionis gradum perduci poſſent, modò vitris, dum perpoliuntur, geometricam, quam vellent, figuram communicare concederetur; & in eum finem Inſtrumenta varia fuêre excogitata, quibus vitra in figuras Hyperbolicas, vel etiam Parabolicas, contererentur. Sed exacta iſtarum figurarum fabricatio nemini hucuſque ſucceſſit: ſcilicet aratur litus, & ne labores ſuos in negotio deſperato diutius inſumant, iis polliceri audeo, quòd, licet omnia fierent feliciter, nihil minùs tamen quàm votis ſuis reſponderent. Etenim vitra, licet efformentur ſecundum figuras in iſtum finem optimas, quæ poſſunt excogitari, tamen non duplo plus præſtabunt, quàm ſphæricæ æquali politurâ perfectæ. Hæc autem non ideo loquor, quaſi peccatum eſſe à ſcriptoribus Opticês contenderem; illi enim omnia, pro intentione demonſtrationum ſuarum accuratè quidem & veriſſimè dixerunt; ſed aliquid tamen, idque maximi momenti, reliquerunt poſteris inveniendum; ſcilicet in refractionibus irregularitatem quandam reperio, quæ omnia perturbat; & non ſolùm efficit, ut figuræ conicarum ſectionum ſphæricas non multum ſuperent, ſed etiam ut ſphericæ multo minùs præſtent, quàm præſtarent, ſi dicta refractio eſſet uniformis.

Itaque in Dioptricâ pedem figo, non ut eam pertractarem de integro, ſed tantùm ut hanc de naturâ Lucis proprietatem rimarer primò; deinde ut oſtenderem, quantum ex hâc proprietate perfectio Dioptricês impeditur; & quo pacto incommodum iſtud, quatenus natura rei ſinit, devitetur. Ubi & nonnulla proferam, quæ ad Teleſcopiorum juxtà & Microſcopiorum tum Theoriam tum Praxin ſpectant; oſtendens, quòd Opticês ſummâ perfectio, præter opinionem receptam, ex Dioptricâ & Catoptricâ mixtis petenda eſt. Ac interea diſcrimen Colorum, & eorum geneſin à priſmatibus, & corporibus etiam coloratis, fuſè explicabo.

Quòd omnium Radiorum non ſit eadem Refrangibilitas.

2. De Luce itaque compertum habeo, quòd Radii ejus, quoad quantitatem refractionis, ab invicem differant. Ex iis, qui omnes habent eundem angulum incidentiæ, alii angulum refractionis aliquanto majorem, alii minorem habebunt. Plenioris illuſtrationis gratiâ, ſit EFG ſuperficies quælibet refringens, puta vitrea;

trea; & ducatur quævis OF huic occurrens in F, & cum eâ efficiens angulum OFE acutum. Refrangibilitas.



Concipe etiam radios ſolares per iſtam lineam OF ſibi continuò ſucceſſivos fluere, ita ut alii poſt alios in punctum F impingant, ibidemque in medium denſius refringantur; vel ſi mavis, finge parallelos radios indefinitè parùm diſtare ab OF, & incidere in puncta ipſi F viciniſſimâ. Jam ex opinione receptâ, hi radii, eandem habentes incidentiam, eandem quoque refractionem omnes habere debent; puta in lineam FR. At contrarium compertum habeo; ſcilicet, quòd poſtquam refringuntur, divergant ab invicem; quaſi quidam refringerentur in lineam FP; alii in lineam FQ; & alii in lineas FR, FS, & FT; ac alii etiam innumeri per ſpatia intermedia; ut & ultra citraque nonnulli pervagantes, prout radius quilibet ad refractionem majorem minoremve patiendum ſit aptus. Invenio præterea, quòd Radii FP maximè refracti colores Purpureos producant; & illi FT minimè refracti Rubros; qui autem hiſce intermedii, FQ, FR, FS, pergunt, colores intermedios; nempe Cæruleos, Virides & Flavos generant: & ſic Radii, prout apti ſunt, ut alii aliis magis atque magis refringantur, hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum, & Purpureum generant, unà cum omnibus intermediis, quos in Iride liceat conſpicere; unde productio colorum Priſmatis & Iridis facilè patebit. Sed his jam perfunctoriè notatis, quæ de Coloribus dicenda ſunt, in poſterum differam.

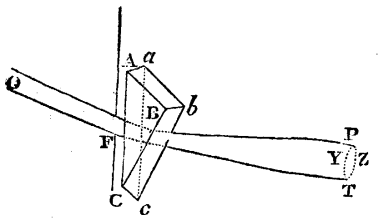
EXPER. I.

Probatur experimento vulgari per longitudinem imaginis ſolaris refractæ.

3. Sententiâ noſtrâ de hâc re ſic breviter explicatâ, ne putetis fabulas pro veris enarratas eſſe, rationes & experimenta, quibus iſthæc innituntur, continuò proferam. Et quoniam experimentum quoddam Priſmatis valde obvium mihi primò dedit occaſionem excogitandi reliqua, iſtum primum explicabo. Sit F foramen aliquod in pariete vel feneſtrâ cubiculi, per quod radii ſolares OF trajiciantur; reliquis ubique foraminibus diligenter obturatis,

Radiorum diverſa

turatis, ne lux alibi ingrediatur. Iſta autem obſcuratio cubiculi non eſt prorſus neceſſaria, ſed efficit tantùm, ut experimentum evadat aliquanto evidentius. Deinde Priſma triangulare vitreum, A*a*B*b*C*c*, ad foramen iſtud applicetur; quod radios, OF, per ſe trajectos, refringat verſus PYTZ; quos radios oppoſito pariete, vel papyro aliquâ, ad diſtantiam à Priſmate ſatis magnam, objectâ, terminatos videbis in figuram PYTZ, cujus nempe longitudo PT ſit quadruplex latitudinis YZ, & ampliùs. Et hinc evinci certo videtur, quòd radiorum, æqualiter incidentium, alii majorem aliis refractionem patiuntur. Nam ſi contrarium eſſet verum, prædicta Solis imago appareret ferè orbicularis, & in quâdam poſitione Priſmatis ad ſenſum orbicularis conſpiceretur; id quod contra omnem experientiam eſt. Quocunque enim ſitu Priſma diſpoſui, nunquam tamen potui efficere, quin longitudo imaginis eſſet latitudinis pluſquam quadrupla; angulo ſcilicet priſmatis ACB, vel *acb*, exiſtente graduum plus minus ſexaginta.



Caſus in quo radii æque refrangibiles faciunt imaginem orbicularem.

4. Quòd autem datur quædam Priſmatis poſitio, in quâ Imago Solis, ex opinione de refractionibus receptâ, appareret orbicularis, ſic oſtendo. Juxta foramen, in feneſtrâ cubiculi factum, Priſma collocetur foras; vel, quod eodem recidit, ſit EG *(vid. Tab. fig.* 1.) corpus aliquod opacum, citra Priſma locatum, in quo ſit F foramen indefinitè parvum & orbiculare; per quod radii refracti, in parietem directè oppoſitum, ad imaginem PYTZ ibi depingendam, trajiciantur: & ponatur ABC eſſe planum ſecans A*acc*, B*bcc* plana refringentia perpendiculariter, atque etiam tranſiens per foramen F, ut & per centrum Solis DIHV, quem biſecet ſecundum diametrum ejus DH, à cujus extremitatibus radii DK & HN, in eodem plano jacentes, adveniant; qui poſtquam refringuntur (DK in K*n* & *n*T, atque HN in N*k* & *k*P) utrinque pergant per centrum foraminis F; & præterea ſit talis inclinatio priſmatis ad iſtos radios, ut anguli AKD & B*k*F fiant æquales. Deinde ſit IV alia Solis diameter, prædicto plano ABC perpendicularis; à cujus

jus extremitatibus alii duo radii, VL & IM, adveniant; alter IM cis planum ABC, qui refringatur in M*l* & *l*Y; alter verò VL ultra planum iſtud, qui refringatur in L*m* & *m*Z: & prædicti quatuor radii ſeſe omnes decuſſent in medio foraminis F. Denique ponatur, quòd imago lucida PYTZ foramen directè reſpiciat, ita ſcilicet ut FP & FT, item FY & FZ, æquales fiant. Dico jam, quòd in iſtâ poſitione priſmatis, anguli PFT ac YFZ æquales eſſent, ſuppoſito radios omnes æquè refringi, qui eundem habent angulum incidentiæ; & proinde quòd imago iſta ſenſui ſaltem deberet eſſe orbicularis; utpote cujus diametri PT & YZ ſeſe decuſſant perpendiculariter, & æquales iſtos angulos ſubtendunt.

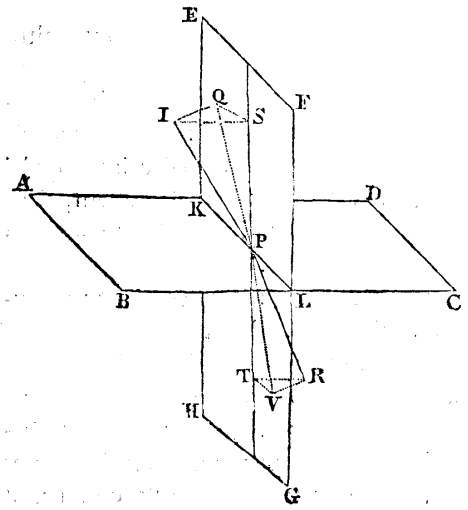
Refrangibilitas.

Demonſtratio caſus iſtius. Pars I.

5. Angulos autem iſtos PFT & YFZ æquales eſſe, ſic demonſtro. Concipe radium aliquem à P per *k* & N retrocedere, dum alius radius pergit à D per K & *n*; itaque, cùm anguli AKD & B*k*F ſupponantur æquales, erunt etiam anguli per primas refractiones facti, AK*n* & B*k*N, æquales; unde triangula CK*n* & C*k*N erunt ſimilia, & eorum anguli externi *k*NA, K*n*B æquales; & proinde anguli per ſecundas refractiones facti ANH & B*n*F ſunt æquales. Quare, cùm anguli AKD & B*k*F, item ANH & B*n*F ſint æquales, eorum differentiæ erunt etiam æquales; hoc eſt, angulus *n*F*k* ſive PFT æqualis angulo, quem radii DK & HN comprehendunt, ſive diametro ſolari. Quare, cùm demonſtratum fuerit, quòd angulus YFZ æquatur eidem diametro, liquebit propoſitum. Iſtud autem ut fiat, Theorema quoddam, more Lemmatis, præſternendum eſt.

Lemma ad ſecundam partem demonſtrationis.

6. Sint duo plana ABCD & EFGH *(fig. p.* 258) ſibimet perpendicularia, quorum communis interſectio ſit KL; & ſit IP radius quilibet, qui, in planum ABCD incidens ad punctum P, ab eo refringitur in PR; dico, quòd ſinus anguli, quem radius incidens, IP, efficit cum plano perpendiculari FH, ſit ad ſinum anguli, quem radius refractus, RP, efficit cum eodem plano, ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, & proinde in ratione datâ. Sumptis enim radiis IP & PR æqualibus, & demiſſis IQ & RV ad planum FH perpendicularibus; & præterea ad punctum incidentiæ P erectâ SPT perpendiculari ad planum refringens BD (quæ ideo cum altero plano FH coincidet) & ad iſtam demiſſis IS & RT iterum perpendicularibus;



erit IPQ angulus, quem radius incidens IP efficit cum plano perpendiculari FH, & RPV angulus, quem radius refractus PR efficit cum eodem plano. Item IPS angulus incidentiæ, & RPT angulus refractionis. Quare, ſi IP vel PR ſupponatur radius circuli, erunt IQ, RV, & IS, RT dictorum angulorum ſinus. Sed IQ & RV ſunt paralleli (6. 10. Elem.) propterea quòd eidem plano FH ſunt perpendiculares. Item IS & RT ſunt paralleli (28. 1. Elem.) quia jacentes in eodem plano, ISPTR, eidem rectæ, ST, perpendiculariter inſiſtunt. Hoc eſt, rectæ IQ, IS, quæ angulum QIS comprehendunt, ſunt parallelæ rectis RV, RT, conprehendentibus angulum VRT. Quare iſti anguli, QIS & VRT, ſunt æquales (10. 11. Elem.) Ductis autem QS & VT, fient anguli IQS & RVT recti (Def. 3. 11. Elem.) quia rectæ IQ & RV plano FH perpendiculariter inſiſtunt. Ergo triangula IQS & RVT ſunt ſimilia (4. 6. Elem.) & IQ.RV :: IS.RT; hoc eſt, ſinus angulorum, quos radius incidens & refractus efficiunt cum plano aliquo FH ad refringens planum BD perpendiculari, ſunt ut ſinus incidentiæ & refractionis, & proinde in ratione datâ. Quippe ſinuum iſtorum rationem eſſe datam Carteſius edocuit, & alii deinde fuerunt experti.

Quinetiam Theorematis jam demonſtrati veritas manebit ſalva, licet planum FH plano refringenti BD alibi perpendiculariter inſiſtat, quàm ad punctum refringens P. Exinde enim neque anguli cum radiis & plano FH effecti, neque ideo ſinus iſtorum angulorum immutabuntur.

Pars ſecunda. Demonſtrationis.

7. Hiſce ita præmonſtratis, ad propoſitum jam revertar; demonſtraturus ſcilicet angulum YFZ (*vid. Tab. fig.* 1.) diametro Solis, ac proinde angulo PFT æquari. Ex ſuprà poſitis liquet, quòd planum

planum KDHN*k*F*n* biſecat angulum radiis IM & VL utrinque jacentibus contentum. Itaque, cùm iſte angulus æquetur diametro ſolari; angulus, quem radiorum alter, puta IM, cum dicto plano faciet, æquabitur ſemidiametro ſolari, cujus eſto ſinus A; & B ſinus anguli, quem radius iſte refractus M*l* facit cum eodem plano. Jam, cùm planum iſtud ſupponatur perpendiculare ad Priſmatis refringens planum AC, erit ex præcedenti Lemmate, ſinus A ad ſinum B ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis è Medio rariori in Medium denſius. Vel è contra ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis è Medio denſiori in rarius, ita erit B ad A. Quare, cùm dictum planum DHF etiam perpendiculare ſit ad alterum Priſmatis planum BC, quod radios è medio denſiori in rarius refringit; & inſuper, cùm B ſupponatur anguli ſinus, quem radius incidens M*l* facit cum plano iſto perpendiculari DHF, erit (per Lemma præcedens) A ſinus anguli, quem radius refractus *l*F facit cum eodem plano DHF; ſed A ponitur ſinus ſemediametri ſolaris, ergo ille angulus, quem radius *l*F facit cum plano DHF, æquetur ſemidiametro ſolari, & ejus duplus *l*F*m* ſive YFZ toti diametro; &, cùm ſuprà fuerit oſtenſum, quòd angulus PFT ſit eidem diametro æqualis, iſti duo anguli YFZ & PFT erunt æquales. Q. E. D.

Jam, ſi planum YFZ eſſet perpendiculare plano imaginis PYTZ, æquè ac planum PFT, iſtæ quatuor lineæ FP, FT, FY & FZ, quæ angulos æquales comprehendunt, eſſent omnes inter ſe æquales; & proin ſubtenſæ PT & YZ etiam æquarentur. Sed qui rem ſerio perpendit, inveniet radios collaterales VL*m*FZ & IM*l*FY duobus reliquis, DK*n*FT & HN*k*FP, paulo minus refringi; & idcirco planum YFZ paulo magis declinabit à radio FP quàm ab FT, ſecans lineam PT infra medium ejus punctum X; & ſic divaricans à perpendiculari FX (quam concipe ductam) erit aliquantulum obliquum ad planum imaginis PYTZ; & eâ de cauſâ lineæ FY & FZ erunt paulo majores quàm FP & FT, & ſubtenſa YZ paulo major quàm ſubtenſa PT. Sed hujus rei demonſtrationem, utpote nimis longam & propoſito meo non omnino neceſſariam, prætermitto. Etenim non multum refert, utrum planum YFZ ſit rectum ad planum imaginis PYTZ vel nonnihil obliquum, hoc eſt, utrum YZ ſit æqualis vel major quàm PT; ſufficit, quòd nequit eſſe minor. Imo

cùm propter iſoſcelea triangula PFT & YFZ, ſit FP.FY :: PT.YZ, atque FP & FY ſint quàm proxime æquales, tantilla erit inter PT & YZ differentia, ut quoad ſenſum pro æqualibus haberi poſſint.

In iſto tamen caſu longitudo imaginis pluſquam quadruplex eſt latitudinis. Unde varia refrangibilitas evincitur.

8. Oſtenſus itaque caſus eſt, in quo longitudo ſolaris imaginis, per priſma trajectæ, conſpiceretur æqualis ejuſdem latitudini, & proinde in quo imago iſta quaſi orbicularis appareret, modò vera eſſet opinio vulgaris. Quinimo, licet poſitio priſmatis alia ſit, atque deſcripſi, modò radii utrinque refractionem non valde inæqualem patiantur, figura tamen imaginis eapropter vix immutabitur: nec multum intereſt, an corpus opacum EG, foramine F ad radios tranſmittendos terebratum, citra priſma collocetur vel ultra; neque figura foraminis multum curanda eſt, modò ſit exigua. Etenim tam parvæ variationes haud plus mutabunt imaginem, quàm decimâ forte vel quintâ parte diametri ſuæ; ſicut cogitanti patebit. Atque ita, ut paucis tandem comprehendam omnia, liquet, quòd imago Solis refracta ut plurimum deberet eſſe ſenſui quaſi orbicularis; ſi modò ejuſdem incidentiæ in idem Medium refractio ſemper foret eadem. Sed prius repugnat Experientiæ, longitudine ſcilicet ejus latitudinem pluſquam quatuor vicibus, ut dictum fuit, excedente. Ergo poſterius repugnat Veritati, & ejuſdem Incidentiæ Refractio eſt varia.

Ejuſdem rei demonſtratio brevior.

9. Ex eodem experimento potui propoſitum ſic brevius indicâſſe; nempe, cùm ita diſpoſuiſſem Priſma, ut refractio radiorum tum ingredientium tum egredientium foret quaſi æqualis, angulos PFT & YFZ (fig. 1. Tab.) dimenſus ſum; & inveni quidem angulum YFZ ſemiſſi gradûs, ſive diametro Solis, æqualem. At angulus PFT eandem diametrum quater & ampliùs ſuperavit, cui tamen æqualis eſſe debuiſſet ex parte priori præcedentis demonſtrationis; & inde planiſſimè liquet propoſitum. Verùm in eorum gratiam, quæ mox ſequentur, oporteret demonſtraſſe, quod illi radii, quorum refrangibilitas non eſt diſpar, efformabunt imaginem ferè orbicularem; & eâ de re mihi viſum fuit demonſtrationem iſtam etiamſi longiuſculam, in illuſtrationem hujus Experimenti, hîc adduxiſſe.

Quo pacto priſma facile ſtatui poteſt in ſitu ad ex-

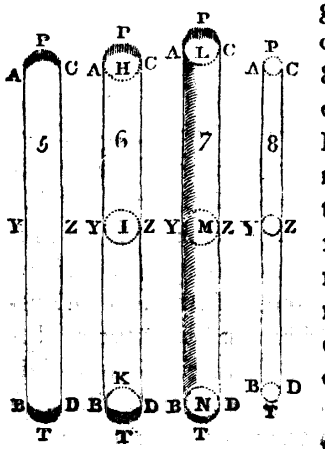
10. Verùm, cùm in experiendis prædictis eam eſſe poſitionem priſmatis ſuppoſuerim, ut Radii ad utramque faciem priſmatis æqualiter refringantur; concluſionis loco, dicam, quâ ratione iſtud citò

citò fiat & facilè. Si priſma teneatur in luce ſolari, & motu lento circa axem ſuum convertatur, videbis colores, quos efficit, de loco in locum continuo motu tranſlatos eſſe, ita quidem ut aliquando progredi, deinde verò regredi videantur. Obſervabis itaque medium inter iſtos contrarios motus, quando colores modò progreſſi, & ſtatim regreſſuri, videntur quieſcere; quod ubì vides, ſiſte priſma, idque in iſto ſitu fige. Dico factum. Scilicet in eo ſitu ſumma refractionum utrobique factarum, ſive radii Emergentis ad Incidentem inclinatio, evadit omnium minima *. Quod cùm accidit, refractiones utrobique ſunt æquales; uti poſthac demonſtrabitur.

perienda prædicta requiſito.

11. Cæterum Experimenti hujus varias circumſtantias, non minus jucundas experienti, quàm propoſiti noſtri indicativas, proſequi jam animus eſt. Et primum notandum venit, quòd Imaginis iſtius figura, ſecundum longitudinem ſuam lineis rectis terminata fuit, & ſecundum latitudinem duobus (ut ex viſu potui judicare) ſemicirculis. In figura 5ta. ſit PT imago ſolis priſmate refracta; hanc obſervabam ad latera duabus lineis, AB & CD, quoad ſenſum rectis & ſibi parallelis, terminari; ad extremitates autem, duobus ſemicirculis APC & BTD; cujus quidem eventûs cauſa ex præmonſtratis ſic derminatur.

Imaginis præfatæ figura deſcribitur, quæ partim rectis, partim ſemicirculis comprehenſa eſt.



12. Semicirculi illi terminantes in circulos compleantur, ut vides in figurâ ſextâ, & alius inſcribatur circulus, YZ, iſtis intermedius. Jam concipe radios quoſdam à Sole provenientes, qui apti ſunt, ut æqualiter incidentes etiam æqualiter refringantur. Illi per Priſma trajecti, ex ſuprà demonſtratis, imaginem quoad ſenſum (ſi ſola poſſet videri) circularem depingent, puta BD. Deinde concipe alios ejuſdem Solis radios, ſibi etiam conformes, qui apti ſunt ut prioribus paulo magis refringantur; illi itaque aliam imaginem depingent circularem, puta YZ. Et alios etiam radios adhuc ma-

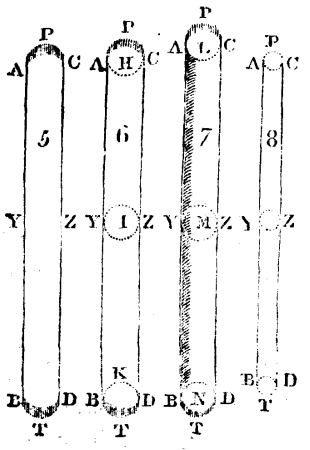
Quomodòtalis evadit per circulares imagines (quas unumquodque genus radiorum æquabiliter refrangibilium facit) in longum diſpoſitas.

* Lege *maxima*. Vid. Sect. III. Prop. XXV.

gis-

Radiorum diversa refrangibiles

gis refrangibiles concipe, qui tertiam circularem imaginem AC efficient. Denique alios innumeros cogita, prædictis plus & minus refrangibiles; & illi alias etiam innumeras circulares imagines, prioribus tum intermedias tum extremas, efformabunt, illuminantes oblongum spatium PYTZ, rectis lineis, AB & CD, duobusque semicirculis contentum. Verùm, cùm imagines illæ sint omnes ejusdem pene magnitudinis, & inter lineas AB & CD in directum dispositæ, istæ lineæ AB & CD pro rectis sibi parallelis haberi possunt, & ad sensum tales videbuntur; & sic totum spatium PYTZ, radiis ex eâdem incidentiâ variè refractis illuminatum, partim parallelis rectis & partim semicirculis oppositis terminabitur; sicut Experientiâ compertum est.



Exinde deducitur Experimentum, quo termini recti fiant distinctissimi.

13. Hanc autem conjecturam ut penitus probarem, cogitabam de imagine Solis per foramen aliquod sine ullâ refractione ad distantiam magnam trajectâ; scilicet quòd male definitur, termino existente inter lucem & tenebras minimè distincto: at si radii isti per lentem convexam transeant, cujus focus ad imaginem est, imago terminabitur distinctissimè. Simili modo de radiis æquè refrangibilibus intellexi, quòd, si per Prisma trajicerentur ad distantiam magnam, depingerent imaginem circularem malè definitam; cujus tamen terminus, mediante lente convexâ, distinctissimus evaderet. Itaque, cum vidissem terminos imaginis refractæ PYTZ non admodum distinctos; de imaginibus BD, YZ, AC & reliquis circularibus, oblongam istam formantibus, conjiciebam, quòd multo distinctius terminarentur per lentem convexam trajectæ quàm aliter; & experienti res patuit. Nam rectas AB & CD, in quas imagines omnes istæ circulares utrinque terminantur, vidi admodum distinctas, quas antea confusas videram.

Quare termini circulares semper apparent confusi.

14. Sed, quod notatu valdè dignum videtur, termini circulares, APC & BTD, imaginis illius semper apparuere maximè confusi, luce paulatim deficiente donec tandem in tenebras desiit. Scilicet

Scilicet intermedii circuli, ut YZ, miscentur aliis circulis utrinque cadentibus; quibuscum ex aliquâ sui parte coincidunt. At extremi quidem circuli, AC & BD, ex unâ tantùm parte cum aliis concurrunt; & eorum concursus continuò fit rarior, & exinde lux usque remissior, dum ad extremitates P ac T deventum est. Sed & alia prodit istius rei causa; scilicet quòd radiorum maxima copia apta sit, ut mediocrem refractionem patiatur, & sic in medium imaginis incidat; & quòd eorum numerus continuò minor existat, quibus competit gradus refrangibilitatis alterutrinque magis extremus. Refrangibilitas.

Admonitio de figurâ & situ Lentium & Prismatum.

15. Cæterùm ad isthæc experienda lentes adhiberi vellem, quarum foci sunt longinqui, sex fortè vel duodecim pedibus à lentibus distantes, modò tales præsto sint: saltem non sint minùs distantes quàm duobus. Atque etiam latera prismatis debent esse accuratè plana; sin latera ejus sint aliquatenus convexa, tum præstat adhibere lentem, cujus focus ad pedes tantùm duos vel tres à se remotus est. Quibus paratis, lentem Prismati ex utrâvis parte colloca vicinam; ita scilicet ut radios, per se trajectos, directè respiciat. Deinde radii in papyrum aliquam excipiantur, quam ultro citroque tranfer, donec imaginem coloratam utrinque rectis parallelis distinctissimè terminatam videas.

Deque imagine quâdam orbiculari.

16. Sed observandum est, quòd, cùm Prisma collocatur ultra foramen F (ut in Tab. fig. 1.) vel ipsi quàm proximè citra, & lens magis distat ab isto foramine, quàm focus lentis, quem radii in eam parallelos incidentes efficerent, distat à lente; duplicem invenies casum, in quo imago in papyrum projecta evadet distincta: alter, quando radii omnes homogenei, qui in lentem paralleli incidunt, ita refringuntur, ut ad papyrum istam in eodem puncto concurrant; quod fit, quando vides imaginem coloratam oblongam, & parallelis rectis distincte terminatam: alter casus est, quando radii omnes homogenei ab uno puncto foraminis F divergentes, postquam à lente refringuntur, ad unum iterum punctum dictæ papyri convergunt. Id autem accidit, cùm imaginem albam, orbicularem, & undique benè definitam vides. De quo fusè dicetur alibi. Sufficeat hoc monitum hîc dedisse, ne quis propriis oculis hæc experturus, per ambiguitatem effectûs incautè decipiatur, & exinde prædicta in dubium revocet.

17. Juvat

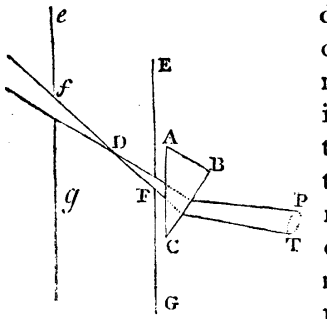
Ac de umbris nebularum solem intercedentium.

17. Juvat annotare præterea, quòd nebulæ aliquæ tenuiores interceperunt discum Solis, eum non penitus obscurantes, & umbras in hanc imaginem PT projecerunt non sui similes, sed in longum protensas, & imaginis terminis rectilineis parallelas. Id quod ratiociniis modò allatis accuratè convenit. Nam concipe nebulam aliquam in disco Solis ad instar maculæ conspicuam esse; & ea, si radii maximè refrangibiles circuloque AC (fig. 7.) circumscripti spectentur, umbram projiciat in locum L, ita ut circulus AC cum umbrâ L discum Solis, nebulâ deficientem, referat. Quo posito, si radii minimè refrangibiles circuloque BD circumscripti spectentur, umbra nebulæ ab iis projicietur in locum N, cujus talis erit situs in circulo BD, qualis est ipsius L in circulo AC; quippe hic etiam discum solis, nebulâ deficientem, refert. Atque idem porro discursus de circulo quolibet intermedio cum umbrellâ ejus M intelligatur; adeo ut propter indefinitam multitudinem circulorum, spatium integrum ABDC occupantium, nebula suas umbras per totam longitudinem LN dispergat, eamque reddat obscuram; & sic, cùm plures nebulæ, vel nubium sinus, Soli interveniant, imago ejus plurimis umbris in longum diffusis & parallelis obscurabitur.

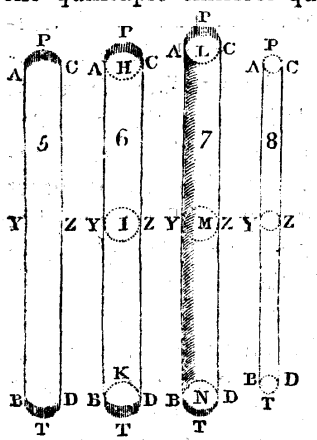
EXPER. II.

Ab imaginis figurâ aliud etiam experimentum deducitur, quo fiat multum oblongior.

18. Ut dictas proprietates Lucis, quâ potui diligentiâ, perscrutarer, sequentem præterea modum excogitavi, quo illas examini subjicerem. Nempe (in fig. 6.) cum magnitudo circulorum AC, YZ, BD dependeat à magnitudine solari, si diameter Solis fieret aliquanto minor, quàm nunc reverâ existit, tum illi etiam circuli fierent minores, distantiâ centrorum H, I, K, non omnino mutatâ, ut videre est in fig. 8. Et sic latitudo imaginis, ad ejusdem longitudinem comparata, multo minor evaderet quàm antea, utrâque scilicet per eandem quantitatem diminutâ. Hæc probaturus effeci, ut radii Solis per duo parva foramina, ab invicem longè distantia, transirent, antequam inciderent Prismati; quo pacto radii ab extremis partibus Solis venientes excludebantur, & res perinde succesſit, quasi diameter Solis reverâ esset diminuta. Illustrationis gratiâ, sit *efg* fenestra, parvo foramine *f* penetrata, per quod radii solares cubiculum, aliàs obscuratum, ingrediantur;



diantur; deinde sit EFG corpus aliquod opacum perforatum ad F, & in medio cubiculo ita locatum, ut radii iterum permeent foramen istud, antequam Prisma ABC, ponè locatum, attingant. Jam foraminum istorum diametro existente $\frac{1}{8}$ digiti, & eorundem distantiâ, *f*F, 12 pedibus (ita scilicet ut maxima radiorum, utrumque foramen permeantium, inclinatio foret angulus ferè minutorum 6, hoc est, quasi quinta pars diametri solaris) atque etiam imagine PT projectâ in papyrum, decem pedes à Prismate distantem, prout angustia cubiculi tulit: inveni longitudinem imaginis esse plusquam quatuor digitorum cum semisse, & latitudinem trientis digiti; hoc est longitudinem plusquam quatuordecim vicibus majorem latitudine, sicut ex prædictis oportet evenisse. Etenim cùm isti tantùm radii mittuntur intro, qui minus quàm quintâ parte solaris diametri ad se invicem inclinantur, diametri AC, YZ & BD diminutæ diametro foraminis F, debent esse quintuplo minores quàm secundum priora contingeret; ut videre est in fig. 6 & 7. quasi à Sole essent effectæ, cujus diameter sit quinquies minor diametro Solis nostri. Verùm, si corpus opacum *fg* tolleretur, ut radii per unum solummodo foramen F ad Prisma transirent, sicut in prioribus factum est, latitudo imaginis evaderet $1\frac{1}{6}$ digitorum, & longitudo plusquam 5 dig. angulo nempe Prismatis existente 60 grad. vel paulo majori. Itaque diameter circulorum, AC, YZ & BD, qui eo, quo dictum est modo, imaginem constituunt, esset $1\frac{1}{6}$ dig. à quâ subducatur diameter foraminis, nempe $\frac{1}{8}$ dig. & manebit $1\frac{1}{24}$ dig. cujus quintæ parti rursus adjungatur eadem foraminis diameter sive $\frac{1}{8}$ dig. & prodibit $\frac{1}{3}$ dig. diameter circulorum AC, YZ, & BD in fig. 8. quæ minor est quàm diameter circulorum istorum in fig. 6. quantitate $\frac{5}{6}$ dig.

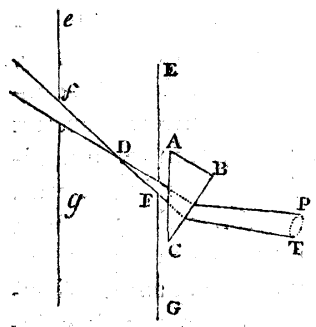


Radiorum diversa

$\frac{1}{6}$ dig. Quamobrem figura 8 quaquaversum est minor quàm sexta, quantitate $\frac{1}{6}$ dig. Atque ideo longitudo ejus fit plusquam 4 dig. latitudo autem digiti triens. Id quod cum experientiâ modò recensitâ quadrat. Ad eundem modum, si foramina *f* & F adhuc minora forent, vel si distantia *f*F foret major, imago PT oblongior evaderet. Quod idem quoque quadantenus contingeret, ex imagine PT à Prismate longiùs dissitâ. Cæterùm notandum est, quòd foramina *f* & F ad radios directè respicientia supponam; licet non multum refert, an situs eorum sit parum obliquus, ut in appositâ figurâ nonâ factum est.

Experimentum istud promovetur.

19. Porro si in hoc experimento convexam lentem ut priùs adhibueris, cujus focus ad imaginem cadit, foramine F (si placet) dilatato, vel opaco corpore EG prorsus ablato, ut radii per foramen longinquum *f* solummodo transeant, &, si foramen istud *f* effeceris angustius quàm antea, cæteris ut priùs stantibus; imaginem valdè oblongam, &, pro longitudine, lucidiorem videbis quàm in casu priori. Exempli gratiâ, si diameter foraminis sit pars digiti vigesima, & si pedibus ab inde duodecim prisma cum lente dispositeris, videbis longitudinem imaginis plusquam octoginta vel centum vicibus latitudine majorem. Sed in his experiendis oportet cubiculum quaquaversus benè obturatum esse; ne lux alibi quàm per foramen *f* ingressa perturbet imaginem, & juxta circulares ejus extremitates obscuram reddat: et præterea, si superficies Prismatis sint accuratè planæ, præstat adhibere lentem, quæ focum ad distantiam magnam projicit; puta ad 12 vel 20 pedes, modò loci amplitudo sinat, quo pacto de proportionibus imaginis melius judicium proferas. Quòd si latera Prismatis sint aliquantulum convexa, ut iis nonnunquam contingit, quæ vulgò venduntur, licebit istud absque ullâ lente solum adhibere; & ejus convexitas radios, vice lentis, ad magnam distantiam congregabit. Quinimo, si cum Prismate quolibet lentem parvam adhibeas, cujus focus non sit duobus tribusve pedibus longinquior, imaginem conspicies satis longam quidem,



sed

sed cujus latitudo haud sensibilis existit. Id quod proposito nostro non minùs inservit, quàm si posses de proportione longitudinis ad latitudinem ejus accuratè judicare. In istis etiam experiendis notetur præterea, quòd lens non debet ita longè post Prisma locari, quin posset ad omnes radios simul transmittendos extendi, ne imaginem successivè per partes tantùm observare sis coactus: et notetur denique, quòd si foramen F citra Prisma locaveris, & lentem deinceps citra foramen istud, ad distantiam majorem ab eo quàm focus radiorum, à foramine *f* longinquiori manantium, abest à lente; duplex erit casus, in quo imago in papyrum projecta conspicietur distincta: prout radii venientes à singulis punctis foraminis F, aut à singulis punctis foraminis *f*, in totidem itidem punctis papyri colliguntur. In uno casu imago erit alba & orbicularis, ut prius (§ 16) commonui, in alterâ autem oblonga & colorata, sicut præsens experimentum exigit.

Refrangibilitas.

Magis adhuc promovetur per imaginem stellæ Veneris;

20. Jam liquet ex præfatis, quòd imaginis PT latitudo semper evadit eo minor, quo foramen longinquum *f* factum est angustius; ut nihil dubitandum sit, quin dicta latitudo prorsus evanesceret, si vice foraminis istius translucidi unum duntaxat punctum ibi lucidissimum existeret: atque istud sic futurum esse confirmatur ex observatione non dissimili, quam habui quondam de stellâ Veneris. Cubiculo nempe quaquaversus obturato, excepto foramine paulo plusquàm duos digitos lato, ut tenebrosissimum efficeretur: in isto foramine vitrum objectivum Perspicilli septempedalis collocavi; latitudine ejus, ad sufficientem radiorum copiam transmittendam, duos digitos & amplius apertâ. Deinde ad distantiam septem pedum papyro transversè positâ, in eam vidi sideris imaginem ad instar puncti lucidi projectam; & interposito Prismate ad distantiam pedis unius duorumve ab istâ papyro, per quod radii trajecti aliò refringerentur: pro puncto illo lucido ad distantiam inde plusquam pedalem, vidi lineolam, licet non valdè lucidam, facilè tamen conspicuam, & cujus longitudo semissem digiti superavit, latitudo autem fuit quoad sensum nulla, saltem haud major quàm ut sentiretur. Atque idem credo de stellis primæ magnitudinis, uti de Sirio liceat observare; præsertim si lens adhibeatur quatuor vel sex digitos lata, ut plures radios transmittat.

& applicatur descriptioni refractionis ad fig. 1. traditæ.

21. Hoc experimentum, quàm benè convenit cum explicatione noſtrâ, quam de Refractione radiorum, ad eundem angulum incidentium variâ, ſub initio dedi, operæ pretium videatur adnotare. In figurâ pag. 255, ſuppoſui complures radios per eandem rectam in ſuperficiem aliquam refringentem ſucceſſivè delatos eſſe, ibidemque alios aliis paulo magis gradatim refringi. Quod ſi fieri concipiatur, abundè ſequeretur, quòd radii ſic refracti, ſi corpore deinceps opaco quovis, ut papyro, interciperentur, lineolam ibi lucidam depingerent. Jam licet radii à ſtellâ aliquâ venientes non omnes in eâdem rectâ pergant, tamen, quod tantundem eſt, pro parallelis haberi poſſunt; & quòd à lente convexâ effecti ſunt convergentes, antequam attingant Priſma, hoc adeo non deſtruit analogiam, ut eam maximè confirmet. Etenim pro ſingulis in eâdem rectâ pergentibus, debes tantùm concipere tot radiorum penicillos, qui omnes habeant eundem axem, & idem punctum concurſûs; & quòd iſtorum penicillorum alii magis aliis à Priſmate refringuntur, ita ut eorum puncta concurſûs, ſive foci, qui prius coincidêre, jam ſinguli cadant ſeorſim, lineam rectam conficientes. Ac proinde, quòd axes penicillorum, qui radiis putà ſucceſſivis, eouſque coincidebant, donec attigere Priſma, ibi per variam refractionem ſint effecti divergentes; ut ad focos penicillorum, in lineâ rectâ jacentes, pergant.

Circumſtantia variata eidem deſcriptioni rurſus applicatur.

22. Si Priſma ſtellæ Veneris vicinius quàm lentem collocaveris, ut radii per illud trajiciantur primò, & à lente deinde convergentes fiant, eandem lineolam ut priùs videbis, licet minùs conſpicuam & inventu difficilliorem. Jam in hoc ſpecimine, cùm radii omnes adveniant paralleli, ſi æqualiter refringerentur tranſeuntes priſma, manerent poſtea paralleli, uſque dum lenti inciderent, & in eâ proinde ſic refringerentur, ut omnes deinceps ad idem punctum pergerent, & ſic punctum lucidum conſpiceretur. Quare, cum vice puncti iſtius apparet linea, concludendum eſt, quòd omnes radii non æqualiter refringuntur.

Quod in adductis experimentis refractiones non caſu fiunt inæquales, neque aliâ cauſâ

23. Si jam objiciat aliquis, quòd in refractionibus quidem detur irregularitas, ſed eam eſſe contingentem, & non ex prævià radiorum diſpoſitione, vel ullis certis legibus ortam; reſpondeo, quòd imago Solis præfata, ſi radiis nullâ certâ lege refractis fieret oblonga, non poſſet in lineas rectas ſecundum longitudinem ſuam diſtinctè

diſtinctè terminari, ſicut ad figuram quintam oſtenſum eſt. Quin- quàm inæ-
etiam non omnino deberet eſſe oblonga, ſed parte ejus mediâ & quali refran-
magis ſplendidâ in morem orbis effingi; ſenſibilique termino diſ- gibilitate.
tingui ab erraticâ luce debiliori quaquaverſum diſperſâ: perinde ut Sol apparet, cùm nubibus penè obſcuratur; vel ut ejus imago cernitur, cùm trajicitur per laminam vitream parallelis planis terminatam, & halitu vel fumo levitur obductam, ut lux inter refringendum paululum conturbetur. Adhæc, ſi duo Priſmata ſimilia ABC & *abc* (vid. Tab. fig. 2.) juxtà ponantur, ſecundum longitudines ſuas parallela, cum lateribus planis AC & *ac*, ut & BC & *bc* parallelis; & ſi Sol tranſluceat utrumque in locum z, ubi corpus opacum luci directè opponitur, radiis tamen ejus per orbiculare foramen F priùs trajectis: lux incidens in dictum z apparebit diſtinctè orbicularis, non ſecus quàm ſi directè tenderet ab F, priſmatibus non omnino interpoſitis. Fatendum eſt itaque, quòd utriuſque Priſmatis conjunctim refractiones ſunt regulares, & proinde etiam refractiones alterutrius. Scilicet radii illi ſimiliter incidentes, non omnes æquè refringuntur in primo priſmate ABC, ut neque in ſecundo *abc*; tamen cùm ea refractionis inæqualitas non contingens ſit, ſed oriatur ex prævià radiorum diſpoſitione; ideo licet varii radii variè refringuntur, tamen ejuſdem radii eadem erit refractionis quantitas in utroque Priſmate, & quantùm incurvatur à priori ABC, tantum recurvabitur à poſteriori *abc*; unde radius quilibet, utcunque ſit refrangibilis, poſtquam ex utroque Priſmate emerſerit, ſibimet ipſi, cùm nondum iis inciderat, fiet parallelus. Atque ideo, cùm omnes ad eaſdem plagas tendant, ad quas liberè tenderent, ſi Priſmatibus non interciperentur; neceſſe eſt, ut eandem orbicularem imaginem ad z exhibeant, quàm illuc liberè tendentes exhiberent. Quòd ſi imago oblonga, per refractionem unici Priſmatis (ut dictum eſt) effecta, figuram ſuam à radiis nullâ certâ lege divaricantibus, ſed forte fortunâ huc illuc vagè refractis, acquireret; cùm refractiones binis Priſmatibus geminentur, errores etiam radiorum duplo plures evaderent, ut & duplo majores; & exinde imago ad z fieret multo oblongior; quæ tamen, experientiâ teſte, in orbem contrahitur.

24. Nonnullis forte in ſuſpicionem veniet, quòd terminatio Lucis, ſive quieſcentis Medii confinium, diverſitatem refractionis efficiat;

Radiorum diversa refrangibilitas.

efficiat; sed huic dubitationi in promptu est remedium, efficiendo nempe ut lux à posticâ parte prismatis (sicut ad fig. 1. Tab.) solummodo terminetur, ne fiat umbræ confinis priusquam fuerit refracta. Et propterea, ne suspicio sit de variâ crassitie vitri, potest refractio ejus ad varias crassities tentari, promovendo Prisma transversè juxta lucis ingressum parallelo motu: ita ut lux primò ad aciem ejus trajiciatur; deinde ad partes crassiores; & in quovis casu persimilis erit colorum apparitio. Neque multùm interest, si foramen, per quod lux ingreditur, sit latius vel angustius; nam exinde nihil aliud eveniet quàm lucis, colores exhibentis, augmentatio vel diminutio, ac tanta dilatatio vel contractio imaginis, quanta est foraminis.

25. Experimento duorum parallelorum Prismatum jam antè descripto constat etiam, quòd hæc imaginis in longitudinem distractio non oritur ex ejusdem cujusque radii diffusione vel distractione in complures divergentes radios; siquidem illi per iteratam diffusionem vel distractionem, in transitu per secundum Prisma tunc resolvi deberent in longè plures & magis divergentes radios. Quin & iisdem omnibus objectionibus adversatur experimentum, ubi posterius Prisma non statuitur parallelum anteriori sed perpendiculariter tranfversum. Nam in isto casu, si anterius Prisma distraheret imaginem in longitudinem, ob aliam quamcunque causam quàm diversam refrangibilitatem diversorum radiorum, tunc posterius Prisma, per transversam refractionem, distrahere deberet illam oblongatam imaginem in latitudinem, & sic quadrilateram efficeret. Sed experimentum tentanti res secus evenit, imagine scilicet non secundum latitudinem dilatatâ, sed solum obliquatâ per majorem refractionem extremitatis violaceæ quàm rubræ. Quemadmodum videre est ad fig. 3. Tab. ubi imago PT, per secundi Prismatis refractionem, transfertur ad *pt*. Ex dictis, opinor, satis superque constat id, quod initio proposui demonstrandum: quoniam autem jucunditatem intellectui & assensum plerunque firmiorem harmonia rerum plurium affert, quam unici licet maximè scientifici argumenti testimonium; non erit abs re, si in aliud experimentorum genus, præcedentibus affinium, experturos breviter introducam.

EXPE-

EXPERIMENTA VARIA.

Perstringuntur alia experimenta præcedentibus affinia.

26. In fig. 4. Tab. sit F foramen valdè exiguum, per quod lumen Solis trajiciatur; deinde ad distantiam pro lubitu magnam statuatur Prisma ABC, per quod radii transeant refracti, prout in prioribus explicui; tum oculo ponè admoto, circularis foraminis F videbis imaginem PT oblongam; cujus longitudo, ad latitudinem collata, tanto major erit, quanto foramen F fiet angustius; & exinde pateat, quòd radiorum alii, tendentes ad oculum per H, quasi manâssent à P, sunt magis refracti, quàm alii tendentes per I, quasi à T veniissent; & radiis sic in oculum non secus ingressis, quàm si profluxissent ab oblongo spatio PT, necesse est, ut spatium istud longum appareat luminosum.

Sed cavendum est, ne foraminis F tanta sit apertura, ut nimiæ lucis introitu lædatur oculus; imo ne tanta sit, quin ut possis nudo oculo particulam Solis per foramen istud, quasi punctum lucidum, distinctè & absque ullâ circumradiatione transpicere. Verùm, si lumen Solis censeatur nimium huic experiendo, lumen à nubibus transmissum sufficiat; modò talis sit oculi tui dispositio, ut foramen sine radiis circumcirca superfluis distinctum cernas, antequam interponas prisma: aliàs imaginem ejus non cernes distinctam, neque debitâ longitudine deductam.

Adhæc, liceat tandem observare, si filum albens interposito Prismate aspicias; etenim filum multo latius apparebit, cùm in situ ad longitudinem prismatis parallelo, quàm cùm in transverso statuitur.

Cæterùm, ut in uno comprehendam omnia, si stellam fixam primæ magnitudinis mediante Prismate intuearis, ejus etiam imago conspicietur longa. At, cùm radii stellarum pro parallelis habeantur, si omnes æquè refringerentur, manerent etiam paralleli, postquam egrediuntur è Prismate; & oculum sic ingressi efficerent imaginem omnino similem stellæ, vel puncto lucido, nullatenus oblongam; perinde ut fit, cum stella parallelos radios in oculum directè mittit. Videbis itaque, quòd radii paralleli, superficiebus planis refracti, fiunt inclinati; unde necesse est, ut inæqualem refractionem patiantur. In transitu autem notetur, quòd Telescopio, si placeat, primùm adhibito, tum ut copia lucis

ad

Radiorum diversa

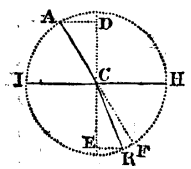
ad oculum transmittatur, tum ut scintillatio, quâ Fixæ solent quasi coronâ cingi, minuatur, & Prismate deinceps interposito, videbis albicantem lineam distinctiorem quàm prius, cum latitudine vix aut ne vix quidem conspicuâ. His paucis de Radiorum diversâ Refrangibilitate narratis, quorum sensus plenior in sequentibus, ubi de Coloribus agitur, elucescet; restat, ut refractionum Quantitates & Mensuræ jam determinentur.

SECTIO SECUNDA.

De Mensurâ Refractionum.

De mensurâ refractionis dati generis radiorum, è quâvis incidentiâ datâ.

27. Refractiones, ope angulorum, quos incidentes & refracti radii cum perpendiculo refringentis plani constituunt, quasi datam rationem habentium, à Veteribus determinatæ fuerant. Quemadmodum si IH sit planum refringens, cui linea DCE ad aliquod ejus punctum C perpendiculariter insistit, & in illud C radius quilibet AC incidat, & refringatur ad R: posito refractum radium CR in plano ACI jacere, quod refringenti plano perpendiculare est; supposuere Veteres, quòd angulus incidentiæ ACD, angulus refractionis RCE, & angulus refractus RCF semper sint in datâ quâdam ratione; vel potius hypothesin credidêre satis accuratam esse, ubi radii à perpendiculo non multum divaricant. Sic in Vitro statuerunt angulum refractionis quasi triplum esse anguli refracti. At illa refractionum æstimatio minus exacta deprehenditur, quàm ut pro fundamento Dioptricês debet statui; & Cartesius aliam Regulam primus (a) excogitavit, quâ istud exactius determinarentur; ponendo dictorum angulorum sinus esse in ratione datâ. In fig. sup. si centro C & distantiâ quâlibet AC circulus describatur, secans radios præfatos in A & R, & ab istis punctis ad plani perpendiculum DCE demittantur normales AD & RE, ipsarum AD & RE proportio erit eadem perpetuò. Cujus rei veritatem auctor non ineleganter demonstrâsset, modo de causis Physicis, quas assumpsit, nullum dubitandi locum reliquisset. Ut & quoniam instrumentis, in istum finem

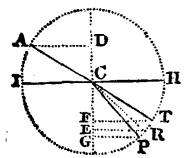


(a) Veram refractionum legem omnium primus invenit Snellius; qui horum angulorum secantibus

De Mensurâ Refractionum.

finem accuratè instructis, examinârunt aliqui, & veritati (quoad sensum) exactè convenientem adinvenerunt, non dubitamus pro fundamento statuere; hoc solum adhibito moderamine, quòd, cùm is de quibuslibet radiis indifferenter affirmârit, quasi omnium persimilis fuisset refractio, nos tantùm affirmamus de singulis eorum generibus seorsim spectatis; ponendo quòd radiorum æquè refrangibilium sinus refractionis sunt ut sinus incidentiæ.

Concipiamus aliquot genera radiorum secundum lineam AC esse allapsa ad punctum C, ibique refracta per superficiem IH; puta mediocriter refrangibiles radios in CR, minimè refrangibiles in CT, & maximè refrangibiles in CP, ac innumeros alios, gradibus intermediis plus minus refrangibiles, per totum spatium TCP diffusos esse. Jam si ducatur DCG perpendicularis ad planum refringens IH, & centro C distantiâ quâvis AC circulus (ut priùs) describatur, secans radios dictos in A, P, R, T, atque ex istis punctis demittantur perpendiculares, AD, PG, RE, TF, pro sinubus angulorum ACD, PCG, RCE, TCF; pono, quòd, utcunque radii incidant, tamen semper erit AD ad PG in eâdem ratione; quâ semel cognitâ, Regulam habes pro refractione radiorum maximè refrangibilium in eandem superficiem, ad angulum quemvis incidentium, mensurandâ: et sic semper erit AD ad TF in eâdem ratione; quâ cognitâ, Regulam habes quâcum refractio minimè refrangibilium in quâvis incidentiâ determinabitur. Atque idem de ratione ipsius AD ad RE, & ad sinum cujusvis intermedii generis concipiatur.



De conferendis refractionibus radiorum diversi generis.

28. Porro autem, cùm sinus PG, RE, TF cæterique datam habeant rationem ad sinum AD, datam quoque rationem inter sese habebunt; atque adeo, si ex unicâ observatione proportionem sinuum PG, RE, TF & reliquorum ad radios ex eâdem incidentiâ refractos pertinentium cognoveris; Regulam exinde habebis, quâcum ex sinu refractionis cujusvis generis radiorum & in istam superficiem utcunque incidentium dato, cæterorum omnium, ex eâdem incidentiâ prolabentium, sinus elicias, licet quænam sit eorum incidentia non innotuerit. Quinimo, si omnium AD, TF,

tibus datam rationem intercedere primus intellexit. Inde verò facile efficiendum erat sinuum etiam rationem dari. Vide Princip. Lib. 1. Prop. XCVI. Schol.

De Mensura

RE, PG, &c. proportiones inter se semel cognoscantur, habito respectu ad eadem Media refringentia, Regulam habes pro cæteris omnibus exquirendis ex unico quovis unquam dato. Itaque, quo rationes istorum sinuum investigentur, convenit, ut in aliquo radiorum genere proportio sinûs incidentiæ ad sinum refractionis primùm exquiratur; deinde, ut proportiones sinuum refractionis pro radiis diversorum generum, ad eundem angulum incidentium, determinentur.

Ad sinus incidentiæ & refractionis conferendos adhibetur mediocre genus radiorum.

29. Ad sinus incidentiæ cum sinubus refractionis conferendos, commodum erit, ut medium genus eligatur; puta genus illud radiorum, qui Viriditatem, vel potius colorem viridi & cæruleo intermedium, exhibent. Credo enim illos, qui refractiones antehac mensuravêre (sive id factum sit, ut jam dicta hypothesis Cartesii probaretur, sive aliis de causis) credo illos, inquam, mensuram instituisse ad medietatem refractæ Lucis; hoc est, si spatium à coloribus occupatum spectemus, ad confinium Viridis & Cærulei: aut si spectemus quantitatem lucis, ad medietatem Viridis; & præterea punctum istud pro principali foco lentium habendum esse videtur, in quod intermedium genus radiorum convergit. Atque etiam, si quando de radiis indistinctè differendum est, ut hactenus apud Opticæ peritos consueverit, genus mediocre, commodius quàm extremorum aliquod, pro omnibus haberi potest.

Modus explorandi sinuum istorum rationes.

30. Porro, cùm forte desideretur accuratius examen dictæ Regulæ Cartesianæ, quàm antehac instituebatur, dum varia radiorum refringibilitas experientes latuit, primò dicam, quo pacto id non incommodè fiat. Quoniam Fluidi pellucidi superficies refringentes facilè possint inclinari ad quemvis datum angulum, quod Solido non est concessum, Fluida in hunc finem fuerunt adhibita; sed instrumento magis laborioso, quàm opus erat, & erroribus fortè magis obnoxio, quàm si omni apparatu privaretur, demptâ trabe cui vasculum aquæ plenum affigitur.

Sit itaque HK *in fig.* 5. *Tab.* vectis ligneus duas tresve ulnas longus aut ampliùs; satis crassus ne ob longitudinem & pondus minimè inflecti queat; quadrilaterus, rectangulus & rectus, cum lateribus oppositis exactè parallelis. Tum lamellæ duæ, HI & KL, super unum ejus latus, ad angulos rectos, erigantur; KL proximè ad unam extremitatem, & HI quasi quatuor digitos ab alterâ distans, quarum longitudo

gitudo sit trium digitorum quatuorve, latitudo autem duorum vel trium. Deinde sumatur vasculum aliquod cylindricum, vel prismiforme, CF, duos tresve digitos latum, longum verò quatuor vel quinque. Ejus basis super lamellam HI, cemento aliquo duro & tenaci, figatur; ac in eo situ firmetur ope trabis HK ultra lamellam dictam HI productæ. Tum trajiciatur ejus fundum in medietate, & lamella simul, parvo foramine F, puta decimâ parte digiti lato; & juxta foramen istud in alterâ lamellâ notetur punctum R, quod æquè distat à trabe ac dicti foraminis centrum; ita scilicet ut linea FR, per centrum foraminis ad R ducta, sit parallela longitudini trabis. Denique sumatur lamella vitrea, plana, polita & uniformiter crassa, eaque applicetur ad planitiem lamellæ HI, vasculo CF obversam, super foramen F; & cemento figatur ita, ut vasculum istud aquæ (quâ repleatur) non sit pervium; & cum normâ aliquâ fiat periculum, an illa vitrea lamella perpendiculariter insistat trabi. Quod si non contingat, corrigatur situs, donec sit exactè perpendicularis. In cujus rei gratiam convenit, ut dicta lamella vitrea sit tres vel quatuor digitos longa & lata, quo de situ ejus meliùs judicare liceat. Instrumento hoc sic fabricato, & aquâ vasi CF plusquam ad medietatem ejus infusâ, illud in radiis solaribus ita statuatur, ut in superiori superficie aqueâ refracti perpendiculariter emergant ad foramen F, rectâque progrediantur versus laminam KL, Rubedine ad T, Purpurâ ad P, & Viridi, vel confinio Cærulei & Viridis, ad K incidentibus. Convenit autem, ut dicta lamina KL dealbetur, aut albente papyro vestiatur, quo de Coloribus judicium certius feras. Interea verò cum quadrante aliquo amplo & exactè fabricato, *ekr*, quæratur inclinatio trabis, HK, ad horizontem; & habebis angulum refractionis *ekr*, & ejus sinum *er*. Tum Solis altitudo statim inquiratur, ejusque complementum ad 90 grad. AKD erit angulus incidentiæ, & AD sinus. Quibus sinubus ad invicem collatis, & experimento ad diversas Solis altitudines repetito, constabit, an sinuum ratio semper sit eadem. Quòd si velis, ut experimenta varia simul fiant, aut ad minorem incidentiam, quàm sit complementum maximæ altitudinis solaris, vice radiorum à Sole directè manantium possis adhibere reflexos.

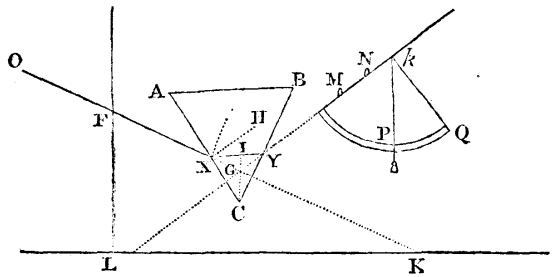
Refractionum.

Modus explorandi vim refractivam

31. Cum eandem sinuum incidentiæ & refractionis rationem alicui radiorum generi, utcunque in eandem quamvis superficiem incidenti,

Solidi cujuſvis Aere circundati.

incidenti, perpetuò competere ſat exploratum fuerit, proponatur exquirere rationem illam ad ſuperficiem data quælibet Media diſterminantem, idque unico experimento. Si Aer ſit unum ex datis Mediis, & Liquor quilibet alterum; inſtrumentum noviſſimè deſcriptum non incommodè poteſt adhiberi. Sin Mediorum alterum ſit ſolidum, res expeditè perficitur ad diagramma appoſitum.



In ejus explicationem præmittantur duo ſequentia Lemmata.

LEMMA I.

Sit ABC Priſma, ex materiâ quâvis pellucidâ confectum, cujus axis ſit Horizonti parallelus & perpendicularis ad radios Solis; & præterea ſit ejus poſitio talis, ut dictos radios OX æquè refringat, ingredientes ad X & egredientes ad Y. Iſtud autem, quo pacto debet fieri, oſtenſum fuit ad § 10. Jam dico, quòd angulus refractionis, ad alterutram refringentem ſuperficiem ut AC factæ, ſit æqualis dimidio verticalis anguli priſmatici ACB: ſcilicet ad punctum incidentiæ X erigatur perpendicularis HX, erit HXY angulus refractionis ad ſuperficiem AC. Porro demittatur CI perpendicularis in radium XY; & iſta biſecabit angulum YCX, propterea quòd triangulum YCX (ob æqualitatem refractionis in X & Y) ſit iſoſceles. Dico itaque, quod anguli HXY & ICX æquantur: nam ang. AXY = ang. XIC + ICX (per 32. 1. Elem.) ſed anguli AXH & XIC ſunt recti. Ergo reſidui HXY & ICX æquantur. Q. E. D.

LEMMA II.

Adhæc, ſi radius incidens OX & emergens YN indefinitè producantur, occurrentes in G; & præterea, ſi recta quævis KL, Horizonti parallela, radiis iſtis interjiciatur, conſtituens triangulum GKL; &,

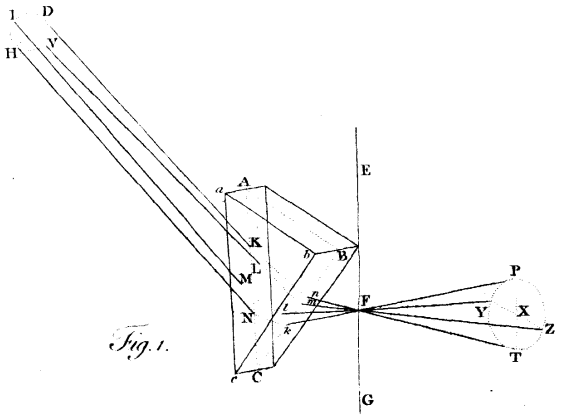


Fig. 1.

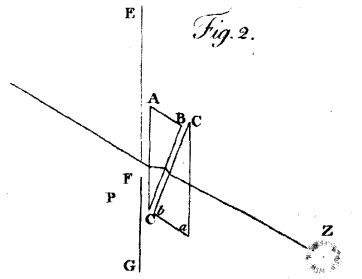


Fig. 2.

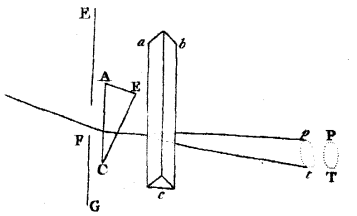


Fig. 3.

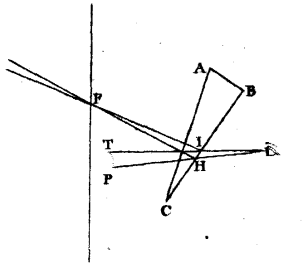


Fig. 4.

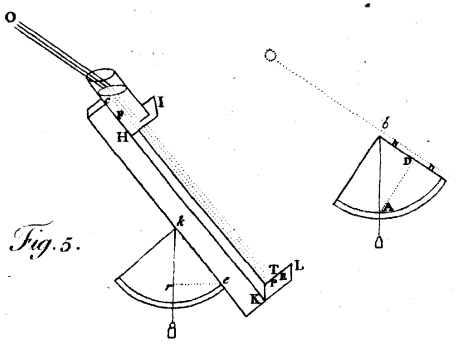


Fig. 5.

BASIRE. Sc.

&, cùm refractus radius YN tendit ſurſum, ſi ſumma angulorum LKX & KLY ſumatur; aut eorum differentia, cùm iſte YN tendit deorſum: dico, quòd illius ſummæ vel differentiæ dimidium, unà cum angulo refractionis HXY, æquabitur angulo incidentiæ HXG. Nam dicta ſumma vel differentia æquatur angulo NGK (per 31. 1. Elem.) hoc eſt angulis GXY+GYX; &, cùm triangulum GYX ſit iſoſceles, dictæ ſummæ vel differentiæ dimidium æquabitur angulo refracto, GXY; qui cum angulo refractionis, YXH, conſtituit angulum incidentiæ. Q. E. D. De Menſurâ Refractionum.

His præmiſſis, Problema propoſitum ſic perficitur. Primò menſuretur angulus verticalis Priſmatis ACB, & ejus dimidium erit angulus refractionis. Dein priſmate in poſitione præfatâ diſpoſito, per quod radii trajiciantur ingreſſi foramen F; ope quadrantis MNPQ ampli & accurati (puta cujus pinnarum M & N diſtantia ſit pedis unius ad minimum) exploretur angulus YLK vel PkQ, quem refracti radii, YMN, cum Horizonte conſtituunt; faciendo, ut mediocriter refrangibiles per pinnas M & N, ad diſtantiam decem aut viginti pedum à Priſmate trajiciantur, & ſimul obſervetur Solis altitudo, XKL: qui duo anguli addantur, ſi refracti radii YMN ſurſum tendant, ſicut in ſchemate deſcribitur, alias minor ſubſtrahatur à majori; & ſummæ vel differentiæ dimidium unà cum angulo refractionis, priùs invento, erit angulus incidentiæ, ut pateat per Lemma ſecundum. Denique ex angulis Incidentiæ & Refractionis ſic datis, dantur eorum ſinus. Q. E. F.

32. Sic in Priſmate quodam vitreo dimenſus ſum angulum ejus maximum, ACB, & inveni 63 grad. 12 min. cujus dimidium, HXY, eſt 31. gr. 36 min. ejuſque ſinus 5240, poſito ſinu 90 gr. 10000. Deinde, cùm altitudo Solis, OKL, obſervabatur eſſe 14 gr. 4 min. alter angulus, MLK, à radio YN ad medium Viriditatis tendente conflatus, erat 30 gr. 52 min. quorum ſumma eſt 44°. 56′. ejuſque dimidium, YXK, 22°. 28′. quod unà cum angulo refractionis, HXY, facit 54°. 4′. angulum incidentiæ, cujus ſinus eſt 8097. Denique conferendo ſinus jam inventos, ut eorum proportio in minimis terminis haberetur, inveni eſſe ut 11 ad 17 ferè. Quare pro Regulâ generali ſtatuendum eſt, quòd radiorum Viriditatem exhibentium ſinus incidentiæ ex Aere in Vitrum quodvis, æquè refractivum ac illud Priſma, ſit ad ſinum refractionis ut 17 ad 11. Exemplum in refractione cujuſdam generis vitri.

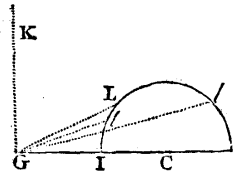
Haud

De Menſurâ Refractionum.

Haud ſecus dimetiendo refractionem radiorum, colorem inter Viridem & Cæruleum exhibentium, inveſtigatur 45°. 8′. pro duplo anguli refracti; cujus dimidium, 22°. 34′, unà cum angulo refractionis, 31°. 36′, dat angulum incidentiæ 54°. 10′; ejuſque ſinus, 8107, eſt ad ſinum refractionis, 5240, ut 82 ad 53 proximè.

Modi præfati commoditas.

33. Hujus autem modi commoditas in menſurandis refractionibus ex eo conjicietur, quòd Inſtrumento nullo hîc opus eſt, dempto Quadrante & Priſmate cujus refractio deſideratur; quòd Refractionem, dum geminetur, factam ad x & y, exinde certiùs metiri poſſis; & quòd facillimum ſit Priſma in deſiderato ſitu diſponere, ut ſuprà oſtenditur § 10: imo quòd parvus error à ſitu deſiderato fere nihil ſit; dum quoad ſenſum haud inde mutabitur angulus refractus MGK, ut experienti patebit. Quippe angulus iſte hîc minimus eſt; & quantitatum, per motum generatarum, cùm maximæ exiſtant vel minimæ, hoc eſt in momento regreſſûs, motus ut plurimum ſunt infinitè parvi.



Sic verbi gratiâ, ſi centro C deſcribatur circulus *lL*, & extra eum ſumatur punctum quoddam G, ducaturque GIC, & erigatur normalis GK: deinde, ſi concipiatur, quòd punctum *l* moveatur uniformiter in illius circuli circumferentiâ, per quod punctum recta quædam G*l*, circa centrum G rotata, perpetuò tranſeat: manifeſtum eſt, quòd quo major ſit angulus CG*l*, ſive quo minor angulus KG*l*, eo minor erit motus angularis ipſius G*l*; & cùm angulus CG*l* ſit maximus, ſive angulus KG*l* minimus, hoc eſt in momento regreſſûs (recta G*l* tunc circulum in L tangente) motus ejus erit infinitè parvus, & quoad ſenſum nullus; parvuſque error à puncto contactûs, L, nullam ſenſibilem variationem in angulis iſtis KGL & CGL, producet. Et ad eundem ferè modum, parva convolutio Priſmatis haud omnino mutabit angulum MGK, cùm iſte ſit minimus, ſive complementum ejus maximum. Quòd ſi Priſma diſponeretur in quovis alio ſitu, quàm hîc deſcribitur (puta cùm radii perpendiculariter ingreſſi ad egreſſum duntaxat refringuntur) minimus error ab iſto deſiderato ſitu multum mutaret angulum refractum, & ſic experientia foret incertudini & erroribus multo magis obnoxia.

34. In

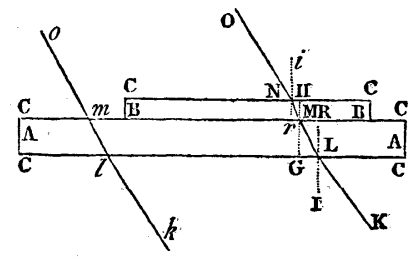
34. In majorem hujus rei copiam, quia dantur aliqui caſus, ubi refractiones per modos jam deſcriptos haud poſſint menſurari (ut cùm refractio fit ex Vitro in Cryſtallum, ex Aquâ in Vitrum, vel ex uno liquore in alium) & nequa omnino ſit refringens ſuperficies, cujus refractio nequit inveſtigari; Problema ſequens lubet proponere.

Regula de inveſtigandâ refractione Mediorum ſibi ipſis contiguorum, quorum, Aeri contiguorum, refractiones cognoſcantur.

PROBLEMA.

Datis refractionibus, quas duo Media alicui tertio contigua conficiunt; illorum, ſibi ipſis contiguorum, refractiones invenire.

Sunto duo Media propoſita A & B, quorum ſuperficiei diſterminantis refractio quæritur; & ſit C Medium tertium, cujus ſuperficiei, ipſis A & B contiguæ, refractiones dantur. Sitque ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex Medio C in Medium A ſicut I ad R; & ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex eodem Medio C in alterum Medium B ſicut *j* ad *r*. Dico, quòd ſit $I \times r : R \times j ::$ ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex Medio B in Medium A.



Verbi gratiâ, ſi proponatur inveſtigatio refractionis ex Aquâ in Vitrum, datâ refractione ex Aere in utrumque; ſitque ſinus incidentiæ ex Aere in Vitrum ad ſinum refractionis ut 17 ad 11, & ſinus incidentiæ ex Aere in Aquam ad ſinum refractionis ut 4 ad 3. Quare ſinus iſtos multiplicando reciprocè, erit ut 17×3 ad 11×4, ſive ut 51 ad 44, ita ſinus incidentiæ ex Aquâ in Vitrum ad ſinum refractionis. Et ſic cognitâ refractione ex Aere in quævis alia Media propoſita, poſſis adipiſci eorum refractionem inter ſe; & è contra.

35. Cæterum demonſtratio hujus non eſt omittenda, in quem finem præfernatur Lemma ſequens.

Regulæ ejus demonſtratio.

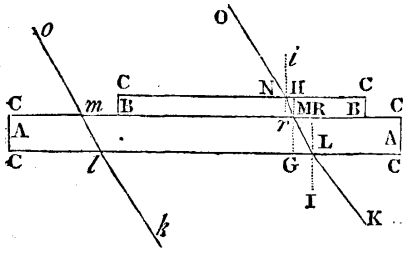
Si Media duo propoſita A & B concipiantur eſſe planis parallelis terminata, contigua, & dicto Medio tertio (puta Aere) circumdata, & radius quilibet ON, oblique incidens ad N, refringatur primò ad M, ac deinde ad L, & emergens pergat ad K: dico radium incidentem

ON

De Mensura

ON sibi emergenti LK parallelum esse: cujus quidem assertionis veritas experientiâ patet. Etenim ponatur Medium A esse Vitrum, & Medium B esse Aquam; Mediumque tertium circundans esse Aera: et laminæ vitreæ A superficies, *r*MR, tenuiter illinatur aquâ B, & statuatur parallela ad horizontem; ut aqua consistat uniformiter crassa. Quo facto videbis, quòd radii, per utrumque medium, A & B, trajecti, tendent ad easdem plagas, versus quas tenderent à Sole directi.

Præmisso hoc, erigantur *i*N*r*, HMG, & RLI, perpendiculares ad refringentia puncta N, M & L; est ergo *j* ad *r* ut sinus anguli ON*i* ad sinum anguli MN*r*, sive NMH; & multiplicando rationem antecedentem per I, fiet I×*j* ad I×*r* ut sinus ipsius ON*i* ad sinum ipsius NMH. Porro est I ad R, ut sinus anguli KLI, sive ON*i*, ad sinum anguli MLR, sive LMG. Et, multiplicando rationem antecedentem per *j*, fiet I×*j* ad R×*j*, ut sinus anguli ON*i* ad sinum ipsius LMG. Jam permutando terminos utriusque proportionis, fiet I×*j* : sin. ON*i* :: I×*r* : sin. NMH; & I×*j* : sin. ON*i* :: R×*j* : sin. LMG. Quare ex æqualitate rationis est I×*r*. R×*j* :: sin. NMH. sin. LMG(b). Q. E. D.

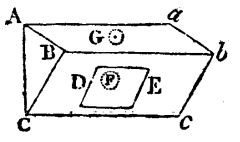


Modus dimetiendi refractiones Solidorum ad Fluida accommodantur.

36. Ex hisce sic ostensis, Problema non inutile proficiscitur, quo refractiones Fluidorum eodem modo metiri possis, ac de Solidis ostensum est § 31. non adhibito instrumento HLK quod in fig. 5. Tab. describitur. Scilicet ex laminis vitreis, in morem cunei connexis, vasculum prismiforme conficiatur; cujus acies, sive angulus verticalis, sit grad. 80 circiter, vel 90. Istius autem anguli quantitatem exactissimâ mensurâ cognitam habebis, ejusque dimidii sinum pro sinu refractionis semper statues. Quo peracto, cùm liquoris alicujus vis refractiva desideratur, vasculum cum illo liquore impleatur, & in tali situ disponatur, ut acies ejus à concursu refringentium planorum constituta, sit parallela ad horizontem, & perpendicularis ad radios solares; atque ut illi radii, per præfata

(b) Vel brevius, cùm sit I×*r* : I×*j* = sin. NMH : sin. ONI. Et I×*j* : R×*j* = sin. ONI : sin. LMG erit

præfata refringentia plana trajecti, refractiones ad ingressum & egressum æquales patiantur. Et ope Quadrantis, ut ostensum erat ad fig. 16. exploretur angulus incidentiæ; cujus sinus ad præfatum sinum refractionis erit ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis ex Aere in Liquorem propositum. Refractiones.



37. Instantiæ gratiâ, quo Aquæ refractionem cognoscerem, curavi, ut Prisma ligneum conficeretur, quale est ABC; cujus ille angulus ACB, quem pro verticali designabam, foret rectus, cæterique duo semirecti; & effeci, ut refringentia plana AC & BC per meditullium trajicerentur foramine F, parallelo ad basem A*b*, per quod foramen lux itura esset; & ut tertium planum, A*b*, foderetur in G, usque dum aditus ad foramen F transversè pertingeret. Dein sumptis duabus ex Vitro lamellis, quas speculum confractum mihi subministravit, unam, DE, super meditullium plani BC cæmento fixi; & alteram super meditullium alterius plani AC, ut meatus F utrinque clauderetur. Tum aquam pluvialem per orificium G in excavatum spatium infudi, & cum operculo, ex subere conciso, clausi. Atque adeo aqua, duabus vitreis lamellis ad angulum rectum inclinatis interjecta, vices subibat aquei prismatis habentis angulum rectum. Eas autem laminas rectum angulum exactè comprehendere ex applicatione normæ cognovi, cujus ideo dimidium grad. 45 pro angulo refractionis habendum est. (Lem. I. § 31.) Hoc Prisma dein ita statuebam ad ingressum lucis in obscurum cubiculum, ut eadem foret utrinque refractionis quantitas; & ex altitudine Solis, & refractorum radiorum, Viriditatem exhibentium, inclinatione ad Horizontem, inveni angulum refractum esse 51°. 16′; cujus dimidium, 25°. 38′, unà cum angulo refractionis, 45°, dabit angulum incidentiæ 70°. 38′. Horum verò angulorum, 70°. 38′ & 45°, sinus sunt 9434 et 7071 respectu sinûs 90 grad. seu 10000; quorum quidem numerorum ratio est paulo minor quàm Cartesiana, 250 ad 187, & paulo major quàm 4 ad 3; nempe 4,002 ad 3; quæ tamen à ratione $\frac{4}{3}$ tam parvâ differentiâ recedit, ut error fuit *insensibilis, si posuerim esse ut 4 ad 3; idque maxi- Refractio aquæ, prout ipse dimensus sum, in specimen ejus rei adducitur.

erit ex æquo I×*r* : R×*j* = sin. NMH : sin. LMG. Q. E. D.

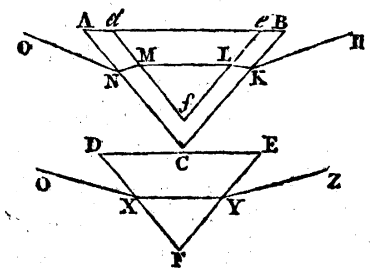
* Lege *fuerit*.

De Mensura

mè cùm Aquæ refractio non perpetim eadem maneat, ſed à caloris viciſſitudine nonnihil patiatur, varioſque denſitatis gradus induat. Quod idem & Aeri circumdanti contingit, qui à vaporibus etiam non ſolùm variè incraſſatur, ſed & arctiùs (auctâ Atmoſphæræ gravitate) vel laxiùs comprimitur. Adde, quòd aquarum, ex diverſis Terrarum regionibus ſcaturentium, aut vi Solis in vapores & pluviam deinde converſarum, diverſæ ſint denſitates, & internæ diſpoſitiones ad refringendum, ortæ ex variis mineralium tincturis, quas è locis ſubterraneis extrahunt, & exhalationibus variè craſſis & copioſis, quæ ſimul cum vaporibus in altum attolluntur.

Præfatorum demonſtratio.

38. Problematis hujus de refractionis Fluidorum menſurâ ſic ſoluti, veritas conſtabit ex oſtenſo, quòd refractionis in hoc Priſmate, ex Aqua & Vitris compoſito, eadem ſit quantitas, quæ foret, ſi vitrum tolleretur, & aqua ſola maneret Aere circundata.



Sit itaque ABC Priſma confectum ex laminis vitreis AC*fd* & BC*fe* (ut dictum eſt) & aquâ *dfe* repletum. Et concipiatur, quòd DEF ſit aqueum Priſma, immediatè circundatum Aere, & omnino ſimile aquæ *def* circumcluſæ vitro, ſimiliterque poſitum; & incidant radii paralleli, ON, OX, in utrumque; quorum alter ON, refractus in N, M, L & K, tendit ad H; alter verò OX, refractùs in X & Y, tendit ad Z. Dico jam, quòd emergentes KH & YZ erunt paralleli, atque adeo, quòd in utroque Priſmate tota refractionum quantitas erit eadem. Etenim in fig. pag. 280. ſi radius *om* ipſi ON parallelus incidat in vitream laminam A, emergatque in *lk*; notum eſt, quòd radius *lk* erit parallelus ipſi *om*, hoc eſt, ipſis ON & LK: & cùm *lk* & LK ſint paralleli, erunt etiam *ml* & ML paralleli. Unde liquet propoſitum: Quòd quantitas refractionis ex Aere in Medium quodvis propoſitum ſit eadem, ſive radii immediatè ingrediantur iſtud Medium ex Aere (ut ſit ad *oml*) ſive prius permeent aliud Medium interpoſitum & parallelis planis terminatum (uti ſit ad ONML) & è contra. Atque idem intel-

lige, cùm vice aeris aliud quodpiam adhibetur Medium. Quare cùm paralleli radii, OX & ON, incidant in priſmata, DFE & ACB, ſimilia & ſimiliter poſita, refractionis quantitas ex Aere in Aquam erit eadem, ſive radii immediatè intrent, ut videre eſt ad DEF, ſive prius permeent lamellam vitream A*dfc*; hoc eſt, radius XY ſemel refractus erit parallelus ML bis refracto: & ob eandem rationem, cùm XY & ML ſint paralleli, radii emergentes YZ & KH erunt etiam paralleli. Quare, cùm radii incidentes & emergentes ſint paralleli, refractio tota priſmatis utriuſque erit eadem. Atque adeo cùm aqueum priſma Aeri contiguum, propter aquæ fluiditatem, fabricari nequeat, ejus vice liceat adhibere vitreum priſma cum aquâ repletum. Q. E. D.

Refractionum.

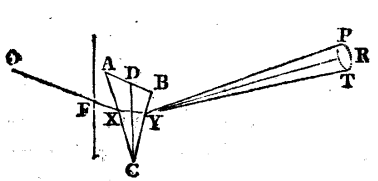
Et ſic modus generalis, quo refractiones ex Aere in quælibet Media propoſita determinentur, oſtenſus eſt, facillimus quidem & erroribus minimè obnoxius: præſertim ſi angulus Priſmatis ſit magnus & exactè cognitus; quadrans magnus & accuratus; & obſervatio facta longè poſt Priſma, ubi colores multum dilatati faciliùs diſtinguuntur. Et præterea, cùm refractiones inter Aerem & Media propoſita ſic experientiis determinantur, indicata eſt Regula (§ 34.) quâ Mediorum eorundem ſibi ipſis contiguorum refractiones eliciantur. Quòd ſatis eſt in gratiam primi caſûs, de refractionibus dimetiendis, cùm in eodem quopiam radiorum genere proportio ſinûs incidentiæ & refractionis quæritur, oſtendiſſe.

Radiorum diverſi generis refractiones conferuntur, & maximæ refrangibilitatis differentia inveſtigatur.

39. Proſequendus eſt jam alter caſus, ubi Heterogeneorum Radiorum refractiones conferendæ ſunt. Quòd autem ſinus refractionis cujuſque radiorum generis ſit ad ſinum incidentiæ in datâ quâdam ratione, experiri poſſis dimetiendo refractiones ſingulorum inſigniorum generum, juxta varias obliquitates in Medium aliquod refringens ſeorſim incidentium, veluti in aquam (ad fig. TAB. 5.) in vaſe ſtagnantem, vel in Priſmata vitrea, quorum diverſæ ſint quantitates angulorum verticalium. Nam per unum Priſma proportiones ſinuum ad ſingula radiorum genera inveſtigare poſſis, prout oſtenditur ad § 31. deinde per alia Priſmata (vel ejuſdem Priſmatis alios ſeu minores ſeu majores angulos) exquirere, an eædem proportiones in aliis obliquitatibus obveniant. Atque ita (obſervationibus accuratiſſimè factis) ſimul conſtabit, re-

De Mensura

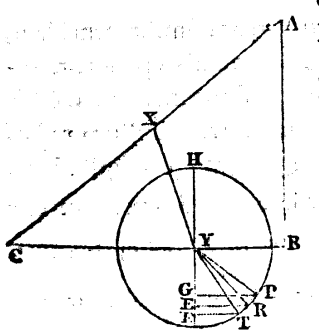
fractiones cujuſque generis radiorum ſecundum certas rationes ſinuum peragi, & iſtorum ſinuum rationes innoteſcent. Impræſentia verò, cùm eandem eſſe cujuſque radii refractionem cognoverim, ſive Heterogeneis radiis (ut in lumine ſolis nondum refracto) commiſtus incidat, ſive ab Heterogeneis priùs ſeparetur: oſtendam quomodo per refractionem immediati luminis ſolaris hæ proportiones obtineri poſſint; imprimis determinando proportiones ſinuum refractionis inter ſe reſpectu ejuſdem incidentiæ, ac deinde cum communi ſinu incidentiæ conferendo. Et quoniam de intermediis radiorum generibus facile eſſet judicium ferre, ſi modò refractiones extremorum eſſent cognitæ, ſatisfecero, ſi radios maximè omnium refrangibiles cum minimè refrangibilibus comparavero.



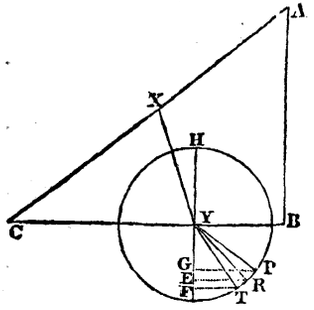
Itaque ſit ABC Priſma vitreum ita poſitum, ut radii tum ingredientes, tum egredientes eandem quantitatem refractionis, ut prius, patiantur. Dies autem feligatur ſplendidus, & cubiculum eſto valdè obſcurum, ut Colores uſque ad ultima, quæ occupent, ſpatia diſtinctè ſatis videri poſſint. Tunc ad diſtantiam viginti pedum aut amplius à Priſmate, radii excipiantur in papyrum aliquam directè obverſam, & ſpatii à coloribus illuminati (ut PT) longitudo & latitudo menſuretur. Sic Priſmate adhibito, cujus angulus verticalis ACB fuit 63°. 12′, & latitudine foraminis radios intromittentis exiſtente quartâ parte digiti; ad diſtantiam XP vel XT 22 pedum, inveni maximam longitudinem imaginis, PT, eſſe $13\frac{1}{4}$ dig. circiter, & latitudinem $2\frac{5}{8}$ dig. Jam ſi latitudo hujus imaginis ab ejus longitudine ſubtrahatur, manebit $10\frac{5}{8}$ digiti pro longitudine, quam habere debuiſſet, ſi Solis diſcus (& foraminis F diameter) fuiſſet infinitè parvus; hoc eſt, ſi radii adveniſſent omnes in eâdem rectâ OF. Iſta itaque linea $10\frac{5}{8}$ dig. ſubtendit angulum, quem radii duo ſimiliter incidentes per inæqualitatem refractionis conſtituunt, quorum alter maximè omnium ſimiliter incidentium, & alter minimè omnium refringitur; qui proinde angulus ex calculo reperitur 2°. 18′. Verùm, cùm angulus iſte binâ refractione

refractione ad X & Y conficiatur, & præterea, cùm utraque ſupponatur æqualis; calculus ad hoc negotium ſatis accuratus ex unicâ tantum refractione poterit inſtitui: puta, quæ conficitur ad latus BC. Etenim, ſi verticalis angulus ACB plano DC biſecetur, & alterum Priſmatis dimidium, DCB vel DCA, concipiatur tolli; refractio ad alterum dimidium facta, radiis obliquè incidentibus in AC & perpendiculariter emergentibus è latere DC, vel perpendiculariter incidentibus in latus DC ſecundum unicam lineam quandam XY, & obliquè emergentibus è latere BC: refractio, inquam, ſic ad alterum dimidium facta, foret ſemiſſis refractionis ad integrum Priſma, ſi modo unicum quodpiam radiorum mediocriter refrangibilium genus ſpectetur. Quinetiam, ſi cætera omnia radiorum genera ſimul ſpectentur, aſſertio illa, licet non ampliùs ſit abſolutè vera, tamen veritati tam proximè accedet, ut quoad ſenſum & calculum mechanicum pro verâ habeatur. Quamobrem, cùm refractionis utriuſque ad X & Y peractæ computatio geometrica ægriùs inſtitui poſſit; iſtud, more ad praxin magis accommodato, utut mechanico, perficere non verebor: confiſus id mihi vitio verti non debere, ſi dum computationes rebus Phyſicis adhibeo, minutias, quæ operam moleſtè & ſine fructu producerent, miſſas faciam. Refractionem itaque ex unicâ tantum parte Priſmatis perpendam; & quoniam omnes radii, demptis mediocriter refrangibilibus, à dimidio ACD bis deberent refringi, & ſemel tantùm ab altero dimidio DCB, perpendiculariter ingreſſi latus planum DC ſecundum lineam XY: itaque in dimidio DCB fiat calculus, hoc eſt, ad latus planum BC; ſuppoſito quòd omnibus radiis ſecundum eandem lineam XY allapſis, angulus, quem maximè refrangibiles cum minimè refrangibilibus, poſtquam refringerentur à latere BC, conſtituerent, foret dimidium anguli PYT; h. e. 1°. 9′. Jam, cùm angulus incidentiæ radii XY ex præmonſtratis ſit 31°. 36′, & angulus refractionis mediocris 54°. 10′; transferentur hæc omnia in ſchema appoſitum; ponendo quòd CB ſit ſuperficies diſterminans Medium vitreum

REFRACTIONUM.



De Mensura



vitreum verſus A, & Aereum verſus F, & quòd angulus incidentiæ XYH ſit 31°. 36′; eritque angulus refractionis, RYF, 54°. 10′; & angulus PYT, 1°. 9′; differentia nempe refractionis inter maximè refrangibiles YP & minimè refrangibiles YT. Qui angulus à radio YR mediocriter refracto, & confinium Cærulei & Viridis occupante, biſecatur. Ac proin angulus, PYR vel RYT, erit $34\frac{1}{2}$ min. dimidium totius PYT. Adeoque angulus PYE 54 grad. $44\frac{1}{2}$ min. & angulus TYE 53 grad. $35\frac{1}{2}$ min. & eorum ſinus, PG ac FT, erunt 81656 & 80481; quorum proportione ad ſimpliciores numeros redactâ, erit PG ad TF ut $69\frac{1}{2}$ ad $68\frac{1}{2}$ circiter. Ad hunc modum experimenta & calculum cùm ſæpius inſtituerim, horum ſinuum proportiones inter terminos 67 ad 66, & 72 ad 71 ſemper obvenerunt; ſed ut plurimum incidi in proportiones 69 ad 68, $69\frac{1}{2}$ ad $68\frac{1}{2}$, & 70 ad 69; quarum tantilla eſt differentia, ut parvi intereſt quænam adhibeatur.

Illarum refractionum ſinus ad communem ſinum incidentiæ conferuntur.

40. Ratione ſinuum refractionis pro extremis radiorum, ſimiliter incidentium, generibus ſic inventâ, eorum computatio ad ſinum incidentiæ ſimul innoteſcit; quippe qui paulo antè inventus eſt 52400: & conferendo hunc, 52400, ad ſinus 81656 & 80481, eorum ratio in minoribus numeris reperietur, $44\frac{1}{2}$ ad $69\frac{1}{2}$, & $68\frac{1}{2}$; aut $44\frac{1}{4}$ ad 69 & 68 ferè. Refractionibus nempe ex Vitro in Aere peractis.

Radiorum, ad oppoſitas partes ejuſdem refringentis ſuperficiei incidentium, ſinus ſunt reciprocè proportionales.

41. Quòd ſi radii è contra ex Aere in Vitrum ſimiliter incidant, proportiones ſinuum nullo negotio ex jam inventis eruuntur, utpote quæ ſunt reciprocæ. Sit I communis ſinus incidentiæ è Vitro in Aerem, P ſinus refractionis maximè refrangibilium radiorum, R mediocriter refrangibilium, & T minimè refrangibilium. Dico, quòd ex horum reciprocè proportionibus, ſi $\frac{1}{I}$ ponatur eſſe ſinus incidentiæ ex aere in vitrum, erit $\frac{1}{P}$ ſinus refractionis maximè refrangibilium radiorum, $\frac{1}{R}$ ſinus refractionis mediocriter refrangibilium,

frangibilium, ac $\frac{1}{T}$ minimè refrangibilium. Nam cùm ſinus incidentiæ radii maximè refrangibilis è vitro in aerem ſit 1, & ſinus refractionis P, radii ejus ex Aere in Vitrum, per eaſdem lineas retroacti, ſinus incidentiæ erit P, & ſinus refractionis I; ſiquidem jam radius eſt incidens, qui prius fuerit refractus. Eſt ergo ſinus incidentiæ radii maximè refrangibilis, ex aere in vitrum utcunque incidentis, ad ſinum refractionis ut P ad I; hoc eſt (applicando terminos rationis ad P) ut I ad $\frac{I}{P}$; hoc eſt (applicando ad I denuo) ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{P}$: et ſimili argumento conſtabit ejuſmodi ſinus radii mediocriter refrangibilis eſſe ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{R}$; & ſinus minimè refrangibilis ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{T}$. Liquet ergo, quòd poſito $\frac{1}{I}$ communi ſinu incidentiæ, erunt $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$, & $\frac{1}{T}$ ſingulorum generum reſpectivè ſinus. REFRACTIONUM.

Illuſtratur refractio Vitri.

42. Rem numeris illuſtro. Cùm $44\frac{1}{4}$ ad 69 & 68 ſit ratio ſinûs communis incidentiæ ad ſinus maximè diſcrepantium refractionum è Vitro in Aerem: ſinus incidentiæ communis ad ſinus refractionum ex Aere in Vitrum, erit ut $\frac{1}{44\frac{1}{4}}$ ad $\frac{1}{69}$ & $\frac{1}{68}$; ſive $\frac{69\times 68}{44\frac{1}{4}}$ (=106 ferè) ad 68 & 69. Hoc eſt, pro radiis maximè refrangibilibus, ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ut 106 ad 68, & pro minimè refrangibilibus ut 106 ad 69.

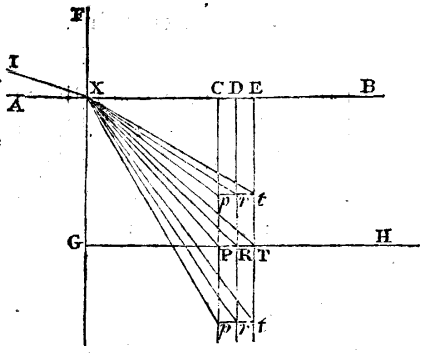
E refractionibus extremorum generum facile eſt de intermediis conjecturam facere.

43. Hiſce ſic determinatis, rationes ſinuum pro radiis intermediis facilè determinantur ex cognitis colorum diſtantiis, quas in imagine coloratâ obſervant. Sic radii, qui ad Cæruleum paulo magis quàm ad Flavum vergunt, cùm in mediam imaginem cadant, intermediam rationem ſinuum $44\frac{1}{4}$ ad $68\frac{1}{2}$, vel 106 ad $61\frac{1}{2}$, circiter habebunt; & ſic de aliis.

Theoremata oſtenditur, quomodo è refractionibus radiorum heterogeneorum ad Vitrum, vel quodvis Medium, inter ſe determinatis, poſſunt etiam ad alia quælibet

44. Ad eundem modum, quo refractiones ad Vitrum determinatæ ſunt, id ipſum poſſet fieri ad alia Media; ſed è re erit, ut Regulam jam oſtendam, quâ refractionum iſtarum menſuræ, ex ſinubus earum, ſic ad Vitrum determinatis, poſſunt determinari ad quodlibet aliud Medium propoſitum, idque licet iſtud ſit alii Medio quàm Aeri contiguum. Sit AB ſuperficies terminans Aerem ex parte F, & Vitrum ex parte G, ad cujus aliquod punctum, X, ducatur linea FXG ei perpendiculariter inſiſtens; & præterea concipiatur rectam IX ad angulum IXA infinitè parvum duci, ſecundum

Media Aeri contigua refractiones, ſine novis experimentorum moleſtiis, inter ſe determinari.



cundum quam omnes omnium formarum radii ſupponantur incidere, & in x refringi; puta maximè refrangibiles verſus P, mediocriter refrangibiles verſus R, & minimè refrangibiles verſus T, alioſque intermedios verſus intermedias plagas. Porro ducatur linea quævis GH parallela ad lineam incidentiæ IX, hoc eſt, perpendicularis ad FG; ea verò ſecet radios in punctis P, R & T, à quibus demittantur PC, RD, ac TE perpendiculares ad refringentem ſuperficiem AB. His ad Vitrum ſic determinatis ac deſcriptis, ſi aliud quodvis Medium in locum Vitri jam concipiatur ſubſtitui, cæteris ſtantibus, & radii alicujus, mediocriter refrangibilis ſecundum lineam IX incidentis ad X, refractus X*r* ducatur ſecans rectam DR in *r* (Quod fieri ſuppono, ſiquidem modum, quo mediocriter refrangibilium refractiones ad Media quælibet inveſtigari poſſunt, antehac expoſui) Dein per punctum *r* ducatur recta *pt* ſecans lineas CP & ET in *p* & *t* perpendiculariter, junganturque *p*X & *t*X: dico, quòd radii maximè refrangibiles ſecundum dictam lineam IX incidentes refringentur in lineam X*p*, & minimè refrangibiles in lineam X*t*; radiique cujuſvis ſpeciei, quos Vitrum refringebat, ad quodlibet punctum PT, illi ad correſpondens punctum rectæ *pt* per alterum dictum Medium refringentur, quod pro Vitro ſupponitur ſubſtitui; iſtis punctis linearum PT & *pt* habitis pro correſpondentibus, per quæ recta quævis parallela ipſi DR tranſit. Patet itaque modus, quo refractiones quorumvis radiorum ex Aere in quodlibet Medium propoſitum, obliquitate maximâ incidentium, determinari potuerunt, cognitâ unici tantum radiorum generis in iſtud medium refractione; & proportionibus ſinuum ex obliquiſſimâ iſtâ refractione determinatis, eorundem radiorum refractiones dabuntur ad quamlibet aliam datam incidentiam.

De Theorematis illius certitudine.

45. Hujus quidem Theorematis certitudinem ab experimentis nondum habeo depromptam, ſed cùm à veritate vix multum diſcrepare

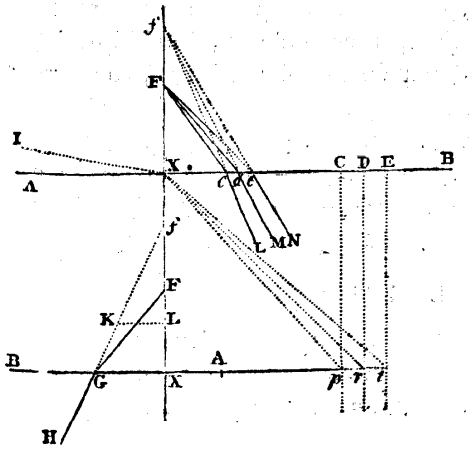
crepare videatur, nihil veritus ſum in præſentiâ gratis aſſumere. Poſthac forte vel experientiâ confirmabo, vel, ſi falſum invenero, corrigam.

De proportione quarundam linearum, quæ computo per hoc Theorema inſtituendo inſerviat.

46. Calculum quod attinet, is facilè poteſt inſtitui ex hâc proportionalitate, quòd ſinus incidentiæ radii IX (hoc eſt, ſinus 90 grad.) ſit ad ſinum refractionis (puta quæ facta ſit in lineam XR) ſicut XR ad RG. Sic ad vitrum, erit XR. RG :: 106. 68½, & XP. PG :: 106. 68, & XT. TG :: 106. 69; & inde deducetur, quòd GP. GR. GT :: 39. 39½. 40. Quæ proportiones ſemel inventæ poſſunt in eum finem aſſervari, ut earum ope refractiones ad alia Media quàm Vitra determinentur. Nam quolibet Medio propoſito, ſumatur XE=40, DE=½, & CD=½, atque perpendicula CP, DR, ET erigantur. Tunc ex datâ ſinuum refractionis radiorum mediocriter refrangibilium proportione, hoc eſt, ex datâ proportione ipſius X*r* ad XD, dabitur punctum *r*, & longitudo D*r*; cui æquales ſunt C*p* & E*t*: punctiſque *p* ac *t* ſic datis, dantur rationes ipſarum X*p* & XC, hoc eſt, ſinuum incidentiæ & refractionis pro radiis minimè refrangibilibus. Sic pro ſuperficie Aquam & Aerem diſterminante, ſinus iſti ſunt ut 68 ad 90 pro minimè refrangibilibus, & ut 68 ad 91 pro maximè refrangibilibus proximè.

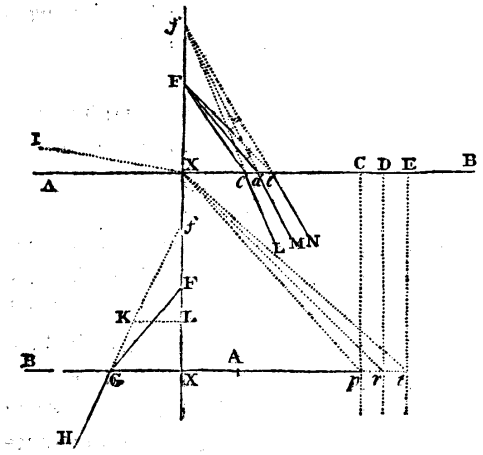
Aliud ad idem perageendum Theorema.

47. Proportionibus linearum XC, XD, & XE ſic inventis, menſura refractionum ex Aere in Medium quodvis propoſitum, & ad quamlibet incidentiam factarum, per aliud inſuper Theorema non inelegans determinari poteſt.



In lineâ FX, ad refringens planum AB perpendiculari, ſumatur punctum aliquod F, quod lucidum fingatur; ac ducatur quælibet F*d* ſecans AB in *d*, eaque concipiatur eſſe mediocriter refrangibilis radius, cujus refractus ex Aere in Medium propoſitum eſto *d*M; qui retroductus ſecet FX in *f*. Porro ſiat F*d*. F*e* :: XD. XE (:: 39½. 40) &

De Mensura



& Fd. FC : : XD. XC (: : $39\frac{1}{2}$. 39) centroque F & intervallis Fe & Fc describantur circuli secantes AB in *e* & *c*; jungantur-que Fe, Fc, *fe*, *fc*, & producantur *fe* & *fc* indefinite versus N & L. Dico jam, si radius minimè refrangibilis incidat secundum lineam Fe, quòd iste refringetur in lineam eN; & si maximè refrangibilis incidat secundum Fc, quod iste refringetur secundum cL; & sic radii quorumlibet intermediorum generum, manantes à puncto F, & in puncta sibi correspondentia inter *c* & *e* incidentes, ita refringentur à Medio proposito, quasi manâssent omnes à puncto *f*; istis punctis inter C & E atque *c* & *e* habitis pro correspondentibus, quorum distantiæ ab X & F respectivè, sunt in eâdem ratione cum DX & *d*F. Cujus Theorematis demonstrationi præsternantur duo Lemmata sequentia.

LEMMA I.

Ad ejus Theorematis demonstrationem.

48. Duobus punctis, *c*, *d*, in lineâ quâpiam AB sumptis, & aliis duobus, *f* & F, in ejus perpendiculo FX, junctisque *fd*, Fd, *fc* & Fc, differentia quadratorum à duobus *fd* & Fd, concurrentibus ad *d*, æquabitur differentiæ quadratorum ab aliis duobus *fc* & Fc, concurrentibus ad *c*. Nam, cùm $fdq = fxq + xdq$, & $Fdq = Fxq + xdq$, erit differentia $fdq - Fdq = fxq - Fxq$. Et, ob eandem rationem, erit differentia $fcq - Fcq = fxq - Fxq$. Quare dictæ differentiæ, sic æquales eidem tertio, sunt æquales inter se. Q. E. D.

LEMMA II.

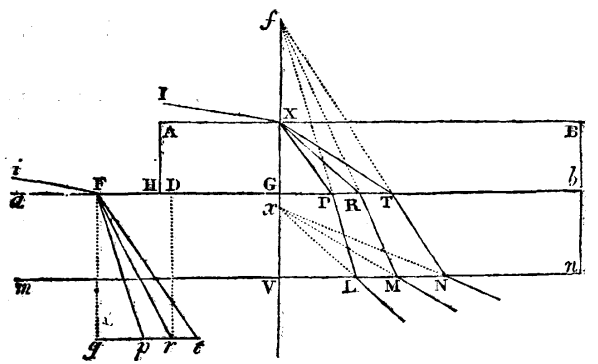
49. Si radius aliquis FG incidat in superficiem AB, & refringatur versus H, lineâ GH retroductâ, ut secet perpendiculum FX in *f*; dico, quòd *f*G. FG : : sinus incidentiæ ad sinum refractionis.

tionis. Et è contra, si *f*G. FG : : sin. incidentiæ ad sinum refractionis, erit *f*GH refractus ipsius FG. Etenim sumatur *f*K = FG, & demittatur KL perpendicularis ad FX; quo facto, cùm angulus GFX æquetur angulo incidentiæ, & angulus G*f*K angulo refractionis, erit GX sinus incidentiæ, & KL sinus refractionis, habito respectu ad circulum cujus semidiameter sit FG, vel *f*K; sed *f*G. *f*K : : GX. KL, hoc est *f*G. FG : : GX. KL. Q. E. D. Refractionum.

50. His præmissis, Theorema propositum sic demonstratur. Ducatur IX obliquissima linea, secundum quam radii omnium formarum ex Aere ad X incidere ponantur, & in Medium propositum refringi; mediocriter refrangibiles versus *r*, maximè refrangibiles versus *p*, & minimè refrangibiles versus *t*; eosque lineæ ad puncta D, C & E normaliter erectæ secent in punctis *r*, *p* ac *t*, ut explicabatur § 44. Jam, cùm istorum radiorum sinus incidentiæ & refractionis statuantur esse ut X*r* ad XD, X*p* ad XC, & X*t* ad XE respectivè, si præterea demonstratum fuerit, quòd *fd* ad F*d*, *fc* ad F*c*, & *fe* ad F*e* respectivè sint in eâdem ratione (hoc est, quod *fd*. F*d* : : X*r*. XD : : sinus incidentiæ ad sinum refractionis radiorum mediocriter refrangibilium, & *fc*. F*c* : : X*p*. XC : : sinus incidentiæ ad sinum refractionis radiorum maxime refrangibilium) constabit propositum ex Lemmate secundo. Et mediocriter refrangibiles quòd attinet, cùm *fd* supponatur refractus ipsius F*d*, erit (per Lemma secundum) *fd* ad F*d* ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis, hoc est, ut X*r* ad XD. Sed eadem proportionalitas in cæteris radiorum generibus jam demonstranda proponitur, puta quòd sit *fc*. F*c* : : X*p*. XC. Scilicet est F*c*. F*d* : : XC. XD, ut & F*d*. *fd* : : XD. X*r*, per hypothesin. Quare permutando & connectendo rationes æquales, est F*c*. XC : : F*d*. XD : : *fd*. X*r*; & quadrando, F*c*q. XC*q* : : F*d*q. XD*q* : : *fd*q. X*r*q; diminuendoque per terminos æqualis rationis, F*c*q. XC*q* : : *fd*q − F*d*q (sive per Lem. I. *fc*q − F*c*q) : X*r*q − XD*q*, sive C*p*q; & augendo per terminos æqualis rationis, F*c*q : XC*q* : : *fc*q. C*p*q + XC*q* (X*p*q); denique terminorum radices extrahendo, permutandoque, est *fc*. F*c* : : X*p*. XC. Quare *fc*, sive C*L*, est refractus ipsius F*c* per Lemma secundum. Q. E. D. Et eodem argumento patebit, quòd *e*N sit refractus radii F*e*. Deque aliis radiis, pro variis refrangibilitatis gradibus intermedia spatia variè occupantibus, idem intelligendum est. Demonstratio Theorematis.

Heterogeneorum refractiones, à superficiebus aeri neutrâ ex parte contiguis, Theorematè etiam determinantur.

51. De refractionibus ſuperficierum Aeri contiguarum mentem ſurandis hæc ſatis. Quòd ſi deſideretur id ipſum ad alias ſuperficies, aëri ex parte neutrâ contiguas, fieri; ſunto ABbH & *abnm*, duo quælibet Media, ſecundum planam ſuperficiem Hb contigua, &



Aere circundata; ſitque AB planum ipſi Hb parallelum, & in eo ſumatur punctum X, ad quod ducatur XV perpendicularis, & IX obliquiſſima linea ſecundum quam (ut jam antè) radii omnium formarum incidant, & pro gradu refrangibilitatis refringantur ad P, R, & T, aliaque intermedia loca. Horum radiorum, in propoſitam ſuperficiem *ab* ſic incidentium, refractiones jam quærantur; & cùm refractiones mediocriter refrangibilium ad quaſlibet ſuperficies fuerint antehac expoſitæ, radii XR ſit refractus RM, & is retroducatur, donec ſecet perpendiculum XV in *f*, & inſuper ducantur *f*P, *f*T, & producantur ad L & N. Dico, quòd PL erit refractus ipſius XP, ac TN ipſius XT, atque omnes aliarum formarum radii incidentes inter P ac T ita refringentur, ut poſtea divergant à puncto *f*. Concipiatur enim, quòd Medium *abnm* longius verſus *am* producitur quàm Medium ABbH, ità ut ejus plani aHb pars inter H & *a* ſit Aeri contigua; & ad aliquod in eo punctum F ducatur perpendicularis F*g*, nec non obliquiſſima linea *i*F, ſecundum quam radii omnium formarum incidant, & pro gradu refrangibilitatis refringantur ad *p*, *r*, *t*, locaque intermedia; perinde ut effectum erat ad alterius Medii ſuperficiem AB. Præterea ſumatur FD = GR; & ducatur D*r* ipſi F*g* parallela, ut ſecet radium

radium F*r* in *r*; unde *rg* demittatur ad F*g* normalis, alioſque radios F*p* & F*t* ſecans in *p* ac *t*. Jam, cùm ſit *gr* = GR, erit etiam *gp* = GP, & *gt* = GT ex oſtenſis § 44; & inſuper ex oſtenſis § 35. cùm radiorum ſecundum IX & *i*F, lineas parallelas, incidentium eadem ſit refractio in Medium *abnm*, ſive immediatè ingrediantur ex Aere, ſicut fit ad F, ſive priùs permeent aliud Medium ut ABbH parallelis planis terminatum: ſequitur, quòd radii, alterutro modo refracti in dictum Medium *abnm*, ſunt paralleli radiis homogeneis altero modo in idem Medium refractis; hoc eſt, quòd F*p* ad PL, F*r* ad RM, & F*t* ad TN ſunt paralleli. Quapropter, ſi refracti radii PL, RM ac TN retroducantur, donec ſinguli occurrunt perpendiculo GX, cum eo & baſibus GP, GR ac GT conſtituent triangula ſimilia triangulis *gp*F, *gr*F, & *gt*F, imo & ipſis æqualia; ſiquidem eorum baſes *gp* & GP, *gr* & GR, *gt* & GT ſibimet reſpectivè ſint æquales. Quare, cùm horum triangulorum vertices conveniant ad idem punctum F, illorum etiam vertices ad idem aliquod punctum *f* convenient; hoc eſt, radii PL, RM ac TN, ipſorum XP, XR & XT refracti, divergent omnes ab eodem puncto *f*. Q. E. D.

52. Oſtenſo hoc, ſequentia obveniunt notanda.

Theorema illud notis quibuſdam promovetur.

I. Quòd proportiones ſinuum incidentiæ & refractionis, ad ſuperficiem Hb factæ, ex his facilè determinantur. Nam pro radiis maximè refrangibilibus ſinus iſti ſunt ut *f*P ad XP, & pro minimè refrangibilibus ut *f*T ad XT, &c.

II. Hinc ſi proportiones ſinuum refractionis ex Aere in duo quælibet Media propoſita, paribus incidentiis, dentur; proportiones ſinuum refractionis ex altero Mediorum in alterum facile dabuntur, dividendo nempe ſinus poſterioris Medii per correſpondentes ſinus anterioris. Sic cùm refractio fit ex Aere in Vitrum, dicti ſinus ſunt ut 68, $68\frac{1}{2}$, 69; & cùm fit ex Aere in Aquam, ſunt ut 90, $90\frac{1}{2}$, 91. Ergo cùm fit ex Aquâ in Vitrum erunt ut $\frac{68}{90}$, $\frac{68\frac{1}{2}}{90\frac{1}{2}}$, $\frac{69}{91}$, hoc eſt ut 281, $281\frac{1}{2}$, 282 ferè.

III. Si tertium aliquod Medium, Aere denſius, poſtponatur Medio *abnm*, contingens illud in ſuperficie *mn*, quæ concipiatur plana ipſiſque AB & *ab* parallela, & ſi radii divergentes à puncto *f*, ſicut modò oſtenſum erat, in illud incidant ad puncta L, M & N; poſtquam

poſtquam in iiſdem refringuntur, divergent rurſus ab alio quodam puncto *x*, quod ſitum eſt in perpendiculo XG. Et ſic præterea in infinitum, quotcunque licet Media parallelis planis ab invicem diſcreta, ſeſe ordine ſequantur. Quòd ſi Aer immediatè ſuccedat Medio *abnm*, punctum iſtud *x*, à quo emergentes radii tendunt, ſitum erit ad v in ipſâ refringente ſuperficie; propterea quòd emergent paralleli ad ſummè obliquam lineam IX, ſecundum quam primùm incidebant ex Aere; ſi modò emergere dicantur, qui nunquam divaricabant à refringenti ſuperficie.

IV. Si radii ab aliquo puncto F, in Aere ſito, divergentes, tendant ad puncta *c*, *d*, *e*, eo more quem ad § 47. explicui, & per varia deinde plana refringentia ipſiſque AB parallela tranſeant; ſemper divergent omnes ab eodem aliquo puncto, quod ſitum eſt in perpendiculo planorum per punctum F tranſeunte, non ſecus quàm ſi incidiſſent in planum AB, advenientes in obliquiſſimâ lineâ IX; & longitudines radiorum, punctis refringentibus dictoque perpendiculo interceptorum, ſunt ut ſinus incidentiæ & refractionis ad ſingula plana, quæ reſpiciunt. Quarum aſſertionum demonſtrationes, cùm facile eruantur è prædictis, prætermitto, ne nimius in hâc re videar.

SECTIO TERTIA.

De Planorum Refractionibus.

POSITIS Refractionum legibus radiorum per diverſa Media trajectorum, affectiones aliæ jam tradendæ ſunt; & primò refractiones Planorum in gratiam doctrinæ de Coloribus, pòſt explicandæ, deſcribam; deinde Sphæricarum & aliarum Superficierum proprietates enarrabo; tum ut Colorum exinde ortorum phænomina detegantur, tum ut Inſtrumentorum, Opticis uſibus inſervientium, conſtructio rectiùs innoteſcat. Imprimis autem Plani Solitarii refractiones, deinde Planorum Refractiones iteratas conſiderabo.

De Plani Solitarii refractionibus.

Quod ad radios ejuſdem cujuſcunque generis attinet, paſſiones in Lectionibus Dris. Barrow (his fundamentis, quòd radii Lucis in ſimilari Medio directi ſunt; quòd eorum refractio fit in ſuper-

* Barrow Lect. Opt. L. III. Art. 3. † Ibid. Lect. III. Art. 4 & 6.

ficie

ficie ad Medii refringentis ſuperficiem perpendiculari; & quòd ſinus incidentiæ perpetuò ſunt proportionales ſinubus refractionum in aliud Medium ſimilare factarum) traduntur; & idcirco ſufficiet aliquas, ſub formâ Lemmaticarum Propoſitionum, ſine demonſtrationibus hîc recenſuiſſe.

PROP. I.

* *Radii cujuſvis refracti Incidens incidentis viciſſim ſit Refractus.*

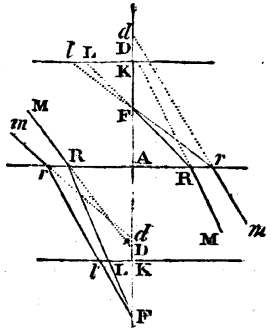
PROP. II.

† *Angulo incidentiæ æquali æqualis, & majori major convenit, tum angulus refractionis, tum refractus, & contrà.*

PROP. III.

‡ *Incidentium radiorum Refractos exhibere.*

Inſtantiam in radiis ad Medium denſius è rariori divergentibus accipe.



Sit F punctum radios FR, *Fr* alioſque innumeros verſus refringentem ſuperficiem, AR, ejaculans; ſitque FA radius perpendicularis, quem produc ad K, ut ſit AF ad AK, ſicut ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ; & ad K erige perpendiculum KL. Quo facto, radios quoſlibet incidentes FR, *Fr* retrorſum produc, donec præfatæ KL occurrant in L & *l*: & in angulo FAR inſcribe RD=RL, & *rd=rl*. Quibus verſus M & *m* productis, habebis refractos radios RM & *rm*, & eâdem ratione refractos quamplurimos confeſtim duces.

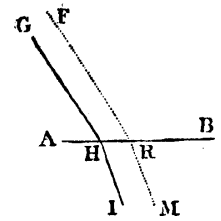
PROP. IV.

Radium datæ rectæ parallelum deſignare, cujus Refractus per datum punctum tranſibit.

Sit AB ſuperficies refringens, M punctum datum, & GH recta

‡ Ibid. L. IV. Art. 5.

De Planorum



cui radius incidens debet esse parallelus. Et imprimis radii secundum GH incidentis duc refractum HI per Prop. III. eique parallelum age MR; & FR, datæ GH parallelè ductus, erit radius incidens.

PROP. V.

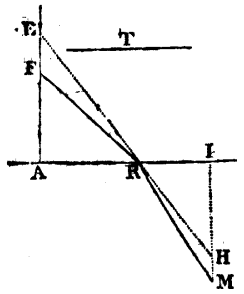
Radium è dato puncto prodeuntem designare, cujus refractus evadet rectæ positione datæ parallelus.

Absolvitur ad modum quartæ Propositionis, denominatione radiorum secundum Prop. I. permutatâ.

PROP. VI.

Radium è dato puncto, F, *progredientem designare, cujus refractus per aliud punctum datum,* M, *transibit.*

Per F & M ducantur refringenti perpendiculares; &, radio in Medium densius incidente, fiat AE ad AF, ut sinus incidentiæ ad radicem differentiæ quadratorum à sinubus incidentiæ & refractionis. Item T ad MI, ut sinus refractionis ad eandem radicem. Anguloque AIM, per E transiens, ipsamque T adæquans inscribatur recta RH, & connectantur FR, RM; nam ipsæ FR, RM erunt radii quæsiti.



Cùm radius incidit in Medium rarius, appellatione (secundum Prop. I.) commutatâ, absolvitur ut antè.

Cæterùm quo pacto data recta angulo recto interserenda sit, quæ per punctum datum transibit, in Lect. v. Dris. * *Barrow* per Hyperbolæ & Circuli intersectionem ostenditur.

PROP. VII.

† *Radiorum ad planam superficiem divergentium, parallelorum, vel convergentium Refracti, itidem divergent, paralleli erunt, vel convergent, & è contrà.*

* Idem elegantiùs perfecit Barrovius Lect. Geom. VI. Art. 2.

PROP.

Refractionibus.

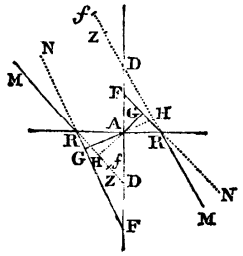
PROP. VIII.

Punctum, à quo refracti illi radii divergunt, vel ad quod convergunt, invenire.

Casus 1. Cum radiorum definita sit inclinatio, duc refractos per Prop. III, IV, V vel VI. & intersectionem habebis.

Casus 2. At cùm inclinatio existit quâvis datâ indefinitè minor, eodem recidit Problema, ac punctum in radio obliquo refracto quæres; quod radiorum alterutrinque jacentium intersectiones disterminat & intercedit, quodque pro radiationis centro, seu loco imaginis, respectu oculi per cujus pupillæ centrum radius ille transigitur, haberi debet. Ejus autem inventio ejusmodi est.

Sit DRM refractus cujusvis incidentis FRN, sitque F centrum radiationis incidentium, (sive divergentium sive convergentium) radiorum; & FA, refringenti normaliter insistens, secet RM in D. Jam ab A demitte ad hos radios perpendicula, AG & AH; fac esse RF. R*f* : : FG. DH; & ipsius RM, aliorumque refractorum, proximè RM utrinque jacentium, centrum radiationis erit *f* ‡.

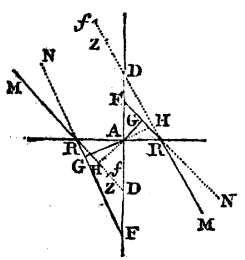


Scholium. Cæterùm punctum hoc *f* radiorum in plano FAR jacentium concursus solummodò existit; nam aliorum, extra planum FAR jacentium, refracti nec in puncto *f*, nec ullibi omnino radium R*f* secabunt; si eos solummodò excipias, quorum incidentes jacent in superficie conicâ, cujus axis est AF, vertex F, & semiangulus AFR; utpote qui omnes præfatum R*f* in puncto D secabunt, quod in axe FA sit positum. Et hujus itaque R*f* centra radiationis præcipuè sunt duo; alterum *f*, à refractis jacentium in plano FAR effectum; & alterum à refractis jacentium in conicis superficiebus axe FA, angulisque AFR, ADR descriptis. Ad reliquos autem radios quod attinet, aliter circa FR quaquaversum positos, eorum refracti maximè appropinquant radio R*f*, alicubi inter D & *f*; adeo ut respectu Oculi, per cujus pupillæ centrum radius RM transit, locus Imaginis per totum spatium *f*D diffundi de-

† Barrow Lect. Opt. L. IV. Art. 2, &c. ‡ Vid. Barrow Lect. Opt. L. V. Art. 15. &c.

De Planorum

beat: vel potius, cùm ſpatium *f*D ſit unici tantum puncti F imago, debemus unicum aliquod in eo punctum, quod omnis lucis ab eo verſus oculum pergentis meditullium occupet, inter puncta D & *f* in mediâ circiter diſtantiâ interjacens, pro ſenſibili imagine ſtatuere. Puncti verò illius accurata determinatio, cùm omnium radiorum ab F verſus oculi pupillam refractorum habenda ſit æſtimatio, Problema ſolutu difficillimum præbebit; niſi hypotheſi alicui ſaltem veriſimili, ſi non accuratè veræ, innitatur aſſertio. Quemadmodum, cùm radii æquè multi à termino D aliiſque vicinis punctis, ac à termino *f* aliiſque punctis ſimiliter ſibi vicinis, verſus Oculum videantur profluere; locus Imaginis ita debet in medio iſtorum terminorum ſtatui, ut angulus, quem radii duo à D & *f*, ad idem quodpiam pupillæ punctum convergentes, includant, à radio ab illo viſionis loco ad idem pupillæ punctum pergente, quàm proximè ſemper biſecetur. Quâ hypotheſi admiſſâ, nihil aliud agendum eſt, quàm ut fiat M*f*+MD. MD :: *f*D. ZD, & erit Z locus viſionis puncti F quæſitus, poſito nempe quòd M ſit locus oculi. Nam cùm ponatur M*f*+MD. MD :: *f*D. DZ, erit diviſim M*f*. MD :: *f*Z. DZ, & proinde ductis tribus lineis à *f*, D, & Z ad M, vel potius ad punctum quodpiam huic M indefinitè vicinum; angulus, quem externæ duæ continent, ab interjacente lineâ (per 3. 6. Elem.) quàm proximè ſemper biſecabitur.



54. His paucis circa radios homogeneos in gratiam ſequentium obiter notatis, ut eorum penitior cognitio habeatur, Lectiones, quas Vir Reverendus Dr. Barrow de iiſdem fuſius compoſuit, conſulendas eſſe hortor; deque heterogeneis ſive diſſimiliter refrangibilibus radiis pergo actutum differere.

PROP. IX.

E radiis diverſi generis, à puncto lucido fluentibus, ſoli poſſunt ad aliud commune punctum refringi, qui jacent in plano per utrumque punctum tranſeunte, et ad planum refringens perpendiculari.

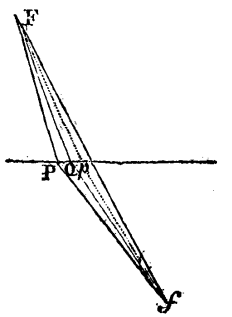
Utpote cùm radii cujuſque refractio ſemper fiat in plano ad Medii

Medii refringentis ſuperficiem perpendiculari, & ejuſmodi duo plana per utrumque punctum tranſire nequeant. REFRACTIONIBUS.

PROP. X.

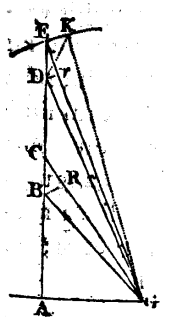
Si radiis diverſorum generum à dato puncto fluentibus, quorum refracti ad aliud punctum datum convergunt, illi magis à lineâ rectâ, punctis concurſuum ſive radiationum centris, interjacente divaricant, qui ſunt magis refrangibiles.

Sint FP*f*, FQ*f* radii diſſimiles, hinc & inde convenientes in F & *f*; & manifeſtum eſt, quòd non penitus coincident, quia ſic par eſſet refractio contra hypotheſin. Neque radius magis refrangibilis poteſt eſſe rectæ F*f* propior. Sic enim propter obliquitatem ex parte Medii denſioris majorem, major eſſet ejus refractio per Prop. II. & hypotheſin, hoc eſt, angulus F*p*f eſſet minor angulo FQ*f* contra 21. 1. Elem. Reſtat itaque, ut ſit magis refrangibilis FP*f*, qui à rectâ F*f* magis divaricat.



LEMMA I.

Quatuor lineis, GB, GC, GD, GE, *à dato puncto,* G, *ad datam lineam,* EB, *ita ductis, ut ſit* GB. GC :: GD. GE; *angulus* BGC, *quem minima,* GB, *cum alterutrâ intermediarum,* GC, *conſtituit, major eſt quàm angulus* DGE, *ab alterâ intermediâ,* GD, *& maximâ,* GE, *conſtitutus.*



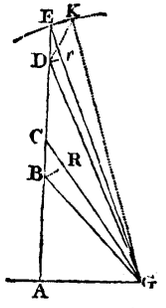
Nam centro G, radio GE, deſcribatur circulus EK, & radius GK ducatur, conſtituens angulum DGK æqualem angulo BGC, & puncta K, D jungantur; eruntque triangula GDK, GCB ſimilia, propter æquales angulos ad G, & latera circa illos proportionalia. (6. 6. Elem. & Hypoth.) Nempe GB. GC :: GD. (GE) GK. Quare angulus KDG = ang. CBG. Sed ang. EDG (16. 1. Elem.) > ang. CBG. Ergo linea

De Planorum

KD > ED (7. 3. Elem.) & ang. KGD > ang. DGE (25. 1. Elem.) hoc eſt, ang. CGB > ang. EGD. Q. E. D.

LEMMA II.

Poſitis iſtis angulis infinitè parvis, ac GA *perpendiculari ad lineam* EB *demiſſâ, erit ang.* EGD. *ang.* CGB : : BA. DA.



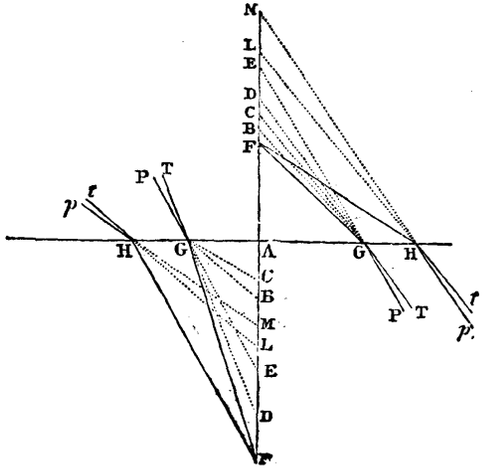
A punctis enim B & D ad lineas GC, GE demittantur normalia BR ac D*r*; & erunt anguli præfati ad ſe invicem ut eſt $\frac{Dr}{DG}$ ad $\frac{BR}{BG}$, ponendo nempe lineas iſtas, BR ac D*r*, æquipollentes eſſe arcubus infinitè parvis, quibus anguli iſti ſubtenduntur. Eſt autem BG.CG::DG.EG ex hypotheſi; & diviſim, BG. CR::DG. E*r*. Item propter ſimilia triangula BAG, CRB, eſt BA. AG :: CR. BR ; & pari ratione EA vel DA. AG : : E*r*. D*r*, ſive AG. DA : : D*r*. E*r*. Quamobrem addendo rationes æquales, eſt BA. AG+AG. DA (::BA.DA):: CR. BR+D*r*. E*r* (& permutatis terminis poſteriorum rationum)::CR E*r*+ D*r*. BR (& æquipollente ratione pro CR. E*r* ſubſtitutâ) : : BG. DG+ D*r*. BR (terminiſque ad invicem applicatis) : : $\frac{Dr}{DG}$. $\frac{BR}{BG}$. Eſt itaque BA. DA : : $\frac{Dr}{DG}$. $\frac{BR}{BG}$, h. e. ut ang. EGD ad ang. CGB. Q. E. D.

PROP. XI.

Heterogeneis radiis ſecundum eandem lineam incidentibus, quo obliquior eſt eorum incidentia, cæteris paribus, eo major erit differentia refractionis.

Sit FG linea ſecundum quam duo radii incidunt; quorum unus, maximè refrangibilis, pergat verſus P; & minimè refrangibilis verſus T: eritque angulus PGT differentia refractionis. Item eſto FH linea obliquior quàm FG; & ſecundum hanc alii duo ejuſmodi radii incidant; quorum maximè refrangibilis verſus *p*, & minimè refrangibilis verſus *t* refringitur: & ſimiliter erit angulus *pHt* eorum differentia refractionis. Dico jam, quòd ſit angulus *pHt* > PGT. Demittatur enim FA ad refringens planum linea normalis, quæ refractos radios retroactos ſecet in D & E, L & M; & ad hanc à puncto G ducatur duæ lineæ, GB, GC, ipſis HL, HM parallelæ.

lelæ. Jam, cùm tres lineæ GF, GD, GE (ex naturâ refractionis antè deſcriptâ § 27, 28 & ſeq.) ſint in ratione datâ; & alteræ tres HF, HL, HM in eâdem ratione, proportionales erunt HL. HM : : Refractionibus.



GD.GE. Sed eſt HL. HM:: GB. GC, propter triangula ſimilia LMH & BCG. Quare GB. GC : : GD. GE, adeoque ang. BGC > ang. DGE per Lemma I. hoc eſt; ang. LHM > ang. DGE; ſive ang. *pHt* > ang. PGT. Q. E. D.

55. Cæterùm, ut de mutuis angulorum PGT & *pHt* proportionibus habeatur plenior determinatio, dico præterea, quòd ſunt inter ſe quàm proximè ut lineæ AB & AD; ſegmenta nempe baſium triangulorum æquialtorum, quorum alterum, EGD, conſtituitur à radiis GP ac GT, cum perpendiculo AF concurrentibus; & alterum, CGB, ſit ſimile triangulo MHL, à radiis H*p* & H*t* ſimiliter conſtituto. Nam anguli EGD & CGB, ſi eſſent infinitè parvi, forent inter ſe ut AB & AD per Lem. II. At iſti ex hypotheſi ſunt æquales angulis PGT & *pHt*. Quare etiam illi PGT & *pHt*, modò eſſent infinite parvi, forent itidem ut AB ad AD; & pari ratione conſtat, quòd ſunt quàm proximè ut AC ad AE. Scilicet eorum ratio has duas rationes ſemper intercedit, & ideo veritatem adhuc propiùs aſſequemur adhibendo rationem intermediam. Nempe quòd eſt PGT ad *pHt* ut AB+AC ad AD+AE, vel ut $\sqrt{AB \times AC}$ ad $\sqrt{AD \times AE}$ proximè.

PROP.

De Planorum

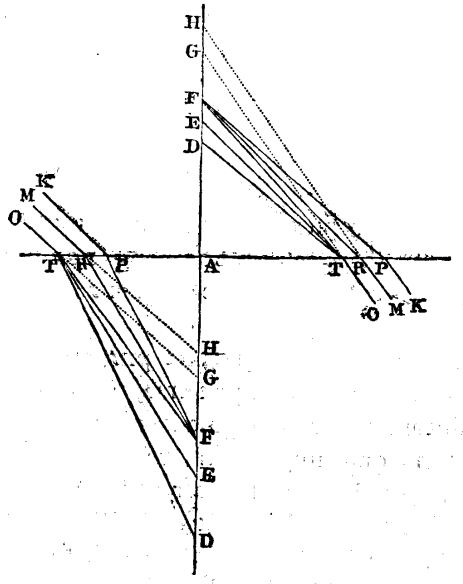
PROP. XII.

Radios diverſorum generum, à dato puncto profluos, deſignare, quorum refracti per aliud punctum datum tranſibunt.

Cùm punctorum alterutrum infinitè diſtet, ut radii ex eâ parte exiſtent paralleli; res per Prop. IV & V. abſolvitur, & per Prop. VI. cùm utrumque infinitè diſtat.

Scholium.

56. E re erit, ut oſtendam, quomodo ex datâ alicujus radii poſitione cæteri omnes expeditiùs determinentur.



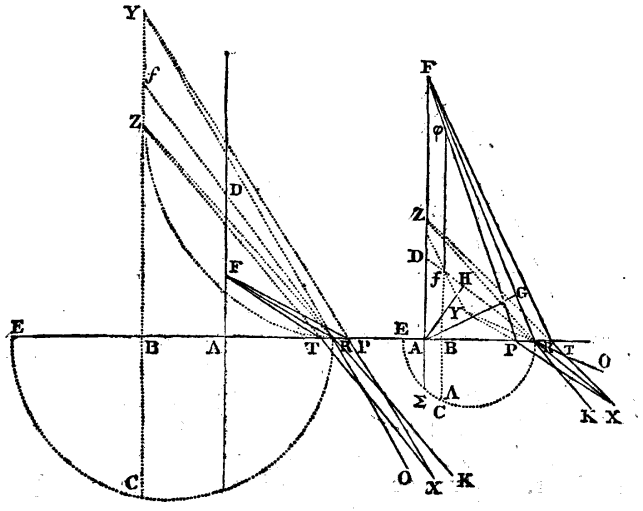
Caſ. 1. Sint FT, FR, FP radii ab F prodeuntes; quorum refracti, TO, RM, PK, paralleli ſunt futuri. Et radii FT eſto ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſicut I ad T; quemadmodum & radiorum FR & FP ſinus iſti, ſicut I ad R & P. Jam ut horum quovis, FT, poſitione dato, cæteri confeſtim deſignentur, demitte FA refringenti normalem; & in angulo FAT inſcribe TE, TD, hâc lege, ut ſit T. R. P :: TF. TE. TD; & ipſis TE, TD age parallelas, FR, FP. Dico factum. Scilicet refractis TO, RM cum perpendiculo DA occurrentibus in G & H, erit I. T :: TG. TF; & præterea, cùm ſit T. R :: TF. TE (hyp.) erit ex æquo I. R :: TG. TE. Sed eſt I. R :: RH. RF. Ergo TG. TE :: RH. RF; atque adeo, cùm TE & RF parallelæ ſunt (ex hyp.) erunt etiam TG & RH parallelæ. Q. E. O. Deque radii PK parallelifmo conſimile eſt ratiocinium.

Caſ.

Caſ. 2. Si parallelis incidentibus refracti ad datum punctum convergant, propoſitum nihil ſecus exequaris, ut è Prop. I. patet. REFRACTIONIBUS.

Caſ. 3. Denique ſi divergant incidentes, & refracti convergant, Problema ſolidum eſt; ſed ad planum quodammodo reducitur fingendo differentiam refrangibilitatis infinitè parvam eſſe: quæ cùm ſemper ſit admodum exigua, ſolutionem ex iſtâ hypotheſi haud gravatim exhibebo.

Pone FRX radium eſſe poſitione datum, & radios FPX, FTX (quorum datæ ſunt ſinuum incidentiæ & refractionis rationes)

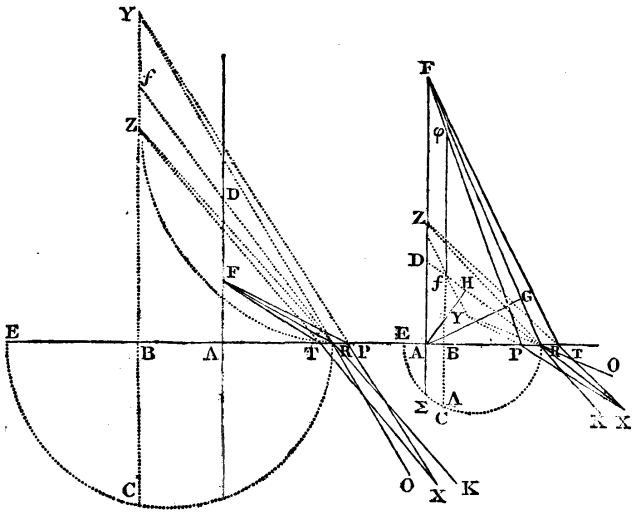


punctis F & X interſerendos eſſe. Jam alios etiam radios, æquè refrangibiles ac radios FP, FT, finge ſecundum lineam FR incidere, & refractos eorum RO, RK (ope Prop. tertiæ) deſcribe; centraque radiationum, Y & Z, per Prop. VIII. quære; ac junge YX ac ZX refringenti occurrentes in P ac T. Dico factum. Nempe FPX, FTX eſſe radios, quos oportuit deſignare. Nam, cùm ex hypotheſi, differentia refrangibilitatis, adeoque diſtantia punctorum T, R & P, ſit indefinitè parva, conſtat homogeneos radios, RO, PX, ſibi mutuò viciniſſimos eſſe, & inde ab eodem radiationis puncto Y divergere. Rectè ita determinavi radium PX per radii RO centrum radiationis tranſiturum eſſe, deque radio TX per eſt ratio.

57. Verùm

De Planorum

57. Verùm enimvero, cùm anguli PXT determinatio eò ſpectet, ut noſcatur, quanta ſit Objectorum, mediante refractione viſorum, propter inæquabiles abſimilium radiorum refractiones confuſio, perque quantum ſpatium colores inde emergentes extenduntur; quemadmodum pateat, concipiendo F eſſe punctum lucidum, quòd, oculo in X conſtituto, per totum angulare ſpatium PXT, quod radiis PX ac TX maximè miniméque omnium refrangibilibus com-



prehenditur, dilatum ac diffuſum appareat: de magnitudine ejus paucula adjiciam. Finge lineam curvam Yfz deſcriptam eſſe, in quâ radiationum centra radiorum omnigenorum jacent, ſecundum lineam FR incidentium, & ita refractorum in puncto R, ut per totum angulum KRO divaricent; & iſta Curva non malè aſſimilabitur Objecto lucido, cujus angulus viſibilis, ſive apparens magnitudo, ad oculum in X ſitum, ſit YXZ, ac diſtantia ab eodem oculo, ad meditullium ejus æſtimata, fx. Et hinc conſectatur.

I. Quòd (cùm rei viſibilis apparens magnitudo penè ſit reciprocè ut diſtantia ejus) ſtante puncto F, & puncto X in lineâ RX ubicunque ſumpto, angulus PXT, ſive YXZ pene erit reciprocè ut longitudo fx. Et hinc intervallo RX diminuto angulus PXT augetur,

tur, ejuſque quantitas in quâlibet puncti X diſtantiâ dabitur, ſi modò data fuerit unquam in quâpiam diſtantiâ. REFRACTIONIBUS.

II. Quinetiam angulo ORK cognito, cognoſcitur angulus quilibet PXT, ſumendo eum in ratione ad ORK, quam habet Rf ad Xf; quippe cùm YRZ (cui ORK æquatur) ſit Objecti Yfz, in diſtantiâ fR, apparens magnitudo.

III. Cùm itaque angulus ORK, pro quâlibet obliquitate radiorum juxta RF incidentium, ſuprà in Schol. ad Prop. XI. determinatus habeatur, & punctum f haud difficilè inveniatur; faciendo juxta Prop. VIII. ut ſit RF. Rf :: $\frac{AF_q}{RF}$. $\frac{AD_q}{RD}$, ſatis conſtat anguli PXT inventio.

IV. At ex abundanti ſubnoto prædictam Curvam Yfz, in quâ radiorum omnis generis, in puncto R refractorum, Radiationum centra locantur, eſſe Ciſſoidem vulgarem, ſive Diocleam, circulo accommodatam, cujus diameter RE ſit ad AR ut FRq ad AFq. Nam ſuper diametro RE deſcripto circulo iſto RCE, agatur quævis recta fBC normalis ad RE, Circuloque in c & Curvâ in f terminata. Et propter analoga latera ſimilium triangulorum RAD, RBf, erit ADq. AR × DR :: Bfq. BR × fR; & applicando poſteriorem rationem ad BR, fiet ADq. AR × DR :: $\frac{Bfq}{BR}$. fR. Rurſuſque ducendo conſequentes rationum in Rf, & applicando ad AR, orietur, ADq. DR × Rf :: $\frac{Bfq}{BR}$. $\frac{Rfq}{AR}$. Eſt autem $\frac{AF_q}{FR}$. $\frac{AD_q}{DR}$ :: RF. Rf ut priùs; & conſequentibus in DR & antecedentibus in FR ductis, oritur AFq. ADq :: FRq. DR × Rf; & viciſſim AFq. FRq :: ADq. DR × Rf. Quamobrem rationes eidem tertiæ congruentes connectendo, habebitur $\frac{Bfq}{BR}$. $\frac{Rfq}{AR}$ :: AFq. FRq; ducendoque antecedentes rationum in BR, & conſequentes in AR, prodibit Bfq. Rfq :: AFq × BR. FRq × AR; & inſuper applicando poſteriorem rationem ad AFq, fiet Bfq. Rfq :: BR. $\frac{FR_q \times AR}{AF_q}$. Sed cùm poſuerim RE. AR :: FRq. AFq, erit $\frac{FR_q \times AR}{AF_q}$ = RE; & proinde Bfq. Rfq :: BR. RE, ac diviſim Bfq. Rfq − Bfq (BRq) :: BR. BE. Atqui, ex naturâ circuli eſt BC media proportionalis inter BR & BE; adeoque eſt BR. BE :: BRq. BCq, & proinde Bfq. BRq :: BRq. BCq, ſive Bf. BR :: BR. BC: quod indicat Curvam eſſe Ciſſoidem, ſicut oſtendendum propoſui (d). 58. Re-

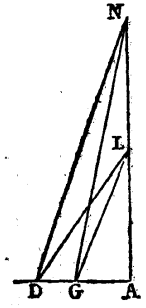
(d) Quod tamen magis geometricè ad hunc ferè modum oſtendatur. A puncto A in radios, incidentem

De Planorum

58. Refractionibus ad ſuperficiem, data duo Media diſcriminantem, tranſactis, ad explorandum quid, ex auctâ alterius Medii raritate vel denſitate, conſequitur, ſive ad diverſorum Mediorum effectus inter ſe conferendum, jam animum adjicio.

LEMMA III.

Si a duobus punctis, D, G, *in lineâ quâpiam* AD *ſitis, ad alia duo puncta,* L, N, *in ejus perpendiculo ſita, ducantur quatuor rectæ,* DN, DL, GN, GL, *ratio ductarum ad punctum remotius* N *magis accedit ad æqualitatem, quam ratio ductarum ad vicinius punctum* L; *ſive eſt* GN. DN>GL. DL.



Sit enim GN. DN::GL. R, & erit GNq. DNq::GLq. Rq:: GNq−GLq. DNq−Rq. Quare, cùm ſit DN>GN, ſive DNq>GNq, erit DNq − Rq>GNq − GLq. Verùm eſt GNq−GLq=DNq−DLq (§ 48.) & ideo DNq−Rq>DNq−DLq, hoc eſt DLq>Rq, ſive DL>R. Atque adeo, cùm ſupponatur GN. DN : : GL. R, erit GN. DN>GL. DL. Q. E. D.

PROP. XIII.

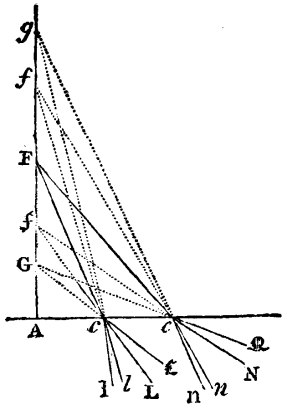
Poſito Radiorum diverſi generis communi ſinu Incidentiæ, quo magis diverſa eſt Mediorum denſitas, eo major erit inæqualitas rationis ſinuum Refractionis.

Sit Fc radius è minimè refrangibilibus utcunque in ſuperficiem Ac incidentibus; ſitque refractus ejus *cl*, qui retroactus ſecet perpendiculum FA in *f*. Dein capiatur A*e*, ut ſit F*e* ad F*c* in datâ quâdam

cidentem refractumque, RF, RD, demiſſis ad perpendiculum AG, AH, erit RF ad R*f* ut FG ad DH, (Prop. VIII. Caſ. 2.) Permutando RF : FG = R*f* : DH. Rectangula igitur RF × FG, R*f* × DH erunt inter ſe ſimilia, & eam inter ſe rationem habebunt quam quadrata à lateribus homologis. Id eſt RF × FG : R*f* × DH = RF² : R*f*².
Sed R*f* × DH : RD × DH = R*f*² : R*f* × RD.
Quare ex æquo RF × FG : RD × DH = RF² : R*f* × RD.
Id eſt, cùm rectangula RF × FG, RD × DH quadratis ex AF, AD ſingulatim ſunt æqualia, AF² : AD² = RF² : R*f* × RD.
Permutando AF² : FR² = AD² : R*f* × RD.
Sed AF² : FR² = AR : RE. (Id enim ponitur.)

Quare

quâdam ratione, qualem antea deſcripſimus (§ 46, 47 & 51.) hâc ſcilicet conditione, ut habito F*e* pro radio maximè refrangibili, refractus ejus ab eodem puncto *f* divergat. Facto hoc, ſi pro poſteriori Medio aliud utcunque denſum rarumve ſubſtituatur, ejuſmodi duo radii ſecundum eaſdem rectas F*e*, F*c* incidentes, ſemper debent ita refringi, ut ab eodem aliquo perpendiculi iſtius puncto ſimiliter divergant (§ 47 & 49) quemadmodum à *g* verſus *l* & *n*; poſito quòd hoc Medium poſterius ſit denſitatis ab interiori magis diverſæ, quàm alterum poſterius Medium, quod efficiebat divergentes à *f*. Oſtendendum eſt itaque, quòd major ſit inæqualitas rationis ſinuum refractionis in poſteriori quàm in priori caſu. Scilicet radii F*cl* ſinus incidentiæ eſt ad ſinum refractionis ut *fc* ad F*c* (§ 49.) hoc eſt, ut 1 ad $\frac{Fc}{fc}$. Et ſic radii F*en* ſinus iſti ſunt ut 1 ad $\frac{Fe}{fe}$. Quare ſinus refractionum eorundem radiorum ſunt inter ſe ut $\frac{Fc}{fc}$ ad $\frac{Fe}{fe}$. Et ſimili diſcurſu conſtabit, quòd radiorum *cl*, *en*, refractorum conſimiles refractionum ſinus ſunt ut $\frac{Fc}{gc}$ ad $\frac{Fe}{ge}$. Reſtat itaque probandum, quòd inter $\frac{Fc}{gc}$ & $\frac{Fe}{ge}$ major ſit diſproportio quam inter $\frac{Fc}{fc}$ & $\frac{Fe}{fe}$; hoc eſt (cùm ſit $\frac{Fe}{fe} > \frac{Fc}{gc}$ per Lem. III.) probandum reſtat, quòd ſit $\frac{Fe}{ge}.\frac{Fc}{gc} > \frac{Fe}{fe}.\frac{Fe}{fc}$. Scilicet eſt *ge*. *fe*<*gc*. *fc*, per Lem. III. & ſumendo reciproca rationum, erit $\frac{1}{ge}.\frac{1}{fe} > \frac{1}{gc}.\frac{1}{fc}$; ducendoque priorem rationem in F*e*, &



Quare AR : RE = AD² : R*f* × RD.
Invertendo RE : AR = R*f* × RD : AD².
Sed, propter rectas AD, *f*B inter ſe parallelas, erit AR : RE = AD : *f*B = AD² : *f*B × AD.
Cùm igitur ſit RE : AR = R*f* × RD : AD².
Et AR : RE = AD² : *f*B × AD.
Ex æquo erit RE : RE = R*f* × RD : *f*B × AD. Id eſt (propter rectangula R*f* × RD, *f*B × AD inter ſe ſimilia) RE : RE = R*f*² : *f*B². Dividendo EB : BR = BR² : *f*B².
Sed propter circulum EB : BR = CB² : BR².
Quare CB² : BR² = BR² : *f*B². Et CB : BR = BR : B*f*. Erit igitur punctum *f* ad Ciſſoidem à circulo ECB generatam. Q. E. D.

De Planorum

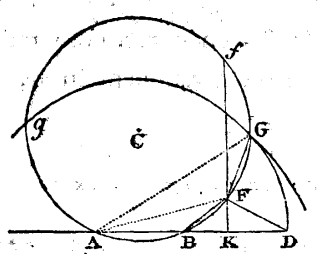
posteriorem in FC, orietur $\frac{Fe}{ge}\cdot\frac{Fe}{fe} > \frac{Fc}{gc}\cdot\frac{Fc}{fc}$, & viciſſim $\frac{Fe}{ge}\cdot\frac{Fe}{gc} > \frac{Fe}{fe}\cdot\frac{Fe}{fc}$. Q. E. D.

Scholium.

Demonſtratio perinde ſe habet in literis majuſculis (quibus refractiones deſignavi cùm poſterius Medium ſit anteriori rarius) ſi modò vice ſigni > ubique ſubintelligatur ſignum <, & > vice <. Notabis inſuper, quòd in hâc demonſtratione poſui denſitatem poſterioris tantùm Medii variatam eſſe; ſed eodem recidit, ſi anteriora Media ſucceſſivè varia adhiberi, poſteriori non mutato; ſive, quod tantundem eſt, ſi refractiones è poſteriori Medio in anterius viciſſim peragi concipias. Siquidem radiis in ſuperficiem alterutrinque incidentibus conſimiles ſunt ſinuum rationes. Cæterùm de exactâ horum ſinuum pro quibuſlibet propoſitis Mediis ratione inveſtigandâ differui antè, & Propoſitionem haud attigiſſem, ſi non exigiſſet Prop. XV. mox tradenda.

LEMMA IV.

Centro A, *diſtantiâ quâvis* AD, *deſcribatur circulus* DGg; *deinde centro quolibet* C, *diſtantiâ* AC, *deſcribatur alius circulus ſecans rectam* AD *in* B, & *circulum priùs deſcriptum in* G. *Tum arcus* BG *biſecetur in* F, & FK *demittatur ad* BD *perpendicularis. His ita conſtitutis, dico, quòd* FK *ſic perpendiculariter demiſſa dictam* BD *biſecabit.*



Junctis enim AF, AG, BF, FG & FD; in triangulis AFG & AFD anguli ad A ſunt æquales, propter æquales arcus, BF, FG, quibus ſubtenduntur; item latera circa iſtos angulos AD & AG ſunt æqualia, quippe radii ejuſdem circuli; & aliud latus AF habent commune. Quare etiam tertia latera, FG & FD, ſunt æqualia. Sed eſt BF æqualis FG, propter æqualitatem arcuum quos ſubtendunt; adeoque FB=FD, & triangulum FKB=triangulo FKD, & inde BK=KD.

Cor.

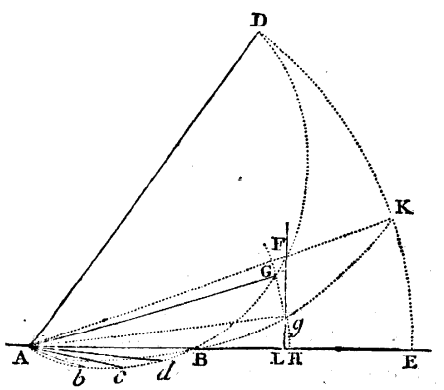
Refractionibus.

Cor. 1. Hinc recta KF, quæ biſecat BD, inſiſtens ei normaliter, biſecabit etiam arcus BG, circulorum omnium per data duo puncta A & B tranſeuntium, & alicubi in G ſecantium datum circulum DG centro A intervallo AD deſcriptum. Imo & biſecabit arcus BG*g* in altero interſectionis puncto *f*.

Cor. 2. Idem eveniet, cùm A & B coincidunt; hoc eſt, cùm circuli AFG tangunt rectam AD in puncto AB. Poteſt etiam B ſumi ad alteras partes ipſius A. In tranſcurſu etiam notetur, quòd anguli BFK, BGD, quos circulus ABF cum rectâ FK & arcu GD efficit, ſint æquales.

LEMMA V.

Lineis quatuor, A*b*, AB, AC, AG, *circulo alicui ab eodem circumferentiæ puncto ita inſcriptis, ut ſit* A*b*, AB :: AC. AG, *quarum omnium* A*b ſit minima: dico angulum* BAG *majorem eſſe angulo* B*b*C.



Deſcribatur enim alius circulus AB*g*, ſecans priorem in punctis A & B; cujus diameter ſit ad ejus ABG diametrum ſicut AB & A*b*, centris utriuſque ad eaſdem partes ipſius AB jacentibus. Dein centro A, diſtantiâ AG, deſcribe tertium circulum GH, ſecundo occurrentem in *g*; & iſtud *g* ex conſtructione jacebit alicubi inter G & H; atque adeo, ſi A*g* ducatur, erit angulus BAG major angulo BA*g*. Eſt autem angulus BA*g*= angulo *b*AC, propterea quòd AB & A*g* ſimiliter inſcriptæ ſunt circulo AB*g*, ac A*b* & AC ipſi A*bc*, habentes nempe eaſdem rationes & inter ſe, (A*b*. AC :: AB. AG vel A*g*) & ad diametros circulorum, quibus inſcribuntur. Cùm ergo ſit BAG > BA*g* = *b*AC, erit BAG > *b*AC. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc in eodem quovis radiorum genere, quo major eſt refractio,

De Planorum

refractio, eo major erit angulus refractus. In fig. pag. 295. ubi eſt FR. RD :: *Fr. rd*, erit angulus *Frd* > ang. FRD.

Cor. 2. Hinc etiam ſi ſit AG. AB > AC. *Ab*, multo magis erit angulus BAG > *bAc*. Hoc eſt in genere, quo majores ſunt ſubtenſæ, & ſimul, quo major eſt inæqualitas rationis earum, eo major erit differentia angulorum, quos ſubtendunt. Atque idem de ſinubus & eorum angulis, utpote ſubtenſarum & eorum angulorum dimidiis, intellige.

LEMMA VI.

Inſuper ſi arcus cd ipſi bc capiatur æqualis, & AD inſcribatur circulo ABD, *quæ ſit ad* AD *ſicut* AG *ad* AC; *cæteris ſtantibus, dico, quòd arcus* DG *erit arcu* GB *major.*

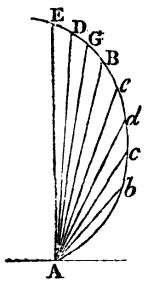
Nam centro A, radio AD deſcribe circulum DKE, circulo ABg occurrentem in K, & rectæ AB in E, & AK ducatur. Jam cùm AK, Ag & AB circulo ABgK ſimiliter inſcribantur, atque A*d*, A*c* & A*b* ipſi A*bc*, erit arcus *g*K = arcui B*g*; quare demiſſâ *g*L ad BE perpendiculari, & productâ donec ſecet arcum BD in F, iſta *g*L per Lem. 4. biſecabit tum rectam BE, tum arcum DB. At quoniam *g*F ex conſtructione jacet extra circulum *g*G, punctum F cadet inter G & D. Quare DG > DF, ſive > FB, & multo magis > GB. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc, ſi arcus *bd* non tantùm duabus ſed quotcunque partibus æqualibus conſtet, correſpondentes partes arcûs BD, à termino B ad terminum D, ſeſe gradatim ſuperabunt longitudine. Adeoque ſi arcus *bc* ad arcum *cd* habeat quamcunque rationem commenſurabilem, erit arcus GD. arc. BG > arc. *cd*, arc. *bc*; ſiquidem numeris æqualium partium, menſurantium arcus *bc* & *cd*, correſpondent conſimiles numeri partium inæqualium conſtituentium arcus BG ac GD; quarum illæ in GD ſunt omnes parte maximâ ipſius BG majores. Quinetiam, ſi *bc* ad *cd* habeat quamcunque rationem incommenſurabilem, erit itidem GD. BG > *cd. bc.* Nam rationum ſimilitudines, quæ quantitatibus commenſurabilibus conveniunt indefinitè, eo nomine conveniunt etiam incommenſurabilibus ſimiliter affectis, quemadmodum ex Euclideâ definitione ſimilium rationum oſtendi poteſt. Sed faciliùs deprehenditur

henditur imaginando quantitates, quas vocant incommenſurabiles, poſſe numerari per partes indefinitè parvas, & ſic ad naturam commenſurabilium, præſertim quoad rationum habitudines, quodammodo reduci. REFRACTIONIBUS.

Concipias itaque arcum *bc* in æquales & indefinitè multas partes dividi, & ejuſmodi tot ſumi, quæ minus quàm unâ parte (hoc eſt, indefinitè parum) differunt ab arcu *cd*, atque adeo ipſi pro more conſueto cenſeantur æquales; concipe etiam BD in partes æquales, ut antè definivi, correſpondentibus partibus ipſius *bd* dividi; & propter tot inæquales partes, majores quidem in GD & minores in BG, quot ſunt æquales in *cd* & *bc*; erit GD. BG > *cd. bc.*

Cor. 2. Hinc præterea componendo ſequitur, eſſe BD.BG > *bd. bc*, nec non GD. BD > *cd. bd.*

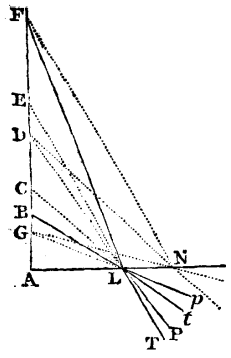


Cor. 3. Conſectatur denique, quod ductis utcunque partibus ſubtenſis A*b*, A*c*, A*d*, A*e*, & aliis quatuor AB, AG, AD, AE, quarum ſingulæ ad priorum ſingulas eandem rationem obſervant (nempe AB. A*b* :: AG. A*c* :: AD. A*d* :: AE. A*e*) ſi AE ſit omnium maxima, & A*b* minima, erit arcus ED. arc. GB > arc. *ed.* arc. *cb*. Nam per Corol. 1. hujus, eſt ED. DG > *ed. dc*, & DG. GB > *dc. cb*, & multo magis ED. GB > *ed. cb*. Haud ſecus patet eſſe arcum EG. arc. DB > arc. *ec.* arc. *db*; ſcilicet ex Corol. 2. hujus eſt EG. DG > *ec. dc*, ac DG. DB > *dc. db*, & multo magis EG. DB > *ec. db*. Denique, quæ de ſubtenſis & earum arcubus dicta ſunt, poſſunt etiam de ſinubus & eorum arcubus aut angulis intelligi.

PROP. XIV.

Heterogeneis radiis è denſiori Medio in rarius, ſecundum eandem datam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo rarius ſit Medium, in quod radii refringuntur, eo major erit differentia refractionis.

Sit FL linea, ſecundum quam duo radii incidunt in ſuperficiem AL, quorum maximè refrangibilis refringatur ad P, & minimè refrangibilis ad T. Dico, quòd, ſi Medium rarius foret adhuc magis



magis rarum, ut refringeret maximè refrangibilem radium ad *p*, & minimè refrangilem ad *t*, tunc angulus *pLt* foret major angulo PLT. Demittatur enim FA ad refringentem ſuperficiem normalis, quæ ſecet refractos radios retrorſum ductos in G, C, D & E. Deinde in refringente ſuperficie quæratur tale punctum N, ut ſit FN. DN : : FL. EL; ac DN productus erit refractus radii minimè refrangibilis, incidentis ab F ad N (§ 49.) Jam, cùm talis ſupponatur poſitio FL & FN, ut radii maximè refrangibilis ſecundum FL & minimè refrangibilis ſecundum FN incidentis, refracti, DL ac DN, divergant à puncto D, quod ſitum eſt in perpendiculo FA : eâ de cauſâ, licet raritas Medii, in quod refractio peragitur, foret alia quàm ſupponitur, tamen ejuſmodi radiorum, ſecundum eaſdem lineas FN & FL incidentium, refracti ſemper divergerent ab aliquo puncto, quod in eâdem FA ſit poſitum, quemadmodum in præcedentibus oſtenſum eſt (§ 51). Sic cùm raritas dicti Medii talis eſſe ſupponitur, ut maximè refrangibilis radius, ſecundum FL incidens, refringatur à puncto quopiam G ; tunc minimè refrangibilis, ſecundum FN incidens, refringetur ab eodem G. Sed cùm maximè refrangibilis radius ſupponebatur à puncto G refringi, tunc etiam minimè refrangibilis, ſecundum eandem lineam FL incidens, ſupponebatur refringi à puncto C. Quare eſt GN. FN : : CL. FL (§ 27 & 49.) & præterea, cùm antea poſuerim eſſe FN. DN : : FL. EL, ex æquo erit GN. DN : : CL. EL. Sed per Lemma 3. eſt GN. DN > GL. DL; adeoque CL. EL > GL DL. Quare ſi linea quædam BL ita ducatur, ut ſit CL. EL : : BL. DL, erit BL > GL propter majorem rationem, quam habet ad DL: & inſuper erit CL major BL, eo quòd ſit EL > DL; & proinde punctum B cadet inter G & C, eritque angulus GLC > ang. BLC. Cùm verò ſit CL. EL : : BL. DL, aut viciſſim BL. CL : : DL. EL, erit angulus BLC major angulo DLE (Lem. I.) & multo magis ang. GLC > DLE. Q. E. D.

PROP.

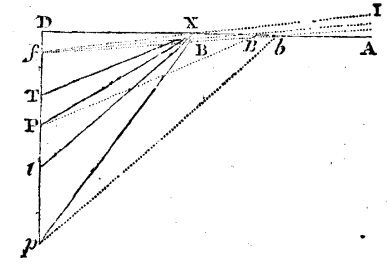
PROP. XV.

Heterogeneis radiis è Medio denſiori in rarius, ſecundum eandem aatam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo denſius eſt Medium, è quo radii incidunt, eo major erit differentia refractionis.

Scilicet (propter majores refractiones) eo majores erunt ſinus refractionum reſpectu dati circuli, ad quem referuntur ; & ſimul eo major erit inæqualitas rationis iſtorum ſinuum per Prop. XIII. adeoque eo major erit differentia angulorum, quos ſubtendunt per Corol. 2. ad Lem. V. hoc eſt, eo major differentia refractionis. Q. E. D.

PROP. XVI.

Heterogeneis radiis è Medio rariori in denſius, ſecundum eandem datam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo rarius eſt Medium, è quo radii incidunt, eo major erit differentia refractionis.

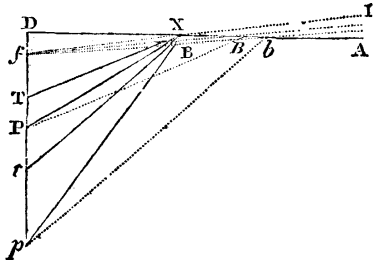


Sit AD ſuperficies, in quam duo radii ſecundum eandem lineam datam, IX, incidunt; quorum alter, maximè refrangibilis, refrangatur ad P ; & alter, minimè refrangibilis, ad T. Dico, quòd, ſi Medium, ex quo radii incidunt, foret adhuc rarius, ut dictos radios adhuc magis refringeret, puta maximè refrangibilem verſus *p*, & minime refrangibilem verſus *t*, tum *pXt* major angulus evaderet, quam PXT. Id quod gradatim ſic demonſtratio.

Caſ. 1. Ponamus primò, quòd recta IX, ſecundum quam radii incidunt, ſit ad refringentem ſuperficiem obliquiſſima ; ac ducatur quælibet recta, PD, eidem ſuperficiei normaliter inſiſtens in D, & ſecans refractos radios in punctis T, P, *t*, *p*, & IX producatur donec iſtam PD ſecet in *f*; tum in lineâ AD quæratur punctum

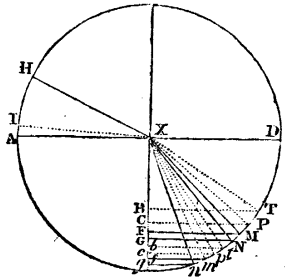
De Planorum

quoddam B hâc lege; ut ductis B*f*, BP, fiat X*f*. XT :: B*f*. BP. Liquet ergo, quòd, si minimè refrangibilis radius incidat in B versus *f* tendens, is debet versus P refringi; quippe cùm ex hypothesi sit BP. B*f* :: XT. X*f*, hoc est, sinus incidentiæ ejus & refractionis, sicut sinus incidentiæ & refractionis alterius minimè refrangibilis radii IXT. Quamobrem, si supponamus hosce radios retrocedere, alterum nempe è minimè refrangibilibus à T ad X, & alterum à P ad B, & maximè refrangibilem à P ad X, eorum omnium refracti tendunt à puncto *f*; siquidem notum est Theorema, quòd radii, secundum refractum ejus retrò incidentis, incidens viciſſim fit refractus. Jam, cùm radii difformes PB, PX, ab eodem puncto P manantes, refringantur ab eodem *f*, quòd situm est in perpendiculo PD; proportione inter PX & PB semel cognitâ, si ab alio quovis ejusdem perpendiculi puncto ad refringentem superficiem duæ ducantur lineæ eandem rationem habentes, hoc est, si una designans maximè refrangibilem radium sit ad alteram, quæ designat minimè refrangibilem radium, ut PX ad PB: tunc istorum refracti (ex antè demonstratis § 47) divergent ab aliquo etiam puncto, quod situm est in eodem perpendiculo PD, utcunque Medium ex parte radii IX supponatur rarum; dummodo Mediorum alterum, ex parte radii PX, eandem densitatem retineat. Quemadmodum, si maximè refrangibilis radius incidat secundum *px*, & refringatur à *f*, Medio scilicet versus IX jam posito rariori quàm antè; tum rectâ *pb* sic ductâ, ut sit PX. BP :: *px*. *pb*, radius etiam minimè refrangibilis *pb* refringeretur ab eodem *f*. Unde sequitur, esse *pb* ad *fb* sicut sinus incidentiæ radiorum minimè refrangibilium ad sinum refractionis, § 49. Ast in ratione istorum sinuum est etiam *tx* ad *fx*; eo quòd inflexa IX*t* designet radium æqualiter refrangibilem, cujus pars IX producta transit per idem *f*. Quare est *pb*. *fb* :: *tx*. *fx*. Cùm verò radius IX supponatur esse ad refringentem superficiem summè obliquus, sive in angulo infinitè parvo inclinatus, adeo ut recta D*f* pro infinitè parvâ, seu nullâ, haberi debeat; sequitur



sequitur esse DX=X*f*, DB=B*f*, ac D*b*=*bf*: quos valores pro X*f*, B*f* & *bf* substituendo in suprà recensitas proportiones BP. B*f* :: TX. X*f*, & *pb*. *fb* :: *tx*. *fx*, emergent BP. BD :: XT. XD, & *pb*. D*b* :: *tx*. DX. Ex quibus pateat rectas BP ad XT, & *bp* ad X*t* parallelas esse, angulosque BPX ad PXT, & *bp*X ad *pxt* æquales. Sed ex hypothesi est PX. BP :: *px*. *pb*, & proinde ang. *bp*X > ang. BPX per Corol. 1. Lem. V. hoc est, ang. *pxt* > ang. PXT. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

Cas. 2. Incidentibus verò radiis, angulum definitè magnum cum refringente superficie constituentibus, Propositum sic patebit.



Sit HX recta, secundum quam incidunt; & cùm è Medio minùs raro adveniunt, fit XM minimè refractus, & XN maximè refractus. Cùm verò adveniunt è magis raro, fit X*m* minimè refractus & X*n* maximè refractus. Adhibeantur etiam obliquissimi incidentes radii IX cum eorum refractis XT, XP, X*t* & X*p*, quales jam descripsimus. Ita scilicet, ut, cùm tanta sit anterioris Medii raritas, ut radios HX incurvari versus M & N faciat, tunc etiam consimiles radios IX incurvet versus T & P. Cùm verò tanto major sit ejus raritas, ut illos cogat versus *m* & *n*, tunc hosce simul cogat versus *t* & *p*. Sit insuper APD circulus centro X & intervallo quolibet AX descriptus, qui secet hosce refractos radios in T, P, M, N, *t*, *p*, *m*, *n*; à quibus ad perpendiculum BX demittantur sinus refractionum TB, PC, MF, NG, *tb*, *pc*, *mf*, *ng*; & ex lege refractionum patebit esse TB. PC :: MF. NG, & *tb*. *pc* :: *mf*. *ng*; & insuper ex hypothesi & constructione patebit, esse TB sinuum istorum maximum & *ng* minimum. Adeoque per Corol. 3. Lem. VI. est ang. TXP. ang. MXN > ang. *t*X*p*. ang. *m*X*n*; & permutando est ang. TXP. ang. *t*X*p* > ang. MXN. ang. *m*X*n*. Verùm ex ostensis in primo casu, est ang. TXP < ang. *t*X*p*. Quare & multo magis erit ang. MXN < ang. *m*X*n*. Q. E. D.

De Planorum

PROP. XVII.

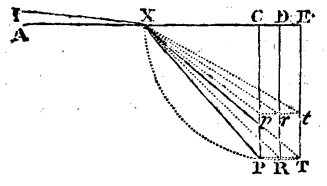
Heterogeneis radiis è Medio rariori in denſius, ſecundum eandem lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo denſius ſit Medium, in quod radii incidunt, eo major erit differentia refractionum ad certum uſque terminum, & poſt eo minor perpetuò.

Nam ſi Medium poſterius denſitate ſuâ valde parùm ſuperat anterius, ita ut refractiones indefinitè parvas efficiat, differentia refractionum erit etiam indefinitè parva; & proinde minor quàm foret, ſi Medium poſterius ſupponeretur denſius, ut refractiones evaderent majores. Quare auctâ Medii poſterioris denſitate, augebitur dicta refractionum differentia. Quòd ſi denſitas ejus in infinitum augeatur, refractiones etiam, quantum poterunt, augebuntur; hoc eſt, uſque dum omnes refracti radii perpendiculariter emergant, angulis refractionum & eorum differentiis tunc prorſus evaneſcentibus. Quare differentia refractionum rurſus diminuta eſt, donec in nihilum evanuit.

Scholium.

Etſi limitis ejus determinatio, ubi differentia refractionis evadit maxima, plus tædii & laboris adminiſtrare poſſit, quàm utilitatis; cùm tamen alicujus forte momenti cenſeatur denſitatem Medii cognoſcere, quod, radiis in ſe refractis, Colores maximè conſpicuos efficiat, non pigebit hunc inſuper deſignare, idque primò cum incidentia ſit obliquiſſima.

Caſ. 1. Eſto IX communis radiorum in ſuperficiem AX, quæcunque Media dirimentem, obliquiſſimè incidentium via; & eorum refracti, ut antè, ſunto x*p* & x*t*; & agatur recta quævis, *pt*, præfatæ ſuperficiei parallela, quæ radiis iſtis occurrat in *p* & *t*; à quibus ad AX demiſſis perpendicularibus, *pc*, *te*, biſecetur CE in D; & centro D, diſtantiâ DX, circulus deſcribatur, ſecans c*p* in P, & E*t* in T; junganturque XP & XT. Dico, quòd, cùm ea ſit poſterioris Medii denſitas, ut radiorum ſecundum IX incidentium maximè refrangibiles ad P, & minimè



minimè refrangibiles ad T refringat, tunc angulus PXT quàm maximus evadet. Etenim, utcunque Medium poſterius ponatur denſum, refracti radii ita lineas CP & CT in punctis *p* ac *t* ſecabunt, ut recta *pt* ipſi AX parallela ſit. Quare, ſi ducatur linea D*r*, quæ lineas omnes *pt* biſecet, centrum cujuſcunque Circuli per *p* ac *t* tranſeuntis, ſemper jacebit in eâdem D*r*. At angulus *p*x*t* eſt angulus in ſegmento circuli per puncta *p*, *t* & x tranſeuntis; qui ideo erit Maximus, cum ejuſmodi circulus exiſtit Mimimus; propterea quòd ratio ſubtenſæ *pt* ad circuli dimenſiones tunc evadit maxima. Verùm iſte circulus ſit omnium minimus, cùm centrum ejus cadit in D; ſiquidem pro ſemidiametro tunc habet XD minimam refractarum *, quæ ab X ad RD duci poſſunt. Eſt ergo angulus *p*x*t* tunc maximus, cùm centrum circuli tranſeuntis per puncta *p*, *t* & X cadit in D; adeoque, cum circulus XPT & angulus PXT ejuſmodi ſunt, liquet Propoſitum. REFRACTIONIBUS.

Hinc obiter pateat hunc angulum PXT tunc etiam Maximum evadere, cùm talis eſt poſterioris Medii denſitas, ut angulus refractionis mediocriter refrangibilium radiorum obliquiſſimè ſecundum IX incidentium, ſit ſemirectus; & eo minorem perpetim fieri, quo iſte refractionis angulus à ſemirecto (exceſſu vel defectu) magis deviat. Quemadmodum, ſi refractiones ex Aere in Aquam, in Vitrum & in Cryſtallum peractæ conferantur, è calculo patebit, quòd, cùm angulus incidentiæ ſit 90$^{gr.}$ proximè tunc angulus refractionis in aquam erit major ſemirecto, inque vitrum erit minor. Quamobrem Aqua minùs denſa eſt, & Vitrum magis denſum, quàm ut efficiant angulum PXT maximum. Et proinde, cùm Cryſtallum ſit adhuc denſius, efficiet iſtum PXT minorem, quàm Vitrum efficeret. Et ſic Vitrum, etſi minus refringat, in iſthoc tamen caſu heterogeneos radios in ſe refractos magis ab invicem diſſipabit quàm Cryſtallum; eoque pacto Colores in oppoſitam ejus ſuperficiem projicit magis diſtinctos. Sed hæc expertu ſunt difficillima, quòd Vitrum & Cryſtallum denſitate parùm differant, nec poſſint haberi ſatis craſſa; & ſi poſſent, tunc propter maximam craſſitiem haud forent ſatis perſpicua.

Caſ. 2. Quòd ſi linea, ſecundum quam incidunt radii, non ſit maximè obliqua, Problema emergit Solidum. Sed lubet modum oſtendere, quo conditionibus ejus nonnihil mutatis, ad Planum

* Lege rectarum.

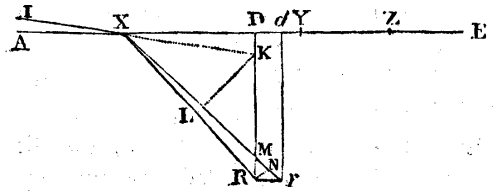
reduci

De Planorum

reduci poterit. Sciendum eſt itaque, quòd, cùm inter extremos ſex maximè difformes radios, innumeri ſint intermedii, qui gradibus continuè ſucceſſivis & infinitè parvis, alii magis aliis refringuntur, differentia radiorum extremorum conflata erit ex conſimilibus intermediorum differentiis, numero & parvitate infinitis. Jam cognitis proprietatibus iſtarum infinitè parvarum differentiarum, poſſumus exinde de omnibus ſimul aggregatis, ſive de differentiis finitè parvis, quales intercedunt extremorum refractionibus, judicium ferre; præſertim cùm iſtæ differentiæ ſint admodum exiguæ. Sic cognito quòd infinitè parvæ differentiæ augentur, diminuuntur, vel ſimul maximæ evadunt aut minimæ, concludendum erit, quòd omnium ſumma perinde augetur, diminuitur, vel maxima ſit aut minima. Quòd ſi non ſint omnes ſimul maximæ vel minimæ, tamen ſumma pro maximâ vel minimâ haberi poteſt, cùm id accidit intermediæ parti. Sic omnium colorum latitudo tunc maxima cenſeri poſſit, cùm id accidit Viriditati. Jam licet Problema propoſitum, cùm de differentiis finitè parvis agitur, exiſtat Solidum, ſi tamen inſtituatur de differentiis infinitè parvis ad Planum reduci poteſt. Verùm huic ſolvendo nolo obnixè incumbere, ſed breviter tantùm oſtendam, quo pacto calculus in hoc & ejuſmodi aliis ſit ineundus, ut ad æquationem perveniatur, ex quâ maximus angulorum infinitè parvorum poſſit elici. Et inſuper ex eodem fundamento determinabo proportiones differentiarum refractionis reſpectu diverſorum Mediorum, quas in præcedentibus quatuor Propoſitionibus generaliter tantùm deſcripſi.

59. Primo itaque inveſtiganda eſt Regula vel æquatio, quâ, ex uno utcunque refracto radio dato, refractus alter, cum eo conſtituens angulum infinitè parvum, cognoſci poterit.

Radiis è Medio datâ denſitate in Medium cujuſlibet denſitatis ſecundum obliquiſſimam lineam IX, ut priùs, incidentibus, ſint XR & X*r* Refracti duo; quorum alter XR ſit altero X*r* paulo magis refrangibilis, differentiâ tamen infinitè parvâ; & agatur lineola quævis R*r*, his in R & *r* occurrens



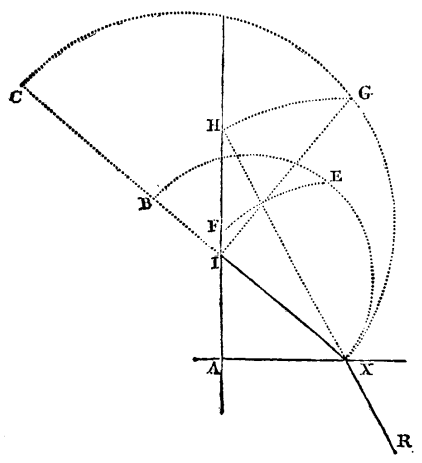
currens & refringenti ſuperficiei parallela. Ad quam ſuperficiem normales etiam RD, *rd* demittantur; quas datam finitamque diſtantiam ab X, ab invicem verò infinitè parvam habere fingito. Sed lineolam R*r*, cum radiis per R & *r* tranſeuntibus, plus aut minus ab XD vergere (quemadmodum in præcedentibus) concipito, pro variâ poſterioris Medii aſſumendâ denſitate. Jam ſi recta DR ſecet radios X*r* in M, & IX in K, cùm infinitè parvum triangulum RM*r* ſit ſimile triangulo DMX, à quo triangulum KRX non niſi infinitè parvis differentiis, RXM & DXK, diſcrepat, quæ diſſimilitudinem non inferunt; triangula etiam RM*r* & KRX pro ſimilibus haberi debent. Et proinde demiſſis perpendicularibus KL & RN, erit KX. LR :: R*r*. MN. Adeoque, cùm ſit $LR=\frac{XR_q-XK_q}{XR}$ (nam eſt XR. KR $(=\sqrt{XRq-XKq})$:: KR. RL) erit etiam $MN=\frac{XR_q-XK_q}{XR\times XK}$ in R*r*, quæ differentia eſt inter XN, ſive XR & XM. Et inde erit $XM=XR-\frac{XR_q-XK_q}{XR\times XK}$ in R*r*. Inventa eſt itaque relatio inter XK, XM & XR, cùm angulus IXA ſit infinitè parvus. Quinetiam, utcunque IX obliqua ponatur, illæ XK, XM & XR eandem relationem obſervabunt, ſiquidem reciprocè ſunt ut ſinus Incidentiæ & Refractionis; & proinde inventa eſt etiam inter eas relatio pro quâvis obliquitate incidentis IX. Atque ita cognitis, aut utcunque ad arbitrium aſſumptis, XK & XR, inde XM ſimul cognoſcitur. Quod primò determinandum propoſui.

Quamobrem ſit IX linea datum quemvis angulum AXI cum refringente ſuperficie conſtituens; cæteriſque ſtantibus, erit $MN=\frac{XR_q-XK_q}{XR\times XK}$ in R*r*. Inſuper eſt RD $(=\sqrt{XRq-XDq})$. XD :: MN. NR, atque adeo eſt $NR=\frac{XR_q-XK_q \text{ in } R\mathit{r}\times XD}{XR\times XK\times\sqrt{XRq-XDq}}$. Quòd ſi NR dividatur per XR, prodibit ſinus anguli RXN reſpectu circuli, cujus ſemidiameter ſit unitas. Quare, cùm angulus iſte & ſinus ejus ſunt maximi, ad maximum angulum determinandum quærenda erit maxima quantitas $\frac{NR}{XR}$, hoc eſt maximum $\frac{XR_q-XK_q \text{ in } R\mathit{r}\times XD}{XR_q\times XK\sqrt{XRq-XDq}}$. Sive (factâ per datum $\frac{R\mathit{r}\times XD}{XK}$ diviſione) quærendum erit Maximum $\frac{XR_q-XK_q}{XR_q\times\sqrt{XRq-XDq}}$: id quod per Methodos de Maximis & Minimis ſatis.

De Planorum

tis notas fieri poteſt, & prodibit $XRqq = 3XKq \times XRq - 2XKq \times XDq$; cujus æquationis conſtructio eſt ejuſmodi (e).

A puncto quolibet incidentis radii IX demitte perpendiculum IA, & in eo ſume AF = AX; & XI producto ad B, ut ſit $IB = \frac{1}{2}IX$; ſuper BX deſcribe ſemicirculum BEX; cui inſcribe XE = XF: dein XB produc ad C, ut ſit BC = BE. Super CX deſcribe ſemicirculum CGX; quem in G ſecet perpendiculum IG ſuper diametro ejus ad I erectum. Denique centro X, & intervallo GX, deſcribatur arcus GH, ſecans AI productum in H. Ducatur HX, & producatur verſus R; eritque RX ipſius IX refractus, cùm tanta ſit poſterioris Medii denſitas, ut differentia refractionis RXM fiat omnium Maxima. Quo invento, denſitas poſterioris Medii, talem refractionem efficientis, facilè dabitur. Concipe ergo radios XR & X*r* fig. p. 318. eſſe mediocriter refrangibiles, diverſo tamen gradu; & poſterius Medium, ſic inventum, non modo inter

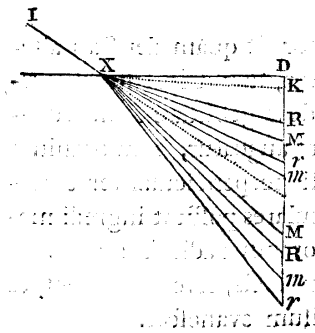


(e) Recta XD (fig. p. 318.) pro arbitrio ſumenda ſignificetur literâ *a*. Datâ XD, propter angulum DXK datum, id enim ponitur, dabitur XK; quam litera *b* ſignificet. Sit *z* recta quædam, quæ eâ lege fluat, ut duarum, datæ XD & indefinitæ XR, ſit ſemper proportione tertia. Erit igitur $XR^2 = az$. Quare $\frac{XR^2 - XK^2}{XR^2 \times \sqrt{XR^2 - XD^2}} = \frac{az - b^2}{az\sqrt{az - a^2}}$. Cujus fluxio his notis ſignificanda erit, $\frac{\frac{1}{2}b^2 z\dot{z} - ab^2\dot{z} - \frac{1}{2}az^2\dot{z}}{z^2 \times \overline{az - a^2}^{\frac{1}{2}}}$. Hâc autem fluxione nihilo æquatâ, erit etiam $\frac{1}{2}b^2 z - ab^2 - \frac{1}{2}az^2 = 0$. Quare $\frac{3b^2}{a}z - z^2 = 2b^2$ (ſive $z^2 = \frac{3b^2}{a}a - 2b^2$; quæ pro literis *z*, *a* & *b*, illis $\frac{XR^2}{XD}$, XD, XK reſtitutis, in ipſam æquationem Newtonianam migraverit.) Hujus autem æquationis conſtructio leviſſimo negotio abſolvenda eſt. In XD productâ capiatur XE, ad quam *b*, vel XK, rationem habeat quam XD ad 3XK. (Nimirum ut ſit $XE = \frac{3b^2}{a}$.) Ad rectam XE magnitudine & poſitione datam applicetur rectangulum, quod duplo quadrato ex XK æquale ſit, & quadrato deficiat. Sit EZ defectûs latitudo. Duarum XZ, XD capiatur XY proportione media. Centro X radio XY ſcribatur circulus; qui cum rectâ DR, à puncto D ad perpendiculum plani refringentis eductâ, in puncto R concurrat. Radius, qui ſecundum IX incidit, in XR refringetur, ſi talis ſit materiæ circum DXR denſitas, quæ angulum RXM maximum efficiat.

Ad hanc

ter iſtos, ſed & inter extremos ſeu maximè difformes radios, maximam circiter quam poteſt refractionis differentiam efficiet. Refractionibus.

Sin autem hujuſmodi differentiarum proportiones ad variam raritatem vel denſitatem Mediorum deſiderentur, è jam oſtenſis facilè determinabuntur, dummodo ponantur infinitè parvæ. Sic raritate vel denſitate poſterioris Medii tantum variatâ, ut radii ſecundum IX incidentes nunc refringantur ad M & R, nunc ad *m* & *r*; ductâque quâlibet DK ipſi DX normali, quæ ſecet eos in K, M, R, *m* & *r*, erit angulus infinitè parvus MXR ad conſimilem angulum *mxr*, ſicut $\frac{XRq - XKq}{XRq \times KD}$, ad $\frac{Xrq - XKq}{Xrq \times rD}$. Quòd ſi raritas vel denſitas prioris Medii varietur, non mutato poſteriori Medio, Analyſta facilè deprehendet, quòd (in fig. p. 318) ſit $MN = \frac{XRq - XKq}{XKq}$ in R*r*, & proinde quod ſit ang. MXR. ang. *mxr* :: $\frac{XRq - XKq}{XR \times RD}$. $\frac{Xrq - XKq}{Xr \times rD}$; non enim perinde eſt, ſive raritas ſive denſitas anterioris Medii, ſive poſterioris Medii varietur, ut è præoſtenſis pateat.



6o. Propoſitiones præcedentes ad luminis è longinquo manantis diffuſionem ſpectant. In duabus ſequentibus agitur de refractione luminis è propinquo manantis.

Ad hanc conſtructionem duo ſunt neceſſaria; primum ne duplum quadratum ex XK quadrato ex dimidiâ XE majus ſit; tum etiam ut XY major ſit quàm XD. Quorum utrumque ſemper fieri, ex eo quòd XK major ſit quàm XD, facilè oſtendetur. Cùm enim XK, ſive *b*, majus ſit quàm XD vel *a*, omnino $8a^2$ minus erit quàm $9b^2$. Quare et $2a^2$ minus quàm $\frac{9}{4}b^2$. Quare et $2a^2b^2$ minus quàm $\frac{9b^4}{4}$. Et $2b^2$ minus quàm $\frac{9b^4}{4a^2}$. Sed $\frac{9b^4}{4a^2}$ quadratum eſt ex dimidia XE. Quare $2b^2$, ſive duplum quadratum ex XK quadrato ex dimidiâ XE minus erit. Rurſus cùm XE × XD ex conſtructione ſit triplum quadrati ex XK; cùm etiam, propter angulum ad D rectum, quadratum ex XD minus ſit quàm quadratum ex XK, erit XE × XD majus quàm triplum quadratum ex XD. Quare et recta XE major erit quàm ut tripla ſit XD. Omnino igitur XD minor erit quàm dimidia XE. Segmentorum autem XZ, XE cùm majus ſit XZ, certè recta XZ dimidiâ XE major erit. Multo igitur majór quàm XD. Rectangulum igitur XZ × XD, ſive quadratum ex XY, majus erit quadrato ex XD. Quare et recta XY rectâ XD major. Q. E. D.

Quòd ſi ſegmentorum XZ, EZ utrumque rectâ CD majus ſit, gemina erit Problematis conſtructio, nempe cùm utrumvis ſegmentum pro *z* uſurpare liceat. Unde gemina erit rectæ XR poſitio. Id eſt, duæ erunt denſitates materiæ infra ſuperficiem AD, quæ, radium incidentem IX diverſè refringendo heterogeneos tamen radios ita utræque refringant ut angulum RXM maximum efficiant.

De Planorum

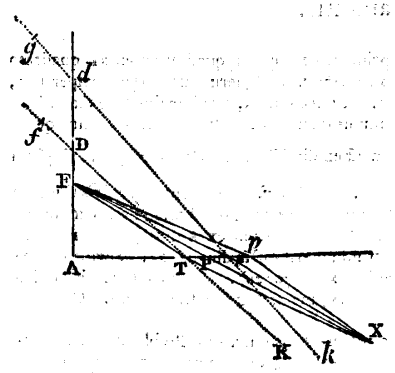
PROP. XVIII.

Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum per ſuperficiem poſitione datam refractis, quo Medium denſius ſit magis denſum, eo major erit eorum ad invicem inclinatio ex parte medii utriuſque ad certum uſque terminum, & poſt erit eo minor.

Scilicet, cùm denſitas ejus haud minor ſit quàm denſitas alterius Medii, ut refractio fiat infinitè parva, tum differentia refractionis erit etiam infinitè parva, & proinde augebitur ex auctâ denſitate. Quòd ſi denſitas ejus in infinitum augeatur, tum omnium radiorum in illud incidentium refracti perpendiculariter emergunt (§ 44); & è contra, ſoli perpendiculares poſſunt ingredi medium rarius è denſiori (§ 47); unde omnes radii à puncto ad punctum refracti tunc pergent in iiſdem lineis, ſive coincident, & ſic differentia refractionis rurſus in nihilum evaneſcet.

PROP. XIX.

Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum, per ſuperficiem poſitione datam, refractis, quo Medium rarius ſit magis rarum, eo major eorum erit ad invicem inclinatio ex parte Medii utriuſque.



Sit AT ſuperficies ita refringens differmes radios FTX, FPX, ut manantes ab eodem puncto F in idem rurſus conveniant ad X. Dico, ſi Medium prius eſſet rarius, ut præfati radii adhuc magis refringerentur, puta FTX ſecundum *FtX*, & FPX ſecundum *FpX*, quòd angulus *pXt* foret major angulo PXT, ut & angulus *pFt* major angulo PFT.

Ad abbreviandum prioris caſûs demonſtrationem, ponamus radios eſſe quàm minimè differmes; ut, propter infinitè parvam differentiam refractionis, angulos PXT & *pXt* conſtituant infinitè parvos.

parvos. (Conſule Caſ. 2. Schol. ad Prop. XVII.) Tum ducatur TK refractus radii conformis ipſi FPX, ut infinitè parvus angulus KTX ſit differentia refractionis radiorum ſecundum eandem FT incidentium; & pari modo ducatur *tk*, Refractus radii conformis ipſi *FpX*, ut angulus infinitè parvus *ktX* exiſtat differentia refractionis radiorum ſecundum eandem *Ft* incidentium. Liquet ergo, quòd, cùm radius *Ft* ſit obliquior quàm FT, atque etiam in Medium denſius incidat, erit *ktX* major angulo KTX. Adhæc producantur KT & *kt*, donec in punctis D ac *d* ſecent lineam FA, quæ ſit plano AT perpendicularis; & ultra producantur ad *f* & *g*, ita ut ſit $\frac{FA^q}{FT^q} \cdot \frac{DA^q}{DT^q} :: TF.\ Tf$; & $\frac{FA^q}{Ft^q} \cdot \frac{dA^q}{dt^q} :: tF.\ tg$; & erunt puncta ſic inventa, *f* & *g*, foci radiorum FTX & *FtX* per Prop. VIII. Caſ. 2. Et inde *Xf*. T*f* : : ang. KTX. ang. PXT; ut & *Xg*. *tg* : : ang. *ktX*. ang. *pXt* (Caſ. 3. Schol. Prop. XII.) Iſtæ quidem proportionalitates non ſunt omninò veræ, ubi anguli præfati, per differentiam refractionis effecti, ponuntur eſſe definitæ alicujus magnitudinis; ſed ad veritatem eo magis accedunt, quo anguli iſti ſtatuuntur minores; adeo ut in angulis infinitè parvis pro accuratè veris haberi debeant. Jam, cùm ex hypotheſi ſit $At > AT$, erit etiam $Xt < XT$, ut & $tg > Tf$, quemadmodum patet ex determinatione punctorum *g* & *f* ſuprà poſitâ. Quamobrem eſt *tg*. T*f* > *tX*. TX, vel permutando *tg*. *tX* > T*f*. TX; & componendo, *tg*. X*g* > T*f*. X*f*; hoc eſt, ſubſtituendo rationes hiſce æquales, ang. *pXt*. ang. *ktX* > ang. PXT. ang. KTX; & permutando, *pXt*. PXT > *ktX*. KTX: verùm eſt ang. *ktX* > ang. KTX, ut dictum fuit; & ideo multo magis eſt ang. *pXt* > ang. PXT. Q. E. D.

Et hinc verò de poſteriori caſu, quòd ſemper ſit *pFt* > angulo PFT, fiat conjectura; ſiquidem demonſtrationem longè difficiliorem poſtularet, & his tamen multa impendiſſe verba jamdudum pertæſum eſt. Hæc itaque de refractionibus ſolitariæ ſuperficiei ſufficiant.

REFRACTIONIBUS.

De radiorum bis refractorum affectionibus.

61. Quòd ſi gemina ſit refractio, proinde ut in Priſmatibus contingit, quorum phænomena præſertim explicare ſtatui, radiorum ſic refractorum paſſiones è præcedentibus ita manifeſtæ ſunt,

De Planorum

ut circa illas parum negotii intereſſe videatur. De parallelis quidem ſuperficiebus nihil aliud occurrit obſervandum, quàm quòd poſterior tantum recurvat radios, quantum prior incurvat. De inclinatis verò ſequentia notentur.

PROP. XX.

Homogenei radii ad Priſma divergentes, poſt utramque refractionem divergere pergent.

Patet per Prop. VII.

Atque idem de parallelis vel Convergentibus radiis intellige, quòd nempe poſt utramque refractionem manebunt Paralleli vel Convergentes.

Scholium.

Quòd ſi punctum, à quo quilibet infinitè propinqui, poſt utramque refractionem, divergunt, ſive locus Imaginis trans Priſma conſpicuæ, deſideretur, inventio ejus à Schol. ad præfatam Prop. VIII. manifeſta eſt. Sed ut promptius fiat conjectura, juvabit adhibere Theorema hocce mechanicum. *Quòd Imago ad eandem illam circiter diſtantiam poſt Priſma apparebit, quam habet Objectum, cujus eſt Imago, dummodo refractiones hinc & inde non ſint admodum inæquales.*

PROP. XXI.

Ex heterogeneis radiis ad Priſma divergentibus, aliqui poſt utramque refractionem convergent.

Id quod conſtat ex Prop. X & XII. Scilicet ex illis, qui in plano ad utraque refringentia plana perpendiculari jacent, magis refrangibiles ex incidentiâ paulo obliquiori convenient cum minus refrangibilibus; atque idem in innumeris ferè aliis planis ſuperficiebus continget.

PROP.

Refractionibus.

PROP. XXII.

E radiis itaque ſic à puncto ad punctum, ſive ab Objecto ad oculum refractis, alii ad verticem priſmatis gradatim aliis propiores tranſibunt, pro eo ut ſint magis ac magis refrangibiles.

Per Prop. X. unde colorum ordines definiuntur, de quibus poſthac.

PROP. XXIII.

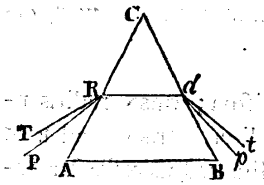
Quo major eſt angulus verticalis priſmatis, cæteris paribus, differentia refractionis fiet eo major, & inde colorum apparentia diſtinctior.

Et hoc manifeſtum eſt è Prop. II.

PROP. XXIV.

Quo denſior eſt Priſmatis materia, vel quo rarius eſt Medium circumfluum, cæteris paribus, eo major erit refractionis differentia, & inde Colorum apparentia manifeſtior.

Scilicet poſterior caſus è Prop. XIV & XVI. patet. Priorem verò, ne per Prop. XVII. in dubium revocetur, ſic oſtendo.



Concipe magis refrangibilem radium, PR, & minimè refrangibilem, TR, ſic in Priſma ad idem quodvis punctum R incidere, ut refracti pergant in eâdem lineâ R*d*, ac denuò in *d* refracti divergant verſus *p* ac *t*. Quo poſito conſtat per Prop. XV. quòd angulus *pdt* ex auctâ Priſmatis denſitate augebitur; deque angulo PRT par eſt ratiocinatio, ſi modò radii conſimiles ſecundum eaſdem lineas retrocedere concipiantur. Patet itaque aſſertio de radiis in Priſmate coincidentibus, & inde etiam de Parallelis.

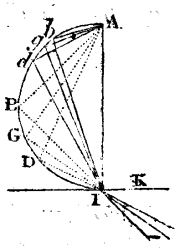
LEMMA

De Refractionibus Planorum

LEMMA VII.

Radiis tribus homogeneis, bI, gI dI, è Medio denſiori in rarius per ſuperficiem IK *refractis, ſit differentiæ incidentiarum,* bIg, gId, *ſint æquales, ſumma refractorum angulorum extremis radiis effectorum erit duplo major anguli refracti, per intermedium radium effecti; hoc eſt refractis radiis retroactis ad* B, G *ac* D: *dico, quòd ſit angulus* BIb + DId > 2 *ang.* gIG.

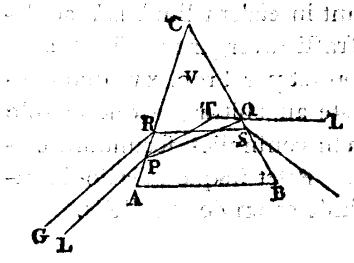
Etenim deſcripto quovis circulo ADG, tangente refringentem ſuperficiem in I, cujus diameter ſit AI, quique dictos radios ſecet in *b, g, d,* B, G, D: quandoquidem anguli *big* & *gId* ſint æquales, erunt etiam arcus *bg* & *gd* æquales. Sed ductis Ag, A*b*, &c. erunt A*b*, Ag, A*d* ſinus incidentiarum, adeoque inter ſe ut ſunt AB, AG, AD ſinus refractionum. Quare (per Lem. VI.) eſt arcus DG major arcu GB, & inde 2gG < 2gG + GD − GB = gD + gB = gD − gd + gb + gB = Dd + B*b*: hoc eſt, 2gG < D*d* + B*b*, ſive angulus BI*b* + ang. *d*ID > 2 ang. *g*IG. Q. E. D.



PROP. XXV.

Homogeneis radiis à Priſmate refractis, angulus, quem incidentes & emergentes comprehendunt, tunc maximus evadit, cùm æqualis eſt hinc & inde refractio.

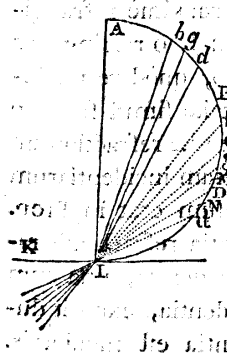
Sit ABC Priſma; GRSN radius utrinque æqualiter refractus ad R & S; et LPQL alius radius refractus inæqualiter, magis quidem ad P, minus ad Q, & producantur hi radii donec ſibi occurrant, LP & QL in T, GR verò & NS in V. Dico angulum RVS eſſe majorem angulo PTQ. Quod ut pateat, concipe radios in lineis PQ & RS hinc inde pergentes utrinque egredi Priſmate, & ſic è Medio denſiori in rarius refringi. Nam in triangulis CPQ, CRS, cùm angulus C communis ſit, cæterorum



terorum angulorum ſummæ erunt æquales; & proinde, cùm CRS ſit iſoſceles, duplum anguli CSR æquabitur angulis CPQ + CQP. Quamobrem radii QP incidentia ad P tanto major eſt incidentiâ radii RS ad S, quanto eadem incidentia ſit major incidentiâ PQ ad Q. Trium itaque incidentiarum differentiæ ſunt æquales; adeoque, juxta Lemma præmonſtratum, ſumma refractorum angulorum, per incidentiam maximam & minimam effectorum, major erit duplo anguli refracti per incidentiam mediocrem effecti. Hoc eſt, ang. QPT + ang. PQT > 2 ang. RSV, ſive > ang. RSV + ang. VRS. Itaque, cùm in triangulis PTQ & RVS ſumma angulorum ad baſin PQ, ſit major ſummâ eorum ad baſin RS; erit angulus verticalis RVS major angulo verticali PTQ. Q. E. D. Refractionibus.

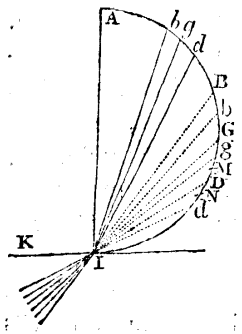
LEMMA VIII.

Si ſecundum tres lineas, bI, gI, dI, æquales angulos big, gId continentes, tres radii minimè refrangibiles incidant ad I *in ſuperficiem* IK, *& è Medio denſiori in rarius refringantur, quorum refracti retrorſum producti ſint* IB, IG, ID; *& præterea, ſi trium maximè refrangibilium radiorum, ſecundum eaſdem lineas* bI, gI, dI *incidentium, refracti retrorſum producti ſint* Ib, Ig, Id, *differentia refractionis radiorum, quorum incidentia eſt minima, unà cum differentiâ refractionis eorum, quorum incidentia eſt maxima, major erit quàm dupla differentia refractionis eorum, quorum incidentia eſt mediocris. Hoc eſt, ang.* BIb + *ang.* DId > 2 *ang.* GIg.



Etenim deſcripto quovis circulo ADI tangente refringentem ſuperficiem in I, cujus diameter ſit AI, quique præfatos radios in punctis *b, g, d,* B, b, G, g, D, d ſecet: concipe ſubtenſas ab A ad quodlibet iſtorum punctorum ducis; & erunt A*b*, Ag, A*d* inter ſe, ut ſunt AB, AG, AD; atque etiam, ut ſunt A*b*, Ag, A*d*. Unde ſequitur, quòd AB, AG, AD inter ſe ſunt ut A*b*, Ag, A*d*. Et præterea per Lem. VI. quòd ſit arcus GD > arcu BG, & arcus gd > arcu bg. Jam fiat arcus GM = BG,

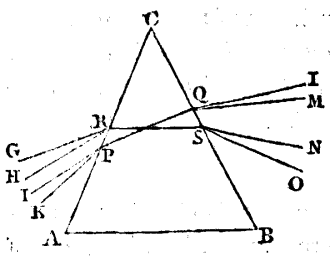
De Planorum



GM=BG; eritque GD>GM & AD>AM. Item in peripheriâ AD ſume punctum quoddam N, ſub hâc conditione, ut, ſi concipias AM, AN ſubtenſas duci, ſit AB. Ab : : AM. AN, & erunt AB, AG, AM inter ſe, ut ſunt Ab, Ag, AN; adeoque, cùm arcus BG ac GM ſint æquales, erit ſumma arcuum Bb + MN (per Lem. VII.) major duplo arcu Gg. Sed, cùm ſit AM. AN : : (AB. Ab : :) AD. Ad; vel converſè AM. AD : : MN. Dd, propter AD > AM erit arcus Dd > arcu MN; & utrobique addito arcu Bb, erit arc. Bb + arc. Dd > arc. Bb + arc. MN; & multo magis erit arc. Bb + arc. Dd > duplo arcu Gg, ſive ang. BIb + ang. DId > 2 ang. GIg. Q. E. D.

PROP. XXVI.

Heterogeneis radiis à Priſmate refractis, differentia angulorum, quos incidentes cum emergentibus conſtituunt, tunc minima evadit, cùm æquales ſunt utrobique refractiones.



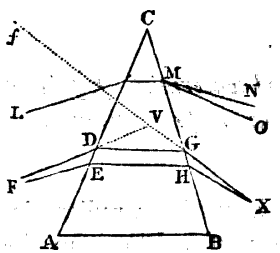
In Priſmate ABC ſumatur CR æqualis CS, & RS ducatur, ut & alia quævis linea PQ, quæ non ſit parallela ad RS; & concipe radios in Priſmate ſecundum has lineas PQ & RS hinc inde pergentes, ad puncta P, Q, R & S egredi; & maximè refrangibiles verſus K, M, H & O refringi, ac minimè refrangibiles verſus I, L, G & N. Dico, quòd refractionum, inæqualiter ad P & Q factarum, differentiæ ſimul ſumptæ IPK + LQM ſint majores quàm HRG + NSO, differentiæ refractionum æqualiter ad R & S factarum ſimul ſumptæ. Nam incidentiarum ad P, Q & S differentiæ ſunt æquales, ut oſtenſum erat in Prop. præcedenti, atque adeo per Lem. VIII. differentia refractionis radiorum difformium ad P, ubi maxima eſt incidentia, unà cum differentiâ conſimili ad Q, ubi minima eſt incidentia, excedit duplum conſimilis differentiæ ad S, ubi incidentia eſt mediocris. Hoc

Hoc eſt, ang. IPK + ang. LQM > 2 ang. NSO. Sive, cùm GRH & NSO æquentur, ang. IPK + ang. LQM > ang. NSO + ang. GRH. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

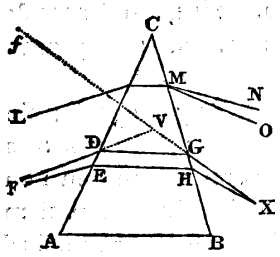
Schol. Poſui quidem radios è Priſmate utrobique egredi; ſin pergant ab I & K per P & Q ad L & M, & à G & H per R & S verſus N & O, linearum poſitiones & quantitates angulorum non inde mutabuntur; & proinde demonſtratio præfata tunc etiam valebit; & propter eandem rationem valebit etiam, cùm radii ad Priſma divergentes, evadunt in Priſmate paralleli. Quod idem de Propoſitionum XXIV & XXV. demonſtrationibus itidem intellige. Quinetiam in aliis quibuſcunque caſibus, ubi divergunt ante refractionem & poſt convergunt, vel in Priſma incidunt paralleli, non adeo multum à paralleliſmo intra Priſma recedunt unquam, quin ut anguli, vel differentiæ angulorum, quos incidentes cum emergentibus conſtituunt, pro iiſdem circiter haberi poſſint, ac ſi intus eſſent paralleli; adeoque dictas Propoſitiones ad omnes omnino caſus extendi.

PROP. XXVII.

Si denique radiis, à dato puncto F *ad datum punctum* X, *per Priſma* ABC *poſitione datum, refractis, deſiderentur anguli* DFE, GXH, *quos heterogenii comprehendunt*;



Problema ex eorum numero eſt, quæ Veteres linearia dixêre; at ſequens Mechanica ſolutio, quantum exigunt res Practicæ, veritati appropinquat. Finge ſummam angulorum DFE + GXH æqualem eſſe angulo NMO, quem radii duo alteri FD & FE, quod ad refrangibilitatem conſimiles, ac juxta quamvis lineam LM, rectæ angulum DFE biſecanti quàm proximè parallelam, incidentes poſt binam refractionem conſtituunt. Et è radiis ad X refractis, aliquem GX cum incidente radio FD convenientem in V, produc ad *f*, ut ſit *f* locus Imaginis, quam Objectum F oculo in X conſtituto exhibet. Dein ang. OMN ac diſtantiis *f*X & *f*V mechanicè cognitis, dic eſſe *f*X. *f*V : : ang. NMO. ang. GXH; & erit GXH, quem



quæris proximè; quemadmodum ex oſtenſis ad Schol. Prop. XII. quodammodo manifeſtum eſt. Cùm refractiones utrobique non ſunt admodum inæquales, res expeditiùs abſolvitur per Schol. ad Prop. I. fingendo eſſe VX. FV : : ang. DFE. ang. GXH, vel compoſitè FV + VX. FV : : ang. NMO. ang. GXH.

SECTIO QUARTA.

62. *De Refractionibus curvarum ſuperficierum.*

De Curvarum

HÆC de refractionibus Planorum. De Curvis & præſertim Sphæricis ſuperficiebus jam agendum eſt: quarum doctrinam reſpectu homogeneorum radiorum ſequentibus Propoſitionibus complecti conabimur.

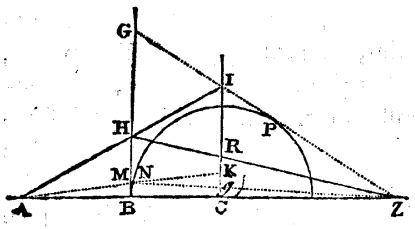
PROP. XXVIII.

Radii in Curvam ſuperficiem incidentis Refractum ducere.

Nempe eadem eſt refractio radii à Curvâ ac eſt à Plano contingente Curvam in puncto refractionis. Quære ergo refractum à contingente plano per Prop. III.

PROP. XXIX.

Si radii ſeu paralleli, ſeu ad punctum aliquod contermini, ſe ſphæræ objiciant refringendos, refractorum axi quam proximorum concurſum ſive focum determinare.



Sit A punctum radios ejaculans verſus ſphericam ſuperficiem, BNP, centro C deſcriptam. E vertice & centro erige ad axem AC perpendiculares BH & CI; ipſiſque occurrentem, in H & I age, quamlibet

libet AI per punctum A. Tum à puncto C verſus I cape CR, quæ ſit ad CI ut ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ; & age rectam HR occurrentem AC in Z: & erit Z concurſus refractorum, quem oportuit determinare. Sit enim AN radius axi viciniſſimus incidens ad N, & occurrens CI in K. Age NZ occurrentem CI in *g*; & ut mos eſt, concipe infinitè parvum arcum BN æqualem eſſe BM ſegmento rectæ BH ad radium AK terminato; & erit CI : BH = CK : BN; ac BH. CR : : BN. C*g*. Et ex æquo CI : CR : : CK : C*g*; hoc eſt, CK. C*g* ut eſt ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis. Et proinde, cùm anguli CAK & CZ*g* ex hypotheſi ſint infinitè parvi, adeoque CK ad AN, & C*g* ad NZ perpendiculares, vel ſaltem æquipollentes perpendiculis, erit NZ refractus ipſius AN. Q. E. D. REFRACTIONIBUS.

Cor. 1. Poſito I ad R ut eſt ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, erit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ. Eſt enim $\frac{I}{R}$ AB. AB : : (I. R : :) CI. CR, & AB. AC : : BH. CI. Et ex æquo perturbate $\frac{I}{R}$ AB. AC : : (BH. CR : :) BZ. CZ.

Cor. 2. Si quando punctum A infinitè diſtet, ſeu parallelos radios ejaculetur, tum propter æquales BH & CI, erit I. R : : BZ. CZ. Atque ita, ſi refracti radii paralleli ſunt, tum propter æquales BH & CR, erit I. R : : AC. AB.

Cor. 3. Si è quatuor punctis A, B, C & Z tria quævis dentur, poteſt quartum inveniri, ut è ſequentibus exemplis patebit.

Exem. 1. Dentur A, B, C, & quæratur Z. Scilicet eſt $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ; adeoque divifim, $\frac{I}{R}$ AB − AC. AC : : BC. CZ.

Exem. 2. Si datis A, B & Z quæratur C; cùm ſit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ, viciſſim erit $\frac{I}{R}$ AB. BZ : : AC. CZ, & compoſitè $\frac{I}{R}$ AB + BZ. BZ : : AZ. CZ.

Exem. 3. Si datis A, C & Z quæratur B; cùm ſit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ, ſive AB. $\frac{R}{I}$ AC : : BZ. CZ, viciſſim erit $\frac{R}{I}$ AC. CZ : : AB. BZ, & compoſitè $\frac{R}{I}$ AC + CZ. CZ : : AZ. BZ.

Poſſunt eadem determinari per ductum linearum; veluti ſi datis A, B & Z quæratur C. Erige ad AZ normalem BH cujuſvis longitudinis, & in eâ cape BO, quæ ſit ad BH, ut I ad R; junge

De Curvarum

AH & GZ occurrentes in I; & IC normaliter demissa ad AZ incidet ad punctum quæsitum C.

63. NOTA I. Quòd Z sit locus imaginis Objecti A per refractionem exhibitæ, cùm spectatoris oculus in axe ultra Z constituitur.

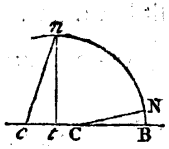
II. Si quando refracti radii divergant, vel incidentes convergant, vel sint paralleli, similis erit Problematis constructio, mutatis tantùm suo modo mutandis.

III. Si è puncto A emissi radii per plures sphæricas superficies, eundem axem AC retinentes, successivè transmittantur, ad concursum post omnes refractiones determinandum, quære primò concursum radiorum post primam refractionem; deinde concursum eorundem post secundam refractionem, juxta ac si primariò emissi fuissent è puncto præcedentis concursûs, & sic deinceps donec ad ultimum concursum deventum sit. Atque hoc pacto locus Imaginis Objecti cujusvis, per Telescopium vel Microscopium, visi determinari potest.

IV. Ope Corol. 3. lentes ex sphæricis superficiebus confici possunt, quæ Telescopiis modo quolibet designato constituendis inservient. Patet enim ex illo Corollario, quod non tantùm refractiones datarum lentium investigari possunt, sed & lentes delineari, quæ datas refractiones peragent.

LEMMA IX.

Ad datam quamvis Curvam concursum axis & viciniſſimi perpendiculi determinare.



Sit BN*n* Curva, & ad quodvis ejus punctum, *n*, indeterminatè spectatum, quære perpendiculum *nc*, per notas methodos ducendi perpendicula Curvarum, & simul invenies longitudinem BC. Tum (demisso ad BC normali *nt*) finge B*t* vel *nt* infinitè parvam esse, seu nullam; & emergit longitudo BC, cujus terminus est ad concursum axis cum viciniſſimo perpendiculo.

Exem. 1. Sit BN*n* Parabola, cujus latus rectum *r*, & B*t* dic *x*; erit $BC=x+\frac{1}{2}r$, ut notum est. Pone jam $x=0$, & restabit $\frac{1}{2}r$ pro longitudine BC ad verticem.

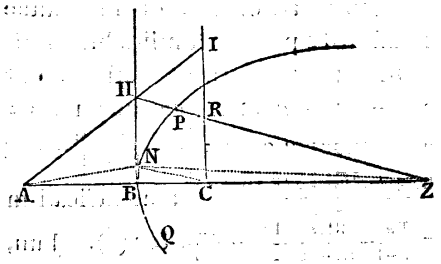
Exem. 2. Sit BN*n* Ellipsis, cujus latus rectum *r*, & transversum *q*;

eritque (ut notum est) $BC=x-\frac{rx}{q}+\frac{1}{2}r$. Jam pone $x=0$, & restabit iterum $\frac{1}{2}r$ pro longitudine BC ad verticem. Nec secus in Curvis magis compositis procedendum est. Refractionibus.

PROP. XXX.

Radiis in curvam quamvis superficiem quàm proximè perpendiculariter incidentibus, Refractorum concursum, seu Focum, determinare.

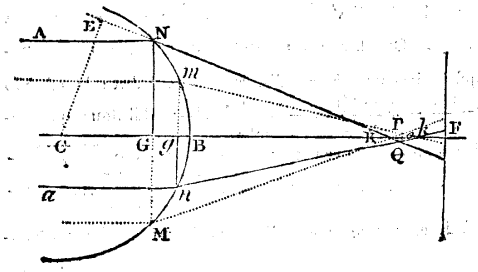
Esto PBQ Curva quævis; A, commune punctum, seu concursus incidentium radiorum; AB radius perpendicularis sive axis, & AN radius quàm proximè perpendicularis, sive axi proximus; sitque NC ad Curvam perpendicularis, axique AC occurrens ad C. Et puncto C per Lem. IX. invento, erige ad B & C perpendicula BH & CI; quibus in H & I occurrentem age quamvis AI. Versus I cape CR, quæ sit ad CI ut sinus refractionis ad sinum incidentiæ, & recta HR occurret ipsi AB in quæsito refractorum concursu Z.



Probatur ad modum præcedentis Propositionis, & huic etiam consimilia Corollaria & notæ competunt.

PROP. XXXI.

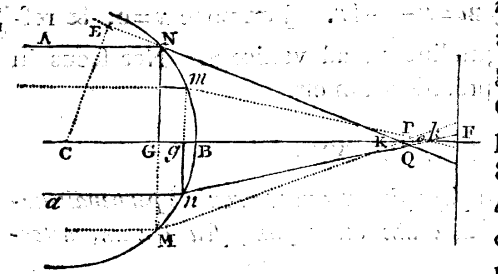
Parallelis radiis in Sphæram incidentibus, refractorum, ab axe remotorum, errorem à principali Foco determinare.



Sit NBM sphæra; C, centrum ejus; CB, semidiameter incidentibus radiis parallela; AN, radius incidens; & NK, refractus ejus, occurrens axi seu semidiametro CB in K; & posito F principali foco,

i. e.

De Curvarum



i. e. in quem radii prope axem jacentes congregantur, quærendus erit error FK. Demitte ergo perpendiculares CE in NK, & NG in CK; & dic CB = a, GB = x & CK = z: atque ex naturâ circuli erit $NGq = 2ax - xx$; cui adde GKq, hoc eſt $zz + 2xz - 2az + xx - 2ax + aa$, & prodibit $NKq = zz + 2xz - 2az + aa$. Jam, cùm NG ſit ad CE ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſive ut I ad R, & propter ſimilitudinem triangulorum CEK & NGK, NK & CK ſint in eâdem ratione, erit $II.RR :: (NKq.\ CKq :) zz + 2xz - 2az + aa.zz$; adeoque $IIzz = zz + 2xz - 2az + aa$ in RR; & factâ reductione, $zz = \frac{2RRax - 2RRxz - RRaa}{RR - II}$; extractâque radice, $z = \frac{RRa - RRx + R\sqrt{IIaa - 2RRax + RRxx}}{RR - II}$; ac radicali in infinitam ſeriem redactâ, $z = \frac{Ra}{R-I} - \frac{RRx}{IR-II} - \frac{R^3x^2}{2I^3a} - \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c (f). Jam, cùm per Corol. 2. vel. 3. ad Prop. XXIX. ſit $\frac{Ra}{R-I} = CF$ (id quod etiam innoteſcit ex valore z jam invento, fingendo eſſe $x = 0$) ex hoc CF ſubduc inventum valorem z, & reſtabit $\frac{RRx}{IR-II} + \frac{R^3x^2}{2I^3a} + \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c. pro valore erroris KF, quem quærimus.

Corol. 1. Si BG ſive x ponatur valde exigua, erit $\frac{RRx}{IR-II}$ quàm proximè æqualis KF; tunc enim quantitates $\frac{R^3x^2}{2I^3a} + \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c. propter aſcendentes poteſtates ejuſdem x evadunt admodum exiguæ, & reſpectu

(f) Nempe hoc modo.

Extrahendo radicem quadraticam, pro irrationali $\sqrt{IIaa - 2R^2ax + R^2x^2}$ veniet ſeries infinita $1a - \frac{R^2x}{I} - \frac{R^4 - R^2II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^6 - R^4I^2}{2.I^5a^2}x^3$ &c. Quæ ſi cum R multiplicetur, pro eo omni quod numerator quantitatis fractæ, quæ ipſi z inventa eſt æqualis, irrationale habet; id eſt, pro $R\sqrt{IIaa - 2R^2ax + R^2x^2}$, veniet $RIa - \frac{R^3x}{I} - \frac{R^5 - R^3II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^7 - R^5I^2}{2.I^5a^2}x^3 -$; additiſque quæ rationalia habet numerator ille nomina, $RRa - RRx$, veniet pro numeratore toto $\overline{RR + RI}.a - \frac{R^3 + RRI}{I}x - \frac{R^5 - R^3II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^7 - R^5I^2}{2.I^5a^2}x^3 -$, ſive $Ra \times \overline{R+I} - \frac{R^2x}{I} \times \overline{R+I} - \frac{R^3x^2}{2.I^3a} \times \overline{R^2 - II} - \frac{R^5x^3}{2I^5a^2} \times \overline{R^2 - I^2} -$. Quibus omnibus à denominatore $RR - II$ diviſis, veniet pro z ſeries ipſa Newtoniana.

reſpectu termini $\frac{RRx}{IR-II}$ pro nullis haberi poſſint. Refractionibus.

Corol. 2. Quinetiam, ſi ſtatuas $NG = y$, erit $\frac{RRyy}{2IRa - 2IIa} = KF$ circiter. Etenim eſt $NGq = BG \times \overline{BC + CG}$, ſive $= BG \times 2BC$ proximè, hoc eſt, $yy = 2ax$ ferè, vel $\frac{yy}{2a} = x$; & ſubſtituendo $\frac{yy}{2a}$ pro x in valore ipſius KF, emerget $\frac{RRyy}{2IRa - 2IIa} = KF$.

Corol. 3. Hinc Errores KF ſunt ut ſagittæ GB, vel ut quadrata ſemichordarum NG.

Corol. 4. Si radius ANK detur poſitione, & paralleli alicujus, axique proprioris & ad alteras axis partes incidentis, radii *an* refractus *nk* ducatur, ſecans axem in *k*, & hunc refractum NK in Q, & ad axem demittatur normalis Qo; linea K*o* evadet omnium maxima, ubi radius *an* duplo minùs diſtat ad axe circiter, quàm radius alter AN. Demiſſâ enim ad axem normali *ng*, ponatur $ng = v$, $Ko = s$, $GK = f$, & $KF = h$, & per Corol. 3. hujus, erit $yy.vv :: KF.kF$. Adeoque $kF = \frac{hvv}{yy}$; qui à KF ſubducto reſtat $\frac{hyy - hvv}{yy} = Kk$.

Præterea eſt GK. GN :: K*o*. Qo; adeoque $Qo = \frac{ys}{f}$: item *gn*. GK (= *gk*) proximè) :: Qo. *ok*, quare $ok = \frac{ys}{v}$. Huic adde K*o*, & iterum prodit $Kk = \frac{vs + ys}{v}$. Quamobrem eſt $\frac{vs + ys}{v} = \frac{hyy - hvv}{yy}$; factâque diviſione per $v + y$, & reductâ æquatione, prodit $s = \frac{hvy - hvv}{yy}$.

Jam ut maximus s inveniatur, multiplica terminos juxta methodum Huddenii per dimenſiones quantitatis indeterminatæ v, & emerget $o = \frac{hy - 2hv}{yy}$, ſive $y = 2v$, hoc eſt NG = 2*ng*.

Corol. 5. Et hinc K*o*, ubi maximum eſt, æquatur quartæ parti ipſius KF circiter; nam in valore ipſius s jam antè invento, ſi ſcribas $2v$ pro y, exoritur $\frac{1}{4}h = s$.

toniana.

Namque $\frac{Ra \times \overline{R+I}}{RR - II} = \frac{Ra \times \overline{R+I}}{\overline{R+I} \times R - I} = \frac{Ra}{R-I}$.

Similiter $-\frac{R^2x}{I} \times \frac{R+I}{RR-II} = \frac{-R^2x \times \overline{R+I}}{I \times \overline{R+I} \times R - I} = \frac{-R^2x}{RI - II}$.

Sed $-\frac{R^3x^2}{2.I^3a} \times \frac{R^2 - II}{R^2 - II} = -\frac{R^3x^2}{2.I^3a}$.

Et $-\frac{R^5x^3}{2.I^5a^2} \times \frac{R^2 - II}{R^2 - II} = -\frac{R^5x^3}{2.I^5a^2}$.

Corol.

Corol. 6. Eſt etiam $oQ = \frac{Ry^3}{8.aa}$ (g). Nam eſt GK (= BF proximè): GN 1 : *Ko*. *oQ*, hoc eſt $\frac{Ra}{R-1}.y :: \frac{RRyy}{8IRa-8Ia}$ $(= \frac{1}{4}KF)$. $\frac{Ry^3}{8Iaa}$.

Corol. 7. Si arcus BM ſumatur æqualis BN, & $Bm = Bn$, ac radii ad puncta M & *m* refracti ducantur ſibi occurrentes in P; conſtat eſſe ſpatium $PQ = \frac{Ry^3}{4Iaa}$ (h), duplum nempe ipſius *o*Q; & præterea conſtat, refractos omnium radiorum, in ſphæricam ſuperficiem inter N & M cadentium, convergere in ſpatium hocce PQ; & idem PQ eſſe minimum circulare ſpatium in quod poſſent omnes congregari; adeoque Focum eſſe, ſeu locum Imaginis Objecti, parallelos radios in lentem, ad uſque limites M & N apertam, ejaculantis. Scilicet nulli radii poſſunt tranſilire hoc ſpatium; quia cùm *o*Q ſit in datâ ratione ad K*o*, eritque *o*Q ſimul maximum, adeoque punctum Q omnium verſus F jacentium remotiſſimum ab axe, in quo radius quiſquam concurrit cum externo radio NK; neque poſſunt in minus ſpatium congregari, quia radii *nk* & *mk* ſecant externos radios in ipſiſſimis punctis P & Q, quibus ſpatium PQ terminatur.

Corol. 8. Si circuli NBM Apertura augeatur vel minuatur, Error lateralis PQ erit ut y^3, ſive ut cubus latitudinis aperturæ NM. Item ſi immutatâ aperturâ mutetur Circuli magnitudo, error PQ erit reciprocè ut *aa* ſive ut *eBq*, adeoque ut *BFq*, ſiquidem CB & BF ſint in datâ ratione: ſin verò & Circuli magnitudo & Apertura mutetur, erit error ille PQ ut $\frac{y^3}{aa}$ ſive ut $\frac{\text{NM cub.}}{\text{BF quad.}}$ quemadmodum ex $\frac{Ry^3}{4Iaa}$ (i) valore ipſius PQ conſtare poteſt.

Scholium.

Eodem ferè modo, quo radiorum parallelè incidentium errores KF

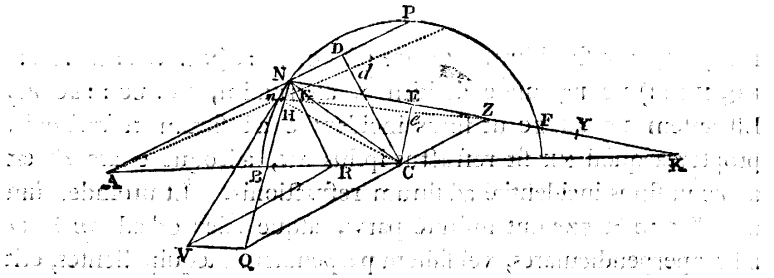
(g) Omnino legendum $\frac{RRy^3}{8.II.aa}$. Namque BF, et quæ hujus propemodum eſt æqualis GK, ad CF rationem habet quam I ad R. Id quod apud dioptricès peritos conſtat. Quare GK : CF = $\frac{Ia}{R-I} : \frac{Ra}{R-I}$. Et cùm CF illi $\frac{Ra}{R-I}$ æqualis ſit, omnino GK huic $\frac{Ia}{R-I}$ æqualis erit. Quare cùm GK ſit ad GN ut K*o* ad *o*Q, erit $\frac{Ia}{R-I} : GN$ ſive $y = Ko : oQ$, ſicut rectè monuit qui primam hujus Libri editionem curavit. At verò recta K*o*, quando eſt maxima, parti quartæ rectæ KF æqualis eſt; hoc eſt, cùm KF quantitati $\frac{RRyy}{2.IRa-2.II.a}$ æqualis ſit, maxima K*o* quantitati $\frac{RRyy}{8.IRa-8.II.a}$ æqualis

KF & PQ determinavimus, conſimiles divergentium vel convergentium errores, licet calculo difficiliori, determinari poſſunt. REFRACTIONIBUS.

PROP. XXXII.

Si Radii ſive paralleli, ſive verſus commune aliquod punctum inclinati, ſe Sphæræ objiciant refringendos; Refractorum extra axem ſibi quàm proximorum, & in eodem plano cum incidentibus jacentium, concurſum determinare.

Sit AN incidens radius; NK, refractus ejus; & NV, in plano trianguli ANK recta linea tangens Sphæram ad N. Ad AN duc NR



perpendicularem, & occurrentem axi AC in R; nec non RV parallelam, & occurrentem Tangenti NV in V. Item ad KN duc NQ perpendicularem, & VQ parallelam, convenientes in Q; & age QC occurrentem NK in Z; eritque Z concurſus radiorum ipſi AN viciniſſimorum. Sit enim A*n* alius ex incidentibus priori AN infinitè vicinus, & occurrens NR in G. Age *n*Z occurrentem NQ in H; & ad AN & NK è C, centro ſphæræ, demitte normales CD & CE, occurrentes A*n* & *n*Z in *d* & *e*. Jam, cùm AN ſuppona-

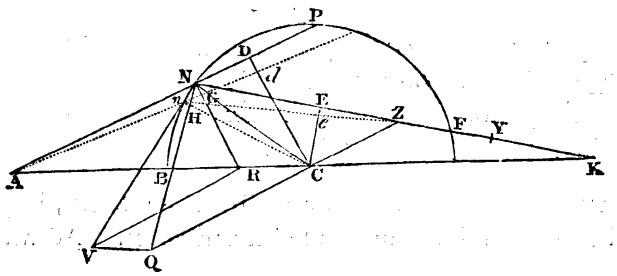
quales erit. Quare maximâ exiſtente K*o* erit $\frac{Ia}{R-I} : y = \frac{RRyy}{8.IRa-8.II.a} : oQ$, : : Quare $oQ = \frac{RRy^3}{8.Ia \times R-I} \times \frac{R-I}{Ia} = \frac{RRy^3}{8.II.aa}$. Hæc eſt longitudo rectæ *o*Q, quando K*o* maxima eſt.

(h) Legendum $\frac{RRy^3}{4.II.aa}$ ſicut rectè monuit quem ſuprà laudavimus, vid. Not. i. Quin et hanc emendationem commendare videtur Newtonus ipſe; qui in Libro Opticès primo, Prop. VII. §. 2, formulam poſuit, quæ in hanc noſtram abierit, ſi pro literis illius S, D ponantur *y*, 2*a* hujus, quibus eadem planè ſignificantur.

(i) Vid. Not. h.

De Obvarum

tur infinitè vicinus *An*, arcus infinitè parvus *Nn* pro rectâ coincidente cum tangente NV haberi poteſt; ac triangula N*Gn*, NR*v*, &



NH*n*, NQV pro ſimilibus. Quare eſt DC. D*d*:: (NR. NG:: NV. *Nn*:: NQ. NH ::) EC. E*e*, unde diviſim & alternatim, DC. EC :: *dc*. *ec*. Eſt autem DC ad EC ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, propterea quòd NK ſit refractus ipſius AN, adeoque etiam *dc* eſt ad *ec* ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis. Et proinde, cùm anguli DA*d* & EZ*e* ſint infinitè parvi, atque adeo c*d* ad *An* & c*e* ad *nz* perpendiculares, vel ſaltem perpendiculis æquipollentes, erit *nz* refractus ipſius *An*. Q. E. D.

Corol. 1. Eſt ND. NE:: (ſive NP. NF ::) NR. NQ. Nam actâ NC, propter triangula NRV & NDC, NEC & NQV ſimilia; eſt ND. NR:: (NC. NV ::) NE. NQ; & alternè ND. NE :: NR. NQ.

Hinc promptior emergit Problematis reſolutio: nempe ad radios AN, NK erige normales NR, NQ, quorum NR axi AC occurrat, & NQ ſit ad NR ut NF ad NP. Dein age QC, quæ cum NK in quæſito puncto z conveniet.

Corol. 2. Eſt etiam AN × DC × NE. AD × EC × ND :: NZ. EZ. Nam eſt AD. AN:: DC. NR; & inde $NR = \frac{AN \times DC}{AD}$. Item ND. NE:: NR. NQ; & inde $NQ = \frac{AN \times DC \times NE}{AD \times ND}$, adeoque AN × DC × NE. AD × EC × ND:: (NQ. EC ::) NZ. EZ.

Corol. 3. Si punctum radians A infinitè diſtet, ſive parallelos radios ejaculetur, poſito 1. R :: ſinus incidentiæ, ſin. refract. erit I × NF. R × NP :: NZ. EZ. In hoc enim caſu AN & AD, cùm ſint infinitè longæ, pro æqualibus haberi debent. Atque adeo per

Corol.

Corol. 2. hujus, erit DC × NE. EC × ND :: NZ. EZ. Sed ex hypotheſi eſt DC. EC :: I. R; & proinde I × NE. R × ND :: (NZ. EZ ::) I × NF. R × NP. Cæterùm de his vide plura in Lectionibus Dris. Barrow. REFRACTIONIBUS.

64. Notetur autem 1°. quòd mutatis mutandis reſolutio Problematis cuicunque caſui facilè accommodatur, ſive radii incidentes divergant à puncto aliquo, vel ad idem convergant, vel incidant paralleli.

II. Cùm è radiis huic ANK proximis, qui jacent in plano ANK, conveniant in z; qui verò in conicâ ſuperficie, per revolutionem trianguli ANK circa latus AK generatâ, jacent, conveniant in K; erit maxima radiorum ipſi ANK undique proximorum conſtipatio circa medium ſpatii KZ, puta ad Y; & proinde oculo in lineâ NK ultra K conſtituto, ſenſibilis imaginis Objecti A, per refractionem ſphæricæ ſuperficiei BN viſi, locus erit ad Y; vel ſaltem intra limites K & Z; nam locus ille non præciſè definitur.

III. Cùm Radii pluribus ſuperficiebus ſucceſſivè refringuntur, ut vicinorum poſt omnes refractiones concurſum determines, primò quære concurſum poſt primam refractionem; deinde concurſum eorundem poſt ſecundam, tanquam ſi primariò effluxiſſent è puncto præcedentis concurſûs; & ſic deinceps ut ad Prop. XXIX. dictum fuit.

PROP. XXXIII.

Radiis in quamcunque curvam ſuperficiem incidentibus, Refractorum ſibi quàm proximorum, & in eodem plano cum Incidentibus jacentium, concurſum deſignare.

Finge BNP jam non Sphæram, ſed aliam quamcunque Curvam referre, ſitque A commune punctum, ſeu concurſus, incidentium radiorum; AN, aliquis ex Incidentibus; NK, Refractus ejus; & NC, perpendicularis Curvæ ad punctum refringens. In hâc NC quære interſectionem proximi alicujus perpendicularis (qualis *nc*) ad aliud proximum punctum refringens inſiſtentis (k), (id quod alibi docebitur) ſitque iſta interſectio c. Jam ductâ AC, demitte ad radios AN, NK normales CD, CE; ac erige NR, NQ, quorum NR

(k) Vid. Geometr. Analyt. Prob.

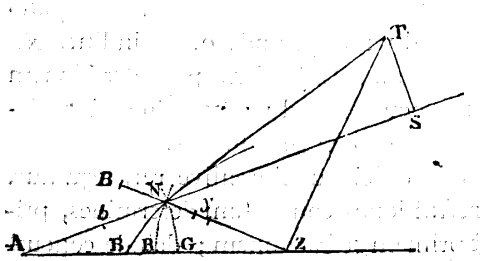
De Curvarum

occurrat AC in R, ſitque NQ ad NR ut NE ad ND; & acta QC conveniet cum Refracto NK in deſiderato proximorum Refractorum concurſu Z.

Probatur ad modum præcedentis Propoſitionis, & huic etiam conſimilia Corollaria & Notæ competunt.

PROP. XXXIV.

Figuram determinare, quæ radios homogeneos, ſive parallelos, ſive ad commune aliquod punctum terminatos, ita refringet, ut Refracti omnes ad aliud datum punctum accuratè conveniant.



Sit A concurſus incidentium radiorum, & Z refractorum, ac punctum aliquod, B, in rectâ AZ, pro vertice Curvæ ad arbitrium ſumatur. Ab illo B capiantur in linea BZ, verſus Medium denſius, BG cujuſvis longitudinis, & BR ratione ad BG quam habet ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ. Centriſque A & Z, & intervallis AG & ZR, deſcribantur circuli ſe interſecantes in N; & ipſius N locus erit Curva, quæ deſideratam refractionem peraget.

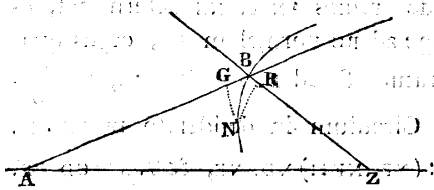
Quod ut pateat, producatur AN ad S, ut ſit NS. NZ :: BG. BR; & ad NS & NZ erigantur perpendiculares, ST & ZT, occurrentes in T, & acta NT Curvam tanget in N, ut ex methodo ducendi tangentes alibi expoſitâ conſtabit (l). Jam cùm NS & NZ ſint ut BG & BR, hoc eſt, ut ſinus incidentiæ & refractionis; & reſpectu ſinûs totius, ſive ſemidiametri NT, ſit NS ſinus anguli NTS, qui æquatur angulo incidentiæ radii AN, & NZ ſinus anguli NTZ, qui æquatur angulo refractionis radii NZ: patet eſſe NZ refractum ipſius AN. Q. E. D.

65. NOTA

(l) In AN, ZN ut opus ſit productis, capiantur AB, ZB rectis AR, ZG ſingulatim æquales. Erunt igitur *b*N, NB illis BG, BR ſingulatim æquales. Habebit igitur *b*N ad NB rationem eam quam BG ad BR; id eſt datam illam, quam ſinus incidentis radii ad ſinum emergentis. Quare et fluxionibus rectarum *b*N, NB eadem data ratio intercedet. (Geometr. Flux. Theor. IV.) Sed propter rectam A*b* magnitudine datam, fluxioni rectæ *b*N æqualis erit fluxio rectæ AN. (Geometr. Flux. Theor. V.) Similiter propter rectam ZB magnitudine datam, fluxioni rectæ BN fluxio rectæ ZN æqualis erit.

Quare

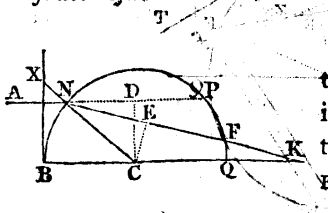
65. NOTA I. Poteſt etiam Curva huic uſui inſerviens deſcribi, quæ per datum quodvis punctum B, extra axem AZ poſitum, tranſibit; ſcilicet agantur AB & ZB, & in ipſis capiantur BG & BR in ratione ſinuum incidentiæ & Refractionis; et centris A, Z, ac intervallis AG & ZR, deſcribanturque circuli occurrentes in N; eritque N ad Curvam, quam oportet deſcribere. REFRACTIONIBUS.



II. Præterea Problematis reſolutio, mutatis mutandis, ſe ad omnes caſus extendit, ſive incidentes aut refracti radii convergant, divergant, vel exiſtant paralleli, ſive refractio fiat è rariori Medio in denſius, vel è denſiori in rarius. Et quidem, ſi radii ex neutrâ parte paralleli ſint, i. e. ſi punctorum A & Z neutrum ſit ad infinitam diſtantiam, Curva BN erit aliqua quatuor Ellipſium quas Carteſius in hunc uſum in Geometriâ deſcripſit. Sin alterutrum infinite diſtet, ita ut radii punctum illud reſpicientes evadant paralleli, Curva erit conica ſectio, uti notum eſt: et in hoc caſu, circulus RN vel GN, propter infinitam centri diſtantiam, evadet recta linea, ipſi AZ ad B vel G perpendicularis.

LEMMA X.

E parallelis radiis, ad Circulum refractis, radium illum determinare, cujus pars circulo incluſa datam habeat rationem ad partem refracti ejus eidem circulo incluſam.

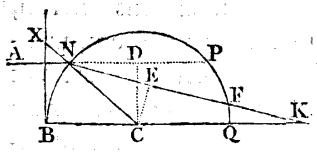


Sit AN radius incidens; NK, refractus; NP & NF, partes eorum Circulo incluſæ; CD & CE, perpendicula ad iſtas partes è centro circuli demiſſa; & BC, ſemidiameter acta parallela ipſi AN;

Quare fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN rationem habebit, quam ſinus incidentis radii ad ſinum emergentis. Sed et recta NS ad rectam NZ rationem habet, quam ſinus incidentis radii ad ſinum emergentis. Habet igitur recta NS ad rectam NZ rationem eam quam fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN. Quamobrem ſi rectæ ZT, BT, à punctis Z, B, ad perpendiculum cum rectis ZN, NS eductæ, in puncto T concurrant, juncta NT Curvam, ad quam eſt N, in N continget. (Newton. Geometr. Analyt. Cap. VI. §. 31.)

ſitque

De Curvarum

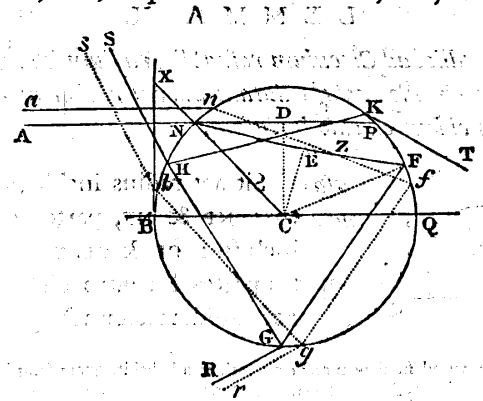


ſitque CD. CE :: I. R, & NP. NF :: *p*. *q*. His poſitis, ut innoteſcat punctum N, quod radios AN & NK determinat, erige ad BC normalem BX, cujus quadratum ſit ad BC quadratum, ut $\frac{qq-pp}{pp}$ ad $\frac{II-RR}{II}$, & acta CX ſecabit Circulum in deſiderato puncto N. Eſt enim ex hypotheſi *p*. *q* : : (NP. NF : :) ND. NE, & I. R : : CD. CE. Quare $\frac{q}{p}$ ND = NE; & $\frac{R}{I}$ CD = CE. Porro, cùm ſit NDq + CDq (= NCq) = NEq + CEq, aufer hinc inde NDq + CEq, & reſtabit CDq − CEq = NEq − NDq; hoc eſt, ſubſtituendo valores ipſarum CE & NE modò inventos, $CDq - \frac{RR}{II} CDq = \frac{qq}{pp} NDq - NDq$, & factâ reductione $\frac{II-RR}{II} CDq = \frac{qq-pp}{pp} NDq$; quo in proportionalitatem reſolutio, fit $\frac{qq-pp}{pp} . \frac{II-RR}{II}$: : (CDq. NDq : :) BXq. BCq. Q. E. D.

PROP. XXXV.

Sole Sphæram pellucidam illuſtrante, radiorum ejus, poſt unam reflexionem emergentium Maximam ad axem inclinationem determinare.

Sit BNK Sphæra propoſita; BQ, diameter ſive axis incidentibus radiis parallelus; AN, aliquis ex incidentibus; NF, refractus ejus;



FG, reflexus; & GR, denuo refractus: & quærendus erit Maximus angulorum, quos RG cum axe BQ poteſt conficere. In quem finem

nem advertendum eſt, quòd in eo ſolo caſu, ubi RG maximè inclinatur ad BQ, radii ipſi AN viciniſſimi poſſunt emergere paralleli ad RG. Nam in aliis caſibus ex emergentibus radiis ſibi viciniſſimis alii magis, alii minus continuò inclinantur ad BQ, adeoque aliquantulum inclinantur ad ſe invicem. Advertendum eſt præterea, quòd radii emergent paralleli, qui conveniunt ad punctum reflexionis. Duc enim radium *an* ipſi AN parallelum & quàm proximum, ſitque ejus refractus *nf*, reflexus *fg*, ac iterum refractus *gr*; & punctis F & *f* coincidentibus, cum anguli NF*n* & GF*g* ſint æquales, & refractiones ad N, *n* & G, *g* ſimiles; emergentes radii, GR & *gr*, æquè paralleli erunt ac incidentes AN & *an*. REFRACTIONIBUS.

Quærendus eſt itaque radius AN, cujus refractus cum refracto viciniſſimi radii *an* concurrit ad F. Et quidem per Corol. 3. Prop. XXXII. (demiſſis à centro Sphæræ ad radios normalibus CD & CE, poſitoque I. R : : CD. CE) ſi radii iſti ad quodvis punctum Z concurrant, erit I × NF. R × NP : : NZ. EZ : : NF. EF (puncto nempe Z ad ipſum F juxta hypotheſin cadente) : : 2. I. Quare I × NF = 2R × NP, & I. 2R : : NP. NF. Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. X. dabitur punctum N. Scilicet ad verticem circuli ducatur tangens BX, cujus quadratum ſit ad quadratum ſemidiametri BC, ut 4RR − II ad II − RR, & agatur CX; hæc enim Circulo occurret in N, & ex invento N cætera nullo negotio determinantur.

Corol. 1. Hinc ſit 3RR. II − RR : : CNq. NDq. Cùm enim ſit 4RR − II. II − RR : : BXq. BCq; componendo erit 3RR. II − RR : : (BXq + BCq. = CXq. BCq : :) CNq. NDq.

Corol. 2. Eſt & I. 2R : : ND. NE. Nam ſuprà fuit I. 2R : : NP. NF, & ex his expeditior evadit Problematis reſolutio.

Scholium.

Unà cum Maximâ inclinatione radii RG, datur Maximus arcuum FQ, ad refractos NF terminatorum. Nam angulus FCQ, quem FQ ſubtendit, eſt æqualis angulo, quem CF & AN comprehendunt; hoc eſt, æqualis dimidio anguli, quem RG & AN, vel BQ, comprehendunt: & proinde arcuum FQ, æquè ac angulorum ab RG & BQ comprehenſorum, maximus eſt, qui radio AN in punctum jam inventum incidente definitur.

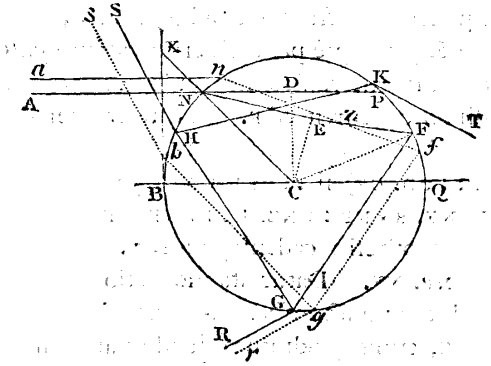
PROP.

De Curvarum

PROP. XXXVI.

Sole Sphæram pellucidam, BNP, *illuſtrante; radiorum ejus, poſt duas reflexiones emergentium, minimam ad axem inclinationem determinare.*

Sint AN & A*n* radii duo incidentes ſibi quàm proximi; qui poſt duas reflexiones, in F*f* & G*g*, emergant ſecundum HS & *hs*: et manifeſtum eſt, quòd in eo ſolo caſu, ubi angulus acutus, quem



BQ & SH comprehendunt minimus eſt, radii illi HS & *hs* poſſunt eſſe paralleli, uti ſuprà de radius GR & *gr* dictum fuit; & ubi hoc accidit, radius etiam FG ad *fg* parallelus erit. Unde 2 arc. F*f* = (arc. F*f*+G*g* = arc. FG−*fg* = arc. NF−*nf*=) arc. N*n*−F*f*. Adeoque 3 arc. F*f* = arc. N*n*; & cùm NF dividatur in Z in ratione iſtorum arcuum, ut patet, erit NZ=3ZF=3EZ. Cùm itaque per Corol. 3. Prop. XXXII. ſit I×NF. R×NP :: NZ. EZ :: 3. 1; erit I×NF =3R×NP, ſive I. 3R :: NP. NF. Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. X. dabitur punctum N, ducendo nempe BX, quæ circulum tanget in vertice B, & cujus quadratum ſit ad BC quadratum ut 9RR−II ad II−RR, & agendo CX, quæ occurret peripheriæ in N. Invento autem N, cætera facile determinantur.

Corol. 1. Hinc eſt 8RR. II − RR :: CN*q*. DN*q*. Nam 9RR−II. II − RR :: BX*q*. BC*q*; & componendo, 8RR. II − RR :: CX*q*. BC*q* :: CN*q*. ND*q*.

Corol.

Corol. 2. Eſt etiam I. 3R :: ND. NE, utpote cùm ſuprà fuerit I. 3R :: NP. NF. REFRACTIONIBUS.

Scholium.

Ad eundem modum maxima radii KT, poſt tres reflexiones emergentis, inclinatio ad axem, juxtà ac maximus arcuum QG inveſtigabitur. Scilicet in eo caſu FG & *fg* convenient ad G, eritque arc. F*f* = (arc. FG−*fG* = arc. NF−*nf*=) N*n* − F*f*; & inde 2 arc. F*f*=arc. N*n*, & NZ=2ZF; adeoque 4. 1 :: NZ. EZ :: (per Corol. 3. ad Prop. XXXII.) I×NF. R×NP, ſive I. 4R :: NP. NF, & proinde per Lem. X. 16RR−II. II−RR :: BX*q*. BC*q*; unde conſectatur eſſe 15RR. II−RR :: CN*q*. NDQ, & I. 4R :: ND. NE.

Atque ita, ſi radii poſt quatuor reflexiones emergentis, inclinatio minima deſideratur, determinabis faciendo, ut ſit 25RR−II. II−RR :: BX*q*. BC*q*; vel 24RR. II−RR :: CN*q*. ND*q*. Et I. 5R :: ND. NE, & ſic præterea in infinitum.

66. Tranſactis refractionibus Homogeneorum radiorum, jam reſtat, ut Heterogeneos conferamus. De horum ad Plana refractionibus paulo fuſius agebamus, ut eo Priſmatum (quorum uſus in experimentis faciendis poſthac erit frequentiſſimis) affectiones innoteſcerent. Præcipuum verò, quod circa curvas ſuperficies jam determinandum occurrit, eſt quantitas erroris radiorum; à quo oritur confuſio, ſive indiſtincta viſio Objectorum, quæ in Teleſcopiis per nimiam vitri, objectum reſpicientis, aperturam evenire ſolet. Et in hunc finem cùm præmiſſa ſit Prop. XXXI. unde errores innoteſcunt, qui in ſphæricis ſuperficiebus per ineptitudinem Figuræ efficiuntur: ſequentem jam ſubjungimus, quâ errores ex inæquali Refrangibilitate diverſorum radorum orti, determinari poſſunt.

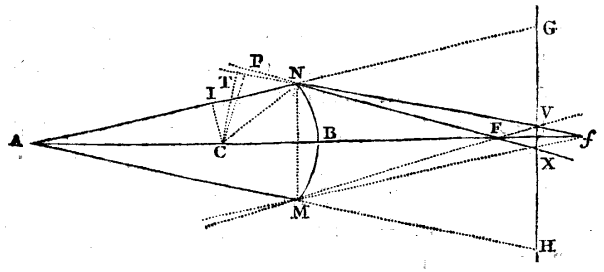
PROP. XXXVII.

Heterogeneis radiis in Sphæram incidentibus, errores ex inæqualibus radiorum ſimiliter incidentium refractionibus progenitos determinare.

E puncto A in Sphæram NBM, centro C deſcriptam, incidant, ſecundum lineam aliquam AN, radii duo maximè diffomes; quo-

De Curvarum

rum refracti ſunt NF & N*f*, axi occurrentes in F & *f*, & in illos demittantur perpendicula CI, CP & CT. Jam, ſi accurata reſolutio deſideretur, refractiones radiorum NF & N*f* ſeorſim compu-



tandæ ſunt; ſed, cùm arcus NM ponatur admodum exigua portio circuli, veritatem quàm proxime aſſequemur aſſumendo angulos CNI, CNP, & CNT ferè eſſe ut eorum ſinus. Sit ergo I communis ſinus incidentiæ; P, ſinus refractionis radiorum maximè refrangibilium; ac T, ſinus ille minimè refrangibilium. Erit ang. CNI. ang. CNP : : I. P, & ang. CNP. ang. CNT : : P. T, ac diviſim ang. INP. ang. CNP : : P−I. P, & ang. CNP. ang. PNT : : P. P−T, & ex æquo, ang. INP. ang. PNT : : P−I. P−T.

Sume jam arcum BM æqualem arcui BN; & radiorum ſecundum AM incidentium duc refractos MF, *mf*, prioribus occurrentes in V & X. Age VX, & produc donec occurrat incidentibus radiis ad G & H; & patet VX eſſe latitudinem minimi ſpatii, in quod omnes radii congregari poſſunt. Eſtque GX. VX : : (ang. GNX. ang. VNX proximè : : ang. INP. ang. PNT : :) P−I. P−T; & GH+VX (2GX). VX : : 2P−2I. P−T; ac diviſim GH. VX : : P+T−2I. P−T. Unde datis P, T, I, dabitur ratio GH ad VX.

Ex. gr. Cùm ſuprà determinaverim, quòd ad vitrum aëri conterminum ſit I. P : : $44\frac{1}{2}$. $69\frac{1}{2}$, & I. T : : $44\frac{1}{2}$. $68\frac{1}{2}$; ſi aſſumatur I = $44\frac{1}{2}$, erit P = $69\frac{1}{2}$, ac T = $68\frac{1}{2}$, & P+T−2I = 49, & P−T = I, adeoque GH. VX : : 49. I, circiter.

Scholium.

(n) Hæc ita ſe haberent, ſi vera eſſet æſtimatio lineæ PQ fig. p. 334, quam Newtonus hic poſuit. Verùm eam vitioſam eſſe ſuprà monuimus. (Not.ᵇ.) Nimirum illa PQ his notis algebraicè deſignanda eſt, $\frac{RRy^3}{4.11.aa}$. Unde pro literis *a*, *y*, I, R numeris 120, 1, 11, 17 ſubſtitutis, efficietur PQ = $\frac{17\times17}{4\times11\times11\times120\times120} = \frac{289}{6969600}$. Quare VX : PQ = $\frac{2}{49} : \frac{289}{6969600} = 2\times6969600 : 49\times289 = 984 : 1$. Similem numerorum emendationem adhibuit quiſquis ille fuerit, qui hunc librum primus edidit.

Scholium.

Refractionibus.

67. Ope hujus & Prop. XXXI. errores Homogeneorum Radiorum, qui in ſphæricis ſuperficiebus per Figuræ ineptitudinem obveniunt, cùm Heterogeneorum erroribus conferri poſſunt; & conſtabit hoſce longè majores eſſe in parvis Sphærarum portionibus: atque adeo heterogeneitatem Lucis, & non ineptitudinem Figuræ Sphæricæ, in cauſâ eſſe, quòd Teleſcopia in majorem perfectionis gradum nondum promota habeamus.

Concipiamus e. g. quòd NMB in figuris p. 334 & p. 346. referat Objectivum Vitrum Teleſcopii, cujus anterior ſuperficies NM plana ſit; eò ut radios in poſteriori, ſeu ſphæricâ, ſuperficie NBM ſolummodo refringat; & ponamus eâ ſemidiametrum hujus Sphæræ eſſe 10 pedes, ut Teleſcopium ferè 20 pedes, ſive 240 digitos, longum conficiat; ſitque Apertura NM 2 dig. quanta maxima cum viſione ſatis diſtinctâ adhibeatur in hujuſmodi Teleſcopiis, quæ Objectum quaſi 70 vel 80 vicibus ampliant; & ſinus incidentiæ ſit ad ſinum refractionis, in confinio vitri & aëris peractæ, ut 11 ad 17 circiter, prout ſuprà determinavimus. His poſitis ſcribendum eſt 120 pro *a*, 1 pro *y*, 11 pro I, & 17 pro R, in valore ipſius PQ, quem exhibuimus in Corol. 7. Prop. XXXI. hoc eſt in termino $\frac{Ry^3}{4Iaa}$; & emergit $\frac{17 \text{ dig.}}{4\times11\times120\times120}$, ſive $\frac{17 \text{ dig.}}{633600}$, = PQ: eſtque hic error lateralis Homogeneorum Radiorum, ortus ab ineptitudine Figuræ Sphæricæ. Præterea concipiamus radios AN & AM fig. p. 346. eſſe parallelos axi; & erit GH = NM = 2 dig. adeoque VX, error nempe lateralis heterogeneorum ab invicem in eodem loco concurſûs, erit $\frac{2}{49}$ dig. Confer jam hos errores, & patebit VX eſſe ad PQ (ſeu $\frac{2}{49}$ ad $\frac{17}{633600}$) ut 1267200 ad 833, ſive ut 1521 ad 1 circiter (n). Adeoque VX eſſe quaſi mille & quingentis vicibus majorem quàm PQ; tanta ſanè diſproportio, ut PQ reſpectu VX pro nullo haberi poſſit. Error quidem VX, cùm ſit $\frac{2}{49}$ dig. tantus eſt, ut miror, quòd Objecta per hujuſmodi Teleſcopia tam diſtinctè videri

poſſint. Sed alterius generis error PQ, ſive $\frac{17}{633600}$ dig. i. e. $\frac{1}{37271}$ dig. circiter, longè minor eſt, quàm qui poteſt eſſe ſenſibilis, & proinde negligendus; & indiſtincta viſio erroribus ex heterogeneitate Lucis exortis ſolummodo tribuenda. Et hinc patet perfectionem Teleſcopiorum non è Conicis Sectionibus petendam eſſe, ſed figuras Sphæricas huic uſui æquè inſervire poſſe. In Microſcopiis quidem errores homogeneorum radiorum, ex ſphæricâ ſuperficie Vitri Objectivi, propter Aperturam benè magnam, enormes oriuntur & admodum ſenſibiles; adeo ut illa Vitra, ſi ſecundum conicam aliquam ſectionem debitè formarentur, paulo perfectiora evaderent. Sed (°) methodus tamen me non latet corrigendi errores illos abſque Conicis Sectionibus; & efficiendi ut Vitra è Sphæricis ſuperficiebus formari poſſint, quæ radios homogeneos ſatis accuratè refringent, ne dicam, quæ longè accuratiùs refringent obliquos radiorum penicillos, quàm vitra aliis quibuſcunque figuris terminata; adeo ut Sphæricas ſuperficies uſibus Dioptricis, præ cæteris omnibus accommodatas eſſe cenſeam.

(°) Nempe ſi perſpicillorum vitra objectiva ex vitris duobus ſphæricè figuratis & aquam inter ſe claudentibus conflentur. Vid. Newtoni Princip. Schol. Prop. ult. Lib. 1. Et *Optics*. Prop. VII. Part. I. Lib. 1. *Curator Editionis Primæ.*

ARGUMENTA CAPITUM

PARTIS SECUNDÆ LECTIONUM OPTICARUM.

SECT. I. *Exponitur Doctrina de Coloribus, & per experimenta Priſmatis probatur.* Pag. 349
SECT. II. *De variis Colorum Phænomenis.* 399
SECT. III. *De Phænomenis Lucis per Priſma in Oculum tranſmiſſæ.* 411
SECT. IV. *De Phænomenis Lucis per Medium Refractivum parallelis planis terminatum tranſmiſſæ.* 419
SECT. V. *De Phænomenis Lucis per Media ſphæricè terminata tranſmiſſæ; deque Iride.* 424

OPTICÆ PARS SECUNDA.

DE COLORUM ORIGINE.

SECTIO PRIMA.

Exponitur Doctrina de Coloribus, & per Experimenta Priſmatis probatur.

QUI in fabricandis Teleſcopiis occupati ſunt, de Coloribus conqueruntur, quibus Objecta, dum vitris iſtis mediantibus aſpiciuntur, tingi ſolent; quique eo magis augentur & apparent, quo Vitrum Oculare ex ſphæris minoribus efformatur, vel etiam quo Vitrum Objectivum majori latitudine radiis intrantibus patet. Unde duplici incommodo implicati impediuntur, ne Perſpicilla ad optatum perfectionis gradum perducant: tum quòd Oculare Vitrum ultra certos gradus parvum, ad Objecta magis amplianda, nequeant adhibere; tum quòd vitrum Objectivum ultra certos limites aperire nequeant, ad Objecta magis lucida & perſpicua reddenda. Qui gradus vel limites, ſi non probè obſerventur, Objecta coloribus involuta reddentur, & multo minùs diſtincta, quàm ſi vel minora cernerentur, ope vitri ocularis minùs convexi, vel minùs lucida diminutâ Perſpicilli aperturâ. Jam, cùm iſtæ perfectiones præcipuæ ſint, quæ in Perſpicillis deſiderantur; nempe ut Objecta magis amplient, & reddant lucidiora: operæ pretium videtur in naturam Colorum inquirere; ut inveſtigemus tandem quid in cauſâ ſit, quòd ita appareant, & Objecta reddant indiſtincta; hujus enim ignorantia quàm plurimos labore non exiguo ſed inani tamen exercuit, dum perfectionem Teleſcopiorum à vitioſis

De Radiorum

vitrorum figuris ortam esse credentes, in istis meliori figurâ perpoliendis navârunt operam. At, si causam horum colorum satis exploratam habuissent, simul innotuisset inæqualis diversorum radiorum Refrangibilitas, & inde vitia Telescopiorum non ab ineptitudine figuræ Sphæricæ ad refractiones ritè peragendas originem ducere constitisset. Quo benè intellecto, conatus suos procul dubio mutâssent, & laboribus istis secundum aliam methodum dispositis, Opticam in gradum multo perfectiorem jam promotam haberemus.

2. Qui de Coloribus hucusque differuere, vel id nomine tenus fecerunt, ut Peripatetici; vel in eorum naturam & causas inquirere conabantur, ut Epicurei & alii recentiores. Quæ Peripatetici de hisce tradidere, etsi vera forent, tamen ad nostrum propositum nihil valerent: quippe, dum modum, quo generantur, & causas, unde fiunt tam varii, non attingant. Etenim illi, de originibus & variis rerum speciebus disputantes, pro causis, ex quibus ipsarum existentiam & discrimen mutuantur, varias quasdam Formas assignârunt; verùm de particulari cujusvis Formæ causâ & ratione, ob quam differt ab aliis, haud unquam quicquam differuere. Et sic ea fecerunt missa, quorum explicatio videtur summum Philosophorum officium, imo quæ sola mentem, scientiæ naturalis avidam, explere possint.

3. Attamen, ne mancam Philosophiam tradidisse viderentur, effecerunt, ut ejusmodi disquisitiones pro maximè absurdis & ridendis habeantur; utpote quæ supponunt Formarum esse alias Formas, & Qualitates Qualitatum. Itaque cùm Lux definiatur esse Qualitas vel Forma, quæ dat esse lucidum, non expectandum est, ut aliquid de ejus causis audiamus, vel quâ ratione ad varios Colores producendos fiat varia. Dicunt equidem, quod plus luminis quibusdam coloribus immiscetur, quàm aliis: at hoc non sufficit ad eorum productionem, tùm quòd nullus omnino color ex albedine & nigredine solummodo mixtis, præter fuscos intermedios, generatur; tùm quòd quantitas lucis non mutat speciem coloris. Corpus enim Rubrum, verbi gratiâ, semper apparet Rubrum, sive aspiciatur in crepusculo, sive in meridie lucidissimo. Porro autem ipsa definitio, quam attribuunt coloribus, adeo non pandit eorum naturam, ut eos ne nomine tenus exprimat. Ait Aristoteles

Aristoteles Χρῶμα δὲ ἐστὶ τῦ διαφανῦς ἐν σώματι ὁρισμένῳ πέρας. Quæ superficiei coloratæ potius quàm coloris descriptio est. Illa enim dici potest extremitas perspicua in corpore terminato. At color plerumque videtur, ubi nulla talis datur extremitas, ut in Iride & Prismate, in Vitris vel Liquoribus perspicuis, & aliquo colore leviter tinctis. In Aquâ Marinâ, quæ viridis plurimùm apparet, qui tamen color non in extremitate aquæ, sed per totam ejus crassitiem, generatur; in Aere, qui, licet maximè perspicuus & nullo corpore denso terminatus, serenâ tamen nocte cæruleus apparet; & in Flammâ, quæ non minùs perspicua est, & luci pervia, quàm ipse Aer. Sic cùm humores oculi colore aliquo tinguntur, omnia videntur eodem colore tincta, licet extremitas perspicui sit aliis coloribus prædita. Et cùm Solem nudis oculis modò aspexeris, luminosa omnia deinceps videntur rubra, & nigra plerumque apparent cærulea; qui color erit magis conspicuus, si clausis oculis te in locum aliquem tenebrosissimum statim conferas. Imo premendo oculum colores in tenebris excitare liceat; quis autem vocabit illos extremitatem perspicui? Cæterùm non opus est, ut has opiniones enixè refutem, quæ, etsi veræ essent, tamen non sunt sufficientes, neque proposito meo adversantur. Esto enim Lux qualitas corporis lucidi: esto Lumen actus perspicui; & Color ejus extremitas: & quicquid de illis dixerunt, esto; abinde tamen haud concipi poterit, quo pacto Lux refringatur; unde Colores sint varii; quid in causâ sit, quòd in Perspicillis apparent; & quâ ratione incommodum istud devitari possit. Lucis Coloribus.

4. Ad opiniones aliorum Philosophorum quod attinet, dixerunt Colores vel ex Umbrâ Luceque variè mixtis; vel ex contortione globulorum, aut eorum variis pressionibus generari; vel denique ex variis modis, quibus Medium quoddam Æthereum vibratur, statuentes Lucem productam esse ex impulsu vibrantis Ætheris in retiformem tunicam delato. Extra oleas nimis vagarer, si has opiniones figillatim refutandas adortus essem: nec opus est, ut faciam, cùm omnes in communi quodam errore consentiant; scilicet, quòd modificatio Lucis, quâ singulos colores exhibet, ei non sit insita ab origine suâ, sed inter reflectendum vel refringendum acquiritur. Inter radios lucis nullum contemplantur discrimen, priusquam incidant in corpus aliquod colorificum; opinati tantùm,

De Radiorum

tùm, quòd, pro variâ disposítione corporis istius, variis modis reflectuntur vel refringuntur, & pro specie modificationis, quam sic acquirunt, varia deinde Colorum phantasmata spectantibus exhibent. Mixtura Lucis & Umbræ, gyratio globorum, vel varia vibratio Medii non supponuntur inesse radiis antecedenter ad eorum reflexiones vel refractiones, sed per istas actiones generari creduntur. Quemadmodum & Peripatetici statuunt Colores à corporibus originem ducere, quorum dicunt esse qualitates. Attamen contrarium esse verum ex sequentibus abunde patebit. Invenio scilicet, quod modificatio Lucis, unde Colores originem sumunt, luci connata sit; & non oritur à Reflexione neque à Refractione neque à qualitatibus corporum, aut modis quibuslibet, nec ab iis vel destrui potest, vel ullo modo mutari.

5. Verùm, ut sententiam meam distinctius proferam, invenio primò, quòd radiis diversè refrangibilibus competant diversi colores; maximè refrangibilibus Purpura, sive Violarum color competit, et Rubor minimè refrangibilibus, atque mediocribus Viriditas, vel potius confinium Viridis & virescentis Cærulei. Cæruleus autem Purpuræ intercedit & Viriditati, Flavusque Viriditati & Rubori. Adeoque radii prout sunt plus plusque refrangibiles, apti sunt ad hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generandos unà cum omnibus eorum successivis gradibus & coloribus intermediis.

6. Invenio præterea, quòd nullius radiorum generis Forma, sive disposítio colorifica, vel refractione, vel aliâ quâcunque (quam potuerim animadvertere) causâ, mutari potest; sed unicum tantùm, sibi proprium, colorem unumquodque semper conservat & exhibet; si modò à radiorum diversi generis misturâ non conturbetur. Nam colores, qui refractionibus generari videntur, non nisi difformium radiorum misturâ variâ, vel separatione fiunt.

7. Tertio invenio, quòd color Albus & Niger, unà cum Cinereis seu Fuscis intermediis, fiunt ex radiis cujusque speciei confusè mistis; & similiter, quòd cæteri omnes colores, qui non sunt ex primitivis, per varias horum radiorum misturas producuntur. Et inde non mirum est, si difformibus radiis per inæqualem refractionem segregatis, diversi colores ex his de novo emergere videantur.

8. Quin[illegible]n

8. Quinetiam invenio, quòd Primitivi Colores per misturam radiorum alterutrinque confinium exhiberi possunt. Viridis nempe ex Flavo & Cæruleo; Flavus ex adjacente Viridi Citreoque, & sic de aliis. Per colores autem Primitivos non tantùm quinque prædictos intelligo, sed & quoslibet alios, quibus exhibendis aptum datur aliquod uniforme radiorum genus. Lucis Coloribus.

9. Invenio denique, quòd omnes omnium corporum colores non aliunde generantur quàm è disposítione quâdam, quâ apta sunt ut alios radios reflectant, & intromittant alios. Sic corpus rubrum est, quòd radios ad Rubedinem aptos reflectit maximè, & plerosque cæteros intromittit; Purpureum, quod radios isti colori generando proprios reflectit, & intromittit alios: Album verò, quòd ferè omnes reflectit; & Nigrum, quòd omnes intromittit, pauciffimis, sed omnium tamen specierum, radiis repercussis.

10. Verùm ne videar officii limites excessisse, dum naturam Colorum pertractare aggrediar, qui nihil ad Mathesin attinere censeantur; non abs re erit, si de ratione incepti hujus iterum commonefaciam: nimirum tanta est inter proprietates Refractionum & Colorum affinitas, ut seorsim explicari nequeant. Qui alterutras ritè velit cognoscere, ut alteras cognoscat necesse est: & præterea, si de Refractionibus non agerem, & earum disquisitio non esset in causâ, quòd negotium de Coloribus simul explicandis inceptarem; tamen generatio Colorum tantam Geometriam complectitur, & eorum cognitio tantâ firmatur evidentiâ, ut vel ipsorum gratiâ possem aggredi, sic limites Matheseos non nihil ampliaturus. Quemadmodum enim Astronomia, Geographia, Navigatio, Optica & Mechanica pro scientiis Mathematicis habeantur, licet in iis agatur de rebus Physicis, Cœlo, Terrâ, Navibus, Luce & Motu Locali: sic etiamsi Colores ad Physicam pertinent, eorum tamen scientia pro Mathematicâ habenda est, quatenus ratione mathematicâ tractantur. Imo verò, cùm horum accurata scientia videtur ex difficillimis esse, quæ Philosophus desideret; spero me quasi exemplo monstraturum, quantum Mathesis in Philosophiâ Naturali valeat; & exinde ut Geometras ad examen Naturæ strictiùs aggrediendum, & avidos scientiæ naturalis ad Geometriam priùs addiscendam horter: ut ne priores suum omnino tempus in speculationibus humanæ vitæ nequaquam profuturis

De Radiorum

absumant; neque posteriores, operam præposterâ methodo usque navantes, à spe suâ decidant. Verùm ut Geometris philosophantibus, & Philosophis geometriam exercentibus, pro conjecturis & probabilibus, quæ venditantur ubique, scientiam Naturæ summis tandem evidentiis firmatam nanciscamur. Itaque ad institutum redeo, de Coloribus secundum præcedentes quinque Propositiones explicatis disceptaturus.

PROP. I.

Radiis diversè Refrangibilibus diversi competunt Colores.

EXPER. I.

11. Quo primum comprobem, repetamus experimentum Prismatis sub initio propositum; nempe Radii Solares obtenebratum cubiculum ad foramen F (fig. 1.) ingressi, à Prismate ABC, quàm proximè foramen istud intus dispositò, refringantur, tendentes deinde versus oppositum parietem HI, ad imaginem PT ibi depingendam; & Imago illa, ut vulgò notum est, coloribus tingetur: quorum Rubeus ad extremitatem T à recto cursu minus deviantem, & Purpureus ad alteram procliviorem extremitatem P procidet; Cæruleus autem Viridisque & Flavus ad Q, R & S, intermedia loca, cernentur. Constat itaque quòd radii maximè refracti Purpuram exhibent, & minimè refracti Ruborem; cæterique, intermediam refractionem passi, colores in ordine præfinito intermedios. Sed in majorem evidentiam, tum doctrinæ de radiorum diversâ Refrangibilitate sub initio propositæ, tum hujus doctrinæ, quòd certis Refrangibilitatis gradibus certi conveniant Colores; videamus è contra an diversi coloris radii diversam Refractionem patientur; hoc est, an radii versus P tendentes refractionem iterum majorem patientur, quàm qui tendunt versus T; id quod variis modis tentare liceat, quorum facillimum & maximè perspicuum sequentem existimo.

EXPER. II.

12. Sume aliud Prisma *abc* (fig. 1.) & illud alicubi inter primum Prisma, ABC, & imaginem, PT, ita colloca, ut sit illi Prismati

mati ABC transversum, sive parallelum imagini PT, radiosque versus PT tendentes intercipiat, & alioversum refringat, puta versus *pt*. Hoc facto, Imaginem *pt* refractionibus utriusque Prismatis fic effectam videbis, ut priùs coloratam, sed in alio tamen situ dispositam; non parallelam imagini PT, sed secundum extremitates rubras manifesto convergentem. Jam, cùm radii ad utrosque colores, Rubrum T & Purpureum P pertinentes, similiter incidant in Prisma secundum *abc*, si eandem præterea Refractionem paterentur, imagines PT & *pt* deberent esse parallelæ; & ideo, cùm non existunt parallelæ, sed imaginis *pt* extremitas Purpurea, *p*, longiùs ab alterâ imagine PT transferatur, quàm extremitas Rubea, *t*; necessario concedendum est, quòd radii ad extremitatem purpuream, P, tendentes magis refringantur, quàm qui tendunt ad extremitatem rubeam T: hoc est, quòd radii generantes Purpuram apti sunt, ut magis refringantur quàm Ruborem efficientes: atque idem quoque de coloribus intermediis eâdem ratione constabit, sicut ostendendum proposui. Lucis Coloribus.

13. In experiendis hisce notari poterit, quòd quo vicinius anteriori Prismati, ABC; sive quo remotius à pariete, HI, collocetur prisma posterius *abc*; imagines, *pt* & PT, eo magis ab invicem distantes, etiam ad se magis inclinabuntur; adeo ut angulum semirectum vel paulò minorem eo contineant, cùm Prismata collocantur ad invicem viciniffima; cujus rei ratio facillima est consideranti, quòd distantiæ, *Pp* & *Tt*, sunt in ratione quâdam datâ. Sic in fig. 2. si parallelæ *Pp* ac *Tt* sint in ratione datâ, quo majores existant, eo major erit inclinatio linearum PT ac omnium *pt*. Et hinc patet axes imaginum omnium productas convenire ad commune aliquod punctum cum axe ipsius PT.

14. Si fortè concursus Imaginum desideretur, radii OF, à Sole directi, eò usque producantur, donec occurrant cum plano HI, in quod dictæ imagines projiciuntur, quemadmodum videre est ad X; id quod fiet auferendo Prisma ABC, ut jubar per F trajectum rectâ tendat ad X: & erit X locus, ad quem imagines PT & *pt* convergunt. Nam, quemadmodum radii maximè refrangibiles cadunt in P ac *p*, & minimè refrangibiles in T & *t*, conficientes imagines oblongas, PT ac *pt*; si alii præterea radii darentur minus adhuc refrangibiles, illi citra punctum T ac *t* in papyrum IH caderent: quo

De Radiorum

pacto imagines illæ paulo longiores evaderent, auctæ scilicet ad extremitates T ac *t*. Atque ita, si fingeremus radios gradatim minùs atque adhuc minùs refrangibiles dari, usque dum deventum esset ad radios adeo pertinaces, ut non possent omnino refringi; illi radii Prismata sine aliquâ refractione pertranseuntes, incidere deberent in ipsissimum punctum x, ad quod posuimus radios à Sole directè venientes tendere. Imagines itaque, PT & *pt*, sic productæ convenirent ad x, & proinde ad idem x convergunt. Cæterùm dubitari potest, an imagines illæ, si eo usque producerentur, dum convenirent ad x, forent accuratè rectæ vel paululum incurvatæ; neque istud (cùm multi foret laboris & parvi momenti) jam lubet determinare; sufficit, quòd ex observatione quàm proximè convergunt ad x.

15. De hoc experimento sub initio observabam, § 23. quòd omnibus adversatur objectionibus, quæ contra doctrinam de inæquali Refrangibilitate traditam proponi possunt; ex eo quod per transversam refractionem secundi Prismatis constat inæquales refractiones non esse fortuitas & irregulares, neque ex radii cujusque diffusione vel dilatatione ortas esse, aut aliâ quâvis causâ præter dispositionem cujusque radii ad refractionem in gradu aliquo certo & constante patiendam; quandoquidem cujusque refractio in utroque Prismate secundum illam legem peragitur. Addo jam, quòd exhinc etiam constat, refractiones singulorum radiorum secundum easdem leges peragi, sive commisceantur cum radiis aliorum generum, ut fit in albâ luce, sive separatim refringantur, luce priùs in colores conversâ. Nam experiri est, quòd similes sunt refractiones posterioris Prismatis, cùm proximè collocatur post alterum Prisma, antequam Lux per id trajecta transmigret in Colores, atque cùm longius post illud Prisma statuitur, ubi Lux evasit colorata.

16. Sicui in potestate est Instrumentum aliquod ad quantitates Refractionum accuratè mensurandas paratum, nullus dubito, quin istius etiam ope seorsim dimetiendo refractiones diversorum generum radiorum, facilè observabit earum differentias; licet ego prædictis tanquam manifestissimis acquiescens, haud operæ pretium duxerim rem aliis modis experiri. Verùm, ut cuique magis pateat,

teat, quanta sit prædictorum evidentia, quædam, quæ exinde scaturiunt notatu digniſſima, proferre non pigebit. Lucis Coloribus.

EXPER. III.

17. Sit *Ff* (fig. 3.) paries, vel operculum feneſtræ duobus foraminibus, F & *f*, luci pervium, iisque digitos duos ab invicem distantibus; & intus disponantur duo Prismata, ABC, DEG, in situ sibi invicem parallelo, & perpendiculari ad lineam *Ff* per centra foraminum ductam; quæ duo lucem ingressam refringunt ad imagines duas, PT & MN, in oppositum parietem projiciendas, simili prorsus modo, quo factum est in experimento priori; & præterea sint anguli Prismatum, ACB, DGE, comprehensi planis refringentibus æquales; quibus ita constitutis videbis imagines, PT & MN, in directum jacentes cum extremitatibus earum T & M contiguis. Quod si non eveniat, situs unius è Prismatibus parùm mutandus est, donec extremitates contiguas esse cernas, vel fortè nonnihil coincidentes. Purpurâ M & Rubore T sic juxta positis, adhibeatur Prisma tertium *abc*, quod primis Prismatibus & eorum imaginibus interponatur, in situ ad lineam *Ff* sive ad imagines dictas, PT, MN, parallelo; ita nempe ut radios utriusque Prismatis ABC, DEG, tendentes versus PT & MN, pariter intercipiat, eosque refringens aliò projiciat, quemadmodum ad *pt* & *mn*; adeo ut quæ duobus Prismatibus in priori specimine facta sunt, hîc videas facta tribus.

18. His ita paratis & constitutis, videbis imagines *pt* & *mn* ab invicem disjunctas esse, quæ priùs apud PT & MN fuerunt contiguæ & in directum positæ; ita quidem ut Purpura, *m*, in extremitate imaginis *mn*, magis distet ab imaginibus primis PT & MN, quàm Rubor *t* in extremitate imaginis *pt*; id quod nullo modo potuisset accidisse, nisi radii ad Purpuram generandam apti aliquanto magis refringerentur ex incidentiâ pari, quàm radii generantes Rubedinem. Etenim, cùm radii coloris utriusque pariter incidant in Prisma posterius *abc*, pariter etiam emergerent, si æqualiter refringerentur; & exinde depingerent imagines, *pt* & *mn*, prioribus, PT & MN, parallelas & in directum jacentes. Dixi radios utriusque coloris (Purpurei Rubeique) pariter incidere in Prisma posterius *abc*: quod ne moram injiciat alicui, concipien-

De Radiorum

dum eſt, quòd radii FT tantùm inclinantur verſus extremitatem ejus *c*, quantum alteri *fM* verſus extremitatem alteram *ab*, & ſic incident pariter ſive ad eoſdem angulos, licet non paralleli. Si quis tamen velit efficere, ut incidant etiam paralleli, nihil aliud agendum eſt, quàm ut alterum è Priſmatibus anterioribus, ABC, vel DEG, circa ſuum axem paululum convertatur, donec inter T & M, interiores imaginum extremitates, tanta intercedat diſtantia, quanta eſt inter foramina F & *f*, ſive quanta iſti rei ſufficiens videatur; imaginibus ad iſtam diſtantiam in directum jacentibus: & Priſmate *abc* deinceps interpoſito, facilè percipiet, quòd incidentes parallelè emergent inclinati; tum quòd imagines non amplius in directum jacebunt, tum quòd Purpura M ad majorem diſtantiam transferetur quàm Rubedo T.

19. Si tria Priſmata non præſto ſint, experimentum jam recitatum duobus experiri poſſit, idque modo magis expedito & facili. Sit ABCDE (fig. 4.) priſma, cujus unum latus planum, ABDE, papyro denigratâ tegatur, duobus parvis foraminibus, F & *f*, luci perviâ, quorum foraminum ſitus eſto ad longitudinem Priſmatis tranſverſus. Tunc Priſmate hoc ita diſpoſito, ut radii permeantes iſta foramina terminentur in oppoſitum quoddam planum, puta papyrum HI; transferatur iſta papyrus ultra citraque, donec videas imagines duas, PT & MN, contiguis extremitatibus in directum conjunctas ut priùs; deinde altero Priſmate *abc* interpoſito, in ſitu ad alterum tranſverſo, videbis imagines illas PT & MN ad *pt* & *mn* ita tranſlatas eſſe, ut non ampliùs jaceant in directum, rubedine *t* à T minùs remotâ, quàm purpura *m*, ſicut in prioribus contingebat.

EXPER. IV.

20. Eſt & aliud ex eodem fonte derivatum ſpecimen, haud expertu difficilius aut minoris evidentiæ. Priſmate ABC (fig. 5.) juxta foramen F ut priùs collocato, ad diſtantiam convenientem (veluti duodecim pedum) ſtatuatur aliud Priſma, *abc*, in ſitu tranſverſo reſpectu prioris, vel fortè parallelo, aut alio quovis pro arbitrio; ita tamen ut anterius Priſma, ABC, lucem refractam & coloratam projiciat in aliquod ex planis lateribus, *ac*; quod quidem latus obducatur papyro denigratâ, & exiguo foramine, G, per medium

medium transfoſſâ, per quod aliqui ex radiis, ab anteriore Priſmate refractis, tranſeant in hoc Priſma poſterius; ubi, cùm rurſus refracti fuerint, pergant ad papyrum HI ab inde decem pedibus, vel pluribus, diſtantem. Quibus ita conſtructis & diſpoſitis, in ſitu illo figatur papyrus, HI, & poſterius Priſma *abc*. Denique præ manibus ſumatur anterius Priſma ABC, non ut moveatur è loco ejus, ſed ut motu tantùm angulari nunc huc nunc illuc paululum inclinetur, ut alios atque alios colores ſucceſſivè trajiciat per foramen G in oppoſitam papyrum HI; & videbis, quòd color quilibet diverſus ad locum diverſum perget. Veluti, cùm ea ſit poſitio Priſmatis ABC, ut Rubeum colorem projiciat in G, ſi ponatur quòd ille ab altero Priſmate *abc* refringatur ad T; tum poſitione Priſmatis ABC paululum mutatâ, inclinando circa axem donec Purpura cadat in G; videbis, quòd ille color juxta obliquiorem tramitem refringetur, puta ad P: & pari modo, ſi color aliquis intermedius incidat in G, idem refringetur ad locum ipſis P & T interjacentem. Quamobrem, cùm radii cujuſlibet generis pergentes à foramine F, poſitione dato, ad foramen G poſitione datum, & ideo ſimiliter incidentes in Priſma poſterius *abc*, refringantur ad loca diverſa P, T, cæteraque intermedia; conſtat, quòd inæqualiter refringantur: & cùm refractus GP obſervetur magis deflectere ab incidente FG quàm refractus GT, conſtat, quòd radii Purpuram exhibentes magis refringantur quàm exhibentes Ruborem; cæterique deinceps in ordine intermedio. Lucis Coloribus.

21. Siqua forſan oboritur ſuſpicio, quòd ex motu Priſmatis ABC, foraminibus F & G interpoſiti, incidentia radiorum diverſos colores efficientium tantum varietur, quantum ſufficiat ad varietatem efficiendam locorum P, T, &c. ad quos refringuntur, quamvis motus iſte ſit exiguus & ineptus huic effectui; tamen, ut ſuſpicio illa prorſus eximatur, anterius Priſma ABC ad alteras partes foraminis F, Solem verſus, collocandum eſt; ut radii incidentes in foramen G directè veniant à dicto foramine F: eo enim pacto, cùm foramina F & G poſitione determinentur, poſitio radiorum per utrumque trajectorum determinabitur; eademque accurata erit omnium incidentia, quoſcunque colores exhibentium: & tamen diverſicolorum refractio non ſecus peragetur ad loca diverſa, P_2, T_2, & C_2, quàm modò explicui.

EXPER.

De Radiorum

EXPER. V.

22. Ex abundanti denique placet alium recenſere modum, quo hæc eadem tentari poſſint, ne copia deſit experturis. Nimirum radiis, ut priùs, per Priſma ABC (fig. 6.) trajectis, ad diſtantiam quamlibet, puta viginti pedum, adhibeatur Speculum planum, quale IK vel GH; quod eoſdem verſus locum quemvis D reflectat: ubi per aliud Priſma, LMN, tranſmittantur denuò verſus *p* vel *t*. His poſitis, ſi Speculum iſtud ita collocetur ad IK, ut rubrum colorem reflectat, & notetur locus *t* ad quem hi radii tendunt, poſtquam tranſiêre per Priſma LMN; deinde Speculum ſtatuatur ad GH, ut violaceum vel cæruleum colorem ad idem Priſma LMN ſecundum eandem lineam PTD, reflectat; & notetur locus *p*, ad ad quem iſti etiam radii à dicto Priſmate LMN refringantur: invenietur, quòd cæruleus color, verſus *p* refractus, longiùs divaricabit ab incidentibus radiis PTD, quàm rubeus refractus verſus *t*: atque adeo quòd radii Cæruleum generantes majorem refractionem patiantur, quàm generantes Rubeum.

23. Cum veritatem propoſitam ſic fecerim ſtabilitam, hanc Propoſitionem concludam adnotando connexionem & affinitatem, quam Coloribus & Refractionibus intereſſe dixeram: nempe ex oſtenſis non ſolum pateat, quòd diverſa Colorum genera cum definitis gradibus Refrangibilitatis reciprocantur; ſed & iiſdem experimentis probatur dari radios diverſè Refrangibiles, & radios diverſè Refrangibiles eſſe diverſi Coloris; iiſdemque probatur è contrà radios diverſicolores eſſe diverſè refrangibiles, & inde radios diverſè refrangibiles dari. Et ſcopus eorum, quæ in primis Lectionibus de diſpari Refrangibilitate radiorum edocui, quoad cauſas Colorum intelligendas, multum illuſtratur; ut pateat, quòd una abſque aliis dilucidè tractari nequeant.

PROP. II.

Radiorum Formæ, ſive Diſpoſitiones Colorificæ, non ſunt Refractione mutabiles.

24. Tranſactâ aſſertione, quòd diverſicolores radii ſint diverſè refrangibiles, & è contrà; videamus, an cujuſcunque radiorum, ſeorſim

ſeorſim ſpectati, generis Color à Refractione mutari poſſit; & hoc à noviſſimè (°) tradito experimento quadantenus decernitur. Scilicet, cùm extrema Purpura incidebat in foramen G (fig. 5.) radii, ſecundâ vice ad P refracti, Purpuram iterum exhibuêre ſine aliquâ Flavedine, Rubore, aut Viriditate exinde generatâ: &, cùm extrema Rubedo in G projiciebatur; eadem Rubedo in T abſque Violaceo, Cæruleo, aut Viridi emergente apparuit. Lucis Colorisq.

25. Sed experimentum nondum omnibus numeris abſolutum eſt; nam ubi Priſma *abc* non tranſverſum, ſed alteri Priſmati ABC parallelum ſtatuebatur, è Purpurâ Cæruleus, & è Rubedine Flavus eliciebatur; præſertim ſi non ſummæ colorum extremitates per G trajiciebantur; cùm autem Viriditas trajecta fuit, colores utrinque proximi (Cæruleus nempe & Flavus) emerſêre; & ſic Flavus Citriuſque Ruborem & Viriditatem, ac Cæruleus Viriditatem & Purpuram præbuerunt. Eorum itaque reminiſci oportet, quæ ſub initio de more, quo oblonga hæc imago, PT, ex circulis in directum poſitis formatur, explicui; & inde conſtabit hoſce colores non ſimplices eſſe, ſed è plurium miſturâ componi. Nam concipe genus radiorum æqualiter refrangibilium, & intenſam Purpuram generantium, ab integro Solari diſco profluere, & per Priſma, verſus imaginem PT (fig. 7.) trajectos incidere in circulum AC. Deinde aliud concipe radiorum, paulo minus refrangibilium, genus in alium circulum YZ, qui priorem in G contingat, incidere; & manifeſtum eſt, quòd nulli iſtorum generum radii commiſcebuntur: quippe cùm circulos, AC & YZ, ex nullâ parte coincidentes occupant. Quòd ſi tertium radiorum, intermediam refractionem paſſorum, genus, in circulum EE, quaſi in medio poſitum, incidere fingas, patebit aliquos ex iſtis cum utriſque prioribus in ſpatiis HI & KL miſceri, in quibus nempe circuli ab illis illuminati coincidunt; atque ita, ſi concipias imaginem totam, PT, ex innumeris circulis, in longum diſpoſitis, componi, quorum quilibet à diverſis radiorum generibus illuminatur; conſtabit, quòd in omni ejus parte radii heterogenei commiſceantur: quibus deinde per iteratam refractionem magis ſegregatis, color quilibet in ſimpliciores reſolvi debet. Sic in Viridi latet Flavus & Cæruleus; qui tamen non conſpiciuntur, tum quòd Viridita-

(°) Imo ex Quarto.

De Radiorum

tem generantes, ſive (ut perſpicuitatis gratiâ voces fingam) Viridiformes radii propter copiam præpollent, tum quòd Flavus & Cæruleus Viridem componunt; ſed quatenus per ſecundam refractionem ſecernuntur, unuſquiſque ſub propriâ formâ videbitur. Et ſic in aliis.

EXPER. VI.

26. His perſpectis periclitatus ſum, quid è pluribus refractionibus eveniret; hoc fretus conſilio, quòd Colores iteratis Refractionibus plus pluſque mutari deberent, ſi modò à ſingulis quamlibet internam mutationem paterentur; contrà verò, ſi non intrinſecus mutati, ſed, per divergentiam difformium radiorum, è miſturis tantùm educti & ſegregati eſſent: tum apparentes mutationes iteratis Refractionibus minores fieri, propterea quòd Colores quâlibet vice ſimpliciores evaderent: & experienti poſterior caſus evenit. Scilicet, cùm coloris per poſterius Priſma *abc* trajecti, partem aliquam tertio Priſmate, ad diſtantiam aliquot pedum diſpoſito, exceperim; Color ille denuo trajectus adeo perdurabat, ut, ſi ratione non conſtitiſſet mutationem aliquam eventuram fuiſſe, ſenſu judice haud mutari percepiſſem. Tentabam deinde, ſiquam quartâ Refractione mutationem ſenſibilem inducere potuerim, ſed fruſtrà. Interea cavendum eſt, ne foramina, F ac G, cæteraque, per quæ lux tranſit, majora ſtatuantur, quàm exigunt colores, ut evadant perſpicui.

27. Eſt & alia methodus, quâ diverſi Colores ab invicem ſegregari poſſunt, ut in ſegregatis examen ſtatuatur; ſcilicet experimentum ſub initio traditum eſt, quo Solis imago, PT, per contractionem cujuſque circularis imaginis, oblongam illam efformantis, multo oblongior quàm aliàs evaſerit. Nam in contractâ imagine *pt* (fig. 8.) quæ totidem conſtat circulis, eadem centra retinentibus, quot ſunt in majori PT, circuli minus coincidunt. Sic enim AC & EF ex parte HI coincidunt; at cùm in minores *ac* & *ef* contrahuntur, videre eſt, quòd ex omni parte ab invicem diſtant, & ſic de aliis. Quamobrem, cùm circuli à diverſis radiorum generibus illuminati jam minùs confunduntur, Colores evadent minùs commixti, utut non fient omnino ſimplices; propterea quòd circuli, inter *ac*, *ef* cæteroſque poſiti, cum illis ex aliquâ

Lucis & Colorum

quâ ſuâ parte poſſint coincidere. Sed hâc de cauſâ plures ejuſdem cujuſque coloris gradus tantùm commiſceri poſſunt, ut Cyaneus & Indicus in Cæruleo, Coccineus, Minius, & fortaſſe Citrius in Rubro; & ſic de aliis. Quæ quidem miſtura ſemper fiet eo minor, quo imago *pt* in anguſtiorem contrahitur.

EXPER. VII.

28. Diſpoſui itaque Priſma ABC (fig. 9.) unà cum lente LM, ad diſtantiam quaſi decem pedum à foramine F, per quod Sol illuxit cubiculum; & radii, per hæc duo vitra trajecti, deſideratam imaginem contractam, *pt*, ad pedes exinde decem circiter formabant; lente LM exiſtente tali, ut radios parallelos ad focum quinque pedibus à ſe diſtantem cogeret. Deinde aliud adhibui Priſma, HIK; cujus latus planum HI velamine nigro, ad *n* (ut dictum eſt) transfoſſo, tegebatur, & ad imaginem *pt* ſtatui; ubi Colores ſecundum latitudinem maximè contractos & diſtinctè terminatos vidi, ut eorum aliquis pro arbitrio tranſmitteretur per *n* in parietem, vel papyrum YZ. Quibus poſitis obſervabam deinde, quòd Colores, hoc modo multo minùs à repetitis Refractionibus mutati fuerint, quàm in præcedentibus. Cùm rubor per *n* tranſmiſſus eſt, idem rubor ad YZ apparuit, & non alius color quiſpiam, demptis variis ejuſdem gradibus, ut Coccineo & Minio: et ſic Viriditas in varios ſolùmmodo gradus diſcreta fuit, ex unâ parte vergens ad Flaveſcentem Viriditatem, & ex aliâ Thalaſſinum; ſed in Flavum aut Cæruleum, aliumve colorem quemvis, ex nulli ſui parte transformari potuit. Atque idem in aliis coloribus contigit.

29. Obſervabam præterea, quòd cùm foramen F factum erat anguſtius, ut per imaginis *pt* majorem contractionem colores evaderent ſimpliciores, colores ad YZ trajecti minùs adhuc mutati fuerint, & vix aliquam mutationem ſenſibilem paſſi fuiſſe videbantur, cùm foramina non latius duodecimâ parte digiti patuêre; hoc tantùm excepto diſcrimine, quòd lux apud *pt* fortior erat (quia magis contracta) quàm apud YZ. Atque adeo nil dubitandum eſſe cenſeo, quin colores evaderint prorſus immutabiles, ſi modò per indefinitam parvitatem foraminum, F & *n*, omnino in ſimplices diſcerni poſſunt. Et hoc ex eo etiam confirmatur, quòd

De Radiorum

cùm texi lentem LM, juxta perimetrum ejus, velamine nigro, per medium ad latitudinem ferè semissis digiti circulariter pertuso, figura imaginis YZ pene orbicularis evasit; & eo magis orbicularis, quo magis foramen F contraxi. Id quòd notari vellem, cùm plurimum illustret, causam imaginis PT in longitudinem diductæ non aliam fore, quàm radiorum coloribus dissimilium diversam refrangibilitatem.

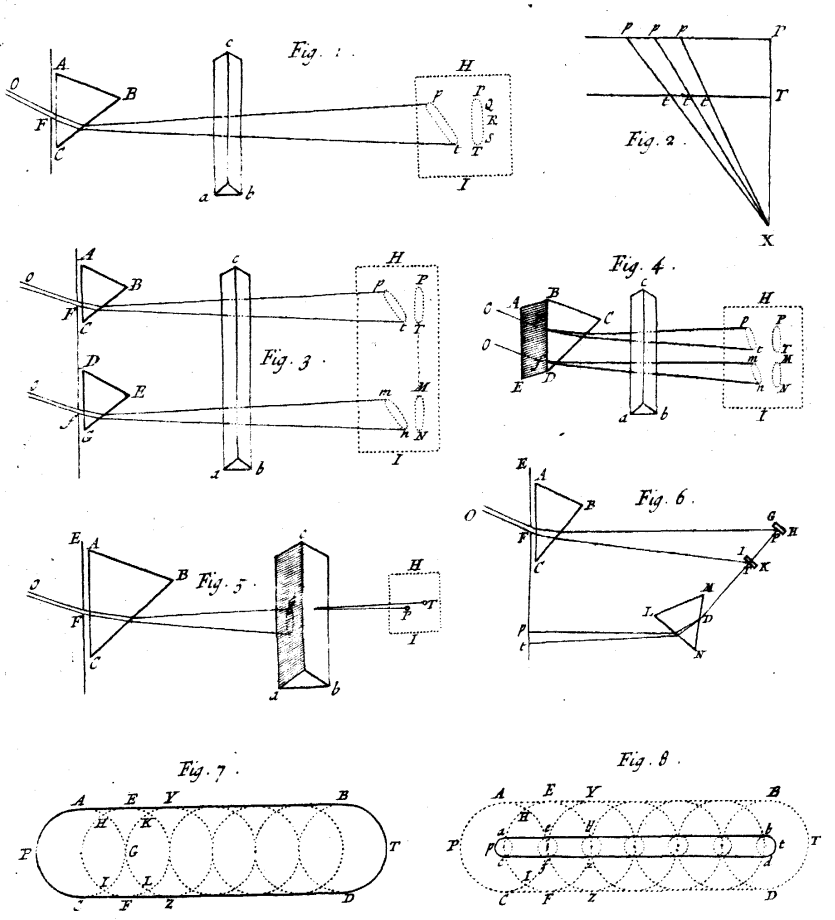
30. Cæterùm, quo propositum adhuc magis pateat, & ex abundanti ut constet, quinam sint Colores Primitivi; adverto circulos AC, EF, YZ cæterosque in alternas partes juxta lineam, quæ per omnium centra transit, maximè extendi, & ab invicem recedere, antequam attingant parallelas rectas AB & CD, quibuscum imago illa utrinque terminatur. Sic AC & EF, se mutuò secantes in H & I, recedunt postea, non omnino coincidentes in triangulis AHE & CIF. Colores itaque juxta ipsissimas extremitates AB & CD sunt omninò simplices. Et ex hoc fundamento propositum assequi possem; sed cùm circuli illi, statim ut ab extremitatibus ipsis recedunt, inter se mutuò nimis interseruntur, quàm ut Colores, per aliquam sensibilem latitudinem, satis ad experimenta commodè instituenda segregantur; rem potius ad hunc modum assequar.

EXPERIMENTUM VIII.

31. E præostensis constat, figuras, ex quibus in longum dispositis imago PT componitur, circulares esse propter Solis discum circularem; & inde, si discus ille triangularis esset, vel aliâ quâcunque non circulari perimetro terminatus, illæ etiam figuræ vel triangulares, vel alio quovis modo ad instar Solis terminatæ evaderent. Et par est ratio de foramine F, & figuris ad instar ejus foraminis; ex quibus, in longum similiter dispositis, imago *pt* constituitur. His animadversis, vice orbicularis foraminis F triangulare substituitur, cujus altitudo verbi gratiâ sit plusquam digiti, basis tertiæ quartæve partis digiti, & crura æqualia. Et Prismate ABC ad trianguli hujus perpendiculum existente parallelo, imago *pt* (fig. 10.) quadrilatera ex triangulis *caf*, *emb*, *gni* cæterisque infinitè multis efformata est; quibus juxta bases, in lineâ *cd* positas, cum se mutuò parte maximâ communicantibus, exinde

ad

Tab. I. Pag. 364.



ad uſque ipſorum vertices receſſio gradatim facta eſt, donec in verticibus, ad rectam *ab* ſitis, penitus diſſocientur, adeoque colores ibi ſimplices evadunt. Lucis Coloribus.

32. Jam verò obſervabam, quòd ſimplices ſive primitivi colores juxta terminum *ab*, etſi longè debiliores, tamen (ſenſu judice) ejuſdem ſpeciei apparuêre, ac compoſiti juxta terminum *cd*; cujus rei ratio eſt, quòd color quilibet primitivus per commiſturam colorum utrinque confinium exhiberi poteſt, ut in ſequentibus patebit. Colorum, verò quos hoc pacto primitivos eſſe conſtitit, gradus eſſe inſigniores, Coccineus ſive Purpureus, Minius, Citrius, Luteus ſive Heliocryſeus, Subflava Viriditas, Gramineus, Thalaſſinus, Cyaneus, Indicus & ejuſmodi Violaceus; qui ad uſque extremitatem imaginis extendebatur, ſed abſque immiſtâ rutili alicujus fulgoris tinctura apparuit, ſi modò cubiculum factum fuerit valdè tenebroſum.

33. Obſervabam præterea, quòd coloribus hiſce juxta terminum *ab* conſpicuis, non potui ſenſibilem ſpeciei mutationem, Refractionibus utcunque repetitis, inducere. Qtiinetiam tentabam, ſi quo alio pacto mutare poſſem, quemadmodum reflectendo à corporibus diverſimodè coloratis. Sed in eo fruſtra fui; nam (ſuperfluâ luce quaquaverſum penitus excluſâ) ſi cæruliformes radii in aurum incidêre, illud aurum cærulei coloris evaſit: ſi flaviformes in Indicum incidêre, flavescebat Indicum. Et ſic in cæteris, adeoque hanc Propoſitionem ſatis ſuperque ſtabilem eſſe cenſeam.

PROP. III.

Colores Albi & Nigri, cum Cinereis ſive Fuſcis intermediis, ex radiis antiſcujuſque ſpeciei confuſè miſtis generantur.

34. Aſſertionis veritas è præcedenti Propoſitione manifeſta eſt; nam colores qui non ſunt ex primitivis (quales non reperiuntur jam recenſiti) per compoſitionem generari neceſſe eſt. At non gravabor tamen fuſius probare; idque potiſſimum, cùm lucem cui color Albus competit, ex radiis quoad qualitates colorificas æquè ac refrangibilitatem heterogeneis componi, eâque de cauſâ albere certiſſimè conſtat. Proponitur itaque jam monſtrandum eſſe,

De Radiorum

esse, quòd, cùm omnes omnino Colores, quos prismata generant, debitè commiscentur, Albedo exinde resultabit; deque tali misturâ perfectè componendâ plures modos, eo quo cogitabam ordine, recensere animus est.

EXPER. IX.

35. Ac primò rem aggressus sum cum pluribus prismatibus ita dispositis, ut Colores eorum in eundem locum inciderent, & sic inter se miscerentur. Sint ABC, DEF ac GHI (fig. 11.) tria prismata, juxta se, situ parallelo, ita disposita, ut alterum DEF sit alteris duobus, ABC & GHI, utrinque viciniſſimis intermedium, in morem trium linearum conficientium capitalem literam Græcam Ξ; & lux per unumquodque prisma liberè transiens, excipiatur in papyrum PT, pede uno vel duobus postpositam. Coloribus omnium prismatum sic in ipsam PT projectis, convertantur prismata circa proprios axes, & videbis colores istos sibi invicem accedere vel recedere. Quare convertantur, donec talis sit eorum situs, ut unius prismatis, ABC, Rubor, & alterius, GHI, Purpura, vel Color Indicus, cum Viriditate tertii, DEF, coincidant; sicut vides factum ad R: & ex istis coloribus, ita sibi commixtis, Albedinem generari cernes; colore Purpureo & Cæruleo juxta P conspecto; Rubeo verò & Flavo juxta T; & Albo juxta R cæteros intercedente.

36. Cæterum in istis experiendis convenit observare sequentia. Primò, si anguli prismatum, planis refringentibus contenti, ACB, DEF & GHI, sint inæquales; præstat, ut illud prisma, cujus angulus GIH maximus est, ponatur versus exteriorem partem anguli contenti radiis incidentibus & refractis, & istud versus interiorem, cujus angulus ACB est minimus.

37. Secundo Aperturæ, per quas lux transmittitur trans prismata, debent esse magnæ; imo convenit, ut transitus luci per tota prismata pateat, obstaculo nullo adhibito; neque opus est, ut experimentum in tenebris peragatur, sicut in aliis quamplurimis requiritur.

38. Tertio papyrus PT, in quam Colores incidunt, non nimis distare debet à prismatibus: sufficit distantia pedum plus minus duorum. Has autem aperturas & distantiam statuo, ut colores eo

Lucis Coloribus.

eo melius commiscentur ad Albedinem perfectiorem componendam.

39. Quartò, ut colores ad R faciliùs etiam & satiùs commisceantur, prisma ABC statuatur in situ quocunque tali, ut radii, tum ingredientes, tum emergentes, Refractionem præterpropter æqualem patiantur, & in eo situ figatur. Et colores ejus ad distantiam duorum pedum excipiantur, vel ad eam potius, ubi vides Flavum ejus & Cæruleum modò contiguos, Albedine intermediâ tum evanescente. Postea figatur aliud prisma GHI in tali situ, ut Purpura ejus contingat Ruborem alterius ABC, non autem coincidat illi, & linea contactûs notetur. Deinde tertium prisma DEF sic fige, ut ejus colorum medietas cadat in dictam lineam contactûs; quod ubi contingit, facilè cognosces, intercipiendo lucem cætera prismata ingressuram. Denique papyrus PT ultra citraque transferatur paululum, donec videas Albedinem perfectam in medio colorum ad R generari. Quam quidem Albedinem ex variis coloribus compositam esse constabit, intercipiendo colores unius duorumve prismatum, priusquam attingant papyrum; nam loco Albedinis, eos, quos non intercipis, colores intueberis.

40. Denique si velis, ut colores cujusque prismatis perfectiùs misceantur, possis adhibere plura prismata, modò præsto sint; tamen eventus non deerit expectationi, si tria tantùm adhibeas. Etenim colores cujusque prismatis, seorsum spectati, non sunt omnino simplices, sed Viridis & Rubeus nonnihil miscentur in Flavo; & Purpureus ac Viridis in Cæruleo; & sic de reliquis, quemadmodum in sequentibus ostendetur: & inde fiet, quòd cùm tria tantùm Prismata adhibentur, non solùm tres colores, Rubeus, Viridis & Indicus commisceantur in R, sed etiam Cæruleus & Flavus, unà cum omnibus eorum gradibus intermediis, istam Albedinis compositionem ingrediantur.

EXPER. X.

41. Verùm, cùm tot prismata in situ tam accurato disponere, propter motum Solis & alia incommoda, difficile forsan & laboriosum simul inveniatur, nisi adhibeatur machina quædam eâ de causâ fabricata, ut ejus ope prismata in desiderato situ figantur; alium propterea modum profero, quo ista negotio leviori, idque unico

De Radiorum

unico prismate periclitari poteris. Sumatur papyrus, vel aliud opacum corpus attenuatum, in morem laminæ, & in eo confodiantur oblongæ rimæ sex, aut plures, parallelæ, quarum latitudines sint æquales distantiis, aut iis paulo majores. Deinde papyrus ista figatur alicui ex planis lateribus prismatis. Sit illud latus papyro obductum ACED (fig. 12.) & rimæ in papyro excisæ litteris *l* designentur, quarum situs esto parallelus ad EC concursum laterum refringentium prismatis, sive ad verticem ejus. Papyrus autem debet toti isti plano, ADEC, superindui; nequa lux alibi transmissa quàm per prædictas rimas perturbet experimentum. Tum prisma statuatur in luce Solis, ut radii ejus per dictas rimas id ingrediantur, vel, postquam refracti fuerint, per eas egrediantur, & in isto situ figatur. Quo facto, sumatur alia papyrus PT, quæ sic teneatur à posticâ parte prismatis, ad distantiam trium duorumve digitorum, ut in eam lux terminetur; & videbis tot lineas colorum, quot sunt oblongæ rimæ *l*, quarum linearum cuique tot competunt colores, quot solent apparere virtute prismatum. Nempe quælibet rima subit officium unius è prismatibus, experimento priori adhibitis, & proprios colores, Cæruleum, Rubrum, cæterosque generat; quasi tot essent Prismata, quot sunt rimæ. Porro, si papyrus PT longiùs differatur à prismate, coloratas istas lineas paululum dilatari cernes, & interjecta spatia minui, donec absorbeantur à coloribus tandem factis contiguis. Et, si papyrus adhuc longiùs differatur, colores à diversis rimis effecti, Rubri cum Cæruleis primò, deinde alii cum aliis, incipient plus plusque misceri, & sic sese paulatim diluent; donec, cùm mistura satis absoluta est, convertantur in Albedinem, præterquam in eorum extremitatibus P ac T, ubi mixtura & confusio fere nulla est. Et isthæc accidunt, cùm papyrus PT quasi ad distantiam decem vel duodecim vicibus majorem ipsâ AC vel BC, latitudine planorum prisma constituentium, amovetur. Quòd si amoveatur adhuc longiùs, absimilium radiorum commistio perfectior fortasse evadet, sed colores Purpurei & Cærulei ad P, ac Flavi ac Rubri ad T, latiores fient, & interjectum spatium album minuetur, donec totum deftruatur ab istis coloribus occupatum.

42. In hisce autem experiendis cavendum est, ut oblonga foramina, *l*, sint accuratè æqualia, & æqualibus distantiis ab invicem

Lucis Coloribus.

cem dissita; ne luce magis copiosâ per aliquod ingressa quàm per cætera, colores exinde generati prævaleant cæteris, & misturam perfectam conturbent, & sic vice Albedinis colores apparebunt hinc illinc more fortuito sparsi. Illa vero distantia rimarum *l*, ut & earundem latitudo, non malè statuitur esse pars digiti circiter duodecima, aut eâ major fortè, si prisma satis amplum adhibeas. Quinetiam, si cupias, ut experimentum sit omnibus numeris absolutum, vice prismatum vitreorum vulgo venalium, quæ sunt nimis gracilia, debes amplioribus uti; qualia possis efficere ex laminis vitreis utrinque perpolitis, & conjunctis in morem vasculi prismiformis; quod vasculum impleatur aquâ clarissimâ, & undique cemento obturetur. Non multum refert, quænam sit hujus latitudo; sufficit, ut sit trium digitorum. Sed refringentia latera debent esse quatuor vel sex digitos lata, aut amplius; ut rimæ præfatæ, *l*, cum distantiis earum fiant majores, & plures, & magis accuratæ. Sin utaris angustioribus, qualia vulgo venduntur, colores externi juxta P ac T, dilatando, priùs destruent interjectam albedinem, quàm perficiatur per remotionem papyri PT. Et illa præterea, quæ in totum constant ex vitro, colore aliquo vel Viridi vel Flavo plerumque tinguntur; & radios ita tingunt in transitu, ut Albedinem perfectam exhibere nequeant.

43. Jam verò audire videor objectionem, ex receptis Philosophorum opinionibus depromptam. Dicat enim aliquis, quòd Colores revera & propriè loquendo non miscentur, sed destruuntur potius; idque eâ de causâ, quòd umbræ vicinia, quæ necessaria est ad productionem Colorum, tollitur, cùm radii, per diversas rimas trajecti, commisceri incipiunt; & propterea, quòd radiis sic mixtis, quorum motus inter se dissentiunt, necesse est, ut isti motus destruant alterutros, quibus cessantibus Color omnis perit, & in Albedinem convertitur. Sic Cartesianus aliquis contendat fortè, quòd, cùm globuli miscentur, quorum rotationes contrariantur sibi; necesse est, ut impediant sese, & alternos motus destruant. Et sic alii objiciant alia.

44. Sed responsio multiplex in promptu est: & imprimis inquam, quòd, cùm umbræ, coloribus interjectæ, primùm evanescunt, removendo papyrum PT; colores tamen non ideo pereunt, neque minimum immutantur, donec incipiunt misceri per remotiorem

De Radiorum

tiorem distantiam papyri; & Albedo non producitur, donec, per distantiam adhuc remotiorem, mistura radiorum omnis generis evadat perfecta. Unde confinium Umbræ non est necessarium ad Colores producendos, neque Albedo generatur ex isto sublato.

45. Secundo, Colores, qui primò omnium miscentur, nimirum Purpureus sive Violaceus, & Rubeus, videntur maximè esse omnium dissimiles, propterea quòd adversas colorum extremitates occupent. Quamobrem itaque motus eorum contrarii non destruunt sese, neque color albus generatur, antequam cæteri etiam colores omnes miscentur?

46. Tertio, cuique licet observare, idque nullo negotio, quòd colores non omnino mutantur trajiciendo radios per Medium quantumvis luminosum: sic colores Prismatum sunt iidem, sive trajiciantur per spatium illuminatum, sive tenebris involutum; & res omnes eodem modo coloratæ cernuntur, sive conspiciantur, cùm lumen Solis trajiciatur per intermedium spatium, sive cùm excludatur; id quod secus esset, si lux in lucem, per idem Medium transeuntem, potest agere. Quinimo si radii, duobus prismatibus refracti, sese decussent, postquam ab invicem discreti sunt, eosdem colores efficient, quos aliàs efficerent, si non omninò miscerentur. Id quod non posset evenire, si radii, diversis coloribus tincti, sibi mutuò per eadem spatia transeuntibus mutationem aliquam inducerent.

47. Quarto, cùm in illâ distantiâ papyrum PT fixeris, ubi colores Albedinem optimè componunt; statuatur alia papyrus YZ, ad distantiam duorum vel trium digitorum à prismate, & in eâ notentur lineæ coloratæ; tum excindantur istæ partes papyri, in quas dictæ lineæ cecidêre. Factis eo pacto rimis oblongis vvvvvv parallelis & æqualibus, ut & æquè latis ac distantibus; deinde papyrus ista YZ in locum suum restituatur, tres digitos circiter à prismate distantem; ut per rimas ejus lux colorata trajiciatur ad alteram papyrum PT longinquiorem; quo facto possis observare, quòd si parùm deprimas papyrum YZ, ut Purpureos colores & Cæruleos, superioribus labris rimarum ejus impingentes, intercipiat, & transmittat cæteros; Albedo ad papyrum PT convertitur in Rubeum colorem, aut Citrium vel Flavum: sin attollas eam, ut Rubei & Flavi labris inferioribus intercipiantur, cæterique perlabantur,

bantur, Albedo ista convertitur in Purpureum, Indicum & Cæruleum; perinde ut fieri oportet in mixturâ colorum: nam unis è mixturâ sublatis, alteri debent ad propriam speciem & formam restitui. Lucis Coloribus.

48. Quinto, papyro YZ sublatâ, & reliquis stantibus, papyrum alteram PT in meditullio Albedinis acu perfora, ut lucis ejus alba portiuncula trajiciatur; quam deinceps accipe in aliam papyrum, isti PT ad distantiam quatuor vel sex digitorum postpositam, & vice Albedinis colores iterum apparebunt. At, quomodo colores ille de novo generari potuissent, si destruerentur in productione, potiùs quàm miscerentur, non video. Concedendum est itaque, quòd tantùm miscentur; & quòd radii, variis coloribus tincti, & promanantes à diversis rimis *l*, *l*, decussant sese in dicto foramine acu effecto, & postea divergentes ab invicem gradatim segregantur, & segregati proprios iterum colores depingunt, quemadmodum posthac fusiùs explicabitur. Ad eundem præterea modum, si Speculum aliquod planum & exiguum, K, statuas in medio Albedinis, ad PT papyrum effectæ, ita quidem ut aliquos ex albificantibus radiis aliorsum, veluti ad *pt*, reflectat; lux alba sic reflexa degenerabit in colores, quos videre est ad *pi* papyrum objiciendo. Etenim radii tincti cum diversis coloribus, & in albedinem ad speculum K commisti, inclinantur ad se invicem; propterea quod adveniunt à diversis fissuris *l*, *l*, *l*, *l*, *l*, *l*. Atqui tantum divergunt à Speculo, postquam reflectuntur, quantum antea convergebant. Divergentes itaque paulatim dissocientur; ac dissociati proprios colores non secus exhibebunt, quàm si nunquam fuissent commisti. Liquet ergo, quòd in misturâ radiorum diversicolorum dispositiones ad efficiendos varios colores non destruuntur, utut Albedinem exhibeant, dum commisceantur sibi.

49. Ad hæc, lamina K, si valde obliquetur ad radios in ipsam incidentes, non amplius Alba apparebit, sed vel cum Rubeo vel Cæruleo colore imbuta, prout vel versus verticalem angulum, vel versus basin prismatis inclinatur; id quod nullo modo accideret, si alba lux, quâcum illuminatur, homogenea esset; quandoquidem alba & specularia corpora reflectendo lucem, non mutant colorem ejus. Sed hoc ex eo evenire fatendum est, quòd in Speculum, quando incidentibus radiis admodum obliquatur, pauciores ex ob-

De Radiorum

liquioribus radiis in illud incidant, inque reflexâ luce major ſit copia radiorum minus obliquorum, qui proinde prædominantur, & proprium colorem oſtendunt; quem non poſſent exerere, ſi, ad albedinem lucis incidentis producendam, non tantùm cum aliis coloribus miſcerentur, ſed reverâ tranſmutarentur in uniformem Albedinem. Cæterùm nota, quòd in iſthoc experimento faciendo, præſtat laminam non perpolitam, ſed ſuperficie nonnihil aſperâ, qualis eſt nummi argentei vel chartæ, &c. præditam adhibere.

50. Præterea vulgo notum eſt, quòd ex pulveribus diverſicoloribus, inter ſe commiſtis, novus color emergit; tamen, ſi pulveres iſti inſpiciantur Microſcopiis, omnes videntur tincti propriis coloribus. Adeo ut ex miſturâ pulverum colores proprii non deſtruantur, ſed permiſcendo tantùm color novus eliciatur. Verùm iidem planè colores ex miſturâ colorum Priſmatum ac Pulverum producuntur. Sic pulvis Cæruleus cum Flavo miſtus producit Viriditatem; & eadem Viriditas etiam producitur ex miſturâ radiorum tinctorum cum Cæruleo & Flavo: & proinde non dubium eſt, quin colores novi ex coaleſcentibus Priſmatum coloribus, non factâ affimilatione ſed miſturâ tantùm, ſimiliter oriantur. Cæterùm, ut nullum dubitandi locum relinquerem, effeci, ut Pulveres colorum principalium, quos Priſmata generant, Rubei, Flavi, Viridis, Cærulei & Purpurei, in proportione certâ miſcerentur; & licet Albedo perfecta non prodibat, tamen iſti colores ad ſenſum periêre, & quoddam genus Albedinis fuſcum & obſcurum, ſive mediocre inter Albedinem perfectam & Nigredinem, producebatur: quod noſtro propoſito non minus inſervit, quàm ſi Albedo perfecta prodiiſſet; quandoquidem Fuſcus ille ab Albo perfecto tantùm differt quantitate lucis, non autem ſpecie coloris; ut exinde pateat, quòd producitur ex Albo cum Nigredine contemperato. Neque expectandum eſt, ut mihi videtur, alium quàm Fuſcum colorem è tali Pulverum miſturâ generari. Nam, cùm Pulveres colorati intromittant maximam partem lucis, iſtam ferè ſolam reflectentes, quæ aptâ eſt ad exhibendos proprios colores, ut oſtendetur poſtea; eorum mixtura maximam quoque partem lucis intromittet. Unde pro Albedine perfectâ talis color generandus eſt, qualis efficitur ex Albedine & Nigredine mixtis,

id eſt Fuſcus. Attamen non eo inficias, quin tales fortè Pulveres inveniantur, præſertim inter Mineralia, qui tantum lucis reflectant, ut mixti exhibeant Albedinem perfectiorem, quàm hactenus vidi ex mixturis effectam. Cæterùm, quòd Pulveres coloribus tantùm quinque præcipuis tinctos miſcebam; non ideo cogitandum eſt Albedinem ex quinque ſolis productam fuiſſe, ſed ex omnigenis. Nam in omnium corporum coloribus alii latent principalibus commiſti, licet minùs fortes, ut à principali ſeparati non cernantur; ſic in Cæruleo pulvere latent Cyaneus & Indicus, aliique gradus omnes uſque ad Viridem aut Flavum fortaſſis ex unâ parte, & ad intenſum Purpureum ex alterâ; utut Cæruleus ſolus appareat, quòd ſit cæteris longè copioſior. Lucis Coloribus.

51. Experientiis hiſce admonitus in mentem præterea revocabam, quòd corpuſcula, quæ conſpiciuntur in radiis Solaribus, huc & illuc volitantia, varios colores exhibent, modò quiſquam ea diligenter obſervat in cubiculo quaquaverſum luci occluſo, præter unicum foramen per quod illuminantur; & tamen, cùm iſti pulviſculi in acervum congregantur, nullus omninò color apparet præterquam fuſcus.

52. Non minus appoſita eſt obſervatio, quòd, cùm Aqua, ſapone in eâ ſoluto, paululum inſpiſſata, & in ſpumam agitando converſa fuerit; poſtquam paululum conſtitit ſpuma, in ſingulis bullulis, ex quibus conglomeratis efformata eſt, innumeri omnis generis colores acutiùs inſpicienti apparuêre; & tamen ſpuma, ad tantam diſtantiam ſpectata, ubi colores in ſingulis bullulis ab invicem diſtingui nequibant, apparuit perfectè candida.

53. Patet itaque colores Priſmatum reverâ non deſtrui ad Albedinem producendam, ſed commiſceri tantùm; quandoquidem emergunt immutati, cùm radii coeuntes decuſſavêre, & per ſubſequentem divergentiam iterum diſſociantur; & proprios etiam colores exhibent, cùm aliqui copioſiùs quàm cæteri reflectuntur: atque ſubalbus color, è miſturâ Pulverum omnigenis coloribus præditorum, ut & Albedo perfectior, è diverſicoloribus bullulis, ſine aliquâ congredientium colorum mutatione ſimiliter emergat. Ad hæc, cùm rei dignitas poſtulare videatur, ut nullus non moveatur lapis; præter modos præcedentes componendi Albedinem

lubet

De Radiorum

lubet adhibere Tertium & Quartum deinde, quo facilius praedicta experiri possis, & magis fortè cum evidentiâ.

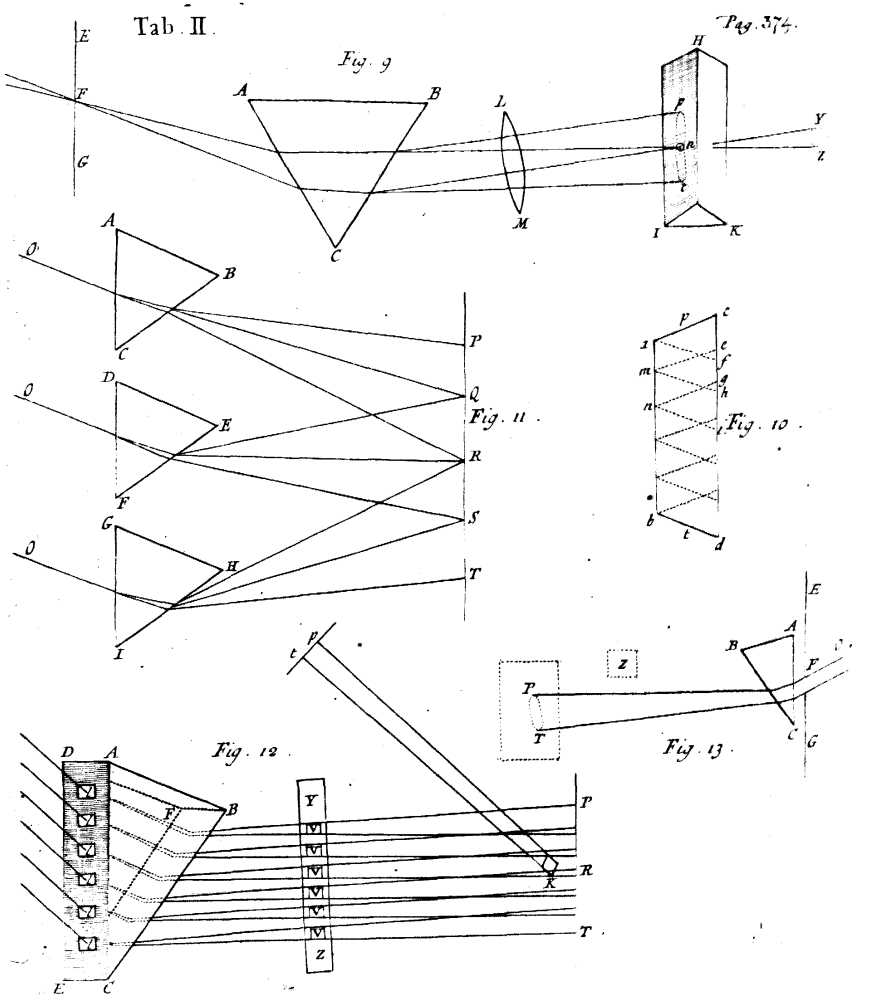
Exper. XI.

54. Posito quòd Sol illuceat obscurato cubiculo per unicum tantum foramen F (fig. 13.) cui Prisma ABC affigitur, ingressam lucem refringens ad PT; juxta colores, in papyrum PT sic projectos, teneatur alia papyrus z, ut illuminetur à coloratâ luce, quam altera papyrus PT reflectit. Quo facto, papyrus z, sic illuminata radiis omnium colorum à PT confusè reflexis apparebit alba. De hoc autem specimine, maximè luculento & facili, juvabit observare sequentia.

55. Primo, quòd auferendo papyrum PT, ne lucem amplius ad z reflectat; è consequente defectu lucis in z, cognoscas eam illuminari per solam lucem coloratam à PT reflexam.

56. Secundo, si papyrum z ipsi PT valde vicinam teneas, ut una pars ejus magis illuminetur ab uno colore, & alia ab alio; ipsa z non apparebit alba, sed ejus partes ab omnibus coloribus iftis tingentur, quibus sunt viciniſſimæ. Sin ipsa z ad majorem à PT distantiam transferatur, ut omnes ejus partes æqualiter ferè ab omnibus coloribus illuminentur, ex illâ colorum mixturâ generabitur Albedo. Pari ratione, si quemlibet è coloribus ad papyrum PT tendentibus intercipias, ne reflectetur ad z; illud z non amplius albescet, sed evadet coloratum pro mixturâ, quam cæteri colores, in ipsam PT prolapsi, componunt.

57. Denique, quòd Albedo illa z, non destruendo colores, sed tantùm miscendo generatur, exinde pateat, quòd colores PT cernuntur beneficio radiorum non secus oculo mixtim incidentium, quàm papyro z. Itaque, si colores destruerentur potiùs, quam miscerentur ad z, etiam destruerentur ad corneam tunicam oculi, vel pupillam; ubi tamen certissimum est, quòd misceantur tantùm, ut decussantes postea divergant ad varias partes retinæ, & sic excitent phantasmata propria. Quinimò si radii, tincti cum diversis coloribus, dum per eadem spatia confusè transeant, possent inter se invicem agere, & dispositiones mutare, quas quilibet habent ad expingendos proprios colores; omnes omnium rerum colores conturbarentur, & se mutuò transmutarent, dum per Aera transmittuntur,



tranſmittuntur, ubique ſcilicet radiis aliorum corporum omnigenis coloribus tinctorum occurrentes; & ſic in coloribus viſibilium nulla eſſet certitudo, conſtantia nulla. Lucis Coloribus.

EXPER. XII.

58. Quartum præterea modum deſcripturus, quo colores in Albedinem miſceri poſſint, pono ABC (fig. 14.) eſſe priſma foras ante foramen F diſpoſitum, quod refractam lucem in obtenebratum cubiculum tranſmittit verſus MN. Tum lentem MN convexam ſume, cujus focus eſt ad diſtantiam ſemipedis, vel pedis unius duorumve, quale eſt Objectivum Vitrum Perſpicilli bipedalis, & eam ſtatue paulo plus diſtantem à foramine F, quàm focus diſtat à ſe; ita ſcilicet ut lux colorata per eam deinceps trajiciatur, ſicut videre eſt in ſchemate: ſit autem ejus latitudo, ſive Apertura tanta, ut omnes radios tranſmittat. Deinde, cùm lentem in dicto ſitu ſtabilitam feceris, ponè ſtatuatur papyrus PT, in quam radii hi refracti terminentur; eamque primò colloca proximè ad lentem, deinde ad majorem diſtantiam continuato motu transfer; & videbis colores, Purpureum P Rubeumque T, contrahi, & eouſque minui, dum omnes convertantur in Albedinem; puta ad X, quatuor vel ſex pedes, aut longiùs fortè, diſtantem à lente, pro convexitate ejus vel poſitione. Deinde, ſi papyrum adhuc longiùs transferas, colores iterum emergent, ſed in ſitu contrario; Rubeo ad τ conſpecto, & Purpureo ad π; neque ulla inter eos ad PT & πτ differentia intercedit, præterquam quòd ſitus ſit contrarius. Scilicet à lente MN effectum eſt, ut omnes radii venientes ab aliquot punctis foraminis F in totidem iterum punctis congregentur ad papyrum X; & ſic omnes omnium ſpecierum, tum Purpuram ad P, tum Rubedinem ad T, tum alios alibi colores efficientium, convergunt ad X; & ibi confuſè miſcentur ad Albedinem generandam: de quâ imagine albâ & orbiculari monebam ſuprà. Poſtea verò, cùm ſeſe decuſſavêre in X, radii PX tendunt ad π, & TX ad τ, adeo ut colores * expingantur ad P & π per eoſdem radios Pπ, & iidem ad T & τ per eoſdem Tτ, & ſic de aliis. Unde liquet iterum, quòd diſpoſitiones radiorum diſſimilium, ad diverſos colores producendos, non deſtruantur per eorum mixturam; quandoquidem

* Lege *iidem colores.*

De Radiorum

doquidem coſdem expingunt cùm ſegregantur, quos ante mixturam expingebant.

59. Porro, ſi radios cujuſvis coloris intercipias, interponendo aliquod corpus opacum prope lentem MN, & cæteros facias miſſos; videbis non modò colores interceptos è papyris PT ac πτ tolli, ſed & Albedinem x deſtrui; & ejus vice colorem aliquem, qualis efficitur per mixturam radiorum præterlabentium, generari. Sic, ſi radios intercipias oſtendentes Rubeum ad N, Rubedo T ac τ tolletur, ac Albedo x convertetur in Cæruleum. Vel, ſi ſiſtas tum Rubeum ad N tum Purpureum ad M, & intermedios Flavum, Viridem, & Cæruleum præterlapſos mittas, ex eorum miſturâ Viriditas producetur ad x. Et ſic prætermittendo quos velis, & ſiſtendo alios pro arbitratu, poſſis experiri mixturas quaſlibet; & explorare, qui color inde generabitur, modò pretium laboris experientiam illam judicaveris.

60. Verum, cum experimenti hujus dignitas videatur exigere, ut ſummâ cum diligentiâ retegatur, & penitus explicetur, dum plura de coloribus ſimul complectitur & exhibet, quàm in unico tantùm experimento ſolent latere; non gravabor modum copioſiùs oſtendere, quo radii miſcentur ad x; & nonnulla poſtmodo, ſcitu non indigna, patefacere. Itaque concipiantur tales Refractiones in Priſmate fieri, ut radii incidant in varios circulos ad lentem MN, qui varios gradus Refractionis patiuntur, prout explicui in præcedentibus; ſitque PQRST (fig. 15.) oblonga imago, compoſita ex præcedentibus circulis, & in lentem projecta; quorum circulorum extremi duo ſunto PQ Purpureus, & ST Rubeus. Porro ſit *frf* diameter foraminis, per quod lux in lentem trajicitur; cujus foraminis punctum aliquod, ut F, primò conſideremus, à quo venientes radii dictos circulos, PQ, ST, totamque imaginem PT efformant: & præterea, cùm radii eundem quemlibet circulum efformantes ſint homogenei, ponatur, quòd lens ſit tali figurâ prædita, ut eos omnes ad eundem illum circulum, puta Rubeum ST, pertinentes, verſus punctum quoddam, z, exactè refringat; quod fieri poſſe per lentem convexis Hyperbolis terminatam, ut & per lentes aliter formatas, Carteſius in Dioptricâ & Geometriâ edocuit. Eſt itaque z focus radiorum FS, FT, & cæterorum uniformiter Rubeorum, & recta FZ ducta erit axis lentis. Præterea, cùm radii

radii RP, FQ, cæterique conficientes alterum extremum circulum PQ, colorem Purpureum oſtendant, & propterea magis refringantur quàm alteri tendentes ad ST; illi ideo emergent ad punctum quoddam aliquanto propinquius quàm z, veluti ad Y; ut ii facilè percipient, qui norunt focos lentium eſſe tanto propinquiores ſibi, quanto major eſt earum vis refractiva. Liquet itaque radios, in coloribus & refractionibus abſimilibus, ad diverſos focos convergere. Sed, cùm eadem lens pluribus focis haud queat aptari, & ideo, cùm z ſupponatur focus in quem omnes radii ad circulum Rubeum ST pertinentes exactè conveniant, radii pertinentes ad alterum circulum, PQ, purpureum omnes in ejus focum Y exactè convenire nequeunt; attamen eorum concurſus juxta Y in axe tam proximè accuratus erit, ut quoad ſenſum & experientiam omnem habeatur pro accurato. Lucis Coloribus.

61. Quinetiam, ſi lens MN ponatur ſphæricè convexa, ut neuter focorum Y vel z ſtrictè loquendo poſſit eſſe accuratus; tamen, quantum ad præſentia ſpectat, pro accuratis habere liceat. Itaque concipiendo, quòd radii manantes à PQ & ST convergant ad Y vel z, & ſibi decuſſantes divergant itidem; patebit, quòd hi duo radiorum penicilli concurrent, & miſcebuntur in ſpatio focis Y & z intermedio, veluti ad *t*, modo lentis centrum R ponatur intermedium circulis PQ & ST. Ad eundem modum radii cæterorum generum convergent in alios focos ipſis z & Y intermedios, ac tanto propinquiores ipſi Y, quanto major eſt eorum paſſio refractiva. Sic focus viridiformium radiorum cadet in medio ſpatio, veluti ad x; radiique cæruliformes convenient citiùs inter x & Y, & flaviformes longinquius inter x & z; ac cæteri colores intermedii in ſpatiis intermediis, eorumque penicilli ſeſe decuſſabunt ultra citraque locum *t*; ita tamen ut iſtæ decuſſationes ſint eo denſiores, quanto ſint ipſi *t* viciniores, & ut ſpatium x*t* ſit minimum, per quod omnes radii tranſeunt manantes ab eodem puncto F. Non diſſimili modo radii venientes ab alio quovis puncto foraminis, ut *f*, ſi ſint rubriformes, convergent ad *z*; ſin purpuriformes ad *y*; & ad intermedium aliquod punctum, ſi ſint intermedii generis, & eorum concurſus denſiſſimus erit in loco medio, veluti *xl*. Atque adeo ex radiis, ab integro foramine *frf* manantibus, foci minimè refrangibilium jacebunt in ſuperficie

De Radiorum

yxy lenti proximâ, & foci maximè refrangibilium jacebunt in aliâ ſuperficie *zzz* à lente remotiſſimâ, focique mediocriter refrangibilium jacebunt in aliis intermediis ſuperficiebus. Et ſic omnes omnium radiorum foci totum ſpatium *yzzy*, à ſuperficiebus iſtis integratum, occupabunt, & in eo præcipuè penicilli decuſſabunt, & commiſcebuntur.

62. Jam ex hâc deſcriptione venit obſervandum, quòd ſi papyrus HI teneatur in medio dicti ſpatii *yzzy*, ut in eam radii terminentur, ubi eſt denſiſſimus eorum concurſus, & miſtura ad Albedinem generandam perfectiſſima; radii viridiformes, tendentes ad focos in papyro ſitos, in eam incident intra literas *xx*. Sed rubriformes venientes ab ST, ac tendentes ad focos in ſuperficie *zzz* ſitos ut dictum eſt, incident in papyrum intra literas *ll*, paulo vicinius ad I. Et pari modo purpuriformes incident in eundem locum *ll* dum tendunt à PQ ad focos ſitos in ſuperficie quâdam *yxy* ad lentem proximâ. Cæteri autem radii cadent in alia ſpatia inter *xx* & *ll* mediocria, ipſiſque *xx* tanto viciniora, quanto foci eorum minùs abſint à papyro. Liquet itaque, quòd totum ſpatium *xxtl* non debet albeſcere, ſed pars ejus tantùm media inter literas *x* & *l* interiores ſita, ubi ſcilicet colores omnes commiſcentur. Etenim in extremitate *x* verſus H radii viridiformes cadunt ſoli, qui proinde tingent extremitatem iſtam cum Viriditate. Ad alteram autem extremitatem, verſus I, nulla miſcetur Viriditas, ſed Purpura tantùm cum Rubore. Qui dicta perpendet, etiam facilè concipiet, quòd, cùm papyrus paululum transferatur ultra citraque, colores alii præter Viriditatem apparebunt ad extremitatem imaginis verſus H. Sic videlicet inter P & *y* Purpureus apparebit extrinſecus; inter *y* & *x*, Cæruleus & Viridis ad *x*, deinde Flavus inter *x* & *z*, ac Rubeus denique ad *z*, & poſtea perpetuo. Ad alteram autem imaginis extremitatem, verſus I ſitam, Rubeus erit extimus à T uſque ad *l*, ubi commiſcetur Purpuræ: quæ quidem mixtura dat pallidum. At ultra *l*, Purpura ſemper conſpicietur. Cæterùm, cùm diſtantia inter *y* & *x* valde parva ſit, & multo magis diſtantia inter x & *t* ſive *x* & *l*, hoc eſt, latitudo limbi colorati; propter ſummam ejus exilitatem, conſpectui vix patebit, ſed totum ſpatium *xxtl*, niſi acrius obſervanti, apparebit album.

63. Cùm hæc advertiſſem, experiebar deinde an reſponderent præconceptis; & licet malè ſucceſſit primò, dum utebar anguſtâ lente; poſtea tamen, cùm adhibui lentem eâ de cauſâ latiorem, ut angulus XY*t* ſive *xyl*, & inde *xl* ſive x*t*, hoc eſt, latitudo dicti limbi colorati fieret major; quod optabam, evenit. Adhibeatur igitur lens, cujus latitudo, ſive Apertura ſit trium digitorum aut major eo, foci autem longinquitas pro lubitu pedum trium vel quatuor; tum ea collocetur ad diſtantiam ſex vel octo pedum à foramine *fkf*, ut colores, PQRST, in eam prolapſi uſque ad extremitates ejus extendantur, nullis tamen præterlabentibus. Deinde papyrus HI pone collocetur, & transferatur ultra citraque, & ad extremitatem imaginis, verſus H, videbis omnes Priſmatum colores à Purpurâ ad Rubedinem uſque gradatim ſucceſſivos. Sed ad alteras imaginis partes, verſus I, inter Purpuram ad *z* & Rubedinem ad *y* conſpicuam, neque Viriditas, neque alius quiſquam ex intermediis coloribus apparebit, niſi fortè qui fiunt ex Rubeo & Purpureo mixti; quemadmodum ex eo cognoſcas, quòd, cùm intercipis extremitatem Purpuræ, ope corporis opaci juxta lentem interpoſiti, ille limbus imaginis verſus I fiet rubeus; ſin extremitas Rubedinis ad T intercipiatur, limbus idem fiet Purpureus. Et hinc eſt, quòd tranſitus à Purpurâ ad Rubedinem, ex hac parte imaginis, fiet multo celerior quàm ex alterâ verſus H, ubi colores Refractionibus abſimiles omnes interveniunt. Cæterùm, cùm dictorum colorum latitudo tam exigua ſit (ſcilicet haud major centeſimâ parte digiti, ut niſi vitra ſint benè polita, & à venis libera, & inſuper experientis diligentia & curioſitas ſolito major, fortè excidet propoſito) Quamobrem in majorem evidentiam rei & experiendi copiam, addo, quòd, ſi Microſcopium ſumas, atque ita diſponas, ut papyrum aliquam affixam laminæ, ſuper quàm Objecta collocantur contemplanda, diſtinctè amplificet; dein ita ſtatuas, ut imago lucida *xxtl* incidat in iſtam papyrum, colores in ejus limbo, ſic ampliatos, videbis ſat manifeſtos.

Lucis Coloribus.

EXPER. XI.

64. Verùm, cùm miſtura radiorum, quoad colores diſſimilium, non ſit adeo perfecta in hoc ſpecimine, quin ut è coloribus aliqui in extremitate albedinis appareant (licet tam exigui, ut in-

De Radiorum

cautus fortè non advertat); placet insuper observare, quòd si vice lentis refractoriæ speculum concavum, accuratè formatum & perpolitum, adhibeas, dicta mistura fiet omnibus numeris perfecta. Etenim irregularitas illa, quâ refractiones ita perturbantur, in reflectionibus nulla est; sed radii quoscunque colores depingentes, & utcunque refrangibiles, ad eosdem tamen angulos reflectuntur, in quibus incidunt. Quamobrem, si MN (fig. 16) sit Speculum Ellipticum, cujus foci sint F & X; radii omnes à puncto F manantes, cujuscunque sint generis, sive Purpuram ad P, sive Rubedinem ad T, sive alios alibi quoscunque colores ad Speculum exhibentes, omnes accuratè conveniunt in eodem puncto X. Quinimo, licet Speculum MN non sit ex Ellipticâ figurâ segmentum, sed è Sphæricâ, modo semidiameter sphæræ, hoc est distantia ejus à focis prædictis F & X satis magna sit, puta trium pluriumve pedum, & distantia focorum valdè parva, puta non plus quàm unius digiti: si hæc inquam ponantur, radii ab F manantes adeo propemodum convenient in X, ut istud X quoad sensum pro exacto foco habeatur: & eodem modo radii manantes ab aliis punctis, ut *f*, ipsi F vicinis, in aliis, ut *x*, ipsi X vicinis quàm proximè convenient. Et sic omnes omnino colores reflectuntur à speculo PT in unumquodque punctum imaginis *xXx*, totamque exhibebunt albam.

65. Sunt & alii modi componendi Albedinem; quemadmodum, si vice lentis speculive, duo Prismata, ILM & KMN (fig. 17.) in situ ad consimile Prisma ABC parallelo, ad distantiam aliquot pedum juxta posita adhibeantur; quæ radios in contrarias partes refringant, faciantque versus X convergere, quos Prisma ABC divergentes effecerat. Colores ad X congregati component Albedinem, ac post decussationem sub propriis (ut antea) formis ad πτ denuo apparebunt.

66. Opportuna hìc alia subit assertionis demonstratio, quòd colores in concursu non destruuntur ad Albedinem efficiendam, sed commiscentur tantùm: utpote rotam, dentibus undique in perimetro consitam, ita colloca juxta duo prismata ILM & KMN, vel juxta lentem MN in præcedenti experimento, ut è coloribus aliqui in dentem aliquem impingent, dum cæteri per intervallum inter illum & proximum dentem præterlabantur, & in chartam ad

ad præfatum colorum concursum, X, excipiatur. Tum rotam imprimis lentè circumvolve, & videbis singulos colores in chartam, sine aliquâ albedinis apparitione, successivè procedere; postea, si rotam tam celeri motu circumagi facias, ut succenturiantes colores, propter velocitatem consecutionis, ab invicem distingui nequeant, transmigrabunt in Albedinem, eamque quoad sensum homogeneam; sine aliquâ colorum apparitione, ex quibus, celerrimè se mutuò consequentibus Albedo illa efficitur: & hanc Albedinem, è coloribus illis successivè commistis componi per se manifestum est.

Lucis Coloribus.

67. Quinetiam Albedo non tantùm ad locum concursûs, X, è commistis coloribus componitur, sed etiam ad foramen *fFf*, ubi lux modò transiit Prisma & colores nondum apparuêre; quandoquidem omnes radii, quibuscunque coloribus affecti, qui ad punctum quodvis imaginis *xXx* convergunt, ab alio quodam puncto foraminis *fFf* manârunt, & sic iidem radii ad utrumque spatium *fFf* & *xXx* miscentur, & utriusque albedinis eadem est compositio.

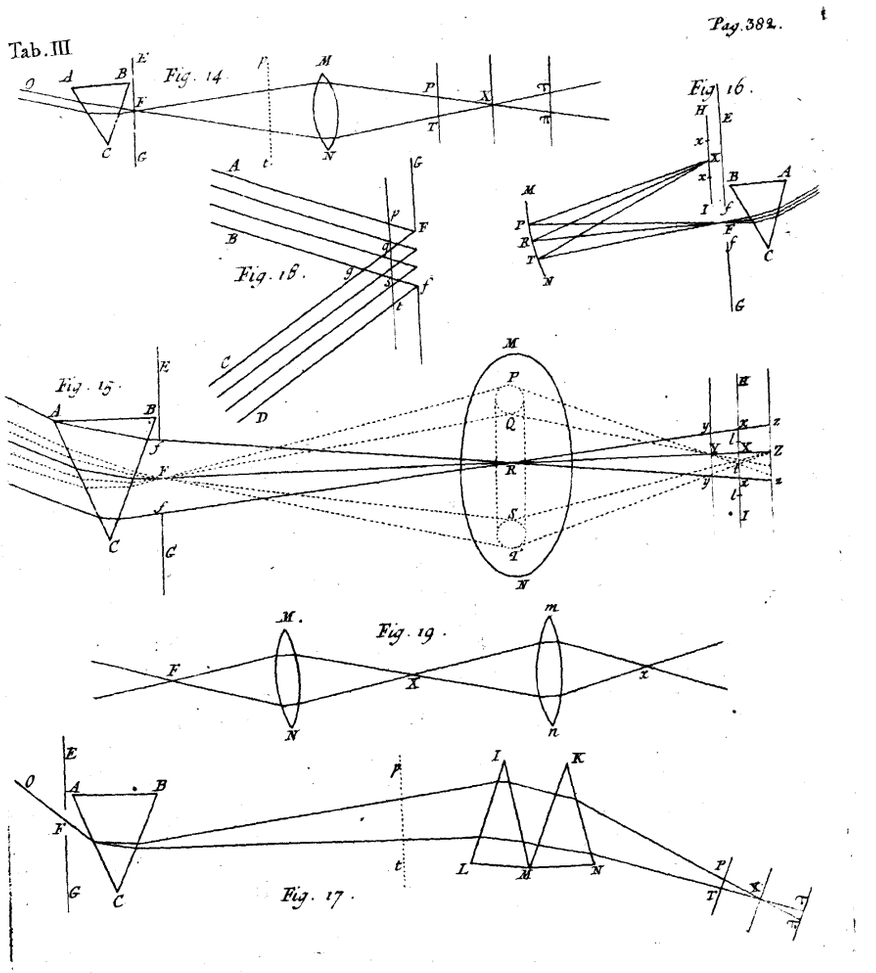
68. At hæc clariora fient observando primò, quòd rei alicujus utcunque figuratæ, & applicatæ ad foramen *fFf*, umbra distinctè projicitur in papyrum radios excipientem ad X. Quinimo bullularum Aeris in prismate latentium (sicut vitris omnibus contingere solet) umbras videre licet, ad instar macularum in dictam papyrum projectas: id quod nullo pacto contingere potuisset, nisi radii manantes ab aliquot punctis ipsius *fFf*, in totidem punctis rursus convenirent ad *xXx*. Et licet non exactè conveniant in iisdem punctis manantes ab iisdem, cùm lens refractaria vice speculi adhibetur ut in figuris 14 & 15, & proinde colores nonnullos generent in confinio lucis & umbræ, sicut fusè explicui; tamen spatium, in quod conveniunt, tantillum est, ut pro puncto sensibili fermè habeatur.

69. Secundo, si lentem in figurâ 14 ita statuas, ut æquidistet à focis ejus F & X in medio posita, ac deinde colores excipias in papyrum PT, tum ultra lentem versus X, tum citra versus F alternis temporibus admotam; possis observare, quòd colores eodem plane modo apparent, diminuuntur, & in Albedinem paulatim convertuntur, dum dicta papyrus motu lento & continuo transfertur ad F, atque dum transfertur ad X; adeo ut divergentia colorum

De Radiorum

rum ab F & convergentia ad X omnino ſimilis ſit. Pari ratione, ſi papyrus $\pi\tau$ lentè moveatur ad X, juxta & *pt* moveatur ad F, iidem colores conſpicientur in utrâque, & eodem modo definent in Albedinem; hoc tantùm excepto, quòd eorum ſitus contrariatur propter decuſſationem radiorum in X; atque adeo divergentia colorum ab utriſque, F & X, ſimilis eſt. Quid itaque concludendum eſt exinde, quàm quòd eodem modo commiſcentur, & ad F, antequam divaricaverunt ab invicem, & ad X, ubi rurſus congregantur in Albedinem? Sed, ut comparatio modò facta evadat illuſtrior, venit obſervandum porro, quòd cùm papyrus ſtatuitur ipſi F contigua, & amovetur deinde verſus *pt*, & poſtea ſtatuitur ad X, & amovetur verſus $\pi\tau$; quòd inquam Albedo ad F & X, in utroque caſu, primò degenerabit in colores ſecundum extremitates ejus, dum in meditullio manet alba; cujus rei ratio non eſt alia, quàm quòd radii divergentes perinde ſegregantur in confinio lucis & umbræ. Sic, poſito quòd radii divergant à ſpatio *Ff* (fig. 18.) alii quidem paralleli tendentes ad AB, atque alii ad priores inclinati ſed inter ſe paralleli tendentes ad CD; prima ſegregatio fiet in extremitatibus juxta lineas FA & *f*D, ultimaque in medio veluti ad *g*: nam in lineâ *pt*, inter *Ff* & *g* ductâ, videre eſt, quòd paralleli juxta extremitates *pq* & *st* ab invicem ſegregantur, ſed maxtim tranſeunt per intermedium ſpatium *qs*.

70. Tertio, ſicut lens MN in fig. 14. refringendo radios divergentes ab F, facit ut convergant ad X & ibi conficiant Albedinem; eodem modo, ſi iſti radii, poſtquam decuſſavêre, divergentes ab X iterum trajiciantur per aliam lentem *mn* (fig. 19.) priori ſimilem, & ſimiliter poſitam inter focos ejus X & *x*, id eſt æquali ab utriſque diſtantia; colores, ſic ad *x* ſecundâ vice congregati, Albedinem rurſus component, ſicut antè compoſuerant ad X; hoc tantùm interpoſito diſcrimine, quòd apparebunt in limbo Albedinis ad *x* duplo latioris, quàm (è mox oſtenſis) apparent ad X, atque inſuper in ſitu contrario. At ſpeculis, ut dictum eſt, adhibitis, quæ lucem aliquoties repercutiant, iſti colores erunt nulli; atque adeo penicilli FX & X*x* evadent omnino ſimiles, & ſimilis fiet decuſſatio & commixtura radiorum ad F, X & *x*. Concludendum eſt itaque, quòd Lux, cùm modò trajicitur per Priſma, licet Albedinem exhibeat, tamen conſtat ex radiis heterogeneis confuſè mixtis,



mixtis, & ab invicem per divergentiam mox diſceſſuris; qui poſt- LUCIS COLORIBUS.
quam ita ſegregantur, propriis apparent formis; ſin iterum congregantur, Albedinem rurſus componunt, & ſic præterea in infinitum.

EXPER. XII.

71. Imo verò Lux non ſolùm componitur ex omnium colorum radiis, ut egreditur priſmate, & nondum diſcernitur in colores iſtos; ſed etiam cùm nondum attigit Priſma, & antecedenter ad omnem refractionem: & inde non mirum eſt, quòd, cùm ſegregantur in colores, virtute priſmatis radios inæqualiter refringentis, & colores iterum commiſcentur ope lentis, aut alio quovis modo præmonſtrato; quòd inquam rurſus componunt Albedinem: neque hoc ſolùm exinde confirmatur, quòd lux è coloribus compoſita primigeniæ luci perſimilis ſit; ſed etiam ex eo, quòd radii penitus differunt Refrangibilitate, & conceptus non eſt durior, quòd differunt coloribus: imo cùm eidem refrangibilitatis gradui color idem perpetuò competat (ut Purpureus maximè refrangibilibus, Rubeus minimè refrangibilibus, & ſic porro); quid aliud ab iſtâ cognatione innuitur, quàm quòd ſint congenita, & fortaſſe quod à communi quâdam cauſâ dependent? Sed in hujus rei majorem evidentiam oſtendam præterea, quòd radiorum Solis æqualiter incidentium quædam genera reflecti poſſunt, dum alia per reflectentem ſuperficiem trajiciuntur; adeoque diverſos colores diverſis radiis, ante omnem refractionem, ineſſe. Sit ABC (fig. 20.) Priſma, quòd excipit radios, in obſcurum cubiculum per foramen F, uno digito latum, trajectos, eoſque refringit ad papyrum vel parietem, HI, iis obſiſtentem apud T: porro autem, cùm ſuperficies priſmatis BC non omnes refringat radios verſus T, ſed & plurimos reflectat; eos apud P ſiſte etiam cum aliâ papyro KL, in morem albæ imaginis, foramini F perſimili, terminante. Deinde converte Priſma circa axem ejus ſecundum ordinem literarum ABCA, & videbis tum amplitudinem colorum ad T, tum quantitatem lucis ad P augeri perpetuò; donec tandem, cùm Refractio ad planum BC fit maximè obliqua, colores ad T incipient evaneſcere, & reflecti ad P; Purpureus primò, deinde Cæruleus, Viridis & Flavus, & denique Ruber, cujus quidem lucis acceſſu imago

De Radiorum

imago P fiet multo lucidior quàm antea. Interea verò, dum colores ad T gradatim evaneſcunt, videbis Albedinem ad P paululum mutari, & nonnihil vergere ad Cæruleum, per acceſſum nempe Purpurei & Cærulei, qui primò reflectuntur; id quod nullo modo accidiſſe potuiſſet, niſi radiis, prout à Sole veniunt, diſcrimen ineſſe concedatur: ſcilicet quòd ex iis quidam, ad efficiendos Rubeum & Flavum diſpoſiti, pertinaciùs, & cum minore Refractione, penetrant ſuperficiem BC, & verſus T perlabuntur; dum alii, ad exhibendum Purpureum & Cæruleum parati, ſuperficiem dictam aut penetrant languidiùs, majores refractiones patientes; aut, ſi nequeant penetrare propter nimiam eorum obliquitatem, tum faciliùs & citiùs reflectuntur ad P, iis primò omnium reflexis, quorum potentia ad iſtam ſuperficiem penetrandam ſit minima; id eſt purpuriformibus & cæteris deinde ſuo ordine, prout incidentia ſit magis obliqua; donec rubriformes ultimò reflectantur, obliquitate tantâ & debilitati, ut non ſint ampliùs potentes dictæ ſuperficiei reſiſtentiam ſuperare. Atque hæc facilè conſtabunt iis, qui nôrunt, quòd quo major eſt vis refractiva ſuperficiei cujuſvis, eo citiùs & ad minorem obliquitatem radii reflectuntur; & quo minor, eo magis obliqui penetrabunt.

72. De hoc autem experimento convenit obſervare, primò quòd, cùm prædicta variatio Albedinis ad P ſit admodum parva, propter exuberantiam lucis albæ collatæ ad reflexum Cæruleum, itaque cavendum eſt, ne priſmate utaris, quod ex vitro conflatur tincto cum colore aliquo; ne lucem ad P reflexam ita tingat, ut difficile ſit dictam variationem obſervare; præſtat adhibere priſma ex laminis vitreis tenuibus & perpolitis confectum, & aquâ limpidiſſimâ repletum.

73. Secundo, licet mutatio dicta ſit parva, tamen ſatis eſt ad oſtendendum, quòd radii retinent eoſdem colores cùm reflectuntur, quos exhibent, cùm trajiciuntur per ſuperficiem BC; ſiquidem tingunt Albedinem P colore ſuo, quantum liceat tam paucis tingere. Colores itaque ſuos habuêre prius, & eoſdem retinent, ſive refringantur, ſive reflectantur; licet in mixturis plerumque celati lateant, donec eruantur (non autem fiunt) virtute priſmatum.

74. Tertio,

74. Tertio, ex luce ad priorem ſpeciem Albedinis, per reflexionem omnium colorum à T, reſtitutâ, quid aliud denotatur, quàm Albedinem iſtam per miſturam omnium colorum reproduci? Scilicet, cùm Rubor ultimò reflexus admiſcetur cæteris coloribus antea reflexis, reflexorum colorum miſtura tunc perfecta eſt ad Albedinem componendam, quæ ſuperadditur albedini prius exiſtenti in P. Lucis Coloribus.

75. Quarto, ne qua oriatur ſuſpicio, quòd refractiones in ſuperficiebus AC & AB, ad ingreſſum radiorum in Priſma & egreſſum factæ, poſſint aliquid conducere ad effectus hoſce producendos; obſervare licet, quòd effectus iidem producuntur, cujuſcunque licet magnitudinis ſtatuatur angulus ABC; hoc eſt, quæcunque ſit refractio ſuperficiei AC; modò angulus ABC ponatur ejuſdem eſſe magnitudinis atque angulus ACB; aliâs enim pro imagine albâ ad P generabuntur colores. Experimentum itaque nullatenus dependet à refractionibus ſuperficierum AC & AB; imo poſſis efficere, quòd, cùm colores partim reflectuntur ad P, & partim trajiciuntur ad T, radii perpendiculariter incidant in AC, emergantque ex AB, & ſic neutrâ ſuperficie refringantur, modò ſtatuas angulum ABC, ut & ACB, eſſe grad. 40. circiter, & iidem tamen effectus producentur.

EXPER. XV.

76. Cæterùm in majorem evidentiam & explicationem modi, quo prædicta fiunt, liceat experiri per lucem in colores diſcretam, quòd Purpureus primò, & cæteri deinde (quiſque ſuo ordine) reflectuntur. Etenim (in fig. 21.) ſint ABC & *abc* duo Priſmata parallela, quorum alterum ABC projiciat colores in alterum *abc* ad diſtantiam duodecim vel plurium pedum. Tum Priſmate *abc* circa axem ejus ſecundum ordinem literarum *abca* converſo, donec tanta ſit obliquitas radiorum in ſuperficiem *bc* incidentium, ut incipiant ad *p* reflecti, non amplius potentes penetrare ad *t*; videbis omnes purpuriformes primò omnium reflecti, cæteroſque deinde ſuo ordine.

77. Veruntamen quia purpuriformes radii paulo magis refringantur in primo Priſmate, ABC, & ideo magis inclinentur ad ſuperficiem *bc* ſecundi Priſmatis, *abc*, quàm cæteri; poterit objici,

De Radiorum

quòd eâ de causâ primò omnium reflectuntur. Quamobrem (in fig. 22.) duo prismata statuantur non parallela sibi invicem, sed in situ transverso; ut omnicolores radii quasi ad eosdem angulos incidant in præfatam superficiem *bc*; quo posito, possis observare, convertendo prisma *abc* circa axem ejus secundum ordinem literarum *abca*, quòd radii purpuriformes primò omnium reflectuntur, & ultimò rubriformes, coloribus ad *p* continuò translatis, prout à *t* dispareant.

EXPER. XVI.

78. Sunt & alii præterea modi, quibus experiri liceat, quòd ex radiis similiter incidentibus quædam genera penitus reflecti possunt, dum alia partim transmittantur. Quemadmodum si EFG (fig. 23.) sit operculum fenestræ ad F tenebratum, & foras statuatur Prisma ABC, quod lucem Solis, foramen F ingressuram, intercipiat, & refringat versus *f*; ad illud *f*, pedibus ab F duodecim aut longius postpositum, statuatur opacum corpus *efg*; quod lucem sistat, dempto parvo foramine *f*, per quod aliqua pars lucis, nempe Violacea, longiùs trajiciatur ad *y*. Istud autem *f* non sit semisse digiti latius. Deinde præ manibus sumatur aliud Prisma *abc*, & ad radios transversè positum statuatur, à posticâ parte foraminis *f*, circaque axem ejus convertatur, donec videas lucem Violaceam, postquam ab ejus basi *bc* obliquissimè refracta fuerit versus *t*, totam à *t* disparuisse modò, & ad *p* reflecti. Luce Violaceâ tam obliquè ad *p* reflexâ ut ad *t* statim pervasura esset, modò ex angulari motu Prismatis, secundum ordinem literarum *abca* facto, angulus *cyf* vel minimum augeretur; prisma istud *abc* in eo statu figatur. Tum alterum prisma, ABC, motu circa axem ejus nunc hâc nunc illâc parùm convertatur, ut colores, quos projicit in obstaculum *eg*, paululum attollantur; eoque pacto omnes successivè transmittantur per foramen *f* in posterius prisma *abc*: & videbis, quòd, cùm Flavedo transmittitur ad *y*, illi radii non omnes ad *p* reflectentur, sed plurimi perrumpent superficiem *bc*, & ad *t* pertingent; et cùm Rubor ad *y* transmittitur, illi radii fortiùs adhuc perrumpent, ut ex copiâ perrumpentis lucis & minori ejus refractione constet. Neque mirum videatur, quòd purpuriformes radii sint minùs potentes penetrare superficiem *bc*, quàm

quàm rubriformes; quandoquidem Prismatibus eodem modo dis- Lucis positis antehâc ostendi, quòd majorem refractionem patientur, po- Coloribus. sito scilicet angulo *cyf* tanto, ut omnigeni radii possint superficiem *bc* penetrare. Jam, cùm radii, qui citiùs & faciliùs reflectuntur in experimento ad fig. 20. tradito (P), nempe purpuriformes, etiam citiùs & faciliùs reflectantur in experimentis duobus novissimè recitatis; cùm eadem iisdem radiis semper eveniant, liquet quòd hoc fit non ex contingentiâ, sed ex prædispositione radiorum; & quòd antecedenter ad omnem reflectionem aut refractionem, quidam ad exhibendos quosdam colores sunt apti, & faciliùs reflexibiles, alii verò aliis coloribus & progrediendi viribus afficiuntur. Neque aliud experimentis jam recitatis discrimen interesse videtur, quàm quòd in primo radii omnium formarum, prout à Sole adveniunt, confusè mixti incidant in prisma, quod rubriformes transmittit & reflectit cæruliformes: in reliquis autem duobus experimentis, dissimiles radii priùs discernuntur ab invicem, quàm incidant in dictum prisma.

EXPER. XVII.

79. Ad hæc lubet aliud adducere modum, quo dissimilitudo radiorum, in luce Solis mixtorum, innotescat, non multo dissimilem ei ad fig. 20. ostenso, sed conspectui jucundiorem & æquè scientificum. In fig. 24. sunto AA*b*BC & B*b*DdC duo Prismata, ita juxta se posita & colligata, ut duo ex eorum planis CB*b* conveniant sibi & coincidant; excepto tantùm quod nonnihil aëris, in morem tenuissimæ laminæ, intercedat iis; id quod eveniet ultrò, siquidem haud queas prismata tam arctè constringere, quin tantum intercedet aëris, quantum proposito sufficiet. Porro in majorem rei evidentiam convenit, ut anguli ACB & CBD sint æquales proximè; eò ut plana A*a*C & B*bd*D fiant parallela, licet hoc non sit omninò necessarium. His præmissis, statuantur dicta prismata juxta foramen F; ut lux ingressa per ea trajiciatur versus ⅂, primò permeans superficiem A*a*C, deinde intermediam superficiem B*b*C, & inde per B*bd*D prolapsa in papyrum ad ⅂ collocatam, quam Albedine tingit, tanquam si non omnino transiret prismata, sed vitrum parallelis planis, A*a*C & B*bd*D, terminatum. Præterea, cùm intermedia superficies B*b*C lucem ei incidentem non omnem

(P) Id est, decimo quarto.

De Radiorum

tranſmittat ad ⅂, ſed multam reflectat, quæ aliquò exibit è priſmate ABC per ſuperficiem ejus AaBb, puta verſus ϖ: ad illud ϖ ſtatuatur alia papyrus, quæ lucem hanc ſimiliter albicantem terminet. Quod ubi feceris, converte Priſma quadrangulare (ex duobus triangularibus colligatis confectum) motu lento circa axem ejus ſecundum ordinem literarum ABDCA; tandemque videbis, quòd albedo ad ϖ ac ⅂ degenerabit in colores, Flavedine primò, deinde Rubedine ad ⅂ conſpectâ, Cæruleo autem colore ad ϖ; donec, poſt intentiſſimam Rubedinem ad ⅂, color & lux omnis evaneſcat inde, & Cæruleus ad ϖ iterum tranformetur in Albedinem aliquanto lucidiorem quàm antea. Utpote dum Priſmata circa communem axem, ut dictum eſt, convertantur, radiorum, in mediam ſuperficiem Bbc (hoc eſt in laminam aëris priſmatibus interjectam) prolapſorum, incidentia continuò fit obliquior; donec tanta ſit eorum obliquitas, ut nequeant ampliùs penetrare dictam laminam, progredique ad ⅂, ſed abinde reflectantur ad π: quod accidet, cùm angulus Fec (obliquitas incidentium) ſit graduum ferè quinquaginta. Radii autem purpuriformes, minimè omnium potentes penetrare dictam laminam aëream, reflectentur primò, & Albedinem, priùs reflexam ad ϖ, nonnihil tingent eorum colore; dum ex radiis præterlabentibus ad ⅂ Flavedo imperfecta, aut potius color inter Flavum & Viridem mediocris, componitur. Poſtea Cæruleus, & Viridis deinde reflexus, paulo magis tinget lucem in ϖ cum colore Cæruleo (licet admodum diluto propter exuberantiam Albedinis commixtæ) manebitque Rubor in ⅂, qui mox, per Flavedinis, hactenus commixtæ, reflectionem, fiet intenſior, donec ipſe etiam denuo reflexus Albedinem in ϖ redintegret.

80. Cæterùm ut hoc ſpecimen evadat illuſtratius, ſumatur aliud Priſma GHI, quod à poſticâ parte priſmatum ABCD ita collocetur, ut lucem *oe*⅂, per ea tranſmiſſam, refringat verſus PT, & in colores permutet; Violaceo in P, Rubeo in T, cæteriſque in intermedia loca projectis. Tum Priſmata colligata circa communem axem (ut priùs) rotentur, donec lux alba verſus ⅂ tranſmiſſa incipiat flaveſcere; & videbis, quòd color purpureus in P ſimul evaneſcet. Id quod arguit purpuriformes radios non amplius ad priſma

priſma GHI pertingere, ſed à ſuperficie CBb primò omnium ad ϖ reflecti; & lucem *e*⅂ ideo flaveſcere, quòd Purpura è miſturâ tollitur, quâ priùs Albedinem exhibuit. Ad eundem modum, ſi priſmata ABCD diutiùs rotentur, videbis reliquos colores ad P ad T ſucceſſivè diſparere, prout lux *e*⅂ plus pluſque rubeſcit; & cùm fit ruberrima, tum ſolam rubedinem in ⅂ manere: quòd manifeſto convincit hanc lucem *e*⅂ non aliunde rubeſcere, quàm quòd à radiis aliorum colorum, per ſuperficiem CBb reflexis, ſecernitur. Lucis Coloribus.

81. Simili ratione, ſi cum priſmate quarto, KLM, refringas radios ad ϖ reflexos, & colores eo pacto productos, & in album parietem projectos, duodecim pedes aut longius diſtantem, animadvertas; videbis, quòd, cùm lux *e*⅂ incipit viridè flaveſcere, purpura *p*, quam priſma hoc elicit è luce *e*ϖ, pluſquam cæteri colores augebitur; per acceſſum nempe purpuræ, quæ tum in P diſparuit; cæteriſque deinde coloribus in *pt* gradatim fiet acceſſus prout à PT diſparent; donec, cùm omnis color à PT diſparuit, colores ad *pt* non ampliùs augeantur; hoc autem diſcrimine, quòd Violaceus & Cæruleus ad *pt* augmentum ſuum omne paulo citiùs obtinent, quàm Rubeus aut Flavus: ſed hoc tam exile eſt, ut obſervator, niſi ſit attentus, ægrè advertat.

EXPER. XVIII.

82. Ut iſtis denique finem imponamus, lubet alium adducere modum, quo quædam genera radiorum, luce Solis intermiſta, partim tranſmitti poſſint, dum alia reflectuntur. Nempe ſi duas laminas vitreas CB (fig. 25.) planè perpolitas, & ad invicem applicatas, ſecundum planitiem earum connectas, eaſque vaſi RQ aquæ pleno immergas, extremitate ſuperficierum juxta poſitarum undique cerâ vel pice priùs obturatâ, ut aqua non interrepat & expellat aërem, qui more laminæ tenuiſſimæ, ut dictum eſt, interjacebit vitris; ſi hæc inquam fiant, poſſis efficere dictorum vitrorum talem eſſe ſitum, ut (illucente Sole) aër interjectus cæruliformes radios reflectat verſus *p*, & tranſmittat rubriformes verſus *t*, atque alias omnes apparentias modò recenſitas exhibeat.

83. Cæterum de hiſce modis experiendi notandum venit, primò, quòd Colores hîc producuntur à parallelis ſuperficiebus, quarum aliquæ recurvant radios, quantum aliæ incurvant; atque

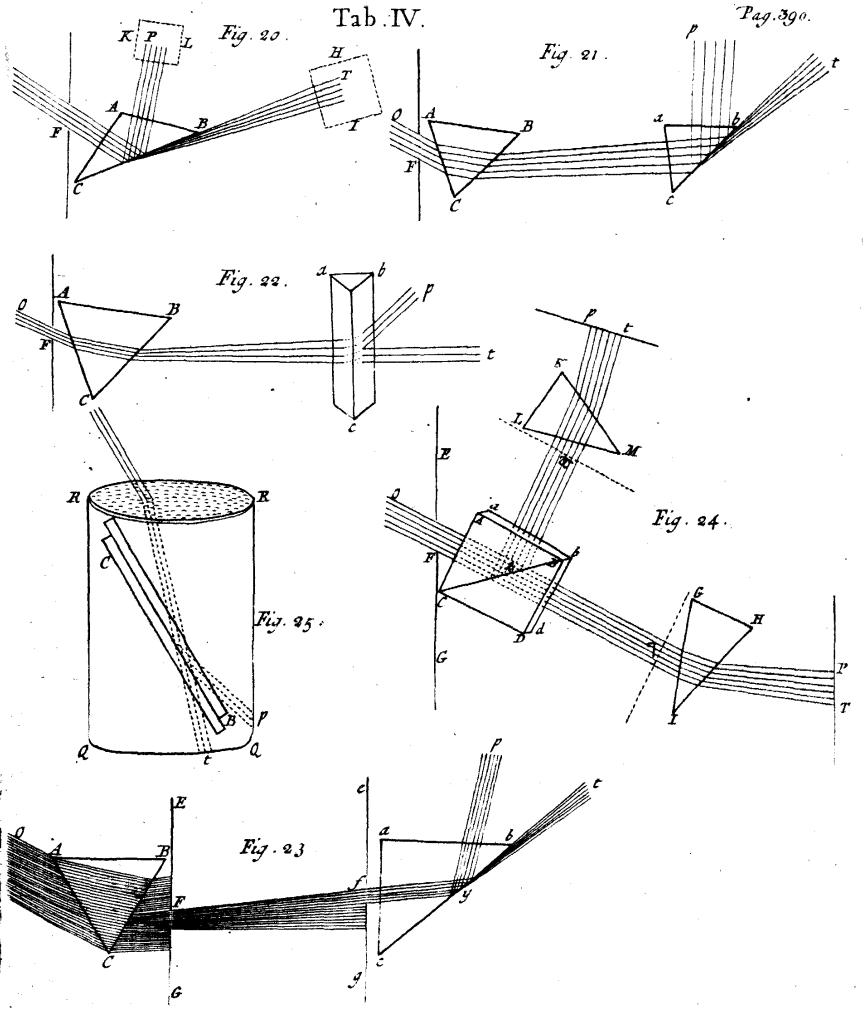
De Radiorum

adeo quæ mutuos effectus deſtruerent, ſi quos in immutandis intrinſecis diſpoſitionibus radiorum, quoad eorum colores, ut opinantur Philoſophi, producerent. Deinde quòd Lux poſtquam per iſtas ſuperficies trajiciatur, licet Alba ſit, manifeſtò tamen conſtet ex heterogeneis radiis; quandoquidem eorum aliqua genera penitus reflecti poſſunt ad *p*, dum alia ad *t* partim trajiciantur. Et eâdem ratione conſtat reflexam Albedinem ſimiliter compoſitam eſſe, ſiquidem (ut dixi) redintegrata eſt, cùm Rubor omnium ultimus reflectitur à *t*; & hæc ex eo etiamnum ſummè confirmantur, quòd à ſolâ vitrorum obliquitate, ſine aliquâ Refractionis vel Reflectionis novâ modificatione, efficiuntur.

84. Lux itaque, quamvis uniformis eſſet, quæ à Sole immediatè profluit, poſtquam tamen unquam reflexa vel refracta fuit, conſtat ex heterogeneis radiis. Et ejuſmodi eſt ea lux omnis, quæ per vitreas feneſtras trajicitur, vel quam Planetæ, Nubes, &c. ad nos reflectunt. Imo Lux omnis, à Sole aut lucernis quibuſvis derivata: ſiquidem aliqualem ſaltem refractionem ab Atmoſphærâ (ut dicunt Aſtronomi) patitur; ut taceam, quæ in Objectis, denuoque in oculi tunicis, ante viſionis actionem impreſſam, fiunt. Jam, ſi nihil aliud oſtenderam, fuiſſet aliquod prodiiſſe tenus; ſiquidem omnia Viſibilium phænomena nobis per ejuſmodi lucem exhibentur. Atqui, cùm Solis lux immediatè albere cenſeatur, & ille color non ſit ex Primitivis, ſed per miſturam generari oſtendatur; &, cùm nullum inter lucem originalem & illam, quæ à diverſicoloribus radiis componitur, ſenſibile diſcrimen intercedat; haud dubitandum eſt, quin utraque ſit ejuſdem naturæ. Imo verò certiſſimum eſt; ſiquidem (in Prop. II.) oſtenditur, quòd inhærentes diſpoſitiones, vel Formæ radiorum, quibus apti ſunt ad proprios colores exhibendos, nec deſtrui poſſunt, nec ullo modo vi ſecundariæ Refractionis mutari. Et par eſt ratio de Refractione primariâ. Concludendum eſt itaque, quòd iſtæ diſpoſitiones ſunt inſitæ radiis ab eorum origine, quamvis proprios colores, antequam heterogenei ab invicem virtute Refractionis ſecernantur, exhibere nequeant.

85. Cæterùm de eo quod dixi lucis colorem Album eſſe, & tamen Sol aliquantulum flavêſcere videtur; notandum eſt, quòd cæruliformes radii ab Atmoſphærâ præ cæteris conturbantur (ut cæruleus

Tab. IV.



cæruleus ejus color innuit) & inde quòd è directis ſolaribus radiis flaviformes prævalere ſolent; & efficere, ut Sol flaveſcat, qui ſecus fortaſſe appareret albus. Et ad hunc effectum atmoſphæra circa Solem forte conglobata poteſt etiam conducere. At non eo inficias, quin aliquod radiorum genus in originali luce ſæpiſſimè redundet, quandoquidem flammarum & ſiderum diverſi ſunt colores. Lucis Coloribus.

86. De Lucis & Albedinis compoſitione hæc ſatis. Quòd autem Nigredo ex omnibus coloribus ſimiliter compoſita ſit, & in ſolo lucis defectu ab Albedine differat, ex eo manifeſtum eſt, quòd nigrorum, in radiis ſolaribus intra cubiculum (aliàs obtenebratum) intromiſſis poſitorum, termîni omnigenis coloribus tincti apparent, ſi priſmate juxta oculum interpoſito inſpiciantur; quòd ſingulos priſmatis colores, ſeorſim incidentes, pari intentione reflectant, idque longè debiliori quàm alba corpora; & quòd alba defectu lucis nigreſcere videntur, ita ut corpus, quod revera album eſt, in debiliori luce nigrius apparere poſſit.

87. Denique de Cinereis cæteriſque non Primitivis coloribus Propoſitio manifeſta eſt; ſiquidem Cinereos ex Albo & Nigro, cæteroſque omnes ex Rubro, Flavo, & Cæruleo componere nôrunt Pictores.

PROP. IV.

Primitivi colores per compoſitionem colorum ſibimet utrinque confinium exhiberi poſſunt.

88. Hoc variis modis (perinde ut in Albedinis compoſitione, ſiſtendo aliquos è coloribus antequam compoſitionem ingrediantur) tentari poteſt; & ipſe aliquos expertus ſum, quibus conſtitit Luteum à Croceo & ſubflavo, Porraceum à ſubflavo & Thalaſſino (vel etiam minus perfectè à Luteo & Cyaneo) & Cyaneum à Thalaſſino & Indico, alioſque omnes colores à coloribus hinc & inde conterminis componi poſſe. Quinetiam Indicus cum Rubei extremitate contemperatus purpuraſcebat; & Minius cum extremâ Purpurâ paululum conſperſus Coccineus evaſit; tanquam ſi inter colorum extremitates intercederet affinitas, qualis eſt in ſonis inter Octavæ terminos.

89. Iidem

De Radiorum

89. Iidem colores à coloratis Pulveribus componi poſſunt, ſed minus perfectè ut opinor; propterea quòd ipſi componentes ex aliis coloribus, quorùm aliqui ſunt diſſimiliores, componuntur.

90. Cæterùm, ne nimius hîc ſim, breviter dicam, quo pacto Priſmatici Colores, in hos effectus producendos, optimè miſceri poſſunt. Nempe Priſma GDE (fig. 26.) ex pellucidiſſimis & perpolitis lamellis vitreis, in vaſculum aquæ plenum coaptatis, efficiatur; quo radiorum, in colores per divergentiam diſcretorum, duo quælibet genera, juxta diverſos angulos, D & E, ſat acutos & æquales tranſmiſſa, ad invicem verſus H cogantur.

PROP. V.

Corporum naturalium Colores è genere Radiorum derivantur, quos maximè reflectunt.

91. Hoc è præmonſtratis tantâ neceſſitate & evidentiâ conſequitur, ut ſupervacaneum eſſe videatur, me aliquid de induſtriâ hîc in probationem ejus moliri. Utpote cùm oſtenſum ſit, quòd nullius generis uniformium radiorum color, per reflectionem à corpore Phyſico mutari poſſit, ſed unumquodque colore radiorum tinctum appareret, quibuſcum illuminatur. Si corpus, cujuſcunque ſubdialis coloris, à Solis rubriformibus radiis in tenebroſo cubiculo illuminetur, rubeſcit; ſi flaviformibus illuminetur, flaveſcit; ſi viridiformibus, vireſcit; & ſic præterea.

92. Sed in hujus rei majorem evidentiam obſervandum eſt inſuper, quòd unumquodque corpus proprium colorem præ cæteris, ſeorſim incidentibus, copioſè reflectit. Sic Cinnabaris in luce Rubeâ maximè reſplendet, in Virid minùs, & adhuc minùs in Cæruleâ. Sic Indicum in Violaceâ & Cæruleâ luce maximè reſplendet, & ſplendor ejus gradatim deminuitur, prout in Rubeam lucem per gradus intermedios continuò transfertur. Sic Porrus lucem Viridem plus quàm Rubeam aut Purpuream reflectere conſpicitur, & ſic in aliis. Et quo corpora ſub dio ſunt intenſiorum & magis ſpecificorum colorum, eo minùs in alienâ luce reſplendent.

93. Quamobrem, ut hæc faciliùs & magis cum evidentiâ pertentes, corpora ſeligere oportet intenſis coloribus, & quàm poteris maximè

maximè ſimplicibus prædita; id quod cognoſces, ſi, priſmate adhibito, ſeligas, quæ ad extremitates, nigredini conterminas, diſtinctiora apparent, & minùs variegata. Præterea colores Priſmatum, quos in hæc corpora projicis, debent eſſe ab invicem per plures refractiones optimè diſcreti. Nam, ſi colores per unici tantùm Priſmatis, juxta lucis ingreſſum poſiti, refractionem ſecernantur, non color lucis incidentis, ſed alius quidem, inter corporis, in aprico conſpecti, & lucis hujus incidentis colorem intermedius generabitur. Quemadmodum, ſi hujuſmodi lux Flava in Cæruleum corpus incidat, corpus illud non flaveſcet, ſed virebit potius: propterea quòd plures è viridiformibus radiis, in hâc flavâ luce latitantibus, quàm è flaviformibus reflectere aptum ſit; & ſic Rubeum corpus in Viridi luce flaveſcere poteſt, & in Cæruleâ luce vireſcere, ſi modò lux illa ab aliis commiſtis coloribus non bene purgetur. Et ob hanc cauſam ſummè cavendum eſt in faciendis hiſce experimentis, ut cubiculum fiat obſcuriſſimum, ne lux erratica cum Priſmatico colore commiſceatur. Lucis Coloribus.

94. Denique, quo coloris cujuſvis, à corporibus ſub dio diverſè coloratis reflexi, quantitas innoteſcat meliùs, corpora illa in eâdem lucis quâlibet ſpecie, juxta poſita, confer; & videbis unumquodque in luce proprii coloris præ cæteris reſplendere. Sic Indicum in Cæruleâ vel Purpureâ luce plus quàm Cinnabaris reſplendet, & Minius in Rubeâ. Aut ſi fortè (propter alterutrius coloris imperfectionem & obſcuritatem) ambo æqualiter in luce Violaceâ reſplendere contingat, tum in Rubeâ luce Cinnabaris fiet longè illuſtrior, aut contrà longè debilior in luce Violaceâ, ſi æqualiter reſplendeant in Rubeâ. Cinnabaris itaque plures è rubriformibus quàm aliis quibuſlibet radiis reflectit, & proinde rubet. Indicum verò plures è cæruliformibus & purpuriformibus reflectit, & proinde fit intermedii coloris. Et ad eundem modum ſi in Albis corporibus fiat experimentum, conſtabit, quod omnigenos reflectant æqualiter, & ſic in aliis.

95. Antequam huic de coloribus phyſicorum corporum Propoſitioni finem impono, placet annotare de quibuſdam apparentiis, quantâ neceſſitate conſequuntur è noſtris principiis, quæ aliàs miræ viderentur & explicatu difficiliimæ. Et imprimis, quia corpora evadunt colorata, reflectendo quædam genera radiorum

De Radiorum

& intromittendo cætera, ſi aliquatenus tranſpareant; concludendum eſſe videtur, quòd colores maximè tranſmittantur, qui minimè reflectuntur, & inde quòd alius ſit eorum color cùm tranſpiciuntur, atque alius cùm cernantur luce reflexâ. Et hoc quàm bene convenit cum experientiâ, videre eſt in Libro Boylei de Coloribus conſcripto. Scilicet infuſio ligni Nephritici, quando diverſâ luce tranſpicitur, Rubea vel Flava appareat, & Cærulea cùm cernitur ad plagas lucis incidentis. E contra verò Aurum Foliatum apparet Flavum, & tranſparet Cæruleum. Sic vitri fragmenta, per totam profunditatem colorata, qualia in antiquis templorum feneſtris reperiuntur, varios plerumque colores pro poſitione ſpectatoris exhibent. Et craſſiorum laminarum vitri pellucidiſſimi (qualia ad fabricanda Teleſcopia adhibentur) cùm obverſas oras aſpexi, Cæruleum vidi reflexum; & Flavum tranſmiſſum, cùm perſpexi: Cæruleus autem maximè apparuit, cùm illuſtrabatur jubare in obſcuratum cubiculum immiſſo, & à lente concavâ diſtracto, ne nimiâ luce color perfunderetur. Neque ullus dubito, quin plurima exiſtant hujus rei exempla, ſi quis operæ pretium duxerit in variis liquoribus, aliiſque corporibus tranſparenter coloratis, examen inſtituere; interea cavendo, ne lux è pluribus plagis ſimul incidat.

96. Quòd autem iſthoc non ſemper eveniat (quemadmodum in eâdem infuſione ligni Nephritici, cùm Cæruleus color ſalibus acidis deſtruitur, & in aliis pleriſque, quæ undique ſunt ejuſdem coloris) ratio eſt, quòd corporibus non ſolum inſit poteſtas reflectendi vel tranſmittendi radios, ſed etiam ſuffocandi, & in ſe terminandi. Sic aliqua obſtruunt & retinent omnigenos radios, eoque pacto fiunt undique nigra; alia reflectunt quoſdam, cæteroſque ſupprimunt, ut opaca colorata; alia quoſdam ſupprimunt, cæteroſque partim reflectunt & partim tranſmittunt, ut tranſparenter colorata, quæ circumcirca ejuſdem ſunt coloris; & alia quoſdam reflectunt, cæteroſque tranſmittunt, ut in exemplis jam allatis conſtitit. Atque ita præterea.

97. Porro, quòd Liquoris colorati varia craſſities aliquando ſpeciem Coloris variare poteſt, cum noſtris principiis quàm optimè conſentit. Sic infuſio ligni Nephritici pro variâ ejus craſſitie, vel Flavum vel Rubeum colorem referre poteſt. Cujus rei rationem

Lucis Coloribus.

nem ut intelligas, concipe, quòd liquor ille ſit aptiſſimus ad reflectendum purpuriformes & cæruliformes radios; ineptiſſimus, ad reflectendum rubriformes; & mediocriter aptus ad reflectendum mediocres: & (in fig. 27.) poſito ABC vitro coniformi hujus infuſionis pleno, ſit FI craſſities ejus, cum Aureo colore ſplendentis; EH major craſſities, ubi incipit rubeſcere; ac DG craſſities, ubi ſit intenſioris & ſubobſcuri ruboris. Et, cùm cæruliformes & purpuriformes radii citiſſimè reflectantur, ut ex eo patet, quòd unius tantùm guttulæ craſſities ad eos colores reflectendos, & ſpectantibus, exhibendos ſufficit: ex illis pauciſſimi penetrabunt ad profunditatem FI; ſed plurimi viridiformes, & adhuc plures flaviformes unà cum rubriformibus trajicientur, ex quâ miſturâ fiet iſte color Aureus. At per profunditatem EH pauci è flaviformibus tranſibunt, & pauciores è viridiformibus; ac ſoli ferè rubriformes ad uſque profunditatem DG pervadere valebunt; quinimo ex illis etiam complures in itinere reflectentur, & inde rubor trajectus ſubobſcurus evadet.

98. Ad eundem ferè modum, cùm Lux per plura corpora, diverſis coloribus pellucidè tincta, trajicitur, color ille ex adverſo videbitur, qui facillimè pertranſit omnia. Quòd ſi nullus poteſt omnia pertranſire, utcunque ſeorſim pellucida exiſtunt, conjunctim tamen evadent maximè opaca. Quemadmodum, ſi lamina AB tranſmittat ſolos rubriformes, & CD ſolos cæruliformes, cùm juxtà ponuntur, tranſmittent nullos. Cujus quidem rei exemplum habes in Micrographiâ Hookii de Cæruleo & Rubeo liquore, qui ſeorſim apparuêre, & conjunctim fuêre opaci.

99. Denique huc referri poteſt, quòd, cùm aliquis è coloribus Priſmaticis per corpus tranſparenter coloratum trajicitur, intermedius color emergit. Sic Viriditate v. g. in vitrum tranſparenter Rubeum incidente, flaviformes radii, qui in illâ Viriditate commiſti latent, præ cæteris vitrum fortaſſe pervadent; efficientque, ut lux emergens flaveſcat.

Sed videor officii limites exceſſiſſe, in campum Phyſicum nimis expatiatus. Viſum quidem fuerit hæc attigiſſe, ut univerſa rerum conſenſio pateret; ſed iſto gradum, ac tandem, coronidis loco Inſtrumentum quoddam haud inelegans deſcribam, quo præfata omnia ſummâ cum evidentiâ tentari poſſunt.

De Radiorum

100. Sit ABC*abc* (fig. 28.) Prisma, quòd radios, per foramen F in obscuratum cubiculum transmissos, refringat versus lentem MN, ut colores, quos efficit in *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, per lentem deinde transjiciantur ad X, & ibidem commiscentur in Albedinem componendam, sicut in præcedentibus ostendi. Deinde aliud Prisma, DEG*ed*, priori parallelum ad locum X, ubi Albedo redintegrata est, statuatur; quod lucem versus Y refringat. Hujus autem prismatis verticalis angulus, G*g*, sit æqualis angulo verticali, C*c*, prismatis anterioris, aut eo fortè minor, & similiter positus; ut incidentes radios in parallelismum reducat, quos prisma anterius disperserit.

101. His positis, observabis an lux Y (pedes aliquot distans trajecta) æquè alba maneat ac fuerit in X; vel sensim abeat in colores. Si penitus appareat Alba, tunc prismata cum lente rectè disposuisti; sin aliqui colores ad Y cernantur, prisma DEG circa suum axem eo modo parùm converti debet, ut colores minuantur; &, cùm penitus evanuêre, & lux in totum albescit, siste Prisma. Quòd si nequeas hoc modo efficere, quin lux, inter transeundum ab X ad Y, ex aliquâ suâ parte transmigret in colores; lentem MN paulo longiùs à prismate ABC transfer, & loco X rursus invento, ubi Colores in Albedinem accuratissimè convergunt, in eo statue prisma DEF ut priùs; & rursus experire, an possis lucem sine coloribus ad Y projicere; & cùm eo usque mutaveris positiones prismatum & lentis, dum effeceris lucem ad Y trajectam, quàm minimè possis coloratam, prismata cum lente in eo situ figantur; idque vel ope trabis, ut in schemate describitur, vel tubi aut instrumenti cujusvis in eum finem fabricati.

102. Cùm habeas hanc machinam è prismatibus & lente, ut dictum est, compositam, ope lucis per eam transmissæ cuncta possis experiri, quæ hactenus fuerunt tradita. Hæc enim lux XY jubari à Sole directo persimilis est, & easdem omnes apparentias exhibet, ac si à foramine F rectâ promanâsset, nullum omnino refractionem passa; adeoque ejusdem esse constitutionis facilè credamus. Et tamen, cùm in sua principia componentia, hoc est in radios diversorum generum, apud lentem MN discreta fuerit, facilè erit modos examini subjicere, quibus posthac in colores converti potest, idque tantùm sistendo hoc vel illud radiorum genus apud

apud MN, ut constitutio lucis XY, quoad ejus conversionem in colores, pateat. Lucis Colorisque.

103. Quemadmodum, si desideretur, ut sensui planissimè pateat, quòd Prisma convertit lucem in colores, non transmutando proprietates ejus intrinsecas, sed segregando tantùm radios, ad excitandum varia colorum phantasmata dispositos, ex quibus lux omnis albens constituitur. Nihil aliud agendum est, quàm ut prisma aliquod HIK ita statuatur, ut lucem XY excipiat, & refringendo transmutet in colores P, Q, R, S, T in papyrum aliquam procidentes. Deinde, si colorem quemlibet apud lentem MN interposito obstaculo sistas, videbis eundem colorem à papyro LV deficere. Sic Purpuram *p* obstruendo, disparebit Purpura P, cæteris coloribus non omninò mutatis; (dempto fortè Cæruleo, quatenus aliquid Purpuræ commixtum habeat). Sic Viridem *r* intercipiendo, Viridis R evanescit, & sic de aliis. Atque ita videre est, quòd iidem colores apud papyrum LV & apud lentem MN pertinent ad eosdem radios; iisque non communicantur à Refractione prismatis HIK, siquidem præexistebant segregati quidem ad lentem MN, & congregati in luce XY.

104. Ad eundem modum, si cupias experimenta penitus rimari, quibus aliqua genera radiorum omninò reflecti possint, dum alia, licet similiter incidentia, partim transmittantur: prisma HIK circa axem ejus converte, donec altera pars colorum (Violacea nempe & Cærulea) postquam obliquissimè refracta fuerit versus LV, abinde penitus dispareat versus π deflexa; parte tamen altera ad LV pervadente. Deinde, si dimidium colorum, rubedinem versus, intercipias ad MN, Rubor & Flavus disparebunt ad LV, & lux ad π reflexa fiet admodum Cærulea. Sin alterum dimidium, Purpuram versus, intercipias; Rubor apud LV non mutabitur, sed lux in π, propter ablatum Purpureum & Cæruleum, flavescet aut rubescet. Id quod indicat purpuriformia & cæruliformia radiorum genera penitus ad π reflecti, dum cætera partim refranguntur ad LV. Præterea, si corpus aliquod coloratum, v. g. Cinnabaris, hâc luce XY illuminetur, sub proprio colore perindè apparebit, quasi in luce subdiali constitutum aspiceres. Quòd si cæruliformes & viridiformes radios, juxta lentem prælapsuros, intercipias, Rubor ejus intendetur: at cùm rubriformes radios intercipis, Cinnabaris

De Radiorum Lucis Coloribus.

nabaris non amplius rubebit, ſed Flavedinem aut Viriditatem, aliumve quemvis colorem, pro ſpecie radiorum, quos prætermittis, induet. Nec ſecus alia Colorum phænomena, quæ priſmata ab immediatâ Solis luce eliciunt, ope lucis hujus XY poteris experiri, & intercipiendo quodvis radiorum genus apud MN, eorum cauſas intueri.

105. Si quis autem velit Inſtrumentum, quale jam deſcripſimus, ad experimenta hujuſmodi inſtituenda conficere, lentem adhibeat latam tres digitos & ampliùs; quæ radios parallelos ad focum duos pedes circiter diſtantem congregat: atque ita priſmata diſtabunt octo pedibus, & conficient inſtrumentum ſatis magnum, quo omnia ſtrictius examini ſubjiciantur. Quod ad poſitionem lentis attinet, ſi Priſmatum anguli verticales, ACB & DGE, ſunt æquales, puta 60 vel 70 graduum, ipſa æqualiter ab utriſque diſtabit. Sin alter angulus ſit major altero, lens illi priſmati vicinior collocetur, cujus angulus verticalis, exiſtit major. Et nota, quòd jubar XY per ſpatium eo latius diffunditur, quo lens ſtatuitur anteriori priſmati ABC vicinior. Atque adeo, ſiquando opus ſit amplo jubare, debes tantùm efficere, ut lens ſit aliquanto vicinior anteriori priſmati quàm poſteriori; & adhibere priſma poſterius, cujus angulus verticalis ſit tanto ferè minor quàm angulus verticalis anterioris. Denique, ſi velis, ut colores, in lentem illam procidentes, ſint magis directi & ab invicem diſtracti, quàm more jam deſcripto contingat, eâ nempe de cauſâ, ut ſingula radiorum genera pro lubitu diſtinctiùs, ſive magis ſejunctim, intercipiantur, id quod in experimentis nonnullis neceſſarium duco: nihil aliud agendum eſt, quàm ut Lux per duo parva foramina F & *f*, ab invicem longe diſtantia, priùs trajiciatur, quàm incidat in Priſmata: vel ut alia lens non procul ab interiori priſmate collocetur, quæ apta ſit, ut lucem, à longinquo foramine F divergentem, congregat ad alteram ſubſequentem lentem MN. Cæterùm hoc inſtrumentum ſic rectè diſponere invenio moleſtiſſimum eſſe, ut & effectus ejus haud ita diſtinctos & ſenſui patentes ac in præcedentibus; ubi per pauciores refractiones & majora vitrorum intervalla oſtendebantur. Et ea propter auditores imprimis illa ſimpliciora & faciliora experimenta examini conſultiùs ſubjicient.

SECTIO

SECTIO SECUNDA.

De Variis Colorum Phænomenis.

De variis Colorum Phænomenis.

De Phænomenis Lucis per Priſma ad Parietem trajectæ.

106. Hucuſque fundamenta ſtruxi, quibus Colorum, quocunque modo effectorum, phænomena explicari poſſunt; effectuum verò, quos ſuprà minùs attigi, jam cauſas particulares & immediatas, non Geometrarum, quibus ſcio ſupervacaneum videatur, ſed aliorum gratiâ ſigillatim deſcribam. Malo enim hîc aliqua, quæ pleriſque ſuperflua fortaſſe videbuntur, interſerere, quàm quicquam alicujus momenti omittere, quod incautis, & prejudicio laborantibus, difficultatem ſubminiſtrare poſſit.

Et imprimis circa Priſmatis vulgo notos effectus, quorum cauſam abundè ſatis retexi, circumſtantiæ nonnullæ ſuperſunt explicandæ: utpote cur Primitivi Colores non omnes eliciuntur, cùm lux (cujus radios, ab origine heterogeneos, Priſma per inæquales refractiones diſpergit) non tranſit per anguſtum foramen, ſicut paſſim in præcedentibus ſuppoſui, ſed ex unicâ tantùm parte limitatur. Verbi gratiâ, ſi corpus aliquod opacum FG (fig. 29.) Soli interponatur & Priſmati, juxta baſem ejus AB, quòd umbram projiceat in MP, colores efficiat in ſpatio PT, & lucem permittat in ipſum NT influere: in PT, confinio Lucis & Umbræ, nulli colores generabuntur præter Purpureum & Cæruleum cum variis eorum gradibus. Et ratio eſt, quòd ex radiis omnium formarum, qui tranſeunt per extremitatem dicti corporis opaci FG, ſoli purpuriformes propter maximam eorum refractionem poſſunt ad P uſque deflecti, unde color Purpureus ibi conſpicitur. Deinde cæruliformes, cùm paulo minùs refrangibiles exiſtant, incident in totum ſpatium NQ, non potentes ulterius verſus M deflecti quàm ad Q. Atque ita duæ radiorum ſpecies eæque ſolæ incident in Q, & colorem ex Purpureo & Cæruleo compoſitum exhibebunt. Præterea viridiformes, minùs adhuc refrangibiles, in ſpatio NR non ultra extendentur quàm ad R. Flaviformes autem terminabuntur in S. Quare tres tantùm ſpecies colorum miſcebuntur ad R, & color ex iis omnibus, nempe ex Purpureo, Cæruleo & Viridi, generabitur.

De Variis

nerabitur. At cùm Purpureus & Viridis commixti producant Cæruleum (ut facile eſt ex ante dictis experiri) liquet colorem ad R non fore alium quàm Cæruleum. Denique, cùm radii rubriformes minimè omnium refringantur, ut in ſpatium NT incidentes non magis deflectantur verſus N quàm ad T; liquet quòd in dicto ſpatio NT fiet miſtura colorum omnium, & proinde albeſcet; ſed in ipſo s (ubi color omnis dempto rubeo miſcetur) Cæruleus ad Viriditatem nonnihil vergens apparebit, ſed maximè dilutus, propterea quòd ſolus Rubor ex Albedinis compoſitione deſit.

107. Porro, ſi corpus opacum, *fg*, Soli interponatur & Priſmati, juxta verticem ejus c, ſicut videre eſt in ſchemate 30: inter obſcuratum ſpatium, NT, & lucidum PM, cernes alios duos colores, Rubeum in T & Flavum in R, idque propter jam dictas rationes. Quippe radii, prout apti ſunt ad hos ordine colores, Rubeum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generandos, intenduntur per ſpatia MT, MS, MR, MQ & MP; cùm Soli rubriformes extenduntur uſque ad T, cæteris propter majorem refractionem citiùs terminatis, neceſſe eſt, ut iſte color in T ſit Rubeus. Item, cùm tria radiorum genera in R incidant, color ex iſtis, nempe Rubeo, Flavo & Viridi, compoſitus ibidem cernetur. Rubeus autem & Viridis Flavum conſtituunt, atque adeo Flavus apparebit in R. Præterea, cùm omnium formarum radii miſceantur in P, & poſtea perpetuò verſus M, ſpatium illud PM apparebit Album. Nec ſecus conſtat, quòd citreus in S, & in Q Flavus ad viriditatem vergens, apparebit; ſed adeo dilutus tamen & Cæruleo redundans, ut nomen Viriditatis non mereatur.

108. Tertio, ſi opaca duo corpora GF & *gf* (fig. 31.) Soli & Priſmati interponantur, ut radii inter utrumque, quaſi per oblongam rimam priſmati parallelam, tranſeant, atque diſtantia *Ff* ſit ſatis magna, pro utroque termino F & *f* generabuntur colores; Purpureus nempe ad P, & Cæruleus ad R, per terminum F; atque Flavus ad *r*, & Rubeus ad *t*, per terminum *f*; ſicut modò explicatum fuit: eritque T*p* ſpatium album utriſque coloribus interjectum. Jam, ſi obſtacula GF & *gf* ad ſe invicem paululum admoveantur, ut intermedium ſpatium *Ff* evadat anguſtius, iſto pacto ſpatium album quoque T*p* fiet anguſtius, donec tandem evaneſcat & colores utrinque coeant. Si ſpatium *Ff* magis adhuc coarctetur,

coarctetur, Viriditas in medio colorum emerget vice Albedinis, quæ jam evanuit, quæ quidem Viriditas non antea apparuit, propter commiſturam radiorum heterogeneorum, quibus involuta latuit; jam verò heterogeneis iſtis per obſtacula duo, ſibi propiùs admota, alternè interceptis, Viriditas ea paulatim detegitur, patet, & evadit perfectior; donec, cùm dictum *Ff* ſatis anguſtum eſt, ab omni ferè miſturâ liberatur & eruitur, propriâque ſpecie non minùs quàm cæteri colores elucet. Et hinc in tranſitu colligitur, quòd Viriditas inter colores medietatem exactè obtinet, non magis ad Rubeum vergens quàm ad Violaceum, neque ad Flavum quàm Cæruleum; hoc eſt, in ſpecie coloris, & reſpectu multitudinis radiorum, ad colores utrinque pertinentium. Nam in gradu refrangibilitatis minùs differt à parte Rubeâ Flavâque, & in aliâ quâdam proprietate (cui jam explicandæ non eſt locus) minus differt à parte Purpureâ & Cæruleâ.

Colorum Phænomenis.

109. Præterea, cùm Albedo T*p* propter anguſtiam pervii ſpatii *Ff* incipit evaneſcere, colores etiam contractiores paulatim apparebunt; ita ut, cùm iſtud *Ff* fit valdè anguſtum, Flavus ad Rubeum & Cæruleus ad Violaceum quaſi duplo vicinior evadat, quàm cùm amplitudo ejus permiſit Albedinem in medio colorum produci, & ut quinque colores (Viriditate jam internatâ) non occupent plus ſpatii quàm eorum duo priùs occupavêre. Cujus rei ratio ex ſchematum inſpectione patebit animadvertenti, quòd Flavus ad *r*, & Cæruleus ad R, ex heterogeneis radiis compoſitus, mutatur in ferè uniformem Flavum ad loca S & *s* incidentem, & in ferè uniformem Cæruleum ad loca Q & *q* ſimiliter incidentem, heterogeneis radiis è miſturâ per anguſtiam ſpatii *Ff* magnâ ex parte ſublatis.

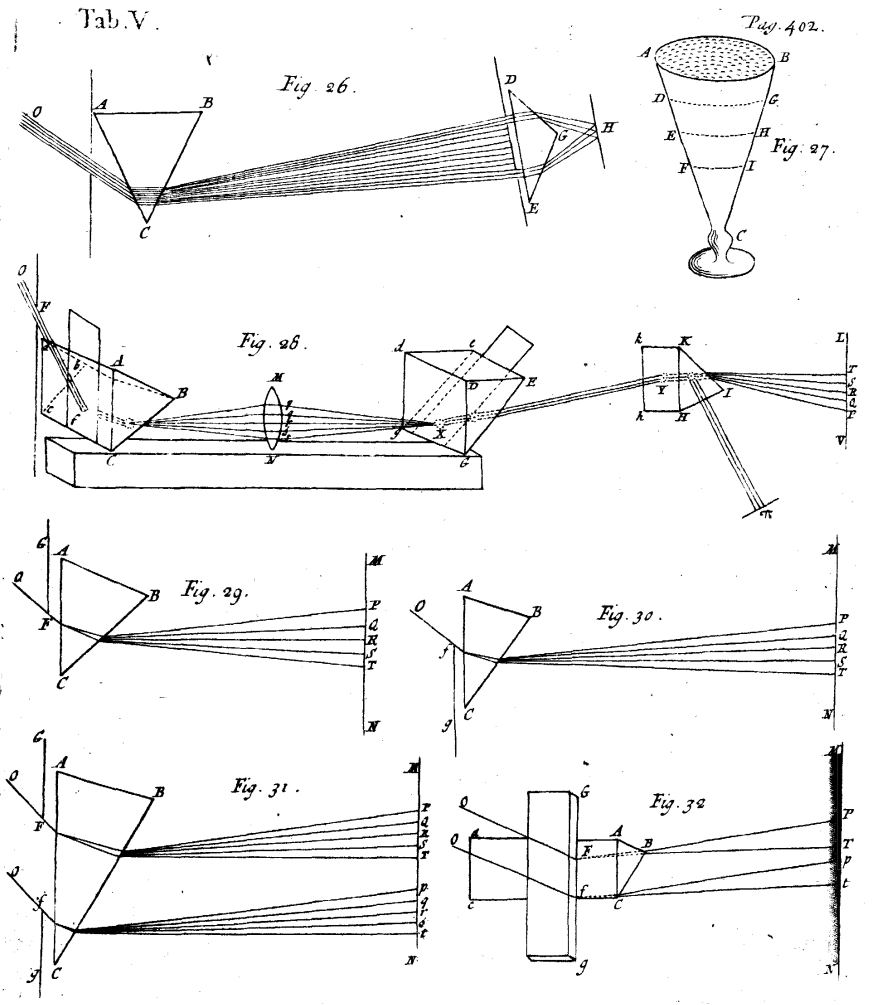
110. Quarto, ſi Lux terminetur obſtaculo *gg*, cujus extremitas perpendiculariter tranſverſa eſt ad longitudinem priſmatis, Colores omnino nulli virtute termini illius generabuntur. Etenim ponamus parallelos radios, OF & *of*, cæteroſque (fig. 32.) juxta extremitatem dictam *gg* in Priſma ABC prolapſos, ibidemque refractos eſſe ad PT & *pt*, atque MN eſſe umbram ipſius *gg*. Jam licet radii purpuriformes, FP & *fp*, magis refringantur quàm rubriformes, FT & *ft*; tamen iſtâ refractione ſecundum terminum umbræ factâ, ita ut ex dictis radiis multi magis deflectant verſus

De Variis

umbram quàm cæteri; palam eſt, quòd ubicunque purpuriformes incidunt, rubriformes etiam incident in eundem locum, & è contrà. Quod idem de radiis intermediis pari modo concipiatur. Et ſic radiis omnium ſpecierum ubique per extremitatem umbræ commixtis, umbra benè definietur ſine aliquo colore (præter Album vel Fuſcum ex luce & umbrâ mixtis) conſpecto. Sed cavendum eſt, ne colores, per limites priſmatis *Aa* vel *Cc* generati, habeantur pro generatis à limite *Gg*. Quamobrem priſmata, quæ ex vitro in totum fiunt, ad examen hujus & proximè præcedentis commodè inſtituendum, nimis ſunt exigua; propterea quòd Colores per extremitatem verticis & baſis producti, interjectum ſpatium album haud relinquent ſatis amplum, in quo generatio colorum prædictis modis probetur. Itaque, ut priſma conficiatur ex vitris planis & benè politis, qualia ad Specula conſpicienda adhibentur, moneo; quibus in morem cunei connexis, & in vaſculum dein priſmiforme completis, ut ſuprà dictum, vaſculum iſtud impleatur aquâ limpidiſſimâ, & occludatur; & ſic priſmata ad arbitrium ampla conficias.

111. Quinto, ut omnia jam uno comprehendam ſpecimine, ſit *Gg* (fig. 33.) corpus opacum orbiculari foramine, *Ff*, unum duoſve digitos lato, pertuſum; per quod Lux in Priſma trajiciatur: ubi, cùm refracta fuerit, projicitur in papyrum, vel quodvis album corpus MN, quaſi ſemiſſe pedis à priſmate poſtpoſitum: & videbis illuminatum ſpatium, PYTZ, rotundum ad modum foraminis *Ff*; album in ejus medietate; & duobus ſemilunulis colorum terminatum, Purpureo & Cæruleo ad P, Flavo autem & Rubeo ad T; qui colores paulatim deficiunt verſus Y & Z, ubi nulli omninò conſpiciuntur. Præterea, ſi papyrum ad majorem diſtantiam paulatim diſtuleris, velut ad *mn*; videbis colores diſtendi & augeri, & intermediam Albedinem uſque comminui, dum prorſus evaneſcat; totumque ſpatium coloribus Rubeo, Flavo, Cæruleo & Purpureo tinctum appareat; & papyrum longius differendo, Viriditas è medio emerget, & creſcet tum amplitudine ſpatii, tum perfectione ſpeciei, totumque ſpatium coloratum diſtrahetur in oblongam formam. Quorum omnium rationes ex ſupradictis depromantur.

112. Adhæc,



COLORUM PHÆNOMENIS.

112. Adhæc, ſi Lux obſtaculo ad quamvis diſtantiam poſt Priſma collocato terminetur, conſimilis erit Colorum generatio. Sit v. g. obſtaculum *Gg* (fig. 34.) perforatum in F, & ad diſtantiam pedis unius, aut ampliùs, poſt Priſma ABC collocatum. Priſma autem ſatis amplum adhibeatur (quale ex laminis vitreis, ut ſuprà, poſſis efficere) ne lux omnis priùs abeat in colores, quàm attingat foramen F; & lux illa, poſtquam tranſiit per F, non ſecus convertetur in colores apud P, Q, R, S, T, quàm contigit in præcedentibus. Scilicet inſpicienti ſchema patebit, quomodo radii diverſorum generum, inæqualiter refracti, convergant à diverſis partibus priſmatis ad iſtud F, ubi (ut & hinc inde verſus G, & *g*) componunt Albedinem; ſed inibi decuſſantes divergunt poſtea, diverſique Colores in diverſa ſpatia P, Q, R, S, T tendunt. Et hinc, cùm radii repagulo quolibet H ex utrâvis parte priſmatis intercipiuntur, è coloribus P, Q, R, S, T aliqui tollentur. Si radios nempe vertici c vicinos intercipias, tolles Purpureum P; vel tolles Rubeum T, ſi intercipias eos baſi AB vicinos. Et ſic de aliis; ita ut quoſlibet pro arbitrio poſſis tollere, vel efficere, ut quilibet ſolus appareat.

113. Denique, ſi Lux ex unicâ tantùm parte pone Priſma limitetur, vel ſi duo ſtatuantur limites, iique vel ad eaſdem vel ad oppoſitas partes priſmatis, vel quocunque alio modo Lux terminetur; modus, quo Colores exinde generantur, ex antedictis facilè patebit, ut jacturam temporis fecero de hâc re plura verba facturus. Quinetiam, ſi duo vel plura priſmata quocunque modo inter ſe diſponantur, peritus Optices facile explorabit cauſam.

114. Cæterùm de modo tollendi quoſlibet colores in fig. 34, per interpoſitionem obſtaculi H, hîc obiter notandum venit, quantum iſta circumſtantia adverſatur hypotheſibus Philoſophorum, quæ de coloribus huc uſque fuerunt excogitatæ. Ex illis enim poſitis Refracta Lux ad eas ſemper partes cum Cæruleo & Violaceo terminanda eſt, verſus quas fit refractio; quandoquidem gyrationes Globulorum ex opinione Carteſii, vel partes anteriores pulſuum Ætheris obliquè vibrantis, ex hypotheſi Hookii, per viciniam quieſcentis Medii ad eas ſemper partes impediuntur, & hebeſcunt. Et tamen hîc videre eſt, quòd admoto obſtaculo H, ut radios vertici Priſmatis vicinos intercidat, poſſis Violaceum & Cæ-

De Variis

ruleum tollere; & efficere, ut Viridis vel Flavus aut etiam Ruber, ad eas partes maneant extimus, verſus quas refractio peragitur. Nec hypotheſis eorum tutior eſt, qui ſupponunt colores ex Lucis & Umbræ miſturâ generari; nam eadem videtur eſſe in eorum confinio miſtura, ſive aliqui ex radiis ante refractionem limite H intercipantur, ſive omnes per priſma liberè tranſeant.

115. Hujuſmodi etiam hypotheſes ex aliis experimentis paſſim occurrentibus everti poſſent, modò id inſtituto meo neceſſarium ducerem. Quemadmodum ex illis ubi lucem partim reflecti poſſe, & partim tranſmitti docebam; nam lux tranſmiſſa dabat Flavum Rubeumque, idque in meditullio ejus, ubi à nullo quieſcente Medio, vel tenebris, terminabatur. Sic etiam maximè valet, quòd oſtendi Colorem lucis, ex uniformibus radiis conſtantis, non poſſe per quaſlibet Refractiones mutari. Cæterùm non opus eſt, ut hypotheſes refutem, quæ ex inventâ tandem veritate ſuâ ſponte corruent.

116. Phænomenis jam antè explicatis affinia ſunt ſequentia, quæ circà compoſitionem Albedinis verſantur. Priſmata duo, ABC & *abc* (fig. 35.) quorum anguli verticales, ACB & *acb*, æquentur, ita parallelis axibus diſpone, ut alterius linea verticalis, C, cum *b*, extremitate baſis alterius, conveniat; planis BC & *bc* in directum jacentibus. Quo facto, ſi Sol tranſluceat ea in papyrum MN, octo vel duodecim digitos poſtpoſitam, Colores quidem generabuntur ad M & N, per exteriores priſmatum terminos B & *c*, non autem per interiores C & *b*; ſed medium ſpatium PT totum apparebit album. Sin alterutrum priſma tollas; alterius extremitas, C vel *b*, geñerabit colores ad PT: ac dein, ſi reſtituas, Albedo etiam reſtituetur. Scilicet Albedo iſta componitur ex coloribus ab extremitate, C vel *b*, priſmatis utriuſque prolapſis; id quòd facile conſtet ex præfatis. Nam radii purpuriformes, ab utroque priſmate refracti, limitantur in eodem puncto P; ita ut ab uno priſmate manantes incidant in PM, ab altero in PN, & ab utroque ſimul in totum MN, non ſecus ac ſi omnes ab unico priſmate veniſſent. Eodem modo Cæruliformes extenduntur per totum ſpatium MN, & eorum terminus communis eſt Q, prout manant à diverſis priſmatibus; & ſic de cæteris. Quare omnigeni radii commiſcentur in unâquâque parte ſpatii PT, & Albedinem ideo component. Sin alterutrum

alterutrum Priſma tollas, puta ABC, vel Lucem ei potius occludas; tum radiis rubriformibus ab MT, flaviformibus ab MS, viridiformibus ab MR, cæruliformibus ab MQ & purpuriformibus ab MP ſublatis, manebunt rubriformes in NT, flaviformes in NS, viridiformes in NR, cæruliformes in NQ & purpuriformes in NP: adeoque Purpureus apparebit in P, & Cæruleus in R, ut oſtendimus antè. Et ſimili ratione, ſi lux occludatur alteri priſmati *abc*, ne permeet, Rubor apparebit in T, & Flavedo in R. COLORUM PHÆNOMENIS.

117. In iſtis autem experiendis requiritur, ut anguli ACB & *acb* ſint æquales; id quod tentabis, ſi Priſmata ſecundum longitudinem eorum ita connectas, ut duo ex planis dictos angulos comprehendentibus, puta BC & *bc* (fig. 36) fiant contigua, & reliqua duo AC & *ac* ſibi oppoſita. Quo facto, ſi radii ſolis ingreſſi foramen F pergunt ad eundem locum S, cùm trajiciuntur per dicta priſmata perpendiculariter ad eorum latera AC & *ac*, atque cùm liberè progrediuntur nullo interjecto obſtaculo; tum plana AC & *ac* ſunt parallela, & anguli ACB & *acb* æquales: ſin iſtud non eveniat, ſunt inæquales. In quo caſu notetur præterea, quòd inclinando plana BC & *bc* (fig. 35.) vel ab invicem reclinando, poſſis Albedinem in PT haud ſecus componere, ac ſi dicti anguli fuiſſent æquales, & plana BC & *bc* in directum jacentia.

118. Quinetiam poſſis hoc idem cum unico tantùm Priſmate perficere, dummodo ſatis magnum ſit; puta cujus refringentia latera AC & BC (fig. 37.) ſint ſex vel octo digitos lata. Etenim ſint FG & *fg* duo corpora opaca, plana, rectangula & ad Priſmatis planum, ACca, ſecundum planitiem ejus ſic applicata, ut eorum angularia puncta, G & *g*, juxta plani iſtius centrum ſe mutuò contingant, & latera concurrentia (quorum FG & *fg* ſint ad axem priſmatis parallela) ex adverſo jaceant in directum. Quo facto, ſi Lux refracta projiciatur in papyrum MNX pedes quaſi duos diſtantem, obſtaculum FG projiciet umbram in MH; Purpuram efficiet in PHIQ, ac Cæruleum colorem in QILT, & permittet lucem in LN. Dico jam, ſi Speculo aliquo, μνX, colores, ex alterutrâ parte lineæ HL, velut HL*pt*, ita reflectantur, ut incidant in papyrum ad eundem locum cum coloribus HLPT ex alterâ parte, color omnis evaneſcet, totumque HL*pt* apparebit album. Nam purpuriformes radii à priſmate ad PHIQ directè tendunt; & cætera

quatuor

De Variis

quatuor radiorum genera ad eundem locum reflectuntur à ſpeculo, incidentes puta in HIπχ. Item purpuriformes & cæruliformes directè tendunt ad QIXR; & cætera tria genera illuc reflectuntur ab IXϱχ; & ſic de reliquis: adeo ut omnes omnium generum radii paſſim per ſpatium PHLT miſceantur, ibidemque componant Albedinem. Sed notandum eſt, quòd, cùm lux reflexione ſemper debilitatur, radiis quamplurimis inter reflectendum amiſſis, exinde forſan eveniat, quòd lux directa nonnihil prævalebit reflexæ, & color ejus dominabitur; niſi compenſatio fiet, ita papyrum inclinando, ut directa lux paulo obliquiùs in eam incidat quàm reflexa, de quâ re facile judicium feras ex perfectione Albedinis emergentis.

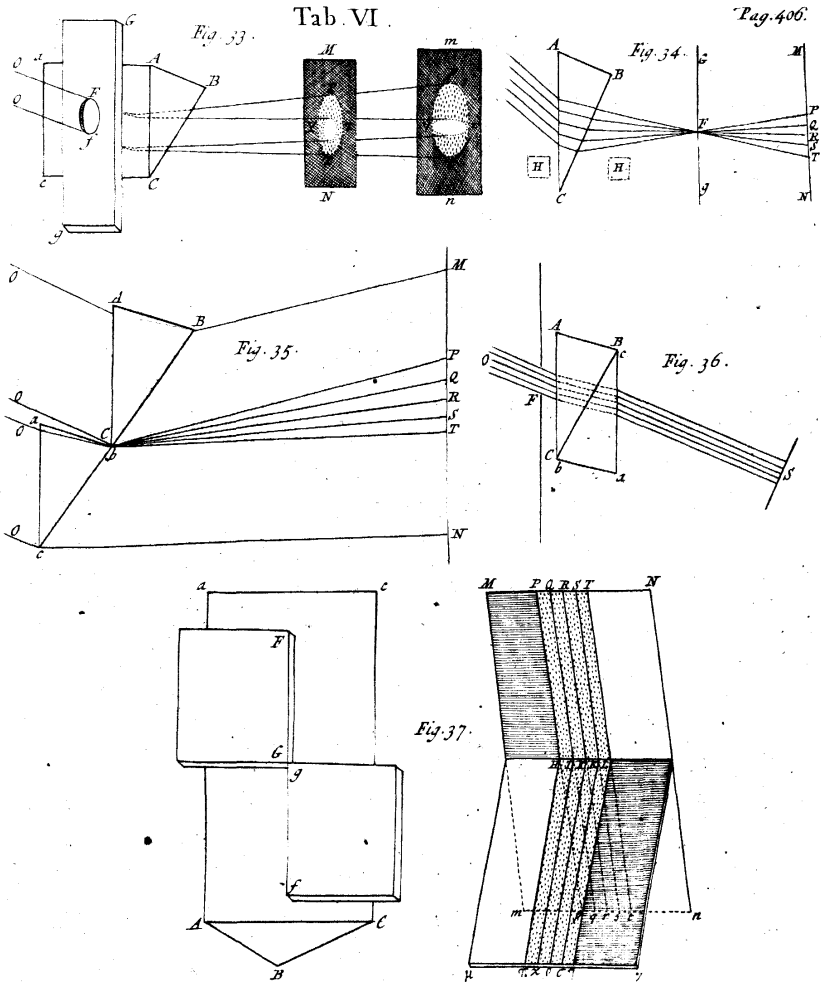
119. Antequam ad aliud experimentorum genus tranſeo, neceſſarium erit, ut formam Imaginis Coloratæ, quam Lux, per arctum orbiculare foramen in tenebroſum cubiculum influens, & per priſma deinde tranſmiſſa affingit, paulo magis articulatim inſpiciamus; & ſingulorum ejus colorum dimenſiones ac diſtantias ab invicem, nec non Refrangibilitatis gradus ſingulis radiorum generibus competentes ſedulò rimemur.

EXPER. XIX.

120. Oſtendebatur ſub initio, quòd, ubi Priſma (cujus angulus verticalis erat quaſi 63 grad.) imaginem ad diſtantiam 22 pedum projiciebat, longitudo ejus erat $13\frac{1}{4}$ dig. & latitudo $2\frac{5}{8}$ dig. Adeoque centra extimorum circulorum, ex quibus in longum diſpoſitis imago illa conſtitit, diſtabant $10\frac{5}{8}$ dig. Jam ad hanc diſtantiam, ſive diſtractam longitudinem imaginis, cæteras ejus dimenſiones referre convenit; propterea quòd ad abſolutam ejus longitudinem (quæ à magnitudine componentium circulorum dependet) non habent certam relationem. Quo autem dimenſiones ejus majori ἀκριβείᾳ inveſtigarem, loca ubi Colores in ſuo genere perfectiſſimi, eorumque confinia in tranſverſam papyrum incidebant, calamo ſcriptorio notabam; & obſervationibus hujuſmodi ſæpiùs repetitis & inter ſe collatis, has tandem concluſiones ſigillatim perdidici.

I. Cæruleus & Violaceus ex unâ parte, & Viridis ac Rubeus ex alterâ imaginem bipartiebantur; adeo ut Viridis & Cærulei confinium

Tab. VI. Pag. 406.



confinium (quod Thalaſſinum appellare poſſim) meditullium ejus occuparet. COLORUM PHÆNOMENA.

II. Locus ubi Porracea, ſive floridiſſima Viriditas apparuit, diviſit imaginis diſtractam longitudinem in ratione 3 ad 5; utpote longitudine illâ in 8 partes diviſâ, Viriditas illa tribus partibus à Rubeo termino diſtabat, & quinque partibus à Purpureo.

III. Spatium, per quòd Viriditas omnis aduſque Cærulei & Flavi confinium diſtendebatur, fuit quaſi ſexta pars totius diſtractæ longitudinis.

IV. Cærulei & Purpurei confinium, ſive Indicus perfectiſſimus, à confinio Rubei Flavique, ſive à perfectiſſimo Citrino, quaſi $\frac{7}{12}$ partibus totius diſtractæ longitudinis diſtabat.

V. Denique hæc Indici & Citrini diſtantia per confinium Viridis & Cærulei in ratione 2 ad 3 dividebatur; ita ſcilicet ut confinium iſtud, ſive meditullium Imaginis, ab Indico $\frac{14}{60}$ partibus totius diſtractæ longitudinis diſtaret, & $\frac{21}{60}$ partibus à Citrino.

121. Cum iſthæc quantâ potui diligentiâ obſervâſſem, non proprio tantùm ſenſu confiſus, ſed (propter ſummam difficultatem præciſè diſtinguendi confinia colorum, & loca maximæ perfectionis) aliorum judiciis fretus; imaginis dimenſiones juxta hæc inventa delineavi, quemadmodum videre eſt in fig. 38. Scilicet centris X & Y $10\frac{1}{4}$ unciis diſtantibus, & ſemidiametris $1\frac{5}{16}$ unciis, ſemicirculos duos, APC & BTD, è regione deſcripſi, & rectis, AB & CD, tangentibus connexui.

Deinde lineâ XY (quam ſuprà dènominavi diſtractam longitudinem imaginis) in 60 partes æquales diviſâ, ſumſi LY=9, IY=20, HY=30, & FY=44 partes ejuſmodi. Et perpendiculis ad iſta puncta erectis, imaginem in quinque partes, coloribus quinque inſignioribus competentes, diſtinxi; parte PP referente expanſionem Violacei, & EH expanſionem Cærulei, & ſic deinceps. Quo facto coloratam Iusem in hanc figuram projeci; ut conſtaret denue, an Color quilibet intra limites ſic aſſignatos contineretur: & cùm tota imago totam occupabat figuram, ſinguli etiam colores cum ſingulis partibus quàm optimè conveniebant. Interea verò in ſpatiis iſtis loca obſervabam, qualia in hoc ſchemate punctim notantur, ubi ſinguli Colores ſaturi & in ſuo genere illuſtriſſimi apparuêre.

Jam

De Variis

Jam horum locorum & limitum, Colores diſterminantium, intervalla non alia fore manifeſtum eſt, etiamſi circulos, ex quibus imago conflatur, per methodos ſæpiùs recenſitas, centris non mutatis, quantumvis minueres. Eâ ſcilicet de cauſâ, ut heterogenei plus ſegregarentur, & Colores evaderent ſimpliciores. Quippe, cùm in ipſiſſimis rectilineis terminis, AB & CD, colores ſint abſolutè ſimplices; & Colores in mediâ imagine, prope lineam XY, cum iſtis, quibus interjacent, marginalibus congeneri appareant; ratio etiam ſuadet, quòd heterogeneorum miſtura non ſenſibiliter mutet locum alicujus Coloris; ſiquidem hinc & inde venientes ſe mutuò contemperant. Sic radii viridiformes & purpuriformes, per Cæruleum ſparſi, æquipolient; & ideo non dimovent aut conturbant Colorem illum, ut ſoli (quamvis nulli purpuriformes intermiſcerentur) ibidem componerent & exhiberent. Sed hîc excipienda ſunt ſpatia circulis terminalibus, AC & BD, comprehenſa; ubi contemperamentum illud, ex parte exteriori, gradatim deficit, & ideo ſaturi Ruboris, qui ſolus è præfinitis in circulum terminalem ſe extendit, poſitionem in imagine è parte marginali, ubi tranſibit circulum, expedivi, ut indicat fig. 39. In his autem ſi quid hæſites, poſſis experimenta de novo inſtituere, contrahendo imaginis latitudinem, ut circuli, cæteris partibus, minores, evadant, & nullus dubito, quin omnia quadraverint.

122. Cæterùm, quamvis colorum confinia in lineas ad F, M, I & L erectas incidebant, tamen loca, ubi ſaturi & intenſi apparuêre, non omnia conſtitere in medio interjecti ſpatii. Nam Cæruleus, qui in ſuâ ſpecie illuſtriſſimus erat, & nullatenus purpuraſcens, propiùs ad F cadebat quàm ad X; et pleniſſima Flavedo videbatur eſſe aliquantulum propior ad H quàm ad I. Atque ita Rubedo & Purpura propiùs ad centra X & Y quàm ad alteros limites intenſæ apparuerunt; ſolaque Viriditas in medio limitum F & H effloruit. Unde conſtat ratio, quòd, etſi Flavus & Cæruleus commixtione Viridem componunt, Rubeus tamen & Viridis, propter majus intervallum, non benè componunt Flavum, nec Viridis & Purpureus Cæruleum. Cùm igitur Colores, juxta medium conſtipatiores ſunt, ita ut inter Flavum & Rubeum, juxtà & inter Cæruleum & Purpureum, quaſi triente majus interſit intervallum quàm inter Viridem & Flavum, vel Cæruleum ſibi hinc

& inde conterminum; quo Imago elegantiùs in partes inter ſe proportionatas diſtinguatur, in numerum quinque inſigniorum colorum duos alios, Citreum ſcilicet inter Rubeum & Flavum, ac Indicum inter Cæruleum ac Violaceum, aſciſcere convenit; idque potiſſimè quòd, poſt quinque inſigniores, illi duo eminere videntur; ſpatiaque, ubi interſerantur, pro ſpeciei perfectione ſatis ampla obtinent; & ſic exteriorum Colorum redundans expanſio præſcindetur, omneſque ad quantitatem Viriditatis politiori ſymmetriâ proportionati evadent. COLORUM PHÆNOMENIS.

EXPER. XX.

123. His itaque intertexis coloribus, obſervationes denuo inſtituebam; &, ut breviter dicam, omnia comparuêre juxtà ac ſi partes Imaginis, quas colores occupant, proportionales eſſent chordæ ſic diviſæ, ut ſingulos gradus in Octavâ reſonare faciat. Quod cùm tandem deprehendi, figuram Imaginis in partes perinde diviſi, ut videre eſt in ſchem. 39. Atque iterum tentavi, quàm benè cum his partibus Colores convenirent. Scilicet Imaginis diſtractâ longitudine XY productâ ad Z, ut YZ ſit æqualis XY, finge XZ chordam eſſe; quam in XY ita dividere oportet, quaſi ſingula ſegmenta, ad uſque Z protenſa, ſingulos octavæ gradus (*ſol, la, fa, ut, re, mi, fa, ſol*) edere deberent. Id quod fiet biſecando XY in H, & triſecando in G & I; rurſuſque triſecando XI in E, & capiendo KY quintam, & MY octavam partem totius XY. Et ſemitonia, EG & KM, Indicum & Citrium referent, cæterique quinque toni, XE, FG, GH, HI, IK, cæteros quinque præcellentes Colores; quorum ſinguli, cùm tota colorum congeries in totam figuram adæquatè incidit, intra has ſingulas reſpective partes comprehenſi fuerint. Inque mediis illiis harum partium circiter, Color quilibet in propriâ ſpecie illuſtriſſimus & intenſiſſimus apparuit; etiam Purpura & Rubedo, quamvis ultra, verſus P ac T, marceſcente luce exundârunt.

124. Cæterùm hæc non adeo præciſè obſervare potui, quin ut fateri cogar, ea poſſe paulo aliter fortaſſe conſtitui. Quemadmodum, ſi inter XZ & YZ ſumantur undecim mediæ proportionales, quarum EZ ſecunda ſit, FZ tertia, GZ quinta, HZ ſeptima, IZ nona, & KZ decima; hæc etiam Imaginis diſtributio cum Co-

De Variis

lorum expanſionibus ſat benè convenire videbitur. Nam differentiæ adeo minutæ, quales inter hanc & ſuperiorem diſtributionem intercedunt, acutiſſimo ſenſu judice vix comparaturos errores efficere poſſunt.

125. Quantum verò diſtributiones iſtæ differunt, ex adjunctis numeris patebit; quorum ſuperiores ad chordam 720 partium, ratione Muſicâ diviſam, reſpiciunt; & inferiores, ad eandem chordam quàm proximè diviſam ratione Geometricâ.

360. 320. 300. 270. 240. 216. 202½. 180. { Chorda Muſicè diviſa.

360. 321. 303. 270. 240. 214. 202. 180. { Chorda Geometricè diviſa.

Superiorem verò diſtributionem potius adhibui, non tantùm quòd cum phænomenis optimè convenit, ſed quòd fortaſſe aliquid circa Colorum harmonias, qualium pictores non penitus ignari ſunt, ſed ipſe nondum ſatis perſpectas habeo, ſonorum concordantiis fortaſſe analogas, involvat. Quemadmodum veriſimilius videbitur animadvertenti affinitatem, quæ eſt inter extimam Purpuram ac Rubedinem, Colorum extremitates, qualis inter Octavæ terminos, qui pro uniſonis quodammodo haberi poſſunt, reperitur.

126. Ex his demum proportiones ſinuum Refractionis, cuique radiorum generi competentium, ratione mechanicâ, determinantur; utpote ad Vitrum Aeri contiguum, cùm ſinus radiorum hinc & inde extimorum ſint ut 68 ad 69, divide intermediam unitatem in ratione partium hujus imaginis; & orientur 68, 68⅛, 68⅕, 68⅓, 68½, 68⅔, 68⅞, 69, pro ſinubus ad confinia terminoſque ſingulorum ſeptem Colorum pertinentibus, reſpectu communis ſinûs incidentiæ 44¼, cùm refractio fit è Vitro. Cùm verò fit in Vitrum, pro ſinubus iſtis adhibe numeros 68, 68⅑, 68⅓, 68½, 68⅔, 68⅘, 68⅞, 69, exiſtente communi ſinu incidentiæ 106. Et pro ſinubus ad radios, ubi Colores ſunt in propriis ſpeciebus perfectiſſimi, pertinentibus, numeri inter hos numeros intermedii adhiberi poſſunt.

127. Sic ad Aquam Aeri conterminam, ubi extremi ſinus refractionis ſunt ut 90 ad 91, ſinus intermedios, per conſimilem unitatis intermediæ diſſectionem (ſtatuendo ſcilicet eſſe 90, 90⅛, 90⅕, &c. vel 90, 90⅑, 90⅓, &c.) elicere poſſis. Aſt hic memento determinationes

determinationes haſce non eſſe præciſè geometricas, ſed tam proximè tamen accuratas quàm exigunt hujuſmodi res practicæ; & quidquam ampliùs moliri, præter computandi tædium, affectatam & inanem curioſitatem argueret. Colorum Phænomenis.

128. Sunt & aliæ circa hos Colores circumſtantiæ, quas jam determinare potuiſſem; quemadmodum variæ eorum Formæ, & Expanſiones, pro variis poſitionibus Priſmatis circa axem convolventis; vel pro variâ materiâ refractivâ, ex quâ Priſma fabricatur, quâve circundatur; vel etiam pro variâ magnitudine ejus anguli verticalis. Sed ea omnia ex oſtenſis in parte priori, conferendo cum jam explicatis, ſat manifeſtantur; ut & effectus, quantum ſcio, omnes, quos vel unicâ tantùm refractione, vel utcunque pluribus, & quâvis terminatione Lucis elicere liceat.

SECTIO TERTIA.

De phænomenis Lucis per Priſma in Oculum tranſmiſſæ.

129. Poſt explicata Colorum à parietibus aliiſve Objectis reflexorum phænomena, ordo poſtulat, ut ad affines Objectorum trans Priſmata, prope oculum interpoſita, conſpicuorum apparentias explicandas jam animum adjiciam. Et, cùm doctrinam, in quinque Propoſitionibus ſuprà traditam, per prioris generis experimenta ſolummodo probaverim, & hoc experimentorum genus, eo quòd non ſit adeo ſimplex, conſultò reticuerim, explicationem ejus jam fuſè tradere non pigebit.

Hic ideo imprimis recordari oportet, quòd Objectorum, mediante refractione viſorum, imagines non in propriis locis, ſed aliis quibuſdam videntur, à quibus viz. refracti radii rectâ ad oculum tendunt: atque adeo, ſi ita refringantur, ut, qui fluunt ab iiſdem partibus Objecti, à diverſis locis directè ad oculum veniant, Objectum illud in totidem locis apparebit. Sit e. g. x (fig. 40.) Objectum; o, oculus; & BC, lens interpoſita; quæ pluribus planis ſuperficiebus CD, DE, EF, &c. terminetur, ſicut ad Objecta multiplicia reddenda fabricari ſolet. Dein ſuppone hæc plana radios in ſeſe incidentes ita refringere, ut oculum petant quaſi à loco *x* venientes qui incidunt in planum DE; vel à loco *y* venientes, qui incidunt in planum EF, & ſic porro; & manifeſtum eſt, tum ratione

De Phæno-menis Lucis per

tione tum experientiâ ſuadente, quòd idem Objectum x in diverſis locis, *x* & *y*, ad inſtar plurium videbitur.

130. Ad eundem modum, ſtantibus jam poſitis, niſi quòd vice polygoni BC Priſma ABC (fig. 41.) ſubſtituatur; cùm è præmonſtratis conſtat, quòd è radiis, verſus oculum refractis, purpuriformes, propter maximam refrangibilitatem, longiſſimè à lineâ rectâ oculum & objectum interjacente divaricant; ſuppone, quòd purpuriformes (q) oculum petant quaſi venientes à P, & quòd rubriformes oculum petant quaſi venientes à T, cæterique in locis intermediis, pro gradu refrangibilitatis, fluant; & manifeſtum eſt, quòd Objecti, ſi ope purpuriformium radiorum ſolummodo conſpiceretur, imago foret ad P, idque Cærulei coloris; ſin radiis ſolummodo rubriformibus conſpiceretur, imago ejus ad T exiſteret, idque Rubei coloris; & ad R Viridis appareret, ſi modò viridiformibus radiis conſpiceretur; & ſic præterea. Quòd ſi Objectum duo tantummodo radiorum genera ſimul emitteret, duplicem ſortiretur imaginem; ſic emiſſis rubriformibus & purpuriformibus radiis, imago altera ad T Rubea appareret, & altera ad P Purpurea. Et ſic denique, ſi omne genus radiorum ſimul emitteret, ut ſolent corpora naturalia, tunc innumeras colorum, gradatim differentium, obtineret imagines, per totum ſpatium PT ordine continuo diſpoſitas; quæ, cùm in locis non penitus diſcretis formarentur, ſe mutuò obliterarent, efficerentque, ut nil niſi confuſa colorum ſeries appareret.

131. Hoc pacto quidem colores omnigenos generari oportet, cùm Objecti lucidi, nigredine vel tenebris terminati, perexigua eſt apparens magnitudo; qualis eſt Solis vel Lunæ aliorumve ſiderum, aut foraminis in feneſtrâ lucem à nubibus in obſcurum cubiculum intromittentis. Quòd ſi expanſius Objectum intueamur, quale ad x deſignatur, terminum ejus, GH, vertici Priſmatis propriorem imprimis animadvertamus; & manifeſtum eſt, quòd imaginum ejus, ex variis radiorum generibus formatarum, purpureâ longiſſime omnium veluti ad P divaricante, color ille apparebit extimus. Imago autem Viridis, aduſque R tranſlata, cum parte aliquâ Purpureæ imaginis, ut & intermediæ Cæruleæ, ibidem coincidet & confundetur; à quâ miſturâ Cæruleum colorem

(q) Vocem purpuriformes conjecturâ inſerui.

generari

generari oportet. Et Rubea, in T terminata, cum partibus cæterarum omnium imaginum eouſque extenſis coincidet, & colorem Objecti ibi reſtituet; Album puta, ſi modo Objectum ſit albi coloris. Priſma in oculum transmiſſis.

132. Et quemadmodum juxta limitem GH Objectum Purpureo & Cæruleo fimbriatum apparebit; ſic in oppoſito limite IK per conſimile ratiocinium patebit alteros colores, Rubeum Flavumque, produci.

133. Nec ſecus, cùm ejuſdem Objecti partes aliquæ ſunt aliis utcunque lucidiores, colores varii generari debent.

134. Et quantitas anguli POT, ſub quo Colores apparent, erit maxima, cùm Priſma ſtatuitur oculo viciniſſimum; eoque minor evadet continuò, quo Priſma propius ad objectum collocatur. Quemadmodum, ſi Priſmatis, ex vitro confecti, angulus verticalis ſit 60 gr. colores ſub angulo 2°. 2′ circiter apparebunt, cùm proxime oculum diſponitur, & 1°. 1′ cùm in mediâ inter oculum & Objectum diſtantiâ ſtatuitur; & quaſi $30\frac{1}{2}$ min. cùm triplo plus diſtat ab oculo quàm ab Objecto, & ſic præterea. Hîc autem ſuppono radios ad utramque ſuperficiem ejus æqualiter refringi. Nam, cùm poſitionem ad radios ex alterutrâ parte obliquiorem, convertendo circa axem, acquirit, ille angulus augebitur. Suppono etiam Objectum ſatis lucidum eſſe, ac tenebris denſiſſimis terminatum, ut colores aduſque ſummas extremitates videri poſſunt. Nam ſecus per latitudinem jam aſſignatâ minorem diſtendi videbuntur; ut ut de quantitate aliiſque colorum circumſtantiis in quibuſlibet Objectis, ſub dio conſpectis, apparentium, idque pro refractionibus utcunque factis ex his facile eſt conjicere.

Cæterùm in allatæ doctrinæ illuſtrationem Phænomena aliquot inſigniora, & minus obvia, ex abundanti jam breviter deſcribere eſt animus.

EXPER. XXI.

135. Et imprimis, accepto filo aliquo PT (fig. 42.) ejus alterum dimidium, PR, Cæruleo colore tinxi; atque alterum, RT, colore Rubeo. Dein Priſmate adhibito hoc filum intuebar; cujus à tergo, niſi locus erat tenebroſus, corpus aliquod nigerrimum ſtatuebam; vidique præfata dimidia non in directum jacentia, ſed in

duas

De Phæno-menis Lucis per

duas lineas discreta, quas in *pr* & *st* habes designatas. Scilicet cærulei dimidii, propter majorem eorum radiorum refractionem, imago paulo longiùs translata fuit. At linea tamen subobscura ipsius PT refracta apparuit, cujus partes in directum jacere & à quâ colores aliquantulum prostare visi sunt; id quod ex imperfectione & misturâ in utrisque fili coloribus latente contigit. Nam quanto illustriores erant & simpliciores, ea linea tanto obscurior evasit, & colores *pr* & *st* clariores & magis interrupti.

136. Cæterùm cùm lux, quam filum tenue reflectit, perexigua sit, præstat adhibere corpus aliquod expansius, quale per PN (fig. 43.) designatur; quod v. g. concipe papyrum esse, ex parte PRLK Cæruleam, & ex alterâ parte Rubeam. Tum prismate juxta oculum interposito, nigroque corpore aut loco tenebroso pone hoc Objectum sito, videbis imaginem Cæruleæ partis paulo longiùs translatam esse, terminis *pt* & *kn* in confinio colorum, *rs* & *lm*, ut ante diffractis. Sed hîc summè cavendum est, ut papyrus cum crassis & intensis coloribus illinetur.

EXPER. XXII.

137. Huic affine est experimentum, cùm statui duo prismata ad foramina duo, quibus lucis patuit aditus in tenebrosum cubiculum; ac in eo situ dispositui, ut unius Purpura & Rubor alterius in eundem locum coirent. In quo loco fixi papyri segmentum circulare, & non latius dimidio vel triente latitudinis coloratarum imaginum; eapropter ut duobus illis solummodo coloribus illuminaretur. Quo facto papyrus pallidi cujusdam coloris apparuit. Tum, cæteris utrinque coloribus Objecto nigro terminatis, vel, quod satius erat, longius projectis, ut præfata papyrus nigredine vel tenebris circumcincta appareret, tertium prisma ad oculum applicavi; & ad distantias abinde pro arbitratu varias me submovens, unicæ illius subpallidæ papyri geminam vidi imaginem, Purpuream & Rubeam. Et imago Purpurea longius à papyro translata erat quàm Rubea, prout major eorum radiorum Refrangibilitas exigit. Rem schemate 44 designatam habes, ubi papyri *pr* imagines sunt X & Y.

138. Ad eundem modum si duo Pulverum genera, quorum alterum perfectè rubrum est, & alterum purpureum vel indicum, sine

sine misturâ cyanei, viridis, aut flavi parari possent, Objectum aliquod perexiguum, cum misturâ pulverum istorum crassè illitum, geminam imaginem exhiberet: spectaculum fortè causas ignorantibus mirandum. Sed vereor, ut Pulveres coloribus adeo simplicibus præditi parari possint. Prisma in oculum transmissis.

139. His præterea non multum dissimile est, cum colores duorum prismatum ita in parietem trajiciuntur, ut, unius Rubore contingente Purpureum alterius, in directum jaceant, quemadmodum videre est ad P, *r*; & mediante prismate, parallelῶs interposito, intuentur. Nam imagines non ampliùs in directum jacebunt, sed ab invicem apparebunt distincta, sicut ad *mn* & *μν* designantur, fig. 45.

140. Atque ita, si duo prismata A ac B (fig. 46.) sic statuantur, ut eorum colores ad locum P*p* adæquatè coincidant in ordine tamen contrario; Purpurâ alterius, A, cadente ad *p*, & Rubore ad P; alterius autem, B, Purpurâ cadente ad P & Rubore ad *p*: & per tertium prisma EF imagini P*p* parallelum perspexeris; unicæ P*p* duas decussantes imagines intueberis; alteram, MN, è coloribus prismatis B productam; & alteram *mn*, è coloribus prismatis A. Et quo longiùs ab Objecto P*p* te conferas, eo magis extremitates imaginum, M à *n* & N à *m*, distabunt.

141. His etiam contraria sunt experimenta, quòd Objecta duo, sive sunt circelli chartacei X & Y (fig. 44. diversis coloribus illustrati, sive diversorum prismatum paralleli vel decussantes colores, ut MN & *mn* (fig. 46.) ita possunt mediante alio prismate conspici, ut in unum coalescere videantur.

EXPER. XXIII.

142. Et præter jam recensia perinsigne est hujusmodi experimentum, quo Objecta coloribus per interpositionem prismatis denudantur, quibuscum nudo oculo tincti apparent. Instantiam in Solis imagine coloratâ accipe, quæ in parietem à prismate ABC (fig. 47.) projecta, cùm cernitur mediante alio parallelo prismate, *abc*, manibus prehenso, cujus vertex ad plagas versus Rubeum colorem convertitur; si spectator se longiùs ab imagine gradatim amoveat, percipiet colores paulatim contrahi, & ad invicem eousque accedere, donec tandem uniti reficiant imaginem albam & circularem.

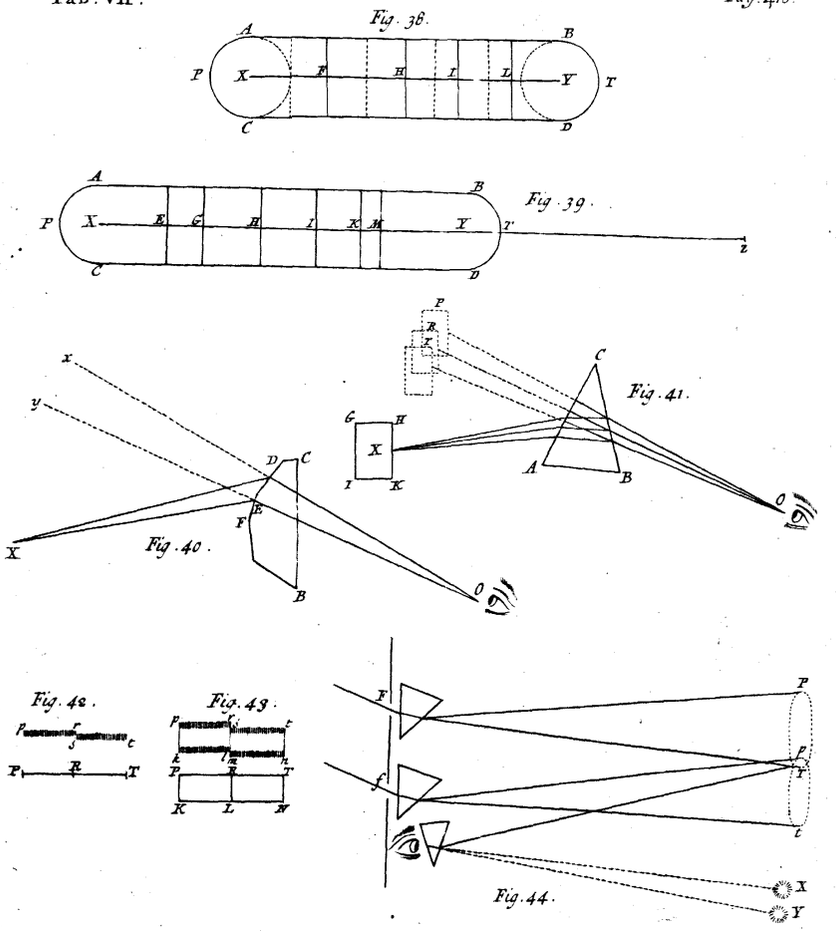
DE PHÆNOMENIS LUCIS PER

circularem. Id quod accidet, cùm ſpectatoris eadem eſt à coloribus diſtantia ac priſmatis ABC; ſi modo priſmatum anguli verticales æquentur. Et ratio ex eo manifeſta eſt, quòd oblongam illam imaginem, ex circulis, ſive circularibus imaginibus, infinitè multis, & in longum continuè diſpoſitis efformatam eſſe docuerim; quare quæ ſunt ad Purpuream extremitatem longiùs per refractionem ſecundi Priſmatis transferuntur, ut cæteras aſſequi poſſint, & ſic omnes coincidere.

143. Ad hunc modum cùm Objecta quælibet, ut QR, foras poſita confuſas & coloratas eorum imagines, ut x/ ad parietem per priſma tranſmittunt; ſi mediante alio priſmate inſpicias, poſſis imagines haſce coloribus denudare & efficere præterea, ut diſtinctiores appareant, quemadmodum ad *qr* (fig. 47.) videre eſt. Quoniam verò ad ſufficientem copiam lucis requiritur, ut foramen F ſit amplum; per ejus autem amplitudinem tranſmiſſæ imagines evadunt confuſæ; lens aliqua convexa, ut MN, prope foramen iſtud ſtatuenda eſt, quæ radios à ſingulis punctis Objecti, foras poſiti, venientes congreget in totidem aliis punctis ad parietem; & inſuper Priſmata debent eſſe admodum tranſparentia, perpolita, & ſuperficiebus accuratè planis terminata, inque ſitu quàm poteris exactè parallelo diſpoſita. Tanta quidem diligentia non requiritur, ut imagines *qr*, *s* ſine coloribus appareant; ſed ut inter tot ac tantas refractiones diſtinctæ appareant, præter accuratam fabricam vitrorum, requiritur experientis ingenium, quo omnia rectè diſponantur.

144. Hic in cumulum præterea adjici poteſt, quòd Objecta, quo ſimpliciori luce illuminantur, eo diſtinctiora per priſmata apparent; quippe cùm eorum per priſmata ſub dio viſorum confuſio ex inæquali refrangibilitate illuminantium radiorum oriatur. Et hinc eſt, quòd ſolaris imaginis ſæpiùs commemoratæ termini rectilinei, in quibus nullam eſſe heterogeneorum radiorum commiſturam indicavi, præ cæteris omnibus Objectis diſtincti, mediante Priſmate, appareant. Et ſic muſcæ, & ſimilia animalia, cùm in Rubeâ vel aliâ quâvis luce ſimplici, priſmatibus elicitâ, ſtatuantur, tranſvidentur ſolito diſtinctiores. Quinetiam oculus Engyſcopio armatus, omnia, hâc luce ſimplici illuſtrata, diſtinctiora cernit.

Tab. VII. Pag. 416.



cernit. Id quod insignem in contemplatione Insectorum, vel texturæ aliarum rerum naturalium præ se usum ferre potest. PER PRISMA TRANSMISSÆ.

145. In tertiâ Propositione suprà de Phænomenis quibusdam differui, ubi è radiis, ad refringentem superficiem æqualiter inclinatis, aliqua genera pervasêre, dum alia penitus reflectebantur; & illis affinia quædam jam attingere opportunum duco. Esto s spectatoris oculus, quo lucem à nubibus sub dio ingressam planum FG (fig. 48.) reflexam à plano HI, & plano FH regressam excipit; & cùm Prisma commode statuitur ita, ut radiorum, è medietate basis HI versus oculum reflexorum, angulus reflexionis sit quasi 50 gr. pars proximior basis remotiori aliquantum obscurior videbitur; & in utriusque partis confinio fimbria, qualis DE, subcærulei coloris apparebit. Utpote cùm radii, qui à remotiori parte basis ad oculum reflectuntur, obliquiùs incidant, quàm qui eò resiliunt à parte proximiori; talis potest assignari eorum circa medium basis obliquitas, ut è proximioribus, propter minorem obliquitatem, aliqui perrumpere & refringi possint; dum remotiores, propter majorem obliquitatem, omnes ad oculum reflectuntur. Sic ad Vitrum, cujus refractionem per rationem sinuum 42 ad 62 metimur, in plano SABC ad prismatis longitudinem transverso, posito angulo c*t*s 49°. 22′, ang. c*r*s 49°. 44′, & ang. c*p*s 50°. 5′; *t* erit limes refractionis rubiformium radiorum, ultra quem nulli superficiem HI penetrabunt, qui propter debitam obliquitatem incidentiæ ad oculum reflecti possunt; & à citeriori parte c*t* complures è radiis sic incidentibus, propter minorem obliquitatem, pervadere possunt & refringi; qui oculum peterent, si modò reflecterentur. Et sic *r* erit limes radiorum viridiformium, & *p* limes purpuriformium. Adeoque superficiei IH pars citima c*p*, propter complures radios omnis generis transmissos, obscurior apparebit quàm pars ultima *t*B, quâ omnes, qui oculum attingere, eò reflectuntur. Et quia rubriformes à limite *t*, & viridiformes à limite *r* incipunt ex parte pervadere, manifestum est, quòd ex illis pauciores à spatio *pt* ad oculum resilient, quàm è purpuriformibus; qui non priùs incipiunt pervadere, quàm ad limitem *p*: ut & pauciores, quàm è cæruliformibus, qui ad limitem inter *p* & *r* tantùm pervadere incipiunt. Et proinde

in illo ſpatio Purpureus & Cæruleus color aliquantulum dominabitur. Deque totâ ſubcæruleâ lineâ DE conſimilis eſt diſcurſus.

146. Hæc autem linea non recta eſt, ſed in morem arcûs incurvata; propterea quòd puncta radios à baſi Priſmatis ad oculum, in angulo reflexionis dato, reſilientes reflectentia ejuſmodi Curvam conſtituunt.

147. Quod ad Refractiones in ſuperficiebus Priſmatis FG & FH factas ſpectat, nihil refert in remotiori FG quænam ſint; dummodo radii è proximiori FH perpendiculariter emergant, angulo KHG exiſtente quaſi $40\frac{1}{4}$ gr. Quòd ſi angulus ille major exiſtat, colores in lineâ DE, adjuvante refractione, paulo diſtinctiores evadunt; & minùs diſtincti, ſi ſit minor. Major etiam oculi à Priſmate diſtantia, vel (quod perinde eſt) pupillæ coarctatio, colores nonnihil perficit.

148. Ad hæc, cùm duo Priſmata, parallelis axibus & baſibus contiguis, ad invicem applicantur, & in eo ſitu colligantur, iidem omnino effectus per radios ab aëre intercluſo reflexos producantur. Sed radii tranſmiſſi contrarios exhibebunt. Eſto ACDB (fig. 49.) ſectio utriuſque Priſmatis ad orum longitudines perpendiculariter tranſverſa, & CB contactus baſium, aut potius aër intercluſus. Quippe Priſmata vix queant tam arctè comprimi, quin ut aër nonnullus, in morem tenuiſſimæ lamellæ, maneat intercluſus. His poſitis, oculo *S*, radios à CB, lamellâ aeris interjectâ, reflexos intercipienti omnia apparebunt ut antè: at oculo *s* trajectos excipienti omnia cernentur contraria; ſpatio *t*B opaco & obſcuro exiſtente, & *cp* tranſlucido; ac eorum confinio *pt* juxta *t* Ruborem ſaturum, juxtaque *r* Citrium Flavumque exhibente; qui color uſque ad *p* gradatim diluitur, ubi in Album *p*c deſinit. Et hi colores longe intenſiores & illuſtriores apparent, quàm ſubcæruleus color ex alterâ parte ad oculum s reflexus. Quorum quidem omnium rationes è ſupra dictis patent; ſiquidem è radiis verſus oculum *s* tendendibus, qui incidunt in ſuperficiei partem *t*B, omnes propter nimiam obliquitatem alio reflectuntur, ſolique rubriformes ſuperficiem iſtam, à c uſque ad limitem *t*, viridiformes ad limitem *r*, & purpuriformes ad limitem *p* tantùm pervadere poſſunt.

149. Cæterum

149. Cæterum hîc cavendum eſt, nequa lux in ſuperficiem CB à parte D incidat, quæ vel ad oculum *s* reflexa, vel tranſmiſſa ad oculum s, colores conturbet. Et inſuper ne refractiones, à ſuperficiebus AB & CD factæ, ad effectus jam explicatos quicquam conducere videantur; præſtat ut ſuperficies iſtæ ſtatuantur parallelæ: quo mutuos effectus, ex opinione receptâ, deſtruere poſſint.

SECTIO QUARTA.

De phænomenis Lucis per Medium Refractivum parallelis planis terminatum tranſmiſſæ.

150. Tranſactis Triangularium Priſmatum phænomenis, quæ Quadrangulis per parallela plana efficiuntur, jam opportunè ſubveniunt enarranda. Id quod lubentius aggredior, cùm Philoſophi hactenus crediderunt colores nullos hoc pacto generari; exiſtimantes poſteriorem ſuperficiem effectus omnes, per contrariam refractionem, radiis auferre, quos prior inducit: & hoc pro experto habere rati, quod in Vitris feneſtrarum, aut aliis conſimilibus, nullos produci videant. At in eo decepti ſunt, quòd hujuſmodi Colorum quantitas & perfectio dependet à diſtantiâ parallelarum ſuperficierum. In laminis quidem vitreis, propter parvum ſuperficierum intervallum, Colores ſunt adeo tenues & exiles, & in ſpatio tam anguſto comprehenſi, ut effugiant ſenſus: at, cùm vitra magis craſſa adhibentur, aut potius vitrea vaſcula parallelepipeda, aquâ limpidiſſimâ plena, Colores tunc liquidò generari cernuntur.

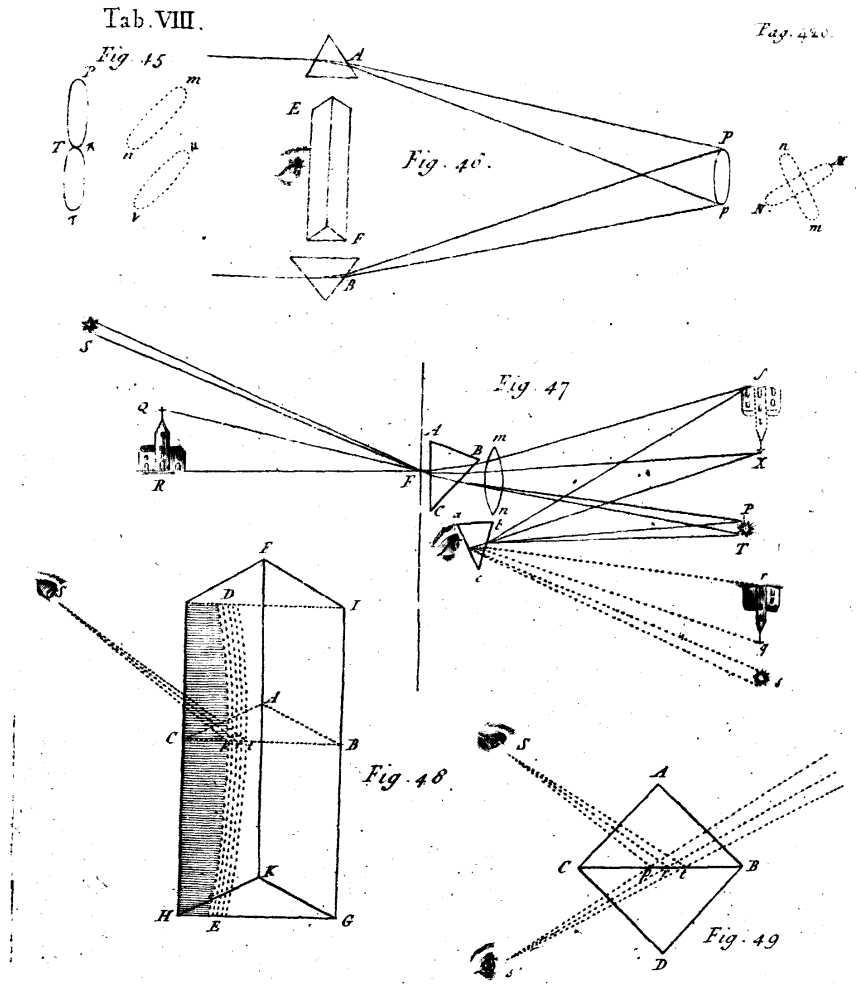
151. Nam concipe ABCD (fig. 50.) eſſe Vitreum vel Aqueum parallelepipedum aëre circumcinctum, cujus ex oppoſitis & parallelis planis duo lineis AC & BD deſignentur. Et Sol illud per exiguum foramen F obliquè tranſluceat, ejuſque paralleli vel convenientes radii in anteriori ſuperficie ad H ita debent inæqualiter refringi, ut ab invicem deinde divergent, uſque dum incidant in poſteriorem ſuperficiem ad PT, & ibidem colores omnigenos depingant, perinde ut ſuprà ſat fuſè explicui. Jam, cùm propter paralleliſmum ſuperficierum refringentium radii tantum à poſteriori recurventur, quantum incurvantur à priori, neceſſe eſt, ut ſibi ipſis ex aere ſecundum SH incidentibus emergant paralleli:

GENERATIO COLORUM

adeoque diſtantias ac poſitiones acquiſitas in infinitum ſervent, & elicitos colores eo uſque ſine aliquâ variatione promant. Quemadmodum ſi PH è refractis ad H ſit purpuriformis radius, & TH rubriformis; eorum denuo refracti P*p* ac T*t* incidentibus SH, adeoque ſibimetipſis paralleli emergent; & proinde Purpuram & Rubedinem, quam ad P ac T exhibuere, ad quamlibet diſtantiam *pt* immutatam transferent, & ſine quâvis uſpiam variatione conſervabunt, Purpureo à P in *p* tranſlato, Rubeo à T in *t*, cæteriſque à locis intermediis in loca correſpondentia.

152. Hoc equidem præciſè debet evenire, ſi modò radii ſecundum eundem SF, vel parallelas lineas, in hoc Priſma inciderent; ſiquidem tunc emergent paralleli. At, cùm inclinantur ad invicem, uti de promanantibus à diverſis partibus Solaris diſci contingit, tunc etiam emergent inclinati, & eapropter mutationes quaſdam in ulteriori tranſlatione patientur. Utpote circuli, à ſingulis radiorum generibus effecti, ex quibus in longum diſpoſitis colorata Solis imago in ſuperficiem BD procidens conſtituitur, propter divergentiam radiorum, in foramine F decuſſantium, eo dilatiores evadunt, quo radii longiùs poſt emergentiam fluunt; dum eorum centra, quæ radiis à centro Solis, ſecundum eandem quampiam lineam ante refractionem, effluentibus illuminentur, eaſdem, poſt refractionem, diſtantias & poſitiones inter ſe perpetuò conſervant. Et hinc eſt, quòd ſpatium *prt* ſolari luce in tenebroſum cubiculum immiſſâ illuminatum, eo magis dilatetur, & in orbicularem formam contrahatur, quo longiùs poſt Priſma terminatur; & Viriditas in medio R, ſiqua ſit, paulatim tranſmigret in Albedinem; vel ſi nulla ſit, ſed propter anguſtiam Priſmatis hujus, aut amplitudinem foraminis lucem intromittentis, Albedo medietatem colorum occupet, eadem Albedo ſenſim dilatetur. Sed colores tamen hinc inde non diluuntur, nec in ſpatium anguſtius contrahuntur, utut minus luminoſi propter dilatationem imaginis evadant.

153. Ad hæc ſi mediante Parallelopipedo intueamur Viſibilia, coloribus non ſecus tingantur, quàm ſi priſma triangulare adhiberetur; præſertim ſi Parallelopipedum ad pertranſientes radios ſat obliquetur, ut multum refringat, & Objecta ſint admodum propinqua. Nam, ſi Objecta longinqua ſint, ſive intervallum iſtud intercedat



intercedat Parallelepipedum & Objecta, ſive Parallelepipedum & oculum, utcunque refractio per obliquitatem Parallelepipedi fiat magna, colores tamen non generabuntur. Sit X (fig. 51.) punctum lucidum, radios per parallelepipedi refringentia plana, AC & BD, ad oculum s emittens; & manifeſtum eſt, quòd ductâ *s*tNX, quæ rubriformem radium deſignet, & s*p*MX, quæ deſignet purpuriformem, hi radii ad utramque ſuperficiem æqualiter refringentur; adeoque triangula, *pst*, MXN, ſimilia conficient, purpuriformi radio, propter majorem refrangibilitatem, hinc & inde apud *p* & M plus vergente à directo tramite quàm rubriformis: unde neceſſe eſt, ut ſeſe alicubi intra Priſma decuſſent, quemadmodum videre eſt ad O, iterum conficientes triangula *pot*, MON ſimilia, ſive trapezium s*pot* ſimile trapezio XMON; adeoque oculum petent, tanquam ſi primariò fluxiſſent ab eodem O, & refractionem ab unicâ tantum ſuperficie AC paſſi fuiſſent. Et hinc non tantùm ſequitur Colores generari, ſed & angulum *pst*, ſive colorum apparentem latitudinem, aliaſque circumſtantias pro quâlibet oculi poſitione determinari poſſe. Quemadmodum manifeſtius erit, ſi conferas cum experimento, quo Objecta, in aquam altè immerſa, oblique inſpicienti coloribus nonnihil tincta videntur, propter refractionem ſtagnantis ſuperficiei. Nam AC ſuperficiem ſtagnantis aquæ, & O Objectum aliquod immerſum, quod ſpectator s intuetur, referre poteſt. Quod quidem O facilè invenies, ducendo rectam SX, quæ refringentes ſuperficies ſecet in K & L, ac dividendo in O, ut ſit SK ad LX ut SO ad OX, ſive ut KO ad OL.

A PLANIS PARALLELIS.

154. Quinimo ad hæc experienda pro Parallelepipedo vas optimè adhiberi poteſt, quod in fundo transfoditur, & vitri laminâ perpolitâ & horizonti parallelâ refarcitur, ut aquam cohibere poteſt. Nam, cùm aqua ad altitudinem pedis, aut ampliùs, infunditur, Lux, per vitri aut aquæ iſtius parallelas ſuperficies obliquè trajecta, Colores pro more explicato producet, poſſiſque ſucceſſive collocando Objecta ad X & O phænomena conferre. Id quod etiam fieri poteſt diſponendo duo vitrea Priſmata triangularia ut ACE, DBF (fig. 52.) ad diſtantiam pedis aut amplius in eo ſitu, ut eorum latera correſpondentia AC & DB & CE ad BF evadant parallela, & radii per interiores ſuperficies perpendiculariter proximè trajiciantur.

GENERATIO COLORUM

trajiciantur. Tunc enim exteriores AC & BD refringentia plana Parallelepipedi referent. Et propter Vitri majorem quàm Aquæ vim refractivam, Colores eliciantur magis illuſtres.

155. Et hæc de Colorum à parallelis planis geneſi monuiſſe ſufficiat; niſi fortè juvet annotare diverſitatem effectuum, qui ab hiſce producuntur, & à Triangularibus Priſmatibus. Ejuſmodi ſunt 1° Quòd Colores, cùm in papyrum projiciuntur, ſplendidiores evadunt per auctam papyri longinquitatem, ſi modo Priſma ſit triangulare; ſin Parallelepipedum, hebeſcunt. 2°. Cùm Objecta per Priſmata triangularia tranſpiciuntur, Colores itidem ſplendidiores evadunt ex Objectorum auctâ longinquitate, at ſecus ſit in parallelepipedis. 3°. Cùm Sol tranſlucet Priſma triangulare, Colores oriuntur terminando lucem ex utrâvis parte Priſmatis: at cùm tranſlucet Parallelepipedum, Colores non oriuntur terminando lucem à poſteriori ejus parte. Cujus rei ratio eſt, quòd heterogenei radii à triangulari Priſmate divergentes fiunt, adeoque poſt emergentiam plus pluſque ſegregantur; at in paralleliſmum reſtituuntur emergentes è Parallelepipedo, & non ampliùs ab invicem recedunt. Denique notum eſt, quòd Colorum, in extremam partem oculi, in Solem vel lucernam per Priſma triangulare reſpicientis, quilibet aſtans videbit ordinem ei contrarium, quem videt ipſe ſpectator. At, cùm Parallelepipedum adhibetur, idem erit ordo colorum in utroque caſu, propter decuſſationem radiorum in Parallelepipedo, ubi ſpectator tranſpicit, quemadmodum inſpicienti ſchemata manifeſtum.

156. Et ex hâc effectuum diverſitate phænomenon componitur, quo Colorum ad diverſas diſtantias diverſi fiant ordines. Utpote per vas aqueum ABCD (fig. 53.) in cujus fundo YZ refert lamiram vitream, quam in ſuperioribus horizonti parallelam eſſe ſuppoſui, jubare trajecto, ſi vas ad partes Solem verſus elevetur, ut fundum ejus magis obliquetur ad perlabentem lucem, quam ſuperior ſtagnans ſuperficies; heterogenei radii, propter majorem in egreſſu refractionem, convergentes evadent, adeoque decuſſando mutabunt ſitum. Si lucem chartâ proximè egreſſam excipias, Purpura cadet infra Ruborem; & chartam longiùs differendo, in loco decuſſationis, per commiſturam, evaneſcent converſi in

in Albedinem; ac poſtea de novo emergent in ordine contrario, ut videre eſt ad Q, R & V. A PLANIS PARALLELIS.

157. Ad aliud experimentum jam tranſeo, his quodammodo affine; quo Colores non à parallelis quidem ſuperficiebus generantur, ſed è ſuperficiebus ita inclinatis, ut, interpoſitâ reflectione, parallelarum rationem habeant. Sit SF (fig. 54.) linea coloribus omnigenis irradiata, quorum Purpurei, dum ad F ingrediuntur Priſma, refringuntur verſus H, & Rubei verſus G: abinde verò reflectuntur ad K & I, unde egredientes refringuntur denuo ad M & L. Dico jam, ſi Priſmatis anguli ABC & CAB æquentur, emergentes radii, IL & KM, paralleli erunt. Nam in triangulis FGA, IGB, cùm anguli A & B ex hypotheſi æquentur; ut & anguli FGA & IGB, propter æqualitatem incidentiæ & reflectionis; triangula erunt ſimilia, angulique AFG, BIG æquales; atque adeo æqualis erit refractio in F & I, & inde anguli CFS, CIL æquales. Et eâdem ratione patebit angulum CKM angulo eidem CFS æqualem eſſe, adeoque radios IL & KM parallelos. Jam, cùm radii IL & KM, ſecundum eandem lineam SF ſucceſſivè incidentes, non ſecus emergant paralleli quàm in præcedentibus, ubi ſuperficies refringentes erant parallelæ, eadem omnia phænomena, quæ ibi oſtenſa ſunt, huic competere certum eſt. Quemadmodum lucem Solis coloribus tingi, ſi Priſma ſatis amplum adhibeatur, ut ſpatium FGI vel FHK ſufficiat ad efficiendam ſenſibilem divergentiam radiorum, antequam per iteratam refractionem in paralleliſmum reducantur; ſed ejuſmodi Colores non perfectiores per longinquitatem obſtaculi, quo interciduntur, evadere. Item iſtos colores, ſi oculo poſtpoſito immediatè excipiantur, eo magis manifeſtos fore, quo Objectum, quod intuemur, ſit oculo propinquius, ut & eo magis, quo anguli CAB & CBA majores exiſtent; & eundem denique ordinem ſervare cùm in obverſum oculum directè mittuntur, atque cùm cernuntur ad parietem aliudve obſtaculum terminati. Hæc inquam evenire debent, ſi amplum Priſma adhibeatur (quale ex aquâ vitro circundatâ fabricari poſſit) & anguli A & B conſtituantur æquales. At in anguſtis Priſmatibus diſtantia radiorum IL & KM minor eſt, quam ut colorum ſenſibilis poſſit eſſe latitudo; & cùm anguli A & B ſunt inæquales,

perinde

GENERATIO COLORUM.

perinde eſt, ac ſi refringentes ſuperficies in præcedentibus non ſunt parallelæ, & ſimiles ſunt effectus.

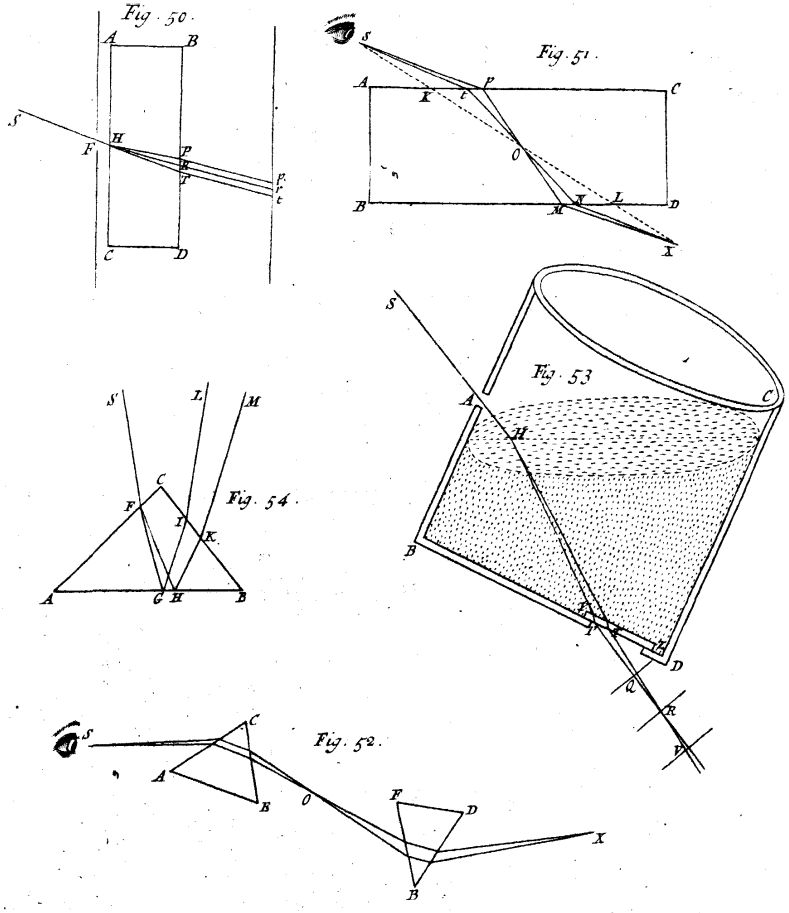
158. Quod de Coloribus dicitur, cùm unica tantùm reflectio refractionibus intervenit, facilè applicatur ad alios caſus, ubi plures interveniunt; ſed placet aliquod præterea de reflexionibus exponere, quibus generantur effectus, quos ſolæ refractiones exhibere poſſunt. Sit SF (fig. 55.) ut prius linea diverſis coloribus ſucceſſivè irradiata; qui, verſus *p*, *t* aliaque intermedia loca pro gradibus refrangibilitatis refracti, à Priſmatis latere BC reflectantur ad M, N, ubi iterum impingentes in latus AC refringantur denuo ad PT; & colores ad PT perinde apparebunt, atque ad π apparerent, ſi modò radii F*p*, F*t*, &c. per duplum Priſma ABC, i. e. per Priſma, cujus angulus verticalis AC*b* ſit duplo major hujus angulo verticali ACB, rectâ fluxiſſent ad *mn*, & inde verſus π refringerentur. Nam pares ſunt omnes utrobique anguli, ſive à plano BC per AC verſus PT reſiliant radii, ſive longiùs per BC pergant ad π; utpote angulus C*t*N (=B*t*F) = C*tn*; & inde CN*t* = C*nt*, adeoque CNT = C*n*π. Atque idem in aliis radiis intellige. Cùm autem præcipuæ Colorum ad π circumſtantiæ in ſuperioribus tradantur, cramben jam reponerem, ſi quid amplius de perſimilibus phænomenis ad PT inſtituerem dicere.

SECTIO QUINTA.

De phænomenis Lucis per Media Sphæricè terminata tranſmiſſæ, deque Iride.

159. Hactenus Colores refractionibus planarum ſuperficierum generatos contemplati ſumus; jam de Sphæricis ſuperficiebus agendum eſt; & imprimis de lentibus, ſeu figuris à duabus diverſarum ſphærarum portionibus comprehenſis. Ejuſmodi autem lens eſto MN (fig. 56.) per quam Lux Solaris juxta F*f* nec non undique terminata tranſmittitur. Sitque HK focus, ad quam poſtea convergat. Et, cùm radii ſimiliter incidentes non omnes ſimiliter refringantur, concipe, quòd radiorum ſecundum OF incidentium Purpuriformes refringantur ad K, Rubriformes ad H, & Viridiformes ad punctum intermedium *r*. Et pari ratione de radiis ſecundum *of* incidentibus concipe, quòd Purpuriformes tendunt

Tab. IX. Pag. 424.



dunt ad H, Rubriformes ad K, ac Viridiformes ad *r*. Atque idem de radiis undique terminatis (juxta lentis peripheriam) concipe. Et patebit primò, ſi radii à papyro DL prius terminentur, quàm ad focum HK conveniant, quòd color Rubeus in confinio lucis & umbræ deberet undique conſpici. Utpote ſi lineæ FH, *Fr* & FK ipſam DL in punctis T, R & P ſecent; FH quidem in puncto T, *Fr* in puncto R, & FK in puncto P: poſito ſimiliter quòd *f*H, *fr* & *f*K eandem DL in punctis π, ϱ ac ϒ reſpectivè ſecent; & productis etiam FH & *f*K donec ſibi in *t* occurrant; ut & FK & *f*H donec occurrant in *p*, conſtabit punctum *t* longiùs diſtare à lente quàm punctum *p*, quandoquidem cadit ultra focum HK, *p* verò citra. Et proinde puncta P & π interjacent punctis T & ϒ. Conſtabit etiam Purpuriformes radios per totum ſpatium Pπ ſolummodo diſpergi, propterea quòd per integrum ſpatium F*f* in lentem paralelè incidentes verſus locum *p* refringantur; & ſic radii Viridiformes ſpatium Rϱ occupabunt, ubi & Rubiformes ſpatium Tϒ, extra quod nulli omnino ex radiis parallelè incidentibus (niſi contingenter & nulla certâ lege propter bullulas quaſdam aliaque vitia in vitro latentia refracti) poſſint divaricare. Quare ſpatium, Pπ à radiis omnium colorum illuminatum, debet albeſcere. At cùm Purpuriformes deſint à ſpatiis R & ϱ, cæterorum miſtura debet exhibere Flavum. Atque ita, cùm ſoli Rubiformes extendantur ad T & ϒ, in locis T ac ϒ Rubor apparebit, & ſpatium illuminatum Pπ (quod orbiculare concipe) duobus colorum circulis, Rubeo Flavoque, tingetur. Hæc equidem eveniunt, cùm charta DL inter lentem & punctum *p* collocatur. Et colores tanto perfectiores evadunt, quo charta ſit puncto *p* propinquior. Et, cùm ſtatuitur ad ipſum *p*, Albor è medio penitus evaneſcere deberet, ſi modò radii à diverſis partibus ſolaris diſci ad lentem manantes inciderent paralleli. Quòd ſi charta paulo longiùs amoveatur, uti ad *r*, ubi Viridiformes radii concurrunt, adverſi colores ubique ad illam diſtantiam miſcebuntur, & ſe invicem ita delebunt, ut vix alius quàm albor apparebit. Si charta deinceps adhuc longiùs transferretur, puta ad *dl*, invertetur radiorum ordo, & puncta ϒ ac T interjacebunt punctis P & π, adeoque ſpatium Tϒ ab omnibus coloribus illuminabitur, & proinde albeſcet; & in ſpatiis circa R & ϱ, ad quæ Rubor non extenditur, Cæruleus componetur; & Violaceus

Alentibus.

Violaceus apparebit in extremitate ſummâ P & π. Qui quidem Colores non tantùm manifeſtiores ſunt, quàm Rubor & Flavus per interpoſitionem chartæ inter lentem & focum ut priùs emergentes; ſed perpetuò manifeſtiores evadunt, quo charta adhuc longiùs amovetur.

160. Latitudo ſpatii ſic tincti coloribus ex præmonſtratis petenda eſt, vel etiam ſic facilè determinari poteſt. Cùm differentia refractionis radiorum, in refrangibilitate maximè diſcrepantium & ſimiliter incidentium, ſit quaſi ſeptuageſima pars totius refractionis, ut ex oſtenſis patet; et, cùm angulus HFK deſignet differentiam refractionis, anguluſque F*rf* ſummam refractionum utrinque ad F & *f* factarum, hoc eſt, duplum refractionis juxta alterutrum F & *f*: angulus HFK erit quaſi ſeptuageſima pars ſemiſſis anguli F*rf*, ſive $\frac{1}{140}$ pars totius F*rf*, & proinde ſubtenſa HK quaſi $\frac{1}{140}$ pars latitudinis F*f*, per quam luci patet aditus, aut eâ fortaſſe paulo major. Denique, cùm ſit F*r*. FR :: HK. TP vel $\frac{1}{2}\pi$, dabitur intervallum TP vel $\frac{1}{2}\pi$, quod quærebatur. Si quis autem cupit, ut hæc exactiùs determinantur, computatio non eſt adeo difficilis, quin ut ipſe adhibito calamo perficiat. Quod ad lentes utrinque concavas attinet, è jam oſtenſis facile conſtabit eas lucem trajectam in ejus extremitate cum Cæruleo tingere. Quæ vero de lentibus utrinque convexis vel concavis dicuntur, de convexo-concavis æquipollentibus ſunt etiam intelligenda.

161. Sunt & alia phænomena, quæ de lentibus explicare poſſem. Sed cùm Oculi pars interior (Humor nempe Cryſtallinus ac Tunica Cornea) ſpeciem lentis radios ad retinam congregantis referat, de ipſâ maluiſſem nonnulla dicere. Eorum tamen, quæ de lente jam explicui, nolo aliquid enixè repetere, cùm ad oculum facilè applicentur, utut expertu ſatis difficilia ſint; propterea quòd ægrè poſſimus efficere, ut oculi pars anterior & poſterior ad invicem ita accedant, aut ab invicem recedant, ſicut de lente & papyro lucem terminante deſcripſi. Quapropter radii ut plurimum eo modo in Retinam procidunt, quo poſui terminatos eſſe in papyrum δλ; atque adeo, propter miſturam diſſimilium, quæ ab oppoſitis partibus pupillæ adveniunt, Colores mutuò delebuntur, & convertentur in Album; ſi Objectum quod intueamur ſit album, aut

aut in illum quemlibet colorem, quocum Objectum tingitur, ſi- De Oculo.
quidem ille tunc cæteris debet prævalere.

162. Cæterum ex hiſce detegitur modus, quo omnia, quæ nudis oculis intueamur, poſſint ita tingi Coloribus, ac ſi Priſma interponeretur, licet multo minùs manifeſtò. Idque ſi radii per alteram partem pupillæ tranſituri ab interpoſitione digiti, vel cujuſlibet obſtaculi, prope oculum intercipiantur; dum radii ingreſſuri alteram partem liberè tranſire permittantur. Hujuſce verò rei duos caſus non pigebit explicare: alterum, cùm radios intercipimus ad partes verſus Objectum lucidius; poſito nempe quòd Objecta duo, album & nigrum, juxta poſita intueamur; & alterum, cùm radios intercipimus ad partes verſus nigrius. Sit (fig. 57.) ergo LB Objectum lucidum, & BD obſcurum, quorum terminus communis ſit B; à quo radii in oculum, *dl*, juxta oppoſitas partes pupillæ, F*f*, promanantes ſint BF & B*f*; radii autem ſecundum lineam BF in oculum pergentes, pro gradu refrangibilitatis, refringantur verſus H, *r* & K. E contra verò, qui pergunt in lineâ B*f*, refringentur verſus K, *r* & H, cæteraque gradatim intermedia loca, prout de lente modò explicui. Ponamus jam, quod *eg* ſit obſtaculum, quo omnes radii prope *f* lapſuri intercipiuntur, prætermiſſis B*g*, & ejuſmodi aliis, per F ſolummodo tendentibus; & conſtabit primò, quòd ex radiis à diverſis partibus Objecti LB manantibus, qui veniunt à partibus verſus L in retinam incidunt propius ad *l*, quàm qui veniunt à partibus verſus B, ſiquidem in pupillâ decuſſant. Et ſic BD deberet radios verſus H*r* emittere. Sed cùm illud BD, propter nigredinem, nullos pene radios in oculum jaculetur, retina *ld* non ultrà verſus *d* illuminabitur, quàm ad H. Quinimo non ad H uſque illuminabitur, niſi à radiis rubriformibus; Viridiformes enim terminabuntur in *r*, & Purpuriformes in K; ſpatio *l*K à Purpuriformibus, *lr* à Viridiformibus, & *l*H à Rubriformibus illuminato. Quamobrem ſpatium *l*K, propter omnium radiorum miſturam, albeſcet ad inſtar objecti BL; ſed in exiguo ſpatio HK, quod termino B reſpondet, Colores generabuntur; Rubeus quidem ad H, propter ſolos Rubriformes radios illuc tendentes; & Flavus ad *r*, propter miſturam Viriditatis, Flavedinis ac Rubedinis. Jam, cùm omnia videantur pro more imaginum, in oculum receptarum, conſtat Objectum LB

De Oculo. juxta extremitatem ejus B non distinctè cerni, sed coloribus Rubeo & Flavo tingi.

163. Ad eundem modum si transferatur obstaculum *eg*, & cæteris stantibus Objecto interponatur & oculo secundum adversas partes pupillæ, prout videre est ad EG; eo ut radii juxta F intercipiantur, radiique B*f* in oculum præter BG ingrediantur: constabit è contra, quòd ex radiis à toto BL profilientibus Purpuriformes occupabunt spatium H*l*; Viridiformes spatium *rl*; & Rubriformes spatium K*l*. Quare spatio K*l* ut prius albescente, color Violaceus jam debet apparere in H, & Cæruleus in *r*, & eapropter Objecti LB extremitas B jam aliis tingitur coloribus, Violaceo & Cæruleo.

164. Et ad eundem modum si duo quælibet Objecta, vel ejusdem Objecti diversæ partes juxta positæ, gradu lucis differant: etsi alterum non sit omninò nigrum, tamen Colores apparebunt in eorum communi termino; Rubeus quidem & Flavus cùm obstaculum ad partes versus Objectum obscurius; Violaceus autem & Cæruleus, cùm ad partes versus Objectum lucidius interponitur. Et ut paucis rationem denuo comprehendam, necesse est, ut radii ex unaquâvis parte pupillæ Colores producant, cùm radii ex adversâ parte sistuntur, à quorum omnium misturâ oritur temperamentum Albedinis. An isthæc verò phænomena vulgò observantur, haud scio. Sane non sunt inventu nec expertu tam difficilia, nec ab iis, quæ Cartesius sub fine capitis undecimi de Meteoris edocuit, tam aliena, quin cuiquam potuissent occurrere; nisi fortè quòd Colores illi propter tenuitatem vix sint sensibiles. Experimentum itaque fiat per Objecta longinqua; quorum alterum sit nigerrimum, & alterum satis candidum ad feriendum sensum, sed non tantâ luce resplendens, ut sensum obtundat, vel pupillam constringat. Nam hujusmodi effectus sunt eo magis manifesti, quo pupilla sit latior, & majori aperturâ radiis ingredientibus pateat.

165. Sunt & alii insigniores effectus, Irides nempe vel Coronæ, quales Cartesius circa Candelam quondam observabat, & in Meteoris explicuit. Et, cùm illæ solent apparere, quando oculi figura aliquâ vi, extrinsecus illatâ, vitiatur; necesse est, ut à curvaturâ aliquâ vel plicâ in tunicis ejus de novo formatâ oriantur. Crystallino

Crystallino autem vis non imprimitur, nisi mediantibus humori- De Iride.
bus, quibus undique cingitur; &, cùm Fluida facillimè cedent pressuris, humores illi vim quamlibet illatam ita per totam molem diffundent, ut Crystallinum vix possunt inæqualiter premere, neque ideo figuram ejus vitiare. Id enim experti sunt, qui aquis altè submerguntur; nam, etsi tota aquarum moles incumbat illis, pressuram haud sentiunt; quæ tamen foret maximè sensibilis, si corporum submersorum partes ita premerentur inæqualiter, ut figuras eorum violare conarentur. Restat ergo, ut ejusmodi Coronarum sive Iridum generatio vitiosis configurationibus Tunicæ Corneæ illatis tribuatur; idque eo magis, quòd radii maximam refractionem in exteriori ejus superficie patiantur, & proinde per leviora ejus vitia à recto tramite detorqueri possint. Utut non pernegem, quin iis, qui laborant oculis, rugæ aliquæ, propter humorum defectum aut excessum, in Crystallini superficiebus, non minùs quàm in Tunicâ Corneâ, possint efformari. Nec non aliæ etiam colorum causæ possunt evenire; sed, cùm earum infinita sit varietas, & illæ sint eminentiores, quæ à vitiosis Tunicæ Corneæ figuris petuntur, non gravabor earum aliquod specimen exhibere, unde cæterarum causæ facilè patebunt.

166. Notissimum est, quòd mollium partes non solùm pressioni cedunt, in quas vis immediatè imprimitur, sed & aliæ etiam partes remotæ, prout vim partium immediatè pressarum sustinent. Et ipse nonnunquam observavi in laminis convexo-concavis, & ex materiâ mediocriter rigidâ confectis, quales ex coriis bubulcis in morem segmenti superficiei sphæricæ contundendo formari possunt, quòd, cùm in meditullio seu vertice premuntur, non solùm ibi cedunt tactui sed & undique; ad instar vallis annularem collem, depressæ vertici circunductum, comprehendentis, intus flectuntur; idque citius & magis manifesto, si sint paulo rigidiores juxta verticem quàm prope peripheriam. V. G. Sit *knx* (fig. 58.) lamina sphæricè convexo-concava, quæ circulari ejus extremitati tanquam basi incumbens, mole aliquâ planâ, & ad basem ejus parallelâ, AB, prematur: & manifestum erit, quòd hæc lamina maximè cedet pressioni in vertice *n*, ubi ab incumbente mole primò contingitur. Sed in aliis etiam locis, ut in λ & *l*, possit etiam intus recedere, dum in locis intermediis, ut *m* & μ, partes

De Iride. partes assurgunt. Atque hâc ratione configurationem acquiret haud dissimilem aquæ undulanti, puteolo n referente centrum undarum, & ripâ m, μ referente undarum primam vallem λ, l circundatam. Et ad eundem modum possibile est, ut tres vel plures valles premendo descendant, quorum culmina internata sint, pluribus undis se invicem subsequentibus consimilia. Et hujusmodi configurationes cessante pressione possunt aliquamdiu conservari, gradatim tamen evanescentes. Nam, ut primùm pressio cessat, cavitas in n cessabit fortè, & partes ibi in convexitatem assurgent, & gradatim fient plus plusque convexæ, donec redeat figura, quam ante pressionem habuere; & sic cæterarum partium figuræ ad pristinum statum gradatim redibunt. Jam, cùm Tunica Cornea ad modum præfatum convexo-concava sit, & mediocriter rigida, & circa medietatem ejus paulo crassior, & proinde rigidior quàm juxta peripheriam, & siquando figura ejus ab externâ pressione vitietur, probabile sit illam pressionem circa meditullium ejus maximâ ex parte contingere; itaque potest aliquando forsan accidere, quòd, cùm premitur, non solùm in apice cedat pressioni, sed quòd in pluribus etiam circulis apici concentricis parum ascendat, & alternis vicibus descendat. Et hujusmodi rugæ concentricæ possunt etiam ex defectu humorum, quo tunicæ flaccescunt, nec non ex aliis fortè causis accidere; & quantumvis exiguæ sint, possunt tamen radios ad alias atque alias partes Retinæ refringere, & sic efficere, ut alii atque alii colorum circuli appareant. Sed ut videamus, quo pacto ex hujusmodi rugis colores generari debent; ponamus radios è longinquo manantes, sive parallelos, in superficiem $k\kappa$ (fig. 59.) ita, ut dictum est, intortam, & in eâ refractos sisti deinde ab aliâ opacâ superficie EF. Et, cùm hujus superficiei partes depressiores radios ad puncta remotiora congregent, quàm partes ascendentes sive magis acclives; ponamus, quòd radii circa meditullium ejus $mn\mu$, ubi maximè deprimitur, congregantur ad G; quòd à partibus l & λ maximâ acclivitate surgentibus congregantur ad I; & sic quòd à partibus k & κ, ubi rursus deprimitur, congregantur ad H, & quòd ab intermediis partibus congregantur ad intermedia puncta. Ductis ergo mG & μG, lI & λI, kH & κH, occurrentibus superficiei, seu obstaculo, EF in punctis r & ϱ, ϖ & p, R & P; nec

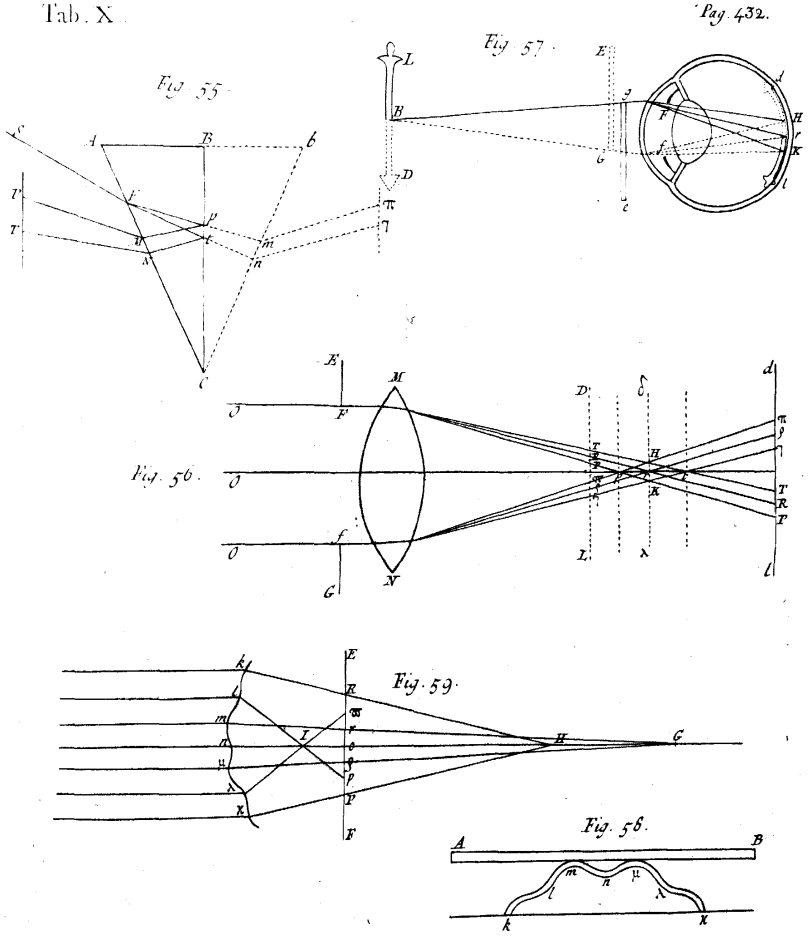
nec non axe GHI occurrente eidem EF in puncto o, ut & refringenti superficiei $k\kappa$ in puncto n; & posito quòd ista EF interjaceat punctis H & I; manifestum erit perpendenti refractiones hujus $k\kappa$, in singulis ejus punctis à centro n successivè ad extremitates k vel κ, quòd radii, prout longiùs ab n versus m per refringentem superficiem trajiciuntur, incidant in obstaculum EF longiùs ab o versus r adusque certum terminum; puta dum ad radium mr deventum est: deinde quòd, facto regressu, incidant propius ad o, & postea ad alteras ejus partes pergant, donec iterum fiat elongatio maxima; velut in p, cùm deventum est ad radium lp: tum denuo revertuntur radiorum concursus, idque continuo, prout ab l versus k procedit refractio; donec tertio terminentur quemadmodum in R, occursu radii kR. Ad eundem modum lux inter n & κ refracta terminabitur in punctis ϱ, ϖ, & P. Atque etiam, si plures essent rugæ, plures forent lucis terminationes. Cæterùm de luce per spatium $r\varrho$ diffusâ, cùm causa, quòd extra vagatur punctum o usque ad terminos r & ϱ, sit ejus parva refractio prope m & μ; sequitur, quòd radii minùs refrangibiles, hoc est Rubriformes, debent magis extravagari, & proinde terminus lucis r vel ϱ debet Rubedine tingi. Et sic de luce per spatium ϖp diffusâ, cùm causa, quòd extravagatur punctum o usque ad terminos p & ϖ, sit ejus nimia refractio prope l & λ; sequitur, quòd radii magis refrangibiles, hoc est Purpureum & Cæruleum pingentes, debent longiùs deviare, & colores eorum in exteriori parte termini p & π depingere; unde in interiori ejusdem termini parte Rubriformes radii ad suos etiam colores depingendos debent prævalere. Et simili ratione radii circa k & κ refracti, si sint Rubriformes, tendent ad exteriorem partem termini R & P, & ad interiorem, si sint Cæruliformes. Et sic tres habebuntur irides; RP extra Rubea & intra Cærulea; $p\varpi$, extra Cærulea & intra Rubea; $r\varrho$, extra Rubea, quæ etiam debet esse intra Cærulea; nisi fortè, quòd color ille à rubeo propter parvitatem refractionis in μ & m, haud satis cernitur, ut fiat sensibilis; & propterea quòd multum obscuratur à copiâ lucis undique per $ro\varrho$, locum imaginis lucidæ, quam cingunt Irides sparsæ. Harum verò Iridum formæ & relationes inter se possunt variis modis mutari, idque non tantum è variis formis, quas superficies $k\kappa$ possit induere, sed etiam

è variis

De Iride. è variis diſtantiis inter hanc $k\varkappa$ & obſtaculum EF. Ut, ſi ſtatuantur paulo magis diſtantes, quàm deſignavi, circuli RP & ϖp poſſunt coincidere, & mutuos colores delere, coeuntes in albicantem circulum. Sin magis adhuc diſtent, Iris ϖp cadet extra iridem RP. Quòd ſi EF ſtatuatur ad locum I, hæc Iris $p\varpi$ evaneſcet, & poteſt etiam coincidere cum Iride $r\varrho$, ſi EF paulo ultra vel citra locum I ſtatuatur. Jam verò horum omnium ad oculum facilis eſt applicatio, poſito quòd obſtaculum EF fundum ejus referat, & $k\varkappa$ Tunicam Corneam ab externâ vi, aut interno aliquo vitio, perperam curvatam. Quinetiam ex his non modò generalis cauſa harum Iridum declaratur, ſed pro quibuſlibet ejuſmodi particularibus apparentiis cauſæ etiam particulares aſſignari poſſe videntur. Quemadmodum, ſi cui fax appareat unicâ tantum Iride cincta, cujus pars exterior rubet, interior verò vel alba, vel fortè nonnihil cærulea appareat; exinde concludi poſſe videtur, quòd cornea circa medietatem ejus ſit paulo depreſſior, quàm ſolet eſſe ſine aliquâ rugâ, qualem ad $l\lambda$ deſcripſi. Efficit enim illa depreſſio, ut radii ab eodem puncto Objecti venientes ad puncta longè poſt retinam conveniunt; & qui proinde in retinâ ſpatium aliquod, quale eſt $ro\varrho$, occupabunt, cujus peripheria (ut modo oſtendi) Rubeo colore ad exteriorem ejus partem tingetur, & Albo vel dilutè Cæruleo ad interiorem. Et quo major hujuſmodi Iris appareat, eo magis ad interiorem ejus partem debet Cæruleo tingi. Poteſt etiam hujuſmodi Iris propter annularem rugam accidere, modò Tunicæ Corneæ figura in meditullio non ſimul vitietur.

167. Quod ſi duæ Irides appareant, illud ex utrâque cauſâ conjunctâ petendum eſt; corneâ nempe tum in medio, tum juxta peripheriam pupillæ, depreſſâ. In cujus rei illuſtrationem adhibeamus caſum, quem Carteſius de ſe ipſo in Meteoris Cap. IX. ad hunc modum deſcribit. " Cùm noctu, inquit, navigarem, & totâ " illâ veſperâ caput cubito inniſus, manu oculum dextrum clau- " ſiſſem, altero interim verſus cœlum reſpiciens, candela ubi " eram allata eſt; & tunc aperto utroque oculo, duos circulos flam- " mam coronantes aſpexi, colore tam acri & florido, quàm un- " quam in arcu cœleſti me vidiſſe memini. AB (fig. 60.) eſt " maximus, qui ruber erat in A, & cæruleus in B: CD mini- " mus, qui etiam ruber in C, ſed albus verſus D, ubi ad flam- " mam

Tab. X Pag. 432.



" mam uſque extendebatur. Oculo dextro poſtea iterum clauſo, " notavi has coronas evaneſcere; & contrà illo operto & ſiniſtro " clauſo permanere. Unde certo cognovi illas non aliunde oriri, " quàm ex novâ conformatione vel qualitate, quam dexter ocu- " lus acquiſiverat, dum ipſum ita clauſum tenueram; & propter " quam non modò maxima pars radiorum, quos ex flammâ ad- " mittebat, ipſius imaginem in o, ubi congregabantur, pinge- " bant: ſed etiam nonnulli ex iis ita detorquebantur, ut per to- " tum ſpatium *rϱ* ſpargerentur, ubi pingebant coronam CD, & " nonnulli alii per totum ſpatium RP, ubi coronam AB etiam pin- " gebant." Cùm itaque Carteſius hæc viderit, poſtquam per totam veſperam cubito innixus erat, rugæ, quales explicui, potuerunt imprimi; unde neceſſe erat ejuſmodi coronas apparere: & quòd tres coronæ non apparebant, illâ ſcilicet non apparente cujus partem exteriorem cæruleam eſſe deſcripſi, & partem interiorem rubeam, id ex eo venire debuit, quod radii in *l* & λ refracti, ex quibus hanc coronam generari deberet, haud citius quàm ad retinam convergebant, aut potius non tam cito. Non enim probabile videtur, quòd Tunicæ Corneæ pars aliqua ab externâ preſſione poſſit fieri ſolito convexior; & niſi hoc eveniat, radii illi non poſſunt citiùs quàm ad retinam convenire. Illa verò tertia corona non poteſt apparere, niſi citius (ut ad I) conveniant. Si longè ultra convergant, coronam tunc quidem deberent efficere, ſed cujus pars exterior rubeſceret, & tunc tres coronæ in exteriore eorum parte rubeæ conſpicerentur. Sed in hiſce videar nimius, præſertim cùm tanta cauſarum varietas non ſolum à Tunicâ Corneâ, ſed Humore Cryſtallino, & aliunde etiam peti poſſunt; ut haud ſit difficile plures aſſignare, quæ eoſdem quoſlibet effectus diverſis temporibus producant. Neſcio tamen, an operæ pretium ſit annotare cauſam radiorum à lucidis corporibus hinc inde, ad inſtar trabium in longum protenſarum, cùm oculis pænè clauſis aſpicimus. Nempe humiditas, quæ inter cilia & Tunicam Corneam verſatur, ſecundum extremitates ciliorum parum aſſurgit. Sicut aqua vaſi impoſita altius aſſurgit, ubi à vaſe terminatur, quàm alibi; quo pacto fit, ut aliqui radii ab hâc humiditate prius refringantur, quàm attingant Tunicam Corneam, & ſurſum

De Arcu

ſurſum detorqueantur in confinio ſuperioris cilii, ac deorſum in confinio inferioris.

168. Supereſt jam mirum illud Cæleſtis Arcûs ſpectaculum, ad cujus explicationem Carteſius viam ſtravit. Huic enim debetur, quòd in guttis aquæ pluvialis decidentibus efformari cognoſcimus. Quemadmodum ex eo conſtat, quòd nunquam videtur niſi cœlo pluente; quòd Sole pluviam decidentem illuſtrante in vicis nonnunquam apparuit, quaſi non in cœlo collocatus, ſed in Aere vicino, ſuper oppoſitarum domuum parietibus affixus, vel potius interjectus; quòd aqua per artificium aliquod ſparſim ejaculata Iridem oſtendit; & quòd gramen rore matutino, quaſi guttulis minutiſſimis, conſperſum colores etiam Iridis exhibet. Huic etiam debetur ingenioſiſſima de Refractionibus guttæ & earum limitibus inventio, ſed cauſam phyſicam minus feliciter aggreſſus eſt. Hanc itaque ut intelligatis, concipite radium AN (fig. 61.) in globum NFG ad N incidere, & inde verſus F refringi, ubi rurſus vel refringetur verſus V, vel forte reflectitur ad G. Et ſi poſterius eveniat, tunc iterum in G vel refringitur ad R, vel reflectitur ad H, & ſic deinceps; ita ut radiis globum ingredientibus aliqui, ut NFV, ſtatim egredientur, nullam reflexionem paſſi; alii, ut FGR, poſt unam reflectionem; & alii, ut GHS, poſt duas; aliique poſt tres vel etiam plures. Jam verò, cùm guttæ pluviales reſpectu diſtantiæ ab oculo ſpectatoris, ſint admodum exiguæ, ut phyſicè pro punctis haberi poſſint, non opus eſt, ut earum magnitudines omnino conſideremus, ſed angulos tantùm, quos incidentes cum emergentibus radiis comprehendunt: nam, ubi anguli illi ſunt maximi vel minimi, emergentes radii ſunt ſolito confertiores; &, quia diverſis radiorum generibus diverſi competunt anguli maximi vel minimi, ſingula ad diverſas plagas confertiſſimè tendentia in iiſdem prævalebunt ad colores proprios exhibendos. Anguli itaque maximi vel minimi, quos ſingulorum generum emergentes radii cum incidentibus poſſunt conſtituere, determinandi ſunt, ut horum phænomenon rationes rectè percipiamus.

169. Scilicet in Corol. 1 & 2. Prop. XXXV. oſtenſum eſt emergentem radium GR ad incidentem AN maximè inclinari, cùm ſit 3RR. II − RR :: CN*q*. ND*q*; et 1. 2R :: ND. NE: poſito nempe 1 ad

ad R ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis; & ex hinc inven- Cæleſtis.
tis ND & NE, dabitur poſitione GR.

170. Sit, exempli gratiâ, pro radiis maximè refrangibilibus ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſive 1 ad R, ut 185 ad 138, prout in aquâ pluviali proximè comperi; & erit 57132. 15181 :: (3RR. II − RR ::) CN*q*. ND*q*; adeoque $DN = \sqrt{\frac{15181}{57132}} \times CN = \frac{5155}{10000} CN$. Unde per Tabulam Sinuum datur arcus NL 62 grad. 4 min. Præterea, cùm ſit 1.2R :: ND.NE :: 185.276 :: $\frac{5155}{10000}$ CN. NE; erit $NE = \frac{7691}{10000} CN$. Et inde etiam per Tabulam Sinuum datur arcus NF, 100 grad. 32. min. Subduc jam duplum arcûs NF ex aggregato arcûs NL & 180 grad. ſive ſemicirculi, & reſtabit 41 grad. 0 min. pro inclinatione radii RG ad radium AN, ſive pro angulo AXR; productis nempe AN & NG donec in X conveniant. Et hic angulus eſt, ſub quo intimus ſive cæruleus limbus Iridis hujus apparere debet, ſive minima ejus ſemidiameter.

171. Ad eundem modum pro radiis minimè refrangibilibus, poſito ſinu incidentiæ ad ſinum refractionis ut 182 ad 138, uti dimenſus ſum, invenietur $ND = \frac{5028}{10000} CN$, & $NE = \frac{7533}{10000} CN$; indeque per Tabulam ſinuum arcus NL erit 60 grad. 22 min. & arcus NF 98 grad. 38 min. Adeoque angulus AXR 43 grad. 6 min. ſub quo extimus ſive Rubeus hujus Iridis limbus apparebit. Itaque maxima ejus ſemidiameter eſt 43 grad. 6 min. A quâ ſi auferatur minima ſemidiameter, 41 grad. 0 min. emergit iridis craſſities 2 grad. 6 min. circiter, vel potius 2 grad. 37 min. additâ diametro ſolis 31 min. Sed cùm colores in extremitatibus ad utrumque limbum debiliores ſint, quàm quo propter nubium conterminarum ſplendorem videri poſſunt, ſenſibilis ejus craſſities duos gradus vix excedet.

172. Haud ſecus determinantur exterioris Iridis dimenſiones. Nam oſtenſum eſt in Corol. 1 & 2. Prop. XXXVI. emergentem radium HS ad incidentem AN minimè inclinari, cùm ſit 8RR. II − RR :: NC*q*. ND*q*; et 1. 3R :: ND. NE. Quamobrem pro radiorum maximè refrangibilium ſinibus, I & R, ſubſtitutis numeris 185 & 138 ut ſuprà, obtinebuntur $ND = \frac{7315}{10000} CN$, & $NE = \frac{7064}{10000} CN$; & inde per Tabulam Sinuum arcus NL, 36 grad. 48 min. & arcus NF, 89 grad. 53 min. Atque adeo angulus AYS = 52 grad. 51 min. qui erit maxima ſemidiameter Iridis hujus. Et ſimiliter

De Arcu

pro radiorum minimè refrangibilium finibus, I & R, fubſtituendo numeros ſuprà poſitos, 183, 138, emergent ND = $\frac{3079}{10000}$ CN, & NE = $\frac{6965}{10000}$ CN. Unde per Tabulam Sinuum eliciuntur arcus NL, 35 grad. 52 min. & arcus NF, 88 grad. 18 min. Adeoque angulus AYS erit 49 grad. 2 min. Iridis nempe minima ſemidiameter. Quamobrem ſi à maximâ ſemidiametro 52 grad. 51 min. auferatur minima 49 grad. 2 min. & reſiduo addatur diameter ſolis 31 min. emerget hujus Iridis craſſities, 4 grad. 20 min. Sed propter majorem hujus quam interioris Iridis obſcuritatem, colores vix ultra craſſitiem trium graduum, vel trium & ſemiſſis, videri poſſe conjicio.

173. Jam verò, ut harum Iridum rationes conſpectui diſtinctè exhibeam, ſunto E, F & G guttæ per aerem utcunque ſparſæ; SE, SF, SG radii ſolares parallelè incidentes in guttas; EM, EN & EO radii, diverſè refrangibiles, è guttâ E poſt unam reflectionem emergentes; atque FN, FO, FP, & GO, GP, GQ conſimiles radii emergentes è guttis F ac G; nempe EO, FP, GQ maximè refrangibiles, & EM, FN, GO minimè refrangibiles, &c. Jam ſi ſpectantis oculus ad O conſiſtat, ex hypotheſi manifeſtum eſt, quòd è radiis, quos gutta E poſt unam reflexionem emittit, ſoli maximè refrangibiles, ſeu cæruliformes, quales EO, impingant in oculum; reliquis ut in EN & EM, propter minorem refractionem, præterlabentibus. Et proinde Cæruleus color ad E conſpicietur. E radiis autem, quos gutta G poſt unam reflectionem emittit, maximè refrangibiles, quales GQ, præteribunt oculum, propterea quòd radio EO paralleli ſunt, & alterius generis radii, puta minimè refrangibiles, ſeu Rubriformes, quales GO, in eum impingent; unde Rubor apparebit in G; & ſimili diſcurſu gutta F, in medio inter E ac G poſita, radios mediocriter refrangibiles, ut FO, in oculum immittet, reliquis ut FN, FP utrinque præterlabentibus: indeque Viriditas cernetur ad F. Eadem eſt ratio guttarum omnium ad eaſdem cum his guttis apparentes diſtantias ab axe OR, qui per Solem & oculum tranſit, poſitarum; & proinde ad diſtantias illas colores undique apparebunt; hoc eſt, arcus variegatus, cujus interior limbus Cæruleo, exterior Rubro, & mediæ partes mediis coloribus tingantur; exiſtente angulo OGQ, ſive GOE, hoc eſt, latitudine arcûs, duorum circiter graduum, juxta ea, quæ jam antè

oſtendi; eſtque ſimilis diſcurſus de arcu exteriori, niſi quòd ordo colorum, propter contrariam radiorum inflexionem, contrarius evadat. Guttæ autem, quæ extra hos arcus ex unâ parte ſitæ ſunt, radios omnino nullos poſt unam vel duas reflexiones, duaſque refractiones, in oculum immittent; ex alterâ autem parte, omnigenos permiſtos; eoſque ferè inſenſibiles, & proinde nulla hujuſmodi phænomena exhibere poſſunt, ſed cœlum in illis locis colore ſolito apparebit. Cælesti.

174. Præter phænomena Colorum, de quibus egimus, ſunt adhuc alia haud pauca (præſertim circa Colores pertenuium lamellarum pellucidarum, quales ſunt bullarum aquoſi orbes, & aer intra vitra duo compreſſus, multarumque rerum cuticulæ pertinues) quorum cauſa & menſura abſque ratiociniis mathematicis vix poſſunt accuratè determinari: ſed in hiſce videor nimius fuiſſe, & proinde jam ad partes Matheſeos magis abſtractas me convertere decrevi.

FINIS LECTIONUM OPTICARUM.

PROBLEMA

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

Pag. 85, lin. 23 & 28, pro 9,0827667, lege 9,0827646.
P. 109, lin. 15, pro *diametris*, lege *semidiametris*.
P. 281, lin. 3, pro *ad fig.* 16, lege § 31.
P. 359, lin. ult. pro *& C*, lege *&c.*
P. 371, lin. 10, pro *ille*, lege *illi*.

IN NOTIS.

Pag. 7, lin. 1, pro *Saturni Caſſino*, lege *Saturni à Caſſino*.
P. 88, lin. 4, pro 9,0827667, lege 9,0827646.
lin. 5, pro 0,09917970, lege 0,09917950.
P. 89, lin. 5, pro 0,101708369: lege 0,101768349.

IN LIBRO DE VIRIBUS CENTRALIBUS.

P. 8, lin. 23, pro Ci^2 *& area*, lege Ci^2 ; *& area*.
P. 12, lin. 7, pro *veniet*, lege *veniat*.
lin. 28, pro *quàm*, lege *quam*.
P. 16, lin. 23, 25, 37, 39, pro *X*, lege *x*.
lin. 39, pro *CV major*, lege *CV (fig. 10) major*.
P. 22, ad initium lin. 13, pro *mò*, lege *angulo qla ultimò*.
P. 38, lin. 6, pro *quadratum*, lege *quadraturam*.
P. 39, lin. 3, pro *rectam CD*, lege *rectam CD (fig. 18.)*
lin. 24, dele *(ex conſtruct.)*

Tab. XI.

Fig. 60.

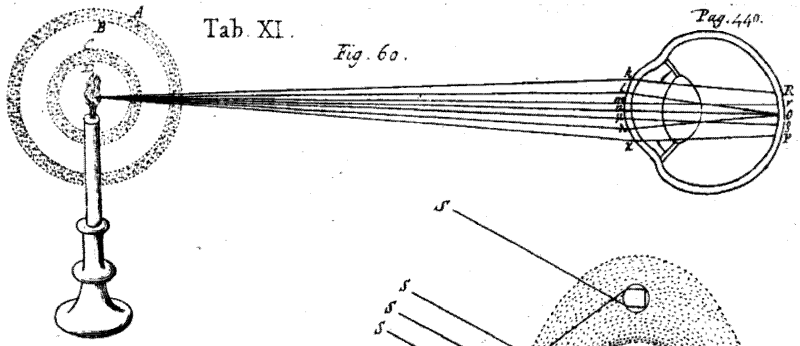


Fig. 62.

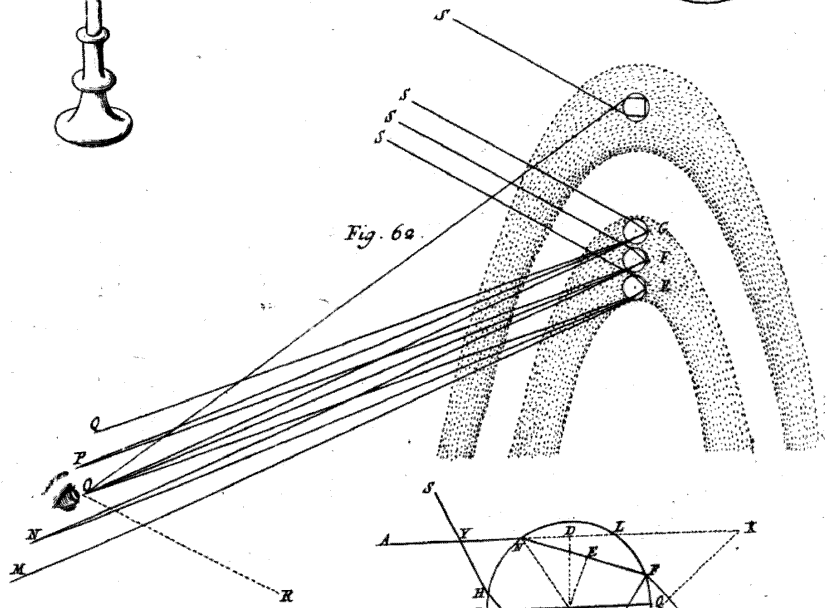
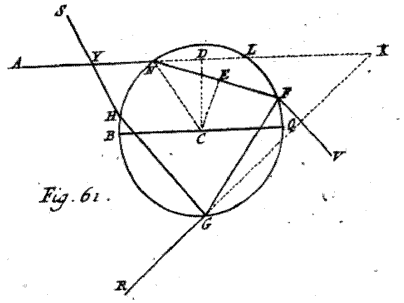


Fig. 61.



SAMUELIS HORSLEII

DE

VIRIBUS CENTRALIBUS

QUÆ

RATIONEM TRIPLICATÆ DISTANTIARUM A CENTRO

CONTRARIAM INTER SE CONSTANTER SERVANT

LIBER SINGULARIS.

PROBLEMA GENERALE.

CURVAM definire per quam corpus quodpiam deferatur, quod è dato puncto, ſecundam rectam poſitione datam, datâ cum velocitate emiſſum viribus deinceps incitetur, quæ datum aliquod centrum reſpiciant, et proportionem triplicatæ diſtantiarum à centro contrariam inter ſe conſtanter ſervent.

Hujus Problematis ſunt partes duæ; prout vires centrales ex earum genere ſint quæ appetentiam centri, vel ex earum quæ fugam, corporibus inducant. Harum partium prima multifariam diſtribuenda eſt, pro vario velocitatis gradu, quâcum corpus è dato loco projectum fuerit, illius utique ratione habitâ, quam corpus quodpiam aliud, iiſdem viribus centralibus incitatum, caſu recto à diſtantiis infinitis adeptum eſſet.

PARS PRIMA.

Primum centripetæ ſint vires centrales. E dato loco V (vid. fig. 1.) ſecundum rectam VG poſitione datam, emiſſum puta corpus quoddam datâ cum velocitate. Oportet Curvam definire per quam corpus illud deferatur, ſi viribus urgeatur quæ centrum C reſpiciant, et proportionem inter ſe ſervent triplicatæ diſtantiarum à centro contrariam. Factum puta, et ſit VK curva illa quam definiendam ſuſcepimus. Velocitas quâcum corpus è loco V exierit, vel eadem erit quam corpus quodpiam aliud, urgentibus iiſdem viribus centripetis, caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum fuerit, vel minor illâ majorve erit.

PARTIS PRIMÆ CASUS PRIMUS.

Primùm eadem ſit velocitas quâcum corpus per orbitam VK delatum è loco V exierit, quam corpus aliud caſu recto, à diſtantiis infinitis locum uſque

Pars Prima. Casus Primus.

que V, adeptum fuerit. Jungatur CV, et figura ad analyſin conſtruatur, qualem ad analyſin generalem Problematis XXVIII. Libri Primi Principiorum in Notâ (f) lineavimus. In hâc figurâ (fig. 1) data recta CV deſignetur literâ a, indefinita CD literâ y. Rectæ autem CV, ſive a æqualis ſit recta VL. Jam cùm ea ſit natura Curvæ LF, ut VL ſit ad DF ut vis centralis in loco V ad vim centralem in loco D (Prop. XXIX. Lib. I. Princip.) hoc eſt ut cubus ex CD ad cubum ex CV, idcirco erit $DF = \frac{CV^3}{CD^3} VL = \frac{a^4}{y^3}$. Erit autem $DF \times -\dot{y}$, fluxio areæ VLDF, hoc eſt $\frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y} = \dot{VLFD}$. Quare cùm ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ ſit fluens hujus fluxionis $\frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y}$, area curvæ LF, ad ordinatam mobilem DF terminata, aut æqualis erit ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$, aut eo major minorve dato. (Geometr. Flux. Th. II.) Creſcere intelligatur infinitè recta y. Area quidem curvæ LF ultimò in nihilum abierit. Area enim illa in nihilum tunc abierit, cùm punctum D ibi ſitum fuerit, ubi corporis rectâ cadentis velocitas nulla ſit; ſive ibi loci unde corpus illud rectâ cadere occepit. Illud verò à diſtantiis infinitis cecidit. Rectâ igitur CD, ſive y, infinitè creſcente, area curvæ LF, ad ordinatam mobilem DF terminata, ultimò in nihilum abierit. Sed et ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ (datâ utique a) ultimò in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt area curvæ LF et ſpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$. Differant enim, ſi fieri poſſit, dato; quod nota d^2 deſignet; ut ſit area curvæ $LF = d^2 = \frac{a^4}{2y^2}$. Jam rectâ y infinitè creſcente, et arcâ curvæ DF ultimò in nihilum abeunte, ſpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$ dato d^2 vel æquale erit ultimò, vel dato d^2 auctum nihilo ultimo æquale fiet. Si primum, fiet ultimo $d^2 : a^2 = a^2 : 2y^2$, et $d : \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a : y$. Data igitur a ad rectam y datam ultimò rationem habet. Dabitur igitur rectæ y ultima quædam magnitudo, neque ultimò ea infinita erit, quam tamen infinitè creſcere poſuimus: quod eſt abſurdum. Non igitur primum illud obtinet, ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ dato eſſe ultimò æquale. Sin verò alterum, ut ſit ultimò $\frac{a^4}{2y^2} + d^2 = 0$, erit ultimò $a^4 + 2y^2d^2 = 0$, atque rurſum $y^2 + \frac{a^4}{2d^2} = 0$. Hoc eſt, quadratum ex infinitâ y, ſpatio dato $\frac{a^4}{2d^2}$ auctum, nihilo æquale erit: quod eſt abſurdum. Neutrum igitur eorum obtinebit, quorum alterum, ex eo quòd area curvæ LF à ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ dato abeſſet, neceſſariò effici oſtendimus. Non igitur dato differunt area curvæ LF ſpatiumque $\frac{a^4}{2y^2}$. Erunt igitur inter ſe æqualia.

Hinc efficietur $VQ^2 = \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}CV^2$.

Et $RS^2 = \frac{a^4}{2y^2} = \frac{CV^4}{2y^2}$.

Sed

Sed $ST = \frac{q^2}{y}$ (Princip. Lib. I. Sect. VIII. (Not. f.) Ergo $ST^2 = \frac{2q^4}{2y^2} =$ Analysis. $\frac{2CV^2 \times QW^2}{2y^2}$.

Hinc $RT^2 = RS^2 - ST^2 = \frac{CV^4 - 2CV^2 \times QW^2}{2y^2} = CV^2 \times \frac{CV^2 - 2QW^2}{2y^2}$.

Hoc eſt, propter $CV^2 = 2UQ^2$ (id enim oſtenſum) $RT^2 = CV^2 \times \frac{UQ^2 - QW^2}{y^2} = CV^2 \times \frac{UW^2}{y^2}$. Quare $RT = \frac{CV \times UW}{y}$.

Sed $Db = \frac{q^2}{2RT}$. Et $Dc = \frac{CV^2}{y^2} \times \frac{q^2}{2RT}$ (per formulas generales Not. f, Sect. VIII. Lib. I. Princip.) Quare $Db = \frac{q^2 \times y}{2CV \times UW}$ et $Dc = \frac{CV \times q^2}{2UW \times y}$. Hoc eſt, ſi pro q^2 ſcribatur $CV \times QW$, $Db = \frac{QW \times y}{2UW}$. $Dc = \frac{CV^2 \times QW}{2UW \times y}$. Vel denique ſi capiatur recta Q, cujus quadratum ad quadratum ex CV rationem habeat eam quam QW ad 2UW, efficietur $Dc = \frac{Q^2}{CD^2}$, ſive $CD \times Dc = Q^2$. Sed, propter rectas UW, QW, CV magnitudine datas, dabitur illa Q magnitudine; ac propterea quadratum ex Q magnitudine datum eſt. Rectangulum igitur CD × Dc magnitudine datum. Recta autem CD poſitione data, punctumque C datum. Ea enim poſuimus. Curva igitur *acx* ad quam eſt punctum *c* Hyperbola erit æquilatera, cujus centrum erit C, Aſymptotas recta CD, axes verò eâ magnitudine præditi, ut quadrata ex dimidiis duplo quadrati ex Q ſingulatim æqualia ſint. Datâ igitur VD, dabitur area VD*c*, atque huic æqualis ſector VCX, per quadraturam hyperbolæ. Datus igitur angulus VCX. Quare recta CX poſitione data. Datâ autem VD, dabitur magnitudine CD, et illi æqualis CI. Punctum igitur I dabitur in tramite corporis curvo; aſſumptiſque diſtantiis aliis alia lineæ VIK definiantur puncta. Q. E. I.

COMPOSITIO CASUS I. PARTIS I.

Compositio. A centro C in rectam VG (fig. 2) demittatur ad perpendiculum recta CH. Capiatur CM, quæ ſit ad CV ut CH ad HV. Duarum CV, CM, capiatur CN tio. proportione media. Centro C, ſemiaxe tranſverſo CN, ſcribatur Hyperbola æquilatera *eNf*, cujus Aſymptotæ ſint rectæ CO, CP. In harum alterutrâ, puta CO, capiatur Ca rectæ CV æqualis, & à puncto a educatur ad perpendiculum recta ab, quæ hyperbolæ in b occurrat. In eâdem Aſymptotâ, Co, capiatur quævis Cd illâ Ca minor, et à d ad perpendiculum educatur dc, quæ hyperbolæ in c occurrat, junganturque Cb, Cc. Jam centro C, radio Cv, ſcribatur circulus v*x*a, cujus capiatur ſector, v*cx*, ſectori hyperbolico bCc æqualis. Et in rectâ *cx* capiatur *ci* æqualis rectæ Cd. Curva, ad quam poſitum eſt perpetuò punctum *i*, ea erit per quam, urgentibus viribus quales poſuimus centripetas, corpus quodpiam deferetur, quod è dato loco V, ſecundum rectam VG, eâ cum velocitate fuerit emiſſum, quam

corpus

PARS PRIMA. CASUS PRIMUS.

corpus aliud iisdem viribus centripetis incitatum, rectâ cadendo à distantiis infinitis, in loco v adeptum fuerit.

DEMONSTRATIO.

In figurâ primâ capiatur recta CD æqualis rectæ cd in figurâ secundâ; CD igitur minor erit quàm CV, et circulus centro C, radio CD, descriptus curvam VK secabit. Secet in I, et maneant omnia, in figurâ illâ primâ, quæ jam antè lineavimus. Sector hyperbolicus cCb (fig. 2) trapezio hyperbolico badc æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV.) Sectori autem hyperbolico cCb sector circularis VC*x* factus est æqualis. Quamobrem sector circularis VC*x* trapezio hyperbolico badc æqualis erit. Sed et sector circularis VCX (fig. 1) trapezio hyperbolico *a*V*D*c æqualis erat. Trapezia autem hyperbolica badc (fig. 2), *a*V*D*c (fig. 1) sunt inter se æqualia. Id enim sic ostendo. In triangulis CVH, QUW, anguli CVH, QUW sunt inter se æquales. Anguli etiam CHV, QWU inter se æquales, quippe qui sunt recti. Triangula igitur inter se similia erunt, et VH erit ad HC, ut UW ad WQ. Est autem 2UW ad WQ ut quadratum ex CV ad quadratum ex Q. Ita enim factum est. Quare UW erit ad WQ ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex Q. Rursum (fig. 2) CV est ad CM ut VH ad HC; ita enim factum est. Sed cùm CN duarum CM, CV proportione sit media, erit quadratum ex CV ad quadratum ex CN ut CV ad CM. Quare quadratum ex CV est ad quadratum ex CN ut VH ad HC. Sed ostensum est quadratum ex CV esse ad duplum quadrati ex Q ut UW ad WQ; necnon UW esse ad WQ ut VH ad HC. Quadratum igitur ex CV ad quadratum ex CN eandem quam ad duplum quadratum ex Q proportionem habet. (El. v. 11.) Quadratum igitur ex CN duplo quadrato ex Q æquale erit. (El. v. 9.) Sed quadratum ex semiaxe hyperbolæ æquilateræ *a*D*c* (fig. 1) duplo quadrati ex Q ostensum est æquale. Est autem CN (fig. 2) semiaxis hyperbolæ æquilateræ F*N*e. Hyperbolarum igitur F*N*e, *a*D*c*, quarum utraque est æquilatera, harum semiaxes, cùm quadrata habeant æqualia, ipsi quidem inter se æquales erunt. Quamobrem, cùm in asymptotâ hujus, *a*D*c*, acceptæ sunt CV, CD illis Ca, cd in asymptotâ alterius, F*N*e, singulatim æquales, idcirco trapezia hyperbolica, badc, *a*V*D*c, sicut modò asseveravimus, erunt inter se æqualia. Sectores igitur circulares VC*x*, VCX, qui trapeziis illis singulatim sunt æquales, etiam inter se æquales erunt. Anguli igitur VC*x*, VCX inter se æquales. Rectæ autem C*i*, CI inter se æquales: nempe cùm illa rectæ cd, hæc verò rectæ CD æqualis; & illæ cd, CD inter se factæ fuerint æquales. Simili argumentatione Curvarum, V*i*, VI, radii omnes, qui cum primariis illis, CV, angulos æquales faciant, ostendentur inter se æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter se similes et æquales erunt, et in hoc Casu Primo Partis Primæ compositio nostra rectè se habet. Q. E. D.

De Naturâ Curvæ V*i*, *perfectâque ejus Figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus spatia corpora absolvant.*

Sector hyperbolicus bCc logarithmus est rationis rectæ Ca ad rectam Cd. (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV. Cor.) Quare sector circularis VC*x*, cùm

cùm illi hyperbolico æqualis sit, ejusdem rationis logarithmus erit; sive ejus quam recta CV habet ad rectam C*i*; nimirum cùm rectæ CV, C*i* illis Ca, cd æquales sint. Hinc liquet curvam V*i*C Spiram esse quam vocant logarithmicam. Quòd si in Hyperbolæ asymptotâ Co capiatur C*δ* illâ Ca major, eductâque à puncto *δ* ad perpendiculum rectâ *δn*, quæ hyperbolæ in *n* occurrat, si C*n* jungatur, tum si sectori hyperbolico bC*n* æqualis fiat sector circularis VCχ, eâ vero lege, ut sector ille VCχ ad partes rectæ VC constituatur earum contrarias, ad quas positus est sector VC*x* sectori hyperbolico bCc æqualis, ideo scilicet quia puncta asymptotæ *d*, *δ* ad contrarias partes sunt puncti a, punctaque item hyperbolæ c, χ ad contrarias partes puncti b; denique si in rectâ Cχ capiatur C*i* rectæ C*δ* æqualis, punctum *i* erit ad Spiram C*i*V, ad distantiam utique majorem, quàm est CV, à centro C productam. Atque rectam C*δ* perpetim augendo, Spiram vel infinitè producere licebit; quæ centrum suum C gyris innumeris cinget, quorum extimi longiùs ab illo discedunt, arctissimi propiùs idem accedunt, quàm pro datâ quâlibet distantiâ. SPIRÆ LOGARITHMICÆ FIGURA.

2. Scriptâ quo diximus modo Spirâ C*i*V*i*, si in radiis ejus *i*C, VC, *i*C productis capiantur, ad contrarias centri partes, rectæ C*h*, CV, C*k*, illis *i*C, VC, *i*C æquales, atque idem semper fiat; nova efformabitur Spira, priori per omnia similis et æqualis, sed contrariè sinuata; nempe ut in æqualibus à communi centro C distantiis plagas contrarias respiciant. Atque hæ *Spiræ oppositæ* haud immeritò nominentur; quippe quibus similes prorsus cognationes cum oppositis hyperbolis intercedant. Quo enim modo Spira prior, C*i*V*i*, ex hyperbolâ E*N*F, asymptotâ Co, circuloque AV*x* efformata est, eodem planè modo hæc alia, C*hvk*, ex hyperbolâ oppositâ, eâdem asymptotâ Co, eodemque circulo efformari poterit.

3. Spiræ oppositæ unam tantummodò figuram constituere censendæ sunt, sicut Hyperbolæ oppositæ, à quibus illæ efformatæ sunt, unam.

4. Cùm harum Spirarum ea sit natura, ut radii omnes à centro exeuntes æqualibus angulis ad curvam inclinentur, nullam eæ apsidem habebunt.

5. Si è puncto V, in alterâ Spirarum oppositarum dato, corpus aliquod secundum rectam VG, quæ Spiram ibi loci contingat, emissum fuerit, eâ cum velocitate, quam casu recto versus centrum C à distantiis infinitis adeptum esset, urgentibus utique viribus centripetis quæ rationem inter se triplicatæ distantiarum à centro contrariam constanter servent; corpus illud per Spiram V*i*C delatum gyris innumeris circum centrum C circumagetur, atque intra certum quoddam temporis spatium, quod quantum erit definire mox instituam, centrum illud propiùs quidem accesserit quàm pro datâ qualibet distantiâ; ipsum verò nunquam attinget; scilicet ne extra orbitam suam evagetur, cujus orbes infimi quidem et arctissimi centrum tamen intùs habent. At verò elapso tempore illo, corpus, centrum quod transire ei non licuit, mirè prætergressum, Spiram quidem oppositam *hvk* invaserit, cujus ductus sequens, gyrisque innumeris circumactum, infinitè usque à centro abscedet; neque in alteram illam, quâ delatum est, unquam ei reverti concedetur. De Motu in Spirâ Logarithmicâ.

6. Si manente velocitate quâcum corpus è loco V exeat, angulus acutus CVG sensim augeatur; ultimò, cùm in rectum ille increverit, Spiræ oppositæ Velocitas.

PARS PRIMA. CASUS PRIMUS.

positæ in circulum vxva migraverint; per quem utique deferetur corpus viribus, quales diximus centripetas, sollicitatum, si è loco v cum velocitate illâ, quam casus infinitus generâsset, emissum fuerit, secundum rectam cG super radio cv ad perpendiculum erectam.

7. Corporis per Spiram logarithmicam lati eadem erit in loco quovis, *i*, velocitas, quæ corporis, quod, urgentibus iisdem viribus centripetis, per circulum ferretur centro c, radio c*i*, scriptum.

8. Ad Tempora definienda, quibus corpora viribus, quales posuimus, centripetis sollicitata datarum spirarum oppositarum, *i*vc, c*hvk*, partes datas absolvant, opus erit, quadrare figuras quas spirarum illarum datæ partes claudant. Id autem hâc ratione perficio.

Quadratura Spiræ Logarithmicæ.

Jam antè obtinuimus $Db = \frac{QW \times y}{2UW}$. Cujus quidem notæ hæc est interpretatio. Recta D*b* ad rectam *y* (fig. 1) datam eam rationem habet quam QW ad 2UW. Linea igitur *abz*, ad quam est punctum *b*, recta erit positione data, et per centrum c transibit; & Spiræ sector vcI æqualis erit quadrilatero rectilineo *a*vD*b*, sive differentiæ triangulorum similium cv*a*, cD*b*, quæ angulos ad v et D rectos habent. Horum autem illud cv*a* ad quadratum ex cv rationem eam habebit quam QW ad 4UW. Alterum autem ad quadratum ex cD, vel cI, similem rationem geret. Duorum igitur differentia, sive spatium *a*vD*b*, sive Spiræ sector vIc ad differentiam quadratorum ex cv, cI eandem illam rationem geret quam QW ad 4UW, sive eam quam HC ad 4VH; nempe cùm sit QW : UW = HC : VH (id enim jam antè ostensum). Hinc (in fig. 2) sector quilibet v*i*c $= \frac{HC}{4VH}$ cv² − c*i*² & area tota Spiræ, à loco v centrum usque, $= \frac{HC}{4VH}$ cv². Et area v*i*c*b*, hoc est area tota spiræ v*i*c, à loco quovis v centrum usque cum areâ oppositæ à centro locum usque quemvis *b*, $= \frac{HC}{4VH}$ cv² + c*b*². Areæ vero oppositæ, inter loca, v, *v*, à centro hinc inde æqualiter remota, hæ areæ inquam simul sumptæ $= \frac{HC}{2VH}$ cv².

Tempora movendi in Spiris Logarithmicis definiuntur.

9. Hinc Tempora, quibus absolvuntur areæ, quæ à punctis v, *i* initium sumentes circa centrum desinunt, erunt inter se ut quadrata è radiis vc, *i*c, à quibus areæ illæ initium sumant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cùm à communi radio vc initium sumpserint, ad radios ejusdem Spiræ diversos, c*i*, c*l*, desinunt, erunt inter se sicut spatia quibus quadratum à radio vc, à quo areæ illæ communiter initium sumant, superat quadrata à radiis c*i*, c*l*, ad quos illæ singulatim desinant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cum à communi radio vc initium sumserint, ad radios, c*i*, c*h*, spirarum oppositarum desinunt, erunt inter se ut spatia vc*q* − c*iq*, vc*q* + c*hq*.

Conferuntur cum Temporibus in Circulis.

10. E loco v (fig. 3) exeant corpora duo, quorum alterum per Circulum centro c, radio cv, scriptum feratur, alterum per Spiras logarithmicas oppositas v*i*c, c*hv*, urgentibus utique viribus quæ centrum c respiciant, et rationem

triplicatæ.

triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servent. Spirarum alteram recta vG in puncto v contingat. Tempus, quo corpus per spiras latum à puncto v ad punctum *v* spiræ oppositæ, æquali distantiâ à centro atque alterum v remotum, pervenerit, hoc inquam tempus ad tempus conversionis integræ corporis in circulo circumacti rationem habebit, quæ componetur è rationibus quas radius circuli ad circuitum ejus, atque ad sinum complementi anguli cvG habet. TEMPORA IN SPIRIS LOGARITHMICIS.

A centro c in rectam vG demittatur ad perpendiculum recta vI. Exponatur recta T datæ cujusvis longitudinis. Sit alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus conversionis integræ in Circulo ad tempus translationis de loco v in locum *v* per Spiras. Dico illam T ad hanc Θ rationem habere eam, quæ componitur è rationibus rectæ cv ad circuitum circuli xv*v*, qui rectam illam radium habet, ejusdemque cv ad rectam vH. Vel quod perinde est, posito circuitum circuli xv*v* rectæ P æqualem esse, dico T esse ad Θ ut quadratum ex cv ad rectangulum vH × P.

Sint enim vc*b*, vc*a* sectores circuli spiræque motûs initio simul confecti; & habeat recta *t*, ad rectam T rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores illi ad tempus translationis de loco v in *v* per spiras. Habebit itaque eadem *t* ad Θ rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores, vc*b*, vc*a* ad tempus conversionis integræ in circulo. Habeat autem illa *t* ad aliam rectam *v* proportionem eam quam sector spiræ vc*a*, ad sectorem circuli vc*b*. Designet litera A spatium illud, quod spiræ oppositæ inter loca, v, *v*, intùs habent. Jam spatium A ad aream totam circuli v*v*x rationem habet, quæ componitur è rationibus spatii illius A ad sectorem vc*a*, sectoris vc*a* ad sectorem vc*b*, sectorisque vc*b* ad aream circuli. Quæ verò spatii A ad sectorem vc*a* ratio, ea est temporis quo conficitur spatium A, motu corporis per spiras, ad tempus quo conficitur sector vc*a*; sive rectæ T ad rectam *t*. Quæque sectoris vc*a* ad sectorem vc*b* est ratio, ea est rectæ *t* ad rectam *v*. Quæque sectoris vc*b* ad aream circuli, ea est temporis quo conficitur sector vc*b* ad tempus conversionis integræ in circulo; sive rectæ *t* ad rectam Θ. Spatium igitur A ad aream totam circuli rationem habet compositam è rationibus rectæ T ad *t*, rectæque *t* ad *v*, rectæque *t* ad Θ; sive compositam è rationibus rectæ T ad *v* rectæque *t* ad Θ; sive eam quæ est rectanguli T × *t* ad rectangulum Θ × *v*. Spatium inquam A est ad aream circuli v*v*x ut rectangulum T × *t* ad rectangulum Θ × *v*.

Jam verò *t* ad *v* rationem habet quam sector spiræ vc*a* ad sectorem circuli vc*b*; quæ eadem est, quam cH ad cv. Nam velocitates quibus corpora duo, quorum alterum per circulum, alterum per spiras feratur, è loco v exeant, hæ necessariò inter se æquales erunt; cùm ea utraque esse debeat, quam, urgentibus quales posuimus viribus centripetis, corpora casu recto à distantiis infinitis, locum usque v, adepta fuerint. Sed propter velocitates illas inter se æquales, arcus nascentes spiræ circulique v*a*, v*b*, primò quidem inter se æquales erunt. Sectoribus igitur nascentibus vc*a*, vc*b* prima ratio, cùm ea sit illa quæ rectangulis etiam nascentibus v*a* × cH, v*b* × cv prima est, ea erit quæ rectis datis cH, cv inter ipsas intercedat. Quæ verò sectoribus vc*a*, vc*b* nascentibus prima fuerit

PARS PRIMA. CASUS PRIMUS.

ratio, ea quidem, dummodo simul conficiantur, semper inter eos manet. Nam utcunque alterum illorum augeri velis, tempus, quo confectus fuerit, simili ratione augebitur. Et pro temporis ratione alter etiam augebitur. Manet igitur sectoribus illis quæ nascentium prima fuit ratio, sive rectæ CH ad rectam CV. Habet igitur, sicut modò asseveravimus, recta t ad v rationem illam quam CH ad CV. Rectangulum igitur $T \times t$ ad rectangulum $\Theta \times v$, sive spatium A ad circulum VvX, rationem habet eam, quam rectangulum $T \times CH$ ad rectangulum $\Theta \times CV$ (per El. v. 11.) Atqui spatium A ad dimidium quadrati ex CV rationem habet eam, quam CH ad VH (secundum ea quæ suprà ostendimus § 8.) Et dimidium quadratum ex CV ad aream circuli VvX rationem habet eam quam CV ad P. Nimirum cùm area circuli rectangulo $\frac{1}{2}$ CV × P æqualis sit, secundum ea quæ demonstravit Archimedes. Spatium igitur A ad aream circuli VvX rationem habet compositam è rationibus rectæ CH ad VH, rectæque CV ad P; sive eam, quæ est rectanguli $CH \times CV$ ad rectangulum $VH \times P$. Quare rectangulum $T \times CH$ erit ad rectangulum $\Theta \times CV$ ut rectangulum $CH \times CV$ ad rectangulum $VH \times P$ (El. v. 11.) Permutando T erit ad CV ut rectangulum $\Theta \times CV$ ad rectangulum $VH \times P$. Quare et rectangulum $T \times CV$ ad quadratum ex CV ut $\Theta \times CV$ ad $VH \times P$. Permutando $T : \Theta = CV^2 : VH \times P$. Q. E. D.

Hinc si tempus conversionis integræ in Circulo designetur literâ Θ, tempus translationis de loco v in v per spiras illud erit, quod Algebra his notis designaverit $\frac{CV^2}{VH \times P}\,\Theta$. Atque hujus temporis dimidium illud erit, intra cujus spatium corpus è loco v egressum, ut per spiram vc deferatur, centrum propiùs accesserit quàm pro datâ quâlibet distantiâ.

11. Cùm sit T ad Θ ut CV^2 ad $VH \times P$, erit T ad $\frac{1}{2}\Theta$ ut CV^2 ad $VH \times \frac{1}{2}P$. Hinc si talis sit angulus CVH, cujus cosinus rationem ad radium habeat quam radius ipse ad dimidium circuli circuitum, nimirum ut rectangulum $VH \times \frac{1}{2}P$, quadrato ex CV æquale sit; tempus translationis de loco v in v per spiras, quarum radii eo angulo ad tangentes inclinentur, dimidio temporis conversionis in circulo æquale erit. Hoc est, idem erit de loco v in v translationis tempus, sive per spiras, quâ diximus specie præditas, sive per circulum corpus transferatur. Cæterùm in hâc spirarum specie, anguli CVH amplitudinem calculi produnt, 71° — 26′ — 21″,4 quantum ferè numeris eam exigere liceat.

12. Corpus igitur è loco v egressum, si per hanc spiram delatum fuerit, eo temporis spatio, quo corpus aliud ex eodem loco simul egressum quadrantem circuli absolverit, centrum ipsum C propiùs quàm pro datâ distantiâ accesserit.

Conferuntur Tempora in Spiris diversâ Specie.

13. Intelligantur circum centrum commune C binæ spiræ logarithmicæ oppositæ, quæ in locis v, v se mutuo intersecent (fig. 4). Harum alteram in puncto v contingat recta VG, alteram vg: et à centro C in rectas VG, vg deducantur ad perpendiculum CH, Ch. Dico tempora translationum de loco v, in v, per spiras diversas, atque adeo horum temporum dimidia, sive tempora quibus corpora è loco v simul egressa, si per has spiras deferantur, centrum C propiùs accesserint quàm pro datâ quâlibet distantiâ, dico hæc tempora inter se rationem habere rectarum VH, Vh contrariam; sive contrariam ejus, quam angulorum, quibus radii spirarum ad Curvas inclinantur, cosinus inter se habent.

Erit enim tempus translationis per spiras quas recta VG contingit, ad tempus conversionis integræ in circulo cujus radius CV, ut quadratum ex CV ad rectangulum $VH \times P$ (§ 10. hujus). Tempus item conversionis integræ in illo circulo erit ad tempus translationis per spiras alteras, quas recta vg contingit, sicut rectangulum $Vh \times P$ ad quadratum ex CV. Ex æquo perturbatè, tempus translationis per spiras primas ad tempus translationis per alteras ut $Vh \times P$ ad $VH \times P$; hoc est ut Vh ad VH. Q. E. D.

Tempora Casûs recti.

14. Manente jam angulo CVH, ille alter CVh quovis modo fluat. Ut spiræ, quæ per locum v eâ lege ductæ fuerint, ut rectam mobilem Vh in loco v contingentem semper habeant, speciem usque mutent. Jam cùm in omni magnitudine anguli CVh maneat illa temporum ratio, ut sit tempus translationis de loco v in v per spiras stabiles, quas recta positione data VH contingit, ad tempus translationis per spiras mutabiles, quas contingit semper recta mobilis vg, sicut Vh ad datam VH, etiam evanescente angulo CVh, ratio temporis translationis per spiras stabiles ad tempus translationis per spiras mutabiles, figuram ultimam induentes, ea erit, quæ est ultima rectæ mutabilis Vh ad datam VH. Evanescente autem angulo CVh spiræ mutabiles, quas recta Vh semper contingit, ultimò quidem in ipsam rectam Vv abeunt. Et tempus translationis per has spiras fit ultimò tempus translationis per illam rectam. Recta autem Vh ipsi VC fit ultimò æqualis. Tempus igitur quo corpus, casu recto à distantiis infinitis centrum petens, à loco v centrum usque deferretur, indeque rursum motu continuato locum v ad contrarias centri partes æqualiter remotum attingeret, hoc inquam tempus ad tempus translationis de loco v in v per spiras stabiles, quas recta positione data VG contingit, rationem habebit eam quam VH ad CV.

Conferuntur cum Temporibus in Circulis.

15. Ponatur angulus CVH talis esse, qualis esse debet, ut tempus translationis de loco v in v, per spiras quas recta VH contingit, idem sit quod tempus dimidiæ conversionis in Circulo, cujus radius CV. Tempus igitur trajectionis rectæ de loco v in v, corpori utique quod à distantiis infinitis casu recto centrum petierit, erit ad tempus dimidiæ conversionis in circulo illo ut cosinus anguli cujus amplitudo est 71°—26′—21″,4, ad radium. Temporis item casûs recti de loco v in centrum, nempe post casum rectum à distantiis infinitis locum usque v, ad tempus, quo corpus in illo circulo quadrantem circuitûs absolveret, eadem erit ratio: nimirum cosinûs anguli 71°—26′—21″,4 ad radium, sive radii ad dimidium circuli ambitum.

Consensus doctrinæ nostræ cum Newtonianâ.

16. Tempora quibus corpus à locis ejusdem spiræ diversis, v, i, ad distantiam à centro delatum fuerit omni datâ propiorem, erunt inter se sicut quadrata è radiis CV, Ci per loca illa ductis (per. § 9). Tempora autem illa cum temporibus conversionum in circulis, quorum radii sunt CV, Ci, proportione convenient (id quod ex § 10. satis patet). Conversionum igitur in circulis inæqualibus, circum centrum commune, Tempora rationem inter se servant radiorum duplicatam; quod cum iis consentaneum est, quæ in Corollario 7. Propositionis IV. Libri Primi Principiorum, de Temporibus conversionum in Circulis, Newtonus generatim tradidit.

Tempora caſûs recti in centrum duplicatam diſtantiarum à centro rationem ſervant.

17. Tempora caſûs recti centrum uſque è locis diverſis (poſt caſum rectum ab infinitis utique diſtantiis locum uſque ſuperiorem) cùm ad Tempora converſionis in Circulis, circum centrum commune per loca illa ductis, datam rationem gerant (per § 15.) duplicatam diſtantiarum rationem inter ſe ſervabunt.

ΥΕΥΔΑΡΙΟΝ. 18. Quid autem? Temporis caſûs recti, è loco puta v centrum uſque c, ſi ex eo juſta æſtimatio veniet, quòd evaneſcente contactûs angulo *b*vc linea recta vc ſpirarum, ſpecies uſque mutantium, ultima ſit figura; quidni Tempus etiam converſionis in Circulo ſimili ratione æſtimare liceat? Nimirum ex eo quòd ſi angulus ille *b*vc contrario modo fluat, ut jam creſcat qui ante evaneſcere ponebatur, Spiræ, quas recta mobilis v*b* in puncto v ſemper contingit, quæque ſpeciem uſque mutant, hæ ultimò quidem, cum angulus ille in rectum increverit, figuram circularem induant; ejus nempe circuli, qui centrum c, radium cv habet. Num igitur tempus, quo corpus de loco v in *v* per circulum illum transferatur, ad tempus tranſlationis de loco v in *v* per ſpiras poſitione datas, quas in dato puncto v recta vH poſitione data contingat, rationem habebit, quæ datæ vH ad rectam v*b* mutabilem ultima erit? At verò recta v*b*, cùm angulus cv*b* rectus fuerit factus, in nihilum planè abierit. Tempus igitur tranſlationis de loco v in *v* per circulum, ſi hoc modo verè æſtimatum ſit, ad Tempus tranſlationis per ſpiras majus erit quàm ut datam aliquam rationem gerat. Sint igitur ſpiræ eâ ſpecie prædítæ, quam in § 11. definivimus. Jam tempus tranſlationis de loco v in *v* per circulum tempori tranſlationis per ſpiras æquale ſit, ſecundum ea quæ in § 11. demonſtravimus. Tempus igitur tranſlationis de loco v in *v* per circulum ei æquale erit, quod magis quàm pro datâ quâvis ratione exſuperare debet. Quo nihil quidem abſurdius excogitari poteſt. Quid igitur? An nos in temporum per circulum ſpiraſque comparatione falſi ſumus, quàm antè in § 10. facere inſtituimus, an tunc potius in lubrico ſumus verſati, cùm tempus caſûs recti definire inciperemus, ex figuræ illius conſideratione, quam, evaneſcente angulo contactûs, Spiræ, ſpeciem uſque mutantes, ultimò quaſi induerent, quamque rectam eſſe pronuntiavimus? Neutrum horum quidem. Sed in § 10. comparatio temporum rectè inſtituta eſt, rationumque concluſiones veriſſimè ſunt ſubductæ; et ſpiras, evaneſcente contactûs angulo, in rectam ultimò abire veriſſimè pronuntiatum eſt; et ex eo quòd in rectam eæ ultimò abierint, haud temerè nobis eſt incepta Temporis caſûs recti æſtimatio. Ille verò temerè & imperitè fecerit, qui ex eo quòd increſcente contactûs angulo ſpiræ ultimò, cùm rectus ille fiat, in Circuli figuram quodammodo abeant, Tempus converſionis in circulo ſimiliter æſtimare velit. Is enim ſimilitudinem ſibi finxerit, ubi reverâ nulla eſt. Licet enim increſcente angulo contactûs cv*b*, ultimò quidem, cùm in recti amplitudinem ille increverit, pro omni Spirarum figurâ ſola Circuli, radio cv ſcripti, figura remanebit, ut nos ipſi ſupra § 6. monuimus, haud tamen eodem modo Spiræ in Circulum abeunt, atque angulo cv*b* evaneſcente in Rectam. Etenim in Rectam abeuntes in ſimplicem rectam abeunt, nimirum ſpiræ vc in rectam ſimplicem vc; ſpiræ alteræ cv in ſimplicem cv; totaque adeo oppoſitarum ſpirarum figura in rectam ſimplicem vcv; cui innumeri ſpiræ utriuſque orbes, qui loca illa v, *v* interjacent, ultimò æquales fiunt. Licet enim utraque ſpirarum oppoſitarum, qualiſcunque ſit anguli cv*b* amplitudo, gyris innumeris centrum cingat, atque adeo punctis innumeris radium cv ſecet; angulo tamen illo infinitè imminuto, orbes omnes utriuſque interiores infinitè quidem anguſti fiunt; adeo ut radii interiores c*i*, c*b* (fig. 2) omni datâ rectâ minores uterque fiant. Orbes igitur utriuſque ſpiræ interiores in ipſum quaſi centrum ſeſe contrahunt, et ex punctis innumeris in quibus ſpira utraque radiis occurrat, ne unum quidem inveniatur, quod non propiùs quàm pro datâ quâvis diſtantia à centro abſit. Sinus igitur curvarum v*i*, v*b*, Curvis totis (inter loca v, *v*) ultimò fiunt æquales. Angulo autem contactûs infinitè decreſcente, ſinûs utriuſque latitudo in omni parte infinitè imminuitur. Rectæ ſcilicet, quæ ab hoc vel illo in rectam v*v* ad perpendiculum deducantur, datis quibuſlibet minores fiunt. Fieri igitur nequit, quin ſinus v*i* ad rectam vc, ſinus alter, *b*v ad rectam cv ultimò ſe applicet, & ſinus illi ſimul ſumti, hoc eſt, ſpirarum oppoſitarum orbes innumeri, qui locis v, *v* interjacent, in rectam vcv abeant, atque illi æquales fiant.

Jam verò creſcente angulo cv*b*, ſpiriſque contrario, atque antè fecerunt, modo ſpeciem uſque mutantibus, videamus quid ultimò illis accidat, cùm angulus ille rectus fiat. Diximus eas in figuram Circulorum abiiſſe. Abierint verò. Haud verò in Circulum ſimplicem; ſed in innumeros, circum centrum commune c ſcribendos, eâ quidem orbium ſpiſſitudine, ut circuli v*v*x, qui omnium extimus erit, aream circuitus interiorum planè compleant. Etenim angulo contactûs infinitè aucto, ſpirarum oppoſitarum, è locis v, *v* egredientium, orbes omnes interiores ampliores fiunt, adeo ut radius quiſque interior v*i* datâ quâlibet rectâ major evadat, quæ ipſa radio primo cv, vel cv, minor ſit; & in rectâ cv nequeat dari punctum infra ipſum v, quo punctum illud ubi primâ vice, ubi ſecundâ, ubi tertiâ, ubi quotâcunque denique, Curva ex v egreſſa radium primum, cv, redux tranſierit, non propiùs tandem à puncto v remotum ſit. Neque innumeris modò gyris Spira utraque centrum cinget, atque adeo punctis innumeris radios cv, cv ſecabit, ſed innumera tandem erunt interſectionum puncta, quæ datam quamlibet radii utriuſque, cv vel cv, portionem occupabunt; gyri pariter erunt innumeri, qui ſpatia ampliora, quàm eſt area cujuſvis circuli, qui ipſo v*v*x minor ſit, ſingulatim intùs continebunt. Gyri autem illi innumeri ultimò in circulos abibunt innumeros, quorum omnium ambitus integri ſimul ſumti, infinitam quandam efficient longitudinem, cui ſpiræ oppoſitæ ultimò æquales fiunt. Creſcente igitur angulo cv*b* ut rectus fiat, Spiræ, quas in puncto v recta mobilis v*b* contingit, ſpeciem uſque mutantes, in figuram circularem longè alio modo abeunt, atque illæ in rectam abierunt, quæ ſpecies ſuas contrario modo uſque mutavere, dum angulus ille ſenſim evaneſceret. Siquidem illæ in Rectam abiere ſimplicem, longitudine finitâ prædítæ. Hæ verò in Circulos abeunt innumeros, immenſam planè longitudinem affectantes. Jam verò tempus quod attinet tranſlationis de loco v in *v* per Spiras, cùm in omni id ſpirarum ſpecie ex temporibus converſionum omnium in innumeris ſpirarum oppoſitarum orbibus conflatum

tum ſit, ſiquidem corpus per ſpiras de loco v in locum *v* non aliter tranſferatur, niſi cùm orbes innumeros locis v, *v* interſcriptos emenſum ſit; cùm præterea, angulo cv*b* in rectum aucto, ex ſpirarum orbibus innumeri tandem ſint, qui circulum quemvis exſuperent ipſo *vvx* minorem; cùm converſionibus ſingulis, per orbes circulo *vvx* non minores, tempora etiam tribuenda ſint tempore converſionis integræ per circulum *vvx* non minora; cùm denique tempora illa innumera, quæ dato ſingulatim non minora ſint, ſimul ſumpta infinitam quandam durationem conficiant: hæc inquam cùm ita ſint, certè tempus tranſlationis de loco v in *v*, per ſpiras figuram ſuam ultimam circularem induentes, quod innumeris illis converſionum in dato circulo temporibus minus eſſe nequit, id dato quovis tempore neceſſariò majus erit. Neque magis nos rationes illæ fefellerunt, quæ ex eo quòd, creſcente ſenſim contactûs angulo, ſpirarum figura ultimò, cùm rectus ille factus fuerit, in circularem abierit, tempus tranſlationis ultimum infinitum prodiderunt; quàm illæ, quæ tranſlationi per ſpiras, evaneſcente contactûs angulo & ad nihilum redacto, in rectam abeuntes, tempus ultimum finitum aſſignârunt. Næ ille verò graviter erraverit, qui ultimum illud tranſlationis tempus, per ſpiras in circulos tranſeuntes, tempori dimidiæ converſionis in circulo extimo æquandum judicaverit; cùm revera illud innumera converſionum integrarum tempora in ſe uno contineat. Quod ſi cui videar, dum hæc fuſius diſputarem, longiùs à propoſito divertiſſe, is velim meminerit, me errori arguendo operam dediſſe, qui ex eorum genere eſt, qui incautos facilè irretitos teneant; ſimulque in eam opinionem eos inducant, ut omne id genus argumenti, quod rationibus primis ultimiſque nititur, ſuſpectum habeant. Simul illud oſtendere volui, quod hujus ſeculi hominibus ſatis profecto inculcari nequit, quàm periculoſum ei futurum ſit iter, quàm tenebris caligineque merſum, cui, Phyſicam ingredienti, Geometria facem non prætulerit: quàm claro contrà colluſtrentur omnia lumine, quando ducem viæ atque comitem illa ſe præbuerit. Profecto qui errores, unde ortum ducant, quibus in rebus conſiſtant, optimè expedierit, quâ ratione vitari poſſint certiſſimè monſtrârit, is optimus erit ac certiſſimus, me judice, veritatis magiſter. Ad propoſitum redeo.

PARTIS PRIMÆ CASUS SECUNDUS. (Vid. fig. 10.)

JAM verò è loco v ſecundum rectam VG minore cum velocitate corpus intelligatur emitti, quàm caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque v adeptum eſſet. Junctâque CV, in rectâ CV productâ detur punctum A, unde ſi corpus rectâ cecidiſſet, velocitatem in loco v adeptum eſſet æqualem ei, quâcum è loco v ſecundum rectam VG exire geſtit. Et manentibus quæ ad analyſin generalem Problematis XXVIII. Libri I. Principiorum in Notâ (f) lineavimus, intelligatur jam AB rectæ AC æqualis. Datæque CA vel AB deſignetur literâ a; data CV, literâ c; indefinita CD, literâ y. Jam cùm è naturâ Curvæ BF, AB ſit ad DF ut vis centralis in loco A ad vim centralem in loco D, hoc eſt, ut cubus ex CD ad cubum ex CA vel AB, erit $DF = \frac{AB^3}{CD^3} AB = \frac{a^4}{y^3}$. Ergo $DF \times -\dot{y} = -\frac{a^4}{y^3}\dot{y}$. Harum verò fluxionum

fluxionum fluentes ſunt, alterius quidem area Curvæ BF ad ordinatam DF terminata, alterius ſpatium his notis deſignatum $\frac{a^4}{2y^3}$. Spatium igitur Curvæ BF ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ aut æquale erit, aut alterum altero majus dato. Cùm verò rectæ, quæ poſſint ſpatia BADF, ſint ſemper ut velocitates corporis caſu recto centrum C petentis; quando ordinata DF eum ſitum obtineat, ut corporis ad punctum D, unde illa educta ſit, velocitas ad nullam fuerit redacta, tum profecto recta quæ poterit aream BADF, atque area adeo ipſa, in nihilum abierit. Fluat igitur recta CD, uſquedum punctum mobile D in locum A perveniat, ordinataque DF cum ipſâ AB congruat. Tum demum velocitate corporis ad nullam redactâ, quippe cùm corpus ex ipſo loco A caſum rectum occeperit, area BADF in nihilum abierit. At verò in eo ſitu puncti D ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ dimidio quadrati ex a, vel AC, fit æquale; nempe cùm y, vel CD, ipſi CA æqualis facta fuerit. Spatium igitur $\frac{a^4}{2y^2}$ areâ BADF dato $\frac{1}{2}a^2$ ſemper majus erit. Ut ſit area $BADF = \frac{a^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$. Hinc efficietur $UQ^2 = \frac{a^4}{2CV^2} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{CA^2}{2CV^2}CA^2 - \frac{1}{2}CA^2$. Et $RS^2 = \frac{a^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$.

Sed $ST = \frac{q^2}{y}$ (Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. f). Ergo $ST^2 = \frac{2q^4}{2y^2} = \frac{2CV^2 \times QW^2}{2y^2}$. Hinc $RT^2 = \frac{a^4 - 2q^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$.

Deſignet b rectam, quæ datarum illarum CV, $\sqrt{2UW^2 + CA^2}$ proportione media ſit. Erit igitur quadratum ex b rectangulo $CV \times \sqrt{2UW^2 + CA^2}$ æquale. Sive algebraicè $b^2 = CV \times \sqrt{2UW^2 + CA^2}$; et $b^4 = CV^2 \times 2UW^2 + CA^2 = CV^2 \times \overline{2UQ^2 - 2QW^2 + CA^2}$. At verò ex eo quòd inventum eſt $UQ^2 = \frac{CA^2}{2CV^2}CA^2 - \frac{1}{2}CA^2$, efficitur $2CV^2 \times UQ^2 = CA^4 - CV^2 \times CA^2$. Atque hinc rurſum $b^4 = CA^4 - 2CV^2 \times QW^2 = a^4 - 2q^4$. Cùm igitur inventum eſt $RT^2 = \frac{a^4 - 2q^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$, erit idem $RT^2 = \frac{b^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{b^4 - a^2y^2}{2y^2}$. Quare $2RT = \frac{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}{y}$. Sed $Db = \frac{q^2}{2RT}$. Et $Dc = \frac{CV^2}{y^2} \times \frac{q^2}{2RT}$ (per formulas generales Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. f, traditas.)

Quare $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Et $Dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Hâc ultimâ formulâ definitur Curva acx; atque hæc eſt illa, cujus facilem quadraturam in Corollario tertio Propoſitionis quadrageſimæ primæ Libri Primi Principiorum Newtonus prædicavit. Reverâ ex earum genere eſt, quas in formam primam Claſſis quartæ Tabulæ ſecundæ Libri ſui de Quadraturâ Curvarum Newtonus concluſit. Datâ igitur VD, ope illius Tabulæ dabitur area AVDC, ex relatione quæ illi cum datâ quâdam areâ conicâ intercedat. Datâ autem areâ AVDC, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut in caſu ſuperiori,

PARS PRIMA. CASUS SECUNDUS.

riori, dabitur; assumptisque distantiis aliis, alia definientur Curvæ vik puncta. Q. E. I.

COMPOSITIO CASUS II. PARTIS I.

In rectâ CV, infinitè producendâ (fig. 5), capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam AB, seu CA, proportionem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB, & à puncto C ad perpendiculum cum rectâ CA educatur ce, quæ junctæ CB fiat æqualis. Centro C semiaxe transverso ca, secundo ce, scribatur hyperbola asr. Punctum V non erit extra hanc hyperbolam. Cùm enim ea sit recta *b*, cujus quadratum rectangulo $CV \times \sqrt{2UW^2 + CA^2}$ æquale sit, certè non minus erit quadratum ex illâ *b* quàm rectangulum $CV \times CA$. Haud minus igitur erit quadratum ex *b*, quàm ut habeat ad quadratum ex CV rationem eam, quam rectangulum $CV \times CA$ ad quadratum ex CV; sive eam, quam recta CA ad rectam CV. Sed talis sumpta est recta ca, ad quam illa CA haberet proportionem eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex CV. Habet igitur CA ad ca rationem quam b^2 ad CV^2. Non minor igitur erit illa CA quàm ut habeat ad ca proportionem eam quam CA ad CV. Invertendo, ca non erit major quàm quæ habeat ad CA proportionem quam CV ad eandem CA. Quare ca non major erit quàm CV. Sed major esse deberet, si punctum V extra hyperbolam esset. Non est igitur extra hyperbolam punctum V. Recta igitur ab illo V ordinatim ad axem transversum educta hyperbolæ occurret. Educatur, & hyperbolæ in s occurrat.

Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum x intra sectionem, quod à vertice sectionis conicæ a longius sit remotum, quàm est punctum V. Educatur xr ad axem ca ordinatim, quæ hyperbolæ in r occurrat. Jungantur CS, Cr. Centro C, radio CV, scribatur circulus. Ejus circuli capiatur sector VC*p*, qui habeat ad sectorem hyperbolicum acr rationem eam quam q^2, sive rectangulum $CV \times QW$, ad quadratum ex CA. Ducatur recta r*t*, quæ hyperbolam in r contingens, axi ca in *t* occurrat. In rectâ C*p* capiatur C*l* quæ ad C*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex ca. Si è loco V (fig. 10) secundum rectam VG corpus quodpiam emissum fuerit, eâ cum velocitate quam in loco V adeptum esset, si à loco A, nullâ vi insitâ præditum, casum rectum, centrum versus, occepisset, hoc corpus feretur per Curvam, ejus quam punctum P (in fig. 5) perpetuò tangit per omnia similem & æqualem.

DEMONSTRATIO.

In figura 10ª capiatur CD, duarum CX, CV in figurâ 5ª proportione tertiâ, existentibus illis CV, necnon illis CA, illisque AB, utriusque figuræ inter se æqualibus. Et cùm CX (fig. 5) major sit quàm CV, erit CV major quàm CD. Quare circulus centro C radio CD scriptus in figurâ 10ª curvum corporis tramitem secabit. Secet in I, reliqua verò omnia maneant quæ ad Problematis in hoc casu resolutionem lineavimus. Jam cùm sit ca ad CA ut

ut quadratum ex CV ad quadratum ex *b* (ita enim factum est) capiatur β (fig. 10) duarum CV, *b* proportione tertia. Erit igitur ca ad CA ut CV ad β. Quare quadratum ex ca erit ad quadratum ex CA ut quadratum ex CV ad quadratum ex β. Et permutando $ca^2 : CV^2 = CA^2 : \beta^2$. Quare $ca^2 : CV^2 = 2CA^2 : 2\beta^2$. Atque rursum permutando $ca^2 : 2CA^2 = CV^2 : 2\beta^2$. Sed propter æquales CA, AB & angulum ad A rectum, quadratum ex CB, sive ejus æquali C*e* (fig. 5), quadrati ex CA duplum erit. Quapropter, cùm sit $ca^2 : 2CA^2 = CV : 2\beta^2$, erit quadratum ex ca ad quadratum ex C*e* ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Quapropter in hyperbolâ asr, spatium quo quadratum ex CX exsuperat quadratum ex dimidio axe ca erit ad quadratum ex ordinatâ x*r*, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β.

In figura 10ª, juncta CB occurrat rectæ D*b* in M. Et capiatur γ, duarum CM, *b* proportione tertia. Rectangulum igitur $CM \times \gamma$ æquale erit quadrato ex *b*, cui etiam rectangulum $CV \times \beta$ æquale erit. Rectangula igitur $CM \times \gamma$, $CV \times \beta$ inter se æqualia erunt. Quare γ erit ad β ut CV ad CM, & quadratum ex γ ad quadratum ex β ut quadratum ex CV ad quadratum ex CM. Est autem quadratum ex CD quadrati ex CM dimidium; nimirum propter æquales CD, DM, angulumque ad D rectum. Quare duplum quadratum ex γ erit ad quadratum ex β ut quadratum ex CV ad quadratum ex CD; hoc est, cùm tribus illis CX (fig. 5), CV, CD (fig. 10), ac proinde earum quadratis, perpetua sit proportionis convenientia, ut quadratum ex CX ad quadratum ex CV. Quadratum igitur ex CX erit ad quadratum ex CV, ut duplum quadratum ex γ ad quadratum ex β, sive ut quadruplum quadrati ex γ ad duplum quadratum ex β. Permutando quadratum ex CX erit ad quadruplum quadrati ex γ, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Sed ostensum est quadratum ex ca esse ad quadratum ex C*e*, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Quare illud quo quadratum ex CX (fig. 5) exsuperat quadratum ex ca, erit ad illud quo quadruplum quadrati ex γ exsuperat quadratum ex C*e* ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Idem autem illud quo quadratum ex CX exsuperat quadratum ex ca est ad quadratum ex x*r*, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Id enim jam ostensum est. Illud igitur quo quadratum ex CX exsuperat quadratum ex ca ad illud quo quadruplum quadrati ex γ exsuperat quadratum ex C*e* eandem, quam ad quadratum ex x*r*, proportionem habet. Quadratum igitur ex x*r* æquale est ei quo quadruplum quadrati ex γ exsuperat quadratum ex C*e*. Illud autem quo quadruplum quadrati ex γ exsuperat quadratum ex C*e* quadruplum est quadrati ex RT in fig 10. Nam cùm tribus illis, CM, *b*, γ (fig. 10) perpetua sit proportionis convenientia, idcirco quadratum ex γ erit ad quadratum ex *b* ut quadratum ex *b* ad quadratum ex CM, hoc est ad duplum quadrati ex CD. Verùm ut quadratum ex *b* ad duplum quadrati ex CD, sic est quadratum ex RT, dimidio quadrati ex CA auctum, ad quadratum ex *b*. Namque hoc ipsum declarant notæ illæ, quas analysis nobis expromebat, $RT^2 = \frac{b^4}{2y^2} - \frac{1}{4}a^2$. Quadratum igitur ex γ ad quadratum ex *b* eandem quam quadratum ex RT, dimidio quadrati ex CA auctum, proportionem habet. Quare quadrato ex γ æquale erit quadratum ex RT dimidio quadrati ex CA auctum. Et quadruplo

PARS PRIMA. CASUS SECUNDUS.

quadrati ex γ æquale erit quadruplum quadrati ex RT duplo quadrati ex CA, hoc eſt quadrato ex ce, auctum. Illud igitur quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex ce, quadruplum eſt quadrati ex RT. Idem verò quadrato ex xr jam antè oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex xr quadruplum eſt quadrati ex RT, ac proinde recta xr dupla erit recta RT.

Jam verò propter perpetuam tribus illis CX (fig. 5) CV, CD (fig. 10) proportionis convenientiam, rectangulum $CX \times CD$, quadrato ex CV, hoc eſt dato ſpatio, æquale erit. Quare fluxio hujus rectanguli, $CX \times CD$, nihilo æqualis erit; cujus tamen latera CX, CD, modis contrariis fluunt. Rectangula igitur $\dot{CX} \times CD$, $CX \times \dot{CD}$ erunt inter ſe æqualia, ut differentiam nullam habeant. Eorum enim differentia, ſi ulla eſſet, ſpatii $CX \times CD$ fluxio eſſet: hoc eſt, ſpatium datum flueret. Quod eſt abſurdum. Sunt igitur $\dot{CX} \times CD$, $CX \times \dot{CD}$ inter ſe æqualia. Rectarum autem AX, CX fluxiones, propter datam CA, ſunt inter ſe æquales. Hoc eſt $\dot{AX}$, $\dot{CX}$ ſunt inter ſe æquales. Rectangulum igitur $\dot{AX} \times CD$ æquale erit illi $\dot{CX} \times CD$, cui etiam illud $CX \times \dot{CD}$. Quare rectangula $\dot{AX} \times CD$, $CX \times \dot{CD}$ erunt inter ſe æqualia. Quare $\dot{AX}$ erit ad $\dot{CD}$ ut CX ad CD. Quare rectangulum $\dot{AX} \times xr$, ſive fluxio ſpatii hyperbolici axr, erit ad rectangulum $\dot{CD} \times xr$ ut CX ad CD.

Præterea cùm ſit xr (fig. 5) dupla recta RT (fig. 10), dimidium rectanguli $CX \times xr$, ſive triangulum Cxr, æquale erit rectangulo $CX \times RT$. Verùm rectæ CX, RT eodem modo fluunt. Nam RT neceſſariò fluet eodem modo, quo xr, cujus illa RT eſt ſemiſſis. Et xr, quæ ordinatim applicata eſt ad axem tranſverſum hyperbolæ, eodem modo, quo abſciſſa CX fluet. Fluunt igitur, ſicut dixi, illæ CX, RT eodem modo. Illis autem eodem modo fluentibus, fluxio rectanguli $CX \times RT$, cujus eæ ſunt latera, ſummæ rectangulorum $\dot{CX} \times RT$, $CX \times \dot{RT}$ æqualis erit. Erit autem $\dot{CX} \times RT$ ad $\dot{CD} \times RT$, ut $\dot{CX}$ ad $\dot{CD}$. Sed oſtenſa eſt $\dot{AX}$, vel $\dot{CX}$, eſſe ad CD ut CX ad CD. Rectangulum igitur $CX \times RT$ ad rectangulum $\dot{CD} \times RT$ rationem habet eam quam CX ad CD. Sed rectangulum etiam $CX \times \dot{RT}$ ad rectangulum $CD \times \dot{RT}$ rationem habet quam CX ad CD. Summa igitur rectangulorum $\dot{CX} \times RT$, $CX \times \dot{RT}$, ſive fluxio trianguli Cxr (fig. 5), ad ſummam rectangulorum $\dot{CD} \times RT$, $CD \times \dot{RT}$ rationem habebit eam quam CX ad CD. Sed oſtenſum eſt fluxionem ſpatii hyperbolici axr ad rectangulum $\dot{CD} \times xr$, ſive ad duplum rectanguli $\dot{CD} \times RT$, rationem habere eam quam CX ad CD. Quare & illud quo fluxio ſpatii hyperbolici axr abeſt à fluxione trianguli Cxr, hoc eſt fluxio ſectoris hyperbolici car, ad illud quo duplum rectangulum $\dot{CD} \times RT$ à ſummâ rectangulorum $\dot{CD} \times RT$, $CD \times \dot{RT}$ abeſt, hoc eſt, ad differentiam rectangulorum $CD \times \dot{RT}$, $\dot{CD} \times RT$, eandem etiam rationem geret, quam CX ad CD. Fluxio inquam ſectoris hyperbolici car ad rectangulorum $CD \times \dot{RT}$, $\dot{CD} \times RT$ differentiam

rentiam rationem habebit quam CX ad CD. Rectangulorum autem $CD \times \dot{RT}$, COMPOSITIO $\dot{CD} \times RT$ differentia fluxio eſt rectanguli $CD \times RT$. Nempe cùm illæ CD, RT modis contrariis fluant. Fluit enim CD (fig. 10) contrario modo atque CX (fig. 5), cùm illæ CD, CX datum ſpatium contineant. Sed oſtenſa eſt illa CX eodem modo fluere quo RT. Quare CD, RT modis contrariis fluunt, rectangulorumque $CD \times \dot{RT}$, $\dot{CD} \times RT$ differentia fluxio erit rectanguli $CD \times RT$. Erit igitur fluxio ſectoris hyperbolici car (fig. 5) ad fluxionem rectanguli $CD \times RT$ (fig. 10) ut CX (fig. 5) ad CD (fig. 10).

Jam verò ex æquatione illâ, quam analyſis nobis expromebat, $RT^2 = \frac{b^4 - a^2y^2}{2y^2}$, deſignante utique literâ y rectam CD, veniet $RT = \frac{\sqrt{b^4 - a^2y^2}}{\sqrt{2} \times y}$; et $RT \times CD = \sqrt{\frac{b^4 - a^2y^2}{2}}$. Unde rurſum $\dot{RT} \times \dot{CD} = \frac{-a^2y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Quare $\dot{CD} \times \dot{RT} \times \frac{q^2CV^2}{a^2y^2} = \frac{q^2CV^2}{y\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}} \times -\dot{y} = DC \times -\dot{y}$. Notis autem $DC \times -\dot{y}$ deſignatur fluxio areæ $aVDc$, in figurâ 10[a]. Quare $\dot{CD} \times \dot{RT} \times \frac{q^2CV^2}{a^2y^2} = \dot{aVDc}$. Hoc eſt, fluxio areæ $aVDc$ ad fluxionem rectanguli $CD \times RT$ rationem habet compoſitam è rationibus ſpatii q^2, ſive rectanguli $CV \times QW$, ad a^2, ſive quadratum ex CA; quadratique ex CV ad quadratum ex y, vel CD; compoſitam igitur è rationibus rectanguli $CV \times QW$ ad quadratum ex CA, rectæque CX (fig. 5) ad rectam CD; eam igitur quæ eſt Solidi $CV \times QW \times CX$ ad Solidum $CA^2 \times CD$. Sed ex ſuprà oſtenſis, fluxio rectanguli $\dot{CD} \times RT$ (fig. 10) erit ad fluxionem ſectoris hyperbolici car (fig. 5) ut CD (fig. 10) ad CX (fig. 5); ſive ut Solidum $CA^2 \times CD$ ad Solidum $CA^2 \times CX$. Cùm igitur fluxio areæ $aVDc$ ſit ad fluxionem rectanguli $CD \times RT$ ut Solidum $CV \times QW \times CX$ ad Solidum $CA^2 \times CD$, fluxio autem rectanguli $CD \times RT$ ad fluxionem ſectoris hyperbolici car ut Solidum $CA^2 \times CD$ ad Solidum $CA^2 \times CX$; ex æquo, fluxio areæ $aVDc$ erit ad fluxionem ſectoris hyperbolici car, ut rectangulum $CV \times QW$ ad quadratum ex CA. Et cùm hæc data ſit fluxionum inter ipſas ratio, fluentibus etiam aut eadem interveniet, aut altera earum dato quodam ſpatio major erit quàm pro hâc ratione. (Geometr. Flux. Th. IV.)

Fluat igitur CD (fig. 10) donec ipſi CV æqualis evadat. Jam in fig. 5[a] ſector hyperbolicus ſit cas, area autem $aVDc$ (fig. 10) in nihilum abierit. Quare ſector hyperbolicus car dato cas ſemper major erit, quàm ut habeat ad aream $aVDc$ rationem eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum $CV \times QW$. Sector igitur csr ad aream $aVDc$, ſive illi æqualem ſectorem ACX datam illam rationem habebit. Capiatur in fig. 5. ſector circularis vcf qui ad ſectorem hyperbolicum acs rationem eam habeat, quam rectangulum $CV \times QW$ ad quadratum ex CA. Punctum ipſum f erit ad Curvam, quam punctum P perpetuò tangit. Nam ſi recta, quæ hyperbolam in s contingat, axi ca in σ occurrat, erit CV ad $c\sigma$ ut quadratum ex CV ad quadratum ex ca. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLIX.) Quare cf, cùm æqualis ea ſit

PARS PRIMA. CASUS SECUNDUS.

rectæ cv, erit ad cσ ut quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Punctum igitur *f* ad Curvam eſt, quam punctum P perpetuò tangit. Præterea cùm ſector hyperbolæ acs ad ſectorem circuli vc*f*, ſector item hyperbolæ acr ad ſectorem circuli vc*p* rationem habeat eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum cv × qw; idcirco ſector etiam hyperbolæ *s*cr ad ſectorem circuli *fcp* eandem illam rationem habebit. Hoc eſt, eandem quam ſector ille hyperbolæ *s*cr ad ſectorem circularem vcx (fig. 10) oſtenſus eſt habere. Sectores igitur circulares vcx (fig. 10) *fcp* (fig. 5) inter ſe æquales. Æquales autem radii vc, *f*c. Quare anguli quoque vcx, *fcp* inter ſe æquales erunt. Rurſum cùm rectangulum CD × cx (fig. 10) æquale ſit quadrato ex cv (fig. 5) ita enim factum eſt, rectangulum autem c*t* × cx (fig. 5) æquale quadrato ex ca (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XLIX.) idcirco erit CD × cx ad c*t* × cx ut cv^2 ad ca^2. Quare CD : c*t* = cv^2 : ca^2. Eſt autem CP : c*t* = cv^2 : ca^2. (Ita enim factum eſt.) Erunt igitur CP (fig. 5), CD ſeu CI (fig. 10) inter ſe æquales. Et ſimili argumentatione Curvarum VK, *f*P, radii omnes qui cum primariis illis cv, c*f* angulos æquales faciant, oſtendentur inter ſe æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter ſe ſimiles erunt & æquales. Q. E. D.

*De naturâ Curvæ f*P; *de Aſſidibus ejus inveniendis, perficiendâque ejus figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus ſpatia corpora abſolvant. De Tempore converſionis integræ per Curvam perfectam, ejuſque ad tempus converſionis in Circulo, necnon ad tempus caſûs recti, ratione.*

§ I. DEFINITIO.

Puncta r & p (fig. 5), cognata dico Hyperbolæ Curvæque.

2. Curva *f*P centrum ſuum c gyris innumeris cinget, quorum arctiſſimi propiùs idem accedent quam pro datâ quâlibet diſtantiâ.

3. Capiatur CM (fig. 5) duarum ca, cv proportione tertia. Erit M punctum ubi Curva P*f*Π axi hyperbolæ ca producto occurret. Etenim fluente arcu hyperbolæ a*r*, Curvæque P*f*, arcu a*r* tandem ad nihilum redacto, radius CP congruet cum axe ca producto, punctaque *r*, x cum puncto a congruent; & ca ultima erit rectæ cx magnitudo. Jam verò cùm CD (fig. 10), ſive illi æqualis CP (fig. 5) duarum cx, cv ſemper ſit proportione tertia, cùm cx æqualis facta fuerit datæ ca, fiet CP, quam poſitione cum ca congruere oſtendimus, fiet ea duarum ca, cv proportione tertia. Rectæ igitur CM æqualis ea fiet, et punctum P cum puncto M congruet.

4. Scriptâ modo quo diximus Spirâ CP*f*M, ſi a quolibet ejus puncto Π in axem hyperbolæ ca ad perpendiculum demittatur ΠN, & in ΠN productâ, ad alteram partem axis capiatur NO ipſi ΠN æqualis, atque hoc ſemper fiat; nova efformabitur Spira MOC, prioris per omnia ſimilis & æqualis, ſed ab alterâ parte axis poſita, ſinubuſque adverſis. Hanc autem ex ſemihyperbolâ aw eodem modo efformare licet, quo alteram ex ſemihyperbolâ a*r* efformare docuimus. Jam ſi junctæ ΠC, OC ultra centrum producantur,

tur, & in productis capiantur CH, CL ipſis CΠ, CO æquales, atque hoc ſemper fiat; novæ rurſum exſiſtent Spiræ, priorum per omnia ſimiles & æquales, quæ priorum Oppoſitæ haud immeritò nominentur; quippe quibus eædem planè cum Hyperbolâ oppoſitâ, quæ prioribus cum hyperbolâ a*sr*, cognationes intercedunt. Quo enim modo priores ex hyperbolâ a*sr* efformatæ ſunt, eodem hæ ex oppoſitâ efformari poterunt. SPIRÆ HYPERBOLICÆ OPPOSITÆ.

5. Hæ Spiræ Oppoſitæ unam tantummodo figuram conſtituere cenſendæ ſunt, ſicut Hyperbolæ Oppoſitæ, ex quibus illæ ſunt efformatæ, unam.

6. Radius quiſque CP, à centro c Spiras uſque eductus, angulum cum Curvâ faciet, qui hoc modo definietur (vid. fig. 6.) Anguli radiorum cum Curvâ.

A puncto hyperbolæ cognato *r* ad axem tranſverſum deducatur *r*x ordinatim, quæ in puncto d media dividatur. In abſciſſâ cx capiatur x*g*, quæ habeat ad cx rationem eam, quam (in fig. 10) qw ad cv. Junctâ d*g*, angulus x*dg* æqualis erit ei, quo radius CP inclinatur ad Curvam.

Nam, in fig. 10, rectangulum ST × CD rectangulo cv × qw æquale eſt. Id enim in demonſtratione noſtrâ Propoſitionis XLI. Libri primi Principiorum oſtenſum eſt. Et in fig. 6, rectangulum cx × CP quadrato ex cv æquale eſt. Quare rectangulum ST × CD (fig. 10) erit ad rectangulum cx × CP (fig. 6) ut rectangulum cv × qw ad quadratum ex cv. Quare ST (fig. 10) ad cx (fig. 6) ut qw ad cv. Eſt autem x*g* ad cx ut qw ad cv. Quare ST eandem quam x*g* ad illam cx rationem habet. Erunt igitur ST, x*g* inter ſe æquales. Sed & xd, RT inter ſe ſunt æquales. Nimirum cùm illa xd facta eſt, & illa RT oſtenſa eſt, ſemiſſis rectæ x*r*. Anguli quoque g x*d*, STR inter ſe æquales, rectus enim uterque. Quare & angulus x*dg* (fig. 6), angulo TRS (fig. 10) æqualis erit. Sed angulus TRS æqualis eſt ei, quo radius CI ad Curvam VIK inclinatur, ita enim factus eſt; & propter Curvarum VIK (fig. 10) *f*P (fig. 6) æqualitatem & ſimilitudinem, radii CI, CP qui æquales angulos cum primariis uterque ſuis, cv, c*f*, conſtituunt, ad Curvas item uterque ſuas æqualiter erunt inclinati. Angulus igitur x*dg* æqualis erit ei quo radius CP ad Curvam inclinatur. Q. E. D.

7. Per a verticem hyperbolæ ducatur recta a*k* quæ hyperbolam in vertice a contingat, et aſymptotarum alteri in *k* occurrat. Media dividatur a*k* in puncto *l*. Capiatur a*q*, quæ ad ſemiaxem tranſverſum eam rationem habeat, quam qw ad cv; et jungatur *ql*. Angulus quo radius quilibet Spirarum CP ad Curvam inclinatur angulo *ql*a major erit: ſed radio mobili CP circum centrum c circumacto, et infinitè imminuto, angulus inclinationis ille uſque minuetur, ut ad æqualitatem cum dato *ql*a propiùs tandem redactus erit, quàm pro datâ quâvis differentiâ. Occurrat enim x*r* aſymptotæ c*k* in v. Media dividatur xv in *h* & jungatur *gh*. Propter parallelas a*k*, xv, erit cx ad xv ut ca ad a*k*. Et cx ad ſemiſſem illius xv, ut ca ad ſemiſſem ipſius a*k*, hoc eſt ad a*l*. Eſt autem x*g* ad xc, ut qw ad cv, ſive ut a*q* ad ca. Cùm igitur ſit x*g* : xc = a*q* : ac

et xc : x*h* = ac : a*l*

ex æquo erit x*g* ad x*h* ut a*q* ad a*l*. Anguli autem g x*h*, *qal* inter ſe æquales, nempe cùm uterque rectus ſit. Triangula igitur g x*h*, *qal* inter ſe Angulus minimus.

Pars Prima. Casus Secundus.

ſe ſimilia, angulique *gb*x, *q*/*a* inter ſe æquales erunt. Sed recta x*r* minor eſt quàm xv. Quare ſemiſſis rectæ x*r* minor eſt quàm ſemiſſis rectæ xv, hoc eſt x*d* minor eſt quàm x*b*. Quare angulus *gd*x angulo *gb*x, atque ejus æquali *q*/*a* major (El. I. 21.) Quare et angulus quo radius cp ad Curvam inclinatur, cùm oſtenſus ſit æqualis angulo *gd*x, idem angulo *q*/*a* major erit.

Jam verò radio cp infinitè imminuto, cx infinitè augebitur; propter perpetuam trium cp, cv, cx proportionis convenientiam. Infinitè autem auctâ cx, illæ x*r*, xv, atque earum proinde ſemiſſes, æqualitatem infinitè accedent, et triangula x*dg*, *q*/*a* ſimilitudinem. Angulus igitur *gd*x minuetur uſque, et illi *q*/*a* ultimò æqualis fiet. Quare et angulus inclinationis radii cp ad Curvam, qui eâ lege fluit ut fluenti *gd*x ſemper ſit æqualis, ille mò æqualis erit. Conſtat igitur propoſitum.

Spirarum Apſides.

8. Puncta a, m Hyperbolæ Spiræque ſunt cognata (per § 3. & Def.) Angulus igitur, quo radius cm ad Spiram inclinatur, æqualis erit angulo *gd*x, qualis tunc ille factus fuerit, cùm, radio cp in cm aucto, puncta *r*, x locum a, ipſum utique verticem hyperbolæ, devenerint. At verò decreſcente arcu hyperbolico a*r*, angulus *gd*x augetur uſque; et tunc cùm, arcu illo ad nihilum redacto, puncta *r*, x locum a devenerint, rectus ille factus erit. Radius igitur cm Curvam ad perpendiculum inſiſtit. Hoc eſt punctum m Spirarum Apſis erit. Et ſi capiatur c*m* æqualis rectæ cm erit *m* Oppoſitarum Apſis.

Velocitas motûs in Spiris Hyperbolicis.

9. Velocitas corporis per has Spiras lati in loco quovis p erit ut recta *gd*. Et velocitas in Apſide erit ad velocitatem in alio quovis loco p ut *q*a ad *gd*. Namque ex iis quæ § 7. oſtendimus, liquet illam *gd* rectæ rs in figurâ 10 æqualem eſſe. Eſt autem rs ut velocitas in loco 1 illius figuræ, vel p hujus. Præterea puncto p in m tranſlato, puncta x, *r* transferentur in a, & *gd* æqualis fiet illi *q*a.

10. Si è loco *f*, in alterâ Spirarum Oppoſitarum dato, corpus aliquod ſecundum rectam, quæ ſpiram ibi loci contingat, juſtâ cum velocitate emiſſum fuerit, urgentibus utique viribus centripetis, quæ rationem inter ſe triplicatæ diſtantiarum contrariam conſtanter ſervent; corpus illud per Spiram *f*rc delatum gyris innumeris circum centrum c circumagetur; atque intra certum quoddam temporis ſpatium, cujus definiendi rationem mox ſumus tradituri, centrum illud propiùs quidem acceſſerit, quàm pro datâ quâvis diſtantiâ; ipſum verò nunquam attinget: at elapſo tempore illo, centrum quod tranſire ei non licuit, prætergreſſum Spiram Oppoſitam invaſerit, cujus ductum ſequens, Apſidem uſque *m* aſcendet. Ubi paulatim converſo rurſum, centrum verſus, itinere per Spiram *m*lc deferetur, centrumque ut antè prætergreſſum per ſpiram com Apſidem uſque alteram, m, aſcendet. Inde rurſum per ſpiram amc deferetur, eaſdemque in perpetuum ibit redibitque vias.

11. Quadraturam ſpatiorum, quæ Spirarum de quibus agimus datæ partes claudant, hâc ratione perficio.

Jam

Jam antè per analyſin obtinuimus $Db = \frac{-q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Hinc $Db \times -\dot{y} = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}} \times -\dot{y}$. Atque hæc erit fluxio areæ *a*v*Db*, ſive illi æqualis vci, ſpatium Hyperbolicarum Quadratura. in figurâ 10, vel areæ *f*cp in figurâ illâ 6, quam modò lineavimus. Area igitur vci, vel *f*cp $(= \overline{|Db \times -\dot{y}|})$ ſpatio $\frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}$, ſive $\frac{q}{\sqrt{2} \times a}\sqrt{b^4 - y^4}$, vel æqualis erit, vel eo major minorve dato (Newton. Tab. Curv. I. Claſſ. iv. Form. 1.) idque quæcunque aſſumpta fuerit diſtantia cv, vel c*f*, modo datâ cm non ſit major, quâ utique majori eſſe non licet. Ponatur igitur c*f*, ipſi cm æqualis, ut area *f*cp in aream mcp tranſeat, et angulus cvg (in fig. 10, & illi æqualis quw) rectus fiat. Et in figurâ 10, capiatur c*M* rectæ cm in figurâ ſextâ æqualis. Tum q^2 fiet c*M* × uq (fig. 10), ſive cm × *q*a (fig. 6), et b^2 fiet c*M* × ca (fig. 10, ſive cm × ca (fig. 6), rectâ utique uw ad nihilum redactâ. Notæ autem $\sqrt{2} \times a$ rectam c*e* ſemper ſignificant. Area igitur mcp (fig. 6) ſpatio $\frac{cM \times qa}{Ce}\sqrt{cM^2 - cp^2}$ vel æqualis vel eo major minorve dato erit. Fluat *y*, vel cp, donec ipſi cm evaſerit æqualis. Tum puncto p in ipſum m tranſlato, area mcp in nihilum abiert. In nihilum etiam ſpatium illud $\frac{cM \times qa}{Ce}\sqrt{cM^2 - cp^2}$. Area igitur mcp ſpatio iſto, quod ſimul cum eâ in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur c, radio cm, ſcribatur circulus (fig. 7) qui rectæ c*e*, radium cm ad perpendiculum inſiſtenti, in punctis o, *o* occurrat. Ad rectam c*e* (= cb fig. 5) applicetur rectangulum *ez* rectangulo cm × *q*a æquale. In cm capiatur cΠ ſpirarum radio cp æqualis. Educatur ad perpendiculum ΠΦ, quæ circulo in Φ occurrat, et in o*o* deducatur ad perpendiculum ΦΨ. Si punctum p in eâdem ſpirâ ſit, in quâ eſt apſis m, ſector ſpiræ mcp, axe cm radioque cp interceptus, rectangulo cz × cΨ æqualis erit: area verò quæ inter brachium ſpirarum totum mpc axemque mc eſt concluſa, rectangulo cz × co: pars illius areæ, à loco p centrum uſque, rectangulo cz × Ψo. Area verò mpcπ, ab apſide m per brachium ſpiræ mpc centrum uſque atque à centro rurſum uſque punctum π brachii oppoſiti, quod à centro pari diſtantiâ cum ipſo p remotum ſit, hæc inquam area rectangulo $cz \times \overline{co + o\Psi}$ æqualis erit: atque ſpatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ intus habent, duplum erit rectanguli cz × o*o*.

Tempora motûs in Spiris Hyperbolicis definiuntur.

12. Hinc parte quartâ temporis converſionis integræ, per Spiras quo ſuprà § 11. expoſuimus modo perficiendæ, corpus ab Apſide m, per ſpiram mpc delatum, propiùs centrum c acceſſerit quàm pro datâ quâvis diſtantiâ. Tempus autem quo conficitur area, quæ, à dato ſpirarum puncto p initium ſumens, circa centrum definat, erit ad tempus, quo conficitur area, quæ, ab apſide m initium ſumens, circa centrum item definat, hoc eſt ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut ſinus verſus arcûs ejus cujus ſinus eſt cp pro radio cm ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apſide m initium ſumens, ad radium cp ejuſdem ſpiræ in quâ eſt m terminetur, erit ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut co-

ſinus

PARS PRIMA. CASUS SECUNDUS.

ſinus arcûs ejus, cujus ſinus eſt CP pro radio CM, ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apſide M initium ſumens, ad punctum π ſpiræ oppoſitæ terminetur, erit ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut ſumma radii et ſinûs verſi ejus arcûs, cujus ſinus eſt Cπ pro radio CM, ad radium. Atque horum ope facilis erit Temporum æſtimatio, quibus conficiantur areæ, quæ datis quibuſcunque ſpirarum radiis interceptæ ſint.

Velocitas in Spiris Hyperbolicis confertur cum Velocitate in Circulis.

13. Velocitas corporis per Spiras lati in loco quovis V (fig. 10), eſt ad velocitatem corporis quod, urgentibus eiſdem viribus centripetis, circumagitur in Circulo, cujus radius CV, ut recta quæ poſſit ſpatium illud, quo quadratum ex CA exſuperat quadrum ex CV ad rectam ipſam CA. Occurrat enim VA rectæ CB in μ. Recta UQ eſt ad rectam, quæ poteſt ſpatium illud quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CV, ut CA ad Cμ. Nimirum hoc ipſum vult æquatio illa, quam analyſis nobis expromebat, $UQ = \frac{CA}{\sqrt{2} \times CV} \sqrt{CA^2 - CV^2}$. At verò ſi corpus à diſtantiis infinitis cecidiſſet, ut adeptum eſſet in V velocitatem illam quæ eſt corporis in Circulo ad diſtantiam CV circumacti, UQ habuiſſet ad ipſam CA rationem eam quam CA ad Cμ. Id quod quivis intelliget, qui Propoſitionis XXXIX. Newtonianæ Doctrinam perceptam habeat, quique noſtram ſimul caſûs tum ſuperioris tum hujuſce analyſin memoriâ teneat. Quare illa UQ, quæ velocitatem corporis per ſpiras lati in loco V repræſentat, ad rectam, quæ poteſt ſpatium quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CV, eandem rationem habet quam altera UQ, quæ corporis in Circulo velocitatem refert, ad ipſam CA. (El. V. 11.) Permutando illa prior UQ erit ad hanc alteram ac proinde velocitas illa prior in puncto ſpirarum V, erit ad hanc alteram in circulo velocitatem, ut recta, quæ poteſt ſpatium quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CV, ad ipſam CA.

Tempora converſionum integrarum in Spiris conferuntur cum Temporibus converſionum in Circulis.

14. Scriptis Spiris quarum centrum C, apſides M, *m* (fig. 8), ſi centro C, radio CM ſcribatur Circulus, et à puncto A agatur recta AF quæ circulum illum contingat, et ſi ſit F punctum contactûs; velocitas corporis per Spiram lati in Apſide ipſâ M, ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius CM, circumacti, rationem habebit eam quam recta AF ad CA. Namque quadratum ex AF æquale eſt rectangulo *m*A × AM (El. III. 36.) Et hoc rectangulum eſt illud quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CM (El. II. 6.) Recta igitur AF ea eſt, quæ poteſt ſpatium quo quadratum ex CA exſuperat quadratum ex CM. Conſtat igitur propoſitum ex ſuperiore.

15. E loco M exire intelligantur corpora duo, quorum alterum per Circulum, centro C, radio CM ſcriptum, feratur, alterum per Spiras Hyperbolicas Oppoſitas, quarum centrum C, Apſides M, *m*; urgentibus utique viribus quæ centrum C reſpiciant, et rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervent. Tempus converſionis integræ per Spiras ad Tempus converſionis integræ in Circulo rationem habebit, quæ componetur è rationibus rectæ CA ad CM, radiique circuli ad partem quartam circuitûs. Hoc eſt, ſi circuitus circuli qui radium habet CM, rectæ *p* æqualis ſit, erit Tempus converſionis per Spiras ad tempus converſionis in Circulo ut CA ad $\frac{1}{4}p$.

Exponatur

Vir. Centr. p. 24.

Fig. 1.

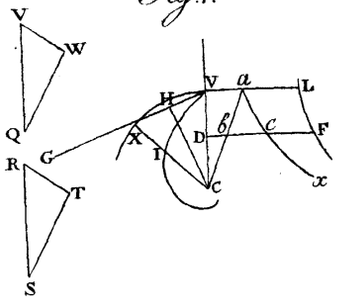


Fig. 2.

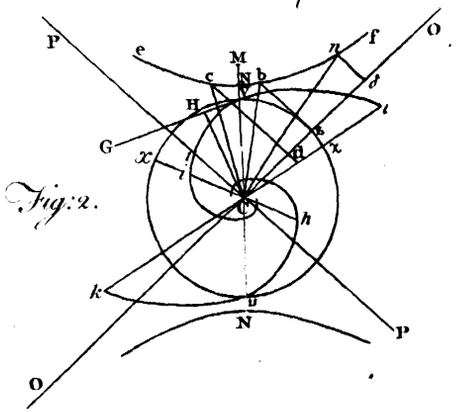


Fig. 3.

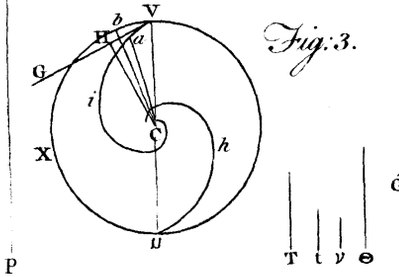


Fig. 4.

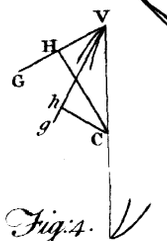


Fig. 5.

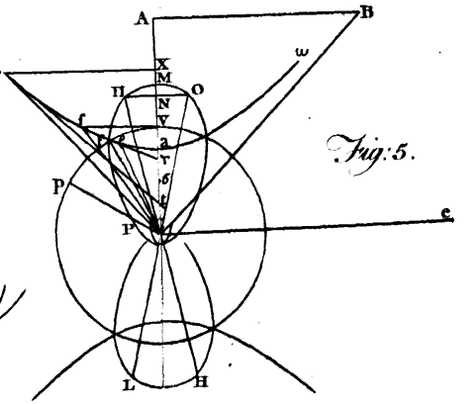


Fig. 6.

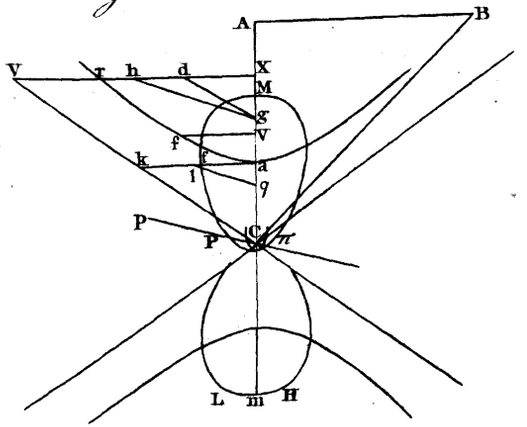
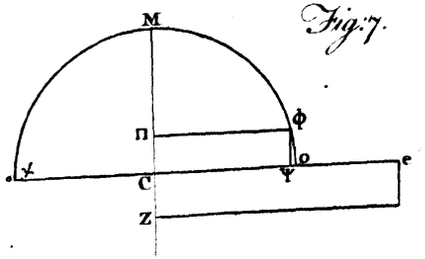


Fig. 7.



Exponatur recta T datæ cujuſvis longitudinis. Sit alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus converſionis per Circulum ad tempus converſionis per Spiras. Dico illam T ad hanc Θ rationem habere eam quam CA ad $\frac{1}{4}p$. Sint MCE, MCD ſectores Circuli Spiræque motûs initio ſimul confecti, et habeat recta t ad rectam T rationem illam, quam tempus quo conficiuntur ſectores illi ad tempus converſionis integræ per Spiras. Habeat autem t ad aliam rectam v, rationem eam quam ſector Spiræ MCE ad ſectorem Circuli MCD. Deſignet denique litera A ſpatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ intus habent. CASUS SECUNDUS.

Jam ſpatium A ad aream circuli MmF rationem habet, quæ eſt rectanguli $T \times t$ ad rectangulum $\Theta \times v$. Id enim eiſdem planè argumentis oſtendi poteſt, quibus in § 10 caſûs ſuperioris oſtendimus A eſſe ad aream circuli VvX ut $T \times t$ ad $\Theta \times v$. Jam verò t ad v rationem habet, quam ſector ſpiræ MCE ad ſectorem circuli MCD, hoc eſt, eam quam AF ad CA. Nam velocitates quibuſcum corpora duo, quorum alterum per Spiras, alterum per Circulum feratur, è loco M exeant, ſunt inter ſe ſicut rectæ FA, CA (per § 14). Et arcus naſcentes ſpiræ circulique, ME, MD, erunt primò quidem inter ſe ſicut velocitates illæ. Sectoribus igitur MCE, MCD naſcentibus prima ratio, cùm ea ſit illa quæ rectangulis etiam naſcentibus $CM \times ME$, $CM \times MD$ eſt prima, ea erit, quæ rectis datis FA, CA intercedat. Quæ verò ſectoribus MCE, MCD prima fuerit ratio, ea quidem, dummodo ſimul conficiantur, ſemper inter eos manet. Habet igitur, ſicut modò aſſeveravimus, recta t ad v rationem illam quam FA ad AC. Rectangulum igitur $T \times t$ ad rectangulum $\Theta \times v$ rationem habet, eam quam rectangulum $T \times FA$ ad rectangulum $\Theta \times CA$. Sed oſtenſum eſt ſpatium A ad aream circuli MQF rationem habere eam, quam $T \times t$ ad $\Theta \times v$. Habebit igitur ſpatium A ad aream circuli MQF rationem eam, quam rectangulum $T \times FA$ ad rectangulum $\Theta \times CA$. Atqui ſpatium A duplo rectangulo $cz \times oo$ æquale eſt (ſecundum ea quæ nos, § 12, oſtendimus). Et area circuli MQF rectangulo $\frac{1}{4}p \times CM$ æquale eſt (ſecundum ea quæ demonſtravit Archimedes). Rectangulum igitur $2cz \times oo$ erit ad rectangulum $\frac{1}{4}p \times CM$, ut rectangulum $T \times FA$ ad rectangulum $\Theta \times CA$. Hoc eſt, cùm recta oo dupla ſit rectæ CM, rectangulum $4cz \times CM$ erit ad rectangulum $\frac{1}{4}p \times CM$, ſive $8cz \times CM$ ad $p \times CM$, ſive denique $8cz$ ad p, ut $T \times FA$ ad $\Theta \times CA$. Quare rectangulum $8cz \times ce$ ad rectangulum $p \times ce$, ſive $cz \times ce$, ad $\frac{1}{8}p \times ce$, ut $T \times FA$ ad $\Theta \times CA$. Permutando $cz \times ce$ ad $T \times FA$ ut $\frac{1}{8}p \times ce$ ad $\Theta \times CA$. Rectangulum autem $cz \times ce$ rectangulo $CM \times qa$ æquale eſt (§ 9 & 11). Erit igitur $CM \times qa$ ad $T \times FA$ ut $\frac{1}{8}p \times ce$ ad $\Theta \times CA$. Invertendo $T \times FA$ ad $CM \times qa$, ut $\Theta \times CA$ ad $\frac{1}{8}p \times ce$. Erit autem $CM \times qa$ ad $CM \times FA$ ut qa ad FA, hoc eſt ut CA ad MO. (Secundum ea quæ ex formulâ generali, $UQ = \sqrt{\frac{a^4 - a^2c^2}{2c^2}}$, ſuprà diſputavimus, poſito jam $c = CM$.) Jungatur mo. Triangula CAB, mOM, cùm angulos ad A et O rectos habent, lateraque circa angulos rectos utrumque æqualia, idcirco inter ſe ſimilia erunt. Et CA erit ad CB ut MO ad Mm. Permutando CA ad MO ut CB, vel ce, ad Mm. Rectangulum igitur $CM \times qa$ erit ad rectangulum $CM \times FA$ ut ce ad Mm (El. v. 11.) ſive ut $\frac{1}{8}p \times ce$ ad $\frac{1}{8}p \times Mm$.

PARS PRIMA.

Cùm igitur sit T × FA : CM × *qa* = Θ × CA : $\frac{1}{6}p \times ce$,

Atque rursum CM × *qa* : CM × FA = $\frac{1}{6}p \times ce$: $\frac{1}{6}p \times Mm$,

ex æquo, erit T ad CM ut Θ × CA ad $\frac{1}{6}p \times Mm$. Sive cùm *Mm* dupla sit rectæ CM, erit T ad CM ut Θ × CA ad $\frac{1}{3}p \times$ CM. Quare T × CA erit ad CM × CA ut Θ × CA ad $\frac{1}{3}p \times$ CM. Permutando T : Θ = CA : $\frac{1}{3}p$. Q. E. D.

16. Hinc si capiatur recta CA æqualis arcui MFO, sive parti quartæ circuitûs circuli cujus radius est CM, corpus è loco M secundum rectam quæ sit ad perpendiculum cum radio CM emissum, eâ cum velocitate quam casu recto è loco A locum usque M adeptum esset, conversionem integram eodem temporis spatio per Spiras suas absolverit, quo corpus aliud in Circulo MQF.

17. Pars quarta conversionis integræ per Spiras, hoc est tempus, quo corpus per Spiras ab apside M centrum propius fuerit delatum quàm pro datâ quâvis distantiâ, ad tempus conversionis in Circulo rationem habebit eam quam CA ad totum circuli *MmF* circuitum. Nimirum cùm sit T : Θ = CA : $\frac{1}{4}p$, erit $\frac{1}{4}$T : Θ = CA : *p*.

Tempora casûs recti è locis datis centrum usque conferuntur cum temporibus in circulis.

18. Cùm verò, qualiscunque fuerit rectæ CA longitudo, ea temporibus proportio intercedat, ut sit tempus per Spiras ab apside M, propiorem usque datâ quâlibet à centro C distantiam, ad tempus conversionis integræ in Circulo *MmF*, ut recta CA ad circuitum circuli *MmF*; si recta CA paulatim decrescat, usquedum rectæ CM æqualis fiat, quo facto velocitas etiam corporis, è loco M secundum rectam quæ radium CM ad perpendiculum insistat emissi, paulatim decrescet, punctoque A in ipsum M translato ad nullam planè redigetur; tempus ultimum translationis de apside M centrum usque, per spiras in ipsam rectam *Mm* ultimò abeuntes, hoc est tempus casûs recti corporis, quod è loco M, nullâ vi insitâ præditum, casum occeperit, tempus inquam casûs recti hujus corporis, è loco M centrum usque, erit ad tempus conversionis in circulo *MmF* ut CM ad circuitum circuli *Mmo*, hoc est ut radius circuli ad circuitum.

Tempora definiuntur quibus casu recto data spatia absolvantur.

19. Tempora denique quibus casu recto rectæ MC partas datæ absolventur, si corpus è loco M nullâ vi insitâ præditum casum occeperit, hâc ratione definias. A puncto quovis G in rectâ CM educatur ad perpendiculum recta GH, quæ circulo, centro C, radio CM scripto, in H occurrat (fig. 9). Et à puncto H in radium CO, qui illum CM ad perpendiculum insistat, deducatur ad perpendiculum recta HK. Tempus casûs recti è loco M centrum usque C erit ad tempus casûs recti locum usque G ut CO ad CK; ad tempus autem casûs reliqui à loco G centrum usque, ut CO ad OK. Hæc autem ex eo patent, quòd si recta HG spiris quibuslibet hyperbolicis, quarum centrum C, apsides M, Q, in puncto P occurrat; tum si ponatur CΠ junctæ CP æqualis, eductâque ad perpendiculum ΠΦ, quæ circulo MFQ in Φ occurrat, si à puncto Φ in radium CO ad perpendiculum deducatur ΦΨ: tempus, quo conficietur Spirarum area quæ ab apside M initium sumens circa centrum C desinat, erit ad tempus quo conficietur area, quæ ab apside M initium sumens ad radium CP desinat, ut CO ad CΨ; ad tempus autem, quo conficitur area ejusdem spiræ à loco P centrum usque, ut CO ad OΨ (per ea quæ jam ante ostendimus § 12). Et cùm hæ sint temporum rationes, qualicunque Spiræ sint specie præditæ, hoc est, qualiscunque fuerit velocitas corporis per spiras lati in apsidi-

apside M; puta velocitatem illam infinitè minui, ut Spiræ, latitudine ipsarum infinitè imminutâ, in rectam MQ tandem abeant. Jam spiris in rectam illam abeuntibus, brachium totum MPC in radium totum MC abit; pars brachii MP in radii partem MG; pars reliqua, à puncto P centrum usque, in partem radii reliquam, GC. Tempus translationis per brachium MPC abit in tempus casûs recti è loco M centrum usque, corporis utique quod, nullâ vi insitâ præditum, casum è loco M occeperit; tempus translationis per MP in tempus casûs recti locum usque G; tempus translationis per spiram reliquam, à loco P centrum usque, in tempus ulterioris casûs recti è loco G centrum usque. Præterea, puncto Π cum puncto G conjuncto, punctum Ψ cum puncto K coibit. Ex quibus facilè consequuntur ea, quæ de temporibus casûs recti modò asseveravimus. CASUS SECUNDUS.

20. Tempus casûs recti è loco M centrum usque, corporis utique quod nullâ vi insitâ præditum casum è loco M occeperit, duplum erit temporis, quo corpus, quod à distantiis infinitis cecidit, ex eodem loco M centrum usque devenerit. Designetur enim tempus primum literâ T, tempus alterum hâc notâ ʾT. Tempus autem conversionis integræ in circulo, cujus radius CM, designetur literâ Θ; unde tempus translationis per quadrantem ejus circuli designabitur his notis, $\frac{1}{4}\Theta$. Erit autem T : Θ = CM : *p* (§ 18 hujus) est autem Θ : $\frac{1}{4}\Theta = p : \frac{1}{4}p$, et $\frac{1}{4}\Theta$: ʾT = $\frac{1}{4}p$: CM (§ 15 casûs superioris) ex æquo igitur T : ʾT = $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$ = 4 : 2 = 2 : 1. Q. E. D.

PARTIS PRIMÆ CASUS TERTIUS.

JAM verò è loco V, secundum rectam VG, (fig. 10) majore cum velocitate corpus intelligatur emitti, quam ea esset, quâcum corpus, viribus centralibus eisdem sollicitatum, in Circulo ferretur, cujus radius esset CV. Corporis igitur, è loco V, secundum rectam VG exeuntis velocitas major erit, quàm casu recto à distantiis infinitis locum usque V adeptum esset. Unde nonnulli, magni quidem viri, sed quibus durè loqui minùs certè quàm nobis odiosum erat, velocitatem eam vocârunt, quam in loco V corpus adeptum esset, quod à distantiis, si Diis placeat, plus quàm infinitis cecidisset. Exponatur autem recta *ed* [vid. fig. 11] datæ cujusvis longitudinis, cujus capiatur pars *dζ*, quæ habeat ad datam *de* rationem eam, quam velocitas corporis, circum centrum C per circulum cui radius CV lati, ad velocitatem quâcum corpus è loco V secundum rectam VG projectum est. Centro *e*, radio *ed*, scribatur circulus, cui in puncto *η* occurrat recta *ζη*, à puncto *ζ* ad perpendiculum educta. Tum junctâ CV (fig. 10) capiatur CA ejus longitudinis, quæ habeat ad CV rationem eam, quam *ζη* ad *eζ*. Et manentibus quæ ad Analysin casûs superioris lineavimus, intelligatur AB rectæ CA æqualis. Dataque CA vel AB designetur literâ *a*, data CV literâ *c*, indefinita CD literâ *y*. Jam è naturâ Curvæ BF invenietur DF, ut antè, $= \frac{a^4}{y^3}$. Unde DF × $-\dot{y} = \frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y}$. Quarum fluxionum fluentes sunt, alterius quidem area Curvæ BF ad ordinatam DF terminata, alterius verò spatium his notis designandum, $\frac{a^4}{2y^2}$. Hæc

PARS PRIMA. CASUS TERTIUS.

igitur ſpatia vel ſemper erunt inter ſe æqualia, vel alterum altero majus erit dato. Intelligatur recta CD fluxu continuo infinitè augeri. Jam ſpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$, rectâ CD, ſive y, infinite auctâ, in nihilum ultimò abibit. Haud item area Curvæ DF ad ordinatam mobilem DF terminata; ſiquidem rectæ, quæ poſſint areas Curvæ BF, ſint ut velocitates corporis caſu recto centrum C petentis; quapropter area in nihilum abire neſcit, niſi velocitate illâ ad nullam planè redactâ. Velocitas autem, quæ in dato loco V major fuit eâ, quam corpus caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum eſſet, aſcenſu quidem corporis minuetur uſque; ita tamen ut ad nullam nunquam planè redigatur, ne rectâ quidem CD vel infinitè auctâ. Vires enim centrales quicquid velocitatis in corpore cadente excitaverint, illud omne in aſcendente reſtinguent. Quod vero corpus, è loco V projectum, plus habuit quàm caſus infinitus genuiſſet, id aſcenſus ne infinitus quidem abolere poterit. Rectâ igitur CD infinitè auctâ, manebit corpori aſcendenti velocitas, quæ ad illam, quam in loco V habuit, rationem habebit eam, quam $\varepsilon\zeta$ ad $\varepsilon\delta$. Ac propterea area DF, puncto D in infinitum abeunte, ejus permanebit magnitudinis, quæ ad Curvæ aream datæ ordinatæ VL conterminam, rationem habeat eam, quam quadratum ex $\varepsilon\zeta$ ad quadratum ex $\varepsilon\delta$. Hoc igitur ſpatio, quod, ſpatio $\frac{a^4}{2y^3}$ in nihilum abeunte, areæ Curvæ remanebit; hoc, inquam, area illa ſpatium $\frac{a^4}{2y^3}$ ſemper exſuperabit. Literâ M ſignificetur ſpatium, ſpatio illi ultimò ſuperſtiti æquale. Area igitur, ad ordinatam mobilem CD terminata, his notis deſignanda erit, $M+\frac{a^4}{2y^2}$: id eſt, partibus duabus conſtabit quarum altera dato M, altera ſpatio his notis deſignato, $\frac{a^4}{2y^2}$, æqualis erit. Quare area, quæ ad datam ordinatam VL terminata eſt, his notis deſignanda erit, $M+\frac{a^4}{2c^2}$. Hoc eſt ſi capiatur CN, duarum CV, CA proportione tertia, area Curvæ, ad ordinatam VL terminata, æqualis erit ſpatio M dimidiâ parte quadrati ex CN aucto. Habet autem ſpatium M ad aream illam, ordinatæ VL conterminam, rationem eam, quam quadratum ex $\varepsilon\zeta$ ad quadratum ex $\varepsilon\delta$. Invertendo et dividendo, dimidium quadrati ex CN ad ſpatium M rationem habebit eam, quam illud quo quadratum ex $\varepsilon\delta$ exſuperat quadratum ex $\varepsilon\zeta$ ad quadratum ex $\varepsilon\zeta$. Hoc eſt, dimidium quadrati ex CN erit ad M ut quadratum ex $\zeta\eta$ ad quadratum ex $\varepsilon\zeta$. Verùm ut $\zeta\eta$ ad $\varepsilon\zeta$ ita facta eſt CA ad CV. Quare ut quadratum ex $\zeta\eta$ ad quadratum ex $\varepsilon\zeta$ ita erit quadratum ex CA ad quadratum ex CV. Quare dimidium quadrati ex QN erit ad M ut quadratum ex CA ad quadratum ex CV. (El. v. 11.) Sive propter continuam tribus illis CN, CA, CV proportionis convenientiam, ut quadratum ex CN ad quadratum ex CA. Cùm igitur ſit $\frac{1}{2}CN^2 : M = CN^2 : CA^2$, erit ſpatium M dimidium quadrati ex CA (El. v. 15.) ſive $M=\frac{1}{2}a^2$. Unde tandem area Curvæ BF, ad ordinatam mobilem DF terminata, his notis generaliter efferenda erit, $\frac{1}{2}a^2+\frac{a^4}{2y^2}$.

Hinc

ANALYSIS.

Hinc veniet $UQ=\sqrt{\frac{y^4+a^2c^2}{2c^2}}$; et $RS=\sqrt{\frac{a^4+a^2y^2}{2y^2}}$.

Sed ST ut antè $=\frac{q^2}{y}$. Unde $ST^2=\frac{2q^4}{2y^2}$. Unde $RT=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$.

Rectæ CA vel majori eſſe liceat quàm ea, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW, vel minori, vel ei denique æquale eſſe. Major erit, ſi talis ſit angulus CVG, vel QUW, ut quadratum è radio majus ſit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli cosinu rationem habeat rectæ CN+CV ad CV: Minor, ſi talis ſit angulus CVG, ut quadratum è radio minus ſit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli cosinu rationem, quam modo dixi, habeat: Æqualis, ſi talis ſit angulus, ut quadratum è radio ad quadratum ex cosinu ejus rationem illam ipſam, quam CN+CV ad CV, habeat.

Sit enim $R^2 : \overline{\text{cosin. QUW}}^2 = CN+CV : CV = CA^2+CV^2 : CV^2$. Ex eo quòd ſit $UQ^2=\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}$, erit $2UQ^2 : CA^2 = CA^2+CV^2 : CV^2$. Quare $R^2 : \overline{\text{cosin. QUW}}^2 = 2UQ^2 : CA^2$.

Sed $R^2 : \overline{\text{cosin. QUW}}^2 = 2UQ^2 : 2UW^2$, propter angulum ad W rectum. Quare $2UQ^2 : CA^2 = 2UQ^2 : 2UW^2$. Unde $CA^2 = 2UW^2$.

At verò ſi R^2 majus ſit, quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{cosin. QUW}}^2 = CN+CV : CV$, erit idem R^2 majus quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{cosin. QUW}}^2 = 2UQ^2 : CA^2$. Quare et $2UQ^2$ majus, quàm ut eſſe poſſit $2UQ^2 : 2UW^2 = 2UQ^2 : CA^2$. Quare $2UW^2$ minus erit quàm CA^2, ſive CA^2 majus quàm $2UW^2$. Et ſimili modo ſi ſit R^2 minus, quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{cosin. QUW}}^2 = CN+CV : CV$, oſtendetur CA^2 minus quàm $2UW^2$.

Primùm igitur talis ſit angulus CVG, ut quadratum è radio majus ſit, quàm quod habeat ad quadratum ex ejus anguli cosinu rationem eam, quam CN+CV ad CV. Ita major erit CA quàm ea, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW, et quadratum ex CA duplo quadrati ex UW majus. Sit b recta duarum CV, $\sqrt{CA^2-2UW^2}$ proportione media.

Itaque $b^2 = CV \times \sqrt{CA^2-2UW^2}$, et $b^4 = CV^2 \times \overline{CA^2-2UW^2} = CV^2 \times \overline{CA^2-2UQ^2+2QW^2}$.

At verò inventa eſt $UQ=\sqrt{\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}}$. Unde veniet $2UQ^2 \times CV^2 = CA^4+CA^2 \times CV^2$. Atque hinc rurſum $b^4=2CV^2 \times QW^2 - CA^4 = 2q^4-a^4$.

Ergo $a^2y^2-b^4=a^4-2q^4+a^2y^2$.

Cùm igitur inventa eſt $RT=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem $RT=\sqrt{\frac{a^2y^2-b^4}{2y^2}}$.

Hinc calculis ſicut in ſuperiore caſu ſubductis, veniet $Db=\frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$. Et $DC=\frac{CV^2 \times q^2}{y\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$.

Harum formularum poſteriore definitur Curva acX, quæ proinde in eodem genere eſt ac prior illa, per cujus quadraturam caſum ſuperiorem confecimus. Datâ igitur VD, dabitur area AVDC ope Tab. II. Claſſ. 4. Form. 1. è relatione nimirum quæ areæ illi cum areâ Sectionis cujuſdam Conicæ, poſitione

PARS PRIMA. CASUS TERTIUS.

sitione datæ, intercedat. Datâ autem areâ *avDc*, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut antè, dabitur. Assumptisque distantiis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvæ VIH puncta. Q. E. D.

COMPOSITIO CASUS III. PARTIS I.

[Fig. 12.]

In rectâ CV infinite producendâ capiatur CA ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam CA (fig. 10, lineatione eâ quam in analysi præcepimus definiendam) proportionem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB in fig. 10, et in fig. 12, à puncto C in rectâ CA ad perpendiculum educatur *Ce*, quæ junctæ CB fiat æqualis. Centro C semiaxibus CA, *Ce* scribatur Ellipsis.

Punctum V non erit extra hanc Ellipsin. Nempe cùm ea sit recta *b*, cujus quadratum rectangulo $CV \times \sqrt{CA^2 - 2VW^2}$ æquale sit, certè non majus erit quadratum ex illâ *b*, quàm rectangulum CV × CA. Non majus igitur quàm ut habeat ad quadratum ex CV proportionem eam, quam rectangulum CV × CA ad quadratum ex CV habet; sive eam quam recta CA ad rectam CV. Sed talis sumpta est recta CA (fig. 12) ut ad eam illa CA (fig. 10) proportionem habeat eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex CV. Habet igitur CA ad *C*a rationem eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex CV. Nom major igitur erit illa CA, quàm quæ habeat ad CA rationem illam quam CA ad CV. Invertendo, non minor erit CA, quam ut habeat illa ad CA rationem eam, quam CV ad eandem CA. Illa CA igitur non minor erit quàm CV. Punctum igitur V non erit extra Ellipsin. Recta igitur, à puncto V ordinatim ad axem CA ducta, Ellipsi occurret. Educatur VS, & Ellipsi in *S* occurrat. Sumatur in axe CA aliud quodvis punctum X, intra Ellipsin. Educatur X*r* ad axem CA ordinatim, quæ Ellipsi in *r* occurrat. Jungantur C*S*, C*r*. Centro C, radio CV, scribatur circulus. Ejus circuli capiatur sector V*cp*, qui ad sectorem ellipticum A*cr* rationem habeat eam, quam q^2, sive rectangulum CV × QW, ad quadratum ex CA. Ducatur recta *rt*, quæ Ellipsin in *r* contingens axi CA in *t* occurrat. In recta C*p* capiatur CP, quæ ad C*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex CA. Si è loco V secundum rectam VG (fig. 10) corpus quodpiam emissum fuerit, cum velocitate quâdam, quæ velocitatem corporis, motu suo circum centrum C in distantiâ CV circulum scribentis, superârit eâ ratione, quâ recta data *ed* (fig. 11) superet datam *dζ*: si hâc inquam velocitate corpus è loco V, secundum rectam VG emissum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam, in fig. 12, punctum P perpetuò tangit, per omnia similem et æqualem.

DEMONSTRATIO.

In figurâ quam ad analysin ornavimus, capiatur CD duarum CX, CV in figurâ modò scriptâ proportione tertia; exsistentibus illis CV utriusque figuræ inter se æqualibus. Circulus, centro C, radio CD scriptus, in fig. 10, curvo corporis tramiti in puncto I occurrat; reliqua verò maneant quæ ad analysin Problematis in hoc casu lineavimus. Capiatur β duarum CV, *b*, proportione tertia. Erit igitur quadratum ex CA ad quadratum ex C*e* (fig. 12) ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Id enim eodem modo, atque in casu superiore usi sumus, ostendi possit. Quare in Ellipsi, illud quo quadratum ex dimidio axe, CA, excsuperat quadratum ex CX erit ad quadratum ex ordinatâ X*r*, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β.

COMPOSITIO

Rursum in figurâ 10, juncta CB occurrat rectæ D*b* in M. Sumatur γ duarum CM, *b*, proportione tertia. Erit quadratum ex CX (fig. 12) ad quadruplum quadrati ex γ, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Id enim iisdem planè rationibus atque in casu superiore obtinebimus. Atqui ostensum est quadratum ex CA esse ad quadratum ex C*e* ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Illud igitur, quo quadratum ex CA excsuperat quadratum ex CX, erit ad illud, quo quadratum ex C*e* excsuperat quadruplum quadrati ex γ ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β; hoc est, ut idem illud quo quadratum ex CA excsuperat quadratum ex CX ad quadratum ex X*r*. Quadratum igitur ex X*r* illud ipsum erit, quo quadratum ex C*e* excsuperat quadruplum quadrati ex γ.

At verò illud, quo quadratum ex C*e* excsuperat quadruplum quadrati ex γ, hoc quadrati ex RT (fig. 10) quadruplum est. Namque, propter continuam tribus illis CM, *b*, γ, proportionis convenientiam, quadratum ex γ erit ad quadratum ex *b*, ut quadratum ex *b* ad quadratum ex CM, sive ad duplum quadrati ex CD. Ut verò quadratum ex *b* ad duplum quadrati ex CD ita est illud, quo dimidium quadrati ex CA excsuperat quadratum ex RT, ad quadratum ex *b*. Id enim declarant notæ illæ quas analysis nobis expromebat, $RT^2 = \frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}$; ex quibus utique efficietur $b^4 = \frac{1}{2}\overline{a^4 - RT^2} \times 2y^2$. Quadratum igitur ex γ ad quadratum ex *b* eandem quam illud, quo dimidium quadrati ex CA excsuperat quadratum ex RT, rationem habet; quadratum igitur ex γ æquale est ei, quo dimidium quadratum ex CA excsuperat quadratum ex RT. Et quadrato ex RT communiter addito; quadrata ex γ & ex RT simul sumpta dimidio quadrati ex CA æqualia erunt. Et quadrato ex γ communiter dempto, quadratum ex RT æquale erit ei, quo dimidium quadrati ex CA excsuperat quadratum ex γ. Ac proinde quadruplum quadrati ex RT æquale erit ei, quo duplum quadratum ex CA, hoc est, quo quadratum ex C*e* (fig. 12) excsuperat quadruplum quadrati ex γ. Eidem verò quadratum ex X*r* jam antè ostensum est æquale. Quadratum igitur ex X*r* quadruplum erit quadrati ex RT. Ex quo efficitur recta X*r*, ut in casu superiore, rectæ RT dupla.

Jam verò esse $\overline{CX}$, vel $\overline{AX}$, ad $\overline{CD}$ ut CX ad CD, ac propterea rectangulum $\overline{AX} \times rX$ ad $\overline{CD} \times rX$ ut CX ad CD, ea iisdem prorsus argumentis obtinebimus atque in casu superiore.

Porro ex eo quòd X*r* dupla sit rectæ RT, sequetur, ut antè, dimidium rectanguli

Pars Prima. Casus Tertius.

rectanguli CX × x*r*, hoc eſt triangulum CX*r*, rectangulo CX × RT æquale eſſe, et fluxionem trianguli fluxioni rectanguli eſſe æqualem. Rectanguli autem CX × RT latera CX, RT, contrà atque in caſu illo ſuperiore obtinuit, contrariè fluunt. Nempe cùm RT eodem modo fluat quo x*r*, cujus eſt ſemiſſis; rectæ autem x*r*, CX in Ellipſi contrariè fluant. Illis autem CX, RT contrariè fluentibus, fluxio rectanguli CX × RT, rectangulorum $\dot{CX} \times RT$, $CX \times \dot{RT}$ differentiæ æqualis erit. Erit autem rectangulum $\dot{CX} \times RT$ ad rectangulum $\dot{CD} \times RT$ ut CX ad CD; id enim eodem modo oſtendemus quo antè. Sed et rectangulum $CX \times \dot{RT}$ erit ad rectangulum $CD \times \dot{RT}$ ut CX ad CD. Quare $CX \times \dot{RT} - \dot{CX} \times RT$, ſive fluxio rectanguli CX × RT, hoc eſt, trianguli CX*r*, erit ad $CD \times \dot{RT} - \dot{CD} \times RT$ ut CX ad CD. Sed oſtenſum eſt rectangulum $\dot{AX} \times x r$, ſive fluxionem ſpatii Elliptici ax*r*, eſſe ad rectangulum $\dot{CD} \times x r$, ſive ad duplum rectanguli $\dot{CD} \times RT$, ut CX ad CD. Fluxiones igitur trianguli CX*r* ſpatiique elliptici ax*r* ſimul ſumptæ, ſive fluxio ſectoris elliptici C*ar* ad ſpatia illa $CD \times \dot{RT} - \dot{CD} \times RT$, $2\dot{CD} \times RT$ ſimul ſumpta, hoc eſt ad rectangula $CD \times \dot{RT}$, $\dot{CD} \times RT$ ſimul ſumpta, erit ut CX ad CD. Fluxio inquam ſectoris elliptici C*ar* ad ſummam rectangulorum $CD \times \dot{RT}$, $\dot{CD} \times RT$ rationem habet quam CX ad CD. Rectangulorum autem $CD \times \dot{RT}$, $\dot{CD} \times RT$ ſumma rectanguli $\overline{CD \times RT}$ fluxio eſt; nempe illis CD, RT eodem modò fluentibus. Nam CD contrario modo fluere atque CX oſtenſum eſt. Oſtenſum eſt etiam illam RT contrario modo fluere atque CX. Fluunt igitur CD, RT eodem modo, rectangulique CD × RT fluxio ſumma erit rectangulorum $CD \times \dot{RT}$, $\dot{CD} \times RT$. Fluxio igitur ſectoris elliptici C*ar* erit ad fluxionem rectanguli CD × RT, ut CX (fig. 12) ad (fig. 10) CD.

Cæterùm ex æquatione illâ quam analyſis nobis expromebat, $RT = \sqrt{\frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}}$, calculis ut in caſu ſuperiore ſubductis, veniet $\overline{CD \times RT} \times \frac{q^2 CV^2}{a^2 y^2} = DC \times \dot{y} = -\overline{AVDC}$. (Notis enim $DC \times \dot{y}$ deſignatur $-\overline{AVDC}$, ſive areæ AVDC fig. 10 decreſcentis fluxio.) Hoc eſt areæ AVDC fluxio ad contrariam rectanguli CD × RT fluxionem rationem habebit compoſitam è rationibus, ſpatii q^2, ſive rectanguli CV × QW ad a^2, ſive quadratum ex CA, quadratique ex CV ad quadratum ex CD. (Contrarias autem eſſe areæ AVDC rectangulique $\overline{CD \times RT}$ fluxiones ex eo patet, quòd creſcente CD rectangulum quoque creſcat, area decreſcat, et viciſſim).

Jam verò ex eo quòd fluxio areæ AVDC ad contrariam rectanguli CD × RT fluxionem rationem habeat è quibus modò diximus compoſitam, atque ex eo quòd fluxio rectanguli CD × RT ad ſimilem ſectoris elliptici A*cr* fluxionem rationem habeat quam CD ad CX, ſequetur fluxionem areæ AVDC ad contrariam ſectoris elliptici A*cr* fluxionem rationem habere quam CV × QW ad quadratum

quadratum ex CA. Conſequetur inquam eſſe $-\overline{AVDC}$ ad $\overline{Acr}$, ſive $\overline{AVDC}$ ad $-\overline{Acr}$, ut CV × QW ad quadratum ex CA. Id enim iiſdem planè argumentis probabitur, quibus in caſu ſuperiore oſtendimus fluxionibus ſimilibus areæ AVDC et ſectoris hyperbolici *car* rationem eam intercedere. Jam verò ſectorum A*cr*, *ecr* fluxiones ſunt ſemper æquales, ſed contrariæ. Hoc eſt $-\overline{Acr} = \overline{ecr}$, et viciſſim. Quare fluxio areæ AVDC erit ad ſimilem ſectoris elliptici *ecr* fluxionem ut CV × QW ad quadratum ex CA. Et cùm hæc data ſit fluxionum ratio, fluentibus etiam aut eadem intercedet, aut altera dato major erit quàm pro hâc ratione. (Geom. Flux. Prop. IV.)

Fluat igitur CD, (fig. 10) donec ipſi CV evadat æqualis. Jam ſector ellipticus (fig. 12) ſit *ecS*, area autem AVDC (fig. 10) in nihilum abierit. Quare ſector ellipticus *ecr* dato *ecS* ſemper major erit, quàm ut habeat ad aream AVDC rationem eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Sector igitur *Scr* (fig. 12) ad aream AVDC (fig. 10) ſive illi æqualem ſectorem circularem VCX rationem illam habet. Capiatur in fig. 12, ſector circularis VCſ, qui ad ſectorem ellipticum ac*S* rationem habeat eam, quam rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA. Punctum ipſum *f* erit ad Curvam, quam punctum P perpetuò tangit: id enim eodem modo probabitur quo in caſu ſuperiore. Jam verò cùm ſector ellipticus ac*S* ad ſectorem circuli VCſ, item ſector ellipticus A*cr* ad ſectorem circuli V*cp*, rationem habeat quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW; idcirco et ſector ellipticus *Scr* ad ſectorem circuli ſ*cp* eandem illam rationem habebit. Atque hinc efficitur, ut in caſu ſuperiore, ſectores circulares VCX figuræ decimæ et F*cp* hujus eſſe inter ſe æquales. Quare et anguli VCX, ſ*cp* inter ſe æquales erunt.

Porro oſtendentur CP, CI inter ſe æquales eodem planè modo atque in caſu ſuperiore. Et ſimili argumentatione Curvarum VK, FP radii omnes, qui cum primariis illis, CV, *cf*, angulos æquales faciant, oſtendentur inter ſe æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter ſe ſimiles et æquales. Q. E. D.

De naturâ Curvæ FP, *de Aſymptotis ejus et Apſidibus inveniendis; de temporibus etiam, quibus corpora data ejus ſpatia abſolvant, definiendis, et cum temporibus converſionum in circulis conferendis.*

§ I. DEFINITIO.

Puncta r et P *Ellipſeos Curvæque cognata dico.*

2. Capiatur ſector circularis VCN, qui ad Ellipſeos quadrantem A*ce* rationem illam habeat, quam rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA. Punctum Curvæ quod ellipſeos verticis ſecundi *e* ſit cognatum, in rectâ CN quærendum erit; ſiquidem puncto *r* in *e* tranſlato, punctum *p* in N tranſlatum erit, et radius C*p* cum illo CN congruet. At verò puncto *r* in *e* tranſlato, Aſymptotæ.

Conchoides

recta ct infinitè augetur. Quapropter infinitè augebitur etiam cp, quæ ad illam ct datam rationem habet. Punctum igitur Curvæ, puncti *e* cognatum, in infinitum abiit; hoc eſt, Curva pf infinitè quidem protenſa: rectæ cn nullibi occurret, quam tamen propiùs accedet quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ.

3. Si capiatur cm, duarum ca, cv proportione tertia, erit m punctum ubi Curva pf axi Ellipſeos *ca* occurret. Demonſtrabitur eodem modo quo § 3 caſûs ſuperioris.

Anguli Radiorum cum Curvâ.

4. Radius quiſque cp, à centro c Curvam uſque eductus, angulum cum curvâ faciet, qui ſimili lineatione, ac in caſu ſuperiore uſi ſumus, definiatur. Nimirum à puncto Ellipſeos cognato *r* ad axem *ca* deducatur *r*x ordinatim, quæ in puncto d media dividatur. In abſciſſâ cx capiatur x*g*, quæ habeat ad cx rationem eam, quam (in fig. 10) qw ad cv. Junctâ d*g*, angulus x*dg* æqualis erit ei, quo radius cp inclinatur ad Curvam. Demonſtratur eodem modo atque in caſu ſuperiore (vid. § 6 ſuperioris.)

Apſides.

5. Punctum m curvæ Apſis erit: demonſtratur ad modum § 8 caſûs ſuperioris.

6. Radio mobili cp circum centrum circumacto, et infinitè aucto, angulus inclinationis radii ad Curvam infinitè imminuitur; ſiquidem puncto *p* in n tranſlato, punctum *r* in ipſum verticem ſecundum *e*, punctum x in centrum Ellipſeos tranſlatum erit. Unde xd dimidio axi ſecundo æqualis facta fuerit; cùm illa cx, et quæ ad cx datam rationem habeat *g*x, in nihilum abierit.

Concholdum Ellipticarum Species Variæ.

7. Fiat angulus ncm angulo ncv æqualis, et capiatur cm æqualis rectæ cm. Rurſum fiat angulus nc*p* angulo nc*p* æqualis, et capiatur cp = cp. Punctum p erit ad novum quoddam Curvæ pf brachium, quod Aſymptotam habebit rectam cn, Apſidem verò punctum m. Et ſi fiat angulus vcn æqualis angulo vcn, et angulus vc*p* æqualis angulo vc*p*, et capiatur cp = cp, erit punctum p ad tertium Curvæ brachium, quod Apſidem habebit punctum m, Aſymptotam rectam cn. Curva igitur mpf, pro variâ quæ Ellipſin inter & Circulum vpm proportio interceſſerit, varias ipſa ſpecies induet; quarum hæ ſunt ferè ſimpliciſſimæ.

Primùm quidem, ſi Ellipſeos ad Circulum, adeoque quadrantis Ellipſeos ad quadrantem Circuli, ea ſit proportio, quæ quadrati ex ca ad rectangulum cv × qw, Curvæ figura erit qualem in 13ª ſcriptam vides. Quæ brachiis quatuor conſtat ſecundum communem Aſymptotam nn infinitè utrinque protenſis, Apſides autem duas habet ad rectam illam conſtitutas, quæ brachiorum aſymptotam communem ad perpendiculum decuſſat.

Si quadrans Ellipſeos ad ſemicirculum proportionem habeat quam ca² ad cv × qw, Curva figuram 14 induet; brachiis utique duobus conſtans, quæ tam Apſide quàm Aſymptotâ gaudent communi, et Apſidem in ipſâ Aſymptotâ conſtitutam habent.

Sin quadrans Ellipſeos ad Circulum integrum rationem habet quam ca² ad

ad cv × qw, Curva brachiis rurſum quidem duobus conſtabit, quæ Apſide et Aſymptotâ gaudebunt communibus, atque apſidem habebunt in Aſymptotâ conſtitutam. [Vide fig. 15.] Longè tamen diverſa erit hujus figura ab illâ ſuperiore; quippe cujus brachia niſi in Apſide communi nuſquam conveniant, cùm hujus brachia tribus omninò punctis. Nodorum autem unus ad ipſam Aſymptotam erit, duo reliqui æqualibus ab Aſymptotâ diſtantiis hinc inde remoti. Ellipticæ.

Generaliter autem ſi ſector Circuli, vcn, qui ad quadrantem Ellipſeos rationem habet quam cv × qw ad ca², ſi ille ad aream circuli totius rationem habeat quam numerus ad numerum; Curva brachiis conſtabit numero definitis, quarum duæ quælibet proximæ vel Aſymptotam vel Apſidem communem habent; eâ quidem lege ut Apſidis et Aſymptotæ communio alternis fiat. Nimirum ſi brachium primum et ſecundum Aſymptotam communem habuerint, ſecundo et tertio Apſis communis erit; tertio & quarto communis rurſum Aſymptotos, quarto & quinto Apſis; atque ſic deinceps. Brachia verò Curvæ, Apſides item et Aſymptotæ quot ſint, hâc ratione cognoſcatur. Habeat ſector circularis vcn ad aream totius circuli rationem eam, quam numerus *n* ad numerum *m*. Numeri verò *n*, *m*, minimi ſint omnium, qui proportione cum ipſis conveniant. Si numerus *m* ſit impar, Curva tot quidem Apſides habebit, Aſymptotas tot, bis tot brachia, quot ſint in numero 2*m* unitates, et in ſingulis Aſymptotis Apſides ſingulas habebit conſtitutas. Si par ſit numerus *m*, vel pariter vel impariter pari eſſe ei liceat. Si impariter par ſit numerus *m*, jam Curva totidem habebit brachia quot in numero *m*, Apſides autem totidem, totidem item aſymptotas, quot in dimidio *m* unitates; et Apſides ſingulas in ſingulis Aſymptotis conſtitutas. Si pariter par ſit numerus *m*, Curva brachia quidem, ſicut antè, totidem habebit quot ſunt in numero *m*; Apſides totidem quot in dimidio *m*; Aſymptotas autem haud plures quàm ſunt in quadrante numeri *m* unitates. Apſides autem in rectis conſtitutæ erunt, à centro ad perpendiculum cum Aſymptotis eductis. Quòd ſi ſector circularis vcn, qui ad quadrantem Ellipſeos rationem habeat quam cv × qw ad ca², nullum areæ totius circuli commenſum accipiat, ſive ad eam nullius numeri ad numerum rationem habeat, innumera erunt Curvæ brachia, innumeræ etiam Apſides et Aſymptotæ. Apſidum autem et Aſymptotarum communionem brachia Curvæ alternis ſemper accipient.

Quadratura Conchoidum Ellipticarum.

8. Ad quadraturam partium Curvæ f*p*, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, analyſis hanc æquationem expromebat; $db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}}$. Hinc $db \times \dot{y} = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}}\dot{y}$. Area igitur icv (fig. 10), vel pcf (fig. 12) $(= \overline{|db \times y|})$ ſpatio $\frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}$, ſive $\frac{q^2}{\sqrt{2} \times a}\sqrt{y^2 - \frac{b^4}{a^2}}$, vel æqualis erit, vel eo major minorve dato (Newton. Tab. Curv. I. Claſſ. iv. Form. 1.) idque qualiſcunque aſſumpta fuerit diſtantia cv (fig. 10) vel cf (fig. 12), modò datâ cm non ſit minor. Ponatur igitur cf (fig. 12) ipſi cm æqualis, ut fcp in aream mcp tranſeat, et angulus cvg in fig. 10 rectus fiat. Tum q^2 fiet cm × uq, et b^4 fiet cm × ca. Notæ autem $\sqrt{2} \times a$ rectam ce ſemper ſignificant.

Conchoides

nificant. Area igitur MCP ſpatio $\frac{CM \times UQ}{Ce} \sqrt{CP^2 - CM^2}$ vel æqualis, vel eo major minorve dato erit. Fluat y vel CP, donec ipſi CM evadat æqualis. Tum puncto P in ipſum M tranſlato, area MCP in nihilum abierit. In nihilum etiam ſpatium illud $\frac{CM \times UQ}{Ce} \sqrt{CP^2 - CM^2}$. Area igitur MCP ſpatio iſto, quod ſimul cum eâ in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur C radio CM (vid. fig. 16), ſcribatur circulus, qui rectæ ce in punctis O, o occurrat. Ad rectam ce applicetur rectangulum ez rectangulo CM × UQ æquale. Circulum modò ſcriptum in puncto M recta MΠ contingat. In illam MΠ, à circuli centro C, deducatur CΠ radio Curvæ CP æqualis. Et à puncto Π in rectam oo ad perpendiculum deducatur ΠΨ. Sector curvæ MCP rectangulo CZ × CΨ æqualis erit. Quæ autem brachio Curvæ MPf et Aſymptotâ ejus CN, infinitè protenſis, axeque CM intercluſa eſt area, ea quidem infinita erit.

Tempora movendi in Conchoidibus Ellipticis.

9. Tempora, quibus conficiuntur ſectores quilibet Curvæ, MCP, MCf, qui ab axe CM communiter incipientes ad radios CP, Cf terminantur, erunt inter ſe ut tangentes arcuum, quorum CP, Cf ſunt ſecantes pro radio CM. Corpus autem ab apſide M, vel alio quovis puncto f emiſſum, per brachium infinitum in ipſam aſymptotam ne infinito quidem tempore devenerit.

10. Corpus igitur, quod per harum Curvarum aliquam feratur, ad punctum unde primùm emiſſum fuerit, vel quod ſemel præterierit, nunquam redibit. Neque ex alio Curvæ brachio in aliud tranſibit, niſi forte à dato brachii alicujus puncto ita emiſſum fuerit, ut verſus apſidem curſum faciat. Ita enim apſidem illam prætergreſſum per brachium alterum deferetur, cui cum primo apſis illa communis eſt.

Velocitas motûs in Conchoidibus Ellipticis.

11. Velocitas corporis per Curvam lati, in loco quovis V (fig. 10) eſt ad velocitatem corporis, quod, urgentibus eiſdem viribus centripetis, circumagitur in circulo cujus radius CV, ut recta quæ poſſit quadrata ex CA, CV ſimul ſumpta ad rectam ipſam CA. Demonſtrabitur eodem modo quo § 13, caſus ſuperioris.

12. Si centro C, radio CM, ſcribatur circulus (fig. 17) qui rectæ ce, quæ radium CM ad perpendiculum inſiſtat, in O occurrat; velocitas corporis per Curvam lati, in apſide M, erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius CM, circumacti, ut AO ad CA.

Tempora tranſlationum per Conchoides Ellipticas conferuntur cum Temporibus converſionum in Circulis.

13. Tempus tranſlationis ab Apſide M ad locum quemvis Curvæ P ad tempus converſionis integræ in Circulo, cujus radius CM, rationem habebit compoſitam è rationibus tangentis arcûs ejus circularis, cujus ſecans eſt CP pro radio CM, ad integrum circuli circuitum, rectæque CA ad rectam CM.

A centro C in rectam MΠ, quæ circulum in Π contingat, deducatur CΠ illi CP æqualis. Et à Π in diametrum oo demittatur ad perpendiculum recta ΠΨ. Exponatur recta T datæ cujuſvis longitudinis. Sumatur alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus converſionis integræ per circulum, cujus radius CM, ad tempus tranſlationis ab apſide M in locum P per Curvam. Circuitus autem circuli, cujus radius CM, æqualis ſit rectæ p. Dico T ad Θ rationem habere eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ CΨ ad p, rectæque CA ad CM: ſive eam, quam rectangulum CΨ × CA ad rectangulum p × CM.

Ellipticæ.

Nam primùm quidem ſector curvæ MCP ad aream circuli, cujus radius eſt CM, rationem habebit eam, quam rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × AC. Id enim eiſdem planè rationibus efficiatur, quibus in caſu ſuperiore oſtendimus, aream illam omnem quam Spiræ intus habuere, eſſe ad aream circuli cujus radius CM, ut rectangulum T × AF ad rectangulum Θ × CA. Jam verò ſector Curvæ MCP æqualis eſt rectangulo CZ × CΨ (per § 8 hujus). Et area circuli, cujus radius CM, dimidium eſt rectanguli p × CM (per ea quæ demonſtravit Archimedes). Rectangulum igitur CZ × CΨ erit ad dimidium rectanguli p × CM, ſive ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Sed propter rectangulum CZ × ce rectangulo CM × UQ æquale (ita enim factum eſt) erit CZ ad UQ ut CM ad ce. Quare rectangulum CZ × CΨ erit ad rectangulum UQ × CΨ ut rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × ce. Permutando rectangulum CZ × CΨ erit ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM ut rectangulum UQ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × ce. At verò rectangulum CZ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Quare rectangulum UQ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × ce ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Permutando, rectangulum UQ × CΨ erit ad rectangulum T × AO ut rectangulum $\frac{1}{2}p$ × ce ad rectangulum Θ × CA. Invertendo, rectangulum T × AO ad rectangulum UQ × CΨ ut rectangulum Θ × CA ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × ce.

Præterea junctis OM, om, recta UQ ad AO rationem habet quam CA ad MO; ſecundum ea quæ è formulâ generali, $UQ = \sqrt{\frac{a^4 + a^2c^2}{2c^2}}$, ſuprà diſputavimus, poſito utique c = CM. At verò CA ad MO rationem habet quam ce ad Mm. Id enim eodem modo probare liceat, quo in caſu ſuperiore probavimus CA eſſe ad MF ut ce ad Mm. Quare UQ ad AO rationem habet quam ce ad Mm. (El. v. 11.) Quare et rectangulum UQ × CΨ ad rectangulum AO × CΨ rationem habet quam $\frac{1}{2}p$ × ce ad $\frac{1}{2}p$ × Mm, ſive ad p × CM. Cùm igitur ſit T × AO : UQ × CΨ = Θ × CA : $\frac{1}{2}p$ × ce, atque rurſum UQ × CΨ : CΨ × AO = $\frac{1}{2}p$ × ce : p × CM; ex æquo erit T ad CΨ ut Θ × CA ad p × CM. Quare et rectangulum T × CA erit ad rectangulum CΨ × CA, ut rectangulum Θ × CA ad rectangulum p × CM. Permutando, erit T ad Θ ut CΨ × CA ad p × CM. Q. E. D.

PARTIS PRIMÆ CASUS QUARTUS.

Jam verò in fig. 10, reliquis ut in caſu ſuperiore permanentibus, angulus CVG talis ſit, ut quadratum è radio ad quadratum ex coſinu ejus anguli illam ipſam rationem habeat quam CN + CV ad CV. Itaque recta CA æqualis erit ei, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW. Quadratum igitur ex CA duplum erit quadrati ex UW, ſive duplum ejus quo quadratum ex UQ exſuperat quadratum ex QW. Quadratum igitur ex CA, duplo quadrati ex QW auctum, duplo quadrati ex UQ æquale fiet. Hoc eſt $a^2 + 2QW^2 = \frac{a^4 + a^2c^2}{c^2}$. Unde $a^2c^2 +$

$2c^2QW^2$,

PARS PRIMA. CASUS QUARTUS. $2c^2qw^2$, sive $a^2c^2 + 2q^4 = a^4 + a^2c^2$. Unde rursum $2q^4 = a^4$, et $a^4 - 2q^4 = 0$.

Cùm igitur inventa est RT $= \sqrt{\frac{a^2 - 2q^4 + a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem RT $= \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Unde 2RT = CB. Quare $Db = \frac{q^2}{CB}$; hoc est, cùm sit $q^2 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$, et CB $= \sqrt{2} \times a$, $Db = \frac{1}{2}a$. Et $Dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y^2 \times CB} = \frac{CV^2 \times a}{2y^2}$.

Datâ igitur CD, dabitur sector circularis VCX per quadratum Curvæ, cujus ordinata his notis designatur, $\frac{CV^2}{2y^2} \times a$, existente abscissâ VD. Dato autem sectore VCX, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut antè, dabitur. Assumptisque distantiis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvæ VIK puncta.

COMPOSITIO CASUS QUARTI PARTIS PRIMÆ.

In rectâ CV fig. 18, capiatur distantia quævis CD. Capiatur CM, duarum CD, CV proportione tertia. Circuli, centro C radio CV scripti, capiatur sector VC*p*, dimidio rectanguli MV × CA æqualis. Quod ita fiat, si capiatur arcus V*p*, qui habeat ad rectam MV rationem eam quam data CA ad radium CV, et jungatur C*p*. Denique capiatur CP rectæ CD æqualis. Si corpus è loco V secundum rectam VG eâ cum velocitate, quam suprà posuimus, emissum fuerit, per Curvam feretur ejus quam punctum P perpetuo tangit per omnia similem et æqualem.

DEMONSTRATIO.

Fluxio sectoris VCP rectangulo $\dot{MV} \times \frac{1}{2}$CA æqualis est. Cùm verò CD sit ad CV ut CV ad CM, rectangulum CM × CD quadrato ex CV æquale erit. Sed datum est quadratum ex CV, propter latus CV datum. Rectangulum igitur CM × CD datum; cujus tamen latera, CM, CD, fluunt. Omnino igitur contrariè illa fluunt; atque eâ quidem lege, ut rectangula $\dot{CM} \times$ CD, $\dot{CM} \times -\dot{CD}$, sive $\dot{CM} \times \dot{VD}$, semper sint inter se æqualia. Erit igitur $\dot{CM} : \dot{VD}$ ut CM : CD. Rectangulum igitur $\dot{CM} \times \frac{1}{2}$CA erit ad rectangulum $\dot{VD} \times \frac{1}{2}$CA ut CM ad CD. Sed propter datam CV, fluxiones $\dot{CM}$, $\dot{MV}$ erunt inter se æquales. Rectangulum igitur $\dot{MV} \times \frac{1}{2}$CA rectangulo $\dot{CM} \times \frac{1}{2}$CA æquale erit. Quare $\dot{MV} \times \frac{1}{2}$CA, hoc est, fluxio sectoris VC*p*, erit ad $\dot{VD} \times \frac{1}{2}$CA ut CM ad CD. Jam in figurâ quam ad analysin ornavimus, ponatur CD æqualis ipsi CD hujus, existentibus etiam illis CV figuræ utriusque inter se æqualibus; et manente reliquâ omni istius figuræ lineatione, recta Dc habet ad $\frac{1}{2}$CA rationem eam quam quadratum ex CV ad quadratum ex CD. Id enim significant notæ illæ, quas analysis nobis exprimebat $Dc = \frac{CV \times a}{2y^2}$, hoc est

$Dc = \frac{VC^2}{2CD^2}$ CA. Quare et rectangulum $Dc \times \dot{VD}$, hoc est fluxio areæ AVDc, COMPOSITIO. erit ad rectangulum $\frac{1}{2}$CA × $\dot{VD}$ ut quadratum ex CV ad quadratum ex CD, sive ut recta CM ad rectam CD. Atqui ostensa est fluxio sectoris VC*p* esse ad idem rectangulum $\frac{1}{2}$CA × $\dot{VD}$ ut CM ad CD. Fluxiones igitur areæ AVDc fig. 10 sectorisque VC*p* fig. 18 inter se æquales erunt. Quare et fluentes vel æquales erunt inter se, vel altera alterâ dato major. Fluat CD ut ipsi CV æqualis fiat. Jam area AVDc in nihilum abierit. Et in nihilum etiam sector VC*p*. Puncto enim D in V translato, ut æquales sint CD, CV, æquales fient etiam CM, CV; punctum igitur M cum ipso V coierit, et recta MV in nihilum abierit. Quare et arcus V*p*, qui ad illam MV datam rationem habet, in nihilum etiam abierit; et cum illo sector VC*p*. Area igitur AVDc sectorque VC*p*, cùm simul in nihilum abierint, dato utique haud different. Erunt igitur inter se æquales. Quare et sector VCX fig. 10 sectori VC*p* fig. 18 æqualis. Radii autem CV inter se æquales. Anguli igitur VC*p*, VCX inter se æquales. Sed et CP, CI inter se æquales (ex constructione). Et simili argumentatione Curvarum V*p*, VK radii omnes, qui inter se sint æquales, angulos cum primariis CV æquales facient. Curvæ igitur illæ per omnia inter se similes & æquales sunt. Q. E. D.

De natura Curvæ VP, *perficiendâque ejus figurâ; de temporibus, quibus data ejus spatia absolvantur, definiendis, et cum temporibus conversionum per circulos conferendis.*

1. Si capiatur arcus VI rectæ CA æqualis, et jungatur CI, recta CI Curvæ Asymptotos. Asymptotos erit. Cùm enim, propter æquales VI, CA, sit arcus VI ad rectam CV, ut recta CA ad CV (ex construct.) et è naturâ Curvæ, arcus etiam V*p* ad MV ut CA ad CV, erit arcus VI ad rectam CV ut arcus I*p* ad rectam MC. Puncto igitur *p* in I translato, punctum M cum ipso C ultimò coierit, rectaque CM in nihilum abierit. Et cùm in omni situ puncti *p* rectangulo CM × CD sua constet magnitudo, nempe ut quadrato ex CV æquale sit, puncto *p* in I translato, rectâque CM in nihilum abeunte, recta CD, atque huic æqualis CP, infinita fiet. Q. E. D.

2. Radii curvæ angulorum, quos cum asymptotâ ipsi faciunt, rationem inter se contrariam gerunt. Cùm enim sit arcus IV ad CV ut arcus V*p* ad MV, erit arcus I*p* ad rectam CM ut arcus IV ad CV (El. v. 11.) hoc est ut CA ad CV. Est autem CM ad CV ut CV ad CD vel CP. Quare ex æquo erit I*p* : CV = CA : CP. Rectangulum igitur sub radio CP arcuque I*p* æquale est dato rectangulo CV × CA. Ac proinde radii CP, arcuum I*p*, sive angulorum IC*p*, contrariam inter se rationem gerunt. Q. E. D.

3. Curva V*p* gyris innumeris centrum cingit; quorum arctissimi, licet per centrum non transeant, propiùs tamen illud accedunt quàm pro datâ quâvis distantiâ. Nimirum hæc est Spira illa, quam, propter contrarias illas radiorum angulorumque rationes, nonnulli jure optimo Archimedeæ reciprocam vocârunt. Spira Archimedeæ Reciproca.

PARS PRIMA. CASUS TERTIUS.

4. Decreſcente radio mobili CP, angulus, quo radius ad Curvam inclinatur ſenſim augetur. Radioque illo infinitè imminuto, angulus ille ultimò recto æqualis erit: quaſi ſcilicet Curva apſidem in ipſo centro haberet conſtitutam. Nam radius eſt ad ſinum anguli illius, quo CP ad Curvam inclinatur, ut RS ad ST; hoc eſt, ut $\sqrt{a+y^2}$ ad $\frac{\sqrt{2}\times q^2}{a}$, ſive ut $\sqrt{CA^2+CP^2}$ ad $\frac{\sqrt{2}\times q^2}{CA}$: hoc eſt, cum $\sqrt{2}\times q^2$ quadrato ex CA æquale ſit, id enim ſuprà oſtendimus, ut $\sqrt{CA^2+CP^2}$ ad CA. Decreſcente igitur CP, minor fit ratio radii ad ſinum illum, ac proinde angulus ipſe major; donec illâ CP in nihilum abeunte, ratio radii ad ſinum in ipſam æqualitatem abierit, et angulus in recti amplitudinem creverit.

Apſis Spirarum in Centro.

Spiræ reciprocæ oppoſitæ.

5. Si in PC productâ capiatur punctum π, pari diſtantiâ atque ipſum P à centro remotum, ſed in partes contrarias, erit punctum π ad Curvam, Curvæ VPC per omnia ſimilem et æqualem ſed ſitu contrario, quæ rectam IC productam aſymptotam habet. Hæ Curvæ unius quidem figuræ brachia ſunt oppoſita; et Spiræ Reciprocæ Oppoſitæ haud ineptè dicendæ ſunt.

Motus per Spiras reciprocas.

6. Si corpus è loco v, ſecundum rectam VG, eâ cum velocitate emiſſum ſit, ut per Spiram VP deferatur; dato quodam tempore, cujus ſpatium quâ ratione definiatur mox docebo, propiùs quidem centrum acceſſerit quàm pro datâ quâvis diſtantiâ. Elapſo autem tempore illo, Spiram Oppoſitam invaſerit, cujus ductum ſequens neque infinito tempore in Aſymptotam ci deveniet; quam tamen propiùs accedet quàm pro datâ quâvis diſtantiâ; neque in Spiram VPC, per quam primùm delata eſt, unquam redibit.

Quadratura Spirarum reciprocarum.

7. Quadraturam partium Spirarum, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, ope hujus æquationis abſolvimus, quam analyſis expromebat; $Db=\frac{q^2}{CB}=\frac{a^2}{\sqrt{2}\times\sqrt{2.a}}=\frac{1}{2}a$. Hinc enim fluxio areæ $aVDb$ fig. 10, ſive ſectoris ſpirarum $VCP=Db\times\overline{VD}=\frac{1}{2}a\times\overline{VD}$. Quamobrem fluentes VCP, $\frac{1}{2}CA\times VD$ vel æquales ſunt inter ſe, vel altera alterâ dato major. Fluat CD, donec ipſi CV æqualis fiat; jam puncto D cum ipſo V coeunte, recta VD in nihilum abierit. Rectâ autem VD in nihilum abeunte, area $aVDb$, atque unà cum eâ ſector VCP, in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt quæ ſimul in nihilum abierint. Erunt igitur inter ſe æqualia. Sector inquam Spiræ VCP ſpatio $\frac{1}{2}CA\times VB$ æqualis erit.

Hinc ſpatium illud omne, quod Spiræ VPC infra locum v centrum uſque intus habent, hoc inquam ſpatium rectangulo $\frac{1}{2}CA\times CV$, ſive ſectori circulari ICV, inter punctum V & Aſymptotam Curvæ, æquale erit. Spatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ VIC, $v\pi c$ intra loca V, v, quæ æqualiter à centro hinc inde ſint remota, intus habent, hoc inquam ſpatium rectangulo $CA\times CV$, ſive duplo ſectoris circularis ICV, æquale erit.

Et ſi capiatur $cd=c\pi$, ſpatium illud, quod Spiræ Oppoſitæ inter loca v, π intus habent, $=\frac{1}{2}CA\times vd$.

8. Hinc tempus, quo corpus per has Spiras latum ſectorem VCP abſolverit

verit erit ad tempus, quo è loco v diſtantias à centro devenerit datâ quâvis minores, ut VD ad CV. Idem verò tempus erit ad illud, quo è dato loco v emiſſum ad oppoſitum v corpus tranſlatum fuerit, ut VD ad 2CV. SPIRA ARCHIMEDEÆ RECIPROCA.

Velocitas motus in Spiris Archimedeæ reciprocis.

9. Velocitas corporis per has Spiras lati, in loco quovis v, erit ad velocitatem corporis, viribus eiſdem circulum, radio CV, circum C ſcribentis, ut recta quæ poſſit quadrata ex CA, CV ſimul ſumpta ad rectam ipſam CA: hoc eſt, ſi circulus, centro C, radio CV ſcriptus, occurrat radio, qui illum CV ad perpendiculum inſiſtit, in puncto O, jungaturque AO, ut AO ad CA. Probanda ſunt hæc, iiſdem argumentis quibus § 11 & 12, caſûs ſuperioris.

Tempora movendi in Spiris Oppoſitis conferuntur cum temporibus convertionum in circulo.

10. Sectores Circuli VvO Spiræque Vv, qui motu corporum æquali tempore conficiuntur, erunt inter ſe æquales. Et qui ſunt æquales æquali tempore conficientur.

Sint VCN, VCP ſectores, Circuli ille, hic Spiræ, qui æquali tempore conficiuntur. Dico areas VCN, VCP eſſe inter ſe æquales. A centro C in rectam VG, quæ Spiras in puncto v contingit, deducatur ad perpendiculum recta CG. Sector VCP ad ſectorem VCN, qui æquali tempore conficitur, rationem habebit, quæ componitur è rationibus velocitatis corporis per ſpiras lati in loco v ad velocitatem corporis in circulo VvO circumacti, rectæque CG ad rectam CV. Nam hæc erit naſcentium prima ratio, et quæ naſcentium prima fuerit, ea ſemper inter illos manebit. Id enim eiſdem argumentis, quæ in § 10 caſûs primi uſurpavimus, probandum erit. Velocitas autem corporis per Spiras lati, in loco v, ad velocitatem corporis in Circulo VvO circumacti rationem habet quam AO ad CA (§ 10 hujus). Quare ſector ſpiræ VCP ad ſectorem circuli VCN rationem habet, quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CG ad CV. Sed propter angulum CVG angulo QVW (fig. 10) æqualem, angulóſque etiam ad G, W æquales, quippe quorum uterque rectus eſt; triangula CVG, QVW erunt inter ſe ſimilia, et CG erit ad CV ut QW ad QV; hoc eſt, ſecundum ea quæ in § 4 oſtendimus, ut CA ad AO. Ratio igitur quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CG ad CV, ea componetur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CA ad AO. Sector igitur ſpiræ VCP ad ſectorem circuli VCN rationem habet eam, quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CA ad AO. Sed hæc non alia eſt atque ipſa quidem æqualitas. Erit igitur ſector VCP ſectori VCN æqualis.

Rurſum ſi æquales ſunt ſectores VCP, VCN, dico eos æquali tempore confici. Sit enim vcn ſector quidam circuli VvO, qui æquali tempore conficiatur atque ſector ſpirarum VCP; cui proinde ille æqualis erit, ſecundum ea quæ modò oſtendimus. At verò ſector ſpirarum VCP ſectori circulari VCN æqualis eſt: ſic enim poſuimus. Sectores igitur circulares VCN, vcn inter ſe æquales. Æqualibus igitur temporibus conficiuntur (Prop. I. Lib. 1. Princip.) At verò vcn tempore ejus æquali, quo ſector ſpirarum VCP, conficitur. Quare et alter VCN tempore conficietur æquali ejus, quo ſector ſpirarum VCP. Q. E. D.

11. Sint V, v Spirarum Oppoſitarum loca à centro æqualiter remota. Tempus tranſlationis de loco V in locum v per Spiras ad tempus converſionis integræ in Circulo, cujus radius CV, rationem habebit eam quam dupla CA ad totius circuli circuitum.

PARS PRIMA. CASUS QUINTUS.

Spatium illud omne quod Spiræ Oppoſitæ inter loca V, v intus habent, duplo ſectori circulari VCI æquale eſt (§ 7 hujus). Tempus igitur tranſlationis de loco V in v per Spiras æquale eſt ei, quo corpus, quod per circulum feratur, confecerit duplum ſectorem VCI (§ 10 hujus). Ac proinde tempus tranſlationis de loco V in v per Spiras eandem ad tempus converſionis integræ in Circulo rationem habet, quam tempus, quo corpus in circulo confecerit duplum ſectorem illum VCI, ad tempus converſionis integræ; ſive eam, quam duplus ſector VCI ad aream totius circuli. Sed duplus ſector VCI ad aream totius circuli rationem habet eam quam duplus arcus VI ad totum circuitum; hoc eſt, cùm arcus VI rectæ CA factus fuerit æqualis, eam, quam dupla CA ad circuitum circuli VvO. Tempus igitur tranſlationis de loco V in v per ſpiras ad tempus converſionis integræ per circulum VvO rationem habet eam, quam 2CA ad circuli circuitum. Q. E. D.

CASUS QUINTUS PARTIS PRIMÆ.

RELIQUIS (in fig. 10) manentibus quæ priùs poſita ſunt, puta talem eſſe angulum CVG, ut quadratum è radio minus ſit quàm quod ad quadratum ex cosinu ejus anguli rationem habeat, quam GN+CV ad CV. Ita CA minor erit quàm recta, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW. Quadratum igitur ex CA minus erit quàm duplum quadrati ex UW. Sit b recta duarum CV, $\sqrt{2UW^2-CA^2}$ proportione media. Ita erit $b^2=CV\times\sqrt{2UW^2-CA^2}$. Et $b^4=CV^2\times 2UW^2-CA^2=CV^2\times 2UQ^2-2QW^2-CA^2$.

At verò inventa eſt $UQ=\sqrt{\frac{a^2+a^2c^2}{2c^2}}$. Unde veniet $2UQ^2\times CV^2=CA^4+CA^2\times CV^2$. Atque hinc rurſum $b^4=CA^4-2CV^2\times QW^2=a^4-2q^4$.

Cùm igitur inventa eſt $RT=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem $RT=\sqrt{\frac{b^4+a^2y^2}{2y^2}}$, et $2RT=\frac{\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}{y}$.

Hinc calculis ut antè ſubductis, veniet $Db=\frac{q^2\times y}{\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}$. Et $De=\frac{CV^2\times q^2}{y\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}$.

Curva igitur, cujus ordinata eſt De, in earum genere eſt per quarum quadraturas caſum ſecundum et tertium abſolvimus, et ſimilem quadraturam ipſa ſubitura eſt; et per hujus quadraturam, non modò punctum I. ſed et alia dabuntur, quot quis voluerit, Curvæ VIK puncta.

COMPOSITIO CASUS QUINTI.

In rectâ CV infinitè, ſi id opus ſit, producendâ (fig. 19), capiatur ea ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam CA (lineatione eâ quam in analyſi præcepimus definiendam) rationem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ b. Jungatur CB, fig. 10. Et à puncto C, fig. 19, ad perpendiculum cum rectâ CA educatur Ce, quæ rectæ CB fiat æqualis. Centro C, ſemiaxibus tranſverſo quidem Ce, ſecundo CA, ſcribatur Hyperbola. Huic hyperbolæ recta, à puncto V ad axem ſecundum CA ordinatim educta, in S occurrat, jungaturque CS. Sumatur

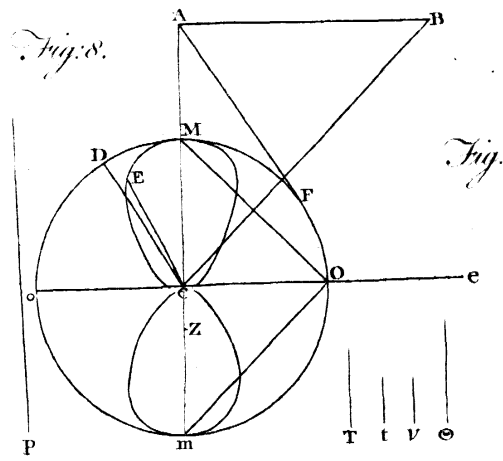


Fig. 8.

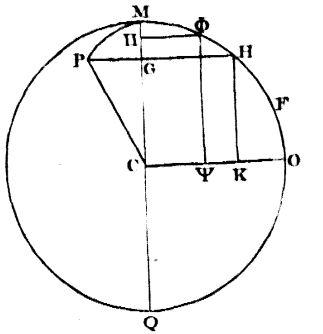


Fig. 9.



Fig. 14

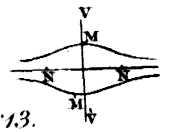


Fig. 13.

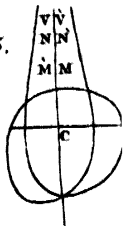


Fig. 15.

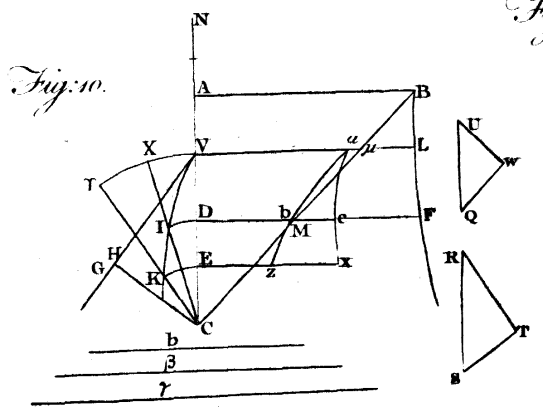


Fig. 10.

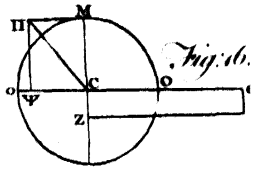


Fig. 16.

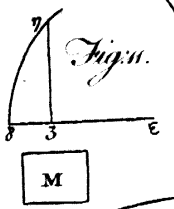


Fig. 11.

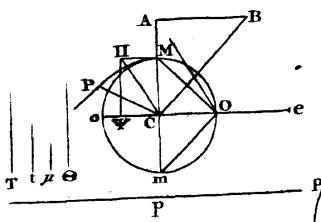


Fig. 17.

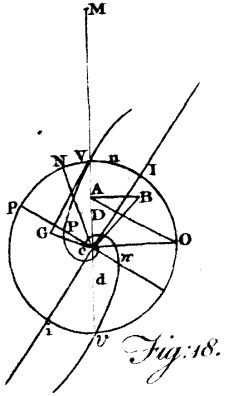


Fig. 18.

Fig. 12

matur in axe ca aliud quodvis punctum x. Educatur xr ad axem ca ordinatim, quæ hyperbolæ in r occurrat. Jungatur cr. Centro c, radio cv, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector vcp, qui ad ſectorem hyperbolicum, ecr, rationem habeat eam quam q^2, ſive rectangulum cv × qw, ad quadratum ex ca. Ducatur recta rt, quæ hyperbolam in r contingens axi ca in t occurrat. In rectâ cp capiatur cp, quæ ad ct eam rationem habeat, quam quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Si è loco v ſecundum rectam vg (fig. 10), corpus quodpiam emiſſum fuerit, cum velocitate quâdam, quæ velocitatem corporis, motu ſuo circum centrum c ad diſtantiam cv circulum ſcribentis, eâ ratione ſuperârit, quâ recta data ed (in fig. 11) ſuperat datam dζ: ſi cum hâc inquam velocitate corpus è loco v ſecundum rectam vg emiſſum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam punctum p in fig. 19 tangit, per omnia ſimilem & æqualem. Compositio.

DEMONSTRATIO.

In figurâ 10, quam ad analyſin ornavimus, capiatur diſtantia cd, duarum cx, cv figuræ modò ſcriptæ, id eſt, 19*, proportione tertia; exiſtentibus utique illis cv utriuſque figuræ inter ſe æqualibus. Jam rectam xr rectæ rt duplam eſſe, id ſimiliter planè ac in caſu ſecundo & tertio oſtendendum. Tum etiam $\dot{\overline{cx}}$ eſſe ad $\dot{\overline{cd}}$ ut cx ad cd. Unde ſequetur etiam rectangulum $\dot{\overline{cx}} \times xr$, ſive fluxionem ſpatii hyperbolici ecxr, eſſe ad rectangulum $\dot{\overline{cd}} \times xr$ ut cx ad cd. Rurſus fluxionem trianguli cxr fluxioni rectanguli cx × rt æqualem eſſe, id quoque ſicut antè patet. Unde eiſdem planè argumentis ac antè efficietur, fluxionem trianguli cxr eſſe ad rectangula $\dot{\overline{cd}} \times rt$, $cd \times \dot{\overline{rt}}$ ſimul ſumpta ut cx ad cd. Sed fluxio ſpatii hyperbolici ecxr ad rectangulum $\dot{\overline{cd}} \times xr$, ſive $\dot{\overline{2cd}} \times rt$, oſtenſa eſt rationem habere quam cx ad cd. Quare $\dot{\overline{cx}}r - c\dot{\overline{cx}}r$, hoc eſt $-\dot{\overline{ecr}} : cd \times \dot{\overline{rt}} - \dot{\overline{cd}} \times rt = cx : cd$. Hoc eſt, fluxio ſectoris hyperbolici ecr ad contrariam rectanguli cd × rt fluxionem rationem habebit eam, quam cx ad cd. Aream autem hyperbolicam ecr atque rectangulum cd × rt modis contrariis fluere, inde patet, quòd area hyperbolica ecr eodem modo fluit quo recta cx; rectangulum autem cd × rt eodem modo quo recta cd: primum enim exigit hyperbolæ natura; alterum, æquatio illa $rt \times cd = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$. Rectæ autem cx, cd, quæ datum ſpatium comprehendunt, modis inter ſe contrariis fluunt.

Jam verò cùm ex eo quòd ſit $rt = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2y^2}}$ veniat $rt \times cd = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$, erit $\dot{\overline{rt \times cd}} = \frac{a^2y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$.

Unde $\dot{\overline{rt \times cd}} \times \frac{q^2 cv^2}{a^2y^2} = \frac{q^2 cv^2}{y\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}\dot{y} = dc \times -\dot{\overline{vd}}$.

Fluxio igitur areæ avdc (fig. 10) ad contrariam rectanguli rt × cd fluxionem rationem habebit compoſitam è rationibus ſpatii q^2 ad quadratum ex ca, quadratique ex cv ad quadratum ex cd. Jam verò ex eo quòd area avdc ad

PARS PRIMA. CASUS QUINTUS.

contrariam rectanguli RT × CD fluxionem rationem habeat ex quibus modò diximus compoſitam; atque ex eo quòd fluxio rectanguli RT × CD ad contrariam ſectoris hyperbolici *ecr* (in fig. 19) fluxionem rationem habeat, quam CD ad CX; efficietur ut antè fluxionem ſpatii *avDc* ad ſimilem ſectoris hyperbolici *ecr* fluxionem rationem habere eam, quam CV × QW ad quadratum ex CA. Unde rurſum ſequetur ſectorem hyperbolicum *ecr*, dato *ecS* majorem eſſe quàm ut habeat ad *avDc*, ſive ſectorem circularem VCX, rationem eam quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Habebit igitur ſector hyperbolicus *Src* (fig. 19) ad ſectorem circularem VCX (fig. 10) rationem eam quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW.

Circuli CV*p* (in fig. 19) capiatur ſector V*cf*, ad quem ſector hyperbolicus *ecS* rationem habeat quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Punctum *f* erit ad Curvam, ad quam eſt punctum P. Id enim ſicut antè oſtendetur. Et cùm ſit ſector hyperbolicus *ecr* ad ſectorem circuli V*cp*, ut quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW (ita enim factum eſt) et ſector hyperbolæ *ecS* ad ſectorem circuli V*cf* ut quadratum ex CA ad CV × QW (nam id quoque factum eſt) idcirco erit ſector hyperbolæ *Scr* ad ſectorem circuli *fcp* ut quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW; id eſt ut ſector idem hyperbolæ *Scr* ad ſectorem circularem VCX in figurâ 10. Sectores igitur circulares VCX iſtius figuræ 10, *fcp* hujus 19, erunt inter ſe æquales. Quare propter radios C*f*, CV inter ſe æquales, anguli quoque VCX inter ſe æquales erunt. Jam verò rectas illas CP, hujus figuræ 19ª, ipſis CI iſtius 10ª æquales eſſe, id eodem planè modo ac antè oſtendendum erit. Et ſimili argumentatione alii omnes Curvarum VI, *f*P radii, qui cum primariis CV, C*f* angulos æquales faciunt, oſtendentur inter ſe æquales. Curvæ igitur per omnia inter ſe ſimiles erunt & æquales. Q. E. D.

De Naturâ Curvæ fP *perficiendâque ejus figurâ, &c.*

DEFINITIO.

Puncta r, p Hyperbolæ Curvæque cognata dico.

2. Curva *f*P gyris innumeris centrum cingit, quorum arctiſſimi propiùs centrum acceſſerint quàm pro datâ quâvis diſtantiâ.

Aſymptota. 3. Curva *f*P rectam Ca, infinitè protenſam, Aſymptotam habet. Cùm enim ſector circuli *f*CV ſit ad ſectorem hyperbolæ *Sce* ut CA² ad CV × QW, tranſlato puncto *p* in V, punctum *r* cum *e* jungetur, & radius C*p* cum radio CV. Quare punctum illud Curvæ, quod puncti *e* ſit cognatum, in rectâ CV quærendum erit. At verò puncto *r* in *e* tranſlato, punctum X cum centro C coierit, & recta CX in nihilum abierit. Quare recta CD, vel illi æqualis CP, finitam omnem longitudinem exſuperabit. Q. E. D.

4. Scribatur hyperbola *ρεμ* hyperbolæ *r*eM oppoſita. Si capiatur circuli *pvv* ſector VC*π*, ſectori V*cp* æqualis, et in radio C*π* pars C*φ*, radii C*p* parti CP æqualis; punctum *φ* ad Curvam erit, Curvæ *f*P per omnia ſimilem & æqualem, ſed ad contrariam partem axis Ca: quæ quidem eodem modo ex ſemihyperbolâ oppoſitâ *ερ* formari poſſit, quo formata eſt *f*P ex ſemihyperbolâ *er*. Quòd ſi in diametris *pp*, *mπ* capiantur CP, C*φ* rectis CB, C*φ* æquales,

æquales, ad contrarias partes centri C; puncta 'P, '*φ* erunt ad Curvas, earum quibus inſunt P, *φ*, per omnia ſimiles & æquales, ſed à contrariâ parte centri ſitas: quæ quidem ex ſemihyperbolis eM, *ε*μ eodem planè modo formari poſſint, quo priores illæ ex ſemihyperbolis, *er*, eM. Hæ Curvæ unam quandam figuram conſtituere cenſendæ, ſicut ſemihyperbolæ, ex quibus formantur unam: et Spiræ Hyperbolicæ Secundæ haud immerito vocari poſſunt. SPIRÆ HYPERBOLICÆ SECUNDÆ.

5. Perfecta igitur figura quatuor conſtat brachiis, quorum duo, ab alterâ parte centri infinitè proſerpentia, aſymptotâ gaudent communi Ca; ab alterâ parte duo, aſymptotâ C*α*.

6. Si rectæ CX capiatur pars X*g*, quæ ad totam CX rationem habeat quam recta QW (fig. 10) ad rectam CV, & à puncto *g* ad punctum *d*, quod rectam X*r* mediam dividat, ducatur *gd*; angulus *gd*X inclinatio erit radii CP ad Curvam, exſiſtentibus utique punctis, *r*, P, Hyperbolæ Curvæque cognatis. Probatur eodem modo quo § 6 caſûs ſecundi. Anguli Radiorum cum Curvâ.

7. Per a, ſemiaxis hyperbolæ ſecundi verticem, ducatur recta a*k* cum axe tranſverſo parallela, quæ aſymptotarum alteri in *k* occurrat. Recta a*k* media dividatur in puncto *l*. Capiatur a*q*, quæ ad ſemiaxem ſecundum Ca rationem habeat eam, quam QW ad CV, et jungatur *ql*. Angulus, quo radius quilibet Spirarum CP ad Curvam inclinatur, angulo *qla* minor erit. Sed radio mobili CP circum centrum C circumacto, & infinitè imminuto, angulus inclinationis ille uſque augebitur; ut ad æqualitatem dati *qla* propiùs tandem accedat quàm pro datâ quâvis differentiâ. Probatur ut § 17 caſûs ſecundi. Angulus Maximus.

8. Hæ ſpiræ Apſidem nullam habent. Radio enim CP infinitè imminuto angulus inclinationis maximus evadit; recto tamen minor eſt, utpote acuto *qla* æqualis. Radio autem CP infinitè creſcente angulus ille uſque minuetur, ut ultimò omni acuto rectilineari minor fiat.

9. Si corpus è loco *f*, in alterâ Spirarum dato, ſecundum rectam quæ Spiram ibi loci contingat, eâ cum velocitate emiſſum fuerit, ut per Spiram illam deferatur, intra certum quoddam temporis ſpatium, quod quantum ſit futurum mox definire docebo, propiùs centrum C delatum fuerit quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ. Elapſo autem tempore illo, oppoſitum Spiræ brachium, ad contrarias axis centrique partes, invaferit, cujus ductum ſequens infinitas uſque longinquitates à centro abibit. Motus in Spiris Hyperbolicis Secundis.

10. Ad quadraturam partium harum Spirarum, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, hanc nobis æquationem analyſis expromebat. $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$. Hinc D*b* × −*ẏ*, ſive fluxio areæ *avDb*, $= -\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$. Quadratura harum Spirarum.

Quare area *avDb* unà cum fluente fluxionis $\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$ dato cuidam ſpatio æqualis erit.

Sed fluens fluxionis $\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$ erit $\frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}$ (per TAB. Newton. II. Claſſ. IV. Form. 1.) $= \frac{q^2}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2} = \frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2}$. Quare *avDb* + $\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2}$ dato cuidam ſpatio æquale erit. Poſitâ igitur CD ſive $y = CV$, ut

area

Spiræ Hyperbolicæ Secundæ.

area $avDb$ in nihilum abeat, veniet $\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+cv^2}$ dato isti æquale. Hinc area $avDb$, sive sector fcp, $=\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+cv^2}-\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+cd^2}$. Positâque y, sive cd, $=0$, area fpc à loco f centrum usque $=\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+cv^2}-\frac{b^2}{a}$. Et area pc, à loco p centrum usque, $=\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+cd^2}-\frac{b^2}{a}$. Vel pro b^4 scripto $\gamma^2\times cm^2$, sive $2\gamma^2\times cd^2$, area $pc=\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{2\gamma^2\times cd^2+a^2cd^2}{a^2}}-\frac{\gamma\times\sqrt{2}.cd}{a}=\frac{q^2\times cd}{Ce\times ca}\sqrt{2\gamma^2+a^2}-\sqrt{2}\times\gamma$. Cujus æquationis hæc erit constructio.

Constituatur triangulum $\Gamma\gamma\zeta$ angulo ad γ recto, lateribus $\Gamma\gamma$, $\zeta\gamma$ rectæ γ singulatim æqualibus (vid. fig. 20). A puncto Γ ad perpendiculum educatur $\Gamma\alpha$, rectæ ca æqualis; et jungatur $\alpha\zeta$, & ab $\alpha\zeta$ auferatur $\zeta\delta$ rectæ $\Gamma\zeta$ æqualis. Ad rectam ce (fig. 19) vel cb (fig. 10) applicetur rectangulum spatio dato q^2 æquale, et latus applicati sit n. Capiatur m quæ sit ad n ut cd ad ca. Rectangulum $m\times\delta\alpha$ spatio pc æquale erit.

Velocitas in his Spiris.

11. Si circulus, centro c, radio cv scriptus, rectæ ce, quæ illam cv ad perpendiculum insistit, in o occurrat, & jungatur ao; velocitas corporis per Spiras lati in loco f erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius cf, ut ao ad ca. Ostendetur ut § 12 casûs 3.

Tempora movendi per Spiras Hyperbolicas Secundas.

12. Hinc tempus, quo corpus è loco Spirarum f distantiam à centro datâ quâvis minorem delatum fuerit, ad tempus conversionis integræ in Circulo rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus radii ad integrum circuli circuitum, rectangulique $uq\times\delta\alpha$ ad rectangulum $ao\times cb$. Et si capiatur illius $\delta\alpha$ magnitudo illa, quam, angulo quw infinitè imminuto, ultimò ea adepta fuerit, quando angulus ille ad nihilum redactus fuerit, ita tempus casûs recti definieris, à loco f centrum usque; corporis utique quod è loco f, secundum rectam ipsam fc, eâ cum velocitate dejectum fuerit, quâcum secundum rectam, Spiras in loco f contingentem, projici illud oporteat, ut per Spiras deferatur. Cæterùm ultima illa rectæ $\delta\alpha$ magnitudo hæc erit; $\sqrt{2}\times uq-\sqrt{2uq-ca^2}$.

PROBLEMATIS GENERALIS.

PARS SECUNDA.

Pars Secunda.

Jam verò vires centrales in earum genere sint, quæ fugam centri corporibus inducant.

E dato loco v (fig. 21) secundum rectam vg positione datam, emissum puta corpus quodpiam, datâ cum velocitate. Oportet definire Curvam, per quam corpus illud deferetur, si viribus centrifugis urgeatur, quæ centrum c respiciant, & rationem triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servent.

Factum puta, et sit vk Curva illa quam definire suscepimus. Detur punctum a, unde si corpus, nullâ vi insitâ præditum, propellentibus viribus

ribus centrifugis, ascensum rectâ accepisset, velocitatem in loco v adeptum esset, ejus æqualem quâcum è loco illo v secundum rectam vg exire gestit. Et manentibus quæ ad demonstrationem nostram Prop. xli. Libri Primi Principiorum à nobis lineata sunt, intelligatur recta ab ejus lineationis rectæ ca æqualis esse. Dataque recta ca vel ab designetur literâ a, data cv literâ c, indefinita cd literâ y. Jam cùm è natura Curvæ bf, df sit ad ab ut vis centralis in loco d ad vim centralem in loco a, hoc est, ut cubus ex ca vel ab ad cubum ex cd, erit $df=\frac{AB^3}{CD^3}\,ab=\frac{a^4}{y^3}$. Ergo $df\times\dot{y}=\frac{a^4}{y^3}\dot{y}$. Harum verò fluxionum sunt fluentes, alterius quidem area badf; alterius, spatium $-\frac{a^4}{2y^2}$: ubi id significat signum —, spatium $\frac{a^4}{2y^2}$ areamque badf æqualiter quidem sed contrariè fluere. Area igitur badf, spatio $\frac{a^4}{2y^2}$ auctum dato cuidam spatio æquale erit. Decrescat recta cd usquedum illi ca æqualis fiat; coeunte puncto d cum illo a, area badf in nihilum abierit, spatium autem $\frac{a^4}{2y^2}$ dimidio quadrati ex ca æquale fiet. Totum igitur illud $badf+\frac{a^4}{2y^2}$, in hoc situ puncti d, dimidio quadrati ex ca æquale erit. Quare dimidium quadrati ex ca est datum illud, cui $badf+\frac{a^4}{2y^2}$ semper est æquale. Quare $badf+\frac{a^4}{2y^2}=\frac{1}{2}a^2$. Hinc bavl, sive $uq^2=\frac{1}{2}a^2-\frac{a^4}{2c^2}$, et $uq=\sqrt{\frac{a^2c^2-a^4}{2c^2}}$. $rs=\sqrt{\frac{a^2y^2-a^4}{2y^2}}$. Sed $st=\frac{q^2}{y}$. Quare $st=\frac{2q^2}{2y^2}$. Et $rt=\sqrt{\frac{a^2y^2-a^4-2q^4}{2y^2}}$. Ex eo quòd inventum est $uq^2=\frac{1}{2}a^2-\frac{a^4}{2c^2}$, manifestum est quadratum ex ca majus esse quàm duplum quadrati ex uq. Majus itaque quàm duplum quadrati ex uw; nempe cùm quadratum ex uw quadrato ex uq majus esse nesciat. Sit igitur b datarum cv, $\sqrt{ca^2-2uw^2}$ proportione media. Erit igitur $b^2=cv\times\sqrt{ca^2-2uw^2}$ et $b^4=cv^2\times\overline{ca^2-2uw^2}=cv^2\times\overline{ca^2-2uq^2}+2qw^2$. Sed ex eo quòd sit $uq^2=\frac{c^2a^2-a^4}{2c^2}$, efficitur $2cv^2\times uq^2=\overline{cv^2\times ca^2}-ca^4$. Unde rursum $b^4=ca^4+cv^2\times qw^2=a^4+2q^2$.

Hinc rt, quæ inventa est $=\sqrt{\frac{a^2y^2-a^4-2q^4}{2y^2}}$, eadem inquam $rt=\sqrt{\frac{a^2y^2-b^4}{2y^2}}$. Unde, calculis ut in superioribus subductis, veniet $dc=\frac{q^2\times y}{\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$. Et

$$dc=\frac{q^2\times cv^4}{y\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$$

Curva igitur, cujus ordinata dc, in eodem genere est in quo priores illæ, per quarum quadraturas Casum 2, 3 & 5 Partis Primæ absolvimus. Et per similem hujus Curvæ quadraturam, casus ille Problematis, de quo nunc agitur, conficiatur.

Analysis.

COMPO-

PARS SECUNDA. COMPOSITIO.

COMPOSITIO PARTIS SECUNDÆ.

In rectâ CV (fig. 22) infinitè ſi id opus ſit producendâ, capiatur CA, quæ habeat ad rectam AB, ſeu CA (fig. 21) proportionem eam quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB; et à puncto C ad perpendiculum cum rectâ CA educatur C*e*, quæ illi CB fiat æqualis. Centro C, ſemiaxibus CA, C*e*, ſcribatur Ellipſis A*s*e. Punctum V non erit extra hanc Ellipſin. Id enim eodem modo oſtendetur, quo oſtenſum eſt punctum V, in compoſitione caſûs Secundi Partis Primæ, non eſſe extra hyperbolam cujus ope caſum eum compoſuimus.

Recta igitur à puncto V ordinatim cum axe CA educta Ellipſi occurret. Educatur V*s*, & ellipſi in *s* occurrat.

Sumatur in axe CA aliud quodvis punctum X intra ſectionem. Educatur X*r* cum axe CA ordinatim, quæ ellipſi in *r* occurrat. Jungantur C*s*, C*r*. Centro C, radio CV, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector VC*p*, qui ad ſectorem ellipticum AC*r* rationem habeat eam, quam rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA. Ducatur recta *rt*, quæ, ellipſin in *r* contingens, cum axe CA in *t* conveniat. In rectâ C*p* capiatur CP, quæ ad C*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex CA. Si è loco V ſecundum rectam VG corpus quodpiam emiſſum fuerit, eâ cum velocitate quam in loco V adeptum eſſet, ſi è loco A nullâ vi inſitâ præditum, propellente vi centrifugâ, aſcenſum rectâ occepiſſet: hoc corpus feretur per Curvam, ejus, quam punctum P perpetuò tangit, per omnia ſimilem & æqualem.

Cor. Si recta X*r* media dividatur in puncto *d*, capiaturque *g*X quæ ad XC rationem eam habeat, quam QW ad CV; junctâ *gd*, angulus *gd*X ei erit æqualis, quo radius CP ad Curvam inclinatur.

2. Si in axe CA capiatur CM, duarum CA, CV proportione tertia, punctum M erit Apſis curvæ *ſ*P.

3. Si circuli, radio CV ſcripti, capiatur ſector VCN, qui ad quadrantem ellipſeos rationem habeat eam, quam rectangulum CV × QW ad quadratum ex CA; recta CN Curvæ M*ſ*P Aſymptotos erit.

Curvarum autem, quæ ex Ellipſi A*s*r, quo præcepimus modo, formari poterunt, ſicut et earum quas ad compoſitionem caſûs tertii Partis 1ª. formare docuimus, ſpecies ſunt innumeræ, pro variâ ratione quam ſector circularis VCN ad aream totius circuli habere poſſit. Perfecta enim Curvæ M*ſ*P figura brachiis conſtat pluribus, quorum vel certus erit numerus, vel innumera erunt, prout ſector ille aliquem cum areâ totius circuli numerorum commenſum habeat, neve habeat. Apſides autem & Aſymptotæ, quæ brachiis proximis alternè erunt communes, ſimili prorſus lineatione ac in caſu illo tertio partis ſuperioris definiendæ erunt. Reverâ hiſce Curvis cum illis prioribus arctiſſima cognatio intercedit. Nec aliâ ferè re diſſimiles ſunt, præterquam quòd illæ partes ſuas concavas, hæ convexas, centro Ellipſeos obvertunt.

Tædium credo legentibus afferrem, ſi hiſce demonſtrandis immorarer: ſiquidem demonſtrandi ratio neminem, cui ſuperiora intellecta ſunt, latere poſſit.

FINIS.

UNIVERSITÀ CATTOLICA S. CUORE
BRESCIA
BIBLIOTECA
numero 100532
dono
cambio
data

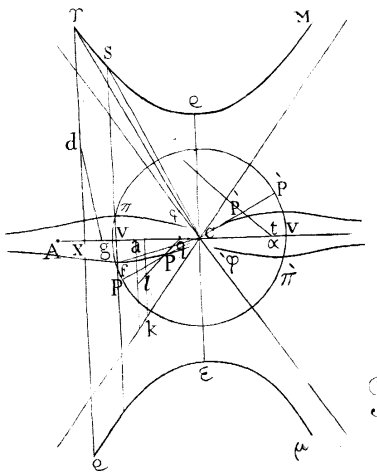


Fig. 19.

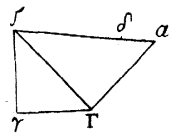


Fig. 20.

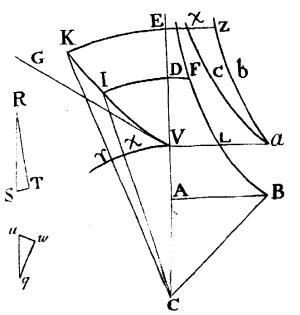


Fig. 21.

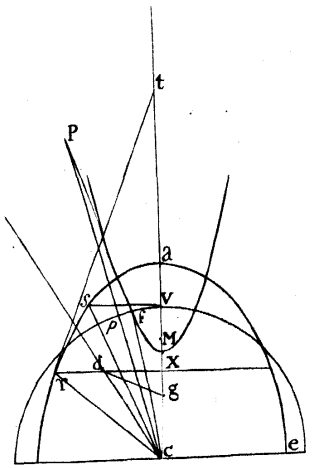


Fig. 22.



FA 7 A 222-IV

OPERUM NEWTONI.

TOMUS QUARTUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

TOM. IV.

LONDINI:
EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXXII.

IN HOC TOMO CONTINENTUR

I. *Opticks*, Pag. 1

II. *Letters on various Subjects in Natural Philosophy, published from the Originals in the Archives of the Royal Society of London*, 265

III. *Letter to Mr. Boyle on the Cause of Gravitation*, 313

IV. *Tabulæ Duæ, Calorum altera, altera Refractionum*, 401

V. *De Problematibus Bernouillianis*, 409

VI. *Propositions for determining the Motion of a Body urged by two Central Forces*, 419

VII. *Four Letters to Dr. Bentley*, 427

VIII. *Commercium Epistolicum, &c. cum recensione præmissâ*, 443

IX. *Additamenta Commercii Epistolici ex Historiâ Fluxionum Raphsoni*, 593

OPTICS:

OR, A

TREATISE

OF THE

REFLECTIONS, REFRACTIONS,

INFLECTIONS AND COLOURS

OF

LIGHT.

ADVERTISEMENT I.

PART of the enſuing Diſcourſe about Light was written at the deſire of ſome Gentlemen of the Royal Society, *in the year* 1675, *and then ſent to their Secretary, and read at their Meetings, and the reſt was added about twelve Years after to complete the Theory; except the Third Book, and the laſt Propoſition of the Second, which were ſince put together out of ſcattered Papers. To avoid being engaged in Diſputes about theſe matters, I have hitherto delayed the printing, and ſhould ſtill have delayed it, had not the importunity of Friends prevailed upon me. If any other papers writ on this ſubject are got out of my hands, they are imperfect; and were perhaps written before I had tried all the Experiments here ſet down, and fully ſatisfied myſelf about the Laws of Refractions and Compoſition of Colours. I have here publiſhed what I think proper to come abroad, wiſhing that it may not be tranſlated into another language without my conſent.*

The Crowns of Colours, which ſometimes appear about the Sun and Moon, I have endeavoured to give an account of; but for want of ſufficient Obſervations leave that matter to be farther examined. The ſubject of the Third Book I have alſo left imperfect, not having tried all the Experiments which I intended when I was about theſe matters, nor repeated ſome of thoſe which I did try, until I had ſatisfied myſelf about all their circumſtances. To communicate what I have tried, and leave the reſt to others for farther enquiry, is all my deſign in publiſhing theſe papers.

In a Letter written to Mr. Leibnitz *in the year* 1679, *and publiſhed by Dr.* Wallis, *I mentioned a method by which I had found ſome general Theorems about ſquaring Curvilinear Figures, or comparing them with the Conic Sections, or other the ſimpleſt Figures with which they may be compared. And ſome years ago I lent out a Manuſcript containing ſuch Theorems; and having ſince met with ſome things copied out of it, I have on this occaſion made it public, prefixing to it an* Introduction, *and ſubjoining a* Scholium *concerning that method. And I have joined with it another ſmall Tract concerning the Curvilinear Figures of the Second Kind, which was alſo written many years ago, and made known to ſome friends, who have ſolicited the making it publick.* *I. N.*

April 1, 1704.

ADVERTISEMENT II.

IN this Second Edition of theſe Opticks I have omitted the Mathematical Tracts publiſhed at the end of the former Edition, as not belonging to the ſubject. And at the end of the Third Book I have added ſome Queſtions. And to ſhew that I do not take Gravity for an Eſſential Property of Bodies, I have added one Queſtion concerning its Cauſe, chuſing to propoſe it by way of a Queſtion, becauſe I am not yet ſatisfied about it for want of Experiments.

July 16, 1717.

I. N.

THE

THE FIRST BOOK OF OPTICS.

PART I.

MY deſign in this Book is not to explain the Properties of Light by Hypotheſes, but to propoſe and prove them by reaſon and experiments: in order to which I ſhall premiſe the following Definitions and Axioms.

DEFINITIONS.

DEFIN. I.

By the Rays of Light I underſtand its leaſt parts, and thoſe as well ſucceſſive in the ſame lines, as contemporary in ſeveral lines. For it is manifeſt that Light conſiſts of parts both Succeſſive and Contemporary; becauſe in the ſame place you may ſtop that which comes one moment, and let paſs that which comes preſently after; and in the ſame time you may ſtop it in any one place,

Definitions.

place, and let it pass in any other. For that part of Light which is stopt cannot be the same with that which is let pass. The least Light, or part of Light, which may be stopt alone without the rest of the Light, or propagated alone, or do or suffer any thing alone, which the rest of the Light doth not or suffers not, I call a Ray of Light.

DEFIN. II.

Refrangibility of the Rays of Light, is their disposition to be refracted or turned out of their way, in passing out of one transparent Body, or Medium, into another. And a greater or less Refrangibility of Rays, is their disposition to be turned more or less out of their way in like incidences on the same Medium. Mathematicians usually consider the Rays of Light to be lines reaching from the luminous body to the body illuminated; and the refraction of those Rays to be the bending or breaking of those lines in their passing out of one Medium into another. And thus may Rays and Refractions be considered, if Light be propagated in an instant. But, by an argument taken from the Æquations of the times of the Eclipses of *Jupiter's Satellites*, it seems that Light is propagated in time, spending in its passage from the Sun to us about seven minutes of time: and therefore I have chosen to define Rays and Refractions in such general terms as may agree to Light in both cases.

DEFIN. III.

Reflexibility of Rays, is their disposition to be reflected or turned back into the same Medium from any other Medium, upon whose surface they fall. And Rays are more or less reflexible, which are turned back more or less easily. As if Light pass out of Glass into Air, and, by being inclined more and more to the common surface of the Glass and Air, begins at length to be totally reflected by that surface; those sorts of Rays which, at like incidences, are reflected most copiously, or by inclining the Rays begin soonest to be totally reflected, are most reflexible.

DEFIN.

DEFIN. IV.

Definitions.

The Angle of Incidence is that Angle, which the line described by the incident Ray contains with the Perpendicular to the reflecting or refracting surface at the point of Incidence.

DEFIN. V.

The Angle of Reflexion or Refraction, is the Angle which the line described by the reflected or refracted Ray containeth with the Perpendicular to the reflecting or refracting surface at the point of Incidence.

DEFIN. VI.

The Sines of Incidence, Reflexion, and Refraction, are the Sines of the Angles of Incidence, Reflexion, and Refraction.

DEFIN. VII.

The Light whose Rays are all alike Refrangible, I call Simple, Homogeneal and Similar; and that whose Rays are some more Refrangible than others, I call Compound, Heterogeneal and Dissimilar. The former Light I call Homogeneal, not because I would affirm it so in all respects; but because the Rays, which agree in Refrangibility, agree at least in all those their other properties, which I consider in the following Discourse.

DEFIN. VIII.

The Colours of Homogeneal Lights, I call Primary, Homogeneal and Simple; and those of Heterogeneal Lights, Heterogeneal and Compound. For these are always compounded of the colours of Homogeneal Lights; as will appear in the following Discourse.

AXIOMS

Axioms.

AXIOMS.

AX. I.

The Angles of Reflexion, and Refraction, lie in one and the ſame Plane with the Angle of Incidence.

AX. II.

The Angle of Reflexion is equal to the Angle of Incidence.

AX. III.

If the refracted Ray be turned directly back to the Point of Incidence, it ſhall be refracted into the Line before deſcribed by the incident Ray.

AX. IV.

Refraction out of the rarer Medium into the denſer, is made towards the Perpendicular; that is, ſo that the Angle of Refraction be leſs than the Angle of Incidence.

AX. V.

The Sine of Incidence is either accurately or very nearly in a given ratio to the Sine of Refraction.

Whence if that proportion be known in any one inclination of the incident Ray, it is known in all the inclinations, and thereby the Refraction, in all caſes of incidence on the ſame refracting body, may be determined. Thus if the Refraction be made out of Air into Water, the ſine of Incidence of the Red Light is to the ſine of its Refraction as 4 to 3. If out of Air into Glaſs, the Sines are as 17 to 11. In Light of other Colours the ſines have other proportions: but the difference is ſo little that it need ſeldom be conſidered.

Suppoſe, therefore, that RS [in *fig.* 1.] repreſents the Surface of ſtagnating Water, and that C is the point of Incidence, in which any Ray, coming in the Air from A in the Line AC, is reflected or refracted; and I would know whither this Ray ſhall go after Reflexion or Refraction: I erect upon the ſurface of the Water, from the point of Incidence, the Perpendicular CP, and produce it downwards to Q, and conclude by the firſt Axi-

om, that the Ray after Reflexion and Refraction, ſhall be found ſomewhere in the Plane of the Angle of Incidence ACP produced. I let fall therefore upon the Perpendicular, CP, the ſine of Incidence AD; and if the reflected Ray be deſired, I produce AD to B, ſo that DB be equal to AD, and draw CB. For this Line CB ſhall be the reflected Ray; the angle of Reflexion BCP and its ſine BD being equal to the angle and ſine of Incidence, as they ought to be by the ſecond Axiom. But if the refracted Ray be deſired, I produce AD to H, ſo that DH may be to AD as the ſine of Refraction to the ſine of Incidence, that is (if the Light be red) as 3 to 4; and about the Center C, and in the Plane ACP, with the Radius CA deſcribing a Circle ABE, I draw parallel to the Perpendicular CPQ, the Line HE cutting the Circumference in E, and joining CE, this line CE ſhall be the line of the Refracted Ray. For if EF be let fall perpendicularly on the line PQ, this line EF ſhall be the ſine of Refraction of the Ray CE, the angle of Refraction being ECQ; and this ſine EF is equal to DH, and conſequently in proportion to the ſine of Incidence AD as 3 to 4.

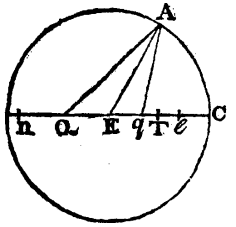
In like manner, if there be a Priſm of Glaſs (that is, a Glaſs bounded with two equal and parallel triangular ends, and three plain and well poliſhed ſides, which meet in three parallel lines running from the three angles of one end to the three angles of the other end) and if the Refraction of the Light in paſſing croſs this Priſm be deſired: let ACB [in *fig.* 2.] repreſent a plane cutting this Priſm tranſverſly to its three parallel lines, or edges, there where the Light paſſeth through it; and let DE be the Ray incident upon the firſt ſide of the priſm AC, where the Light goes into the glaſs; and by putting the proportion of the ſine of Incidence to the ſine of Refraction as 17 to 11, find EF the firſt refracted Ray. Then taking this Ray for the incident Ray upon the ſecond ſide of the Glaſs, BC, where the Light goes out, find the next refracted Ray FG, by putting the proportion of the ſine of Incidence to the ſine of Refraction as 11 to 17. For if the ſine of Incidence out of Air into Glaſs be to the ſine of Refraction as 17 to 11, the ſine of Incidence out of Glaſs into Air muſt on the contrary be to the ſine of Refraction as 11 to 17, by the third Axiom.

Axioms. Much after the ſame manner, if ACBD [in *fig.* 3.] repreſent a Glaſs ſpherically convex on both ſides (uſually called a *Lens*, ſuch as is a Burning-glaſs, or Spectacle-glaſs, or an Object-glaſs of a Teleſcope) and it be required to know how Light falling upon it from any lucid point Q ſhall be refracted; let QM repreſent a Ray falling upon any point M of its firſt ſpherical ſurface ACB, and by erecting a perpendicular to the Glaſs at the point M, find the firſt refracted Ray, MN, by the proportion of the ſines 17 to 11. Let that Ray in going out of the Glaſs be incident upon N, and then find the ſecond refracted Ray, N*q*, by the proportion of the ſines 11 to 17. And after the ſame manner may the Refraction be found, when the Lens is convex on one ſide and plane or concave on the other, or concave on both ſides.

A X. VI.

Homogeneal Rays which flow from ſeveral points of any Object, and fall perpendicularly, or almoſt perpendicularly, on any reflecting or refracting plane or ſpherical Surface, ſhall afterwards diverge from ſo many other points, or be parallel to ſo many other lines, or converge to ſo many other points, either accurately or without any ſenſible error. And the ſame thing will happen, if the Rays be reflected or refracted ſucceſſively by two or three or more plane or ſpherical Surfaces.

The point from which Rays diverge, or to which they converge, may be called their *Focus*. And the Focus of the incident Rays being given, that of the reflected or refracted ones



(a) Imagine that rays, emitted from the point Q, fall upon the ſpherical ſurface at A, and are reflected to *q*, and join EA. Then the angles EAQ, EA*q* will be equal; and of conſequence QE will be to E*q* as QA to A*q*. And this analogy will ſubſiſt, wherever in the reflecting ſurface the point A be placed. Let A therefore approach to C; and in the evaneſcence of the arc CA, QA becomes ultimately equal to QC, and *q*A to *q*C. Therefore QC is ultimately to *q*C as QE as *q*E. In CQ produced take Q*n* equal to QE, and from CE cut off C*e* equal to E*q*. Then ſince QC is to *q*C as QE to *q*E; the ſum of QC and QE, that is, C*n*, will be to the ſum of *q*C and *q*E, that is, to EC, as QC to *q*C. (Elem. v. 12.) Alſo the difference of QC and QE, that is EC, will be to the difference of *q*C and *q*E, that is to *eq*, as QC to *q*C. Therefore C*n* is to EC as EC to *eq* (Elem. v. 11.) and of conſequence ½ C*n* to ½ EC or ET, as ½ EC or ET to ½ *eq*. But C*n* is equal to twice ET together with twice EQ. Therefore TQ is ½ C*n*, and T*q* is ½ *eq*. Therefore TQ, TE, T*q*, ultimately when A coincides with C, are continually proportional. Hence the truth of the Newtonian conſtruction is manifeſt.

may

may be found by finding the Refraction of any two Rays, as Axioms. above; or more readily thus.

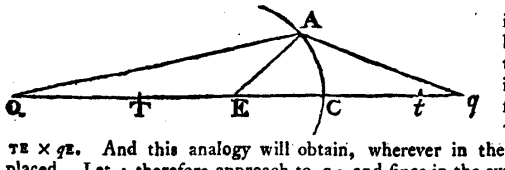
Caſ. 1. Let ACB [in *fig.* 4.] be a reflecting or refracting plane, and Q the Focus of the incident Rays, and Q*q*C a perpendicular to the plane. And if this perpendicular be produced to *q*, ſo that *q*C be equal to QC, the point *q*, ſhall be the Focus of the reflected Rays. Or if *q*C be taken on the ſame ſide of the Plane with QC, and in proportion to QC as the ſine of Incidence to the ſine of Refraction, the point *q* ſhall be the Focus of the refracted Rays.

Caſ. 2. Let ACB [in *fig.* 5.] be the reflecting ſurface of any Sphere whoſe center is E. Biſect any radius thereof (ſuppoſe EC) in T, and if in that radius, on the ſame ſide the point T, you take the points Q and *q*, ſo that TQ, TE, and T*q*, be continual proportionals, and the point Q be the Focus of the incident Rays, the point *q* ſhall be the Focus of the reflected ones (a).

Caſ. 3. Let ACB [in *fig.* 6.] be the refracting ſurface of any Sphere whoſe center is E. In any radius thereof, EC, produced both ways take ET and C*t* equal to one another, and ſeverally in ſuch proportion to that radius, as the leſſer of the ſines of Incidence and Refraction hath to the difference of thoſe ſines. And then if in the ſame line you find any two points Q and *q*, ſo that TQ be to ET as E*t* to *tq*, taking *tq* the contrary way from *t* which TQ lieth from T, and if the point Q be the Focus of any incident Rays, the point *q* ſhall be the Focus of the refracted ones (b).

And

(b) Imagine rays, emitted from Q, to fall upon the ſpherical ſurface at A, and to be refracted to *q*, and join EA. Then is QAE the angle of Incidence, and *q*AE the angle of Refraction. Let I denote the ſine of the former, R that of the latter. Now in the triangle QAE, QA is to QE as the ſine of E to I. By permutation QA is to the ſine of E as QE to I, or as the rectangle QE × *q*E to the rectangle I × *q*E. Again in the triangle *q*AE, the ſine of E is to R as *q*A to *q*E. By permutation the ſine of E is to *q*A as R to *q*E, or as the rectangle R × QE to the rectangle *q*E × QE. But ſince QA is to the ſine of E as QE × *q*E to I × *q*E; and the ſine of E to *q*A as R × QE to QE × *q*E. Therefore (ex æquo perturbatè) QA is to *q*A as R × QE to I × *q*E. But becauſe TE is to EC as I to R − I, therefore, inverting and compounding, TC is to TE as R to I. Therefore R × QE : I × *q*E = TC × QE : TE × *q*E; and QA : *q*A = TC × QE : TE × *q*E. And this analogy will obtain, wherever in the refracting ſurface the point A be placed. Let A therefore approach to C; and ſince in the evaneſcence of the arc CA, QA and *q*A become

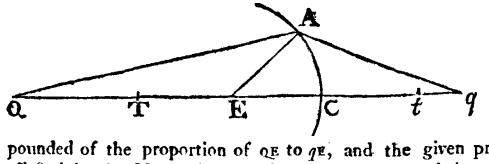


Axioms. And by the ſame means the Focus of the Rays after two or more Reflexions or Refractions may be found.

Caſ. 4. Let ACBD [in *fig.* 7.] be any refracting Lens, ſpherically convex, or concave, or plane on either ſide; and let CD be its axis (that is the line which cuts both its ſurfaces perpendicularly, and paſſes through the centers of the ſpheres) and in this Axis produced let F and *f* be the Foci of the refracted Rays found as above, when the incident Rays on both ſides the Lens are parallel to the ſame Axis; and upon the diameter F*f*, biſected in E, deſcribe a circle. Suppoſe now that any point Q be the Focus of any incident Rays. Draw QE cutting the ſaid circle in T and *t*, and therein take *tq* in ſuch proportion to *t*E, as *t*E or TE hath to TQ. Let *tq* lie the contrary way from *t* which TQ doth from T, and *q* ſhall be the Focus of the refracted Rays, without any ſenſible error; provided the point Q be not ſo remote from the Axis, nor the Lens ſo broad, as to make any of the Rays fall too obliquely on the refracting ſurfaces.

And by the like operations may the reflecting or refracting ſurfaces be found, when the two Foci are given; and thereby a Lens be formed, which ſhall make the Rays flow towards or from what place you pleaſe (c).

So then the meaning of this Axiom is, that if Rays fall upon any plane or ſpherical ſurface or lens, and before their incidence flow from or towards any point Q, they ſhall after Reflexion or Refraction flow from or towards the point *q* found by the foregoing rules. And if the incident rays flow from or towards ſeveral points Q, the reflected or refracted rays ſhall flow from or towards ſo many other points *q* found by the ſame rules. Whether the reflected or refracted rays flow from or towards the point *q* is eaſily known by the ſituation of that point. For if that point



become ultimately equal to QC and *q*C; therefore ultimately, when A coincides with C, Q*c* : *q*C = TC × QE : TE × *q*E. Therefore the point Q being given, *q* will be determined, by taking C*q* of ſuch length, that QC may bear to *q*C a proportion compounded of the proportion of QE to *q*E, and the given proportion of TC to TE. But this is effected by the Newtonian Conſtruction. For TQ being to E*t*, or its equal C*t*, as E*t*, or its equal

point be on the ſame ſide of the reflecting or refracting ſurface or lens with the point Q, and the incident rays flow from the point Q, the reflected flow towards the point *q*, and the refracted from it; and if the incident rays flow towards Q, the reflected flow from *q*, and the refracted towards it. And the contrary happens when *q* is on the other ſide of that ſurface. Axioms.

AX. VII.

Wherever the rays, which come from all the points of any Object, meet again in ſo many points, after they have been made to converge by reflexion or refraction, there they will make a Picture of the object upon any white body on which they fall.

So if PR [in *fig.* 3.] repreſent any Object without doors, and AB be a lens placed at a hole in the window-ſhut of a dark chamber, whereby the rays that come from any point Q of that object are made to converge and meet again in the point *q*; and if a ſheet of white paper be held at *q* for the light there to fall upon it: the Picture of that Object, PR, will appear upon the paper in its proper ſhape and colours. For as the light which comes from the point Q goes to the point *q*, ſo the light which comes from other points, P and R, of the object, will go to ſo many other correſpondent points *p* and *r* (as is manifeſt by the ſixth Axiom); ſo that every point of the Object ſhall illuminate a correſpondent point of the Picture; and thereby make a Picture like the Object in ſhape and colour, this only excepted, that the picture ſhall be inverted. And this is the reaſon of that vulgar experiment of caſting the ſpecies of objects from abroad upon a wall or ſheet of white paper in a dark room.

In a like manner, when a man views any object PQR [in *fig.* 8.]

equal C*t* to *tq*; by conſequence TQ and C*t* together, that is QC, will bear to C*t* and *tq* together, that is to *q*C, the proportion of TC to *tq*. (Elem. v. 12.) But TC bears to *tq* the proportion compounded of the proportions of TC to TE, and TE to *tq*. And the proportion of TE to *tq* is the ſame which QE bears to *q*E. For ſince QT is to TE as E*t* to *tq*, by compoſition QE : TE = *tq* : *q*E. And by permutation Q*e* : *q*E = TE : *tq*. Therefore the proportion of TC to *tq*, being compounded of the proportions of TC to TE and TE to *tq*, is compounded of the proportions of TC to TE, and QE to *q*E. Therefore the proportion of QC to *q*C, being the ſame with that of TC to *tq*, as hath been ſhewn, is compounded of theſe ſame proportions. Whence the truth of Newton's Conſtruction is manifeſt.

(c) Vide Lect. Opt. Part I. Sect. IV. Prop. XXIX, XXX, XXXII, XXXIII.

the

Cause of Vision.

the light, which comes from the ſeveral points of the object, is ſo refracted by the tranſparent ſkins and humours of the Eye, (that is by the outward coat EFG called the *Tunica Cornea*, and by the cryſtalline humour AB which is beyond the pupil *mk)* as to converge and meet again at ſo many points in the bottom of the Eye, and there to paint the Picture of the Object upon that ſkin (called the *Tunica Retina)* with which the bottom of the eye is covered. For Anatomiſts, when they have taken off from the bottom of the eye that outward and moſt thick coat called the *Dura Mater*, can then ſee, through the thinner coats, the pictures of objects lively painted thereon. And theſe pictures propagated by motion along the fibres of the Optick Nerves into the brain, are the cauſe of Viſion. For accordingly as theſe pictures are perfect or imperfect, the object is ſeen perfectly or imperfectly. If the eye be tinged with any colour (as in the diſeaſe of the *Jaundiſe)* ſo as to tinge the pictures in the bottom of the eye with that colour, then all objects appear tinged with the ſame colour. If the humours of the eye by old age decay, ſo as by ſhrinking to make the *cornea* and coat of the *cryſtalline humour* grow flatter than before, the light will not be refracted enough; and, for want of a ſufficient refraction, will not converge to the bottom of the eye, but to ſome place beyond it; and by conſequence paint in the bottom of the eye a confuſed picture, and according to the indiſtinctneſs of this Picture the Object will appear confuſed. This is the reaſon of the decay of ſight in old men, and ſhews why their ſight is mended by ſpectacles. For thoſe convex glaſſes ſupply the defect of plumpneſs in the eye, and, by encreaſing the refraction, make the rays converge ſooner, ſo as to convene diſtinctly at the bottom of the eye, if the Glaſs have a due degree of convexity. And the contrary happens in ſhort-ſighted men, whoſe eyes are too plump. For the refraction being now too great, the rays converge and convene in the eyes before they come at the bottom; and therefore the picture made in the bottom, and the viſion cauſed thereby, will not be diſtinct, unleſs the object be brought ſo near the eye, as that the place where the converging rays convene may be removed to the bottom; or that the plumpneſs of the eye be taken off, and the refractions

refractions diminiſhed by a concave glaſs of a due degree of concavity; or, laſtly, that by age the eye grow flatter till it come to a due figure: for ſhort-ſighted men ſee remote objects beſt in old age, and therefore they are accounted to have the moſt laſting eyes. Axions.

AX. VIII.

An Object ſeen by Reflexion or Refraction, appears in that place, from whence the rays, after their laſt reflexion or refraction, diverge in falling on the Spectator's Eye.

If the Object A [in *fig.* 9.] be ſeen by Reflexion of a Looking-glaſs *mn*, it ſhall appear, not in its proper place A, but behind the glaſs at *a*; from whence any rays AB, AC, AD, which flow from one and the ſame point of the object, do, after their reflexion made in the points B, C, D, diverge in going from the glaſs to E, F, G, where they are incident on the ſpectator's eyes. For theſe rays do make the ſame picture in the bottom of the eyes, as if they had come from the object really placed at *a*, without the interpoſition of the looking-glaſs; and all Viſion is made according to the place and ſhape of that picture.

In like manner the Object D [in *fig.* 2.] ſeen through a Priſm, appears not in its proper place D, but is thence tranſlated to ſome other place *d*, ſituated in the laſt refracted ray, FG, drawn backward from F to *d*.

And ſo the Object Q [in *fig.* 10.] ſeen through the Lens AB, appears at the place *q*, from whence the rays diverge in paſſing from the lens to the eye. Now it is to be noted, that the Image of the object, at *q*, is ſo much bigger or leſſer than the Object itſelf at Q, as the diſtance of the image at *q*, from the lens AB, is bigger or leſs than the diſtance of the object at Q from the ſame lens. And if the Object be ſeen through two or more ſuch convex or concave-glaſſes, every Glaſs ſhall make a new Image, and the Object ſhall appear in the place and of the bigneſs of the laſt Image. Which conſideration unfolds the Theory of Microſcopes and Teleſcopes. For that Theory conſiſts in almoſt nothing elſe, than the deſcribing ſuch glaſſes, as ſhall make the laſt Image of any

Axioms. any object as distinct and large and luminous, as it can conveniently be made.

I have now given in Axioms and their Explications the sum of what hath hitherto been treated of in Opticks. For what hath been generally agreed on I content myself to assume under the notion of Principles, in order to what I have farther to write. And this may suffice for an introduction to readers of quick wit and good understanding not yet versed in Opticks: although those who are already acquainted with this science, and have handled Glasses, will more readily apprehend what followeth.

PROPO-

PROPOSITIONS.

PROP. I. THEOR. I.

Lights which differ in Colour, differ also in degrees of Refrangibility.

The Proof by Experiments.

Exper. 1. I took a black oblong stiff paper terminated by parallel sides, and, with a perpendicular right line drawn cross from one side to the other, distinguished it into two equal parts. One of these parts I painted with a Red colour, and the other with a Blue. The paper was very black, and the colours intense and thickly laid on, that the phænomenon might be more conspicuous. This paper I viewed through a Prism of solid Glass, whose two sides, through which the light passed to the eye, were plane and well polished, and contained an angle of about sixty degrees: which angle I call the Refracting Angle of the Prism. And whilst I viewed it, I held it and the prism before a window, in such manner that the sides of the paper were parallel to the prism, and both those sides and the prism were parallel to the horizon, and the cross line was also parallel to it: and that the light, which fell from the Window upon the paper, made an angle with the paper, equal to that angle which was made with the same paper by the light reflected from it to the Eye. Beyond the prism was the wall of the chamber, under the window, covered over with black cloth; and the cloth was involved in darkness, that no light might be reflected from thence, which in passing by the edges of the paper to the eye, might mingle itself with the light of the paper, and obscure the phænomenon thereof. These things being thus ordered, I found that if the Refracting Angle of the Prism be turned upwards, so that the

Lights differing in Colour differ in Refrangibility.

Lights differing in Colour

paper may ſeem to be lifted upwards by the refraction, its Blue half will be lifted higher by the refraction than its Red half. But if the Refracting Angle of the Priſm be turned downward, ſo that the paper may ſeem to be carried lower by the refraction, its Blue half will be carried ſomething lower thereby than its Red half. Wherefore, in both caſes, the Light, which comes from the Blue half of the paper through the priſm to the eye, does, in like circumſtances, ſuffer a greater refraction than the Light which comes from the Red half, and by conſequence is more Refrangible.

Illuſtration. In the eleventh figure, MN repreſents the window, and DE the paper terminated with parallel ſides, DJ and HE, and by the tranſverſe line FG diſtinguiſhed into two halfs: the one, DG, of an intenſely Blue colour, the other, FE, of an intenſely Red. And BAC*cab* repreſents the priſm, whoſe Refracing Planes, AB*ba* and AC*ca*, meet in the edge of the Refracting Angle A*a*. This edge A*a* being upward, is parallel both to the horizon and to the parallel edges of the paper, DJ and HE; and the tranſverſe line FG is perpendicular to the plane of the window: and *de* repreſents the Image of the paper ſeen by refraction upwards, in ſuch manner that the Blue half, DG, is carried higher to *dg* than the Red half FE is to *fe*, and therefore ſuffers a greater refraction. If the edge of the Refracting Angle be turned downward, the Image of the paper will be refracted downward, ſuppoſe to $\delta\varepsilon$; and the Blue half will be refracted lower to $\delta\gamma$ than the Red half is to $\phi\varepsilon$.

Exper. 2. About the aforeſaid paper, whoſe two halfs were painted over with Red and Blue, and which was ſtiff like thin paſte-board, I lapped ſeveral times a ſlender thread of very black ſilk; in ſuch manner, that the ſeveral parts of the thread might appear upon the colours, like ſo many black lines drawn over them, or like long and ſlender dark ſhadows caſt upon them. I might have drawn black lines with a pen, but the threads were ſmaller and better defined. This paper, thus coloured and lined, I ſet againſt a wall perpendicularly to the horizon, ſo that one of the colours might ſtand to the right hand, and the other to the left.

left. Cloſe before the paper, at the confine of the colours below, I placed a candle, to illuminate the paper ſtrongly: for the experiment was tried in the night. The flame of the candle reached up to the lower edge of the paper, or a very little higher. Then, at the diſtance of ſix feet and two or three inches from the paper, upon the floor I erected a glaſs lens four inches and a quarter broad, which might collect the rays coming from the ſeveral points of the paper, and make them converge towards ſo many other points, at the ſame diſtance of ſix feet and one or two inches on the other ſide of the lens; and ſo form the Image of the coloured paper upon a white paper placed there; after the ſame manner that a lens at a hole in a window caſts the Images of Objects abroad upon a ſheet of white paper in a dark room. The aforeſaid white paper, erected perpendicular to the horizon and to the rays which fell upon it from the lens, I moved ſometimes towards the lens, ſometimes from it, to find the places where the images of the Blue and Red parts of the coloured paper appeared moſt diſtinct. Thoſe places I eaſily knew by the images of the black lines, which I had made by winding the ſilk about the paper. For the images of thoſe fine and ſlender lines (which by reaſon of their blackneſs were like ſhadows on the colours) were confuſed and ſcarce viſible, unleſs when the colours on either ſide of each line were terminated moſt diſtinctly. Noting therefore, as diligently as I could, the places where the images of the Red and Blue halfs of the coloured paper appeared moſt diſtinct, I found, that where the Red half of the paper appeared diſtinct, the Blue half appeared confuſed; ſo that the black lines drawn upon it could ſcarce be ſeen; and on the contrary, where the Blue half appeared moſt diſtinct, the Red half appeared confuſed, ſo that the black lines upon it were ſcarce viſible. And between the two places, where theſe images appeared diſtinct, there was the diſtance of an inch and a half: the diſtance of the white paper from the lens, when the image of the Red half of the coloured paper appeared moſt diſtinct, being greater by an inch and an half than the diſtance of the ſame white paper from the lens, when the image of the Blue half appeared

differ in Refrangibility.

Lights differing in Colour differ in Refrangibility.

moſt diſtinct. In like Incidences therefore of the Blue and Red upon the lens, the Blue was refracted more by the lens than the Red, ſo as to converge ſooner by an inch and a half, and therefore is more Refrangible.

Illuſtration. In the twelfth figure, DE ſignifies the coloured paper, DG the Blue half, FE the Red half, MN the lens, HJ the white paper in that place where the Red half with its black lines appeared diſtinct, and *hi* the ſame paper in that place where the Blue half appeared diſtinct. The place *hi* was nearer to the lens MN, than the place HJ, by an inch and an half.

Scholium. The ſame things ſucceed, notwithſtanding that ſome of the circumſtances be varied: as in the firſt Experiment, when the priſm and paper are any ways inclined to the horizon, and in both when coloured lights are drawn upon very black paper. But in the deſcription of theſe experiments, I have ſet down ſuch circumſtances, by which either the phænomenon might be rendered more conſpicuous, or a novice might more eaſily try them, or by which I did try them only. The ſame thing I have often done in the following Experiments: concerning all which this one admonition may ſuffice. Now from theſe Experiments it follows not, that all the light of the Blue is more refrangible than all the light of the Red: for both lights are mixed of rays differently refrangible, ſo that in the Red there are ſome rays not leſs refrangible than thoſe of the Blue, and in the Blue there are ſome rays not more refrangible than thoſe of the Red: but theſe rays, in proportion to the whole light, are but few, and ſerve to diminiſh the event of the Experiment, but are not able to deſtroy it. For if the Red and Blue colours were more dilute and weak, the diſtance of the Images would be leſs than an inch and a half; and if they were more intenſe and full, that diſtance would be greater, as will appear hereafter. Theſe Experiments may ſuffice for the Colours of Natural Bodies. For in the Colours made by the Refraction of Priſms this Propoſition will appear, by the Experiments which are now to follow in the next Propoſition.

PROP.

PROP. II. THEOR. II.

The Light of the Sun conſiſts of rays differently Refrangible.

The Proof by Experiments.

The Sun's Light a Compound.

Exper. 3. In a very dark chamber, at a round hole, about one-third part of an inch broad, made in the ſhut of a window, I placed a glaſs Priſm, whereby the beam of the ſun's light, which came in at the hole, might be refracted upwards toward the oppoſite wall of the chamber, and there form a coloured Image of the ſun. The axis of the priſm (that is, the line paſſing through the middle of the priſm from one end of it to the other end parallel to the edge of the refracting angle) was in this and the following Experiments perpendicular to the Incident Rays. About this axis I turned the priſm ſlowly, and ſaw the refracted light on the wall, or coloured image of the ſun, firſt to deſcend, and then to aſcend. Between the deſcent and aſcent, when the image ſeemed ſtationary, I ſtopped the priſm, and fixed it in that poſture, that it ſhould be moved no more. For in that poſture the refractions of the light at the two ſides of the refracting angle, that is at the entrance of the rays into the priſm, and at their going out of it, were equal to one another (d). So alſo in other Experiments, as often as I would have the refractions on both ſides the priſm to be equal to one another, I noted the place, where the image of the ſun, formed by the refracted light, ſtood ſtill between its two contrary motions, in the common period of its progreſs and regreſs; and when the image fell upon that place, I made faſt the priſm. And in this poſture, as the moſt convenient, it is to be underſtood that all the priſms are placed in the following Experiments, unleſs where ſome other poſture is deſcribed. The priſm therefore being placed in this poſture, I let the refracted light fall perpendicularly upon a ſheet of white paper at the oppoſite wall of the chamber, and obſerved the figure and dimenſions of the Solar Image formed on

(d) Vid. Lect. Opt. Part I. § 10. and Prop. XXV and XXVI.

the

The Sun's Light

the paper by that light. This image was oblong and not oval, but terminated with two rectilinear and parallel ſides, and two ſemicircular ends. On its ſides it was bounded pretty diſtinctly, but on its ends very confuſedly and indiſtinctly, the light there decaying and vaniſhing by degrees. The Breadth of this image anſwered to the ſun's diameter, and was about two inches and the eighth part of an inch, including the penumbra. For the image was eighteen feet and an half diſtant from the priſm, and at this diſtance that breadth, if diminiſhed by the diameter of the hole in the window-ſhut, that is by a quarter of an inch, ſubtended an angle at the priſm of about half a degree, which is the ſun's apparent diameter. But the Length of the image was about ten inches and a quarter, and the length of the rectilinear ſides about eight inches; and the refracting angle of the priſm, whereby ſo great a length was made, was 64 degrees. With a leſs angle the Length of the image was leſs, the Breadth remaining the ſame. If the priſm was turned about its axis, that way which made the rays emerge more obliquely out of the ſecond refracting ſurface of the priſm, the image ſoon became an inch or two longer, or more; and if the priſm was turned about the contrary way, ſo as to make the rays fall more obliquely on the firſt refracting ſurface, the image ſoon became an inch or two ſhorter. And therefore in trying this experiment, I was as curious as I could be in placing the priſm, by the above-mentioned rule, exactly in ſuch a poſture, that the refractions of the rays, at their emergence out of the priſm, might be equal to that at their incidence on it. The priſm had ſome veins running along, within the glaſs, from one end to the other, which ſcattered ſome of the ſun's light irregularly, but had no ſenſible effect in increaſing the length of the coloured ſpectrum. For I tried the ſame experiment with two other priſms with the ſame ſucceſs. And particularly with a priſm which ſeemed free from ſuch veins, and whoſe refracting angle was $62\frac{1}{2}$ degrees, I found the length of the image $9\frac{3}{4}$ or 10 inches at the diſtance of $18\frac{1}{2}$ feet from the priſm, the breadth of the hole in the window-ſhut being $\frac{1}{4}$ of an inch, as before. And becauſe it is eaſy to commit

commit a miſtake in placing the priſm in its due poſture, I repeated the experiment four or five times, and always found the length of the image that which is ſet down above. With another priſm, of clearer glaſs and better poliſh, which ſeemed free from veins, and whoſe refracting angle was $63\frac{1}{2}$ degrees, the length of this image, at the ſame diſtance of $18\frac{1}{2}$ feet, was alſo about 10 inches, or $10\frac{1}{8}$. Beyond theſe meaſures, for about a $\frac{1}{4}$ or $\frac{1}{3}$ of an inch, at either end of the ſpectrum, the light of the Clouds ſeemed to be a little tinged with Red and Violet; but ſo very faintly, that I ſuſpected that tincture might either wholly, or in great meaſure, ariſe from ſome rays of the ſpectrum ſcattered irregularly by ſome inequalities in the ſubſtance and poliſh of the glaſs, and therefore I did not include it in theſe meaſures. Now the different magnitude of the hole in the window-ſhut, and different thickneſs of the priſm, where the rays paſſed through it, and different inclinations of the priſm to the horizon, made no ſenſible changes in the Length of the image. Neither did the different matter of the priſms make any: for in a veſſel made of poliſhed plates of glaſs, cemented together in the ſhape of a priſm and filled with water, there is the like ſucceſs of the experiment according to the quantity of the refraction. It is farther to be obſerved, that the rays went on in right lines from the priſm to the image; and therefore at their very going out of the priſm had all that inclination to one another from which the length of the image proceeded, that is the inclination of more than two degrees and an half. And yet according to the Laws of Optics vulgarly received, they could not poſſibly be ſo much inclined to one another. For let EG [in *fig.* 13.] repreſent the window-ſhut, F the hole made therein, through which a beam of the ſun's light was tranſmitted into the darkned chamber, and ABC a triangular imaginary plane, whereby the priſm is feigned to be cut tranſverſly through the middle of the light. Or if you pleaſe, let ABC repreſent the priſm itſelf, looking directly towards the ſpectator's eye with its nearer end: and let XY be the ſun, MN the paper upon which the ſolar image or ſpectrum is caſt, and PT the image itſelf; whoſe ſides, towards υ and ω, are rectilinear and parallel, and ends, towards P and T ſemicircular.

A Compound.

The Sun's Light

circular. Ykhp and xljt are two rays; the firſt of which comes from the lower part of the ſun to the higher part of the image, and is refracted in the priſm at k and h; and the latter comes from the higher part of the ſun to the lower part of the image, and is refracted at l and j. Since the refractions on both ſides the priſm are equal to one another, that is the refraction at k equal to the refraction at j, and the refraction at l equal to the refraction at h, ſo that the refractions of the incident rays at k and l taken together are equal to the refractions of the emergent rays at h and j taken together: it follows, by adding equal things to equal things, that the refractions at k and h taken together, are equal to the refractions at j and l taken together; and therefore the two rays, being equally refracted, have the ſame inclination to one another after refraction, which they had before; that is the inclination of half a degree anſwering to the ſun's diameter. For ſo great was the inclination of the rays to one another before refraction. So then, the Length of the image pt would, by the rules of vulgar Optics, ſubtend an angle of half a degree at the priſm, and by conſequence be equal to the breadth *vw*; and therefore the image would be round (c). Thus it would be, were the two rays xljt and ykhp, and all the reſt which form the image p*w*tv, alike refrangible. And therefore ſeeing by experience it is found that the image is not round, but about five times longer than broad, the rays, which going to the upper end p of the image ſuffer the greateſt refraction, muſt be more refrangible than thoſe which go to the lower end t, unleſs the inequality of refraction be caſual.

This image or ſpectrum pt was coloured, being Red at its leaſt refracted end t, and Violet at its moſt refracted end p, and Yellow, Green and Blue in the intermediate ſpaces. Which agrees with the firſt Propoſition, that lights which differ in Colour do alſo differ in Refrangibility. The length of the image in the foregoing Experiments I meaſured from the fainteſt and outmoſt Red at one end, to the fainteſt and outmoſt Blue at the other end, excepting only a little penumbra, whoſe breadth ſcarce exceeded a quarter of an inch, as was ſaid above.

(c) Vide Lect. Opt. Part I. § 4—9.

A Compound.

Exper. 4. In the ſun's beam which was propagated into the room through the hole in the window-ſhut, at the diſtance of ſome feet from the hole, I held the priſm in ſuch a poſture, that its axis might be perpendicular to that beam. Then I looked through the priſm upon the Hole, and turning the priſm to and fro about its axis, to make the image of the hole aſcend and deſcend; when between its two contrary motions it ſeemed ſtationary, I ſtopped the priſm, that the refractions of both ſides of the Refracting Angle might be equal to each other, as in the former Experiment. In this ſituation of the priſm, viewing through it the ſaid hole, I obſerved the Length of its refracted image to be many times greater than its Breadth; and that the moſt refracted part thereof appeared Violet, the leaſt refracted Red, the middle parts Blue, Green, and Yellow in order. The ſame thing happened when I removed the priſm out of the Sun's light, and looked through it upon the Hole ſhining by the light of the Clouds beyond it. And yet if the refraction were done regularly, according to one certain proportion of the ſines of incidence and refraction, as is vulgarly ſuppoſed, the refracted image ought to have appeared round.

So then, by theſe two Experiments it appears, that in equal Incidences there is a conſiderable inequality of Refractions. But whence this inequality ariſes, whether it be that ſome of the incident rays are refracted more and others leſs, conſtantly, or by chance; or that one and the ſame ray is by refraction diſturbed, ſhattered, dilated, and as it were ſplit and ſpread into many diverging rays, as *Grimaldo* ſuppoſes, does not yet appear by theſe Experiments, but will appear by thoſe that follow.

Exper. 5. Conſidering therefore, that if in the third Experiment the image of the ſun ſhould be drawn out into an oblong form, either by a dilatation of every ray, or by any other caſual inequality of the refractions, the ſame oblong image would, by a ſecond refraction made ſideways, be drawn out as much in Breadth by the like dilatation of the rays, or other caſual inequality of the refractions ſideways; I tried what would be the effects of ſuch a ſecond refraction. For this end I ordered all things as in the third Experiment; and then placed a ſecond priſm

The Sun's Light

immediately after the firſt, in a croſs poſition to it, that it might again refract the beam of the ſun's light, which came to it through the firſt priſm. In the firſt priſm this beam was refracted upwards, and in the ſecond ſideways. And I found, that by the refraction of the ſecond priſm the Breadth of the image was not increaſed; but its ſuperior part, which in the firſt priſm ſuffered the greater refraction and appeared Violet and Blue, did again in the ſecond priſm ſuffer a greater refraction than its inferior part, which appeared Red and Yellow; and this without any dilatation of the image in Breadth.

Illuſtration. Let S [in *fig.* 14] repreſent the ſun; F the hole in the window; ABC the firſt priſm; DH the ſecond priſm; Y the round image of the ſun, made by a direct beam of light when the priſms are taken away; PT the oblong image of the ſun, made by that beam paſſing through the firſt priſm alone, when the ſecond priſm is taken away; and *pt* the image made by the croſs refractions of both priſms together. Now if the rays, which tend towards the ſeveral points of the round image, Y, were dilated and ſpread by the refraction of the firſt priſm, ſo that they ſhould not any longer go in ſingle lines to ſingle points, but that every ray being ſplit, ſhattered, and changed from a linear ray to a ſuperficies of rays diverging from the point of refraction, and lying in the plane of the angles of incidence and refraction, they ſhould go in thoſe planes to ſo many lines reaching almoſt from one end of the image PT to the other; and if that image ſhould thence become oblong: thoſe rays, and their ſeveral parts tending towards the ſeveral points of the image PT, ought to be again dilated and ſpread ſideways by the tranſverſe refraction of the ſecond priſm, ſo as to compoſe a four-ſquare image, ſuch as is repreſented at π. For the better underſtanding of which, let the image PT be diſtinguiſhed into five equal parts PQK, KQRL, LRSM, MSVN, NVT. And by the ſame irregularity that the orbicular light Y is, by the refraction of the firſt priſm, dilated and drawn out into a long image PT; the light PQK, which takes up a ſpace of the ſame length and breadth with the light Y, ought to be, by the refraction of the ſecond priſm, dilated and drawn out into the long image πqkp; and the light

light KQRL into the long image *kqrl*; and the lights RLSM, MSVN, NVT, into ſo many other long images *lrsm*, *msvn*, *nvt*]; and all theſe long images would compoſe the four-ſquare image π. Thus it ought to be, were every ray dilated by refraction, and ſpread into a triangular ſuperficies of rays diverging from the point of refraction. For the ſecond refraction would ſpread the rays one way, as much as the firſt doth another, and ſo dilate the image in Breadth as much as the firſt doth in Length. And the ſame thing ought to happen, were ſome rays caſually refracted more than others. But the event is otherwiſe. The image PT was not made broader by the refraction of the ſecond priſm, but only became oblique, as it is repreſented at *pt*; its upper end P being by the refraction tranſlated to a greater diſtance than its lower end T. So then the light which went towards the upper end, P, of the image, was (at equal incidences) more refracted in the ſecond priſm, than the light which tended towards the lower end T; that is the Blue and Violet, than the Red and Yellow: and therefore was more refrangible. The ſame light was, by the refraction of the firſt priſm, tranſlated farther from the place Y to which it tended before refraction; and therefore ſuffered, as well in the firſt priſm as in the ſecond, a greater refraction than the reſt of the light, and by conſequence was more refrangible than the reſt, even before its incidence on the firſt priſm.

A Compound.

Sometimes I placed a third priſm after the ſecond, and ſometimes alſo a fourth after the third, by all which the image might be often refracted ſideways: but the rays, which were more refracted than the reſt in the firſt priſm, were alſo more refracted in all the reſt, and that without any dilatation of the image ſideways: and therefore thoſe rays, for their conſtancy of a greater refraction, are deſervedly reputed more refrangible.

But that the meaning of this experiment may more clearly appear, it is to be conſidered that the rays, which are equally refrangible, do fall upon a circle anſwering to the ſun's diſque. For this was proved in the third Experiment. By a circle I underſtand not here a perfect geometrical circle; but any orbicular figure, whoſe length is equal to its breadth, and which, as to ſenſe, may ſeem circular. Let therefore AG [in *fig.* 15] repre-

The Sun's Light

ſent the circle, which all the moſt refrangible rays, propagated from the whole diſque of the ſun, would illuminate and paint upon the oppoſite wall, if they were alone; EL the circle, which all the leaſt refrangible rays would, in like manner, illuminate and paint, if they were alone; BH, CJ, DK, the circles, which ſo many intermediate ſorts of rays would ſucceſſively paint upon the wall, if they were ſingly propagated from the ſun in ſucceſſive order, the reſt being always intercepted; and conceive that there are other intermediate circles without number, which innumerable other intermediate ſorts of rays would ſucceſſively paint upon the wall, if the ſun ſhould ſucceſſively emit every ſort apart. And ſeeing the ſun emits all theſe ſorts at once, they muſt all together illuminate and paint innumerable equal circles; of all which, being according to their degrees of refrangibility placed in order in a continual ſeries, that oblong ſpectrum, PT, is compoſed, which I deſcribed in the third Experiment. Now if the ſun's circular image Y, [in *fig.* 14, 15] which is made by an unrefracted beam of light, was, by any dilatation of the ſingle rays, or by any other irregularity in the refraction of the firſt priſm, converted into the oblong ſpectrum, PT: then ought every circle, AG, BH, CJ, &c. in that ſpectrum, by the croſs refraction of the ſecond priſm again dilating or otherwiſe ſcattering the rays as before, to be in like manner drawn out and transformed into an oblong figure; and thereby the Breadth of the image PT would be now as much augmented, as the Length of the image Y was before by the refraction of the firſt priſm; and thus, by the refraction of both priſms together, would be formed a four-ſquare figure *pπt]*, as I deſcribed above. Wherefore, ſince the breadth of the ſpectrum PT is not increaſed by the refraction ſideways, it is certain that the rays are not ſplit or dilated, or otherways irregularly ſcattered by that refraction, but that every circle is, by a regular and uniform refraction, tranſlated entire into another place, as the circle AG, by the greateſt refraction, into the place *ag*; the circle BH, by a leſs refraction, into the place *bb*; the circle CJ, by a refraction ſtill leſs, into the place *ci*; and ſo of the reſt: by which means a new ſpectrum *pt*, inclined to the former PT, is in like manner compoſed of circles lying in

in a right line; and theſe circles muſt be of the ſame bigneſs with the former, becauſe the breadths of all the ſpectrums, Y, PT and *pt*, at equal diſtances from the priſms are equal. A Compound.

I concluded farther, that by the breadth of the hole F, through which the light enters into the dark chamber, there is a penumbra made in the circuit of the ſpectrum Y, and that penumbra remains in the rectilinear ſides of the ſpectrums PT and *pt*. I placed therefore at that hole a lens or object-glaſs of a teleſcope, which might caſt the image of the ſun diſtinctly on Y, without any penumbra at all; and found that the penumbra of the rectilinear ſides of the oblong ſpectrums, PT and *pt*, was alſo thereby taken away, ſo that thoſe ſides appeared as diſtinctly defined, as did the circumference of the firſt image Y. Thus it happens, if the glaſs of the priſms be free from veins, and their ſides be accurately plane, and well poliſhed without thoſe numberleſs waves or curles which uſually ariſe from ſand-holes a little ſmoothed with poliſhing with putty. If the glaſs be only well poliſhed and free from veins, and the ſides not accurately plane, but a little convex or concave, as it frequently happens; yet may the three ſpectrums, Y, PT and *pt*, want penumbras, but not in equal diſtances from the priſms. Now from this want of penumbras, I knew more certainly that every one of the circles was refracted according to ſome moſt regular, uniform, and conſtant law. For if there were any irregularity in the refraction, the right lines AE and GL, which all the circles in the ſpectrum PT do touch, could not by that refraction be tranſlated into the lines *ae* and *gl*, as diſtinct and ſtraight as they were before; but there would ariſe, in thoſe tranſlated lines, ſome penumbra or crookedneſs or undulation, or other ſenſible perturbation contrary to what is found by experience. Whatſoever penumbra or perturbation ſhould be made in the circles by the croſs refraction of the ſecond priſm, all that penumbra or perturbation would be conſpicuous in the right lines *ae* and *gl*, which touch thoſe circles. And therefore ſince there is no ſuch penumbra or perturbation in thoſe right lines, there muſt be none in the circles. Since the diſtance between thoſe tangents, or breadth of the ſpectrum, is not increaſed by the refractions, the diameters of the circles are not

THE SUN'S LIGHT

not increaſed thereby. Since thoſe tangents continue to be right lines, every circle, which in the firſt priſm is more or leſs refracted, is exactly in the ſame proportion more or leſs refracted in the ſecond. And ſeeing all theſe things continue to ſucceed after the ſame manner, when the rays are again in a third priſm, and again in a fourth, refracted ſideways; it is evident, that the rays of one and the ſame circle, as to their degree of refrangibility, continue always uniform and homogeneal to one another, and that thoſe of ſeveral circles do differ in degree of refrangibility, and that in ſome certain and conſtant proportion. Which is the thing I was to prove.

There is yet another circumſtance or two of this Experiment, by which it becomes ſtill more plain and convincing. Let the ſecond priſm DH [in *fig.* 16] be placed not immediately after the firſt, but at ſome diſtance from it; ſuppoſe in the mid-way between it and the wall, on which the oblong ſpectrum PT is caſt; ſo that the light from the firſt priſm may fall upon it in the form of an oblong ſpectrum $\pi\tau$ parallel to this ſecond priſm, and be refracted ſideways to form the oblong ſpectrum *pt* upon the wall. And you will find as before, that this ſpectrum *pt* is inclined to that ſpectrum PT, which the firſt priſm forms alone without the ſecond; the Blue ends P and *p* being farther diſtant from one another, than the Red ones T and *t*; and by conſequence that the rays which go to the blue end, π, of the image $\pi\tau$, and which therefore ſuffer the greateſt refraction in the firſt priſm, are again in the ſecond priſm more refracted than the reſt.

The ſame thing I tried alſo by letting the ſun's light into a dark room through two little round holes, F and φ, [in *fig.* 17] made in the window, and with two parallel priſms, ABC and $\alpha\beta\gamma$, placed at thoſe holes (one at each) refracting thoſe two beams of light to the oppoſite wall of the chamber; in ſuch manner that the two coloured images, PT and MN, which they there painted, were joined end to end, and lay in one ſtraight line; the Red end T of the one touching the Blue end M of the other. For if theſe two refracted beams were again, by a third priſm DH placed croſs

(f) This Experiment may be tried with two priſms only. For the buſineſs of the two ABC, $\alpha\beta\gamma$

croſs to the two firſt, refracted ſideways, and the ſpectrums thereby tranſlated to ſome other part of the wall of the chamber, ſuppoſe the ſpectrum PT to *pt* and the ſpectrum MN to *mn*; theſe tranſlated ſpectrums, *pt* and *mn*, would not lie in one ſtraight line with their ends contiguous as before, but be broken off from one another and become parallel; the Blue end *m* of the image *mn* being, by a greater refraction, tranſlated farther from its former place MT, than the Red end *t* of the other image *pt* from the ſame place MT; which puts the Propoſition paſt diſpute. And this happens whether the third priſm, DH, be placed immediately after the two firſt, or at a great diſtance from them, ſo that the light refracted in the two firſt priſms be either white and circular, or coloured and oblong, when it falls on the third (f). A COMPOUND.

Exper. 6. In the middle of two thin boards I made round holes, a third part of an inch in diameter, and in the window-ſhut a much broader hole being made, to let into my darkened chamber a large beam of the ſun's light; I placed a priſm behind the ſhut in that beam, to refract it towards the oppoſite wall; and cloſe behind the priſm I fixed one of the boards, in ſuch manner that the middle of the refracted light might paſs through the hole made in it, and the reſt be intercepted by the board. Then, at the diſtance of about twelve feet from the firſt board, I fixed the other board; in ſuch manner, that the middle of the refracted light, which came through the hole in the firſt board and fell upon the oppoſite wall, might paſs through the hole in this other board; and the reſt, being intercepted by the board, might paint upon it the coloured ſpectrum of the ſun. And cloſe behind this board I fixed another priſm, to refract the light, which came through the hole. Then I returned ſpeedily to the firſt priſm; and by turning it ſlowly to and fro about its axis, I cauſed the image, which fell upon the ſecond board, to move up and down upon that board, that all its parts might ſucceſſively paſs through the hole in that board, and fall upon the priſm behind it. And in the mean time, I noted the places on the oppoſite wall, to which that light, after its refraction in the ſecond

$\alpha\beta$ may be performed by a ſingle one having a black paper, with two round holes in it, paſted on the ſide which is turned to the light. Vide LECT. OPT. Part II. § 19.

priſm,

The Sun's Light

priſm, did paſs; and by the difference of the places I found that the light, which being moſt refracted in the firſt priſm did go to the Blue end of the image, was again more refracted in the ſecond priſm, than the light which went to the Red end of that image; which proves as well the firſt Propoſition as the ſecond. And this happened whether the axis of the two priſms were parallel, or inclined to one another and to the horizon in any given angles.

Illuſtration. Let F [in *fig.* 18] be the wide hole in the window ſhut, through which the ſun ſhines upon the firſt priſm ABC, and let the refracted light fall upon the middle of the board DE, and the middle part of that light upon the hole G, made in the middle of that board. Let this trajected part of the light fall again upon the middle of the ſecond board, *de*, and there paint ſuch an oblong coloured image of the ſun, as was deſcribed in the third Experiment. By turning the priſm ABC ſlowly to and fro about its axis, this image will be made to move up and down the board *de*, and by this means all its parts, from one end to the other, may be made to paſs ſucceſſively through the hole *g*, which is made in the middle of that board. In the mean while another priſm, *abc*, is to be fixed next after that hole *g*, to refract the trajected light a ſecond time. And theſe things being thus ordered, I marked the places, M and N, of the oppoſite wall upon which the refracted light fell; and found, that whilſt the two boards and ſecond priſm remained unmoved, thoſe places, by turning the firſt priſm about its axis, were changed perpetually. For when the lower part of the light, which fell upon the ſecond board, *de*, was caſt through the hole, *g*, it went to a lower place, M, on the wall; and when the higher part of that light was caſt through the ſame hole, *g*, it went to a higher place, N, on the wall; and when any intermediate part of the light was caſt through that hole, it went to ſome place on the wall between M and N. The unchanged poſition of the holes in the boards made the incidence of the rays upon the ſecond priſm to be the ſame in all caſes. And yet, in that common incidence, ſome of the rays were more refracted and others leſs. And thoſe were more refracted in this priſm, which, by a greater refraction

in the firſt priſm, were more turned out of the way; and there- A Compound
fore, for their conſtancy of being more refracted, are deſervedly called more refrangible.

Exper. 7. At two holes made near one another in my window-ſhut I placed two priſms, one at each; which might caſt upon the oppoſite wall (after the manner of the third Experiment) two oblong coloured images of the ſun. And at a little diſtance from the wall, I placed a long ſlender paper with ſtraight and parallel edges, and ordered the priſms and paper ſo, that the Red colour of one image might fall directly upon one half of the paper, and the Violet colour of the other image upon the other half of the ſame paper: ſo that the paper appeared of two colours, Red and Violet, much after the manner of the painted paper in the firſt and ſecond Experiments. Then with a black cloth I covered the wall behind the paper, that no light might be reflected from it to diſturb the Experiment; and viewing the paper through a third priſm held parallel to it, I ſaw that half of it, which was illuminated by the Violet light, to be divided from the other half by a greater refraction, eſpecially when I went a good way off from the paper. For when I viewed it too near at hand, the two halfs of the paper did not appear fully divided from one another, but ſeemed contiguous at one of their angles, like the painted paper in the firſt Experiment. Which alſo happened when the paper was too broad.

Sometimes inſtead of the paper I uſed a white thread; and this appeared through the priſm divided into two parallel threads, as is repreſented in the nineteenth figure; where DG denotes the thread illuminated with Violet light from D to E, and with Red light from F to G, and *edfg* are the parts of the thread ſeen by refraction. If one half of the thread be conſtantly illuminated with Red, and the other half be illuminated with all the colours ſucceſſively (which may be done by cauſing one of the priſms to be turned about its axis whilſt the other remains unmoved) this other half, in viewing the thread through the priſm, will appear in a continued right line with the firſt half when illuminated with Red; and begin to be a little divided from it, when illuminated with Orange; and remove farther from it, when il-

The Sun's Light

luminated with Yellow; and ſtill farther when with Green; and farther when with Blue; and go yet farther off, when illuminated with Indigo; and fartheſt when with deep Violet. Which plainly ſhews, that the lights of ſeveral colours are more and more refrangible from one another, in this order of their colours; Red, Orange, Yellow, Green, Blue, Indigo, deep Violet; and ſo proves as well the firſt Propoſition as the ſecond.

I cauſed alſo the coloured ſpectrums PT [in *fig.* 17] and MN, made in a dark chamber by the refractions of two priſms, to lie in a right line end to end, as was deſcribed above in the fifth Experiment; and viewing them through a third priſm, held parallel to their length, they appeared no longer in a right line, but became broken from one another, as they are repreſented at *pt* and *mn*; the Violet end, *m*, of the ſpectrum, *mn*, being by a greater refraction tranſlated farther from its former place, MT, than the Red end, *t*, of the other ſpectrum *pt*.

I farther cauſed thoſe two ſpectrums PT [in *fig.* 20] and MN to become co-incident, in an inverted order of their colours, the Red end of each falling on the Violet end of the other, as they are repreſented in the oblong figure PTMN; and then viewing them through a priſm DH held parallel to their length, they appeared not co-incident as when viewed with the naked eye, but in the form of two diſtinct ſpectrums *pt* and *mn* croſſing one another in the middle after the manner of the letter X. Which ſhews, that the Red of the one ſpectrum and Violet of the other, which were co-incident at PN and MT, being parted from one another, by a greater refraction of the Violet to *p* and *m*, than of the Red to *n* and *t*, do differ in degrees of refrangibility.

I illuminated alſo a little circular piece of white paper all over, with the lights of both priſms intermixed; and when it was illuminated with the Red of one ſpectrum and deep Violet of the other, ſo as by the mixture of thoſe colours to appear all over Purple, I viewed the paper, firſt at a leſs diſtance, and then at a greater, through a third priſm; and as I went from the paper, the refracted image thereof became more and more divided by the unequal refraction of the two mixed colours, and at length parted into two diſtinct images, a Red one and a Violet one; whereof

A Compound.

whereof the Violet was fartheſt from the paper, and therefore ſuffered the greateſt refraction. And when the priſm at the window, which caſt the violet on the paper, was taken away, the Violet image diſappeared; but when the other priſm was taken away, the Red vaniſhed: which ſhews, that theſe two images were nothing elſe than the lights of the two priſms, which had been intermixed on the purple paper, but were parted again, by their unequal refractions, made in the third priſm, through which the paper was viewed. This alſo was obſervable, that if one of the priſms at the window, ſuppoſe that which caſt the Violet on the paper, was turned about its axis to make all the colours in this order, Violet, Indigo, Blue, Green, Yellow, Orange, Red, fall ſucceſſively on the paper from that priſm, the Violet image changed colour accordingly, turning ſucceſſively to Indigo, Blue, Green, Yellow and Red; and in changing colour came nearer and nearer to the Red image made by the other priſm, until, when it was alſo Red, both images became fully co-incident.

I placed alſo two paper-circles very near one another, the one in the Red light of one priſm, and the other in the Violet light of the other. The circles were each of them an inch in diameter, and behind them the wall was dark, that the Experiment might not be diſturbed by any light coming from thence. Theſe circles thus illuminated, I viewed through a priſm, ſo held that the refraction might be made towards the Red circle, and as I went from them they came nearer and nearer together, and at length became co-incident; and afterwards when I went ſtill farther off, they parted again in a contrary order, the Violet by a greater refraction being carried beyond the Red.

Exper. 8. In Summer, when the ſun's light uſes to be ſtrongeſt, I placed a priſm at the hole of the window-ſhut, as in the third Experiment, yet ſo that its axis might be parallel to the axis of the World, and at the oppoſite wall, in the ſun's refracted light, I placed an open book. Then going ſix feet and two inches from the book, I placed there the above-mentioned lens, by which the light, reflected from the book, might be made to converge and meet again at the diſtance of ſix feet and two inches

The Sun's Light

behind the lens, and there paint the ſpecies of the book upon a ſheet of white paper, much after the manner of the ſecond Experiment. The book and lens being made faſt, I noted the place where the paper was, when the letters of the book, illuminated by the fulleſt Red light of the ſolar image falling upon it, did caſt their ſpecies on that paper moſt diſtinctly: and then I ſtayed, till by the motion of the ſun, and conſequent motion of his image on the book, all the colours from that Red to the middle of the Blue paſſed over thoſe letters; and when thoſe letters were illuminated by that Blue, I noted again the place of the paper, when they caſt their ſpecies moſt diſtinctly upon it: and I found that this laſt place of the paper was nearer to the lens, than its former place, by about two inches and an half, or two and three quarters. So much ſooner therefore did the light in the Violet end of the image, by a greater refraction, converge and meet, than the light in the Red end. But in trying this the chamber was as dark as I could make it. For if theſe colours be diluted and weakened by the mixture of any adventitious light, the diſtance between the places of the paper will not be ſo great. This diſtance, in the ſecond Experiment, where the colours of Natural Bodies were made uſe of, was but an inch and an half, by reaſon of the imperfection of thoſe colours. Here, in the colours of the Priſm, which are manifeſtly more full, intenſe, and lively than thoſe of Natural Bodies, the diſtance is two inches and three quarters. And were the colours ſtill more full, I queſtion not but that the diſtance would be conſiderably greater. For the coloured light of the priſm, by the interfering of the circles deſcribed in the ſecond figure of the fifth Experiment, and alſo by the light of the very bright clouds next the ſun's body intermixing with theſe colours, and by the light ſcattered by the inequalities in the poliſh of the priſm, was ſo very much compounded, that the ſpecies, which thoſe faint and dark colours, the Indigo and Violet, caſt upon the paper, were not diſtinct enough to be well obſerved.

Exper. 9. A priſm, whoſe two angles at its baſe were equal to one another and half right ones, and the third a right one, I placed in a beam of the ſun's light let into a dark chamber,

through a hole in the window-ſhut, as in the third Experiment. And turning the priſm ſlowly about its axis, until all the light which went through one of its angles, and was refracted by it, began to be reflected by its baſe, at which till then it went out of the glaſs; I obſerved that thoſe rays, which had ſuffered the greateſt refraction, were ſooner reflected than the reſt. I conceived therefore that thoſe rays of the Reflected light, which were moſt Refrangible, did firſt of all, by a total reflexion, become more copious in that light than the reſt; and that afterwards the reſt alſo, by a total reflexion, became as copious as theſe. To try this, I made the Reflected light paſs through another priſm, and being refracted by it to fall afterwards upon a ſheet of white paper placed at ſome diſtance behind it; and there, by that Refraction, to paint the uſual colours of the priſm. And then cauſing the firſt priſm to be turned about its axis as above, I obſerved that when thoſe rays, which in this priſm had ſuffered the greateſt refraction, and appeared of a Blue and Violet colour, began to be totally reflected, the Blue and Violet light on the paper, which was moſt refracted in the ſecond priſm, received a ſenſible increaſe above that of the Red and Yellow, which was leaſt refracted; and afterwards when the reſt of the light, which was Green, Yellow and Red, began to be totally reflected in the firſt priſm, the light of thoſe colours on the paper received as great an increaſe, as the Violet and Blue had done before. Whence it is manifeſt, that the beam of light reflected by the baſe of the priſm, being augmented firſt by the more refrangible rays, and afterwards by the leſs refrangible ones, is compounded of rays differently refrangible. And that all ſuch Reflected light is of the ſame nature with the ſun's light, before its incidence on the baſe of the priſm, no man ever doubted: it being generally allowed, that light, by ſuch reflexions, ſuffers no alteration in its modifications and properties. I do not here take notice of any refractions made in the ſides of the firſt priſm, becauſe the light enters it perpendicularly at the firſt ſide, and goes out perpendicularly at the ſecond ſide, and therefore ſuffers none. So then, the ſun's incident light being of the ſame temper and conſtitution with his emergent light, and the laſt being compounded of rays

A Compound.

differently

The Sun's Light

differently refrangible, the firſt muſt be in like manner compounded.

Illuſtration. In the twenty-firſt figure, ABC is the firſt priſm; BC its baſe; B and C its equal angles at the baſe, each of 45 degrees; A its rectangular vertex; FM a beam of the ſun's light, let into a dark room through a hole, F, one third part of an inch broad; M its incidence on the baſe of the priſm; MG a leſs refracted ray; MH a more refracted ray; MN the beam of light reflected from the baſe; VXY the ſecond priſm, by which this beam, in paſſing through it, is refracted; N*t* the leſs refracted light of this beam; and N*p* the more refracted part thereof. When the firſt priſm, ABC, is turned about its axis, according to the order of the letters ABC, the rays MH emerge more and more obliquely out of that priſm, and at length after their moſt oblique emergence are reflected towards N, and going on to *p* do increaſe the number of the rays N*p*. Afterwards by continuing the motion of the firſt priſm, the rays MG are alſo reflected to N, and increaſe the number of the rays N*t*. And therefore the light MN admits into its compoſition, firſt the more refrangible rays, and then the leſs refrangible rays; and yet, after this compoſition, is of the ſame nature with the ſun's immediate light FM, the reflexion of the ſpecular baſe BC cauſing no alteration therein (g).

Exper. 10. Two priſms, which were alike in ſhape, I tied ſo together, that their axes and oppoſite ſides being parallel, they compoſed a parallelepiped. And, the ſun ſhining into my dark chamber through a little hole in the window-ſhut, I placed that parallelepiped in his beam at ſome diſtance from the hole, in ſuch a poſture, that the axes of the priſms might be perpendicular to the incident rays; and that thoſe rays, being incident upon the firſt ſide of one priſm, might go on through the two contiguous ſides of both priſms, and emerge out of the laſt ſide of the ſecond priſm. This ſide, being parallel to the firſt ſide of the firſt priſm, cauſed the emerging light to be parallel to the incident. Then, beyond theſe two priſms I placed a third, which might refract that emergent light, and by that refraction caſt

(g) Vid. Lect. Opt. Part II. § 71—75.

the

A Compound.

the uſual colours of the priſm upon the oppoſite wall, or upon a ſheet of white paper, held at a convenient diſtance behind the priſm, for that refracted light to fall upon it. After this I turned the parallelepiped about its axis; and found, that when the contiguous ſides of the two priſms became ſo oblique to the incident rays, that thoſe rays began all of them to be reflected, thoſe rays, which in the third priſm had ſuffered the greateſt Refraction and painted the paper with Violet and Blue, were firſt of all by a total Reflexion taken out of the tranſmitted light; the reſt remaining, and on the paper painting their colours of Green, Yellow, Orange, and Red, as before; and afterwards by continuing the motion of the two priſms, the reſt of the rays alſo, by a total Reflexion, vaniſhed in order, according to their degrees of Refrangibility. The light therefore, which emerged out of the two priſms, is compounded of rays differently refrangible, ſeeing the more refrangible rays may be taken out of it, while the leſs refrangible remain. But this light, being trajected only through the parallel ſuperficies of the two priſms, if it ſuffered any change by the refraction of one ſuperficies, it loſt that impreſſion by the contrary refraction of the other ſuperficies; and ſo, being reſtored to its priſtine conſtitution, became of the ſame nature and condition as at firſt, before its incidence on thoſe priſms; and therefore, before its incidence, was as much compounded of rays differently refrangible, as afterwards.

Illuſtration. In the twenty-ſecond figure, ABC and BCD are the two priſms tied together in the form of a parallelepiped, their ſides BC and CB being contiguous, and their ſides AB and CD parallel. And HJK is the third priſm, by which the ſun's light, propagated through the hole F into the dark chamber, and there paſſing through thoſe ſides of the priſms, AB, BC, CB and CD, is refracted at O to the white paper PT; falling there partly upon P by a greater refraction, partly upon T by a leſs refraction, and partly upon R, and other intermediate places, by intermediate refractions. By turning the parallelepiped ACBD about its axis, according to the order of the letters A, C, D, B, at length when the contiguous planes, BC and CB, become ſufficiently oblique to the rays FM, which are incident upon them at M, there will va-

niſh

The Sun's Light

niſh totally out of the refracted light OPT, firſt of all the moſt refracted rays OP, (the reſt OR and OT remaining as before) then the rays OR, and other intermediate ones, and laſtly, the leaſt refracted rays OT. For when the plane BC becomes ſufficiently oblique to the rays incident upon it, thoſe rays will begin to be totally reflected by it towards N; and firſt the moſt refrangible rays will be totally reflected (as was explained in the preceding Experiment) and by conſequence muſt firſt diſappear at P; and afterwards the reſt, as they are in order totally reflected to N, they muſt appear in the ſame order at R and T. So then the rays, which at O ſuffer the greateſt refraction, may be taken out of the light MO, whilſt the reſt of the rays remain in it; and therefore that light MO is compounded of rays differently refrangible. And becauſe the planes AB and CD are parallel, and therefore by equal and contrary refractions deſtroy one anothers effects, the incident light FM muſt be of the ſame kind and nature with the emergent light MO, and therefore doth alſo conſiſt of rays differently refrangible. Theſe two lights, FM and MO, before the moſt refrangible rays are ſeparated out of the emergent light MO, agree in colour, and in all other properties ſo far as my obſervation reaches; and therefore are deſervedly reputed of the ſame nature and conſtitution, and by conſequence the one is compounded as well as the other. But after the moſt refrangible rays begin to be totally reflected, and thereby ſeparated out of the emergent light MO, that light changes its colour from White to a dilute and faint Yellow, a pretty good Orange, a very full Red ſucceſſively, and then totally vaniſhes. For after the moſt refrangible rays, which paint the paper at P with a Purple colour, are, by a total reflexion, taken out of the beam of light MO; the reſt of the colours, which appear on the paper at R and T, being mixed in the light MO, compound there a faint Yellow: and after the Blue and part of the Green which appear on the paper between P and R are taken away; the reſt, which appear between R and T, that is the Yellow, Orange, Red, and a little Green, being mixed in the beam MO compound there an Orange; and when all the rays are by reflexion taken out of the beam MO, except the leaſt refrangible, which at T appear of a full Red, their

A Compound.

their colour is the ſame in that beam MO, as afterwards at T, the refraction of the priſm HJK ſerving only to ſeparate the differently refrangible rays, without making any alteration in their colours, as ſhall be more fully proved hereafter. All which confirms as well the firſt Propoſition as the ſecond.

Scholium. If this Experiment and the former be conjoined and made one, by applying a fourth priſm VXY [in *fig.* 22] to refract the reflected beam MN towards *pt*, the concluſion will be clearer. For then the light N*p*, which in the fourth priſm is more refracted, will become fuller and ſtronger when the light OP, which in the third priſm HJK is more refracted, vaniſhes at P; and afterwards, when the leſs refracted light, OT, vaniſhes at T, the leſs refracted light N*t* will become encreaſed, whilſt the more refracted light at *p* receives no farther encreaſe. And as the trajected beam, MO, in vaniſhing is always of ſuch a colour, as ought to reſult from the mixture of the colours which fall upon the paper PT, ſo is the reflected beam, MN, always of ſuch a colour, as ought to reſult from the mixture of the colours which fall upon the paper *pt*. For when the moſt refrangible rays are, by a total reflexion, taken out of the beam MO, and leave that beam of an Orange colour, the exceſs of thoſe rays in the reflected light, does not only make the Violet, Indigo and Blue at *p* more full, but alſo makes the beam MN change from the yellowiſh colour of the ſun's light, to a pale White inclining to Blue, and afterward recover its yellowiſh colour again, ſo ſoon as all the reſt of the tranſmitted light MOT is reflected.

Now ſeeing that in all this variety of Experiments, whether the trial be made in light Reflected, and that either from Natural Bodies, as in the firſt and ſecond Experiment, or Specular, as in the ninth; or in light Refracted, and that, either before the unequally refracted rays are, by diverging, ſeparated from one another, and loſing their whiteneſs which they have altogether, appear ſeverally of ſeveral colours, as in the fifth Experiment; or after they are ſeparated from one another, and appear coloured as in the ſixth, ſeventh, and eighth Experiments; or in light trajected through parallel ſuperficies, deſtroying each others effects, as in the tenth Experiment; there are always found rays,

The Sun's Light a Compound.

which at equal incidences on the ſame Medium ſuffer unequal refractions; and that without any ſplitting or dilating of ſingle rays, or contingence in the inequality of the refractions, as is proved in the fifth and ſixth Experiments: and ſeeing the rays which differ in refrangibility may be parted and ſorted from one another; and that either by Refraction, as in the third Experiment, or by Reflexion, as in the tenth; and then the ſeveral ſorts apart at equal incidences ſuffer unequal refractions, and thoſe ſorts are more refracted than others after ſeparation, which were more refracted before it, as in the ſixth and following Experiments; and if the Sun's light be trajected through three or more croſs priſms ſucceſſively, thoſe rays, which in the firſt priſm are refracted more than others, are in all the following priſms refracted more than others in the ſame rate and proportion, as appears by the fifth Experiment: it is manifeſt, that the Sun's Light is an Heterogeneous Mixture of rays, ſome of which are conſtantly more Refrangible than others, as was propoſed.

PROP. III. THEOR. III.

The Sun's light conſiſts of rays differing in Reflexibility, and thoſe rays are more reflexible than others, which are more refrangible.

This is manifeſt by the ninth and tenth Experiments: for in the ninth Experiment, by turning the priſm about its axis, until the rays within it, which in going out into the air were refracted by its baſe, became ſo oblique to the baſe, as to begin to be totally reflected thereby; thoſe rays became firſt of all totally reflected, which before, at equal incidences with the reſt, had ſuffered the greateſt refraction. And the ſame thing happens in the reflexion made by the common baſe of the two priſms in the tenth Experiment.

PROP. IV. PROB. I.

To ſeparate from one another the Heterogeneous rays of Compound Light.

To reſolve the Solar Light

The heterogeneous rays are in ſome meaſure ſeparated from one another by the refraction of the priſm in the third Experiment;

into its conſtituent Parts.

ment; and in the fifth Experiment, by taking away the penumbra from the rectilinear ſides of the coloured image, that ſeparation in thoſe very rectilinear ſides or ſtraight edges of the image becomes perfect. But in all places between thoſe rectilinear edges, thoſe innumerable circles there deſcribed, which are ſeverally illuminated by homogeneal rays, by interfering with one another, and being every where commixed, do render the light ſufficiently compound. But if theſe circles, whilſt their centers keep their diſtances and poſitions, could be made leſs in diameter, their interfering one with another, and by conſequence the mixture of the heterogeneous rays would be proportionally diminiſhed. In the twenty-third figure let AG, BH, CJ, DK, EL, FM be the circles, which ſo many ſorts of rays, flowing from the ſame diſque of the ſun, do in the third Experiment illuminate; of all which and innumerable other intermediate ones, lying in a continual ſeries between the two rectilinear and parallel edges of the ſun's oblong image PT, that image is compoſed; as was explained in the fifth Experiment. And let *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *el*, *fm*, be ſo many leſs circles, lying in a like continual ſeries between two parallel right lines *af* and *gm*, with the ſame diſtances between their centers, and illuminated by the ſame ſorts of rays; that is, the circle *ag* with the ſame ſort by which the correſponding circle AG was illuminated; and the circle *bh* with the ſame ſort by which the correſponding circle BH was illuminated; and the reſt of the circles, *ci*, *dk*, *el*, *fm*, reſpectively, with the ſame ſorts of rays by which the ſeveral correſponding circles, CJ, DK, EL, FM, were illuminated. In the figure, PT, compoſed of the greater circles, three of thoſe circles, AG, BH, CJ, are ſo expanded into one another, that the three ſorts of rays by which thoſe circles are illuminated, together with other innumerable ſorts of intermediate rays, are mixed at QR in the middle of the circle BH. And the like mixture happens throughout almoſt the whole length of the figure PT. But in the figure, *pt*, compoſed of the leſs circles, the three leſs circles, *ag*, *bh*, *ci*, which anſwer to thoſe three greater, do not extend into one another; nor are there any where mingled ſo much as any two of the three ſorts of rays,

To reſolve the Solar Light into its conſtituent Parts.

by which thoſe circles are illuminated, and which in the figure PT are all of them intermingled at BH.

Now he that ſhall thus conſider it, will eaſily underſtand, that the mixture is diminiſhed in the ſame proportion with the diameters of the circles. If the diameters of the circles, whilſt their centers remain the ſame, be made three times leſs than before, the mixture will be alſo three times leſs; if ten times leſs, the mixture will be ten times leſs, and ſo of other proportions. That is, the mixture of the rays in the greater figure, PT, will be to their mixture in the leſs, *pt*, as the latitude of the greater figure is to the latitude of the leſs. For the latitudes of theſe figures are equal to the diameters of their circles. And hence it eaſily follows, that the mixture of the rays in the refracted ſpectrum, *pt*, is to the mixture of the rays in the direct and immediate light of the ſun, as the breadth of that ſpectrum is to the difference between the length and breadth of the ſame ſpectrum.

So then, if we would diminiſh the mixture of the rays, we are to diminiſh the diameters of the circles. Now theſe would be diminiſhed if the ſun's diameter to which they anſwer could be made leſs than it is, or (which comes to the ſame purpoſe) if without doors, at a great diſtance from the priſm towards the ſun, ſome opake body were placed, with a round hole in the middle of it, to intercept all the ſun's light, excepting ſo much as, coming from the middle of his body, could paſs through that hole to the priſm. For ſo the circles AG, BH, and the reſt, would not any longer anſwer to the whole diſque of the ſun, but only to that part of it, which could be ſeen from the priſm through that hole, that it is to the apparent magnitude of that hole viewed from the priſm. But that theſe circles may anſwer more diſtinctly to that hole, a lens is to be placed by the priſm to caſt the image of the hole, (that is, every one of the circles AG, BH, &c.) diſtinctly upon the paper at PT; after ſuch a manner as by a lens, placed at a window, the ſpecies of objects abroad are caſt diſtinctly upon a paper within the room, and the rectilinear ſides of the oblong ſolar image in the fifth Experiment became diſtinct without any penumbra. If this be done, it will not be neceſſary to place that hole very far off, no not beyond the window. And therefore

therefore inſtead of that hole, I uſed the hole in the window-ſhut as follows.

Exper. 11. In the ſun's light let into my darkened chamber, through a ſmall round hole in my window-ſhut, at about ten or twelve feet from the window, I placed a lens, by which the image of the hole might be diſtinctly caſt upon a ſheet of white paper, placed at the diſtance of ſix, eight, ten or twelve feet from the lens. For according to the difference of the lenſes I uſed various diſtances, which I think not worth the while to deſcribe. Then immediately after the lens I placed a priſm, by which the trajected light might be refracted either upwards or ſideways, and thereby the round image, which the lens alone did caſt upon the paper, might be drawn out into a long one with parallel ſides, as in the third Experiment. This oblong image I let fall upon another paper, at about the ſame diſtance from the priſm as before, moving the paper either towards the priſm or from it, until I found the juſt diſtance where the rectilinear ſides of the image became moſt diſtinct. For in this caſe, the circular images of the hole which compoſe that image, after the ſame manner that the circles *ag*, *bh*, *ci*, &c. do the figure *pt* [in *fig.* 23] were terminated moſt diſtinctly without any penumbra, and therefore extended into one another the leaſt that they could, and by conſequence the mixture of the heterogeneous rays was now the leaſt of all. By this means I uſed to form an oblong image (ſuch as is *pt*) [in *fig.* 23 and 24] of circular images of the hole (ſuch as are *ag*, *bh*, *ci*, &c.) and by uſing a greater or leſs hole in the window-ſhut, I made the circular images *ag*, *bh*, *ci*, &c. of which it was formed, to become greater or leſs at pleaſure, and thereby the mixture of the rays in the image *pt* to be as much or as little as I deſired.

Illuſtration. In the twenty-fourth figure, F repreſents the circular hole in the window-ſhut; MN the lens whereby the image or ſpecies of that hole is caſt diſtinctly upon a paper at J; ABC the priſm, whereby the rays are, at their emerging out of the lens, refracted from J towards another paper at *pt*, and the round image at J is turned into an oblong image, *pt*, falling on that other paper. This image, *pt*, conſiſts of circles placed one after

To reſolve the Solar Light

another in a rectilinear order, as was ſufficiently explained in the fifth Experiment; and theſe circles are equal to the circle J, and conſequently anſwer in magnitude to the hole F; and therefore by diminiſhing that hole they may be at pleaſure diminiſhed, whilſt their centers remain in their places. By this means I made the breadth of the image *pt* to be forty times, and ſometimes ſixty or ſeven times leſs than its length. As for inſtance, if the breadth of the hole F be one tenth of an inch, and MF the diſtance of the lens from the hole be 12 feet; and if *p*B or *p*M the diſtance of the image *pt* from the priſm or lens be 10 feet, and the Refracting angle of the priſm be 62 degrees, the breadth of the image *pt* will be one twelfth of an inch, and the length about ſix inches; and therefore the length to the breadth as 72 to 1, and by conſequence the light of this image 71 times leſs compound than the ſun's direct light. And light thus far ſimple and homogeneal, is ſufficient for trying all the Experiments in this Book about Simple Light. For the compoſition of heterogeneal rays is in this light ſo little, that it is ſcarce to be diſcovered and perceived by ſenſe, except perhaps in the Indigo and Violet. For theſe, being dark colours, do eaſily ſuffer a ſenſible allay by that little ſcattering light, which uſes to be refracted irregularly by the inequalities of the priſm.

Yet inſtead of the circular hole F, it is better to ſubſtitute an oblong hole, ſhaped like a long parallelogram with its length parallel to the priſm ABC. For if this hole be an inch or two long, and but a tenth or twentieth part of an inch broad, or narrower: the light of the image *pt* will be as ſimple as before, or ſimpler, and the image will become much broader, and therefore more fit to have experiments tried in its light than before.

Inſtead of this parallelogram-hole may be ſubſtituted a triangular one of equal ſides, whoſe baſe for inſtance is about the tenth part of an inch, and its height an inch or more. For by this means, if the axis of the priſm be parallel to the perpendicular of the triangle, the image *pt* [in *fig.* 25] will now be formed of equicrural triangles *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *el*, *fm*, &c. and innumerable other intermediate ones anſwering to the triangular hole in ſhape and bigneſs, and lying one after another in a continual ſeries

into its conſtituent Parts.

ries between two parallel lines *af* and *gm*. Theſe triangles are a little intermingled at their baſes, but not at their vertices; and therefore the light on the brighter ſide *af* of the image, where the baſes of the triangles are, is a little compounded, but on the darker ſide *gm* is altogether uncompounded, and in all places between the ſides the compoſition is proportional to the diſtances of the places from that obſcurer ſide *gm*. And having a ſpectrum *pt* of ſuch a compoſition, we may try experiments either in its ſtronger and leſs ſimple light near the ſide *af*, or in its weaker and ſimple light near the other ſide *gm*, as it ſhall ſeem moſt convenient.

But in making experiments of this kind the chamber ought to be made as dark as can be, leſt any foreign light mingle itſelf with the light of the ſpectrum *pt*, and render it compound; eſpecially if we would try experiments in the more ſimple light next the ſide *gm* of the ſpectrum; which being fainter, will have a leſs proportion to the foreign light, and ſo, by the mixture of that light, be more troubled and made more compound. The lens alſo ought to be good, ſuch as may ſerve for Optical uſes; and the priſm ought to have a large angle, ſuppoſe of 65 or 70 degrees, and to be well wrought, being made of glaſs free from bubbles and veins, with its ſides not a little convex or concave, as uſually happens, but truly plane, and its poliſh elaborate, as in working Optick-glaſſes, and not ſuch as is uſually wrought with putty; whereby the edges of the ſand-holes being worn away, there are left all over the glaſs a numberleſs company of very little convex polite riſings, like waves. The edges alſo of the priſm and lens, ſo far as they may make any irregular refraction, muſt be covered with a black paper glewed on. And all the light of the ſun's beam let into the chamber, which is uſeleſs and unprofitable to the Experiment, ought to be intercepted with black paper, or other black obſtacles. For otherwiſe the uſeleſs light, being reflected every way in the chamber, will mix with the oblong ſpectrum, and help to diſturb it. In trying theſe things ſo much diligence is not altogether neceſſary, but it will promote the ſucceſs of the Experiments, and by a very ſcrupulous examiner of things deſerves to be applied. It is difficult

to

to get glaſs-priſms fit for this purpoſe, and therefore I uſed ſometimes Priſmatick Veſſels, made with pieces of broken looking-glaſſes, and filled with rain-water. And to increaſe the refraction, I ſometimes impregnated the water ſtrongly with *Saccharum Saturni*.

PROP. V. THEOR. IV.

Homogeneal Light is refracted regularly, without any dilatation, ſplitting, or ſhattering of the rays; and the confuſed Viſion of objects, ſeen through refracting bodies by heterogeneal light, ariſes from the different Refrangibility of ſeveral ſorts of rays.

Regular Refraction of Homogeneal Light.

The firſt part of this Propoſition has been already ſufficiently proved in the fifth Experiment, and will farther appear by the Experiments which follow.

Exper. 12. In the middle of a black paper I made a round hole, about a fifth or ſixth part of an inch in diameter. Upon this paper I cauſed the ſpectrum of Homogeneal Light, deſcribed in the former Propoſition, ſo to fall, that ſome part of the light might paſs through the hole of the paper. This tranſmitted part of the light I refracted with a priſm placed behind the paper, and letting this refracted light fall perpendiculayly upon a white paper, two or three feet diſtant from the priſm, I found that the ſpectrum formed on the paper by this light was not oblong, as when it is made (in the third Experiment) by refracting the ſun's compound light, but was (ſo far as I could judge by my eye) perfectly circular, the length being no greater than the breadth. Which ſhews that this light is refracted regularly without any dilatation of the rays.

Exper. 13. In the Homogeneal Light I placed a paper-circle of a quarter of an inch in diameter, and in the ſun's unrefracted Heterogeneal White Light I placed another paper-circle of the ſame bigneſs. And going from the papers to the diſtance of ſome feet, I viewed both circles through a priſm. The circle illuminated by the ſun's Heterogeneal Light appeared very oblong, as in the fourth Experiment, the length being many times greater than the breadth; but the other circle illuminated with Homogeneal

geneal Light appeared circular and diſtinctly defined, as when it is viewed with the naked eye. Which proves the whole Propoſition.

Exper. 14. In the Homogeneal Light I placed flies, and ſuch like minute objects, and viewing them through a priſm, I ſaw their parts as diſtinctly defined, as if I had viewed them with the naked eye. The ſame objects placed in the ſun's unrefracted Heterogeneal Light, which was white, I viewed alſo through a priſm, and ſaw them moſt confuſedly defined, ſo that I could not diſtinguiſh their ſmaller parts from one another. I placed alſo the letters of a ſmall print one while in the Homogeneal Light, and then in the Heterogeneal; and viewing them through a priſm, they appeared, in the latter caſe, ſo confuſed and indiſtinct that I could not read them; but in the former, they appeared ſo diſtinct that I could read readily, and thought I ſaw them as diſtinct, as when I viewed them with my naked eye. In both caſes I viewed the ſame objects, through the ſame priſm, at the ſame diſtance from me, and in the ſame ſituation. There was no difference but in the light, by which the objects were illuminated, and which in one caſe was ſimple, and in the other compound; and therefore the diſtinct viſion in the former caſe, and confuſed in the latter, could ariſe from nothing elſe than from that difference of the lights. Which proves the whole Propoſition.

And in theſe three Experiments it is farther very remarkable, that the colour of Homogeneal Light was never changed by the refraction.

PROP. VI. THEOR. V.

The ſine of Incidence of every ray conſidered apart, is to its ſine of Refraction in a given ratio.

Given proportions between the ſines of Incidence and Refraction.

That every Ray, conſidered apart, is conſtant to itſelf in ſome degree of refrangibility, is ſufficiently manifeſt out of what has been ſaid. Thoſe rays which in the firſt refraction are, at equal incidences, moſt refracted, are alſo in the following refractions, at equal incidences, moſt refracted; and ſo of the leaſt refrangible, and the reſt which have any mean degree of refrangibili-

Given proportions between the

ty, as is manifeſt by the fifth, ſixth, ſeventh, and eighth, and ninth Experiments. And thoſe which the firſt time, at like incidences, are equally refracted, are again at like incidences equally and uniformly refracted; and that, whether they be refracted before they be ſeparated from one another, as in the fifth Experiment; or whether they be refracted apart, as in the twelfth, thirteenth and fourteenth Experiments. The refraction therefore of every ray apart is regular, and what rule that refraction obſerves we are now to ſhew.

The late Writers in Opticks teach, that the ſines of incidence are in a given proportion to the ſines of refraction, as was explained in the fifth Axion: and ſome, by inſtruments fitted for meaſuring of refractions, or otherwiſe experimentally examining this proportion, do acquaint us that they have found it accurate. But whilſt they, not underſtanding the different refrangibility of ſeveral rays, conceived them all to be refracted according to one and the ſame proportion, it is to be preſumed that they adapted their meaſures only to the middle of the refracted light; ſo that from their meaſures we may conclude only, that the rays which have a mean degree of refrangibility, that is thoſe which, when ſeparated from the reſt, appear Green, are refracted according to a given proportion of their ſines. And therefore we are now to ſhew that the like given proportions obtain in all the reſt. That it ſhould be ſo is very reaſonable, Nature being ever conformable to herſelf: but an experimental proof is deſired. And ſuch a proof will be had, if we can ſhew that the ſines of refraction of rays differently refrangible are one to another in a given proportion, when their ſines of incidence are equal. For if the ſines of refraction of all the rays are in given proportions to the ſine of refraction of a ray which has a mean degree of refrangibility, and this ſine is in a given proportion to the equal ſines of incidence, thoſe other ſines of refraction will alſo be in given proportions to the equal ſines of incidence. Now when the ſines of incidence are equal; it will appear by the following Experiment that the ſines of refraction are in a given proportion to one another.

Exper.

Sines of Incidence and Refraction.

Exper. 15. The ſun ſhining into a dark chamber through a little round hole in the window-ſhut, let s [in *fig.* 26.] repreſent his round white image painted on the oppoſite wall by his direct light; PT, his oblong coloured image made by refracting that light with a priſm placed at the window; and *pt*, or 2*p*2*t*, or 3*p*3*t*, his oblong coloured image made by refracting again the ſame light ſideways, with a ſecond priſm placed immediately after the firſt in a croſs poſition to it, as was explained in the fifth Experiment: that is to ſay, *pt* when the refraction of the ſecond priſm is ſmall, 2*p*2*t* when its refraction is greater, and 3*p*3*t* when it is greateſt. For ſuch will be the diverſity of the refractions if the Refracting Angle of the ſecond priſm be of various magnitudes; ſuppoſe of fifteen or twenty degrees, to make the image *pt*; of thirty or forty, to make the image 2*p*2*t*; and of ſixty, to make the image 3*p*3*t*. But for want of ſolid glaſs-priſms with angles of convenient bigneſſes, there may be veſſels made of poliſhed plates of glaſs, cemented together in the form of priſms, and filled with water. Theſe things being thus ordered, I obſerved that all the ſolar images or coloured ſpectrums PT, *pt*, 2*p*2*t*, 3*p*3*t* did very nearly converge to the place, s, on which the direct light of the ſun fell, and painted his white round image, when the priſms were taken away. The axis of the ſpectrum PT, that is the line drawn through the middle of it parallel to its rectilinear ſides, did, when produced, paſs exactly through the middle of that white round image s. And when the refraction of the ſecond priſm was equal to the refraction of the firſt, the Refracting Angle of them both being about 60 degrees, the axis of the ſpectrum 3*p*3*t* made by that refraction, did, when produced, paſs alſo through the middle of the ſame white round image s. But when the refraction of the ſecond priſm was leſs than that of the firſt, the produced axes of the ſpectrums, *tp*, or 2*t*2*p*, made by that refraction did cut the produced axis of the ſpectrum TP in the points *m* and *n*, a little beyond the center of that white round Image s. Whence the proportion of the line 3*t*T to the line 3*p*P was a little greater than the proportion of 2*t*T to 2*p*P, and this proportion a little greater than that of *t*T to *p*P. Now when the light of the ſpectrum PT falls perpendicularly

Given proportions between the

upon the wall, thoſe lines $3tT$, $3pP$, and $2tT$, $2pP$ and tT, pP, are the tangents of the refractions; and therefore by this Experiment the proportions of the tangents of the refractions are obtained, from whence the proportions of the ſines being derived, they come out equal, ſo far as by viewing the ſpectrums, and uſing ſome mathematical reaſoning, I could eſtimate. For I did not make an accurate computation. So then the Propoſition holds true in every ray apart, ſo far as appears by Experiment. And that it is accurately true, may be demonſtrated upon this ſuppoſition. *That bodies refract light by acting upon its rays in lines perpendicular to their ſurfaces.* But in order to this demonſtration, I muſt diſtinguiſh the motion of every ray into two motions, the one perpendicular to the refracting ſurface, the other parallel to it, and concerning the perpendicular motion lay down the following Propoſition.

If any motion or moving thing whatſoever be incident, with any velocity, on any broad and thin ſpace, terminated on both ſides by two parallel planes; and, in its paſſage through that ſpace, be urged perpendicularly towards the farther plane, by any force which at given diſtances from the plane is of given quantities; the perpendicular velocity of that motion or thing, at its emerging out of that ſpace, ſhall be always equal to the ſquare root of the ſum of the ſquare of the perpendicular velocity of that motion or thing, at its incidence on that ſpace, and of the ſquare of the perpendicular velocity which that motion or thing would have at its emergence, if, at its incidence, its perpendicular velocity was infinitely little.

And the ſame Propoſition holds true of any motion or thing perpendicularly retarded in its paſſage through that ſpace, if inſtead of the ſum of the two ſquares you take their difference. The demonſtration Mathematicians will eaſily find out, and therefore I ſhall not trouble the reader with it (g).

Suppoſe now that a ray coming moſt obliquely in the line MC [in

(f) See the figure of the xcvth Propoſition of the firſt book of the Principia.

In that figure AH and $1d$ are equal. Alſo TH and IK. GH and IK are as the whole velocities of the incident and emergent ray. Therefore GA and Kd are as the perpendicular velocities of incidence and emergence. But $Kd = \sqrt{IK^2 - I\delta^2} = \sqrt{TH^2 - AH^2} = \sqrt{TH^2 - GH^2 + GA^2}$. Hence if GA,

[in *fig.* 1.] be refracted at C by the plane RS into the line CN; and if it be required to find the line CE, into which any other ray AC ſhall be refracted, let MC, AD, be the ſines of incidence of the two rays, and NG, EF, their ſines of refraction; and let the equal motions of the incident rays be repreſented by the equal lines MC and AC; and the motion MC being conſidered as parallel to the refracting plane, let the other motion AC be diſtinguiſhed into two motions AD and DC; one of which AD is parallel, and the other DC perpendicular to the refracting ſurface. In like manner, let the motions of the emerging rays be diſtinguiſhed into two; whereof the perpendicular ones are $\frac{MC}{NG}$ CG and $\frac{AD}{EF}$ CF. And if the force of the refracting plane begins to act upon the rays either in that plane, or at a certain diſtance from it on the one ſide, and ends at a certain diſtance from it on the other ſide, and in all places between thoſe two limits acts upon the rays in lines perpendicular to that refracting plane, and the actions upon the rays at equal diſtances from the refracting plane be equal, and at unequal ones either equal or unequal according to any rate whatever: that motion of the ray, which is parallel to the refracting plane, will ſuffer no alteration by that force; and that motion, which is perpendicular to it, will be altered according to the rule of the foregoing Propoſition. If therefore for the perpendicular velocity of the emerging ray, CN, you write $\frac{MC}{NG}$ CG, as above; then the perpendicular velocity of any other emerging ray, CF, which was $\frac{AD}{EF}$ CF, will be equal to the ſquare root of $CDq + \frac{MCq}{NGq}$ CGq. And by ſquaring theſe equals, and adding to them the equals ADq and $MCq - CDq$, and dividing the ſums by the equals $CFq + EFq$, and $CGq + NGq$, you will have $\frac{ADq}{EFq}$ equal to $\frac{MCq}{NGq}$. Whence AD, the ſine of incidence, is to EF the ſine of refraction, as MC to NG, that is, in a given *ratio*. And this demonſtration being general, without determining what light is, or by what kind of force it is refracted, or aſſuming any thing farther than that the refracting

Sines of Incidence and Refraction.

GA, the perpendicular velocity of incidence, be gradually diminiſhed till it be reduced to nothing; Kd, the perpendicular velocity of emergence, becomes ultimately equal to $\sqrt{TH^2 - GH^2}$. And in any given magnitude of GA, Kd is equal to the ſquare root of the ſum of the ſquare of that its ultimate quantity and the ſquare of GA. And this is what Newton here affirms.

body acts upon the rays in lines perpendicular to its surface; I take it to be a very convincing argument of the full truth of this Propoſition (h).

So then, if the *ratio* of the ſines of incidence and refraction of any ſort of rays be found in any one caſe, it is given in all caſes; and this may be readily found by the method in the following Propoſition.

PROP. VII. THEOR. VI.

The perfection of Teleſcopes is impeded by the different refrangibility of the rays of light.

The imperfection of Teleſcopes is vulgarly attributed to the Spherical Figures of the glaſſes, and therefore Mathematicians have propounded to figure them by the Conical Sections. To ſhew that they are miſtaken, I have inſerted this Propoſition; the truth of which will appear by the meaſures of the refractions of the ſeveral ſorts of rays; and theſe meaſures I thus determine.

To meaſure the different Refractions of the extreme Rays.

In the third Experiment of this firſt Part, where the Refracting Angle of the priſm was $62\frac{1}{2}$ degrees, the half of that angle 31 deg. 15 min. is the angle of incidence of the rays, at their going out of the glaſs into the air (i); and the ſine of this angle is 5188, the radius being 10000. When the axis of this priſm was parallel to the horizon, and the refraction of the rays, at their incidence on this priſm, equal to that at their emergence out of it, I obſerved with a quadrant the angle, which the mean refrangible rays (that is, thoſe which went to the middle of the ſun's coloured image) made with the horizon; and by this angle and the ſun's altitude obſerved at the ſame time, I found the angle which the emergent rays contained with the incident to be 44 deg. and 40 min. and the half of this angle added to the angle of incidence 31 deg. 15 min. makes the angle of refraction (k), which is therefore 53 deg. 35 min. and its ſine 8047. Theſe are the ſines

(h) This Propoſition is the xcivth of the firſt book of the Principia, where it is more elegantly proved.

(i) Vide Lect. Opt. Part I. § 31. Lem. I.

of

of incidence and refraction of the mean refrangible rays, and their proportion in round numbers is 20 to 31. This glaſs was of a colour inclining to green. The laſt of the priſms mentioned in the third Experiment was of clear white glaſs. Its Refracting Angle $63\frac{1}{2}$ degrees. The angle, which the emergent rays contained with the incident, 45 deg. 50 min. The ſine of half the firſt angle 5262. The ſine of half the ſum of the angles 8157. And their proportion in round numbers 20 to 31, as before.

To meaſure the different Refractions of the extreme Rays.

From the length of the image, which was about $9\frac{3}{4}$ or 10 inches, ſubduct its breadth, which was $2\frac{1}{8}$ inches, and the remainder $7\frac{3}{4}$ inches would be the length of the image, were the ſun but a point; and therefore ſubtends the angle which the moſt and leaſt refrangible rays, when incident on the priſm in the ſame lines, do contain with one another after their emergence. Whence this angle is 2 deg. 0′. 7″. For the diſtance between the image and the priſm, where this angle is made, was $18\frac{1}{2}$ feet, and at that diſtance the chord, $7\frac{3}{4}$ inches, ſubtends an angle of 2 deg. 0′. 7″. Now half this angle is the angle which theſe emergent rays contain with the emergent mean refrangible rays, and a quarter thereof, that is 30′. 2″, may be accounted the angle which they would contain with the ſame emergent mean refrangible rays, were they co-incident to them within the glaſs, and ſuffered no other refraction than that at their emergence. For if two equal refractions, the one at the incidence of the rays on the priſm, the other at their emergence, make half the angle 2 deg. 0′. 17″; then one of thoſe refractions will make about a quarter of that angle; and this quarter added to and ſubducted from the angle of refraction of the mean refrangible rays, which was 53 deg. 35′, gives the angles of refraction of the moſt and leaſt refrangible rays 54 deg. 5′. 2″, and 53 deg. 4′. 58″, whoſe ſines are 8099 and 7995, the common angle of incidence being 31 deg. 15′, and its ſine 5188; and theſe ſines, in the leaſt round numbers, are in proportion to one another, as 78 and 77 to 50 (l).

(k) Lect. Opt. Part I. § 31. Lem. II.

(l) Lect. Opt. Part I. § 32.

Now

Now if you ſubduct the common ſine of incidence, 50, from the ſines of refraction, 77 and 78; the remainders, 27 and 28, ſhew that in ſmall refractions the refraction of the leaſt refrangible rays is to the refraction of the moſt refrangible ones as 27 to 28 very nearly, and that the difference of the refractions of the leaſt refrangible and moſt refrangible rays is about the $27\frac{1}{2}$th part of the whole refraction of the mean refrangible rays.

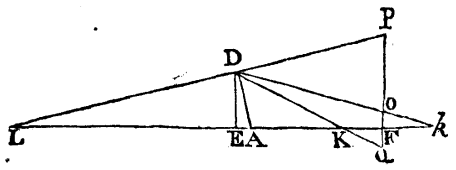
Imperfection of Teleſcopes.

Whence they that are skilled in Opticks will eaſily underſtand, that the breadth of the leaſt circular ſpace, into which object-glaſſes of teleſcopes can collect all ſorts of parallel rays, is about the $27\frac{1}{2}$th part of half the aperture of the glaſs, or 55th part of the whole aperture (m); and that the focus of the moſt refrangible rays is nearer to the object-glaſs than the focus of the leaſt refrangible ones, by about the $27\frac{1}{2}$th part of the diſtance between the object-glaſs and the focus of the mean refrangible ones.

And if rays of all ſorts, flowing from any one lucid point in the axis of any convex lens, be made, by the refraction of the lens, to converge to points not too remote from the lens, the focus of the moſt refrangible rays ſhall be nearer to the lens, than the focus of the leaſt refrangible ones, by a diſtance which is to the

(m) Lect. Opt. Part I. Prop. XXXVII.

(n) IMAGINE that Heterogeneal Rays, flowing from a lucid point L, in LA the axis of a ſpherical lens AD, fall upon the edge of the lens at D; and that they are refracted by the lens ſo as to meet the axis, the moſt refrangible in K, the leaſt refrangible in k, and thoſe of the mean refrangibility in F. Newton affirms that Kk is to $\frac{1}{27,5}$ FA as LF to LA, very nearly; provided the diſtance FA be not too great. And this we thus demonſtrate. From the point of incidence, D, draw DE perpendicular to the axis of the lens. Through F draw FP parallel with DE; and let FP meet the direct ray, LD, produced in P, and the refracted rays, Dk and DK, in o and Q. Now if the diſtance FA be not vaſtly great, KF and kF will be very nearly equal; alſo OF and FQ; OQ will be the leaſt breadth of the circular ſpace, in which the lens DA collects the heterogeneal rays emitted from L, and FO or FQ half that leaſt breadth. (Lect. Opt. Part I. Prop. XXXVII.) But becauſe the lines FO and DE are parallel, therefore kF : kE = FO : DE. Alſo KF : KE = FQ or FO : DE. Therefore kF + KF or Kk : kE + KE = FO : DE. But KF and kF being equal, kE + KE is twice FE. And if the lens DA be but a ſmall portion of its ſphere, twice FE will not ſenſibly exceed twice FA. Hence Kk : 2FA = FO : DE very nearly. And by conſequence Kk : FA = 2FO or OQ : DE. But OQ bears to DE a proportion



the $27\frac{1}{2}$th part of the diſtance of the focus of the mean refrangible rays from the lens, as the diſtance between that focus and the lucid point from whence the rays flow, is to the diſtance between that lucid point and the lens very nearly (n). of Teleſcopes.

Now to examine whether the difference between the refractions, which the moſt refrangible and the leaſt refrangible rays, flowing from the ſame point, ſuffer in the object-glaſſes of teleſcopes and ſuch like glaſſes, be ſo great as is here deſcribed, I contrived the following Experiment.

Exper. 16. The lens which I uſed in the ſecond and eighth Experiments, being placed ſix feet and an inch diſtant from any object, collected the ſpecies of that object, by the mean refrangible rays, at the diſtance of ſix feet and an inch from the lens on the other ſide. And therefore by the foregoing rule it ought to collect the ſpecies of that object, by the leaſt refrangible rays, at the diſtance of ſix feet and $3\frac{2}{3}$ inches from the lens; and by the moſt refrangible ones, at the diſtance of five feet and $10\frac{1}{3}$ inches from it: ſo that between the two places, where theſe leaſt and moſt refrangible rays collect the ſpecies, there may be the diſtance of about $5\frac{1}{3}$ inches. For by that rule, as ſix feet and an inch (the diſtance of the lens from the lucid object) is to twelve feet and two inches (the diſtance of the lucid object from the focus of the mean refrangible rays) that is, as one is to two, ſo is

portion compounded of the proportions of OQ to FP, and of FP to DE; i. e. of the proportions of OQ to FP, and of LF to LE. But taking the proportions of the ſines of refraction of the ſeveral rays, which are refrangible in the greateſt, leaſt, and mean degree, as they are here ſtated, it follows, from what is ſhewn in the XXXVIIth Prop. of Lect. Opt. Part I, that OQ bears to FP the proportion of 1 to 27,5. Therefore the proportion of OQ to DE is compounded of the proportions of 1 to 27,5, and of LF to LE. And the proportion of Kk to FA being the ſame, or very nearly the ſame with that of OQ to DE, is compounded of theſe ſame proportions. That is, Kk : FA = 1 : 27,5 + LF : LE. But again, if the lens DA be a very ſmall portion of a ſphere, LE will not be ſenſibly leſs than LA, and the proportions of LF to LE and LA will not be ſenſibly different. Hence Kk : FA = 1 : 27,5 + LF : LA very nearly. That is, Kk : FA = LF : 27,5 LA very nearly. By equality Kk : $\frac{1}{27,5}$ FA = LF : LA very nearly. Q. E. D.

If the diſtance FA be ſo great, that KF and Fk become ſenſibly unequal; the proportion of Kk to FA, here ſtated, will no longer ſubſiſt.

Cor. If the lucid point be removed farther and farther from the lens; the proportion of LF and LA, and of conſequence that of Kk and $\frac{1}{27,5}$ FA, approaches to equality; and ultimately, when the ray LD becomes parallel to the axis, LF, LA become equal, and $Kk = \frac{1}{27,5}$ FA, juſt as Newton affirms.

Imperfection

the $27\frac{1}{2}$th part of ſix feet and an inch (the diſtance between the lens and the ſame focus) to the diſtance between the focus of the moſt refrangible rays and the focus of the leaſt refrangible ones; which is therefore $5\frac{17}{55}$ inches, that is very nearly $5\frac{1}{3}$ inches. Now to know whether this meaſure was true, I repeated the ſecond and eighth Experiment with coloured light, which was leſs compounded than that I there made uſe of: for I now ſeparated the heterogeneous rays one from another, by the method I deſcribed in the eleventh Experiment; ſo as to make a coloured ſpectrum about twelve or fifteen times longer than broad. This ſpectrum I caſt on a printed book, and placing the abovementioned lens at the diſtance of ſix feet and an inch from this ſpectrum, to collect the ſpecies of the illuminated letters at the ſame diſtance on the other ſide; I found that the ſpecies of the letters illuminated with Blue were nearer to the lens, than thoſe illuminated with deep Red, by about three inches, or three and a quarter: but the ſpecies of the letters illuminated with Indigo and Violet appeared ſo confuſed and indiſtinct, that I could not read them. Whereupon viewing the priſm, I found it was full of veins running from one end of the glaſs to the other; ſo that the refraction could not be regular. I took another priſm therefore which was free from veins; and inſtead of the letters I uſed two or three parallel black lines, a little broader than the ſtroaks of the letters; and caſting the colours upon theſe lines, in ſuch manner that the lines ran along the colours from one end of the ſpectrum to the other; I found the focus where the Indigo, or confine of this colour and Violet, caſt the ſpecies of the black lines moſt diſtinctly, to be about four inches or $4\frac{1}{4}$ nearer to the lens, than the focus where the deepeſt Red caſt the ſpecies of the ſame black lines moſt diſtinctly. The Violet was ſo faint and dark, that I could not diſcern the ſpecies of the lines diſtinctly by that colour; and therefore conſidering that the priſm was made of a dark coloured glaſs inclining to Green, I took another priſm of clear white glaſs; but the ſpectrum of colours, which this priſm made, had long white ſtreams of faint light ſhooting out from both ends of the colours; which made me conclude that ſomething was amiſs: and viewing the priſm, I found two or three little

little bubbles in the glaſs which refracted the light irregularly. Wherefore I covered that part of the glaſs with black paper; and letting the light paſs through another part of it, which was free from ſuch bubbles, the ſpectrum of colours became free from thoſe irregular ſtreams of light, and was now ſuch as I deſired. But ſtill I found the Violet ſo dark and faint, that I could ſcarce ſee the ſpecies of the lines by the Violet, and not at all by the deepeſt part of it, which was next the end of the ſpectrum. I ſuſpected therefore that this faint and dark colour might be allayed by that ſcattering light, which was refracted and reflected irregularly, partly by ſome very ſmall bubbles in the glaſſes, and partly by the inequalities of their poliſh: which light, though it was but little, yet it being of a White colour, might ſuffice to affect the ſenſe ſo ſtrongly, as to diſturb ths phænomena of that weak and dark colour the Violet; and therefore I tried, as in the 12th, 13th and 14th Experiments, whether the light of this colour did not conſiſt of a ſenſible mixture of heterogeneous rays, but found it did not. Nor did the refractions cauſe any other ſenſible colour than Violet to emerge out of this light; as they would have done out of White light, and by conſequence out of this Violet Light, had it been ſenſibly compounded with White Light. And therefore I concluded, that the reaſon why I could not ſee the ſpecies of the lines diſtinctly by this colour, was only the darkneſs of this colour and thinneſs of its light, and its diſtance from the axis of the lens; I divided therefore thoſe parallel black lines into equal parts, by which I might readily know the diſtances of the colours in the ſpectrum from one another; and noted the diſtances of the lens from the foci of ſuch colours as caſt the ſpecies of the lines diſtinctly: and then conſidered, whether the difference of thoſe diſtances bear ſuch proportion to $5\frac{1}{3}$ inches, the greateſt difference of the diſtances which the foci of the deepeſt Red and Violet ought to have from the lens, as the diſtance of the obſerved colours from one another in the ſpectrum bear to the greateſt diſtance of the deepeſt Red and Violet meaſured in the rectilinear ſides of the ſpectrum; that is, to the length of thoſe ſides, or exceſs of the length of the ſpectrum above its breadth. And my obſervations were as follows.

Of Teleſcopes.

Imperfection

When I observed and compared the deepest sensible Red, and the colour in the confine of Green and Blue, which at the rectilinear sides of the spectrum was distant from it half the length of those sides; the focus where the confine of Green and Blue cast the species of the lines distinctly on the paper, was nearer to the lens, than the focus where the Red cast those lines distinctly on it, by about $2\frac{1}{2}$ or $2\frac{3}{4}$ inches. For sometimes the measures were a little greater, sometimes a little less, but seldom varied from one another above $\frac{1}{3}$ of an inch. For it was very difficult to define the places of the foci, without some little errors. Now if the colours distant half the length of the image (measured at its rectilinear sides) give $2\frac{1}{2}$ or $2\frac{3}{4}$ difference of the distances of their foci from the lens, then the colours distant the whole length ought to give 5 or $5\frac{1}{2}$ inches difference of those distances.

But here it is to be noted, that I could not see the Red to the full end of the spectrum, but only to the center of the semicircle which bounded that end, or a little farther; and therefore I compared this Red not with that colour which was exactly in the middle of the spectrum, or confine of Green and Blue, but with that which converged a little more to the Blue than to the Green. And as I reckoned the whole length of the colours not to be the whole length of the spectrum, but the length of its rectilinear sides, so completing the semicircular ends into circles, when either of the observed colours fell within those circles, I measured the distance of that colour from the semicircular end of the spectrum; and subducting half this distance from the measured distance of the two colours, I took the remainder for their corrected distance; and in these observations set down this corrected distance for the difference of the distances of their foci from the lens. For as the length of the rectilinear sides of the spectrum would be the whole length of all the colours, were the circles, of which (as we shewed) that spectrum consists, contracted and reduced to physical points; so in that case this corrected distance would be the real distance of the two observed colours.

When therefore I farther observed the deepest sensible Red, and that Blue whose corrected distance from it was $\frac{7}{12}$ parts of the length of the rectilinear sides of the spectrum, the difference of the

the distances of their foci from the lens was about $3\frac{1}{4}$ inches: and as 7 to 12 so is $3\frac{1}{4}$ to $5\frac{4}{7}$. of Telescopes.

When I observed the deepest sensible Red, and that Indigo whose corrected distance was $\frac{8}{12}$ or $\frac{2}{3}$ of the length of the rectilinear sides of the spectrum; the difference of the distances of their foci from the lens was about $3\frac{2}{3}$ inches: and as 2 to 3 so is $3\frac{2}{3}$ to $5\frac{1}{2}$.

When I observed the deepest sensible Red, and that deep Indigo whose corrected distance from one another was $\frac{9}{12}$ or $\frac{3}{4}$ of the length of the rectilinear sides of the spectrum; the difference of the distances of their foci from the lens was about 4 inches: and as 3 to 4 so is 4 to $5\frac{1}{3}$.

When I observed the deepest sensible Red, and that part of the Violet next the Indigo, whose corrected distance from the Red was $\frac{10}{12}$ or $\frac{5}{6}$ of the length of the rectilinear sides of the spectrum; the difference of the distances of their foci from the lens was about $4\frac{1}{2}$ inches: and as 5 to 6, so is $4\frac{1}{2}$ to $5\frac{2}{5}$. For sometimes when the lens was advantageously placed, so that its axis respected the Blue, and all things else were well ordered, and the sun shone clear, and I held my eye very near to the paper on which the lens cast the species of the lines, I could see pretty distinctly the species of those lines by that part of the Violet which was next the Indigo; and sometimes I could see them by above half the Violet. For in making these Experiments I had observed, that the species of those colours only appear distinct, which were in or near the axis of the lens: so that if the Blue or Indigo were in the axis, I could see their species distinctly; and then the Red appeared much less distinct than before. Wherefore I contrived to make the spectrum of colours shorter than before; so that both its ends might be nearer to the axis of the lens. And now its length was about $2\frac{1}{2}$ inches, and breadth about $\frac{1}{5}$ or $\frac{1}{6}$ of an inch. Also instead of the black lines on which the spectrum was cast, I made one black line broader than those, that I might see its species more easily; and this line I divided by short cross lines into equal parts, for measuring the distances of the observed colours. And now I could sometimes see the species of this line with its divisions almost as far as the center

of

Imperfection of the ſemicircular Violet end of the ſpectrum, and made theſe farther obſervations.

When I obſerved the deepeſt ſenſible Red, and that part of the Violet whoſe corrected diſtance from it was about $\frac{8}{9}$ parts of the rectilinear ſides of the ſpectrum; the difference of the diſtances of the foci of thoſe colours from the lens, was one time $4\frac{2}{3}$, another time $4\frac{3}{4}$, another time $4\frac{7}{8}$ inches: and as 8 to 9, ſo are $4\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{4}$, $4\frac{7}{8}$, to $5\frac{1}{4}$, $5\frac{11}{32}$, $5\frac{31}{64}$ reſpectively.

When I obſerved the deepeſt ſenſible Red, and deepeſt ſenſible Violet (the corrected diſtance of which colours when all things were ordered to the beſt advantage, and the ſun ſhone very clear, was about $\frac{11}{12}$ or $\frac{15}{16}$ parts of the length of the rectilinear ſides of the coloured ſpectrum) I found the difference of the diſtances of their foci from the lens ſometimes $4\frac{3}{4}$, ſometimes $5\frac{1}{4}$, and for the moſt part 5 inches, or thereabouts: and as 11 to 12, or 15 to 16, ſo is 5 inches to $5\frac{1}{2}$ or $5\frac{1}{3}$ inches.

And by this progreſſion of Experiments I ſatisfied myſelf, that had the light at the very ends of the ſpectrum been ſtrong enough to make the ſpecies of the black lines appear plainly on the paper, the focus of the deepeſt Violet would have been found nearer to the lens, than the focus of the deepeſt Red, by about $5\frac{1}{3}$ inches at leaſt. And this is a farther evidence, that the ſines of incidence and refraction of the ſeveral ſorts of rays, hold the ſame proportion to one another in the ſmalleſt refractions which they do in the greateſt.

My progreſs in making this nice and troubleſome Experiment I have ſet down more at large, that they, that ſhall try it after me, may be aware of the circumſpection requiſite to make it ſucceed well. And if they cannot make it ſucceed ſo well as I did, they may notwithſtanding collect, by the proportion of the diſtance of the colours of the ſpectrum to the difference of the diſtances of their foci from the lens, what would be the ſucceſs in the more diſtant colours by a better trial. And yet if they uſe a broader lens than I did, and fix it to a long ſtraight ſtaff, by means of which it may be readily and truly directed to the colour whoſe focus is deſired; I queſtion not but the Experiment will ſucceed better with them, than it did with me. For I directed the axis as

as nearly as I could to the middle of the colours; and then the of Teleſcopes. faint ends of the ſpectrum, being remote from the axis, caſt their ſpecies leſs diſtinctly on the paper, than they would have done, had the axis been ſucceſſively directed to them.

Now by what has been ſaid, it is certain that the rays which differ in refrangibility do not converge to the ſame focus; but if they flow from a lucid point, as far from the lens on one ſide as their foci are on the other, the focus of the moſt refrangible rays ſhall be nearer to the lens than that of the leaſt refrangible, by above the fourteenth part of the whole diſtance: and if they flow from a lucid point, ſo very remote from the lens, that before their incidence they may be accounted parallel, the focus of the moſt refrangible rays ſhall be nearer to the lens than the focus of the leaſt refrangible, by about the 27th or 28th part of their whole diſtance from it. And the diameter of the circle in the middle ſpace between thoſe two foci, which they illuminate when they fall there on any plane perpendicular to the axis (which circle is the leaſt into which they can all be gathered) is about the 55th part of the diameter of the aperture of the glaſs. So that it is a wonder, that Teleſcopes repreſent objects ſo diſtinct as they do. But were all the rays of light equally refrangible, the error ariſing only from the ſphericalneſs of the figures of glaſſes would be many hundred times leſs. For if the object-glaſs of a Teleſcope be plano-convex, and the plane ſide be turned towards the object, and the diameter of the ſphere whereof this glaſs is a ſegment be called D, and the ſemidiameter of the aperture of the glaſs be called S, and the ſine of incidence out of glaſs into air, be to the ſine of refraction as 1 to R: the rays, which come parallel to the axis of the glaſs, ſhall, in the place where the image of the object is moſt diſtinctly made, be ſcattered all over a little circle, whoſe diameter is $\frac{R^4}{I^4} \times \frac{S \text{ cub.}}{D \text{ quad.}}$ very nearly; as I gather by computing the errors of the rays by the method of Infinite Series, and rejecting the terms whoſe quantities are inconſiderable (*). As for inſtance, if the ſine of incidence, I, be to the ſine of refraction, R, as 20 to 31; and if D,

(*) Vide Lect. Opt. Part I. Sect. IV. Prop. XXXI. Cor. 7.

the

Imperfection

the diameter of the ſphere to which the convex ſide of the glaſs is ground, be 100 feet, or 1200 inches; and s, the diameter of the aperture, be two inches: the diameter of the little circle (that is $\frac{R_{\eta} \times S \text{ cub.}}{I_{\eta} \times D \text{ quad.}}$) will be $\frac{31 \times 31 \times 8}{20 \times 20 \times 1200 \times 1200}$ or $\frac{961}{72000000}$ parts of an inch. But the diameter of the little circle, through which theſe rays are ſcattered by unequal refrangibility, will be about the 55th part of the aperture of the object-glaſs, which here is four inches. And therefore the error, ariſing from the ſpherical figure of the glaſs, is to the error ariſing from the different refrangibility of the rays, as $\frac{961}{72000000}$ to $\frac{4}{55}$, that is as 1 to 5449: and therefore, being in compariſon ſo very little, deſerves not to be conſidered.

But you will ſay, if the errors cauſed by the different refrangibility be ſo very great, how comes it to paſs that objects appear through Teleſcopes ſo diſtinct as they do? I anſwer, it is becauſe the erring rays are not ſcattered uniformly over all that circular ſpace, but collected infinitely more denſely in the center than in any other part of the circle; and in the way from the center to the circumference grow continually rarer and rarer, ſo as at the circumference to become infinitely rare; and by reaſon of their rarity are not ſtrong enough to be viſible, unleſs in the center, and very near it. Let ADE (in *fig.* 27.) repreſent one of thoſe circles, deſcribed with the center C and ſemidiameter AC; and let BFG be a ſmaller circle concentrick to the former, cutting with its circumference the diameter AC in B; and biſect AC in N: and, by my reckoning, the denſity of the light in any place B will be to its denſity in N, as AB to BC; and the whole light, within the leſſer circle BFG, will be to the whole light within the greater AED, as the exceſs of the ſquare of AC above the ſquare of AB is to the ſquare of AC. As if BC be the fifth part of AC, the light will be four times denſer in B than in N; and the whole light within the leſs circle, will be to the whole light within the greater, as nine to twenty-five. Whence it is evident that the light within the leſs circle, muſt ſtrike the ſenſe much more ſtrongly, than that faint and dilated light round about, between it and the circumference of the greater.

But

of Teleſcopes.

But it is farther to be noted, that the moſt luminous of the Priſmatick Colours are the Yellow and Orange. Theſe affect the ſenſes more ſtrongly than all the reſt together, and next to these in ſtrength are the Red and Green. The Blue, compared with theſe, is a faint and dark colour; and the Indigo and Violet are much darker and fainter: ſo that theſe, compared with the ſtronger colours, are little to be regarded. The images of objects are therefore to be placed, not in the focus of the mean refrangible rays, which are in the confine of Green and Blue, but in the focus of thoſe rays which are in the middle of the Orange and Yellow; there, where the colour is moſt luminous and fulgent: that is, in the brighteſt Yellow, that Yellow which inclines more to Orange than to Green. And by the refraction of theſe rays (whoſe ſines of incidence and refraction in glaſs are as 17 and 11) the refraction of glaſs and cryſtal for optical uſes is to be meaſured. Let us therefore place the image of the object in the focus of theſe rays, and all the Yellow and Orange will fall within a circle, which diameter is about the 250th part of the diameter of the aperture of the glaſs. And if you add the brighter half of the Red (that half which is next the Orange) and the brighter half of the Green (that half which is next the Yellow) about three-fifth-parts of the light of theſe two colours will fall within the ſame circle, and two fifth-parts will fall without it round about; and that which falls without will be ſpread through almoſt as much more ſpace as that which falls within, and ſo in the groſs be almoſt three times rarer. Of the other half of the Red and Green (that is of the deep Dark Red and Willow-Green) about one quarter will fall within this circle, and three quarters without; and that which falls without will be ſpread through about four or five times more ſpace than that which falls within, and ſo in the groſs be rarer; and if compared with the whole light within it, will be about 25 times rarer than all that taken in the groſs; or rather more than 30 or 40 times rarer: becauſe the deep Red, in the end of the ſpectrum of colours made by a priſm, is very thin and rare, and the Willow-Green is ſomething rarer than the Orange and Yellow. The light of theſe colours therefore being ſo very much rarer than that within the circle, will

 ſcarce

Imperfection

ſcarce affect the ſenſe; eſpecially ſince the deep Red and Willow Green of this light, are much darker colours than the reſt. And for the ſame reaſon the Blue and Violet, being much darker colours than theſe, and much more rarified, may be neglected. For the denſe and bright light of the circle, will obſcure the rare and weak light of theſe dark colours round about it, and render them almoſt inſenſible. The ſenſible image of a lucid point is therefore ſcarce broader than a circle, whoſe diameter is the 250th part of the diameter of the aperture of the object-glaſs of a good teleſcope; or not much broader, if you except a faint and dark miſty light round about it, which a ſpectator will ſcarce regard. And therefore in a teleſcope whoſe aperture is four inches, and length an hundred feet, it exceeds not 2″. 45‴, or 3″. And in a teleſcope whoſe aperture is two inches, and length 20 or 30 feet, it may be 5″ or 6″, and ſcarce above. And this anſwers well to experience: for ſome aſtronomers have found the diameters of the fixed ſtars, in teleſcopes of between 20 and 60 feet in length, to be about 5″ or 6″, or at moſt 8″ or 10″ in diameter. But if the eye-glaſs be tinged faintly with the ſmoke of a lamp or torch, to obſcure the light of the ſtar, the fainter light in the circumference of the ſtar ceaſes to be viſible, and the ſtar (if the glaſs be ſufficiently ſoiled with ſmoke) appears ſomething more like a mathematical point. And for the ſame reaſon, the enormous part of the light in the circumference of every lucid point ought to be leſs diſcernible in ſhorter teleſcopes than in longer, becauſe the ſhorter tranſmit leſs light to the eye.

Now that the fixed ſtars, by reaſon of their immenſe diſtance, appear like points, unleſs ſo far as their light is dilated by refraction, may appear from hence; that when the moon paſſes over them and eclipſes them, their light vaniſhes, not gradually like that of the planets, but all at once; and in the end of the eclipſe it returns into ſight all at once, or certainly in leſs time than the ſecond of a minute; the refraction of the moon's atmoſphere a little protracting the time in which the light of the ſtar firſt vaniſhes, and afterwards returns into ſight.

Now if we ſuppoſe the ſenſible image of a lucid point, to be even 250 times narrower than the aperture of the glaſs: yet this image

of Teleſcopes.

image would be ſtill much greater, than if it were only from the ſpherical figure of the glaſs. For were it not for the different refrangibility of the rays, its breadth, in an 100 foot teleſcope whoſe aperture is 4 inches, would be but $\frac{961}{7200000}$ parts of an inch, as is manifeſt by the foregoing computation. And therefore in this caſe the greateſt errors, ariſing from the ſpherical figure of the glaſs, would be to the greateſt ſenſible errors, ariſing from the different refrangibility of the rays, as $\frac{961}{7200000}$ to $\frac{4}{250}$ at moſt, that is only as 1 to 1200. And this ſufficiently ſhews that it is not the ſpherical figures of glaſſes, but the different refrangibility of the rays, which hinders the perfection of teleſcopes.

There is another argument, by which it may appear, that the different refrangibility of rays is the true cauſe of the imperfection of teleſcopes. For the errors of the rays, ariſing from the ſpherical figures of object-glaſſes, are as the cubes of the apertures of the object-glaſſes; and thence to make teleſcopes of various lengths magnify with equal diſtinctneſs, the apertures of the object-glaſſes, and the charges or magnifying powers ought to be as the cubes of the ſquare-roots of their lengths; which doth not anſwer to experience. But the errors of the rays, ariſing from the different refrangibility, are as the apertures of the object-glaſſes; and thence to make teleſcopes of various lengths magnify with equal diſtinctneſs, their apertures and charges ought to be as the ſquare roots of their lengths; and this anſwers to experience, as is well known. For inſtance, a teleſcope of 64 feet in length, with an aperture of $2\frac{2}{3}$ inches, magnifies about 120 times, with as much diſtinctneſs as one of a foot in length, with $\frac{1}{3}$ of an inch aperture, magnifies 15 times.

Now were it not for this different refrangibility of rays, teleſcopes might be brought to a greater perfection than we have yet deſcribed, by compoſing the object-glaſs of two glaſſes with water between them. Let ADFC [in *fig.* 28.] repreſent the object-glaſs compoſed of two glaſſes, ABED and BEFC, alike convex on the outſides AGD and CHF, and alike concave on the inſides BME, BNE. with water in the concavity BMEN. Let the ſine of incidence out of glaſs into air be as I to R, and out of water into air as K to R, and by conſequence out of glaſs into water as I to K:

and let the diameter of the ſphere to which the convex ſides, AGD and CHF, are ground be D; and the diameter of the ſphere to which the concave ſides, BME and BNE, are ground be to D, as the cube-root of KK−KI to the cube-root of RK−RI: and the refractions on the concave ſides of the glaſſes will very much correct the errors of the refractions on the convex ſides, ſo far as they ariſe from the ſphericalneſs of the figure. And by this means might teleſcopes be brought to ſufficient perfection, were it not for the different refrangibility of ſeveral ſorts of rays. But by reaſon of this different refrangibility, I do not yet ſee any other means of improving teleſcopes by refractions alone, than that of increaſing their lengths; for which end the late contrivance of *Hugenius* ſeems well accommodated. For very long tubes are cumberſome, and ſcarce to be readily managed, and by reaſon of their length are very apt to bend, and ſhake by bending, ſo as to cauſe a continual trembling in the objects, whereby it becomes difficult to ſee them diſtinctly: whereas, by his contrivance, the glaſſes are readily manageable, and the object-glaſs, being fixed upon a ſtrong upright pole, becomes more ſteady.

Reflecting

Seeing therefore the improvement of teleſcopes of given lengths by refractions is deſperate; I contrived heretofore a perſpective by reflexion, uſing inſtead of an object-glaſs a concave metal. The diameter of the ſphere, to which the metal was ground concave, was about 25 Engliſh inches, and by conſequence the length of the inſtrument about ſix inches and a quarter. The eye-glaſs was plano-convex, and the diameter of the ſphere to which the convex ſide was ground was about $\frac{1}{5}$ of an inch, or a little leſs, and by conſequence it magnified between 30 and 40 times. By another way of meaſuring I found that it magnified about 35 times. The concave metal bore an aperture of an inch and a third part; but the aperture was limited not by an opake circle, covering the limb of the metal round about, but by an opake circle placed between the eye-glaſs and the eye; and perforated in the middle with a little round hole for the rays to paſs through to the eye. For this circle by being placed here, ſtopped much of the erroneous light, which otherwiſe would have diſturbed the viſion. By comparing it with a pretty good perſpective of four

four feet in length, made with a concave eye-glaſs, I could read at a greater diſtance with my own inſtrument than with the glaſs. Yet objects appeared much darker in it than in the glaſs, and that partly becauſe more light was loſt by reflexion in the metal, than by refraction in the glaſs, and partly becauſe my inſtrument was overcharged. Had it magnified but 30 or 25 times, it would have made the object appear more briſk and pleaſant. Two of theſe I made about 16 years ago, and have one of them ſtill by me, by which I can prove the truth of what I write. Yet it is not ſo good as at the firſt. For the concave has been divers times tarniſhed and cleared again, by rubbing it with very ſoft leather. When I made theſe, an artiſt in *London* undertook to imitate it; but uſing another way of poliſhing them than I did, he fell much ſhort of what I had attained to, as I afterwards underſtood by diſcourſing with the under workman he had employed. The poliſh I uſed was in this manner. I had two round copper-plates each ſix inches in diameter, the one convex the other concave, ground very true to one another. On the convex I ground the object-metal or concave which was to be poliſhed, till it had taken the figure of the convex, and was ready for a poliſh. Then I pitched over the convex very thinly, by dropping melted pitch upon it, and warming it to keep the pitch ſoft, whilſt I ground it with the concave copper wetted, to make it ſpread evenly all over the convex. Thus by working it well, I made it as thin as a groat; and after the convex was cold, I ground it again to give it as true a figure as I could. Then I took putty, which I had made very fine by waſhing it from all its groſſer particles, and laying a little of this upon the pitch, I ground it upon the pitch with the concave copper till it had done making a noiſe; and then upon the pitch I ground the object-metal with a briſk motion, for about two or three minutes of time, leaning hard upon it. Then I put freſh putty upon the pitch, and ground it again till it had done making a noiſe, and afterwards ground the object-metal upon it as before. And this work I repeated till the metal was poliſhed, grinding it the laſt time with all my ſtrength for a good while together, and frequently breathing upon the pitch to keep it moiſt, without laying on any more freſh putty.

Teleſcope.

The

Reflecting

The object-metal was two inches broad, and about one-third part of an inch thick, to keep it from bending. I had two of these metals, and when I had polished them both I tried which was best; and ground the other again, to see if I could make it better, than that which I kept. And thus by many trials I learned the way of polishing, till I made those two reflecting perspectives I spake of above. For this art of polishing will be better learned by repeated practice than by my description. Before I ground the object-metal on the pitch, I always ground the putty on it with the concave copper till it had done making a noise; because if the particles of the putty were not by this means made to stick fast in the pitch, they would by rolling up and down grate and fret the object-metal and fill it full of little holes.

But because metal is more difficult to polish than glass, and is afterwards very apt to be spoiled by tarnishing, and reflects not so much light as glass quick-silvered over does: I would propound to use, instead of the metal, a glass ground concave on the foreside, and as much convex on the backside, and quick-silvered over on the convex side. The glass must be every where of the same thickness exactly. Otherwise it will make objects look coloured and indistinct. By such a glass I tried, above five or six years ago, to make a reflecting telescope of four feet in length to magnify about 150 times, and I satisfied myself, that there wants nothing but a good artist to bring the design to perfection. For the glass being wrought by one of our *London* artists after such a manner as they grind glasses for telescopes, though it seemed as well wrought as the object-glasses use to be, yet when it was quick-silvered, the reflexion discovered innumerable inequalities all over the glass. And by reason of these inequalities, objects appeared indistinct in this instrument. For the errors of reflected rays caused by any inequality of the glass, are about six times greater than the errors of refracted rays caused by the like inequalities. Yet by this Experiment I satisfied myself that the reflexion on the concave side of the glass, which I feared would disturb the vision, did no sensible prejudice to it; and by consequence that nothing is wanting to perfect these telescopes, but good workmen, who can grind and polish glasses truly spherical. An

Telescope.

An object-glass of a fourteen-foot telescope, made by an artificer at *London*, I once mended considerably, by grinding it on pitch with putty, and leaning very easily on it in the grinding, lest the putty should scratch it. Whether this way may not do well enough for polishing these reflecting glasses, I have not yet tried. But he that shall try either this, or any other way of polishing, which he may think better, may do well to make his glasses ready for polishing, by grinding them without that violence, wherewith our *London* workmen press their glasses in grinding. For by such violent pressure, glasses are apt to bend a little in the grinding, and such bending will certainly spoil their figure. To recommend therefore the consideration of these reflecting glasses, to such artists as are curious in figuring glasses, I shall describe this optical instrument in the following Proposition.

PROP. VIII. PROB. II.

To shorten Telescopes.

Let ABDC [in *fig.* 29.] represent a glass spherically concave on the foreside AB, and as much convex on the backside CD, so that it be every where of an equal thickness. Let it not be thicker on one side than on the other, lest it make objects appear coloured and indistinct; and let it be very truly wrought and quick-silvered over on the backside, and set in the tube VXYZ which must be very black within. Let EFG represent a prism of glass, or crystal, placed near the other end of the tube, in the middle of it, by means of a handle of brass or iron FGK, to the end of which made flat it is cemented. Let this prism be rectangular at E, and let the other two angles at F and G be accurately equal to each other, and by consequence equal to half right ones; and let the plane sides FE and GE be square, and by consequence the third side FG a rectangular parallelogram, whose length is to its breadth in a subduplicate proportion of two to one. Let it be so placed in the tube, that the axis of the speculum may pass through the middle of the square side EF perpendicularly, and by consequence through the middle of the side FG at an angle of 45 degrees; and let the side EF be turned towards the speculum, and the

Reflecting

the diſtance of this priſm from the ſpeculum be ſuch, that the rays of the light PQ, RS, &c. which are incident upon the ſpeculum in lines parallel to the axis thereof, may enter the priſm at the ſide EF, and be reflected by the ſide FG, and thence go out of it, through the ſide GE, to the point T; which muſt be the common focus of the ſpeculum ABDC, and of a plano-convex eye-glaſs, H, through which thoſe rays muſt paſs to the eye. And let the rays, at their coming out of the glaſs, paſs through a ſmall round hole or aperture made in a little plate of lead, braſs or ſilver, wherewith the glaſs is to be covered, which hole muſt be no bigger than is neceſſary for light enough to paſs through. For ſo it will render the object diſtinct, the plate, in which it is made, intercepting all the erroneous part of the light which comes from the verges of the ſpeculum AB. Such an inſtrument well made, if it be ſix foot long (reckoning the length from the ſpeculum to the priſm, and thence to the focus T) will bear an aperture of ſix inches at the ſpeculum, and magnify between two and three hundred times. But the hole H here limits the aperture with more advantage, than if the aperture was placed at the ſpeculum. If the inſtrument be made longer or ſhorter, the aperture muſt be in proportion as the cube of the ſquare-root of the length, and the magnifying as the aperture. But it is convenient that the ſpeculum be an inch or two broader than the aperture at leaſt, and that the glaſs of the ſpeculum be thick, that it bend not in the working. The priſm EFG muſt be no bigger than is neceſſary, and its backſide FG muſt not be quick-ſilvered over. For without quick-ſilver it will reflect all the light incident on it from the ſpeculum.

In this inſtrument the object will be inverted, but may be erected by making the ſquare ſides EF and EG of the priſm EFG not plane but ſpherically convex, that the rays may croſs as well before they come at it, as afterwards between it and the eye-glaſs. If it be deſired that the inſtrument bear a larger aperture, that may be alſo done by compoſing the ſpeculum of two glaſſes with water between them.

If the theory of making teleſcopes could at length be fully brought into practice, yet there would be certain bounds beyond

Fig. 1.

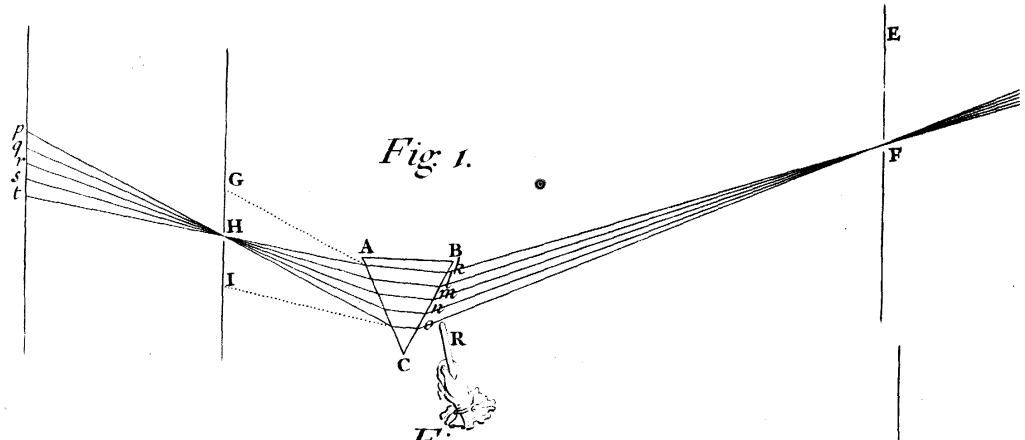


Fig. 2.

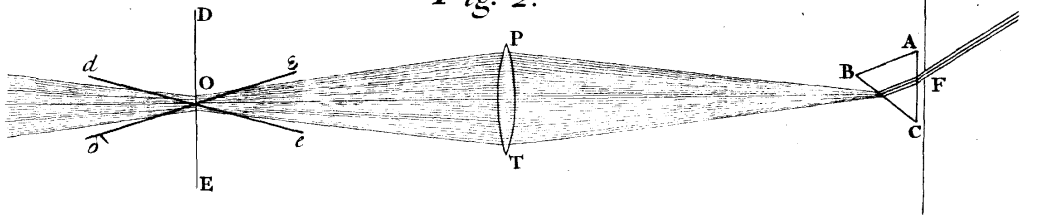


Fig. 3.

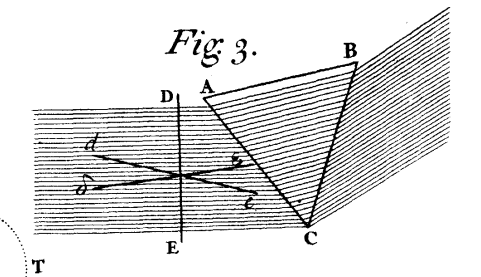


Fig. 4.

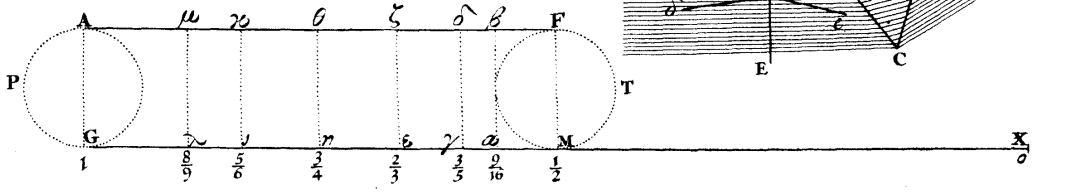
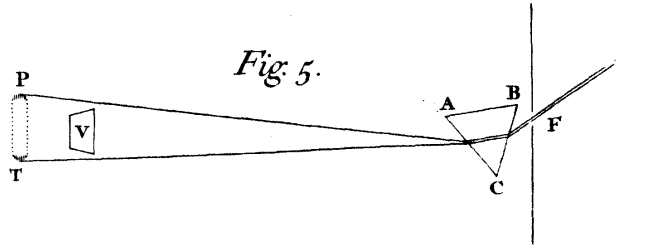


Fig. 5.



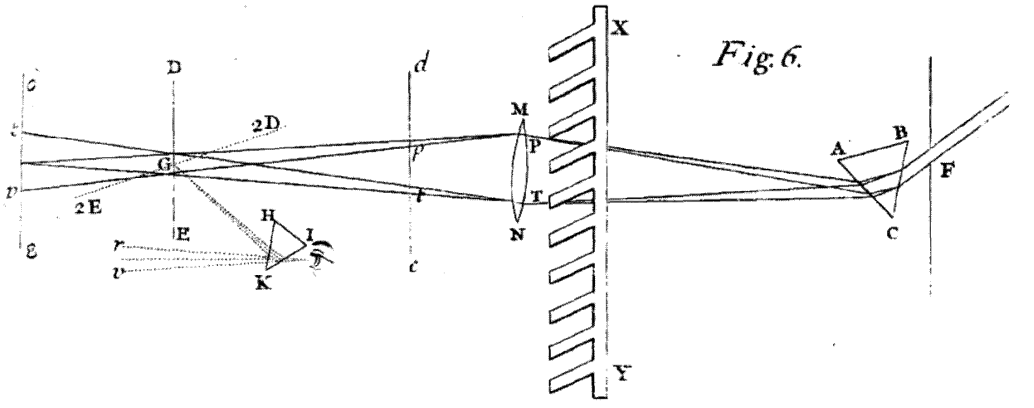


Fig. 6.

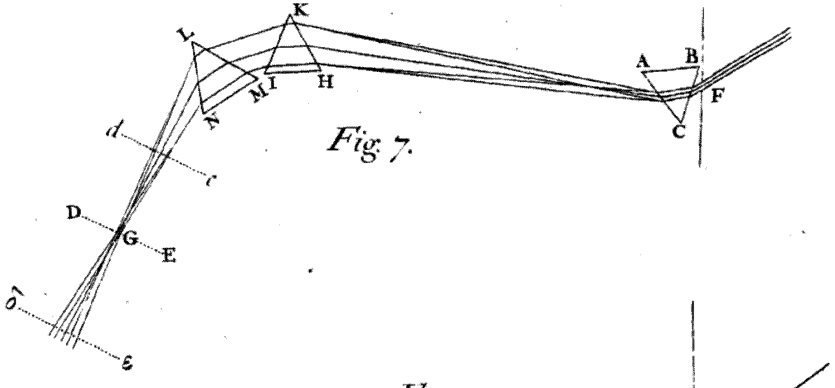


Fig. 7.

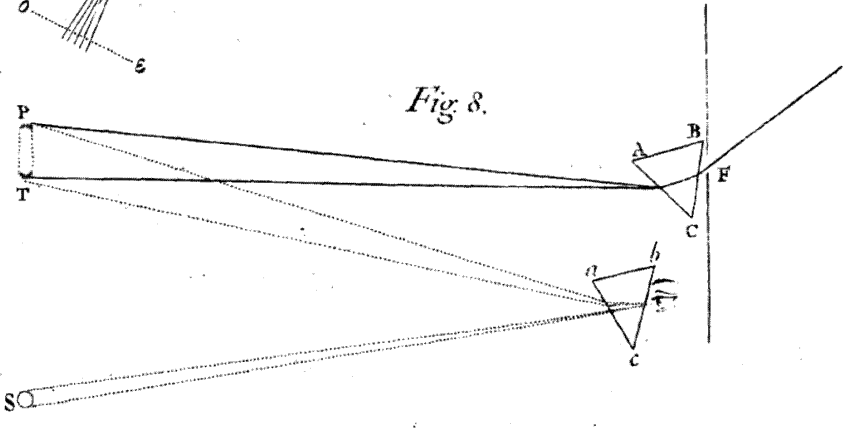


Fig. 8.

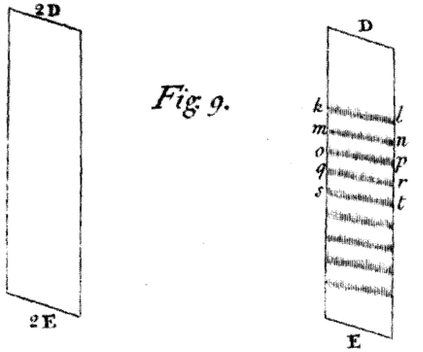


Fig. 9.

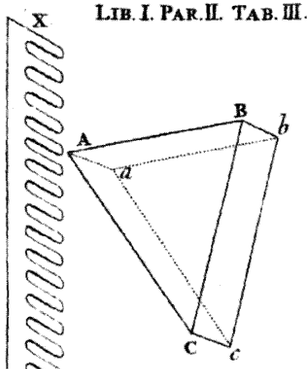


Fig. 10.

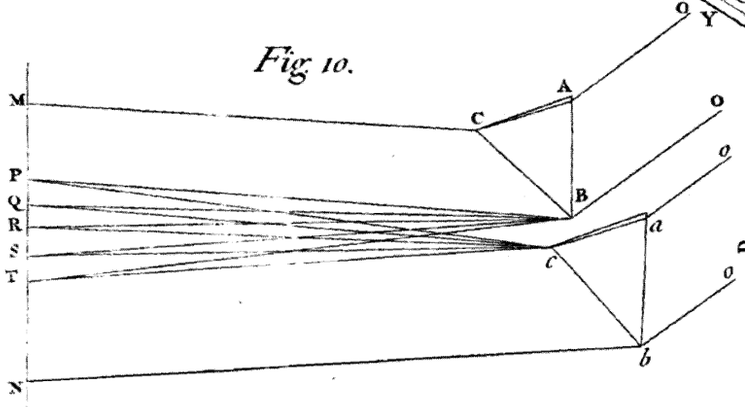


Fig. 11.

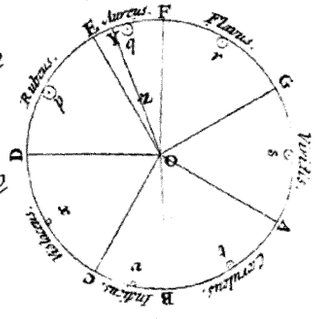


Fig. 12.

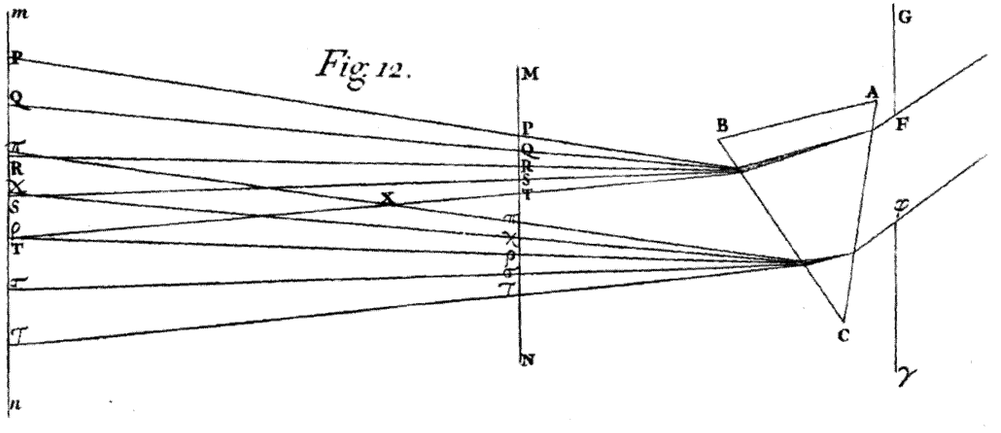


Fig. 13.

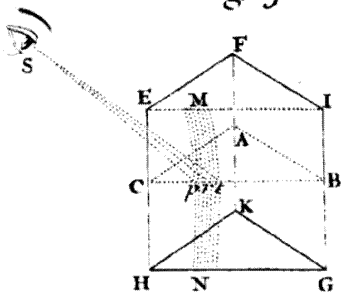


Fig. 14.

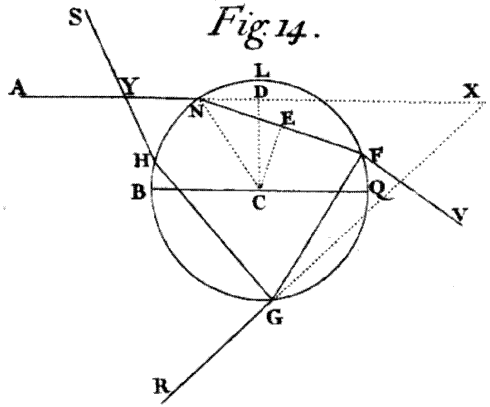


Fig. 15.

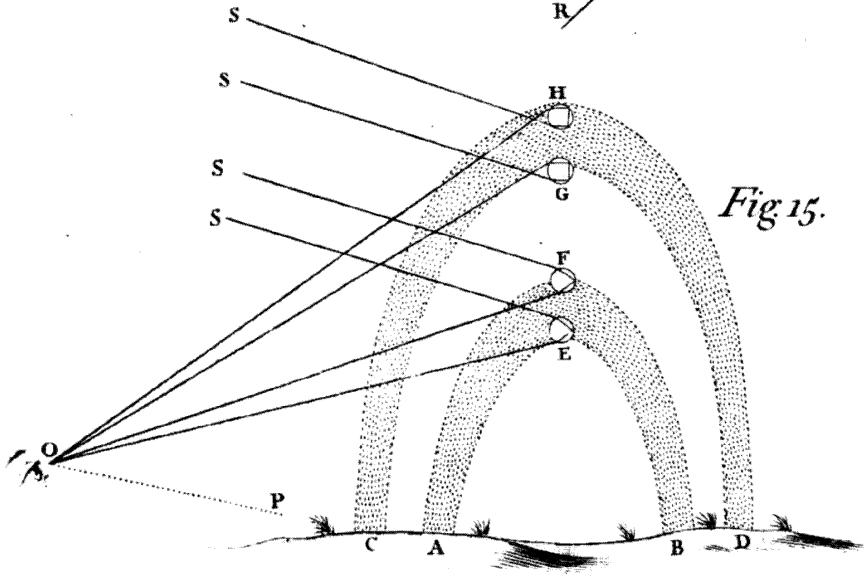


Fig. 16.

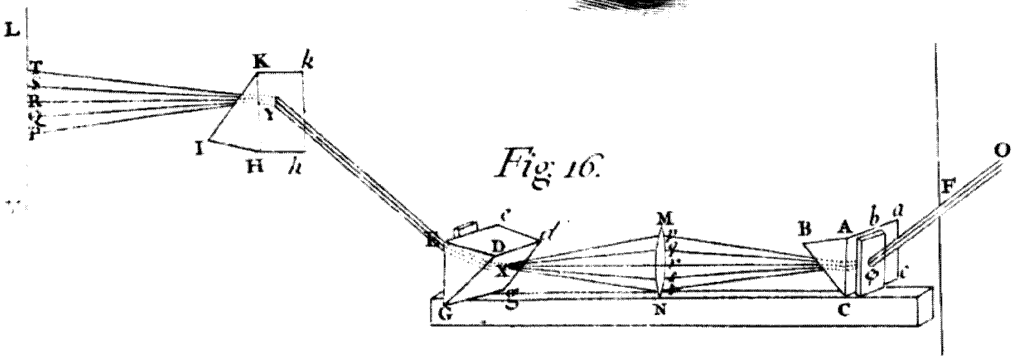


Fig. 17.

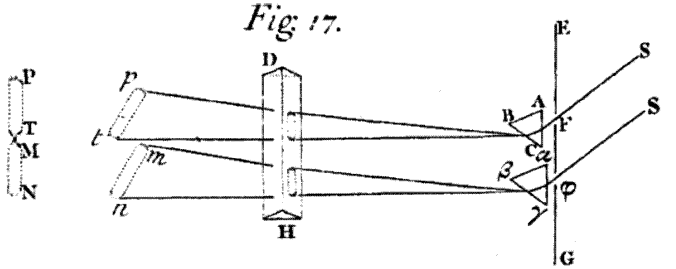


Fig. 18.

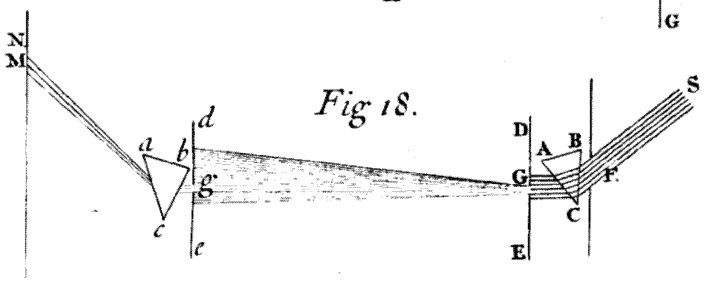


Fig. 19.

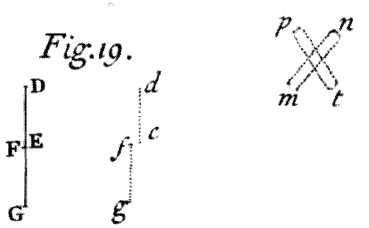


Fig. 20.

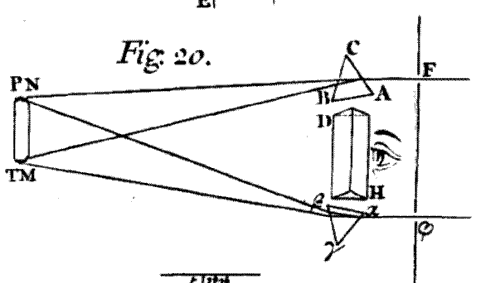


Fig. 21.

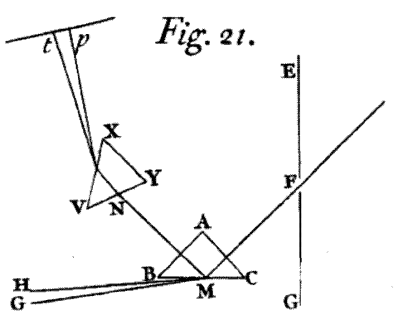


Fig. 22.

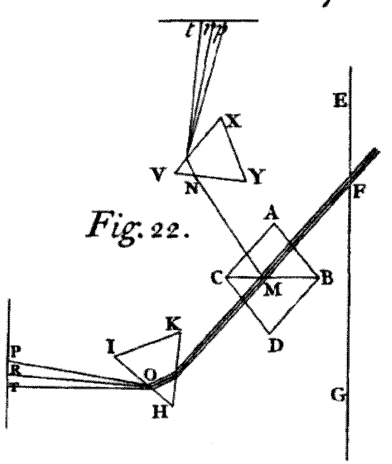


Fig. 23.

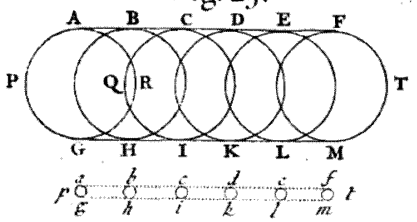


Fig. 24.

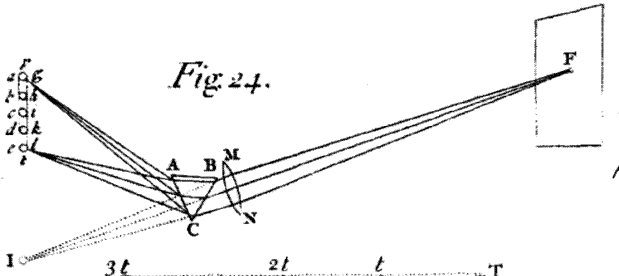
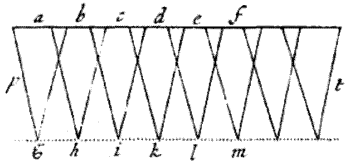


Fig. 25.



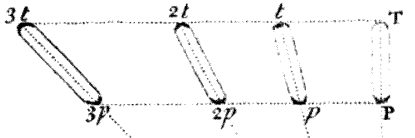


Fig. 26.

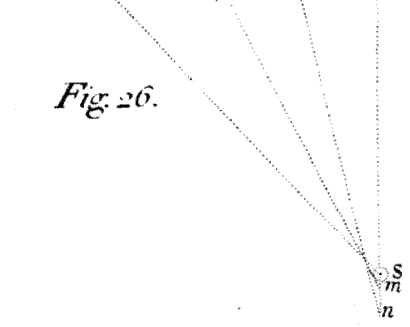


Fig. 27.

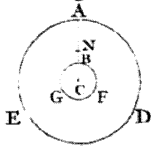
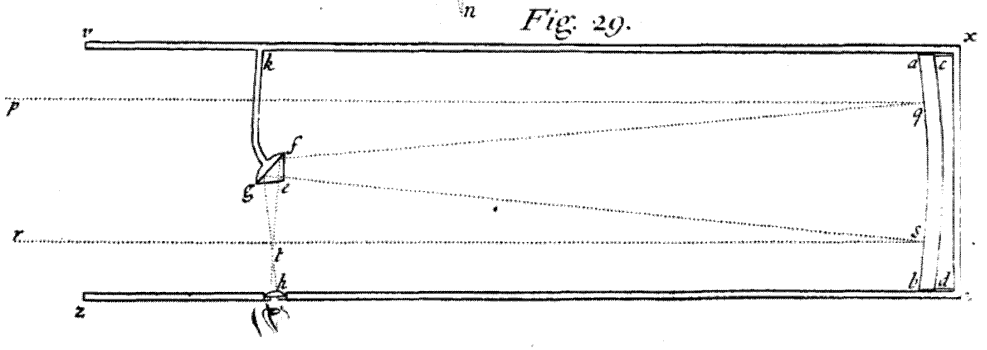


Fig. 28.



Fig. 29.



which teleſcopes could not perform. For the air, through which we look upon the ſtars, is in a perpetual tremor; as may be ſeen by the tremulous motion of ſhadows caſt from high towers, and by the twinkling of the fixed ſtars. But theſe ſtars do not twinkle when viewed through teleſcopes which have large apertures. For the rays of light, which paſs through divers parts of the aperture, tremble each of them apart; and by means of their various and ſometimes contrary tremors, fall at one and the ſame time upon different points in the bottom of the eye; and their trembling motions are too quick and confuſed to be perceived ſeverally. And all theſe illuminated points conſtitute one broad lucid point, compoſed of thoſe many trembling points confuſedly and inſenſibly mixed with one anther by very ſhort and ſwift tremors; and thereby cauſe the ſtar to appear broader than it is, and without any trembling of the whole. Long teleſcopes may cauſe objects to appear brighter and larger than ſhort ones can do; but they cannot be ſo formed as to take away that confuſion of the rays, which ariſes from the tremors of the atmoſphere. The only remedy is a moſt ſerene and quiet air, ſuch as may perhaps be found on the tops of the higheſt mountains above the groſſer clouds.

THE FIRST BOOK OF OPTICS.

PART II.

PROP. I. THEOR. I.

The phænomena of colours in Refracted or Reflected Light are not caused by new modifications of the light variously impressed, according to the various terminations of the light and shadow.

The proof by Experiments.

Exper. 1. FOR if the sun shine into a very dark chamber through an oblong hole F [in *fig.* 1.] whose breadth is the sixth or eighth part of an inch, or something less; and his beam, FH, do afterwards pass first through a very large prism ABC, distant about 20 feet from the hole, and parallel to it, and then (with its white part) through an oblong hole H, whose breadth is about the fortieth or fiftieth part of an inch, and which is made in a black opake body GI, and placed at the distance of two or three feet from the prism, in a parallel situation both to the

the prism and to the former hole, and if this White light thus transmitted through the hole H, fall afterwards upon a white paper *pt*, placed after that hole H, at the distance of three or four feet from it, and there paint the usual colours of the prism, suppose Red at *t*, Yellow at *s*, Green at *r*, Blue at *q*, and Violet at *p*; you may with an iron wire, or any such like slender opake body, whose breadth is about the tenth part of an inch, by intercepting the rays at *k*, *l*, *m*, *n* & *o*, take away any one of the colours at *t*, *s*, *r*, *q* or *p*, whilst the other colours remain upon the paper as before; or with an obstacle something bigger you may take away any two, or three, or four colours together, the rest remaining. So that any one of the colours, as well as Violet, may become outmost in the confine of the shadow towards *p*, and any one of them as well as Red may become outmost in the confine of the shadow towards *t*, and any one of them may also border upon the shadow made within the colours by the obstacle, R, intercepting some intermediate part of the light; and, lastly, any one of them, by being left alone, may border upon the shadow on either hand. All the colours have themselves indifferently to any confines of shadow, and therefore the differences of these colours from one another, do not arise from the different confines of shadow, whereby light is variously modified, as has hitherto been the opinion of philosophers. In trying these things it is to be observed, that by how much the holes, F and H, are narrower, and the intervals between them and the prism greater, and the chamber darker, by so much the better doth the experiment succeed; provided the light be not so far diminished, but that the colours at *pt* be sufficiently visible. To procure a prism of solid glass large enough for this Experiment will be difficult, and therefore a prismatick vessel must be made of polished glass plates cemented together, and filled with salt water or clear oil.

Exper. 2. The sun's light let into a dark chamber through the round hole F [in *fig.* 2.] half an inch wide, passed first through the prism ABC placed at the hole; and then through a lens, PT, something more than four inches broad, and about eight feet distant from the prism; and thence converged to o the focus of the lens distant from it about three feet; and there fell upon a

Colour no effect

white paper DE. If that paper was perpendicular to that light incident upon it, as it is repreſented in the poſture DE, all the colours upon it, at o, appeared White. But if the paper being turned about an axis parallel to the priſm, became very much inclined to the light, as it is repreſented in the poſitions *de* and ϑε; the ſame light in the one caſe appeared Yellow and Red, in the other Blue. Here one and the ſame part of the light, in one and the ſame place, according to the various inclinations of the paper, appeared in one caſe White, in another Yellow or Red, in a third Blue; whilſt the confine of light and ſhadow, and the refractions of the priſm, in all theſe caſes, remained the ſame.

Exper. 3. Such another Experiment may be more eaſily tried as follows. Let a broad beam of the ſun's light, coming into a dark chamber through a hole in the window-ſhut, be refracted by a large priſm ABC [in *fig.* 3.] whoſe refracting angle C is more than 60 degrees; and ſo ſoon as it comes out of the priſm, let it fall upon the white paper, DE, glewed upon a ſtiff plane; and this light, when the paper is perpendicular to it, as it is repreſented in DE, will appear perfectly White upon the paper; but when the paper is very much inclined to it, in ſuch a manner as to keep always parallel to the axis of the priſm, the whiteneſs of the whole light upon the paper will, according to the inclination of the paper this way or that way, change either into Yellow and Red, as in the poſture *de*; or into Blue and Violet, as in the poſture ϑε. And if the light, before it fall upon the paper, be twice refracted the ſame way by two parallel priſms, theſe colours will become the more conſpicuous. Here all the middle parts of the broad beam of white light, which fell upon the paper, did, without any confine of ſhadow to modify it, become coloured all over with one uniform colour; the colour being always the ſame in the middle of the paper as at the edges; and this colour changed according to the various obliquity of the reflecting paper, without any change in the refractions or ſhadow, or in the light, which fell upon the paper. And therefore theſe colours are to be derived from ſome other cauſe, than the new modifications of light by refractions and ſhadows.

If

of the confine of Light and Shade.

If it be aſked, What then is their cauſe? I anſwer, that the paper, in the poſture *de*, being more oblique to the more refrangible rays than to the leſs refrangible ones, is more ſtrongly illuminated by the latter than by the former; and therefore the leſs refrangible rays are predominant in the reflected light. And wherever they are predominant in any light they tinge it with Red or Yellow, as may in ſome meaſure appear by the firſt Propoſition of the firſt Book, and will more fully appear hereafter. And the contrary happens in the poſture of the paper ϑε, the more refrangible rays being then predominant, which always tinge light with Blues and Violets.

Exper. 4. The colours of bubbles with which children play are various, and change their ſituation variouſly, without any reſpect to any confine of ſhadow. If ſuch a bubble be covered with a concave glaſs, to keep it from being agitated by any wind or motion of the air, the colours will ſlowly and regularly change their ſituation, even whilſt the eye, and the bubble, and all bodies which emit any light, or caſt any ſhadow, remain unmoved. And therefore their colours ariſe from ſome regular cauſe, which depends not on any confine of ſhadow. What this cauſe is, will be ſhewed in the next Book.

To theſe Experiments may be added the tenth Experiment of the firſt Book; where the ſun's light in a dark room being trajected through the parallel ſuperficies of two priſms tied together in the form of a parallelopiped, became totally of one uniform Yellow or Red colour, at its emerging out of the priſms. Here, in the production of theſe colours, the confine of ſhadow can have nothing to do. For the light changes from White to Yellow, Orange and Red ſucceſſively, without any alteration of the confine of ſhadow: and at both edges of the emerging light, where the contrary confines of ſhadow ought to produce different effects, the colour is one and the ſame, whether it be White, Yellow, Orange or Red: and in the middle of the emerging light, where there is no confine of ſhadow at all, the colour is the very ſame as at the edges, the whole light at its very firſt emergence being of one uniform colour, whether White, Yellow, Orange or Red, and going on thence perpetually without any change of colour,

Colour no effect of confine of Light and Shade.

lour, ſuch as the confine of ſhadow is vulgarly ſuppoſed to work in refracted light after its emergence. Neither can theſe colours ariſe from any new modifications of the light by refractions; becauſe they change ſucceſſively from White to Yellow, Orange and Red, while the refractions remain the ſame; and alſo becauſe the refractions are made contrary ways by parallel ſuperficies, which deſtroy one anothers effects. They ariſe not therefore from any modifications of light made by refractions and ſhadows, but have ſome other cauſe. What that cauſe is we ſhewed above in this tenth Experiment, and need not here repeat it.

There is yet another material circumſtance of this Experiment. For this emerging light being by a third priſm HIK [in *fig.* 22. *Part* I.] refracted towards the paper PT, and there painting the uſual colours of the priſm, Red, Yellow, Green, Blue, Violet: if theſe colours aroſe from the refractions of that priſm modifying the light, they would not be in the light before its incidence on that priſm. And yet in that Experiment we found, that when, by turning the two firſt priſms about their common axis, all the colours were made to vaniſh but the Red; the light which makes that Red being left alone, appeared of the very ſame Red colour before its incidence on the third priſm. And in general we find by other Experiments, that when the rays, which differ in refrangibility, are ſeparated from one another, and any one ſort of them is conſidered apart; the colour of the light, which they compoſe, cannot be changed by any refraction or reflexion whatever; as it ought to be, were colours nothing elſe than modifications of light cauſed by refractions, and reflexions, and ſhadows. This unchangeableneſs of colour I am now to deſcribe in the following Propoſition.

PROP. II. THEOR. II.

All Homogeneal Light has its proper colour anſwering to its degree of refrangibility, and that colour cannot be changed by reflexions and refractions.

The colours of Homogeneal

In the Experiments of the fourth Propoſition of the firſt Book, when I had ſeparated the Heterogeneous Rays from one another, the

the ſpectrum *pt*, formed by the ſeparated rays, did in the progreſs from its end *p*, on which the moſt refrangible rays fell, unto its other end *t*, on which the leaſt refrangible rays fell, appear tinged with this ſeries of colours; Violet, Indigo, Blue, Green, Yellow, Orange, Red, together with all their intermediate degrees in a continual ſucceſſion perpetually varying. So that there appeared as many degrees of colours, as there were ſorts of rays differing in refrangibility.

Light unchangeable.

Exper. 5. Now that theſe colours could not be changed by refraction, I knew by refracting with a priſm ſometimes one very little part of this light, ſometimes another very little part, as is deſcribed in the twelfth Experiment of the firſt Book. For by this refraction the colour of the light was never changed in the leaſt. If any part of the Red light was refracted, it remained totally of the ſame Red colour as before. No Orange, no Yellow, no Green or Blue, no other new colour was produced by that refraction. Neither did the colour any ways change by repeated refractions, but continued always the ſame Red entirely as at firſt. The like conſtancy and immutability I found alſo in the Blue, Green, and other colours. So alſo if I looked through a priſm upon any body illuminated with any part of this Heterogeneal light, as in the fourteenth Experiment of the firſt Book is deſcribed; I could not perceive any new colour generated this way. All bodies illuminated with Compound light appear through priſms confuſed (as was ſaid above) and tinged with various new colours; but thoſe illuminated with Homogeneal light appeared through priſms neither leſs diſtinct, nor otherwiſe coloured, than when viewed with the naked eyes. Their colours were not in the leaſt changed by the refraction of the interpoſed priſm. I ſpeak here of a ſenſible change of colour: for the light which I here call Homogeneal, being not abſolutely homogeneal, there ought to ariſe ſome little change of colour from its heterogeneity. But if that heterogeneity was ſo little, as it might be made by the ſaid Experiments of the fourth Propoſition, that change was not ſenſible; and therefore in Experiments, where ſenſe is judge, ought to be accounted none at all.

Exper. 6. And as theſe colours were not changeable by refractions, ſo neither were they by reflexions. For all White, Grey, Red, Yellow, Green, Blue, Violet bodies, as Paper, Aſhes, Red Lead, Orpiment, Indigo, Biſe, Gold, Silver, Copper, Graſs, Blue Flowers, Violets, bubbles of Water tinged with various colours, Peacock's Feathers, the tincture of *Lignum Nephriticum*, and ſuch like, in Red Homogeneal Light appeared totally red; in Blue light totally blue; in Green light totally green; and ſo of other colours. In the Homogeneal light of any colour they all appeared totally of that ſame colour; with this only difference, that ſome of them reflected that light more ſtrongly, others more faintly. I never yet found any body, which by reflecting Homogeneal light, could ſenſibly change its colour.

From all which it is manifeſt, that if the ſun's light conſiſted of but one ſort of rays, there would be but one colour in the whole world; nor would it be poſſible to produce any new colour by reflexions and refractions, and by conſequence that the variety of colours depends upon the compoſition of light.

DEFINITION.

The homogeneal light and rays which appear red, or rather make objects appear ſo, I call Rubrific or Red-making; thoſe which make objects appear yellow, green, blue and violet, I call Yellow-making, Green-making, Blue-making, Violet-making; and ſo of the reſt. And if at any time I ſpeak of light and rays as coloured, or endued with colours; I would be underſtood to ſpeak not philoſophically and properly, but groſsly, and according to ſuch conceptions as vulgar people, in ſeeing all theſe Experiments, would be apt to frame. For the rays, to ſpeak properly, are not coloured. In them there is nothing elſe, than a certain power and diſpoſition to ſtir up a ſenſation of this or that colour. For as ſound in a bell, or muſical ſtring, or other ſounding body, is nothing but a trembling motion; and in the air, nothing but that motion propagated from the object; and in the ſenſorium, it is a ſenſe of that motion under the form of ſound; ſo Colours in the Object are nothing but a diſpoſition to reflect this or that ſort of rays more copiouſly than the reſt; in the Rays, they are nothing but

but their diſpoſitions to propagate this or that motion into the ſenſorium; and in the ſenſorium, they are ſenſations of thoſe motions under the forms of colours.

PROP. III. PROB. I.

To define the refrangibility of the ſeveral ſorts of Homogeneal Light anſwering to the ſeveral colours.

For determining this Problem I made the following Experiment. The refrangibility of the ſeveral Rays defined.

Exper. 7. When I had cauſed the rectilinear ſides AF, GM [in *fig.* 4.] of the ſpectrum of colours made by the priſm to be diſtinctly defined, as in the fifth Experiment of the firſt Part is deſcribed (a), there were found in it all the Homogeneal colours, in the ſame order and ſituation one among another as in the ſpectrum of ſimple light, deſcribed in the fourth Propoſition of that Part. For the circles, of which the ſpectrum of Compound Light PT is compoſed, and which in the middle parts of the ſpectrum interfere, and are intermixed with one another, are not intermixed in their outmoſt parts, where they touch thoſe rectilinear ſides AF and GM. And therefore in thoſe rectilinear ſides, when diſtinctly defined, there is no new colour generated by refraction. I obſerved alſo, that if any where between the two outmoſt circles, TMF and PGA, a right line, as $\gamma\delta$, was croſs to the ſpectrum, ſo as at both ends to fall perpendicularly upon its rectilinear ſides, there appeared one and the ſame colour, and degree of colour from one end of this line to the other. I delineated therefore in a paper the perimeter of the ſpectrum FAPGMT, and in trying the third Experiment of the firſt Book, I held the paper ſo that the ſpectrum might fall upon this delineated figure, and agree with it exactly; whilſt an aſſiſtant, whoſe eyes for diſtinguiſhing colours were more critical than mine, did by right lines $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$, &c. drawn croſs the ſpectrum, note the confines of the colours; that is, of the Red $M\alpha\beta F$; of the Orange, $\alpha\gamma\delta\beta$; of the Yellow, $\gamma\varepsilon\zeta\delta$; of the Green, $\varepsilon\eta\vartheta\zeta$; of the Blue, $\eta\iota\lambda\vartheta$; of the Indigo,

(a) Namely, by placing a lens at the hole where the light was admitted, to take away the penumbra in the ſides of the image. Vid. p. 33.

The refrangibility of the

$\iota\lambda\mu\mu$; and of the Violet, λGAμ. And this operation being divers times repeated, both in the ſame and in ſeveral papers, I found that the obſervations agreed well enough with one another; and that the rectilinear ſides, MG and FA, were by the ſaid croſs lines divided after the manner of a Muſical Chord. Let GM be produced to X, that MX may be equal to GM, and conceive GX, λX, ιX, ηX, εX, γX, αX, MX, to be in proportion to one another, as the numbers, 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}$, and ſo to repreſent the chords of the key, and of a tone, a third minor, a fourth, a fifth, a ſixth major, a ſeventh and an eighth above that key: and the intervals Mα, $\alpha\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\eta$, $\eta\iota$, $\iota\lambda$, and λG, will be the ſpecies which the ſeveral colours (Red, Orange, Yellow, Green, Blue, Indigo, Violet) take up (b).

Now theſe intervals or ſpaces ſubtending the differences of the refractions of the rays going to the Limits of thoſe colours, that is, to the points M, α, γ, ε, η, ι, λ, G, may, without any ſenſible error, be accounted proportional to the differences of the ſines of refraction of thoſe rays having one common ſine of incidence; and therefore, ſince the common ſine of incidence of the moſt and leaſt refrangible rays out of glaſs into air, was by a method deſcribed above, found in proportion to their ſines of refraction, as 50 to 77 and 78; divide the difference between the ſines of refraction, 77 ad 78, as the line GM is divided by thoſe intervals; and you will have 77, $77\frac{1}{8}$, $77\frac{1}{5}$, $77\frac{1}{3}$, $77\frac{1}{2}$, $77\frac{2}{3}$, $77\frac{7}{9}$, 78, the ſines of refraction of thoſe rays out of glaſs into air, their common ſine of incidence being 50 (c). So then the ſines of the incidences of all the Red-making rays out of glaſs into air, were to the ſines of their refractions, not greater than 50 to 77, nor leſs than 50 to $77\frac{1}{8}$; but they varied from one another according to all intermediate proportions. And the ſines of the incidences of the Green-making rays were to the ſines of their refractions in all proportions from that of 50 to $77\frac{1}{3}$, unto that of 50 to $77\frac{1}{2}$. And

(b) Vid. Lect. Opt. Part II. § 119—123.

(c) Lect. Opt. Part II. § 124—127.

(d) —— *that it emergeth in lines paralld to theſe in which it was incident.*] Rather, *that the ſeveral colorific rays emerge altogether, in a line parallel to that in which the compound ray was incident.* For the Author's meaning is, that if ſucceeding refractions collect the colorific rays, which were ſeparated one from another by the firſt, into a ſingle point upon the laſt ſurface, from which they

And by the like limits abovementioned were the refractions of the rays belonging to the reſt of the colours defined; the ſines of the Red-making rays extending from 77 to $77\frac{1}{8}$; thoſe of the Orange-making, from $77\frac{1}{8}$ to $77\frac{1}{5}$; thoſe of the Yellow-making, from $77\frac{1}{5}$ to $77\frac{1}{3}$; thoſe of the Green-making, from $77\frac{1}{3}$ to $77\frac{1}{2}$; thoſe of the Blue-making, from $77\frac{1}{2}$ to $77\frac{2}{3}$; thoſe of the Indigo-making, from $77\frac{2}{3}$ to $77\frac{7}{9}$, and thoſe of the Violet from $77\frac{7}{9}$ to 78. Several Rays defined.

Theſe are the laws of the refractions made out of glaſs into air, and thence by the third Axiom of the firſt Part of this Book, the laws of the refractions made out of air into glaſs are eaſily derived.

Exper. 8. I found moveover that when light goes out of air through ſeveral contiguous refracting mediums, as through water and glaſs, and thence goes out again into air, whether the refracting ſuperficies be parallel or inclined to one another, that light as often as by contrary refractions it is ſo corrected, that it emergeth in lines parallel to thoſe in which it was incident (d), continues ever after to be White. But if the emergent rays be inclined to the incident, the whiteneſs of the emerging light will by degrees in paſſing on from the place of emergence, become tinged in its edges with colours. This I tried by refracting light with priſms of glaſs placed within a priſmatick veſſel of water. Now thoſe colours argue a diverging and ſeparation of the heterogeneous rays from one another by means of their unequal refractions; as in what follows will more fully appear. And on the contrary, the permanent Whiteneſs argues, that in like incidences of the rays there is no ſuch ſeparation of the emerging rays, and by conſequence no inequality of their whole refractions. Whence I ſeem to gather the two following Theorems.

1. The exceſſes of the ſines of refraction of ſeveral ſorts of rays above their common ſine of incidence, when the refractions are made out of divers denſer mediums immediately into one and

they are to emerge, and ſend them out from thence in a direction parallel to that, in which the compound ray was incident; the emergent light will ever after, unleſs reſolved again by ſome new refraction, continue to be white. If the colorific rays emerge from different points in the laſt refracting ſurface, notwithſtanding that they go forth in parallel directions, each will preſerve its proper colour: as our Author hath fully ſhewn in his Lect. Opt. Part II. Sect. IV.

The refrangibility of the

the ſame rarer medium, ſuppoſe of air, are to one another in a given proportion (e).

II. The proportion of the ſine of incidence to the ſine of refraction of one and the ſame ſort of rays out of one medium into another, is compoſed of the proportion of the ſine of incidence to the ſine of refraction out of the firſt medium into any third medium, and of the proportion of the ſine of incidence to the ſine of refraction out of that third medium into the ſecond medium (f).

By the firſt Theorem the refractions of the rays of every ſort, made out of any medium into air, are known by having the refraction of the rays of any one ſort. As for inſtance, if the refractions of the rays of every ſort out of rain-water into air be deſired, let the common ſine of incidence out of glaſs into air be ſubducted from the ſines of refraction, and the exceſſes will be 27, $27\frac{1}{8}$, $27\frac{1}{5}$, $27\frac{1}{3}$, $26\frac{1}{2}$, $27\frac{2}{3}$, $27\frac{7}{9}$, 28. Suppoſe now that the ſine of incidence of the leaſt refrangible rays be to their ſine of refraction out of rain-water into air as 3 to 4; and ſay as 1, the difference of thoſe ſines, is to 3, the ſine of incidence, ſo is 27, the leaſt of the exceſſes above-mentioned, to a fourth number, 81; and 81 will be the common ſine of incidence out of rain-water into air; to which ſine if you add all the above-mentioned exceſſes, you will have the deſired ſines of the refractions 108, $108\frac{1}{8}$, $108\frac{1}{5}$, $108\frac{1}{3}$, $108\frac{1}{2}$, $108\frac{2}{3}$, $108\frac{7}{9}$, 109.

By the latter Theorem the refraction out of one medium into another is gathered, as often as you have the refractions out of them both into any third medium. As if the ſine of incidence of any ray out of glaſs into air be to its ſine of refraction as 20 to 31, and the ſine of incidence of the ſame ray out of air into water be to its ſine of refraction as 4 to 3; the ſine of incidence of that ray out of glaſs into water will be to its ſine of refraction as 20 to 31, and 4 to 3 jointly; that is, as the factum of 20 and 4 to the factum of 31 and 3, or as 80 to 93.

And theſe Theorems being admitted into Opticks, there would be ſcope enough of handling that ſcience voluminouſly after a new manner; not only by teaching thoſe things which tend to the

(e) Vide Lect. Opt. Part. I. § 44.

perfection

perfection of viſion, but alſo by determining mathematically all kinds of phænomena of colours which could be produced by refractions. For to do this, there is nothing elſe requiſite than to find out the ſeparations of heterogeneous rays, and their various mixtures, and proportions in every mixture. By this way of arguing I invented almoſt all the phænomena deſcribed in theſe books, beſide ſome others leſs neceſſary to the argument; and by the ſucceſſes I met with in the trials, I dare promiſe, that to him who ſhall argue truely, and then try all things with good glaſſes and ſufficient circumſpection, the expected event will not be wanting. But he is firſt to know what colours will ariſe from any others mixed in any aſſigned proportion.

Several Rays deſined.

PROP. IV. THEOR. III.

Colours may be produced by compoſition, which ſhall be like to the colours of Homogeneal Light as to the appearance of colour, but not as to the immutability of colour and conſtitution of light. And thoſe colours, by how much they are more compounded, by ſo much are they leſs full and intenſe; and, by too much compoſition, they may be diluted and weakened till they ceaſe, and the mixture becomes white or grey. There may be alſo colours produced by compoſition, which are not fully like any of the colours of Homogeneal Light.

Colours made by Compoſition.

For a mixture of Homogeneal Red and Yellow compounds an Orange, like in appearance of colour to that Orange, which in the ſeries of unmixed priſmatick colours lies between them; but the light of one Orange is Homogeneal as to refrangibility, that of the other is Heterogeneal; and the colour of the one, if viewed through a priſm, remains unchanged; that of the other is changed and reſolved into its component colours, Red and Yellow. And after the ſame manner other neighbouring homogeneal colours may compound new colours, like the intermediate homogeneal ones; as Yellow and Green, the colour between them both; and afterwards, if Blue be added, there will be made a Green, the middle colour of the three which enter the compoſi-

(f) Vide Lect. Opt. Part. I § 34 & 35.

tion:

Colours made by Compoſition.

tion: for the Yellow and Blue on either hand, if they are equal in quantity, they draw the intermediate Green equally towards themſelves in compoſition, and ſo keep it as it were *in æquilibrio*, that it verge not more to the Yellow on the one hand, than to the Blue on the other, but by their mixed actions remain ſtill a middle colour. To this mixed Green there may be farther added ſome Red and Violet; and yet the Green will not preſently ceaſe, but only grow leſs full and vivid; and by increaſing the Red and Violet it will grow more and more dilute, until, by the prevalence of the added colours, it be overcome and turned into whiteneſs, or ſome other colour. So if to the colour of any homogeneal light, the ſun's white light compoſed of all ſorts of rays be added, that colour will not vaniſh, or change its ſpecies, but be diluted; and, by adding more and more White, it will be diluted more and more perpetually. Laſtly, if Red and Violet be mingled, there will be generated, according to their various proportions, various Purples, ſuch as are not like in appearance to the colour of any Homogeneal Light; and of theſe Purples mixed with Yellow and Blue may be made other new colours.

PROP. V. THEOR. IV.

Whiteneſs, and all Grey colours between white and black, may be compounded of colours, and the whiteneſs of the ſun's light is compounded of all the Primary colours mixed in a due proportion.

The Proof by Experiments.

The whiteneſs of the Solar Light

Exper. 9. The ſun ſhining into a dark chamber through a little round hole in the window-ſhut, and his light being there refracted by a priſm to caſt his coloured image PT [in *fig.* 5.] upon the oppoſite wall: I held a white paper, v, to that image, in ſuch manner that it might be illuminated by the coloured light reflected from thence, and yet not intercept any part of that light in its paſſage from the priſm to the ſpectrum. And I found that when the paper was held nearer to any colour than to the reſt, it appeared of that colour to which it approached neareſt; but when it was equally or almoſt equally diſtant from all the colours, ſo that

that it might be equally illuminated by them all, it appeared White. And in this laſt ſituation of the paper, if ſome colours were intercepted, the paper loſt its White colour, and appeared of the colour of the reſt of the light which was not intercepted. So then the paper was illuminated with lights of various colours, namely, Red, Yellow, Green, Blue and Violet; and every part of the light retained its proper colour, until it was incident on the paper, and became reflected thence to the eye; ſo that if it had been either alone, the reſt of the light being intercepted, or if it had abounded moſt and been predominant in the light reflected from the paper, it would have tinged the paper with its own colour; and yet being mixed with the reſt of the colours in a due proportion, it made the paper look White, and therefore by a compoſition with the reſt produced that colour. The ſeveral parts of the coloured light reflected from the ſpectrum, whilſt they are propagated from thence through the air, do perpetually retain their proper colours; becauſe wherever they fall upon the eyes of any ſpectator, they make the ſeveral parts of the ſpectrum to appear under their proper colours. They retain therefore their proper colours, when they fall upon the paper, v, and ſo by the confuſion and perfect mixture of thoſe colours compound the Whiteneſs of the light reflected from thence.

An effect of Compoſition.

Exper. 10. Let that ſpectrum or ſolar image PT [in *fig.* 6.] fall now upon the lens MN, above four inches broad, and about ſix feet diſtant from the priſm ABC, and ſo figured, that it may cauſe the coloured light, which divergeth from the priſm, to converge and meet again at its focus G; about ſix or eight feet diſtant from the lens, and there to fall perpendicularly upon a white paper, DE. And if you move this paper to and fro, you will perceive that near the lens, as at *de*, the whole ſolar image, ſuppoſe at *pt*, will appear upon it intenſely coloured after the manner above-explained; and that by receding from the lens, thoſe colours will perpetually come towards one another, and by mixing more and more dilute one another continually, until at length the paper come to the focus G, where by a perfect mixture they will wholly vaniſh, and be converted into Whiteneſs; the whole light appearing now upon the paper like a little white circle. And afterwards,

The whiteneſs of the Solar Light

wards, by receding farther from the lens, the rays, which before converged, will now croſs one another in the focus G, and diverge from thence, and thereby make the colours to appear again, but yet in a contrary order; ſuppoſe at $\delta\varepsilon$, where the Red t is now above which before was below, and the Violet p is below which before was above.

Let us now ſtop the paper at the focus G, where the light appears totally white and circular, and let us conſider its Whiteneſs. I ſay, that this is compoſed of the converging colours. For if any of thoſe colours be intercepted at the lens, the Whiteneſs will ceaſe, and degenerate into that colour, which ariſeth from the Compoſition of the other colours which are not intercepted. And then if the intercepted colours be let paſs and fall upon that compound colour, they mix with it, and by their mixture reſtore the Whiteneſs. So if the Violet, Blue and Green be intercepted, the remaining Yellow, Orange and Red will compound upon the paper an Orange; and then if the intercepted colours be let paſs, they will fall upon this compound Orange, and together with it decompound a White. So alſo if the Red and Violet be intercepted, the remaining Yellow, Green and Blue, will compound a Green upon the paper; and then the Red and Violet being let paſs will fall upon this Green, and together with it decompound a White. And that in this compoſition of White the ſeveral rays do not ſuffer any change in their colorific qualities, by acting upon one another, but are only mixed, and by a mixture of their colours produce White, may farther appear by theſe Arguments.

If the paper be placed beyond the focus G, ſuppoſe at $\delta\varepsilon$, and then the Red colour at the lens be alternately intercepted, and let paſs again, the Violet colour on the paper will not ſuffer any change thereby; as it ought to do, if the ſeveral ſorts of rays acted upon one another in the focus G, where they croſs. Neither will the Red upon the paper be changed by any alternate ſtopping, and letting paſs the Violet which croſſeth it.

And if the paper be placed at the focus G, and the white round image at G be viewed through the priſm HIK, and by the refraction of that priſm be tranſlated to the place rv, and there appear tinged with various colours, namely, the Violet at v and Red

Red at r, and others between; and then the Red colour at the lens be often ſtopped and let paſs by turns, the Red at r will accordingly diſappear and return as often, but the Violet at v will not thereby ſuffer any change. And ſo by ſtopping and letting paſs alternately the Blue at the lens, the Blue at r will accordingly diſappear and return, without any change made in the Red at r. The Red therefore depends on one ſort of rays, and the Blue on another ſort, which in the focus G, where they are commixed, do not act on one another. And there is the ſame reaſon of the other colours.

The effect of Compoſition.

I conſidered farther, that when the moſt refrangible rays, Pp, and the leaſt refrangible ones, Tt, are by converging inclined to one another; the paper, if held very oblique to thoſe rays in the focus, G, might reflect one ſort of them more copiouſly than the other ſort; and by that means the reflected light would be tinged in that focus with the colour of the predominant rays; provided thoſe rays ſeverally retained their colours or colorific qualities, in the compoſition of White made by them in that focus. But if they did not retain them in that White, but became all of them ſeverally endued there with a diſpoſition to ſtrike the ſenſe with the perception of White, then they could never loſe their Whiteneſs by ſuch reflexions. I inclined therefore the paper to the rays very obliquely, as in the ſecond Experiment of this Book, that the moſt refrangible rays might be more copiouſly reflected than the reſt, and the Whiteneſs at length changed ſucceſſively into Blue, Indigo and Violet. Then I inclined it the contrary way, that the leaſt refrangible rays might be more copious in the reflected light than the reſt, and the Whiteneſs turned ſucceſſively to Yellow, Orange and Red.

Laſtly, I made an inſtrument XY in faſhion of a comb, whoſe teeth, being in number ſixteen, were about an inch and an half broad, and the intervals of the teeth about two inches wide. Then by interpoſing ſucceſſively the teeth of this inſtrument near the lens, I intercepted part of the colours by the interpoſed tooth, whilſt the reſt of them went on through the interval of the teeth to the paper DE, and there painted a round Solar image. But the paper I had firſt placed ſo, that the image might appear

The Whiteneſs of the Solar Light

White, as often as the comb was taken away; and then the comb being, as was ſaid interpoſed, that Whiteneſs, by reaſon of the intercepted part of the colours at the lens, did always change into the colour compounded of thoſe colours which were not intercepted; and that colour was, by the motion of the comb, perpetually varied; ſo that in the paſſing of every tooth over the lens all theſe colours, Red, Yellow, Green, Blue and Purple, did always ſucced one another. I cauſed therefore all the teeth to paſs ſucceſſively over the lens, and when the motion was ſlow, there appeared a perpetual ſucceſſion of the colours upon the paper: but if I ſo much accelerated the motion, that the colours, by reaſon of their quick ſucceſſion, could not be diſtinguiſhed from one another, the appearance of the ſingle colours ceaſed. There was no Red, no Yellow, no Green, no Blue, nor Purple to be ſeen any longer, but from a confuſion of them all there aroſe one uniform White colour. Of the light which now by the mixture of all the colours appeared White, there was no part really White. One part was Red, another Yellow, a third Green, a fourth Blue, a fifth Purple, and every part retains its proper colour till it ſtrike the ſenſorium. If the impreſſions follow one another ſlowly, ſo that they may be ſeverally perceived, there is made a diſtinct ſenſation of all the colours one after another in a continual ſucceſſion. But if the impreſſions follow one another ſo quickly that they cannot be ſeverally perceived, there ariſeth out of them all one common ſenſation, which is neither of this colour alone nor of that alone; but hath itſelf indifferently to them all, and this is a ſenſation of Whiteneſs. By the quickneſs of the ſucceſſions, the impreſſions of the ſeveral colours are confounded in the ſenſorium, and out of that confuſion ariſeth a mixed ſenſation. If a burning coal be nimbly moved round in a circle with gyrations continually repeated, the whole circle will appear like fire; the reaſon of which is, that the ſenſation of the coal, in the ſeveral places of that circle, remains impreſſed on the ſenſorium, until the coal return again to the ſame place. And ſo in a quick conſecution of the colours, the impreſſion of every colour remains in the ſenſorium, until a revolution of all the colours be compleated, and that firſt colour return again. The impreſſions

therefore of all the ſucceſſive colours are at once in the ſenſorium, and jointly ſtir up a ſenſation of them all; and ſo it is manifeſt by this Experiment, that the commixed impreſſions of all the colours do ſtir up and beget a ſenſation of White, that is, that Whiteneſs is compounded of all the colours. The effect of Compoſition.

And if the comb be now taken away, that all the colours may at once paſs from the lens to the paper, and be there intermixed, and together reflected thence to the ſpectators eyes; their impreſſions on the ſenſorium, being now more ſubtilly and perfectly commixed there, ought much more to ſtir up a ſenſation of Whiteneſs.

You may inſtead of the lens uſe two priſms [*fig.* 7.] HIK and LMN, which by refracting the coloured light the contrary way to that of the firſt refraction, may make the diverging rays converge and meet again in G; as you ſee repreſented in the ſeventh figure. For where they meet and mix they will compoſe a White light, as when a lens is uſed.

Exper. 11. Let the ſun's coloured image PT [in *fig.* 8.] fall upon the wall of a dark chamber, as in the third Experiment of the firſt Book, and let the ſame be viewed through a priſm, *abc*, held parallel to the priſm, ABC, by whoſe refraction that image was made, and let it now appear lower than before, ſuppoſe in the place s, over againſt the Red colour T. And if you go near to the image PT, the ſpectrum s will appear oblong and coloured like the image PT; but if you recede from it, the colours of the ſpectrum, s, will be contracted more and more, and at length vaniſh; that ſpectrum s becoming perfectly round and white: and if you recede yet farther, the colours will emerge again, but in a contrary order. Now that ſpectrum s appears White, in that caſe when the rays of ſeveral ſorts, which converge from the ſeveral parts of the image, PT, to the priſm *abc*, are ſo refracted unequally by it, that in their paſſage from the priſm to the eye, they may diverge from one and the ſame point of the ſpectrum s, and ſo fall afterwards upon one and the ſame point in the bottom of the eye, and there be mingled.

And farther, if the comb be here made uſe of, by whoſe teeth the colours at the image, PT, may be ſucceſſively intercepted;

The Whiteneſs of the Solar Light

the ſpectrum s, when the comb is moved ſlowly, will be perpetually tinged with ſucceſſive colours: but when by accelerating the motion of the comb, the ſucceſſion of the colours is ſo quick that they cannot be ſeverally ſeen, that ſpectrum s, by a confuſed and mixed ſenſation of them all, will appear White.

Exper. 12. The ſun ſhining through a large priſm ABC [in *fig.* 9.] upon a comb XY, placed immediately behind the priſm, his light, which paſſed through the interſtices of the teeth, fell upon a white paper DE. The breadths of the teeth were equal to their interſtices, and ſeven teeth together with their interſtices took up an inch in breadth. Now when the paper was about two or three inches diſtant from the comb, the light, which paſſed through its ſeveral interſtices, painted ſo many ranges of colours, *kl*, *mn*, *op*, *qr*, &c. which were parallel to one another and contiguous, and without any mixture of White. And theſe ranges of colours, if the comb was moved continually up and down with a reciprocal motion, aſcended and deſcended in the paper, and when the motion of the comb was ſo quick, that the colours could not be diſtinguiſhed from one another, the whole paper, by their confuſion and mixture in the ſenſorium, appeared White.

Let the comb now reſt; and let the paper be removed farther from the priſm, and the ſeveral ranges of colours will be dilated and expanded into one another more and more, and, by mixing their colours, will dilute one another, and at length, when the diſtance of the paper from the comb is about a foot, or a little more (ſuppoſe in the place 2D2E) they will ſo far dilute one another as to become White.

With any obſtacle let all the light be now ſtopped, which paſſes through any one interval of the teeth; ſo that the range of colours which comes from thence may be taken away: and you will ſee the light of the reſt of the ranges to be expanded into the place of the range taken away, and there to be coloured. Let the intercepted range paſs on as before, and its colours, falling upon the colours of the other ranges, and mixing with them, will reſtore the Whiteneſs.

Let the paper 2D2E be now very much inclined to the rays, ſo that the moſt refrangible rays may be more copiouſly reflected than

than the reſt; and the White colour of the paper, through the exceſs of thoſe rays, will be changed into Blue and Violet. Let the paper be as much inclined the contrary way, that the leaſt refrangible rays may be now more copiouſly reflected than the reſt, and by their exceſs the Whiteneſs will be changed into Yellow and Red. The ſeveral rays therefore in that White light do retain their colorific qualities, by which thoſe of any ſort, whenever they become more copious than the reſt, do by their exceſs and predominance cauſe their proper colour to appear.

the effect of Compoſition.

And by the ſame way of arguing, applied to the third Experiment of this Book, it may be concluded, that the White colour of all refracted light, at its very firſt emergence, where it appears as white as before its incidence, is compounded of various colours.

Exper. 13. In the foregoing Experiment the ſeveral Intervals of the teeth of the comb do the office of ſo many priſms, every interval producing the phænomenon of one priſm. Whence inſtead of thoſe intervals uſing ſeveral priſms, I tried to compound Whiteneſs by mixing their colours; and did it by uſing only three priſms, as alſo by uſing only two as before. Let two priſms, ABC and *abc* [in *fig.* 10.] whoſe refracting angles, B and *b*, are equal, be ſo placed parallel to one another, that the refracting angle B of the one may touch the angle *c* at the baſe of the other, and their planes, CB and *cb*, at which the rays emerge, may lie *in directum*. Then let the light trajected through them fall upon the paper MN, diſtant about 8 or 12 inches from the priſms. And the colours generated by the interior limits, B and *c*, of the two priſms, will be mingled at PT, and there compound White. For if either priſm be taken away, the colours made by the other will appear in that place PT; and when the priſm is reſtored to its place again, ſo that its colours may there fall upon the colours of the other, the mixture of them both will reſtore the Whiteneſs.

This Experiment ſucceeds alſo, as I have tried, when the angle *b* of the lower priſm is a little greater than the angle B of the upper, and between the interior angles B and *c*, there intercedes ſome ſpace B*c*, as is repreſented in the figure, and the refracting planes, Bc and *bc*, are neither *in directum* nor parallel to one another.

The Whiteneſs of the Solar Light

other. For there is nothing more requiſite to the ſucceſs of this Experiment, than that the rays of all ſorts may be uniformly mixed upon the paper, in the place PT. If the moſt refrangible rays, coming from the ſuperior priſm, take up all the ſpace from M to P; the rays of the ſame ſort, which come from the inferior priſm, ought to begin at P, and take up all the reſt of the ſpace from thence towards N. If the leaſt refrangible rays, coming from the ſuperior priſm, take up the ſpace MT; the rays of the ſame kind, which come from the other priſm, ought to begin at T, and take up the remaining ſpace TN. If one ſort of the rays which have intermediate degrees of refrangibility, and come from the ſuperior priſm, be extended through the ſpace MQ, and another ſort of thoſe rays through the ſpace MR, and a third ſort of them through the ſpace MS; the ſame ſorts of rays, coming from the lower priſm, ought to illuminate the remaining ſpaces QN, RN, SN, reſpectively. And the ſame is to be underſtood of all the other ſorts of rays. For thus the rays of every ſort will be ſcattered uniformly and evenly through the whole ſpace MN, and ſo being every where mixed in the ſame proportion, they muſt every where produce the ſame colours. And therefore ſince by this mixture they produce White in the exterior ſpaces MP and TN, they muſt alſo produce White in the interior ſpace PT. This is the reaſon of the compoſition by which Whiteneſs was produced in this Experiment; and by what other way ſoever I made the like Compoſition, the reſult was Whiteneſs.

Laſtly, if with the teeth of a comb of a due ſize, the coloured lights of the two priſms, which fall upon the ſpace PT, be alternately intercepted; that ſpace PT, when the motion of the comb is ſlow, will always appear coloured. But by accelerating the motion of the comb ſo much, that the ſucceſſive colours cannot be diſtinguiſhed from one another, it will appear White.

Exper. 14. Hitherto I have produced Whiteneſs by mixing the colours of priſms. If now the colours of Natural bodies are to be mingled, let water a little thickened with ſoap be agitated to raiſe a froth; and after that froth has ſtood a little, there will appear to one, that ſhall view it intently, various colours every where in the ſurfaces of the ſeveral bubbles; but to one that ſhall

ſhall go ſo far off that he cannot diſtinguiſh the colours from one another, the whole froth will grow White with a perfect whiteneſs. the effect of Compoſition.

Exper. 15. Laſtly, in attempting to compound a White by mixing the coloured powders, which painters uſe; I conſidered that all coloured powders do ſuppreſs and ſtop in them a very conſiderable part of the light, by which they are illuminated. For they become coloured by reflecting the light of their own colours more copiouſly, and that of all other colours more ſparingly; and yet they do not reflect the light of their own colours ſo copiouſly as White bodies do. If red lead, for inſtance, and a white paper, be placed in the red light of the coloured ſpectrum, made in a dark chamber by the refraction of a priſm, as is deſcribed in the third Experiment of the firſt Book; the paper will appear more lucid than the red lead, and therefore reflects the Red-making rays more copiouſly than red lead doth. And if they be held in the light of any other colour, the light reflected by the paper will exceed the light reflected by the red lead in a much greater proportion. And the like happens in powders of other colours. And therefore by mixing ſuch powders we are not to expect a ſtrong and full White, ſuch as is that of paper, but ſome duſky obſcure one, ſuch as might ariſe from a mixture of light and darkneſs, or from White and Black; that is, a Grey, or Dun, or Ruſſet-brown, ſuch as are the colours of a man's nail, of a mouſe, of aſhes, of ordinary ſtones, of mortar, of duſt and dirt in highways, and the like. And ſuch a dark White I have often produced by mixing coloured powders. For thus one part of red lead, and five parts of *Viride Æris*, compoſed a dun colour like that of a mouſe. For theſe two colours were ſeverally ſo compounded of others, that in both together were mixtures of all colours; and there were leſs red lead uſed than *Viride Æris*, becauſe of the fullneſs of its colour. Again, one part of red lead, and four parts of blue biſe, compoſed a dun colour verging a little to Purple; and by adding to this a certain mixture of Orpiment and *Viride Æris* in a due proportion, the mixture loſt its purple tincture, and became perfectly Dun. But the Experiment ſucceeded beſt without Minium thus. To Orpiment I added

The Whiteneſs of the Solar Light

added by little and little a certain full bright Purple, which painters uſe, until the orpiment ceaſed to be Yellow, and became of a pale Red. Then I diluted that Red by adding a little *Viride Æris*, and a little more blue biſe than *Viride Æris*, until it became of ſuch a grey or pale White, as verged to no one of the colours more than to another. For thus it became of a colour equal in whiteneſs to that of aſhes, or of wood newly cut, or of a man's ſkin. The orpiment reflected more light than did any other of the powders, and therefore conduced more to the Whiteneſs of the compounded colour than they. To aſſign the proportions accurately may be difficult, by reaſon of the different goodneſs of powders of the ſame kind. Accordingly as the colour of any powder is more or leſs full and luminous, it ought to be uſed in a leſs or greater proportion.

Now conſidering that theſe grey and dun colours may be alſo produced by mixing Whites and Blacks, and by conſequence differ from perfect Whites not in ſpecies of colours, but only in degree of luminouſneſs, it is manifeſt that there is nothing more requiſite to make them perfectly white than to increaſe their light ſufficiently; and, on the contrary, if by increaſing their light they can be brought to perfect Whiteneſs, it will thence alſo follow, that they are of the ſame ſpecies of colour with the beſt Whites, and differ from them only in the quantity of light. And this I tried as follows. I took the third of the above-mentioned grey mixtures (that which was compounded of Orpiment, Purple, Biſe and *Viride Æris*) and rubbed it thickly upon the floor of my chamber, where the ſun ſhone upon it through the opened caſement; and by it, in the ſhadow, I laid a piece of white paper of the ſame bigneſs. Then going from them to the diſtance of 12 or 18 feet, ſo that I could not diſcern the unevenneſs of the ſurface of the powder, nor the little ſhadows let fall from the gritty particles thereof; the powder appeared intenſely White, ſo as to tranſcend even the paper itſelf in Whiteneſs, eſpecially if the paper were a little ſhaded from the light of the clouds; and then the paper compared with the powder appeared of ſuch a grey colour as the powder had done before. But by laying the paper where the ſun ſhines through the glaſs of the window, or by ſhutting

ſhutting the window, that the ſun might ſhine through the glaſs upon the powder, and by ſuch other fit means of increaſing or decreaſing the lights, wherewith the powder and paper were illuminated; the light wherewith the powder is illuminated may be made ſtronger, in ſuch a due proportion, than the light wherewith the paper is illuminated, that they ſhall both appear exactly alike in Whiteneſs. For when I was trying this, a friend coming to viſit me, I ſtopped him at the door; and before I told him what the colours were, or what I was doing, I aſked him, Which of the two Whites were the beſt, and wherein they differed? And after he had at that diſtance viewed them well, he anſwered, That they were both good Whites, and that he could not ſay which was beſt, nor wherein their colours differed. Now if you conſider, that this White of the powder in the ſun-ſhine was compounded of the colours which the component powders, Orpiment, Purple, Biſe, and *Viride Æris*, have in the ſame ſun-ſhine; you muſt acknowledge by this Experiment, as well as by the former, that perfect Whiteneſs may be compounded of colours.

the effect of Compoſition.

From what has been ſaid it is alſo evident, that the Whiteneſs of the ſun's light is compounded of all the colours wherewith the ſeveral ſorts of rays, whereof that light conſiſts, when by their ſeveral refrangibilities they are ſeparated from one another, do tinge paper or any other white body whereon they fall. For thoſe colours, by Prop. II. are unchangeable, and whenever all thoſe rays, with thoſe their colours, are mixed again, they reproduce the ſame White light as before.

PROP. VI. PROB. II.

In a mixture of Primary Colours, the quantity and quality of each being given, to know the colour of the compound.

With the center O [in *fig.* 11.] and radius OD deſcribe a circle ADF; and diſtinguiſh its circumference into ſeven parts, DE, EF, FG, GA, AB, BC, CD, proportional to the ſeven muſical tones or intervals of the eight ſounds, *ſol*, *la*, *fa*, *ſol*, *la*, *mi*, *fa*, *ſol*, contained in an eight; that is, proportional to the numbers $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$. Let the firſt part, DE, repreſent a Red colour; the ſe-

To aſcertain the Colour of a

cond, EF, Orange; the third, FG, Yellow; the fourth, GA, Green; the fifth, AB, Blue; the ſixth, BC, Indigo; and the ſeventh, CD, Violet. And conceive that theſe are all the colours of uncompounded light gradually paſſing into one another, as they do when made by priſms; the circumference DEFGABCD, repreſenting the whole ſeries of colours from one end of the ſun's coloured image to the other; ſo that from D to E be all degrees of Red; at E, the mean colour between Red and Orange; from E to F, all degrees of Orange; at F, the mean between Orange and Yellow; from F to G, all degrees of Yellow, and ſo on. Let *p* be the center of gravity of the arch DE, and *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x*, the centers of gravity of the arches EF, FG, GA, AB, BC and CD reſpectively; and about thoſe centers of gravity let circles, proportional to the number of rays of each colour in the given mixture, be deſcribed; that is, the circle *p* proportional to the number of the Red-making rays in the mixture; the circle *q* proportional to the number of the Orange-making rays in the mixture, and ſo of the reſt. Find the common center of gravity of all thoſe circles *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x*. Let that center be Z; and from the center of the circle ADF, through Z to the circumference, drawing the right line OY, the place of the point Y in the circumference ſhall ſhew the colour ariſing from the compoſition of all the colours in the given mixture; and the line OZ ſhall be proportional to the fulneſs or intenſeneſs of the colour, that is, to its diſtance from Whiteneſs. As if Y fall in the middle between F and G, the compounded colour ſhall be the beſt Yellow; if Y verge from the middle towards F or G, the compound colour ſhall accordingly be a Yellow, verging towards Orange or Green. If Z fall upon the circumference, the colour ſhall be intenſe and florid in the higheſt degree; if it fall in the mid-way between the circumference and center, it ſhall be but half ſo intenſe; that is, it ſhall be ſuch a colour as would be made by diluting the intenſeſt Yellow with an equal quantity of Whiteneſs; and if it fall upon the center O, the colour ſhall have loſt all its intenſeneſs, and become a White. But it is to be noted, that if the point Z fall in or near the line OD, the main ingredients being the Red and Violet, the colour compounded ſhall not be any of the Priſmatick colours, but a Purple, inclining to

Compound of Primary Colours.

to Red or Violet, accordingly as the point Z lieth on the ſide of the line DO towards E or towards C; and in general the compounded Violet is more bright and more fiery than the uncompounded. Alſo if only two of the Primary colours, which in the circle are oppoſite to one another, be mixed in an equal proportion, the point Z ſhall fall upon the center O, and yet the Colour compounded of thoſe two ſhall not be perfectly White, but ſome faint anonymous colour. For I could never yet by mixing only two Primary colours produce a perfect White. Whether it may be compounded of a mixture of three, taken at equal diſtances in the circumferences, I do not know; but of four or five I do not much queſtion but it may. But theſe are curioſities of little or no moment to the underſtanding the phænomena of Nature. For in all Whites, produced by Nature, there uſes to be a mixture of all ſorts of rays, and by conſequence a compoſition of all colours.

To give an inſtance of this rule; ſuppoſe a colour is compounded of theſe Homogeneal colours, of Violet one part, of Indigo one part, of Blue two parts, of Green three parts, of Yellow five parts, of Orange ſix parts, and of Red ten parts. Proportional to theſe parts deſcribe the circles *x*, *v*, *t*, *s*, *r*, *q*, *p*, reſpectively; that is, ſo that if the circle *x* be one, the circle *v* may be one, the circle *t* two, the circle *s* three, and the circles *r*, *q* and *p*, five, ſix and ten. Then I find Z the common center of gravity of theſe circles; and through Z drawing the line OY, the point Y falls upon the circumference between E and F, ſome thing nearer to E than to F; and thence I conclude, that the colour compounded of theſe ingredients will be an Orange, verging a little more to Red than to Yellow. Alſo I find that OZ is a little leſs than one half of OY; and thence I conclude, that this Orange hath a little leſs than half the fulneſs or intenſeneſs of an uncompounded Orange; that is to ſay, that it is ſuch an Orange, as may be made by mixing an Homogeneal Orange with a good White, in the proportion of the line OZ to the line ZY; this proportion being not of the quantities of mixed orange and white powders, but of the quantities of the lights reflected from them.

This Rule I conceive accurate enough for practice, though not mathematically accurate; and the truth of it may be ſufficiently

proved to ſenſe, by ſtopping any of the colours at the lens in the tenth Experiment of this Book. For the reſt of the colours, which are not ſtopped, but paſs on to the focus of the lens, will there compound, either accurately or very nearly, ſuch a colour, as by this Rule ought to reſult from their mixture.

PROP. VII. THEOR. V.

All the colours in the univerſe which are made by light, and depend not on the power of imagination, are either the colours of Homogeneal Lights, or compounded of theſe; and that either accurately or very nearly, according to the Rule of the foregoing Problem.

All Colours either

For it has been proved (in Prop. I. Part II.) that the changes of colours, made by refractions, do not ariſe from any new modifications of the rays impreſſed by thoſe refractions, and by the various terminations of light and ſhadow, as has been the conſtant and general opinion of philoſophers. It has alſo been proved, that the ſeveral colours of the Homogeneal Rays do conſtantly anſwer to their degrees of refrangibility (Prop. I. Part I. and Prop. II. Part II.) and that their degrees of refrangibility cannot be changed by refractions and reflexions (Prop. II. Part I.) and by conſequence that thoſe their colours are likewiſe immutable. It has alſo been proved directly, by refracting and reflecting Homogeneal Lights apart, that their colours cannot be changed (Prop. II. Part II.) It has been proved alſo, that when the ſeveral ſorts of rays are mixed, and in croſſing paſs through the ſame ſpace, they do not act on one another ſo as to change each others colorific qualities (Exper. 10. Part II.) but, by mixing their actions in the ſenſorium, beget a ſenſation differing from what either would do apart, that is a ſenſation of a mean colour between their proper colours; and particularly when by the concourſe and mixtures of all ſorts of rays, a White colour is produced, the White is a mixture of all the colours, which the rays would have apart (Prop. v. Part. II.) The rays in that mixture do not loſe or alter their ſeveral colorific qualities, but by all their various kinds of actions, mixed in the ſenſorium, beget a ſenſation of a middling colour between

between all their colours, which is Whiteneſs. For Whiteneſs is a mean between all colours, having itſelf indifferently to them all, ſo as with equal facility to be tinged with any of them. A Red powder mixed with a little Blue, or a Blue with a little Red, doth not preſently loſe its colour; but a White powder mixed with any colour is preſently tinged with that colour, and is equally capable of being tinged with any colour whatever. It has been ſhewed alſo, that as the ſun's light is mixed of all ſorts of rays, ſo its Whiteneſs is a mixture of the colours of all ſorts of rays; thoſe rays having from the beginning their ſeveral colorific qualities, as well as their ſeveral refrangibilities, and retaining them perpetually unchanged, notwithſtanding any refractions or reflexions they may at any time ſuffer; and that whenever any ſort of the ſun's rays is by any means (as by reflexion in Exper. 9 and 10. Part I. or by refraction as happens in all refractions) ſeparated from the reſt, then they manifeſt their proper colours. Theſe things have been proved: and the ſum of all this amounts to the Propoſition here to be proved. For if the ſun's light is mixed of ſeveral ſorts of rays, each of which have originally their ſeveral refrangibilities and colorific qualities, and notwithſtanding their refractions and reflexions, and their various ſeparations or mixtures, keep thoſe their original properties perpetually the ſame without alteration; then all the colours in the world muſt be ſuch, as conſtantly ought to ariſe from the original colorific qualities of the rays, whereof the lights conſiſt, by which thoſe colours are ſeen. And therefore if the reaſon of any colour whatever be required, we have nothing elſe to do, than to conſider how the rays in the ſun's light have, by reflexions or refractions, or other cauſes, been parted from one another, or mixed together; or otherwiſe to find out what ſorts of rays are in the light, by which that colour is made, and in what proportion; and then, by the laſt Problem, to learn the colour which ought to ariſe by mixing thoſe rays, or their colours, in that proportion. I ſpeak here of colours ſo far as they ariſe from light. For they appear ſometimes by other cauſes; as when by the power of phantaſy we ſee colours in a dream; or a mad-man ſees things before him which are not there; or when we ſee fire

Homogeneal or Compounded.

by ſtriking the eye; or ſee colours like the eye of a peacock's feather, by preſſing our eyes in either corner, whilſt we look the other way. Where theſe and ſuch like cauſes interpoſe not, the colour always anſwers to the ſort or ſorts of the rays, whereof the light conſiſts; as I have conſtantly found in whatever phænomena of colours I have hitherto been able to examine. I ſhall in the following Propoſitions give inſtances of this in the phænomena of chiefeſt note.

PROP. VIII. PROB. III.

By the diſcovered properties of light to explain the colours made by priſms.

The Priſmatic Let ABC [in *fig.* 12.] repreſent a priſm refracting the light of the ſun, which comes into a dark chamber, through a hole, FΦ, almoſt as broad as the priſm; and let MN repreſent a white paper, on which the refracted light is caſt; and ſuppoſe the moſt refrangible, or deepeſt Violet-making, rays fall upon the ſpace Pπ; the leaſt Refrangible or deepeſt Red-making rays, upon the ſpace T⌉; the middle ſort between the Indigo-making and Blue-making rays, upon the ſpace Qχ; the middle ſort of the Green-making rays upon the ſpace Rϱ; the middle ſort between the Yellow-making and Orange-making rays, upon the ſpace sσ; and other intermediate ſorts, upon intermediate ſpaces. For ſo the ſpaces, upon which the ſeveral ſorts adequately fall, will, by reaſon of the different refrangibility of thoſe ſorts, be one lower than another. Now if the paper, MN, be ſo near the priſm, that the ſpaces PT and π⌉ do not interfere with one another; the diſtance between them, Tπ, will be illuminated by all the ſorts of rays, in that proportion to one another which they have at their very firſt coming out of the priſm, and conſequently be White. But the ſpaces PT and π⌉ on either hand, will not be illuminated by them all, and therefore will appear coloured. And particularly at P, where the outmoſt Violet-making rays fall alone, the colour muſt be the deepeſt Violet. At Q, where the Violet-making and Indigo-making rays are mixed, it muſt be a Violet inclining much to Indigo. At R, where the Violet-making, Indigo-making, Blue-making,

making, and one half of the Green-making rays are mixed, their colours muſt (by the conſtruction of the ſecond Problem) compound a middle colour between Indigo and Blue. At S, where all the rays are mixed except the Red-making and Orange-making, their colours ought by the ſame rule to compound a faint Blue, verging more to Green than Indigo. And in the progreſs from S to T, this Blue will grow more and more faint and dilute, till at T, where all the colours begin to be mixed, it ends in Whiteneſs. Colours explained.

So again, on the other ſide of the White, at τ, where the leaſt refrangible or outmoſt Red-making rays are alone, the colour muſt be the deepeſt Red. At σ, the mixture of Red and Orange will compound a Red inclining to Orange. At ϱ, the mixture of Red, Orange, Yellow, and one half of the Green muſt compound a middle colour between Orange and Yellow. At χ, the mixture of all colours but Violet and Indigo will compound a faint Yellow, verging more to Green than to Orange. And this Yellow will grow more faint and dilute continually in its progreſs from χ to π, where by a mixture of all ſorts of rays it will become White.

Theſe colours ought to appear, were the ſun's light perfectly White: but becauſe it inclines to Yellow, the exceſs of the Yellow-making rays, whereby it is tinged with that colour, being mixed with the faint Blue between S and T, will draw it to a faint Green. And ſo the colours in order from P to τ ought to be Violet, Indigo, Blue, very faint Green, White, faint Yellow, Orange, Red. Thus it is by the computation: and they that pleaſe to view the colours made by a priſm, will find it ſo in Nature.

Theſe are the colours on both ſides the White, when the paper is held between the priſm and the point X, where the colours meet and the interjacent white vaniſhes. For if the paper be held ſtill farther off from the priſm, the moſt refrangible and leaſt refrangible rays will be wanting in the middle of the light, and the reſt of the rays which are found there, will by mixture produce a fuller Green than before. Alſo the Yellow and Blue will now become leſs compounded, and by conſequence more intenſe than before. And this alſo agrees with experience.

And

The Prismatic

And if one look through a prism upon a white object encompassed with blackness or darkness, the reason of the colours arising on the edges is much the same; as will appear to one that shall a little consider it. If a black object be encompassed with a white one, the colours which appear through the prism are to be derived from the light of the white one, spreading into the regions of the black; and therefore they appear in a contrary order to that, when a white object is surrounded with black. And the same is to be understood when an object is viewed, whose parts are some of them less luminous than others. For in the borders of the more and less luminous parts, colours ought always, by the same principles, to arise from the excess of the light of the more luminous, and to be of the same kind as if the darker parts were black, but yet to be more faint and dilute.

What is said of colours made by prisms may be easily applied to colours made by the glasses of telescopes or microscopes, or by the humours of the eye. For if the object-glass of a telescope be thicker on one side than on the other, or if one half of the glass, or one half of the pupil of the eye be covered with any opake substance: the object-glass, or that part of it, or of the eye, which is not covered, may be considered as a wedge with crooked sides; and every wedge of glass, or other pellucid substance, has the effect of a prism in refracting the light which passes through it (g).

How the colours in the ninth and tenth Experiments of the first Part arise from the different reflexibility of light, is evident by what was there said. But it is observable in the ninth Experiment, that whilst the sun's direct light is Yellow, the excess of the Blue making rays in the reflected beam of light MN, suffices only to bring that Yellow to a pale White inclining to Blue, and not to tinge it with a manifestly Blue colour. To obtain therefore a better Blue, I used instead of the Yellow light of the sun the White light of the clouds, by varying a little the Experiment, as follows.

Exper. 16. Let HFG [in *fig.* 13.] represent a prism in the open air; and S, the eye of the spectator, viewing the clouds by their light coming into the prism at the plane side FIGK, and reflected

(g) Vide Lect. Opt. Part II. Sect. v.

in

in it by its base HEIG, and thence going out through its plane side HEFK to the eye. And when the prism and eye are conveniently placed, so that the angles of incidence and reflexion at the base may be about 40 degrees; the spectator will see a bow MN of a Blue colour, running from one end of the base to the other, with the concave side towards him; and the part of the base IMNG beyond this bow will be brighter than the other part, EMNH, on the other side of it. This Blue colour MN being made by nothing else than by Reflexion of a specular superficies, seems so odd a phænomenon, and so difficult to be explained by the vulgar hypothesis of philosophers, that I could not but think it deserved to be taken notice of. Now for understanding the reason of it, suppose the plane ABC to cut the plane sides and base of the prism perpendicularly. From the eye to the line BC, wherein that plane cuts the base, draw the lines s*p* and s*t*, in the angles s*pc* 50 degr. $\frac{1}{9}$, and s*tc* 49 degr. $\frac{1}{18}$: and the point *p* will be the limit, beyond which none of the most refrangible rays can pass through the base of the prism, and be refracted, whose incidence is such that they may be reflected to the eye; and the point *t* will be the like limit for the least refrangible rays, that is, beyond which none of them can pass through the base, whose incidence is such that by reflexion they may come to the eye. And the point *r* taken in the middle way between *p* and *t*, will be the like limit for the meanly refrangible rays. And therefore all the least refrangible rays which fall upon the base beyond *t*, that is, between *t* and B, and can come from thence to the eye, will be reflected thither: but on this side *t*, that is, between *t* and C, many of these rays will be transmitted through the base. And all the most refrangible rays which fall upon the base beyond *p*, that is, between *p* and B, and can by reflexion come from thence to the eye, will be reflected thither; but every where between *p* and C, many of these rays will get through the base and be refracted: and the same is to be understood of the meanly refrangible rays on either side of the point *r*. Whence it follows, that the base of the prism must every where between *t* and B, by a total reflexion of all sorts of rays to the eye, look white and bright. And every where between *p* and C, by reason of the transmis-

Colours explained.

ſion of many rays of every ſort, look more pale, obſcure and dark. But at *r*, and in other places between *p* and *t*, where all the more refrangible rays are reflected to the eye, and many of the leſs refrangible are tranſmitted, the exceſs of the moſt refrangible in the Reflected Light will tinge that light with their colour, which is Violet and Blue. And this happens by taking the line c*prt* any where between the ends of the priſm, HG and EI (h).

PROP. IX. PROB. IV.

By the diſcovered Properties of Light to explain the Colours of the Rain-bow.

The Rainbow. This bow never appears, but where it rains in the ſun-ſhine, and may be made artificially by ſpouting up water which may break aloft, and ſcatter into drops, and fall down like rain. For the ſun ſhining upon theſe drops certainly cauſes the bow to appear to a ſpectator ſtanding in a due poſition to the rain and ſun. And hence it is now agreed upon, that this bow is made by refraction of the ſun's light in drops of falling rain. This was underſtood by ſome of the ancients, and of late more fully diſcovered and explained by the famous *Antonius de Dominis* archbiſhop of *Spalato*, in his book *De Radiis Viſûs & Lucis*, publiſhed by his friend *Bartolus* at *Venice*, in the year 1611, and written above 20 years before. For he teaches there how the interior bow is made in round drops of rain by two refractions of the ſun's light, and one reflexion between them; and the exterior, by two refractions and two ſorts of reflexions between them in each drop of water; and proves his explications by Experiments made with a phial full of water, and with globes of glaſs filled with water, and placed in the ſun to make the colours of the two bows appear in them. The ſame explication *Des-Cartes* hath purſued in his Meteors, and mended that of the exterior bow. But whilſt they

(h) Vid. Lect. Opt. Part II. § 145—149.
(i) Vid. Lect. Opt. Part I. Sect. IV. Prop. xxxv. Cor. 1 & 2.
(k) Lect. Opt. Part I. Sect. IV. Prop. xxxvi. Cor. 1 & 2.

they underſtood not the true origin of colours, it is neceſſary to purſue it here a little farther. For underſtanding therefore how the bow is made, let a drop of rain, or any other ſpherical tranſparent body, be repreſented by the ſphere BNFG [in *fig.* 14.] deſcribed with the center C, and ſemi-diameter CN. And let AN be one of the ſun's rays, incident upon it at N, and thence refracted to F; where let it either go out of the ſphere by refraction towards V, or be reflected to G; and at G, let it either go out by refraction to R, or be reflected to H; and at H, let it go out by refraction towards S, cutting the incident ray in Y. Produce AN and RG till they meet in X; and upon AX and NF let fall the perpendiculars CD and CE; and produce CD, till it fall upon the circumference at L. Parallel to the incident ray, AN, draw the diameter BQ; and let the ſine of incidence out of air into water be to the ſine of refraction as I to R. Now if you ſuppoſe the point of incidence, N, to move from the point B continually, till it come to L, the arch QF will firſt increaſe and then decreaſe; and ſo will the angle AXR, which the rays AN and GR contain; and the arch QF, and angle AXR, will be biggeſt, when ND is to CN as $\sqrt{11-RR}$ to $\sqrt{3RR}$; in which caſe NE will be to ND as 2R to I (i). Alſo the angle AYS, which the rays AN and HS contain, will firſt decreaſe, and then increaſe; and grow leaſt, when ND is to CN as $\sqrt{11-RR}$ to $\sqrt{8RR}$; in which caſe NE will be to ND as 3R to I (k). And ſo the angle, which the next emergent ray (that is, the emergent ray after three reflexions) contains with the incident ray AN, will come to its limit, when ND is to CN as $\sqrt{11-RR}$ to $\sqrt{15RR}$; in which caſe NE will be to ND as 4R to I. And the angle, which the ray next after that emergent, that is, the ray emergent after four reflexions, contains with the incident, will come to its limit, when ND is to CN as $\sqrt{11-RR}$ to $\sqrt{24RR}$; in which caſe NE will be to ND as 5R to I: and ſo on infinitely, the numbers 3, 8, 15, 24, &c. being gathered by continual addition of the terms of the Arithmetical Progreſſion 3, 5, 7, 9, &c. The truth of all this Mathematicians will eaſily examine (i).

The Rainbow.

(i) It all follows very evidently from the demonſtrations our author hath given of the two Propoſitions referred to in Note [i] and [k].

The Rainbow.

Now it is to be obſerved, that as when the ſun comes to his tropicks, days increaſe and decreaſe but a very little for a great while together; ſo when by increaſing the diſtance CD, theſe angles come to their limits, they vary their quantity but very little for ſome time together; and therefore a far greater number of the rays, which fall upon all the points N in the quadrant BL, ſhall emerge in the limits of theſe angles, than in any other inclinations. And farther it is to be obſerved, that the rays, which differ in refrangibility, will have different limits of their angles of emergence; and, by conſequence, according to their different degrees of refrangibility, emerge moſt copiouſly in different angles, and being ſeparated from one another appear each in their proper colours. And what thoſe angles are, may be eaſily gathered from the foregoing Theorem by computation.

For in the leaſt refrangible rays the ſines I and R (as was found above) are 108 and 81, and thence by computation the greateſt angle AXR will be found 42 degrees and 2 minutes; and the leaſt angle AYS 50 degrees and 57 minutes. And in the moſt refrangible rays the ſines I and R are 109 and 81; and thence by computation the greateſt angle AXR will be found 40 degrees and 17 minutes, and the leaſt angle AYS 54 degrees and 7 minutes.

Suppoſe now that O [in *fig.* 15.] is the ſpectator's eye, and OP a line drawn parallel to the ſun's rays; and let POE, POF, POG, POH, be angles of 40 degr. 17 min. 42 degr. 2 min. 50 degr. 57 min. and 54 degr. 7 min. reſpectively; and theſe angles turned about their common ſide OP, ſhall with their other ſides, OE, OF, OG, OH, deſcribe the verges of two rain-bows AFBE and CHDG. For if E, F, G, H be drops, placed any where in the conical ſuperficies deſcribed by OE, OF, OG, OH, and be illuminated by the ſun's rays SE, SF, SG, SH; the angle SEO being equal to the angle POE or 40 deg 17 min. ſhall be the greateſt angle, in which the moſt refrangible rays can, after one reflexion, be refracted to the eye; and therefore all the drops in the line OE ſhall ſend the moſt refrangible rays moſt copiouſly to the eye, and thereby ſtrike the ſenſes with the deepeſt Violet colour in that region. And in like manner the angle SFO being equal to the angle POF, or 42 degr. 2 min. ſhall be the greateſt, in which the leaſt refrangible rays, after

after one reflexion, can emerge out of the drops; and therefore thoſe rays ſhall come moſt copiouſly to the eye from the drops in the line OF, and ſtrike the ſenſes with the deepeſt Red colour in that region. And by the ſame argument, the rays, which have intermediate degrees of refrangibility, ſhall come moſt copiouſly from drops between E and F, and ſtrike the ſenſes with the intermediate colours, in the order which their degrees of refrangibity require; that is in the progreſs from E to F, or from the inſide of the bow to the outſide, in this order; Violet, Indigo, Blue, Green, Yellow, Orange, Red. But the Violet, by the mixture of the White light of the clouds, will appear faint, and incline to Purple. The Rainbow.

Again, the angle SGO being equal to the angle POG, or 50 gr. 51 min. ſhall be the leaſt angle, in which the leaſt refrangible rays can, after two reflexions, emerge out of the drops; and therefore the leaſt refrangible rays ſhall come moſt copiouſly to the eye from the drops in the line OG, and ſtrike the ſenſe with the deepeſt Red in that region. And the angle SHO being equal to the angle POH, or 54 gr. 7 min. ſhall be the leaſt angle, in which the moſt refrangible rays, after two reflexions, can emerge out of the drops; and therefore thoſe rays ſhall come moſt copiouſly to the eye from the drops in the line OH, and ſtrike the ſenſes with the deeped Violet in that region. And by the ſame argument, the drops in the regions between G and H ſhall ſtrike the ſenſe with the intermediate colours, in the order which their degrees of refrangibility require; that is, in the progreſs from G to H, or from the inſide of the bow to the outſide, in this order; Red, Orange, Yellow, Green, Blue, Indigo, Violet. And ſince theſe four lines OE, OF, OG, OH, may be ſituated any where in the abovementioned Conical Superficies; what is ſaid of the drops and colours in theſe lines is to be underſtood of the drops and colours every where in thoſe ſuperficies.

Thus ſhall there be made two bows of colours, an interior and ſtronger, by one reflexion in the drops, and an exterior and fainter by two; for the light becomes fainter by every reflexion. And their colours ſhall lie in a contrary order to one another, the Red of both bows bordering upon the ſpace, GF, which is between the

The Rainbow.

the bows. The breadth of the interior bow, EOF, meaſured croſs the colours, ſhall be 1 deg. 45 min. and the breadth of the exterior, GOH, ſhall be 3 deg. 10 min. and the diſtance between them GOF ſhall be 8 gr. 55 min. the greateſt ſemi-diameter of the innermoſt, that is, the angle POF being 42 gr. 2 min. and the leaſt ſemi-diameter of the outermoſt POG, being 50 gr. 57 min. Theſe are the meaſures of the bows, as they would be, were the ſun but a point; for by the breadth of his body the breadth of the bows will be increaſed and their diſtance decreaſed by half a degree, and ſo the breadth of the interior Iris will be 2 deg. 15 min. that of the exterior 3 deg. 40 min. their diſtance 8 deg. 25 min. the greateſt ſemi-diameter of the interior bow 42 deg. 17 min. and the leaſt of the exterior 50 deg. 42 min. And ſuch are the dimenſions of the bows in the heavens found to be very nearly, when their colours appear ſtrong and perfect. For once, by ſuch means as I then had, I meaſured the greateſt ſemi-diameter of the interior Iris about 42 degrees; and the breadth of the Red, Yellow and Green in that Iris, 63 or 64 minutes; beſides the outmoſt faint Red obſcured by the brightneſs of the clouds, for which we may allow 3 or 4 minutes more. The breadth of the Blue was about 40 minutes more beſides the Violet, which was ſo much obſcured by the brightneſs of the clouds, that I could not meaſure its breadth. But ſuppoſing the breadth of the Blue and Violet together to equal that of the Red, Yellow and Green together, the whole breadth of this iris will be about $2\frac{1}{4}$ degrees, as above. The leaſt diſtance between this iris and the exterior iris was about 8 degrees and 30 minutes. The exterior iris was broader than the interior, but ſo faint, eſpecially on the Blue ſide, that I could not meaſure its breadth diſtinctly. At another time when both bows appeared more diſtinct, I meaſured the breadth of the interior iris 2 gr. 10, and the breadth of the Red, Yellow and Green in the exterior iris, was to the breadth of the ſame colours in the interior as 3 to 2.

This explication of the rain-bow is yet farther confirmed by the known experiment, made by *Antonius de Dominis* and *Des-Cartes*, of hanging up any where in the ſun-ſhine a glaſs globe filled with water; and viewing it in ſuch a poſture, that the rays,

which come from the globe to the eye, may contain with the ſun's rays an angle of either 42 or 50 degrees. For if the angle be about 42 or 43 degrees, the ſpectator, ſuppoſe at O, ſhall ſee a full Red colour in that ſide of the globe oppoſed to the ſun, as it is repreſented at F; and if that angle become leſs, ſuppoſe by depreſſing the globe to E, there will appear other colours, Yellow, Green and Blue ſucceſſively in the ſame ſide of the globe. But if the angle be made about 50 degrees, ſuppoſe by lifting up the globe to G, there will appear a Red colour in that ſide of the globe towards the ſun; and if the angle be made greater, ſuppoſe by lifting up the globe to H, the Red will turn ſucceſſively to the other colours, Yellow, Green and Blue. The ſame thing I have tried by letting a globe reſt, and raiſing or depreſſing the eye, or otherwiſe moving it to make the angle of a juſt magnitude. The Rainbow.

I have heard it repreſented, that if the light of a candle be refracted by a priſm to the eye; when the Blue colour falls upon the eye, the ſpectator ſhall ſee Red in the priſm, and when the Red falls upon the eye he ſhall ſee Blue: and if this were certain, the colours of the globe and rain-bow ought to appear in a contrary order to what we find. But the colours of the candle being very faint, the miſtake ſeems to ariſe from the difficulty of diſcerning what colours fall on the eye. For, on the contrary, I have ſometimes had occaſion to obſerve in the ſun's light, refracted by a priſm, that the ſpectator always ſees that colour in the priſm, which falls upon his eye. And the ſame I have found true alſo in candle-light. For when the priſm is moved ſlowly from the line which is drawn directly from the candle to the eye, the Red appears firſt in the priſm, and then the Blue; and therefore each of them is ſeen when it falls upon the eye. For the Red paſſes over the eye firſt, and then the Blue.

Halos and Parhelia.

The light which comes through drops of rain by two refractions without any reflexion, ought to appear ſtrongeſt at the diſtance of about 26 degrees from the ſun, and to decay gradually both ways, as the diſtance from him increaſes and decreaſes. And the ſame is to be underſtood of light tranſmitted through ſpherical hail-ſtones. And if the hail be a little flatted, as it often

Halos and Parhelia.

is, the light tranſmitted may grow ſo ſtrong at a little leſs diſtance than that of 26 degrees, as to form a halo about the ſun or moon; which halo, as often as the hail-ſtones are duly figured, may be coloured. And then it muſt be Red within by the leaſt refrangible rays, and Blue without by the moſt refrangible ones; eſpecially if the hail-ſtones have opake globules of ſnow in their center to intercept the light within the halo (as *Hugenius* has obſerved) and make the inſide thereof more diſtinctly defined than it would otherwiſe be. For ſuch hail-ſtones, though ſpherical, by terminating the light by the ſnow, may make a halo red within and colourleſs without, and darker in the red than without, as halos uſe to be. For of thoſe rays which paſs cloſe by the ſnow, the rubriform will be leaſt refracted, and ſo come to the eye in the directeſt lines.

The light which paſſes through a drop of rain after two refractions, and three or more reflexions, is ſcarce ſtrong enough to cauſe a ſenſible bow; but in thoſe cylinders of ice by which *Hugenius* explains the *Parhelia*, it may perhaps be ſenſible.

PROP. X. PROB. V.

By the diſcovered properties of Light to explain the Permanent Colours of Natural Bodies.

Origin of the permanent Colours

Theſe colours ariſe from hence; that ſome natural bodies reflect ſome ſorts of rays, others other ſorts more copiouſly than the reſt. Minium reflects the leaſt refrangible or Red-making rays more copiouſly, and thence appears Red. Violets reflect the moſt refrangible, moſt copiouſly, and thence have their colour, and ſo of other bodies. Every body reflects the rays of its own colour more copiouſly than the reſt, and from their exceſs and predominance in the Reflected Light has its colour.

Exper. 17. For if in the Homogeneal Lights, obtained by the ſolution of the Problem propoſed in the fourth Propoſition of the firſt Part of this Book, you place bodies of ſeveral colours; you will find, as I have done, that every body looks moſt ſplendid and luminous in the light of its own colour. Cinnaber in the Homogeneal Red light is moſt reſplendent, in the Green light it is manifeſtly leſs

leſs reſplendent, and in the Blue light ſtill leſs. Indigo in the Violet-blue light is moſt reſplendent, and its ſplendor is gradually diminiſhed as it is removed thence by degrees through the Green and Yellow light to the Red. By a leek the Green light, and next that the Blue and Yellow which compound Green, are more ſtrongly reflected than the other colours, Red and Violet, and ſo of the reſt. But to make theſe experiments the more manifeſt, ſuch bodies ought to be choſen as have the fulleſt and moſt vivid colours, and two of thoſe bodies are to be compared together. Thus, for inſtance, if Cinnaber and Ultra-marine blue, or ſome other full blue, be held together in the Red homogeneal light, they will both appear Red; but the Cinnaber will appear of a ſtrongly luminous and reſplendent Red, and the Ultra-marine blue of a faint obſcure and dark Red; and if they be held together in the Blue homogeneal light they will both appear Blue, but the Ultra-marine will appear of a ſtrongly luminous and reſplendent Blue, and the Cinnaber of a faint and dark Blue. Which puts it out of diſpute, that the Cinnaber reflects the Red light more copiouſly than the Ultra-marine doth, and the Ultra-marine reflects the Blue much more copiouſly than the Cinnaber doth. The ſame experiment may be tried ſucceſsfully with Red Lead and Indigo, or with any other two coloured bodies, if due allowance be made for the different ſtrength and weakneſs of their colour and light. of Natural Bodies.

And as the reaſon of the colours of Natural Bodies is evident by theſe experiments, ſo it is farther confirmed and put paſt diſpute by the two firſt Experiments of the firſt Part; whereby it was proved in ſuch bodies, that the reflecting lights, which differ in colours, do differ alſo in degrees of refrangibility. For thence it is certain, that ſome bodies reflect the more refrangible, others the leſs refrangible rays more copiouſly.

And that this is not only a true reaſon of theſe colours, but even the only reaſon, may appear farther from this conſideration, that the colour of Homogeneal Light cannot be changed by the reflexion of Natural Bodies.

For if bodies by reflexion cannot in the leaſt change the colour of any one ſort of rays, they cannot appear coloured by

Origin of the permanent Colours

any other means, than by reflecting thoſe which either are of their own colour, or which by mixture muſt produce it.

But in trying experiments of this kind, care muſt be had that the light be ſufficiently Homogeneal. For if bodies be illuminated by the ordinary Priſmatick Colours, they will appear neither of their own day-light colours, nor of the colour of the light caſt on them; but of ſome middle colour between both, as I have found by experience. Thus red lead, for inſtance, illuminated with the ordinary Priſmatick Green, will not appear either Red or Green, but Orange or Yellow, or between Yellow and Green, accordingly as the Green light, by which it is illuminated, is more or leſs compounded. For becauſe red lead appears Red, when illuminated with White light, wherein all ſorts of rays are equally mixed, and in the Green light all ſorts of rays are not equally mixed; the exceſs of the Yellow-making, Green-making and Blue-making rays in the incident Green light, will cauſe thoſe rays to abound ſo much in the Reflected light, as to draw the colour from Red towards their colour. And becauſe the red lead reflects the Red-making rays moſt copiouſly in proportion to their number, and next after them the Orange-making and Yellow-making rays; theſe rays in the Reflected light will be more, in proportion to the light, than they were in the incident Green light, and thereby will draw the Reflected light from Green towards their colours. And therefore the Red lead will appear neither Red nor Green, but of a colour between both.

In tranſparently coloured liquors it is obſervable, that their colour uſes to vary with their thickneſs. Thus, for inſtance, a Red liquor in a Conical glaſs held between the light and the eye, looks of a pale and dilute Yellow at the bottom, where it is thin; and a little higher, where it is thicker, grows Orange; and where it is ſtill thicker, becomes Red; and where it is thickeſt, the Red is deepeſt and darkeſt (m). For it is to be conceived that ſuch a liquor ſtops the Indigo-making and Violet-making rays moſt eaſily, the Blue-making rays more difficultly, the Green-making rays ſtill more difficultly, and the Red-making moſt difficultly: and that if the thickneſs of the liquor be only ſo much

(m) Vide Lect. Opt. Part II. § 97.

as

as ſuffices to ſtop a competent number of the Violet-making and Indigo-making rays, without diminiſhing much the number of the reſt, the reſt muſt (by Prop. VI. Part I.) compound a pale Yellow. But if the liquor be ſo much thicker, as to ſtop alſo a great number of the Blue-making rays, and ſome of the Green-making, the reſt muſt compound an Orange; and where it is ſo thick, as to ſtop alſo a great number of the Green-making, and a conſiderable number of the Yellow-making, the reſt muſt begin to compound a Red; and this Red muſt grow deeper and darker as the Yellow-making and Orange-making rays are more and more ſtopped by increaſing the thickneſs of the liquor, ſo that few rays beſides the Red-making can get through.

of Natural Bodies.

Of this kind is an experiment lately related to me by Mr. *Halley*; who, in diving deep into the ſea in a diving-veſſel, found in a clear ſun-ſhine day, that when he was ſunk many fathoms deep into the water, the upper part of his hand, on which the ſun ſhone directly through the water, and through a ſmall glaſs-window in the veſſel, appeared of a Red colour like that of a damaſk roſe; and the water below, and the upper part of his hand, illuminated by light reflected from the water below, look Green. For thence it may be gathered, that the ſea-water reflects back the Violet and Blue making rays moſt eaſily, and lets the Red-making rays paſs moſt freely and copiouſly to great depths. For thereby the ſun's direct light at all great depths, by reaſon of the predominating Red-making rays, muſt appear Red; and the greater the depth is, the fuller and intenſer muſt that Red be. And at ſuch depths as the Violet-making rays ſcarce penetrate unto, the Blue-making, Green-making and Yellow-making rays, being reflected from below more copiouſly than the Red-making ones, muſt compound a Green.

Now if there be two liquors of full colours, ſuppoſe a Red and a Blue, and both of them ſo thick as ſuffices to make their colours ſufficiently full; though either liquor be ſufficiently tranſparent apart, yet will you not be able to ſee through both together. For if only the Red-making rays paſs through one liquor, and only the Blue-making through the other, no rays can paſs through both. This Mr. *Hook* tried caſually with glaſs-wedges

Origin of the permanent Colours

filled with Red and Blue liquors, and was ſurprized at the unexpected event; the reaſon of it being then unknown: which makes me truſt the more to his Experiment, though I have not tried it myſelf. But he that would repeat it, muſt take care the liquors be of very good and full colours.

Now whilſt bodies become coloured by reflecting or tranſmitting this or that ſort of rays more copiouſly than the reſt; it is to be conceived that they ſtop and ſtifle in themſelves the rays, which they do not reflect or tranſmit. For if gold be foliated, and held between your eye and the light, the light looks of a greyiſh Blue; and therefore maſſy gold lets into its body the Blue-making rays, to be reflected to and fro within it, till they be ſtopped and ſtifled; whilſt it reflects the Yellow-making outwards, and thereby looks Yellow. And much after the ſame manner that leaf-gold is Yellow by reflected, and Blue by tranſmitted light, and maſſy gold is Yellow in all poſitions of the eye; there are ſome liquors, as the tincture of *Lignum Nepriticum*, and ſome ſorts of glaſs, which tranſmit one ſort of light moſt copiouſly, and reflect another ſort; and thereby look of ſeveral colours, according to the poſition of the eye to the light. But if theſe liquors or glaſſes were ſo thick and maſſy, that no light could get through them; I queſtion not but they would, like all other opake bodies, appear of one and the ſame colour in all poſitions of the eye, though this I cannot yet affirm by experience. For all coloured bodies, ſo far as my obſervation reaches, may be ſeen through, if made ſufficiently thin; and therefore are in ſome meaſure Tranſparent, and differ only in degrees of tranſparency from tinged tranſparent liquors; theſe liquors, as well as thoſe bodies, by a ſufficient thickneſs becoming Opake. A tranſparent body which looks of any colour by tranſmitted light, may alſo look of the ſame colour by reflected light; the light of that colour being reflected by the farther ſurface of the body, or by the air beyond it. And then the reflected colour will be diminiſhed, and perhaps ceaſe, by making the body very thick, and pitching it on the backſide to diminiſh the reflexion of its farther ſurface, ſo that the light reflected from the tinging particles may predominate. In ſuch caſes, the colour of the reflected light

light will be apt to vary from that of the light tranſmitted. But whence it is that tinged bodies and liquors reflect ſome ſort of rays, and intromit or tranſmit other ſorts, ſhall be ſaid in the next Book. In this Propoſition I content myſelf to have put it paſt diſpute, that bodies have ſuch properties, and thence appear coloured. of Natural Bodies.

PROP. XI. PROB. VI.

By mixing coloured lights to compound a beam of light, of the ſame colour and nature with a beam of the ſun's direct light, and therein to experience the truth of the foregoing Propoſitions.

To recompoſe the Solar Light.

Let ABC*abc* [in *fig.* 16.] repreſent a priſm by which the ſun's light, let into a dark chamber through the hole F, may be refracted towards the lens MN, and paint upon it at *p*, *q*, *r*, *s* and *t*, the uſual colours, Violet, Blue, Green, Yellow and Red; and let the diverging rays, by the refraction of this lens, converge again towards X, and there, by the mixture of all thoſe their colours, compound a White, according to what was ſhewn above. Then let another priſm DEG*deg*, parallel to the former, be placed at X, to refract that White light upwards towards Y. Let the Refracting Angles of the priſms, and their diſtances from the lens be equal; ſo that the rays which converged from the lens towards X, and, without refraction, would there have croſſed and diverged again; may, by the refraction of the ſecond priſm, be reduced into parallelism, and diverge no more. For then thoſe rays will recompoſe a beam of White light, XY. If the Refracting Angle of either priſm be the bigger, that priſm muſt be ſo much the nearer to the lens. You will know when the priſms and the lens are well ſet together, by obſerving if the beam of light XY, which comes out of the ſecond priſm, be perfectly White to the very edges of the light, and at all diſtances from the priſm continue perfectly and totally White like a beam of the ſun's light. For till this happens, the poſition of the priſms and lens to one another muſt be corrected; and then if by the help of a long beam of wood, as is repreſented in the figure, or by a tube, or ſome other ſuch inſtrument made for that purpoſe, they be made faſt

To recompoſe

faſt in that ſituation, you may try all the ſame experiments in this compounded beam of light XY, which have been made in the ſun's direct light. For this compounded beam of light has the ſame appearance, and is endowed with all the ſame properties with a direct beam of the ſun's light, ſo far as my obſervation reaches. And in trying experiments in this beam, you may, by ſtopping any of the colours *p*, *q*, *r*, *s* and *t* at the lens, ſee how the colours produced in the experiments are no other than thoſe which the rays had at the lens, before they entered the compoſition of this beam: and by conſequence, that they ariſe not from any new modifications of the light by refractions and reflexions, but from the various ſeparations and mixtures of the rays originally endowed with their colour-making qualities.

So, for inſtance, having with a lens $4\frac{1}{4}$ inches broad, and two priſms on either hand $6\frac{1}{4}$ feet diſtant from the lens, made ſuch a beam of compounded light: to examine the reaſon of the colours made by priſms, I refracted this compounded beam of light XY with another priſm HIK*bk*, and thereby caſt the uſual Priſmatick Colours, PQRST, upon the paper, LV, placed behind. And then by ſtopping any of the colours *p*, *q*, *r*, *s*, *t* at the lens, I found that the ſame colour would vaniſh at the paper. So if the Purple *p* was ſtopped at the lens, the Purple P upon the paper would vaniſh, and the reſt of the colours would remain unaltered; unleſs perhaps the Blue, ſo far as ſome Purple, latent in it at the lens, might be ſeparated from it by the following refractions. And ſo by intercepting the Green upon the lens, the Green R upon the paper would vaniſh, and ſo of the reſt; which plainly ſhews, that as the White beam of light, XY, was compounded of ſeveral lights variouſly coloured at the lens, ſo the colours, which afterwards emerge out of it by new refractions, are no other than thoſe of which its Whiteneſs was compounded. The refraction of the priſm HIK*kh* generates the colours PQRST upon the paper, not by changing the colorific qualities of the rays, but by ſeparating the rays, which had the very ſame colorific qualities before they entered the compoſition of the refracted beam of White light XY. For otherwiſe the rays which were of one colour at the lens might be of another upon the paper, contrary to what we find.

So

So again, to examine the reaſon of the colours of Natural Bodies, I placed ſuch bodies in the beam of light XY, and found that they all appeared there of thoſe their own colours which they have in day-light; and that thoſe colours depend upon the rays, which had the ſame colours at the lens, before they entered the compoſition of that beam. Thus, for inſtance, Cinnaber illuminated by this beam appears of the ſame Red colour as in day-light; and if at the lens you intercept the Green-making and Blue-making rays, its redneſs will become more full and lively: but if you there intercept the Red-making rays, it will not any longer appear Red, but become Yellow or Green, or of ſome other colour, according to the ſorts of rays which you do not intercept. So Gold in this light, XY, appears of the ſame Yellow colour as in day-light; but by intercepting at the lens a due quantity of the Yellow-making rays, it will appear White like ſilver, as I have tried; which ſhews that its Yellowneſs ariſes from the exceſs of the intercepted rays tinging that Whiteneſs with their colour, when they are let paſs. So the infuſion of *Lignum Nephriticum*, as I have alſo tried, when held in this beam of light, XY, looks Blue by the reflected part of the light, and Red by the tranſmitted part of it, as when it is viewed in day-light: but, if you intercept the Blue at the lens, the infuſion will loſe its reflected Blue colour, whilſt its tranſmitted Red remains perfect, and by the loſs of ſome Blue-making rays, wherewith it was allayed, becomes more intenſe and full. And, on the contrary, if the Red and Orange-making rays be intercepted at the lens, the infuſion will loſe its tranſmitted Red, whilſt its Blue will remain, and become more full and perfect. Which ſhews, that the infuſion does not tinge the rays with Blue and Red, but only tranſmit thoſe moſt copiouſly which were Red-making before, and reflects thoſe moſt copiouſly which were Blue-making before. And after the ſame manner may the reaſons of other phænomena be examined, by trying them in this artificial beam of light, XY.

the Solar Light.

THE

THE SECOND BOOK OF OPTICKS.

PART I.

Obſervations concerning the Reflexions, Refractions and Colours of thin transparent Bodies.

IT has been obſerved by others, that Tranſparent Subſtances, as Glaſs, Water, Air, &c. when made very thin by being blown into bubbles, or otherwiſe formed into plates, do exhibit various colours according to their various thinneſs; although at a greater thickneſs they appear very clear and colourleſs. In the former Book I forbore to treat of theſe colours; becauſe they ſeemed of a more difficult conſideration, and were not neceſſary for eſtabliſhing the properties of light there diſcourſed of. But becauſe they may conduce to farther diſcoveries for compleating the theory of light, eſpecially as to the conſtitution of the parts of Natural Bodies, on which their colours or tranſparency depend; I have here ſet down an account of them. To render this diſcourſe ſhort and diſtinct, I have firſt deſcribed the principal of my obſervations, and then conſidered and made uſe of them. The obſervations are theſe.

Fig. 1.

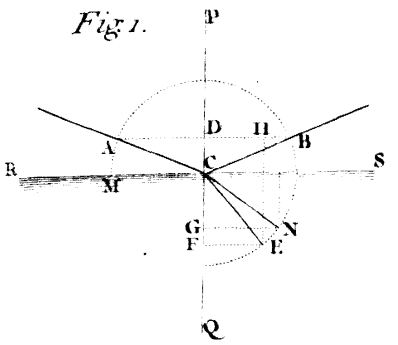


Fig. 2.

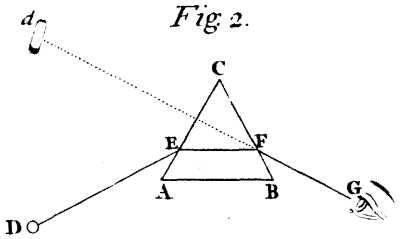


Fig. 3.

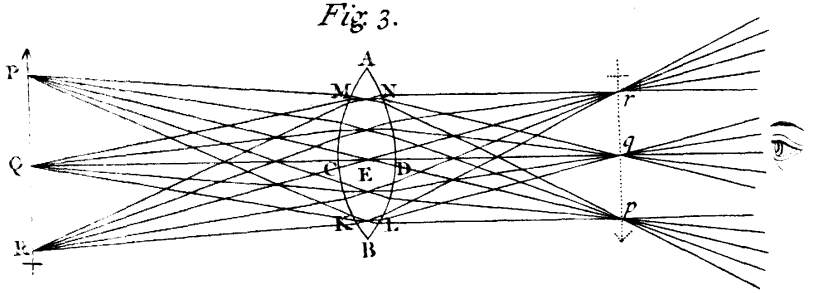


Fig. 4.

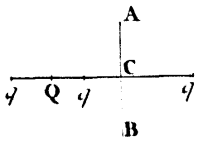


Fig. 5.

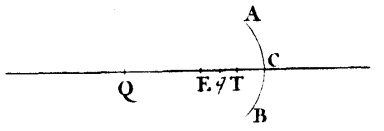


Fig. 6.

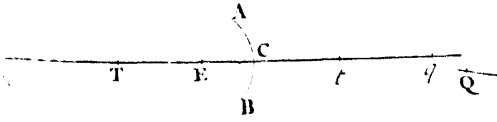


Fig. 7.

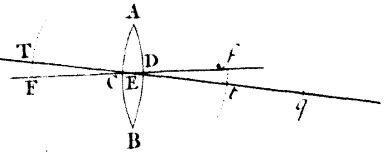


Fig. 8.

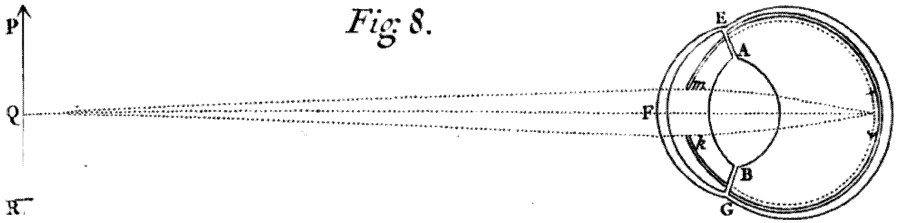


Fig. 9.

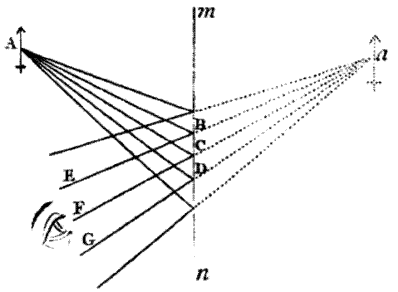
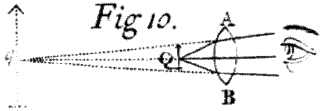


Fig. 10.



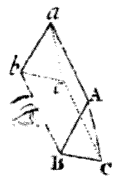


Fig. 11.

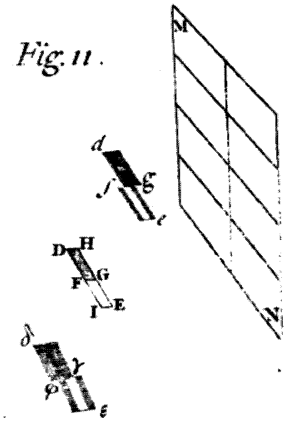
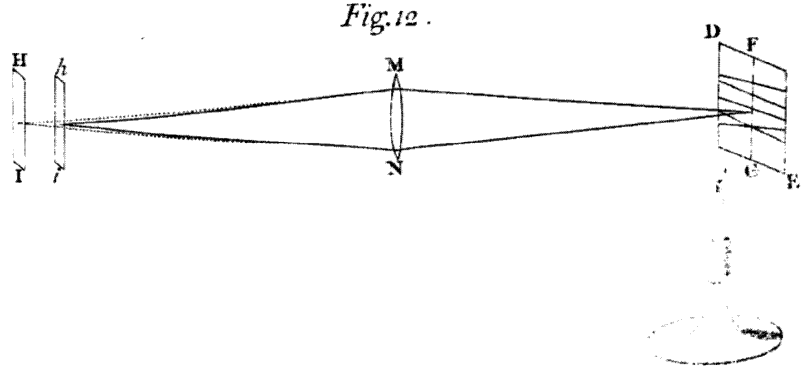


Fig. 12.



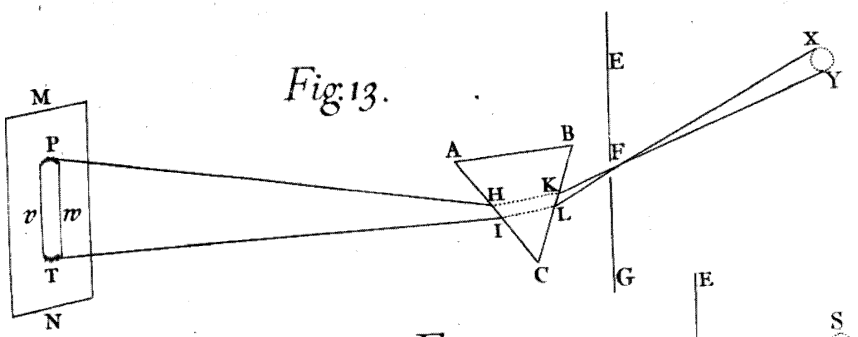


Fig. 13.

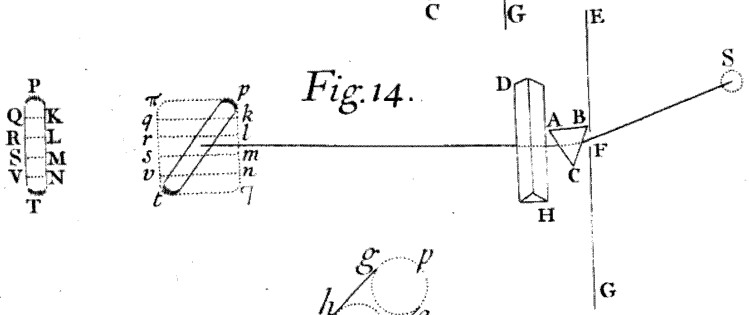


Fig. 14.

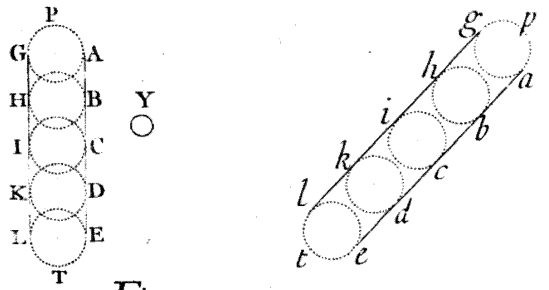


Fig. 15.

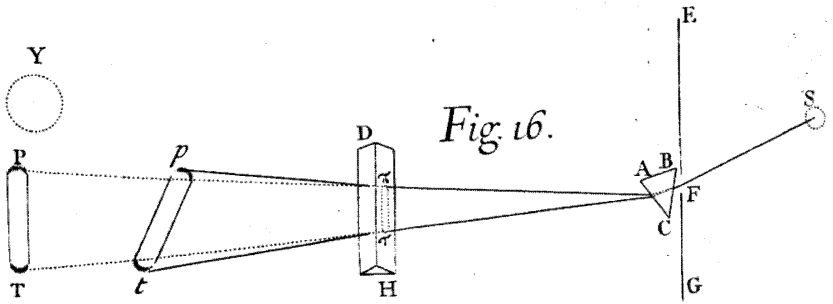


Fig. 16.

Obſ. 1. Compreſſing two priſms hard together, that their ſides, which by chance were a very little convex, might ſomewhere touch one another: I found the place in which they touched to become abſolutely tranſparent, as if they had there been one continued piece of glaſs. For when the light fell ſo obliquely on the air, which in other places was between them, as to be all reflected, it ſeemed in that place of contact to be wholly tranſmitted; inſomuch that when looked upon, it appeared like a black or dark ſpot, by reaſon that little or no ſenſible light was reflected from thence, as from other places; and, when looked through, it ſeemed as it were a hole in that air, which was formed into a thin plate by being compreſſed between the glaſſes. And through this hole objects, that were beyond, might be ſeen diſtinctly, which could not at all be ſeen through other parts of the glaſſes where the air was interjacent. Although the glaſſes were a little convex, yet this tranſparent ſpot was of a conſiderable breadth, which breadth ſeemed principally to proceed from the yielding inwards of the parts of the glaſſes, by reaſon of their mutual preſſure. For by preſſing them very hard together it would become much broader than otherwiſe. Priſms compreſſed. Central Spot.

Obſ. 2. When the plate of air, by turning the priſms about their common axis, became ſo little inclined to the incident rays, that ſome of them began to be tranſmitted; there aroſe in it many ſlender arcs of colours which at firſt were ſhaped almoſt like the conchoid, as you ſee them delineated in the firſt figure. And by continuing the motion of the priſms, theſe arcs increaſed, and bended more and more about the ſaid tranſparent ſpot, till they were completed into circles or rings incompaſſing it, and afterwards continually grew more and more contracted. Rings of Colours.

Theſe arcs at their firſt appearance were of a Violet and Blue colour, and between them were White arcs of circles, which preſently, by continuing the motion of the priſms, became a little tinged in their inward limbs with Red and Yellow, and to their outward limbs the Blue was adjacent. So that the order of theſe colours, from the central dark ſpot, was at that time White, Blue, Violet; Black, Red, Orange, Yellow, White, Blue, Violet, &c. Order of the Colours.

&c. But the Yellow and Red were much fainter than the Blue and Violet.

The motion of the prisms about their axis being continued, these colours contracted more and more, shrinking towards the Whiteness on either side of it, until they totally vanished into it. And then the circles in those parts appeared Black and White, without any other colours intermixed. But by farther moving the prisms about, the colours again emerged out of the Whiteness, the Violet and Blue at its inward limb, and at its outward limb the Red and Yellow. So that now their order from the central spot was White, Yellow, Red, Black, Violet, Blue, White, Yellow, Red, &c. contrary to what it was before.

Number of the Rings.

Obs. 3. When the rings or some parts of them appeared only Black and White, they were very distinct and well defined, and the Blackness seemed as intense as that of the central spot. Also in the borders of the rings, where the colours began to emerge out of the Whiteness, they were pretty distinct, which made them visible to a very great multitude. I have sometimes numbered above thirty successions, reckoning every Black and White ring for one succession, and seen more of them, which by reason of their smallness I could not number. But in other positions of the prisms, at which the rings appeared of many colours, I could not distinguish above eight or nine of them, and the exterior of those were very confused and dilute.

In these two Observations to see the rings distinct, and without any other colour than Black and White, I found it necessary to hold my eye at a good distance from them. For by approaching nearer, although in the same inclination of my eye to the plane of the rings, there emerged a Blueish colour out of the White; which, by dilating itself more and more into the Black, rendered the circles less distinct, and left the White a little tinged with Red and Yellow. I found also by looking through a slit or oblong hole, which was narrower than the pupil of my eye, and held close to it, parallel to the prisms; I could see the circles much distincter, and visible to a far greater number than otherwise.

Object-glasses compressed.

Obs. 4. To observe more nicely the order of the circles, which arose out of the White circles, as the rays became less and less inclined

inclined to the plate of air; I took two object-glasses, the one a plano-convex for a fourteen foot telescope, and the other a large double convex for one of about fifty foot; and upon this, laying the other with its plane side downwards, I pressed them slowly together, to make the colours successively emerge in the middle of the circles, and then slowly lifted the upper glass from the lower to make them successively vanish again in the same place. The colour, which by pressing the glasses together emerged last in the middle of the other colours, would, upon its first appearance, look like a circle of a colour almost uniform from the circumference to the center; and, by compressing the glasses still more, grow continually broader until a new colour emerged in its center, and thereby it became a ring encompassing that new colour. And by compressing the glasses still more, the diameter of this ring would increase, and the breadth of its orbit or perimeter decrease, until another new colour emerged in the center of the last: and so on until a third, a fourth, a fifth, and other following new colours successively emerged there, and became rings encompassing the innermost colour, the least of which was the Black spot. And, on the contrary, by lifting up the upper glass from the lower, the diameter of the rings would decrease, and the breadth of their orbit increase, until their colours reached successively to the center; and then they being of a considerable breadth, I could more easily discern and distinguish their species than before. And by this means I observed their succession and quantity to be as followeth.

Succession and Quantity of the Colours.

Next to the pellucid central spot, made by the contact of the glasses, succeeded Blue, White, Yellow and Red. The Blue was so little in quantity that I could not discern it in the circles made by the prisms, nor could I well distinguish any Violet in it; but the Yellow and Red were pretty copious, and seemed about as much in extent as the White, and four or five times more than the Blue. The next circuit in order of colours, immediately encompassing these, were Violet, Blue, Green, Yellow and Red: and these were all of them copious and vivid, excepting the Green, which was very little in quantity, and seemed much more fair and dilute than the other colours. Of the other four, the Violet was

the leaſt in extent, and the Blue leſs than the Yellow or Red. The third circuit or order was Purple, Blue, Green, Yellow and Red; in which the Purple ſeemed more reddiſh than the Violet in the former circuit, and the Green was much more conſpicuous, being as briſk and copious as any of the other colours, except the Yellow; but the Red began to be a little faded, inclining very much to Purple. After this ſucceeded the fourth circuit of Green and Red. The Green was very copious and lively, inclining on the one ſide to Blue, and on the other ſide to Yellow. But in this fourth circuit there was neither Violet, Blue, nor Yellow, and the Red was very imperfect and dirty. Alſo the ſucceeding colours became more and more imperfect and dilute, till after three or four revolutions they ended in perfect Whiteneſs. Their form, when the glaſſes were moſt compreſſed ſo as to make the Black ſpot appear in the center, is delineated in the ſecond figure; where *a*, *b*, *c*, *d*, *e* : *f*, *g*, *h*, *i*, *k* : *l*, *m*, *n*, *o*, *p* : *q*, *r* : *s*, *t* : *v*, *x* : *y*, *z* denote the colours reckoned in order from the center; Black, Blue, White, Yellow, Red: Violet, Blue, Green, Yellow, Red: Purple, Blue, Green, Yellow, Red: Green, Red: greeniſh Blue, Red: greeniſh Blue, pale Red: greeniſh Blue, reddiſh White.

Thickneſs of the Plates of Air producing

Obſ. 5. To determine the interval of the glaſſes, or thickneſs of the interjacent air, by which each colour was produced, I meaſured the diameters of the firſt ſix rings at the moſt lucid part of their orbits; and ſquaring them, I found their ſquares to be in the arithmetical progreſſion of the odd numbers, 1, 3, 5, 7, 9, 11. And ſince one of theſe glaſſes was plane, and the other ſpherical, their intervals at thoſe rings muſt be in the ſame progreſſion. I meaſured alſo the diameters of the dark or faint rings between the more lucid colours, and found their ſquares to be in the arithmetical progreſſion of the even numbers, 2, 4, 6, 8, 10, 12. And it being very nice and difficult to take theſe meaſures exactly; I repeated them divers times at divers parts of the glaſſes, that by their agreement I might be confirmed in them. And the ſame method I uſed in determining ſome others of the following Obſervations.

Obſ.

Obſ. 6. The diameter of the ſixth ring, at the moſt lucid part of its orbit, was $\frac{58}{100}$ parts of an inch; and the diameter of the ſphere on which the double convex object-glaſs was ground was about 102 feet; and hence I gathered the thickneſs of the air, or aereal interval of the glaſſes at that ring. But ſome time after, ſuſpecting that in making this Obſervation I had not determined the diameter of the ſphere with ſufficient accurateneſs, and being uncertain whether the plano-convex glaſs was truly plane, and not ſomething concave or convex on that ſide which I accounted plane; and whether I had not preſſed the glaſſes together, as I often did, to make them touch; (for by preſſing ſuch glaſſes together their parts eaſily yield inwards, and the rings thereby become ſenſibly broader than they would be, did the glaſſes keep their figures) I repeated the experiment; and found the diameter of the ſixth lucid ring about $\frac{55}{100}$ parts of an inch. I repeated the experiment alſo with ſuch an object-glaſs of another teleſcope as I had at hand. This was a double convex, ground on both ſides to one and the ſame ſphere, and its focus was diſtant from it $83\frac{2}{5}$ inches. And thence, if the ſines of incidence and refraction of the bright Yellow light be aſſumed in proportion as 11 to 17, the diameter of the ſphere, to which the glaſs was figured, will by computation be found 182 inches. This glaſs I laid upon a flat one, ſo that the Black ſpot appeared in the middle of the rings of colours, without any other preſſure than that of the weight of the glaſs. And now meaſuring the diameter of the fifth dark circle, as accurately as I could, I found it the fifth part of an inch preciſely. This meaſure was taken with the points of a pair of compaſſes on the upper ſurface on the upper glaſs; and my eye was about eight or nine inches diſtant from the glaſs, almoſt perpendicularly over it; and the glaſs was $\frac{1}{6}$ of an inch thick: and thence it is eaſy to collect that the true diameter of the ring between the glaſſes was greater than its meaſured diameter above the glaſſes, in the proportion of 80 to 79, or thereabouts; and by conſequence equal to $\frac{16}{79}$ part of an inch, and its true ſemidiameter equal to $\frac{8}{79}$ parts. Now as the diameter of the ſphere, 182 inches, is to the ſemi-diameter of this fifth dark ring, $\frac{8}{79}$ parts of an inch, ſo is this ſemi-diameter to the thickneſs

the ſeveral Colours.

Thickneſs of the Plates of Air

neſs of the air at this fifth dark ring; which is therefore $\frac{32}{567931}$ or $\frac{100}{1774784}$ parts of an inch; and the fifth part thereof, viz. the $\frac{1}{88739}$ part of an inch, is the thickneſs of the air at the firſt of theſe dark rings.

The ſame experiment I repeated with another double convex object-glaſs, ground on both ſides to one and the ſame ſphere. Its focus was diſtant from it $168\frac{1}{2}$ inches, and therefore the diameter of that ſphere was 184 inches. The glaſs being laid upon the ſame plain glaſs, the diameter of the fifth of the dark rings, when the black ſpot in their center appeared plainly without preſſing the glaſſes, was, by the meaſure of the compaſſes upon the upper glaſs, $\frac{121}{600}$ parts of an inch; and by conſequence between the glaſſes it was $\frac{1222}{6000}$. For the upper glaſs was $\frac{1}{8}$ of an inch thick, and my eye was diſtant from it 8 inches. And a third proportional to half this from the diameter of the ſphere is $\frac{5}{88850}$ parts of an inch. This is therefore the thickneſs of the air at this ring, and a fifth part thereof, viz. the $\frac{1}{88850}$th part of an inch is the thickneſs thereof at the firſt of the rings, as above.

I tried the ſame thing by laying theſe object-glaſſes upon flat pieces of a broken looking-glaſs, and found the ſame meaſures of the rings. Which makes me rely upon them, till they can be determined more accurately by glaſſes ground to larger ſpheres; though in ſuch glaſſes greater care muſt be taken of a true plane.

Theſe dimenſions were taken when my eye was placed almoſt perpendicularly over the glaſſes, being about an inch, or an inch and a quarter, diſtant from the incident rays, and eight inches diſtant from the glaſs; ſo that the rays were inclined to the glaſs in an angle of about four degrees. Whence by the following Obſervation you will underſtand, that had the rays been perpendicular to the glaſſes, the thickneſs of the air at theſe rings would have been leſs, in the proportion of the radius to the ſecant of four degrees, that is of 10000 to 10024. Let the thickneſſes found be therefore diminiſhed in this proportion, and they will become $\frac{1}{88952}$ and $\frac{1}{89063}$; or, to uſe the neareſt round number, the $\frac{1}{89000}$th

(n) $84\frac{1}{13}$] I give this number as I find it in the third edition; which was the laſt publiſhed in our Author's life-time. The fourth edition, publiſhed in 1730 after his death, as was ſaid from a copy

$\frac{1}{89000}$th part of an inch. This is the thickneſs of the air at the darkeſt part of the Firſt dark ring made by perpendicular rays: and half this thickneſs multiplied by the progreſſion 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. gives the thickneſſes of the air at the moſt luminous parts of all the brighteſt rings, viz. $\frac{1}{178000}$, $\frac{3}{178000}$, $\frac{5}{178000}$, $\frac{7}{178000}$, &c. their arithmetical means $\frac{2}{178000}$, $\frac{4}{178000}$, $\frac{6}{178000}$, &c. being its thickneſſes at the darkeſt parts of all the dark ones. producing the Colours ſeverally.

Obſ. 7. The rings were leaſt, when my eye was placed perpendicularly over the glaſſes in the axis of the rings: and when I viewed them obliquely, they became bigger; continually ſwelling as I removed my eye farther from the axis. And partly by meaſuring the diameter of the ſame circle at ſeveral obliquities of my eye, partly by other means, as alſo by making uſe of the two priſms for very great obliquities, I found its diameter, and conſequently the thickneſs of the air at its perimeter, in all thoſe obliquities, to be very nearly in the proportions expreſſed in this Table.

Angle of Incidence on the Air.	Angle of Refraction into the Air.	Diameter of the Ring.	Thickneſs of the Air.
Degr. Min.			
00 00	00 00	10	10
06 26	10 00	$10\frac{1}{13}$	$10\frac{2}{13}$
12 45	20 00	$10\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$
18 49	30 00	$10\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$
24 30	40 00	$11\frac{2}{5}$	13
29 37	50 00	$12\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$
33 58	60 00	14	20
35 47	65 00	$15\frac{1}{4}$	$23\frac{1}{4}$
37 19	70 00	$16\frac{4}{5}$	$28\frac{1}{4}$
38 33	75 00	$19\frac{1}{2}$	37
39 27	80 00	$22\frac{6}{7}$	$52\frac{1}{4}$
40 00	85 00	29	$84\frac{1}{13}$ (n)
40 11	90 00	35	$122\frac{1}{2}$

In the two firſt columns are expreſſed the obliquities of the incident and emergent rays to the plate of the air; that is, their angles of incidence and refraction. In the third column, the diameter of any coloured ring at thoſe obliquities is expreſſed in parts, of which ten conſtitute that diameter, when the rays are perpendicular. And in the fourth column, the Thickneſs of the air, at the circumference of that ring, is expreſſed in parts of which alſo ten conſtitute its thickneſs, when the rays are perpendicular.

And from theſe meaſures I ſeem to gather this rule: That the Thickneſs of the air is proportional to the ſecant of an angle,

a copy of the third edition corrected by the Author's own hand, and left before his death with the Bookſeller, has $84\frac{1}{7}$. But the better reading I take to be $84\frac{1}{13}$, which was the reading both of the firſt and ſecond edition, and of both the Latin editions of Dr. Clark.

whoſe

Thickneſs of the Plates of Air.

whoſe ſine is a certain mean proportional between the ſines of incidence and refraction. And that mean proportional, ſo far as by theſe meaſures I can determine it, is the firſt of an hundred and ſix arithmetical mean proportionals between thoſe ſines, counted from the bigger ſine; that is, from the ſine of refraction, when the refraction is made out of the glaſs into the plate of air; or from the ſine of incidence, when the refraction is made out of the plate of air into the glaſs.

Obſ. 8. The dark ſpot in the middle of the rings increaſed alſo by the obliquation of the eye, although almoſt inſenſibly. But if inſtead of the object-glaſſes the priſms were made uſe of, its increaſe was more manifeſt, when viewed ſo obliquely that no colours appeared about it. It was leaſt, when the rays were incident moſt obliquely on the interjacent air, and as the obliquity decreaſed, it increaſed more and more until the coloured rings appeared; and then decreaſed again, but not ſo much as it increaſed before. And hence it is evident, that the tranſparency was not only at the abſolute contact of the glaſſes, but alſo where they had ſome little interval. I have ſometimes obſerved the diameter of that ſpot to be between half and two-fifth parts of the diameter of the exterior circumference of the Red in the firſt circuit or revolution of colours, when viewed almoſt perpendicularly; whereas, when viewed obliquely, it hath wholly vaniſhed, and become opake and White like the other parts of the glaſs: whence it may be collected that the glaſſes did then ſcarcely, or not at all, touch one another; and that their interval at the perimeter of that ſpot, when viewed perpendicularly, was about a fifth or ſixth part of their interval at the circumference of the ſaid Red.

Ring of Colours made

Obſ. 9. By looking through the two contiguous object-glaſſes, I found that the interjacent air exhibited rings of colours, as well by tranſmitting light as by reflecting it. The central ſpot was now White, and from it the Order of the colours were yellowiſh Red; Black, Violet, Blue, White, Yellow, Red; Violet, Blue, Green, Yellow, Red, &c. But theſe colours were very faint and dilute, unleſs when the light was trajected very obliquely through the glaſſes: for by that means they became pretty vivid. Only the

the firſt yellowiſh Red, like the Blue in the fourth Obſervation, was ſo little and faint as ſcarcely to be diſcerned. Comparing the coloured rings made by reflexion, with theſe made by Tranſmiſſion of the light; I found that White was oppoſite to Black, Red to Blue, Yellow to Violet, and Green to a compound of Red and Violet. That is, thoſe parts of the glaſs were black when looked through, which when looked upon appeared White, and on the contrary. And ſo thoſe which in one caſe exhibited Blue, did in the other caſe exhibit Red. And the like of the other colours. The manner you have repreſented in the third figure, where AB, CD are the ſurfaces of the glaſſes contiguous at E, and the black lines between them are their diſtances in arithmetical progreſſion, and the colours written above are ſeen by Reflected light, and thoſe below by light Tranſmitted.

by tranſmitted Light.

Obſ. 10. Wetting the object-glaſſes a little at their edges, the water crept in ſlowly between them; and the circles thereby became leſs, and the colours more faint: inſomuch that as the water crept along, one half of them at which it firſt arrived, would appear broken off from the other half, and contracted into a leſs room. By meaſuring them, I found the proportions of their diameters to the diameters of the like circles made by air to be about ſeven to eight; and conſequently the intervals of the glaſſes at like circles, cauſed by thoſe two mediums water and air, are as about three to four. Perhaps it may be a general rule, that if any other medium more or leſs denſe than water be compreſſed between the glaſſes, their intervals, at the rings cauſed thereby, will be to their intervals cauſed by interjacent air, as the ſines are, which meaſure the refraction made out of that medium into air.

Rings of Colours made by Plates of Water.

Obſ. 11. When the water was between the glaſſes, if I preſſed the upper glaſs variouſly at its edges, to make the rings move nimbly from one place to another, a little white ſpot would immediately follow the center of them, which upon creeping in of the ambient water into that place would preſently vaniſh. Its appearance was ſuch as interjacent air would have cauſed, and it exhibited the ſame colours. But it was not air, for where any bubbles of air were in the water they would not vaniſh. The reflexion muſt have rather been cauſed by a ſubtiler medium,

Indication of a Medium more ſubtil than Air.

which could recede through the glaſſes at the creeping in of the water.

The Rings viewed

Obſ. 12. Theſe obſervations were made in the open air. But farther to examine the effects of coloured light falling on the glaſſes, I darkened the room, and viewed them by reflexion of the colours of a priſm caſt on a ſheet of white paper; my eye being ſo placed that I could ſee the coloured paper by reflexion in the glaſſes, as in a looking-glaſs. And by this means the rings became diſtincter and viſible to a far greater number than in the open air. I have ſometimes ſeen more than twenty of them, whereas in the open air I could not diſcern above eight or nine.

Obſ. 13. Appointing an aſſiſtant to move the priſm to and fro about its axis, that all the colours might ſucceſſively fall on that part of the paper, which I ſaw by reflexion, from that part of the glaſſes, where the circles appeared, ſo that all the colours might be ſucceſſively reflected from the circles to my eye, whilſt I held it immoveable; I found the circles which the Red light made to be manifeſtly bigger than thoſe which were made by the Blue and Violet. And it was very pleaſant to ſee them gradually ſwell or contract accordingly as the colour of the light was changed. The interval of the glaſſes at any of the rings, when they were made by the outmoſt Red light, was to their interval at the ſame ring when made by the outmoſt Violet, greater than as 3 to 2, and leſs than as 13 to 8. By the moſt of my obſervations it was as 14 to 9. And this proportion ſeemed very nearly the ſame in all obliquities of my eye; unleſs when two priſms were made uſe of inſtead of the object-glaſſes. For then, at a certain great obliquity of my eye, the rings made by the ſeveral colours ſeemed equal; and at a greater obliquity, thoſe made by the Violet would be greater than the ſame rings made by the Red: the refraction of the priſm in this caſe cauſing the moſt refrangible rays to fall more obliquely on that plate of the air than the leaſt refrangible ones. Thus the experiment ſucceeded in the coloured light, which was ſufficiently ſtrong and copious to make the rings ſenſible. And thence it may be gathered, that if the moſt refrangible and leaſt refrangible rays had been copious enough to make the rings ſenſible without the mixture of other rays, the proportion

proportion which here was 14 to 9 would have been a little greater, ſuppoſe $14\frac{1}{4}$ or $14\frac{1}{3}$ to 9. by Priſmatic Light.

Obſ. 14. Whilſt the priſm was turned about its axis with an uniform motion, to make all the ſeveral colours fall ſucceſſively upon the object-glaſſes, and thereby to make the rings contract and dilate: the contraction or dilatation of each ring, thus made by the variation of its colour, was ſwifteſt in the Red, and ſloweſt in the Violet, and in the intermediate colours it had intermediate degrees of celerity. Comparing the quantity of contraction and dilatation made by all the degrees of each colour, I found that it was greateſt in the Red; leſs in the Yellow; ſtill leſs in the Blue; and leaſt in the Violet. And to make as juſt an eſtimation as I could of the proportions of their contractions or dilatations, I obſerved that the whole contraction or dilatation of the diameter of any ring, made by all the degrees of Red, was to that of the diameter of the ſame ring, made by all the degrees of Violet, as about four to three, or five to four; and that when the light was of the middle colour between Yellow and Green, the diameter of the ring was very nearly an arithmetical mean between the greateſt diameter of the ſame ring made by the outmoſt Red, and the leaſt diameter thereof made by the outmoſt Violet; contrary to what happens in the colours of the oblong ſpectrum made by the refraction of a priſm, where the Red is moſt contracted, the Violet moſt expanded, and in the midſt of all the colours is the confine of Green and Blue. And hence I ſeem to collect that the Thickneſſes of the air between the glaſſes there, where the ring is ſucceſſively made by the limits of the five principal colours, Red, Yellow, Green, Blue, Violet, in order; that is, by the extreme Red, by the limit of Red and Yellow in the middle of the Orange, by the limit of Yellow and Green, by the limit of Green and Blue, by the limit of Blue and Violet in the middle of the Indigo, and by the extreme Violet; are to one another very nearly as the ſix lengths of a chord which ſound the notes in a ſixth major, *ſol*, *la*, *mi*, *fa*, *ſol*, *la*. But it agrees ſomething better with the obſervation to ſay, that the Thickneſſes of the air between the glaſſes there, where the rings are ſucceſſively made by the limits of the ſeven colours, Red, Orange,

The Rings viewed by Prismatic Light.

Yellow, Green, Blue, Indigo, Violet in order, are to one another as the cube-roots of the squares of the eight lengths of a chord, which sound the notes in an eighth, *sol, la, fa, sol, la, mi, fa, sol*; that is, as the cube-roots of the squares of the numbers, 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}$.

Obs. 15. These rings were not of various colours, like those made in the open air, but appeared all over of that Prismatick colour only with which they were illuminated. And by projecting the Prismatick colours immediately upon the glasses, I found that the light which fell on the dark spaces, which were between the coloured rings, was transmitted through the glasses without any variation of colour. For on a white paper placed behind, it would paint rings of the same colour with those which were reflected, and of the bigness of their immediate (°) spaces. And from thence the origin of these rings is manifest; namely, that the air between the glasses, according to its various Thickness, is disposed in some places to reflect, and in others to transmit the light of any one colour, as you may see represented in the fourth figure; and in the same place to reflect that of one colour, where it transmits that of another.

Obs. 16. The squares of the diameters of these rings, made by any prismatick colour, were in arithmetical progression, as in the fifth Observation. And the diameter of the sixth circle, when made by the Citrine Yellow, and viewed almost perpendicularly, was about $\frac{58}{100}$ parts of an inch, or a little less, agreeable to the sixth Observation.

The precedent Observations were made with a rarer thin medium, terminated by a denser, such as was air or water compressed between two glasses. In those that follow are set down the appearances of a denser medium thinned within a rarer; such as are plates of Muscovy glass, bubbles of water, and some other thin substances terminated on all sides with air.

Rings of Colours

Obs. 17. If a bubble be blown with water first made tenacious by dissolving a little soap in it, it is a common observation, that after a while it will appear tinged with a great variety of colours. To defend these bubbles from being agitated by the external air

(°) Perhaps *intermediate*.

(whereby their colours are irregularly moved one among another, so that no accurate observation can be made of them) as soon as I had blown any of them I covered it with a clear glass, and by that means its colours emerged in a very regular order, like so many concentrick rings encompassing the top of the bubble. And as the bubble grew thinner, by the continual subsiding of the water, these rings dilated slowly and overspread the whole bubble, descending in order to the bottom of it, where they vanished successively. In the mean while, after all the colours were emerged at the top, there grew in the center of the rings a small round Black spot, like that in the first Observation; which continually dilated itself till it became sometimes more than $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{4}$ of an inch in breadth, before the bubble broke. At first I thought there had been no light reflected from the water in that place; but observing it more curiously, I saw within it several smaller round spots, which appeared much blacker and darker than the rest; whereby I knew that there was some reflexion at the other places which were not so dark as those spots. And by farther trial I found that I could see the images of some things (as of a candle or the sun) very faintly reflected, not only from the great Black spot, but also from the little darker spots which were within in it.

in bubbles of Water.

Besides the aforesaid coloured rings there would often appear small spots of colours, ascending and descending up and down the sides of the bubble, by reason of some inequalities in the subsiding of the water. And sometimes small Black spots, generated at the sides, would ascend up to the larger Black spot at the top of the bubble, and unite with it.

Obs. 18. Because the colours of these bubbles were more extended and lively than those of the air thinned between two glasses, and so more easy to be distinguished, I shall here give you a farther description of their order, as they were observed in viewing them by reflexion of the skies, when of a White colour, whilst a black substance was placed behind the bubble. And they were these; Red, Blue; Red, Blue; Red, Blue; Red, Green; Red, Yellow, Green, Blue, Purple; Red, Yellow, Green, Blue, Violet; Red, Yellow, White, Blue, Black.

Rings of Colours.

The three firſt ſucceſſions of Red and Blue were very dilute and dirty, eſpecially the firſt, where the Red ſeemed in a manner to be White. Among theſe there was ſcarce any other colour ſenſible beſides Red and Blue, only the Blues, and principally the ſecond Blue, inclined a little to Green.

The fourth Red was alſo dilute and dirty, but not ſo much as the former three; after that ſucceeded little or no Yellow, but a copious Green, which at firſt inclined a little to Yellow, and then became a pretty briſk and good Willow Green, and afterwards changed to a blueiſh colour; but there ſucceeded neither Blue nor Violet.

The fifth Red at firſt inclined very much to Purple, and afterwards became more bright and briſk, but yet not very pure. This was ſucceeded with a very bright and intenſe Yellow, which was but little in quantity, and ſoon changed to Green: but that Green was copious, and ſomething more pure, deep and lively, than the former Green. After that followed an excellent Blue of a bright ſky-colour, and then a Purple, which was leſs in quantity than the Blue, and much inclined to Red.

The ſixth Red was at firſt of a very fair and lively Scarlet, and ſoon after of a brighter colour, being very pure and briſk, and the beſt of all the Reds. Then, after a lively Orange, followed an intenſe bright and copious Yellow; which was alſo the beſt of all the Yellows, and this changed firſt to a greeniſh Yellow, and then to a greeniſh Blue: but the Green between the Yellow and the Blue, was very little and dilute, ſeeming rather a greeniſh White than a Green. The Blue which ſucceeded became very good, and of a very fair bright ſky-colour, but yet ſomething inferior to the former Blue; and the Violet was intenſe and deep with little or no Redneſs in it. And leſs in quantity than the Blue.

In the laſt Red appeared a tincture of Scarlet next to Violet, which ſoon changed to a brighter colour, inclining to an Orange; and the Yellow which followed was at firſt pretty good and lively, but afterwards it grew more dilute, until by degrees it ended in perfect Whiteneſs. And this Whiteneſs, if the water was very tenacious and well tempered, would ſlowly ſpread and dilate itſelf over

over the greater part of the bubble, continually growing paler at the top; where at length it would crack in many places; and thoſe cracks, as they dilated, would appear of a pretty good, but yet obſcure and dark ſky-colour; the White between the Blue ſpots diminiſhing, until it reſembled the threads of an irregular net-work, and ſoon after vaniſhed and left all the upper part of the bubble of the ſaid dark Blue colour. And this colour, after the aforeſaid manner, dilated itſelf downwards, until ſometimes it hath overſpread the whole bubble. In the mean while at the top, which was of a darker Blue than the bottom, and appeared alſo full of many round blue ſpots, ſomething darker than the reſt, there would emerge one or more very Black ſpots; and within thoſe, other ſpots of an intenſer Blackneſs, which I mentioned in the former Obſervation; and theſe continually dilated themſelves until the bubble broke.

In bubbles of Water.

If the water was not very tenacious, the Black ſpots would break forth in the White, without any ſenſible intervention of the Blue. And ſometimes they would break forth within the precedent Yellow, or Red, or perhaps within the Blue of the ſecond order, before the intermediate colours had time to diſplay themſelves.

By this deſcription you may perceive, how great an affinity theſe colours have with thoſe of air deſcribed in the fourth Obſervation, although ſet down in a contrary order; by reaſon that they begin to appear when the bubble is thickeſt, and are moſt conveniently reckoned from the loweſt and thickeſt part of the bubble upwards.

Obſ. 19. Viewing, in ſeveral oblique poſitions of my eye, the rings of colours emerging on the top of the bubble, I found that they were ſenſibly dilated by increaſing the Obliquity, but yet not ſo much by far as thoſe made by thinned air in the ſeventh Obſervation. For there they were dilated ſo much as, when viewed moſt obliquely, to arrive at a part of the plate more than twelve times thicker, than that where they appeared when viewed perpendicularly; whereas in this caſe, the thickneſs of the water, at which they arrived when viewed moſt obliquely, was to that thickneſs which exhibited them by perpendicular rays, ſomething leſs than as 8 to 5. By the beſt of my obſervations it

Rings of Colours.

it was between 15 and 15½ to 10; an increaſe about 24 times leſs than in the other caſe.

Sometimes the bubble would become of an uniform thickneſs all over, except at the top of it near the Black ſpot; as I knew, becauſe it would exhibit the ſame appearance of colours in all poſitions of the eye. And then the colours, which were ſeen at its apparent circumference by the obliqueſt rays, would be different from thoſe that were ſeen in other places, by rays leſs oblique to it. And divers ſpectators might ſee the ſame part of it of differing colours, by viewing it at very differing obliquities. Now obſerving how much the colours at the ſame places of the bubble, or at divers places of equal thickneſs, were varied by the ſeveral obliquities of the rays; by the aſſiſtance of the 4th, 14th, 16th and 18th Obſervations, as they are hereafter explained, I collect the Thickneſs of the water requiſite to exhibit any one and the ſame colour, at ſeveral obliquities, to be very nearly in the proportion expreſſed in this Table.

Incidence on the Water.		Refraction into the Water.		Thickneſs of the Water.
Degr.	Min.	Degr.	Min.	
00	00	00	00	10
15	00	11	11	10¼
30	00	22	1	10⅘
45	00	32	2	11⅓
60	00	40	30	13
75	00	46	25	14⅕
90	00	48	35	15⅕

In the two firſt columns are expreſſed the obliquities of the rays to the ſuperficies of the water, that is, their angles of incidence and refraction. Where I ſuppoſe that the ſines, which meaſure them, are in round numbers as 3 to 4; though probably the diſſolution of ſoap in the water, may a little alter its Refractive virtue. In the third column the Thickneſs of the bubble, at which any one colour is exhibited in thoſe ſeveral obliquities, is expreſſed in parts, of which ten conſtitute its Thickneſs when the rays are perpendicular. And the rule found by the ſeventh Obſervation agrees well with theſe meaſures, if duly applied; namely, that the Thickneſs of a plate of water requiſite to exhibit one and the ſame colour at ſeveral obliquities of the eye, is proportional to the ſecant of an angle, whoſe ſine is the firſt of an hundred and ſix arithmetical mean proportionals between the ſines of incidence and refraction counted from the leſſer ſine,

ſine, that is, from the ſine of refraction, when the refraction is made out of air into water, otherwiſe from the ſine of incidence. in Bubbles of Water.

I have ſometimes obſerved, that the colours which ariſe on poliſhed ſteel by heating it, or on bell-metal, and ſome other metalline ſubſtances, when melted and poured on the ground, where they may cool in the open air, have, like the colours of water-bubbles, been a little changed by viewing them at divers obliquities: and particularly that a deep Blue, or Violet, when viewed very obliquely, hath been changed to a deep Red. But the changes of theſe colours are not ſo great and ſenſible, as of thoſe made by water. For the *Scoria*, or vitrified part of the metal, which moſt metals when heated or melted do continually protrude, and ſend out to their ſurface, and which, by covering the metals in form of a thin glaſſy ſkin, cauſes theſe colours, is much denſer than water; and I find that the change, made by the obliquation of the eyes, is leaſt in colours of the denſeſt thin ſubſtances. Change of Colour by Obliquation of the Eye leſs in the denſer ſubſtances.

Obſ. 20. As in the ninth Obſervation ſo here, the bubble, by tranſmitted light, appeared of a contrary colour to that which it exhibited by reflexion. Thus when the bubble, being looked on by the light of the clouds reflected from it, ſeemed Red at its apparent circumference; if the clouds at the ſame time, or immediately after, were viewed through it, the colour at its circumference would be Blue. And, on the contrary, when by reflected light it appeared Blue, it would appear Red by tranſmitted light. Rings of Colours in bubbles of Water by tranſmitted Light.

Obſ. 21. By wetting very thin plates of Muſcovy glaſs, whoſe thinneſs make the like colours appear, the colours became more faint and languid; eſpecially by wetting the plates on that ſide oppoſite to the eye: but I could not perceive any variation of their ſpecies. So then the Thickneſs of a plate requiſite to produce any colour, depends only on the denſity of the plate, and not on that of the ambient medium. And hence, by the 10th and 16th Obſervations, may be known the Thickneſs which bubbles of water, or plates of Muſcovy glaſs, or other ſubſtances, have at any colour produced by them. Species of Colour depends on the denſity of the Plate not on that of the ambient Medium.

Obſ. 22. A thin tranſparent body, which is denſer than its ambient medium, exhibits more briſk and vivid colours than that

which is ſo much rarer; as I have particularly obſerved in the air and glaſs. For blowing glaſs very thin at a lamp-furnace, thoſe plates encompaſſed with air did exhibit colours much more vivid than thoſe of air made thin between two glaſſes.

Obſ. 23. Comparing the Quantity of light reflected from the ſeveral rings, I found that it was moſt copious from the firſt or inmoſt, and in the exterior rings became gradually leſs and leſs. Alſo the Whiteneſs of the firſt ring was ſtronger than that reflected from thoſe parts of the thin medium or plate, which were without the rings; as I could manifeſtly perceive, by viewing at a diſtance the rings made by the two object-glaſſes; or by comparing two bubbles of water blown at diſtant times, in the firſt of which the Whiteneſs appeared, which ſucceeded all the colours, and in the other, the Whiteneſs which preceded them all.

Rings viewed

Obſ. 24. When the two object-glaſſes were laid upon one another, ſo as to make the rings of the colours appear, though with my naked eye I could not diſcern above eight or nine of thoſe rings, yet by viewing them through a priſm I have ſeen a far greater multitude; inſomuch that I could number more than forty, beſides many others, that were ſo very ſmall and cloſe together, that I could not keep my eye ſteady on them ſeverally ſo as to number them, but by their extent I have ſometimes eſtimated them to be more than an hundred. And I believe the Experiment may be improved to the diſcovery of far greater numbers. For they ſeem to be really unlimited, though viſible only ſo far as they can be ſeparated by the refraction of the priſm, as I ſhall hereafter explain.

But it was but one ſide of theſe rings, namely, that towards which the refraction was made, which by that refraction was rendered diſtinct; and the other ſide became more confuſed than when viewed by the naked eye: inſomuch that there I could not diſcern above one or two, and ſometimes none of thoſe rings, of which I could diſcern eight or nine with my naked eye. And their ſegments or arcs, which on the other ſide appeared ſo numerous, for the moſt part exceeded not the third part of a circle. If the refraction was very great, or the priſm very diſtant from the object-

object-glaſſes, the middle part of thoſe arcs became alſo confuſed, by Priſmatic Light. ſo as to diſappear and conſtitute an even Whiteneſs: whilſt on either ſide, their ends, as alſo the whole arcs fartheſt from the center, became diſtincter than before, appearing in the form as you ſee them deſigned in the fifth figure.

The arcs, where they ſeemed diſtincteſt, were only White and Black ſucceſſively, without any other colours intermixed. But in other places there appeared colours, whoſe order was inverted by the refraction in ſuch manner, that if I firſt held the priſm very near the object-glaſſes, and then gradually removed it farther off towards my eye, the colours of the 2d, 3d, 4th, and following rings ſhrunk towards the White that emerged between them, until they wholly vaniſhed into it at the middle of the arcs, and afterwards emerged again in a contrary order. But at the ends of the arcs they retained their order unchanged.

I have ſometimes ſo laid one object-glaſs upon the other, that to the naked eye they have all over ſeemed uniformly White, without the leaſt appearance of any of the coloured rings; and yet by viewing them through a priſm, great multitudes of thoſe rings have diſcovered themſelves. And in like manner plates of Muſcovy glaſs, and bubbles of glaſs blown at a lamp-furnace, which were not ſo thin as to exhibit any colours to the naked eye, have through the priſm exhibited a great variety of them ranged irregularly up and down in the form of waves. And ſo bubbles of water, before they began to exhibit their colours to the naked eye of a by-ſtander, have appeared through a priſm, girded about with many parallel and horizontal rings; to produce which effect, it was neceſſary to hold the priſm parallel, or very nearly parallel to the horizon, and to diſpoſe it ſo, that the rays might be refracted upwards.

THE SECOND BOOK OF OPTICKS.

PART II.

Remarks upon the foregoing Observations.

Generation of the Rings

HAVING given my obſervations of theſe colours, before I make uſe of them to unfold the cauſes of the colours of Natural Bodies, it is convenient that by the ſimpleſt of them, ſuch as are the 2d, 3d, 4th, 9th, 12th, 18th, 20th, and 24th, I firſt explain the more compounded. And firſt to ſhew how the colours in the fourth and eighteenth Obſervations are produced, let there be taken in any right line from the point Y [in *fig.* 6.] the lengths YA, YB, YC, YD, YE, YF, YG, YH, in proportion to one another, as the cube-roots of the ſquares of the numbers, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$, 1, whereby the lengths of a Muſical chord to ſound all the notes in an eighth are repreſented; that is, in the proportion of the numbers 6300, 6814, 7114, 7631, 8255, 8855, 9343, 10000. And at the points A, B, C, D, E, F, G, H, let perpendiculars Aα, Bβ, &c. be erected, by whoſe intervals the extent of the ſeveral colours ſet underneath againſt them, is to be repreſented.

repreſented. Then divide the line Aα in ſuch proportion as the numbers 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, &c. ſet at the points of diviſion denote. And through thoſe diviſions from Y draw lines 1I, 2K, 3L, 5M, 6N, 7O, &c. of reflected Colours.

Now if A2 be ſuppoſed to repreſent the thickneſs of any thin tranſparent body, at which the outmoſt Violet is moſt copiouſly reflected in the firſt ring, or ſeries of colours; then, by the 13th Obſervation (*), HK will repreſent its thickneſs, at which the outmoſt Red is moſt copiouſly reflected in the ſame ſeries. Alſo by the 5th and 16th Obſervations, A6 and HN will denote the thickneſſes at which thoſe extreme colours are moſt copiouſly reflected in the ſecond ſeries; and A10 and HQ the thickneſſes, at which they are moſt copiouſly reflected in the third ſeries, and ſo on. And the thickneſs at which any of the intermediate colours are reflected moſt copiouſly, will, according to the 14th Obſervation, be defined by the diſtance of the line AH from the intermediate parts of the lines 2K, 6N, 10Q, &c. againſt which the names of thoſe colours are written below.

But farther, to define the latitude of theſe colours in each ring or ſeries, let A1 deſign the leaſt thickneſs, and A3 the greateſt thickneſs, at which the extreme Violet in the Firſt ſeries is reflected; and let HI, and HL, deſign the like limits for the extreme Red; and let the intermediate colours be limited by the intermediate parts of the lines 1I, and 3L, againſt which the names of thoſe colours are written, and ſo on: but yet with this caution, that the reflexions be ſuppoſed ſtrongeſt at the intermediate ſpaces, 2K, 6N, 10Q, &c. and from thence to decreaſe gradually towards theſe limits, 1I, 3L, 5M, 7O, &c. on either ſide; where you muſt not conceive them to be preciſely limited, but to decay indefinitely. And whereas I have aſſigned the ſame latitude to every ſeries; I did it, becauſe although the colours in the firſt ſeries ſeem to be a little broader than the reſt, by reaſon of a ſtronger reflexion there, yet that inequality is ſo inſenſible as ſcarcely to be determined by obſervation.

Now according to this deſcription, conceiving that the rays, originally of ſeveral colours, are by turns reflected at the ſpaces

(*) *— by the 13th Obſervation.*] Rather by the 14th.

Generation of the Rings

1IL3, 5MO7, 9PR11, &c. and tranſmitted at the ſpaces AHI1, 3LM5, 7OP9, &c. it is eaſy to know what colour muſt, in the open air, be exhibited at any Thickneſs of a tranſparent thin body. For if a ruler be applied parallel to AH, at that diſtance from it, by which the thickneſs of the body is repreſented, the alternate ſpaces, 1IL3, 5MO7, &c. which it croſſeth, will denote the reflected original colours, of which the colour, exhibited in the open air, is compounded. Thus if the conſtitution of the Green in the Third ſeries of colours be deſired, apply the ruler as you ſee at $\pi\varsigma\varphi$; and by its paſſing through ſome of the Blue at π, and Yellow at σ, as well as through the Green at φ, you may conclude that the Green exhibited at that thickneſs of the body is principally conſtituted of original Green, but not without a mixture of ſome Blue and Yellow.

By this means you may know how the colours, from the center of the rings outward, ought to ſucceed in order as they were deſcribed in the 4th and 18th Obſervations. For if you move the ruler gradually from AH through all diſtances, having paſſed over the firſt ſpace, which denotes little or no reflexion to be made by thinneſt ſubſtances, it will firſt arrive at 1 the Violet; and then very quickly at the Blue and Green, which together with that Violet compound Blue; and then at the Yellow and Red, by whoſe farther addition that Blue is converted into Whiteneſs, which whiteneſs continues during the tranſit of the edge of the ruler from I to 3; and after that, by the ſucceſſive deficience of its component colours, turns firſt to compound Yellow, and then to Red, and laſt of all the Red ceaſeth at L. Then begin the colours of the ſecond ſeries, which ſucceed in order during the tranſit of the edge of the ruler from 5 to O, and are more lively than before, becauſe more expanded and ſevered. And for the ſame reaſon, inſtead of the former White, there intercedes between the Blue and Yellow a mixture of Orange, Yellow, Green, Blue and Indigo, all which together ought to exhibit a dilute and imperfect Green. So the colours of the third ſeries all ſucceed in order; firſt, the Violet, which a little interferes with the Red of the ſecond order, and is thereby inclined to a reddiſh Purple; then the Blue and Green, which are leſs mixed with other colours,

lours, and conſequently more lively than before, eſpecially the Green: then follows the Yellow, ſome of which towards the Green is diſtinct and good, but that part of it towards the ſucceeding Red, as alſo that Red is mixed with the Violet and Blue of the fourth ſeries; whereby various degrees of Red very much inclining to Purple are compounded. The Violet and Blue, which ſhould ſucceed this Red, being mixed with, and hidden in it, there ſucceeds a Green. And this at firſt is much inclined to Blue, but ſoon becomes a good Green, the only unmixed and lively colour in this Fourth ſeries. For as it verges towards the Yellow, it begins to interfere with the colours of the Fifth ſeries; by whoſe mixture the ſucceeding Yellow and Red are very much diluted and made dirty, eſpecially the Yellow, which, being the weaker colour, is ſcarce able to ſhew itſelf. After this the ſeveral ſeries interfere more and more, and their colours become more and more intermixed, till after three or four more revolutions (in which the Red and Blue predominate by turns) all ſorts of colours are in all places pretty equally blended, and compound an even Whiteneſs. Of reflected Colours.

And ſince by the 15th Obſervation the rays endued with one colour are tranſmitted, where thoſe of another colour are reflected, the reaſon of the colours made by the tranſmitted light in the 9th and 20th Obſervations is from hence evident. Of Tranſmitted Colours.

If not only the order and ſpecies of theſe colours, but alſo the preciſe Thickneſs of the plate, or thin body at which they are exhibited, be deſired in parts of an inch, that may be alſo obtained by aſſiſtance of the 6th or 16th Obſervations. For according to thoſe Obſervations the thickneſs of the thinned air, which between two glaſſes exhibited the moſt luminous parts of the firſt ſix rings, were $\frac{1}{178000}, \frac{3}{178000}, \frac{5}{178000}, \frac{7}{178000}, \frac{9}{178000}, \frac{11}{178000}$ parts of an inch. Suppoſe the light reflected moſt copiouſly at theſe thickneſſes be the bright citrine Yellow, or confine of Yellow and Orange; and theſe thickneſſes will be $F\lambda$, $F\mu$, $F\xi$, $F\nu$, $F\eta$. And this being known, it is eaſy to determine what Thickneſs of air is repreſented by $G\rho$, or by any other diſtance of the ruler from AH. Thickneſs of coloured Plates.

Thickneſs of coloured Plates.

But farther, ſince by the 10th Obſervation the thickneſs of air was to the thickneſs of water, which between the ſame glaſſes exhibited the ſame colour, as 4 to 3; and by the 21ſt Obſervation the colours of thin bodies are not varied by varying the ambient medium: the Thickneſs of a bubble of water, exhibiting any colour, will be $\frac{3}{4}$ of the thickneſs of air producing the ſame colour. And ſo according to the ſame 10th and 21ſt Obſervations the Thickneſs of a plate of glaſs, whoſe refraction of the mean refrangible ray is meaſured by the proportion of the ſines 31 to 20, may be $\frac{20}{31}$ of the thickneſs of air producing the ſame colours; and the like of other mediums. I do not affirm, that this proportion of 20 to 31 holds in all the rays; for the ſines of other ſorts of rays have other proportions. But the differences of thoſe proportions are ſo little, that I do not here conſider them. On theſe grounds I have compoſed the following Table, wherein the Thickneſs of air, water, and glaſs, at which each colour is moſt intenſe and ſpecific, is expreſſed in parts of an inch divided into ten hundred thouſand equal parts.

The

The thickneſs of coloured Plates and Particles of Air, Water, and Glaſs.

		Air.	Water.	Glaſs.
Their Colours of the firſt Order,	Very Black	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{31}$
	Black	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{20}{31}$
	Beginning of Black	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{7}$
	Blue	$2\frac{2}{5}$	$1\frac{4}{5}$	$1\frac{11}{20}$
	White	$5\frac{1}{4}$	$3\frac{7}{8}$	$3\frac{2}{5}$
	Yellow	$7\frac{1}{9}$	$5\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{5}$
	Orange	8	6	$5\frac{1}{6}$
	Red	9	$6\frac{3}{4}$	$5\frac{4}{5}$
Of the ſecond Order,	Violet	$11\frac{1}{6}$	$8\frac{3}{8}$	$7\frac{1}{5}$
	Indigo	$12\frac{5}{6}$	$9\frac{5}{8}$	$8\frac{2}{11}$
	Blue	14	$10\frac{1}{2}$	9
	Green	$15\frac{5}{8}$	$11\frac{7}{8}$	$9\frac{9}{7}$
	Yellow	$16\frac{2}{7}$	$12\frac{1}{5}$	$10\frac{2}{5}$
	Orange	$17\frac{2}{6}$	13	$11\frac{1}{9}$
	Bright Red	$18\frac{1}{5}$ (p)	$13\frac{3}{4}$	$11\frac{5}{6}$
	Scarlet	$19\frac{2}{3}$	$14\frac{3}{4}$	$12\frac{2}{3}$
Of the third Order,	Purple	21	$15\frac{3}{4}$	$13\frac{11}{20}$
	Indigo	$22\frac{1}{10}$	$16\frac{4}{7}$	$14\frac{1}{4}$
	Blue	$23\frac{2}{5}$	$17\frac{11}{20}$	$15\frac{1}{10}$
	Green	$25\frac{1}{5}$	$18\frac{9}{10}$	$16\frac{1}{4}$
	Yellow	$27\frac{1}{7}$	$20\frac{1}{3}$	$17\frac{1}{2}$
	Red	29	$21\frac{3}{4}$	$18\frac{5}{7}$
	Blueiſh Red	32	24	$20\frac{2}{3}$
Of the fourth Order,	Blueiſh Green	24	$25\frac{1}{2}$	22
	Green	$35\frac{2}{7}$	$26\frac{1}{6}$	$22\frac{3}{4}$
	Yellowiſh Green	36	27	$23\frac{2}{3}$
	Red	$40\frac{1}{3}$	$30\frac{1}{4}$	26
Of the fifth Order,	Greeniſh Blue	46	$34\frac{1}{2}$	$29\frac{2}{3}$
	Red	$52\frac{1}{2}$	$39\frac{3}{8}$	34
Of the ſixth Order,	Greeniſh Blue	$58\frac{3}{4}$	44	38
	Red	65	$48\frac{3}{4}$	42
Of the ſeventh Order,	Greeniſh Blue	71	$53\frac{1}{4}$	$45\frac{4}{5}$
	Ruddy White	77	$57\frac{3}{4}$	$49\frac{2}{3}$

Now if this Table be compared with the 6th Scheme, you will there ſee the conſtitution of each colour, as to its ingredients, or the original colours of which it is compounded; and thence be enabled to judge of its intenſeneſs or imperfection; which may ſuffice in explication of the 4th and 18th Obſervations, unleſs it be farther deſired to delineate the manner how the colours ap-

(p) *Bright red* 18⅕.] So the third edition. All the reſt 18½.

pear, when the two object-glaſſes are laid upon one another. To do which, let there be deſcribed a large arc of a circle, and a ſtreight line which may touch that arc, and parallel to that tangent ſeveral occult lines, at ſuch diſtances from it, as the numbers ſet againſt the ſeveral colours in the Table denote. For the arc, and its tangent, will repreſent the ſuperficies of the glaſſes terminating the interjacent air; and the places where the occult lines cut the arc will ſhow at what diſtances from the center, or point of contact, each colour is reflected.

There are alſo other uſes of this Table: for by its aſſiſtance the thickneſs of the bubble, in the 19th Obſervation, was determined by the colours which it exhibited. And ſo the bigneſs of the parts of Natural Bodies may be conjectured by their colours, as ſhall be hereafter ſhewn. Alſo if two or more very thin plates be laid upon one another, ſo as to compoſe one plate equalling them all in thickneſs, the reſulting colour may be hereby determined. For inſtance, Mr. *Hook* obſerved, as is mentioned in his *Micrographia*, that a faint yellow plate of Muſcovy glaſs, laid upon a blue one, conſtituted a very deep Purple. The Yellow of the Firſt order is a faint one, and the thickneſs of the plate exhibiting it, according to the Table, is $4\frac{3}{5}$; to which add 9, the thickneſs exhibiting Blue of the Second order, and the ſum will be $13\frac{3}{5}$, which is the thickneſs exhibiting the Purple of the Third order.

Tranſmutation of the Colours

To explain, in the next place, the circumſtances of the 2d and 3d Obſervations; that is, how the rings of the colours may, by turning the priſms about their common axis the contrary way to that expreſſed in thoſe Obſervations, be converted into White and Black rings, and afterwards into rings of colours again, the colours of each ring lying now in an inverted order; it muſt be remembered, that thoſe rings of colours are dilated by the obliquation of the rays to the air which intercedes the glaſſes; and that according to the Table in the 7th Obſervation, their dilatation, or increaſe of their diameter, is moſt manifeſt and ſpeedy when they are obliqueſt. Now the rays of Yellow being more refracted by the firſt ſuperficies of the ſaid air than thoſe of Red, are thereby made more oblique to the ſecond ſuperficies, at which they

they are reflected to produce the coloured rings; and conſequently the Yellow circle in each ring will be more dilated than the Red; and the exceſs of its dilatation will be ſo much the greater, by how much the greater is the obliquity of the rays, until at laſt it become of equal extent with the Red of the ſame ring. And for the ſame reaſon the Green, Blue and Violet, will be alſo ſo much dilated by the ſtill greater obliquity of their rays, as to become all very nearly of equal extent with the Red, that is, equally diſtant from the center of the rings. And then all the colours of the ſame ring muſt be coincident, and by their mixture exhibit a White ring. And theſe White rings muſt have Black and Dark rings between them, becauſe they do not ſpread and interfere with one another as before. And for that reaſon alſo they muſt become diſtincter and viſible to far greater numbers. But yet the Violet, being obliqueſt, will be ſomething more dilated in proportion to its extent than the other colours, and ſo very apt to appear at the exterior verges of the White.

by motion of the Priſms.

Afterwards, by a greater obliquity of the rays, the Violet and Blue become more ſenſibly dilated than the Red and Yellow; and ſo being farther removed from the center of the rings, the colours muſt emerge out of the White in an order contrary to that which they had before; the Violet and Blue at the exterior limbs of each ring, and the Red and Yellow at the interior. And the Violet, by reaſon of the greateſt obliquity of its rays, being in proportion moſt of all expanded, will ſooneſt appear at the exterior limb of each White ring, and become more conſpicuous than the reſt. And the ſeveral ſeries of colours belonging to the ſeveral rings, will, by their unfolding and ſpreading, begin again to interfere, and thereby render the rings leſs diſtinct, and not viſible to ſo great numbers.

If inſtead of the priſms the object-glaſſes be made uſe of, the rings, which they exhibit, become not white and diſtinct by the Obliquity of the eye; by reaſon that the rays in their paſſage through that air, which intercedes the glaſſes, are very nearly parallel to thoſe lines in which they were firſt incident on the glaſſes; and conſequently the rays endued with ſeveral colours are not inclined

clined one more than another to that air, as it happens in the prisms.

Of the confusion of the Black and White rings, and the Colour on their edges produced by approaching the Eye.

There is yet another circumstance of these experiments to be considered, and that is why the Black and White rings, which when viewed at a distance appear distinct, should not only become confused by viewing them near at hand, but also yield a Violet colour at both the edges of every White ring. And the reason is, that the rays, which enter the eye at several parts of the pupil, have several obliquities to the glasses; and those which are most oblique, if considered apart, would represent the rings bigger than those which are the least oblique. Whence the breadth of the perimeter of every White ring is expanded outwards by the obliquest rays, and inwards by the least oblique. And this expansion is so much the greater by how much the greater is the difference of the obliquity; that is, by how much the pupil is wider, or the eye nearer to the glasses. And the breadth of the Violet must be most expanded, because the rays apt to excite a sensation of that colour are most oblique to a second or farther superficies of the thinned air, at which they are reflected, and have also the greatest variation of obliquity; which makes that colour soonest emerge out of the edges of the White. And as the breadth of every ring is thus augmented, the dark intervals must be diminished, until the neighbouring rings become contiguous, and are blended; the exterior first, and then those nearer the center; so that they can no longer be distinguished apart, but seem to constitute an even and uniform Whiteness.

The effects of the Prism in the 24th Obs. explained.

Among all the observations there is none accompanied with so odd circumstances as the twenty-fourth. Of those the principal are, that in thin plates, which to the naked eye seem of an even and uniform transparent Whiteness, without any terminations of shadows, the refraction of a prism should make rings of colours appear, whereas it usually makes objects appear coloured only there, where they are terminated with shadows, or have parts unequally luminous; and that it should make those rings exceedingly distinct and White, although it usually renders objects confused and coloured. The cause of these things you will understand by considering, that all the rings of colours are really in the

the plate, when viewed with the naked eye; although, by reason of the great breadth of their circumferences, they so much interfere and are blended together, that they seem to constitute an uniform Whiteness. But when the rays pass through the prism to the eye, the orbits of the several colours in every ring are refracted, some more than others, according to their degrees of refrangibility: by which means the colours on one side of the ring, that is in the circumference on one side of its center, become more unfolded and dilated, and those on the other side more complicated and contracted. And where by a due refraction they are so much contracted, that the several rings become narrower than to interfere with one another, they must appear distinct, and also white, if the constituent colours be so much contracted as to be wholly coincident. But, on the other side, where the orbit of every ring is made broader by the farther unfolding of its colours, it must interfere more with other rings than before, and so become less distinct.

To explain this a little farther, suppose the concentric circles AV and BX [in *fig.* 7.] represent the Red and Violet of any order, which, together with the intermediate colours, constitute any one of these rings. Now these being viewed through a prism, the Violet circle BX will, by a greater refraction, be farther translated from its place than the Red AV, and so approach nearer to it on that side of the circles, towards which the refractions are made. For instance, if the Red be translated to *av*, the Violet may be translated to *bx*, so as to approach nearer to it at *x* than before; and if the Red be farther translated to av, the Violet may be so much farther translated, to bx, as to convene with it at x; and if the Red be yet farther translated to $a\Upsilon$, the Violet may be still so much farther translated, to $\beta\xi$, as to pass beyond it at ξ, and convene with it at *e* and *f*. And this being understood not only of the Red and Violet, but of all the other intermediate colours, and also of every revolution of those colours, you will easily perceive how those of the same revolution or order, by their nearness at *xv* and $\Upsilon\xi$, and their coincidence at xv, *e* and *f*, ought to constitute pretty distinct arcs of circles, especially at xv, or at *e* and *f*: and that they will appear severally at *xv*, and at xv exhibit

Effects of the Prism in Obf. 24. explained.

hibit Whiteneſs by their coincidence; and again appear ſeverally at $\Upsilon\xi$, but yet in a contrary order to that which they had before, and ſtill retain beyond *e* and *f*. But, on the other ſide, at *ab*, ab, or $\alpha\beta$, theſe colours muſt become much more confuſed, by being dilated and ſpread, ſo as to interfere with thoſe of other orders. And the ſame confuſion will happen at $\Upsilon\xi$, between *e* and *f*, if the refraction be very great, or the priſm very diſtant from the object-glaſſes: in which caſe no parts of the rings will be ſeen, ſave only two little arcs at *e* and *f*, whoſe diſtance from one another will be augmented by removing the priſm ſtill farther from the object-glaſſes: and theſe little arcs muſt be diſtincteſt and whiteſt at their middle; and at their ends, where they begin to grow confuſed they muſt be coloured. And the colours at one end of every arc muſt be in a contrary order to thoſe at the other end, by reaſon that they croſs in the intermediate White; namely, their ends, which verge towards $\Upsilon\xi$, will be Red and Yellow on that ſide next the center, and Blue and Violet on the other ſide. But their other ends, which verge from $\Upsilon\xi$, will on the contrary be Blue and Violet on that ſide towards the center, and on the other ſide Red and Yellow.

Now as all theſe things follow from the properties of light by a mathematical way of reaſoning, ſo the truth of them may be manifeſted by Experiments. For in a dark room, by viewing theſe rings through a priſm, by reflexion of the ſeveral Priſmatick Colours, which an aſſiſtant cauſes to move to and fro upon a wall or paper, from whence they are reflected, whilſt the ſpectator's eye, the priſm and the object-glaſſes (as in the 13th Obſervation) are placed ſteady: the poſition of the circles, made ſucceſſively by the ſeveral colours, will be found ſuch, in reſpect of one another, as I have deſcribed in the figures *abxv*, or abxv, or $\alpha\beta\xi\Upsilon$. And by the ſame method the truth of the explications of other Obſervations may be examined.

Cauſe of the Colours ſeen in ſmall Fragments

By what hath been ſaid, the like phænomena of water, and thin plates of glaſs may be underſtood. But in ſmall fragments of thoſe plates, there is this farther obſervable; that where they lie flat upon a table, and are turned about their centers whilſt they are viewed through a priſm, they will in ſome poſtures exhibit

exhibit waves of various colours, and ſome of them exhibit theſe waves in one or two poſitions only, but the moſt of them do in all poſitions exhibit them, and make them for the moſt part appear almoſt all over the plates. The reaſon is, that the ſuperficies of ſuch plates are not even, but have many cavities and ſwellings, which how ſhallow ſoever do a little vary the thickneſs of the plate. For at the ſeveral ſides of thoſe cavities, for the reaſons newly deſcribed, there ought to be produced waves in ſeveral poſtures of the priſm. Now though it be but ſome very ſmall and narrower parts of the glaſs, by which theſe waves for the moſt part are cauſed, yet they may ſeem to extend themſelves over the whole glaſs: becauſe from the narroweſt of thoſe parts, there are colours of ſeveral orders, that is of ſeveral rings, confuſedly reflected; which, by refraction of the priſm, are unfolded, ſeparated, and according to their degrees of refraction, diſperſed to ſeveral places, ſo as to conſtitute ſo many ſeveral waves, as there were divers orders of colours promiſcuouſly reflected from that part of the glaſs.

Of Glaſſes viewed through a Priſm.

Theſe are the principal phænomena of thin plates or bubbles, whoſe explications depend on the properties of light, which I have heretofore delivered. And theſe you ſee do neceſſarily follow from them, and agree with them, even to their very leaſt circumſtances; and not only ſo, but do very much tend to their proof. Thus by the 24th Obſervation it appears, that the rays of ſeveral colours, made as well by thin plates or bubbles, as by refractions of a priſm, have ſeveral degrees of refrangibility; whereby thoſe of each order, which at the reflexion from the plate or bubble are intermixed with thoſe of other orders, are ſeparated from them by refraction, and aſſociated together ſo as to become viſible by themſelves like arcs of circles. For if the rays were all alike refrangible, it is impoſſible that the Whiteneſs, which to the naked ſenſe appears uniform, ſhould, by refraction, have its parts tranſpoſed and ranged into thoſe Black and White arcs.

The Coloriſic diſpoſition of the rays inate and immutable.

It appears alſo that the unequal refractions of difform rays proceed not from any contingent irregularities; ſuch as are veins, an uneven poliſh, or fortuitous poſition of the pores of glaſs;

unequal

The Colours unequal and caſual motions in the air or æther; the ſpreading, Diſpoſition of breaking, or dividing the ſame ray into many diverging parts, or the like. For, admitting any ſuch irregularities, it would be impoſſible for refractions to render thoſe rings ſo very diſtinct, and well defined, as they do in the 24th Obſervation. It is neceſſary therefore that every ray have its proper and conſtant degree of refrangibility connate with it, according to which its refraction is ever juſtly and regularly performed, and that ſeveral rays have ſeveral of thoſe degrees.

And what is ſaid of their refrangibility may be alſo underſtood of their reflexibility, that is of their diſpoſitions to be reflected ſome at a greater, and others at a leſs thickneſs, of thin plates or bubbles; namely, that thoſe diſpoſitions are alſo connate with the rays, and immutable; as may appear by the 13th, 14th and 15th Obſervations compared with the 4th and 18th.

By the precedent Obſervations it appears alſo, that Whiteneſs is a diſſimilar mixture of all colours, and that light is a mixture of rays endued with all thoſe colours. For conſidering the multitude of the rings of colours, in the 3d, 12th and 24th Obſervations, it is manifeſt, that although in the 4th and 18th Obſervations there appear no more than eight or nine of thoſe rings, yet there are really a far greater number, which ſo much interfere and mingle with one another, as after thoſe eight or nine revolutions to dilute one another wholly, and conſtitute an even and ſenſibly uniform Whiteneſs. And conſequently that Whiteneſs muſt be allowed a mixture of all colours, and the light, which conveys it to the eye, muſt be a mixture of rays endued with all thoſe colours.

But farther, by the 24th Obſervation, it appears that there is a conſtant relation between colours and refrangibility; the moſt refrangible rays being Violet, the leaſt refrangible Red, and thoſe of intermediate colours having proportionably intermediate degrees of refrangibility. And by the 13th, 14th and 15th Obſervations, compared with the 4th or 18th, there appears to be the ſame conſtant relation between colour and reflexibility, the Violet being in like circumſtances reflected at leaſt thickneſſes of any thin plate or bubble, the Red at greateſt thickneſſes, and the intermediate

termediate colours at intermediate thickneſſes. Whence it follows, that the colorifick diſpoſitions of rays are alſo connate with them and immutable; and by conſequence that all the productions and appearances of colours in the world are derived not from any Phyſical change cauſed in light by refraction or reflexion, but only from the various mixtures or ſeparations of rays, by virtue of their different refrangibility or reflexibility. And in this reſpect the ſcience of colours becomes a ſpeculation as truly mathematical, as any other part of Opticks. I mean ſo far as they depend on the nature of light, and are not produced or altered by the power of imagination, or by ſtriking or preſſing the eye. the Rays of Light innate and immutable.

THE SECOND BOOK OF OPTICKS.

PART III.

Of the Permanent Colours of Natural Bodies, and the analogy between them and the colours of thin tranſparent plates.

I AM now come to another part of this deſign; which is to conſider how the phænomena of thin tranſparent plates ſtand related to thoſe of all other Natural Bodies. Of theſe bodies I have already told you, that they appear of divers colours, accordingly as they are diſpoſed to reflect moſt copiouſly the rays originally endued with thoſe colours. But their conſtitutions, whereby they reflect ſome rays more copiouſly than others, remain to be diſcovered, and theſe I ſhall endeavour to manifeſt in the following Propoſitions.

PROP. I.

Thoſe ſuperficies of tranſparent bodies Reflect the greateſt quantity of light, which have the greateſt Refracting Power; that is, which intercede mediums that differ moſt in their Refractive Denſities. And in the confines of equally refracting mediums there is no reflexion.

Analogy between reflexion and refraction.

The analogy between reflexion and refraction will appear by conſidering, that when light paſſeth obliquely out of one medium

Reflexion and Refraction.

um into another, which refracts from the perpendicular, the greater is the difference of their Refractive Denſity, the leſs obliquity of incidence is requiſite to cauſe a total reflexion. For as the ſines are which meaſure the refraction, ſo is the ſine of incidence at which the total reflexion begins, to the radius of the circle; and conſequently that angle of incidence is leaſt, where there is the greateſt difference of the ſines. Thus in the paſſing of light out of water into air, where the refraction is meaſured by the ratio of the ſines 3 to 4, the total reflexion begins when the angle of incidence is about 48 degrees 35 minutes. In paſſing out of glaſs into air, where the refraction is meaſured by the ratio of the ſines 20 to 31, the total reflexion begins when the angle of incidence is 40 degrees 10 minutes; and ſo in paſſing out of cryſtal, or more ſtrongly refracting mediums into air, there is ſtill a leſs obliquity requiſite to cauſe a total reflexion. Superficies therefore which Refract moſt do ſooneſt Reflect all the light which is incident on them, and ſo muſt be allowed moſt ſtrongly reflexive.

But the truth of this Propoſition will farther appear by obſerving, that in the ſuperficies interceding two tranſparent mediums (ſuch as are air, water, oil, common glaſs, cryſtal, metalline glaſſes, iſland glaſſes, white tranſparent arſenick, diamonds, &c.) the reflexion is ſtronger or weaker accordingly, as the ſuperficies hath a greater or leſs Refracting power. For in the confine of air and ſal-gem it is ſtronger than in the confine of air and water; and ſtill ſtronger in the confine of air and common glaſs or cryſtal; and ſtronger in the confine of air and a diamond. If any of theſe, and ſuch like tranſparent ſolids, be immerged in water, its reflexion becomes much weaker than before; and ſtill weaker, if they be immerged in the more ſtrongly Refracting liquors of well rectified oil of vitriol or ſpirit of turpentine. If water be diſtinguiſhed into two parts, by any imaginary ſurface, the reflexion in the confine of thoſe two parts, is none at all. In the confine of water and ice it is very little; in that of water and oil it is ſomething greater; in that of water and ſal-gem ſtill greater; and in that of water and glaſs, or cryſtal, or other denſer ſubſtances ſtill greater, accordingly as thoſe mediums differ more or leſs in their Refracting powers. Hence in the confine of com-

mon glaſs and cryſtal, there ought to be a weak reflexion; and a ſtronger reflexion in the confine of common and metalline glaſs, though I have not yet tried this. But, in the confine of two glaſſes of equal denſity, there is not any ſenſible reflexion, as was ſhewn in the firſt Obſervation. And the ſame may be underſtood of the ſuperficies interceding two cryſtals, or two liquors, or any other ſubſtances in which no refraction is cauſed. So then the reaſon why uniform pellucid mediums, ſuch as water, glaſs or cryſtal, have no ſenſible reflexion but in their external ſuperficies, where they are adjacent to other mediums of a different denſity, is becauſe all their contiguous parts have one and the ſame degree of denſity.

PROP. II.

The leaſt parts of almoſt all Natural Bodies are in ſome meaſure tranſparent: and the Opacity of thoſe bodies ariſeth from the multitude of reflexions cauſed in their internal parts.

Cauſe of Opacity

That this is ſo has been obſerved by others, and will eaſily be granted by them that have been converſant with microſcopes. And it may be alſo tried by applying any ſubſtance to a hole, through which ſome light is immitted into a dark room. For how Opake ſoever that ſubſtance may ſeem in the open air, it will by that means appear very manifeſtly tranſparent, if it be of a ſufficient thinneſs. Only White Metalline bodies muſt be excepted, which, by reaſon of their exceſſive denſity, ſeem to reflect almoſt all the light incident on their firſt ſuperficies, unleſs by ſolution in menſtruums they be reduced into very ſmall particles, and then they become tranſparent.

PROP.

PROP. III.

Between the parts of Opake and Coloured bodies are many ſpaces, either empty, or repleniſhed with mediums of other denſities; as water between the tinging corpuſcles wherewith any liquor is impregnated; air between the aqueous globules that conſtitute clouds or miſts; and for the moſt part ſpaces void of both air and water, but yet perhaps not wholly void of all ſubſtance, between the parts of Hard Bodies.

The truth of this is evinced by the two precedent Propoſitions: for by the ſecond Propoſition, there are many reflexions made by the internal parts of bodies, which, by the firſt Propoſition, would not happen if the parts of thoſe bodies were continued without any ſuch interſtices between them, becauſe reflexions are cauſed only in ſuperficies, which intercede mediums of a differing denſity by Prop. I. Porouſneſs a principal cauſe of Opacity.

But farther, that this diſcontinuity of parts is the principal cauſe of the Opacity of bodies, will appear by conſidering, that Opake ſubſtances become Tranſparent, by filling their pores with any ſubſtance of equal, or almoſt equal, denſity with their parts. Thus paper dipped in water or oil, the *Oculus Mundi* ſtone ſteeped in water, linen cloth oiled or varniſhed, and many other ſubſtances ſoaked in ſuch liquors as will intimately pervade their little pores, become by that means more tranſparent than otherwiſe; ſo, on the contrary, the moſt Tranſparent ſubſtances may, by evacuating their pores, or ſeparating their parts, be rendered ſufficiently Opake; as ſalts or wet paper, or the *Oculus Mundi* ſtone, by being dried; horn, by being ſcraped; glaſs, by being reduced to powder, or otherwiſe flawed; turpentine, by being ſtirred about with water till they mix imperfectly; and water, by being formed into many ſmall bubbles, either alone in the form of froth, or by ſhaking it together with oil of turpentine, or oil olive, or with ſome other convenient liquor, with which it will not perfectly incorporate. And to the increaſe of the Opacity of theſe bodies it conduces ſomething, that, by the 23d Obſervation, the reflexions

of

of very thin tranſparent ſubſtances are conſiderably ſtronger than thoſe made by the ſame ſubſtances of a greater thickneſs.

PROP. IV.

The Parts of bodies and their interſtices muſt not be leſs than of ſome definite bigneſs, to render them Opake and Coloured.

A definite ſize of Particle and Pore requiſite to Opacity and Colour.

For the Opakeſt bodies, if their parts be ſubtilly divided (as metals by being diſſolved in acid menſtruums, &c.) become perfectly Tranſparent. And you may alſo remember, that in the eighth Obſervation there was no ſenſible reflexion at the ſuperficies of the object-glaſſes, where they were very near one another, though they did not abſolutely touch. And in the 17th Obſervation the reflexion of the water-bubble where it became thinneſt was almoſt inſenſible, ſo as to cauſe very Black ſpots to appear on the top of the bubble by the want of reflected light.

On theſe grounds I perceive it is, that water, ſalt, glaſs, ſtones, and ſuch like ſubſtances, are tranſparent. For, upon divers conſiderations, they ſeem to be as full of pores, or interſtices between their parts, as other bodies are; but yet their parts and interſtices to be too ſmall to cauſe reflexions in their common ſurfaces.

PROP. V.

The Tranſparent Parts of bodies according to their ſeveral ſizes reflect rays of one colour, and tranſmit thoſe of another, on the ſame grounds that thin plates or bubbles do reflect or tranſmit thoſe rays. And this I take to be the ground of all their colours.

The tranſparent Parts of bodies reflect or tranſmit

For if a thinned or plated body, which being of an even thickneſs, appears all over of one uniform colour, ſhould be ſlit into threads, or broken into fragments, of the ſame thickneſs with the plate; I ſee no reaſon why every thread or fragment ſhould not keep its colour, and by conſequence why a heap of thoſe threads or fragments ſhould not conſtitute a maſs or powder of the ſame colour, which the plate exhibited before it was broken. And the parts of all Natural Bodies being like ſo many fragments

fragments of a plate, muſt on the ſame grounds exhibit the ſame colours.

The ſeveral Colorific rays according to their ſizes.

Now that they do ſo, will appear by the affinity of their properties. The finely coloured feathers of ſome birds, and particularly thoſe of peacocks tails, do in the very ſame part of the feather appear of ſeveral colours in ſeveral poſitions of the eye, after the very ſame manner that thin plates were found to do in the 7th and 19th Obſervations, and therefore their colours ariſe from the thinneſs of the tranſparent parts of the feathers; that is, from the ſlenderneſs of the very fine hairs, or *Capillamenta*, which grow out of the ſides of the groſſer lateral branches or fibres of thoſe feathers. And to the ſame purpoſe it is, that the webs of ſome ſpiders, by being ſpun very fine, have appeared coloured, as ſome have obſerved, and that the coloured fibres of ſome ſilks, by varying the poſition of the eye, do vary their colour. Alſo the colours of ſilks, cloths, and other ſubſtances, which water or oil can intimately penetrate, become more faint and obſcure by being immerged in thoſe liquors, and recover their vigour again by being dried; much after the manner declared of thin bodies in the 10th and 21ſt Obſervations. Leaf-gold, ſome ſorts of painted glaſs, the infuſion of *Lignum Nephriticum*, and ſome other ſubſtances reflect one colour, and tranſmit another, like thin bodies in the 9th and 20th Obſervations. And ſome of thoſe coloured powders which painters uſe, may have their colours a little changed, by being very elaborately and finely ground. Where I ſee not what can be juſtly pretended for thoſe changes, beſides the breaking of their parts into leſs parts, by that contrition, after the ſame manner that the colour of a thin plate is changed, by varying its thickneſs. For which reaſon alſo it is that the coloured flowers of plants and vegetables by being bruiſed uſually become more tranſparent than before; or at leaſt in ſome degree or other change their colours. Nor is it much leſs to my purpoſe, that by mixing divers liquors very odd and remarkable productions and changes of colours may be effected; of which no cauſe can be more obvious and rational, than that the ſaline corpuſcles of one liquor do variouſly act upon, or unite with, the tinging corpuſcles of another, ſo as to make them ſwell or ſhrink; whereby

whereby not only their bulk but their denſity alſo may be changed; or to divide them into ſmaller corpuſcles, whereby a coloured liquor may become tranſparent; or to make many of them aſſociate into one cluſter, whereby two tranſparent liquors may compoſe a coloured one. For we ſee how apt thoſe ſaline menſtruums are to penetrate and diſſolve ſubſtances to which they are applied, and ſome of them to precipitate what others diſſolve. In like manner, if we conſider the various phænomena of the atmoſphere, we may obſerve, that when varpours are firſt raiſed, they hinder not the tranſparency of the air, being divided into parts too ſmall to cauſe any reflexion in their ſuperficies. But when in order to compoſe drops of rain they begin to coaleſce and conſtitute globules of all intermediate ſizes, thoſe globules, when they become of a convenient ſize to reflect ſome colours and tranſmit others, may conſtitute clouds of various colours according to their ſizes. And I ſee not what can be rationally conceived in ſo tranſparent a ſubſtance as water for the production of theſe colours, beſides the various ſizes of its fluid and globular parcels.

PROP. VI.

The Parts of bodies on which their colours depend, are denſer than the medium, which pervades their interſtices.

Colorific parts of Bodies denſer than the Medium which pervades their Pores.

This will appear by conſidering, that the colour of a body depends not only on the rays which are incident perpendicularly on its parts, but on thoſe alſo which are incident at all other angles. And that according to the 7th Obſervation, a very little variation of Obliquity will change the reflected colour, where the thin body, or ſmall particle is rarer than the ambient medium; inſomuch that ſuch a ſmall particle is, at diverſly oblique incidences, reflect of all ſorts of colours, in ſo great a variety that the colour reſulting from them all, confuſedly reflected from a heap of ſuch particles, muſt rather be a White or Grey than any other colour, or at beſt it muſt be but a very inperfect and dirty colour. Whereas if the thin body, or ſmall particle, be much denſer than the ambient medium, the colours according to the 19th Obſervation are ſo little changed by the variation of Obliquity, that the

rays, which are reflected leaſt obliquely, may predominate over the reſt, ſo much as to cauſe a heap of ſuch particles to appear very intenſely of their colour.

It conduces ſomething alſo to the confirmation of this Propoſition, that, according to the 22d Obſervation, the colours exhibited by the denſer thin body, within the rarer, are more briſk than thoſe exhibited by the rarer within the denſer.

PROP. VII.

The Bigneſs of the component Parts of Natural bodies may be conjectured by their colours.

The Colours of Bodies indicate the ſizes of their component particles.

For ſince the Parts of theſe bodies by Prop. v. do moſt probably exhibit the ſame colours with a plate of equal thickneſs, provided they have the ſame Refractive Denſity; and ſince their Parts ſeem for the moſt part to have much the ſame denſity with water or glaſs, as by many circumſtances is obvious to collect; to determine the ſizes of thoſe Parts, you need only have recourſe to the precedent Tables, in which the thickneſs of water or glaſs exhibiting any colour is expreſſed. Thus if it be deſired to know the diameter of a corpuſcle, which being of equal denſity with glaſs, ſhall reflect Green of the Third order; the number $16\frac{1}{4}$ ſhews it to be $\frac{16\frac{1}{4}}{1000000}$ parts of an inch.

The greateſt difficulty is here to know of what Order the colour of any body is. And for this end we muſt have recourſe to the 4th and 18th Obſervations, from whence may be collected theſe particulars.

Scarlets, and other *Reds*, *Oranges* and *Yellows*, if they be pure and intenſe, are moſt probably of the Second order. Thoſe of the Firſt and Third order alſo may be pretty good, only the Yellow of the firſt order is faint, and the Orange and Red of the Third order have a great mixture of Violet and Blue.

There may be good *Greens* of the Fourth order, but the pureſt are of the Third. And of this order the Green of all vegetables ſeem to be, partly by reaſon of the intenſeneſs of their colours, and partly becauſe when they wither, ſome of them turn to a greeniſh Yellow, and others to a more perfect Yellow or Orange,

The Colours of Bodies indicate

or perhaps to Red, paſſing firſt through all the aforeſaid intermediate colours. Which changes ſeem to be effected by the exhaling of the moiſture; which may leave the tinging corpuſcles more denſe, and ſomething augmented by the accretion of the oily and earthy part of that moiſture. Now the Green without doubt is of the ſame order, with thoſe colours into which it changeth; becauſe the changes are gradual, and thoſe colours, though uſually not very full, yet are often too full and lively to be of the Fourth order.

Blues and *Purples* may be either of the Second or Third order, but the beſt are of the Third. Thus the colour of Violets ſeems to be of that order, becauſe their ſyrup by Acid liquors turns Red, and by Urinous and Alcalizate turns Green. For ſince it is of the nature of Acids to diſſolve or attenuate, and of alcalies to precipitate or incraſſate; if the Purple colour of the ſyrup was of the Second order, an Acid liquor, by attenuating its tinging corpuſcles, would change it to a Red of the Firſt order, and an alcali by incraſſating them would change it to a Green of the ſecond order; which Red and Green, eſpecially the Green, ſeem too imperfect to be the colours produced by theſe changes. But if the ſaid Purple be ſuppoſed of the Third order, its change to Red of the Second, and Green of the Third, may without any inconvenience be allowed.

If there be found any body of a deeper and leſs reddiſh Purple than that of the Violets, its colour moſt probably is if the Second order. But yet there being no body, commonly known, whoſe colour is conſtantly more deep than theirs; I have made uſe of their name to denote the deepeſt and leaſt reddiſh Purples, ſuch as manifeſtly tranſcend their colour in purity.

The *Blue* of the Firſt order, though very faint and little, may poſſibly be the colour of ſome ſubſtances; and particularly the Azure colour of the ſkies ſeems to be of this order. For all vapours, when they begin to condenſe and coaleſce into ſmall parcels, become firſt of that bigneſs, whereby ſuch an Azure muſt be reflected, before they can conſtitute clouds of other colours. And ſo this being the firſt colour which vapours begin to reflect, it ought to be the colour of the fineſt and moſt tranſparent ſkies, in

in which vapours are not arrived to that groſſneſs requiſite to reflect other colours, as we find it is by experience.

the ſizes of their component particles.

Whiteneſs, if moſt intenſe and luminous, is that of the Firſt order, if leſs ſtrong and luminous a mixture of the colours of ſeveral orders. Of this laſt kind is the whiteneſs of froth, paper, linen, and moſt white ſubſtances; of the former I reckon that of white metals to be. For whilſt the denſeſt of metals, gold, if foliated, is tranſparent, and all metals become tranſparent, if diſſolved in menſtruums or vitrified; the opacity of white metals ariſeth not from their denſity alone. They being leſs denſe than gold would be more tranſparent than it, did not ſome other cauſe concur with their denſity to make them Opake. And this cauſe I take to be ſuch a bigneſs of their particles, as fits them to reflect the White of the Firſt order. For if they be of other thickneſſes, they may reflect other colours; as is manifeſt by the colours which appear upon hot ſteel in tempering it, and ſometimes upon the ſurface of melted metals, in the ſkin or ſcoria which ariſes upon them in their cooling. And as the White of the Firſt order is the ſtrongeſt which can be made by plates of tranſparent ſubſtances, ſo it ought to be ſtronger in the denſer ſubſtances of metals, than in the rarer of air, water, and glaſs. Nor do I ſee but that Metallic ſubſtances, of ſuch a thickneſs as may fit them to reflect the White of the Firſt order, may, by reaſon of their great denſity, according to the tenour of the firſt of theſe Propoſitions, reflect all the light incident upon them, and ſo be as opake and ſplendent as it is poſſible for any body to be. Gold, or Copper mixed with leſs than half their weight of ſilver, or tin, or regulus of antimony, in fuſion, or amalgamed with a very little mercury, become white; which ſhews both that the particles of white metals have much more ſuperficies, and ſo are ſmaller, than thoſe of gold and copper, and alſo that they are ſo opake, as not to ſuffer the particles of gold or copper to ſhine through them. Now it is ſcarce to be doubted, but that the colours of gold and copper are of the Second and Third order; and therefore the particles of white metals cannot be much bigger, than is requiſite to make them reflect the White of the Firſt order. The volatility of Mercury argues, that they are not much

The Colours of Bodies indicate

bigger; nor may they be much leſs, leſt they loſe their Opacity; and become either tranſparent, as they do when attenuated by vitrification, or by ſolution in Menſtruums; or Black, as they do when ground ſmaller, by rubbing ſilver, or tin, or lead, upon other ſubſtances to draw Black lines. The firſt and only colour which white metals take by grinding their particles ſmaller, is Black; and therefore their White ought to be that which borders upon the Black ſpot in the center of the rings of colours, that is, the White of the Firſt order. But if you would hence gather the bigneſs of Metallic particles, you muſt allow for their denſity. For were Mercury tranſparent, its denſity is ſuch that the ſine of incidence upon it (by my computation) would be to the ſine of its refraction, as 71 to 20, or 7 to 2. And therefore the thickneſs of its particles, that they may exhibit the ſame colours with thoſe of bubbles of water, ought to be leſs than the thickneſs of the ſkin of thoſe bubbles, in the proportion of 2 to 7. Whence it is poſſible that the particles of Mercury may be as little as the particles of ſome tranſparent and volatile fluids, and yet reflect the White of the Firſt order.

Laſtly, for the production of *Black*, the corpuſcles muſt be leſs than any of thoſe which exhibit colours. For at all greater ſizes there is too much light reflected to conſtitute this colour. But if they be ſuppoſed a little leſs than is requiſite to reflect the White and very faint Blue of the Firſt order, they will, according to the 4th, 8th, 17th and 18th Obſervations, reflect ſo very little light as to appear intenſely Black; and yet may perhaps variouſly refract it to and fro within themſelves ſo long, until it happen to be ſtifled and loſt; by which means they will appear Black, in all poſitions of the eye, without any tranſparency. And from hence may be underſtood why fire, and the more ſubtle diſſolver putrefaction, by dividing the particles of ſubſtances, turn them to Black; why ſmall quantities of Black ſubſtances impart their colour very freely and intenſely to other ſubſtances, to which they are applied; the minute particles of theſe, by reaſon of their very great number, eaſily overſpreading the groſs particles of others; why glaſs ground very elaborately with ſand on a copper plate, till it be well poliſhed, makes the ſand, together

ther with what is worn off from the glaſs and copper, become very Black: why Black ſubſtances do ſooneſt of all others become hot in the ſun's light and burn (which effect may proceed partly from the multitude of refractions in a little room, and partly from the eaſy commotion of ſo very ſmall corpuſcles); and why Blacks are uſually a little inclined to a blueiſh colour: for that they are ſo may be ſeen, by illuminating white paper by light reflected from Black ſubſtances. For the paper will uſually appear of a blueiſh White; and the reaſon is, that Black borders on the obſcure Blue of the Firſt order deſcribed in the 18th Obſervation, and therefore reflects more rays of that colour, than of any other.

the ſizes of their component particles.

In theſe deſcriptions I have been the more particular, becauſe it is not impoſſible but that Microſcopes may at length be improved to the diſcovery of the particles of bodies on which their colours depend, if they are not already in ſome meaſure arrived to that degree of perfection. For if thoſe inſtruments are or can be ſo far improved, as with ſufficient diſtinctneſs to repreſent objects five or ſix hundred times bigger, than at a foot diſtance they appear to our naked eyes; I ſhould hope that we might be able to diſcover ſome of the greateſt of thoſe corpuſcles. And by one that would magnify three or four thouſand times, perhaps they might all be diſcovered, but thoſe which produce Blackneſs. In the mean while I ſee nothing material in this diſcourſe that may rationally be doubted of, excepting this poſition: That tranſparent corpuſcles of the ſame thickneſs and denſity with a plate, do exhibit the ſame colour. And this I would have underſtood not without ſome latitude; as well becauſe thoſe corpuſcles may be of irregular figures, and many rays muſt be obliquely incident on them, and ſo have a ſhorter way through them than the length of their diameters; as becauſe the ſtraitneſs of the medium, pent in on all ſides within ſuch corpuſcles, may a little alter its motions, or other qualities, on which the reflexion depends. But yet I cannot much ſuſpect the laſt; becauſe I have obſerved of ſome ſmall plates of Muſcovy-glaſs, which were of an even thickneſs, that through a microſcope they have appeared of the ſame colour at their edges and corners, where the included medium

Utmoſt probable improvement of Microſcopes.

dium was terminated, which they appeared of in other places. However it will add much to our ſatisfaction, if thoſe corpuſcles can be diſcovered with microſcopes; which, if we ſhall at length attain to, I fear it will be the utmoſt improvement of this ſenſe. For it ſeems impoſſible to ſee the more ſecret and noble works of Nature within the corpuſcles, by reaſon of their tranſparency.

PROP. VIII.

The cauſe of reflexion is not the impinging of light on the ſolid or impervious Parts of bodies, as is commonly believed.

The impact of Light againſt the ſolid particles

This will appear by the following conſiderations. Firſt, That in the paſſage of light out of glaſs into air there is a reflexion as ſtrong, as in its paſſage out of air into glaſs, or rather a little ſtronger; and by many degrees ſtronger, than in its paſſage out of glaſs into water. And it ſeems not probable, that air ſhould have more ſtrongly reflecting parts than water or glaſs. But if that ſhould poſſibly be ſuppoſed, yet it will avail nothing; for the reflexion is as ſtrong or ſtronger when the air is drawn away from the glaſs, ſuppoſe in the air-pump invented by *Otto Gueric* and improved and made uſeful by Mr. *Boyle*, as when it is adjacent to it. Secondly, If light in its paſſage out of glaſs into air be incident more obliquely, than at an angle of 40 or 41 degrees, it is wholly reflected; if leſs obliquely, it is in great meaſure tranſmitted. Now it is not to be imagined, that light, at one degree of obliquity, ſhould meet with pores enough in the air to tranſmit the greater part of it; and at another degree of Obliquity, ſhould meet with nothing but parts to reflect it wholly; eſpecially conſidering that in its paſſage out of air into glaſs, how oblique ſoever be its incidence, it finds pores enough in the glaſs to tranſmit a great part of it. If any man ſuppoſe that it is not reflected by the air, but by the outmoſt ſuperficial parts of the glaſs, there is ſtill the ſame difficulty: beſides, that ſuch a ſuppoſition is unintelligible, and will alſo appear to be falſe by applying water behind ſome part of the glaſs inſtead of air. For ſo in a convenient obliquity of the rays, ſuppoſe of 45 or 46 degrees, at which they are all reflected where the air is adjacent to

to the glaſs; they ſhall be in great meaſure tranſmitted, where the water is adjacent to it: which argues, that their reflexion or tranſmiſſion depends on the conſtitution of the air and water behind the glaſs, and not on the ſtriking of the rays upon the parts of the glaſs. Thirdly, If the colours made by a priſm, placed at the entrance of a beam of light into a darkened room, be ſucceſſively caſt on a ſecond priſm placed at a greater diſtance from the former, in ſuch manner that they are all alike incident upon it; the ſecond priſm may be ſo inclined to the incident rays, that thoſe which are of a Blue colour ſhall be all reflected by it, and yet thoſe of a Red colour pretty copiouſly tranſmitted. Now if the reflexion be cauſed by the parts of air or glaſs, I would aſk, why, at the ſame obliquity of incidence, the Blue ſhould wholly impinge on thoſe parts ſo as to be all reflected, and yet the Red find pores enough to be in a great meaſure tranſmitted. Fourthly, Where two glaſſes touch one another, there is no ſenſible reflexion, as was declared in the firſt Obſervation; and yet I ſee no reaſon, why the rays ſhould not impinge on the parts of glaſs as much when contiguous to other glaſs, as when contiguous to air. Fifthly, When the top of a water-bubble, in the 17th Obſervation, by the continual ſubſiding and exhaling of the water grew very thin, there was ſuch a little and almoſt inſenſible quantity of light reflected from it, that it appeared intenſely Black; whereas round about that Black ſpot, where the water was thicker, the reflexion was ſo ſtrong as to make the water ſeem very White. Nor is it only at the leaſt thickneſs of thin plates or bubbles, that there is no manifeſt reflexion, but at many other thickneſſes continually greater and greater. For in the 15th Obſervation the rays of the ſame colour were by turns tranſmitted at one thickneſs, and reflected at another thickneſs, for an indeterminate number of ſucceſſions. And yet in the ſuperficies of the thinned body, where it is of one thickneſs, there are as many parts for the rays to impinge on, as where it is of any other thickneſs. Sixthly, If reflexion were cauſed by the parts of reflecting bodies, it would be impoſſible for thin plates or bubbles at one and the ſame place to reflect the rays of one colour, and tranſmit thoſe of another; as they do, according to the 13th and 15th Obſervations.

of bodies not the cauſe of reflexion.

The impact of Light against the ſolid particles

vations. For it is not to be imagined, that at one place the rays, which for inſtance exhibit a Blue colour, ſhould have the fortune to daſh upon the Parts, and thoſe which exhibit a Red to hit upon the Pores of the body; and then at another place, where the body is either a little thicker, or a little thinner, that on the contrary the Blue ſhould hit upon its Pores, and the Red upon its Parts. Laſtly, were the rays of light reflected by impinging on the ſolid parts of bodies, their reflexions from poliſhed bodies could not be ſo regular as they are. For in poliſhing glaſs with ſand, putty or tripoly, it is not to be imagined, that thoſe ſubſtances can, by grating and fretting the glaſs, bring all its leaſt particles to an accurate poliſh; ſo that all their ſurfaces ſhall be truly plain or truly ſpherical, and look all the ſame way, ſo as together to compoſe one even ſurface. The ſmaller the particles of thoſe ſubſtances are, the ſmaller will be the ſcratches, by which they continually fret and wear away the glaſs until it be poliſhed; but, be they never ſo ſmall, they can wear away the glaſs no otherwiſe, than by grating and ſcratching it, and breaking the protuberances; and therefore poliſh it no otherwiſe, than by bringing its roughneſs to a very fine grain, ſo that the ſcratches and frettings of the ſurface become too ſmall to be viſible. And therefore if light were reflected by impinging upon the ſolid Parts of the glaſs, it would be ſcattered as much by the moſt poliſhed glaſs as by the rougheſt. So then it remains a Problem, how glaſs, poliſhed by fretting ſubſtances, can reflect light ſo regularly as it does. And this Problem is ſcarce otherwiſe to be ſolved, than by ſaying, that the reflexion of a ray is effected, not by a ſingle point of the reflecting body, but by ſome Power of the body which is evenly diffuſed all over its ſurface, and by which it acts upon the ray without immediate contact. For that the Parts of bodies do act upon light at a diſtance ſhall be ſhewn hereafter.

Now if light be reflected not by impinging on the ſolid Parts of bodies, but by ſome other principle; it is probable that as many of its rays as impinge on the ſolid Parts of bodies are not reflected, but ſtifled and loſt in the bodies. For otherwiſe we muſt allow two ſorts of reflexions. Should all the rays be reflected

flected which impinge on the internal parts of clear water or cryſtal, thoſe ſubſtances would rather have a cloudy colour than a clear tranſparency. To make bodies look Black, it is neceſſary that many rays be ſtopped, retained and loſt in them; and it ſeems not probable, that any rays can be ſtopped and ſtifled in them, which do not impinge on their Parts.

of bodies not the cauſe of Reflexion.

And hence we may underſtand that bodies are much more rare and porous, than is commonly believed. Water is nineteen times lighter, and by conſequence nineteen times rarer, than gold; and gold is ſo rare as very readily, and without the leaſt oppoſition, to tranſmit the Magnetic effluvia, and eaſily to admit quick-ſilver into its pores, and to let water paſs through it. For a concave ſphere of gold filled with water, and ſodered up, has, upon preſſing the ſphere with great force, let the water ſqueeze through it, and ſtand all over its outſide in multitudes of ſmall drops, like dew, without burſting or cracking the body of the gold; as I have been informed by an eye-witneſs. From all which we may conclude, that gold has more pores than ſolid parts, and by conſequence that water has above forty times more Pores than Parts. And he that ſhall find out an hypotheſis, by which water may be ſo rare, and yet not be capable of compreſſion by force; may doubtleſs, by the ſame hypotheſis, make gold and water, and all other bodies, as much rarer as he pleaſes, ſo that light may find a ready paſſage through tranſparent ſubſtances.

Porouſneſs of Bodies.

The magnet acts upon iron through all denſe bodies not magnetic nor red hot, without any diminution of its virtue; as for inſtance through gold, ſilver, lead, glaſs, water. The Gravitating power of the ſun is tranſmitted through the vaſt bodies of the planets without any diminution; ſo as to act upon all their parts to their very centers, with the ſame force, and according to the ſame laws, as if the part, upon which it acts, were not ſurrounded with the body of the planet. The rays of light, whether they be very ſmall bodies projected, or only motion or force propagated, are moved in right lines; and whenever a ray of light is, by any obſtacle, turned out of its rectilinear way, it will never return into the ſame rectilinear way, unleſs perhaps by very great accident. And yet light is tranſmitted through pellucid ſolid bodies

Porouſneſs of Bodies.

dies in right lines to very great diſtances. How bodies can have a ſufficient quantity of pores for producing theſe effects, is very difficult to conceive; but perhaps not altogether impoſſible. For the colours of bodies ariſe from the magnitudes of the particles which reflect them, as was explained above. Now if we conceive theſe particles of bodies to be ſo diſpoſed amongſt themſelves, that the intervals, or empty ſpaces between them, may be equal in magnitude to them all; and that theſe particles may be compoſed of other particles much ſmaller, which have as much empty ſpace between them as equals all the magnitudes of theſe ſmaller particles; and that in like manner theſe ſmaller particles are again compoſed of others much ſmaller, all which together are equal to all the pores, or empty ſpaces, between them; and ſo on perpetually till you come to ſolid particles, ſuch as have no pores, or empty ſpaces within them: and if in any groſs body there be, for inſtance, three ſuch degrees of particles, the leaſt of which are ſolid; this body will have ſeven times more pores than ſolid parts. But if there be four ſuch degrees of particles, the leaſt of which are ſolid, the body will have fifteen times more pores than ſolid parts. If there be five degrees, the body will have one and thirty times more pores than ſolid parts. If ſix degrees, the body will have ſixty and three times more pores than ſolid parts. And ſo on perpetually. And there are other ways of conceiving how bodies may be exceeding porous. But what is really their inward frame is not yet known to us.

PROP. IX.

Bodies Reflect and Refract light by one and the ſame Power variouſly exerciſed in various circumſtances.

Reflexion and Refraction

This appears by ſeveral conſiderations. Firſt, Becauſe when light goes out of glaſs into air, as obliquely as it can poſſibly do: if its incidence be made ſtill more oblique, it becomes totally Reflected. For the power of the glaſs, after it has refracted the light as obliquely as is poſſible, if the incidence be ſtill made more oblique, becomes too ſtrong to let any of its rays go through, and by conſequence cauſes total reflexions. Secondly, Becauſe

various effects of one Power.

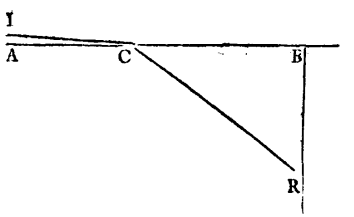
Becauſe light is alternately reflected and tranſmitted by thin plates of glaſs for many ſucceſſions, accordingly as the thickneſs of the plate increaſes in an arithmetical progreſſion. For here the thickneſs of the glaſs determines whether that power, by which glaſs acts upon light, ſhall cauſe it to be reflected, or ſuffer it to be tranſmitted. And, Thirdly, Becauſe thoſe ſurfaces of tranſparent bodies, which have the greateſt Refracting power, reflect the greateſt quantity of light, as was ſhewed in the firſt Propoſition.

PROP. X.

If light be ſwifter in bodies than in vacuo, *in the proportion of the ſines which meaſure the refraction of the bodies; the forces of the bodies to reflect and refract light, are very nearly proportional to the Denſities of the ſame bodies, excepting that Unctuous and Sulphureous bodies refract more than others of this ſame denſity.*

Refractive and Reflective force proportional to Denſity.

Let AB repreſent the refracting plane ſurface of any body, and IC a ray incident very obliquely upon the body in C, ſo that the angle ACI may be infinitely little; and let CR be the refracted ray. From a given point, B, perpendicular to the refracting ſurface erect BR, meeting with the refracted ray, CR, in R; and if CR repreſent the motion of the refracted ray, and this motion be diſtinguiſhed into two motions, CB and BR; whereof CB is parallel to the refracting plane, and BR perpendicular to it: CB ſhall repreſent the motion of the incident ray, and BR the motion generated by the refraction, as Opticians have of late explained.



Now if any body or thing, in moving through any ſpace of a given breadth terminated on both ſides by two parallel planes, be urged forward, in all parts of that ſpace, by forces tending directly forwards towards the laſt plane, and before its incidence on the firſt plane, had no motion towards it, or but an infinitely little one; and if the forces, in all parts of that ſpace, between

Refractive and Reflective force

the planes, be at equal diſtances from the planes equal to one another; but at ſeveral diſtances be bigger or leſs in any given proportion: the motion generated by the forces, in the whole paſſage of the body or thing through that ſpace, ſhall be in a ſubduplicate proportion of the forces, as Mathematicians will eaſily underſtand (q). And therefore if the ſpace of Activity of the refracting ſuperficies of the body be conſidered as ſuch a ſpace, the motion of the ray generated by the Refracting force of the body, during its paſſage through that ſpace, that is the motion BR, muſt be in a ſubduplicate proportion of that Refracting force. I ſay, therefore, that the ſquare of the line BR, and by conſequence the Refracting force of the body, is very nearly as the Denſity of the ſame body. For this will appear by the following Table, wherein the proportion of the ſines which meaſure the refractions of ſeveral bodies, the ſquare of BR, ſuppoſing CB an unit, the denſities of the bodies eſtimated by their ſpecific Gravities, and their Refractive power in reſpect of their Denſities, are ſet down in ſeveral columns.

(q) See above, Book I. Part I. Ex. 15. Not. *.

The

The refracting bodies.	The proportion of the ſines of incidence and refraction of yellow light.	The ſquare of BR, to which the refracting force of the body is proportionate.	The denſity and ſpecific gravity of the body.	The refractive power of the body in reſpect of its denſity.
A Pſeudo-Topazius, being a natural, pellucid, brittle, hairy ſtone, of a Yellow colour.	23 to 14	1'699	4'27	3979
Air.	3201 to 3200	0'000625	0'0012	5208
Glaſs of Antimony.	17 to 9	2'568	5'28	4864
A Selenitis.	61 to 41	1'213	2'252	5386
Glaſs vulgar.	31 to 20	1'4025	2'58	5436
Cryſtal of the Rock.	25 to 16	1'445	2'65	5450
Iſland Cryſtal.	5 to 3	1'778	2'72	6536
Sal Gemmæ.	17 to 11	1'388	2'143	6477
Alume.	35 to 24	1'1267	1'714	6570
Borax.	22 to 15	1'1511	1'714	6716
Niter.	32 to 21	1'345	1'9	7079
Dantzick Vitriol.	303 to 200	1'295	1'715	7551
Oil of Vitriol.	10 to 7	1'041	1'7	6124
Rain Water.	529 to 396	0'7845	1'	7845
Gum Arabick.	31 to 21	1'179	1'375	8574
Spirit of Wine well rectified.	100 to 73	0'8765	0'866	10121
Camphire.	3 to 2	1'25	0'996	12551
Oil Olive.	22 to 15	1'1511	0'913	12607
Linſeed Oil.	40 to 27	1'1948	0'932	12819
Spirit of Turpentine.	25 to 17	1'1626	0'874	13222
Ambar.	14 to 9	1'42	1'04	13654
A Diamond.	100 to 41	4'949	3'4	14556

proportional to Denſity.

The refraction of the air, in this Table, is determined by that of the atmoſphere obſerved by Aſtronomers. For if light paſs through many refracting ſubſtances or mediums, gradually denſer and denſer, and terminated with parallel ſurfaces, the ſum of all the refractions will be equal to the ſingle refraction, which it would have ſuffered in paſſing immediately out of the firſt medium into the laſt. And this holds true, though the number of the refracting ſubſtances be increaſed to infinity, and the diſtances from one another as much decreaſed; ſo that the light may be refracted in every point of its paſſage, and, by continual refractions, bent into a curve line. And therefore the whole refraction of light, in paſſing through the atmoſphere from the higheſt and rareſt part thereof down to the loweſt and denſeſt part, muſt be equal to the refraction which it would ſuffer in paſſing, at like obliquity, out of a vacuum immediately into air, of equal denſity with that in the loweſt part of the atmoſphere.

Refractive force of

Now although a Pſeudo-topaz, a Selenitis, Rock Cryſtal, Iſland Cryſtal, Vulgar Glaſs (that is, ſand melted together) and glaſs of Antimony, which are terreſtrial ſtony alcalizate Concretes, and air, which probably ariſes from ſuch ſubſtances by fermentation, be ſubſtances very differing from one another in Denſity; yet by this Table, they have their Refractive powers almoſt in the ſame proportion to one another as their Denſities are, excepting that the refraction of that ſtrange ſubſtance Iſland Cryſtal is a little bigger than the reſt. And particularly air, which is 3500 times rarer than the Pſeudo-Topaz, and 4400 times rarer than Glaſs of Antimony, and 2000 times rarer than the Selenitis, Glaſs Vulgar, or Cryſtal of the Rock, has, notwithſtanding its rarity, the ſame Refractive power in reſpect of its Denſity, which the very denſe ſubſtances have in reſpect of theirs, excepting ſo far as thoſe differ from one another.

Again, the refraction of Camphire, Oil Olive, Linſeed Oil, Spirit of Turpentine and Ambar, which are fat ſulphureous unctuous bodies, and a Diamond, which probably is an unctuous ſubſtance coagulated, have their Refractive Powers in proportion to one another as their Denſities, without any conſiderable variation. But the Refractive Powers of theſe unctuous ſubſtances are two or three times greater, in reſpect of their Denſities, than the Refractive Powers of the former ſubſtances in reſpect of theirs.

Water has a Refractive Power in a middle degree between thoſe two ſorts of ſubſtances, and probably is of a middle nature. For out of it grow all Vegetable and Animal ſubſtances, which conſiſt as well of ſulphureous fat and inflammable parts, as of earthly lean and alcalizate ones.

Salts and Vitriols have Refractive Powers in a middle degree between thoſe of Earthly ſubſtances and water; and accordingly are compoſed of thoſe two ſorts of ſubſtances. For by diſtillation and rectification of their ſpirits a great part of them goes into water, and a great part remains behind in the form of a dry fixed earth, capable of vitrification.

Spirit of Wine has a Refractive Power in a middle degree between thoſe of Water and Oily ſubſtances; and accordingly ſeems to

to be compoſed of both, united by fermentation; the water, by means of ſome ſaline ſpirits with which it is impregnated, diſſolving the oil, and volatizing it by the action. For Spirit of Wine is inflammable by means of its oily parts; and being diſtilled often from Salt of Tartar, grows by every diſtillation more and more Aqueous and Phlegmatick. And Chemiſts obſerve, that Vegetables (as Lavender, Rue, Marjoram, &c.) diſtilled *per ſe*, before fermentation yield oils without any burning ſpirits; but after fermentation, yield ardent ſpirits without oils: which ſhews, that their oil is by fermentation converted into ſpirit. They find alſo, that if oils be poured in ſmall quantity upon fermentating vegetables, they diſtil over after fermentation in the form of ſpirits.

various ſubſtances.

So then, by the foregoing Table, all bodies ſeem to have their Refractive Powers proportional to their Denſities, or very nearly; excepting ſo far as they partake more or leſs of ſulphureous oily particles, and thereby have their Refractive power made greater or leſs. Whence it ſeems rational to attribute the Refractive power of all bodies chiefly, if not wholly, to the ſulphureous parts with which they abound. For it is probable that all bodies abound more or leſs with ſulphurs. And as light, congregated by a burning-glaſs, acts moſt upon ſulphureous bodies, to turn them into fire and flame; ſo, ſince all action is mutual, ſulphurs ought to act moſt upon light. For that the action between light and bodies is mutual, may appear from this conſideration; that the denſeſt bodies, which refract and reflect light moſt ſtrongly, grow hotteſt in the ſummer-ſun, by the action of the refracted or reflected light.

I have hitherto explained the power of bodies to reflect and refract; and ſhewed, that thin tranſparent plates, fibres and particles do, according to their ſeveral thickneſſes and denſities, reflect ſeveral ſorts of rays, and thereby appear of ſeveral colours; and, by conſequence, that nothing more is requiſite for producing all the colours of Natural Bodies, than the ſeveral ſizes and denſities of their tranſparent particles. But whence it is that theſe plates, fibres and particles do, according to their ſeveral thickneſſes and denſities, reflect ſeveral ſorts of rays, I have not yet explained.

explained. To give ſome inſight into this matter, and make way for underſtanding the next part of this Book, I ſhall conclude this Part with a few more Propoſitions. Thoſe, which preceded, reſpect the nature of bodies: theſe, the nature of light: for both muſt be underſtood, before the reaſon of their actions upon one another can be known. And becauſe the laſt Propoſition depended upon the velocity of light, I will begin with a Propoſition of that kind.

PROP. XI.

Light is propagated from luminous Bodies in time; and ſpends about ſeven or eight minutes of an hour in paſſing from the Sun to the Earth.

Light propagated in time.

This was obſerved firſt by *Roemer*, and then by others, by means of the eclipſes of the ſatellites of *Jupiter*. For theſe eclipſes, when the earth is between the Sun and *Jupiter*, happen about ſeven or eight minutes ſooner, than they ought to do by the Tables; and when the Earth is beyond the Sun, they happen about ſeven or eight minutes later than they ought to do; the reaſon being, that the light of the ſatellites has farther to go in the latter caſe, than in the former, by the diameter of the Earth's orbit. Some inequalities of time may ariſe from the excentricities of the orbs of the ſatellites; but thoſe cannot anſwer in all the ſatellites, and at all times, to the poſition and diſtance of the Earth from the Sun. The mean motions of *Jupiter's* ſatellites is alſo ſwifter in his deſcent from his aphelium to his perihelium, than in his aſcent in the other half of his orb: but this inequality has no reſpect to the poſition of the Earth, and in the three interior ſatellites is inſenſible; as I find by computation from the theory of their gravity.

PROP.

PROP. XII.

Every ray of Light, in its paſſage through any refracting ſurface, is put into a certain tranſient conſtitution or ſtate; which, in the progreſs of the ray, returns at equal intervals; and diſpoſes the ray, at every return, to be eaſily tranſmitted through the next refracting ſurface, and, between the returns, to be eaſily reflected by it.

This is manifeſt by the 5th, 9th, 12th and 15th Obſervations. For by thoſe Obſervations it appears, that one and the ſame ſort of rays, at equal angles of incidence on any thin tranſparent plate, is alternately reflected and tranſmitted for many ſucceſſions, accordingly as the Thickneſs of the plate increaſes in arithmetical progreſſion of the numbers, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. ſo that if the Firſt reflexion (that which makes the firſt or innermoſt of the rings of colours there deſcribed) be made at the thickneſs 1, the rays ſhall be tranſmitted at the thickneſſes 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, &c. and thereby make the central ſpot and rings of light, which appear by tranſmiſſion; and be reflected at the thickneſs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. and thereby make the rings which appear by reflexion. And this alternate reflexion and tranſmiſſion, as I gather by the 24th Obſervation, continues for above an hundred viciſſitudes, and by the Obſervations in the next part of this Book, for many thouſands; being propagated from one ſurface of a glaſs-plate to the other, though the thickneſs of the plate be a quarter of an inch, or above; ſo that this alternation ſeems to be propagated from every refracting ſurface, to all diſtances, without end or limitation.

Fits of Tranſmiſſion and Reflexion.

This alternate reflexion and refraction depends on both the ſurfaces of every thin plate, becauſe it depends on their diſtance. By the 21ſt Obſervation, if either ſurface of a thin plate of Muſcovy-glaſs be wetted, the colours cauſed by the alternate reflexion and refraction grow faint, and therefore it depends on them both.

It is therefore performed at the ſecond ſurface; for if it were performed at the firſt, before the rays arrive at the ſecond, it would not depend on the ſecond.

Fits of Tranſmiſſion

It is alſo influenced by ſome action or diſpoſition, propagated from the firſt to the ſecond; becauſe otherwiſe at the ſecond it would not depend on the firſt. And this action or diſpoſition, in its propagation, intermits and returns by equal intervals; becauſe in all its progreſs it inclines the ray, at one diſtance from the firſt ſurface, to be reflected by the ſecond; at another, to be tranſmitted by it, and that by equal intervals for innumerable viciſſitudes. And becauſe the ray is diſpoſed to reflexion at the diſtances 1, 3, 5, 7, 9, &c. and to tranſmiſſion at the diſtances 0, 2, 4, 6, 8, 10, &c. (for its tranſmiſſion through the firſt ſurface is at the diſtance 0, and it is tranſmitted through both together, if their diſtance be infinitely little or much leſs than 1) the diſpoſition to be tranſmitted at the diſtances 2, 4, 6, 8, 10, &c. is to be accounted a return of the ſame diſpoſition which the ray firſt had at the diſtance 0; that is, at its tranſmiſſion through the firſt refracting ſurface. All which is the thing I would prove.

What kind of action or diſpoſition this is; whether it conſiſts in a circulating or a vibrating motion of the ray, or of the medium, or ſomething elſe, I do not here enquire. Thoſe that are averſe from aſſenting to any new diſcoveries, but ſuch as they can explain by an hypotheſis, may for the preſent ſuppoſe, that as ſtones, by falling upon water, put the water into an undulating motion, and all bodies by percuſſion excite vibrations in the air; ſo the rays of light, by impinging on any refracting or reflecting ſurface, excite vibrations in the refracting or reflecting medium or ſurſtance, and by exciting them agitate the ſolid parts of the refracting or reflecting body, and by agitating them cauſe the body to grow warm or hot; that the vibrations, thus excited, are propagated in the refracting or reflecting medium or ſubſtance, much after the manner that vibrations are propagated in the air for cauſing ſound, and move faſter than the rays, ſo as to overtake them; and that when any ray is in that part of the vibration which conſpires with its motion, it eaſily breaks through a refracting ſurface; but when it is in the contrary part of the vibration which impedes its motion, it is eaſily reflected; and, by conſequence, that every ray is ſucceſſively diſpoſed to be eaſily reflected or eaſily tranſmitted, by every vibration which overtakes

takes it. But whether this hypotheſis be true or falſe, I do not here conſider. I content myſelf with the bare diſcovery, that the rays of light are, by ſome cauſe or other, alternately diſpoſed to be reflected or refracted for many viciſſitudes. and Reflexion.

DEFINITION.

The returns of the diſpoſition of any Ray to be reflected I will call its Fits of eaſy Reflexion; *and thoſe of its diſpoſition to be tranſmitted, its* Fits of eaſy Tranſmiſſion; *and the ſpace it paſſes between every return and the next return, the* Interval of its Fits.

PROP. XIII.

The reaſon why the ſurfaces of all thick tranſparent bodies Reflect part of the light incident on them, and Refract the reſt, is, that ſome rays, at their incidence, are in Fits of eaſy Reflexion, and others in Fits of eaſy Tranſmiſſion.

This may be gathered from the 24th Obſervation, where the light reflected by thin plates of air and glaſs, which to the naked eye appeared evenly white all over the plate, did through a priſm appear waved with many ſucceſſions of light and darkneſs, made by alternate fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion, the priſm ſevering and diſtinguiſhing the waves of which the White reflected light was compoſed, as was explained above.

And hence light is in fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion, before its incidence on tranſparent bodies. And probably it is put into ſuch fits at its firſt emiſſion from luminous bodies, and continues in them during all its progreſs. For theſe fits are of a laſting nature, as will appear by the next part of this Book.

In this Propoſition I ſuppoſe the tranſparent bodies to be thick; becauſe if the thickneſs of the body be much leſs than the interval of the fits of eaſy Reflexion and Tranſmiſſion of the rays, the body loſeth its reflecting power. For if the rays, which at their entering into the body are put into fits of eaſy Tranſmiſſion, arrive at the fartheſt ſurface of the body before they be out of thoſe fits, they muſt be tranſmitted. And this is the reaſon

Fits of Tranſmiſſion

ſon why bubbles of water loſe their reflecting power when they grow very thin, and why all Opake bodies, when reduced into very ſmall parts, become tranſparent.

PROP. XIV.

The ſurfaces of tranſparent bodies, which, if the ray be in a fit of Refraction, do refract it moſt ſtrongly; if the ray be in a fit of Reflexion, do reflect it moſt eaſily.

For we ſhewed above in Prop. VIII. that the cauſe of Reflexion is not the impinging of light on the ſolid impervious Parts of bodies, but ſome other power, by which thoſe ſolid Parts act on light at a diſtance. We ſhewed alſo in Prop. IX. that bodies reflect and refract light by one and the ſame power variouſly exerciſed in various circumſtances; and in Prop. I. that the moſt ſtrongly refracting ſurfaces reflect the moſt light: all which compared together evince and ratify both this and the laſt Propoſition.

PROP. XV.

In any one and the ſame ſort of rays, emerging in any angle out of any refracting ſurface into one and the ſame medium, the Intervals of the following fits of eaſy Reflexion and Tranſmiſſion are, either accurately or very nearly, as the rectangle of the ſecant of the angle of refraction, and of the ſecant of another angle, whoſe ſine is the firſt of 106 arithmetical mean proportionals between the ſines of incidence and refraction, counted from the ſine of refraction.

This is manifeſt by the 7th and 19th Obſervations.

PROP.

PROP. XVI.

and Reflexion.

In ſeveral ſorts of rays, emerging in equal angles out of any refracting ſurface into the ſame medium, the intervals of the following fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion are, either accurately or very nearly, as the cube-roots of the ſquares of the lengths of a chord, which ſound the notes of an eight, ſol, la, fa, ſol, la, mi, fa, ſol, *with all their intermediate degrees anſwering to the colours of thoſe rays, according to the analogy deſcribed in the ſeventh Experiment of the ſecond Part of the firſt Book.*

This is manifeſt by the 13th and 14th Obſervations.

PROP. XVII.

If rays of any ſort paſs perpendicularly into ſeveral mediums, the intervals of the fits of eaſy Refraction and Tranſmiſſion in any one medium, are to thoſe intervals in any other, as the ſine of incidence to the ſine of refraction, when the rays paſs out of the firſt of thoſe two mediums into the ſecond.

This is manifeſt by the 10th Obſervation.

PROP. XVIII.

If the rays, which paint the colour in the confine of Yellow and Orange, paſs perpendicularly out of any medium into air, the intervals of their fits of eaſy Reflexion are the $\frac{1}{89000}$th part of an inch. And of the ſame length are the intervals of their fits of eaſy Tranſmiſſion.

This is manifeſt by the 6th Obſervation.

From theſe Propoſitions it is eaſy to collect the intervals of the fits of eaſy Reflexion and Tranſmiſſion of any ſort of rays, refracted in any angle into any medium; and thence to know, whether the rays ſhall be reflected or tranſmitted, at their ſubſequent incidence upon any other pellucid medium. Which thing, being uſeful for underſtanding the next part of this Book, was here to be ſet down. And for the ſame reaſon I add the two following Propoſitions.

PROP.

Fits of Tranſmiſſion

PROP. XIX.

If any ſort of rays, falling on the polite ſurface of any pellucid medium, be reflected back; the fits of eaſy Reflexion, which they have at the point of reflexion, ſhall ſtill continue to return; and the returns ſhall be at diſtances from the point of reflexion in the arithmetical progreſſion of the numbers 2, 4, 6, 8, 10, 12, *&c. and between theſe fits the rays ſhall be in fits of eaſy Tranſmiſſion.*

For ſince the fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion are of a returning nature, there is no reaſon why theſe fits, which continued till the ray arrived at the reflecting medium, and there inclined the ray to reflexion, ſhould there ceaſe. And if the ray, at the point of reflexion, was in a fit of eaſy reflexion, the progreſſion of the diſtances of theſe fits from that point muſt begin from 0, and ſo be of the numbers 0, 2, 4, 6, 8, &c. And therefore the progreſſion of the diſtances of the intermediate fits of eaſy Tranſmiſſion, reckoned from the ſame point, muſt be in the progreſſion of the odd numbers 1, 3, 5, 7, 9, &c. contrary to what happens, when the fits are propagated from points of refraction.

PROP. XX.

The intervals of the fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion, propagated from points of reflexion into any medium, are equal to the intervals of the like fits, which the ſame rays would have, if refracted into the ſame medium in angles of refraction equal to their angles of reflexion.

For when light is reflected by the ſecond ſurface of thin plates, it goes out afterwards freely at the firſt ſurface, to make the rings of colours which appear by reflexion; and by the freedom of its egreſs, makes the colours of theſe rings more vivid and ſtrong, than thoſe which appear on the other ſide of the plates, by the tranſmitted light. The reflected rays are therefore in fits of eaſy Tranſmiſſion at their egreſs; which would not always happen, if the intervals of the fits within the plate, after reflexion, were not

not equal both in length and number to their intervals before it. And this confirms alſo the proportions ſet down in the former Propoſition. For if the rays, both in going in and out at the firſt ſurface, be in fits of eaſy Tranſmiſſion, and the intervals and numbers of thoſe fits between the firſt and ſecond ſurface, before and after reflexion, be equal; the diſtances of the fits of eaſy Tranſmiſſion from either ſurface muſt be in the ſame progreſſion after reflexion as before; that is, from the Firſt ſurface which tranſmitted them, in the progreſſion of the Even numbers 0, 2, 4, 6, 8, &c: and from the Second which reflected them, in that of the Odd numbers 1, 3, 5, 7, &c. But theſe two Propoſitions will become much more evident by the Obſervations in the following part of this Book.

and Reflexion.

THE

THE SECOND BOOK OF OPTICKS.

PART IV.

Observations concerning the Reflexions and Colours of thick transparent polished Plates.

Reflexion and Colours

THERE is no glass or speculum, how well soever polished, but, besides the light which it refracts or reflects regularly, scatters every way irregularly a faint light; by means of which the polished surface, when illuminated in a dark room by a beam of the sun's light, may be easily seen in all positions of the eye. There are certain phænomena of this scattered light, which when I first observed them, seemed very strange and surprising to me. My Observations were as follows.

Obs. 1. The sun shining into my darkened chamber, through a hole one-third of an inch wide, I let the intromitted beam of light fall perpendicularly upon a glass-speculum, ground concave on one side and convex on the other, to a sphere of five feet and eleven inches radius, and quick-silvered over on the convex side. And holding a white opake chart or a quire of paper, at the center of the spheres to which the speculum was ground, that is, at the distance of about five feet and eleven inches from the speculum, in such manner, that the beam of light might pass through

of thick transparent Plates.

through a little hole made in the middle of the chart to the speculum, and thence be reflected back to the same hole: I observed upon the chart four or five concentric irises, or rings of colours, like rainbows, encompassing the hole; much after the manner that those, which in the fourth and following Observations of the first Part of the third (r) Book appeared between the object-glasses, encompassed the Black spot, but yet larger and fainter than those. These rings, as they grew larger and larger, became diluter and fainter, so that the fifth was scarce visible. Yet sometimes, when the sun shone very clear, there appeared faint lineaments of a sixth and seventh. If the distance of the chart from the speculum was much greater or much less than that of six feet, the rings became dilute and vanished. And if the distance of the speculum from the window was much greater than that of six feet, the reflected beam of light would be so broad at the distance of six feet from the speculum, where the rings appeared, as to obscure one or two of the innermost rings. And therefore I usually placed the speculum at about six feet from the window; so that its focus might there fall in with the center of its concavity, at the rings upon the chart. And this posture is always to be understood in the following Observations where no other is expressed.

Obs. 2. The colours of these rainbows succeeded one another from the center outwards, in the same form and order, with those which were made in the ninth Observation of the first Part of this Book by light not reflected, but transmitted through the two object-glasses. For, first, there was in their common center a White round spot of faint light, something broader than the reflected beam of light; which beam sometimes fell upon the middle of the spot, and sometimes, by a little inclination of the speculum, receded from the middle, and left the spot white to the center.

This White spot was immediately encompassed with a dark Grey or Russet, and that dark Grey with the colours of the first iris; which colours, on the inside next the dark Grey, were a little Violet and Indigo, and next to that a Blue, which on the

(r) —— *third.*] Read *second.*

Reflexion and Colours

outside grew pale; and then succeeded a little greenish Yellow; and after that a brighter Yellow; and then, on the outward edge of the iris, a Red, which on the outside inclined to Purple.

This iris was immediately encompassed with a second; whose colours were in order from the inside outwards, Purple, Blue, Green, Yellow, light Red, a Red mixed with Purple.

Then immediately followed the colours of the third iris; which were in order outwards a Green inclining to Purple, a good Green, and a Red more bright than that of the former iris.

The fourth and fifth iris seemed of a blueish Green within, and Red without; but so faintly that it was difficult to discern the colours.

Obs. 3. Measuring the diameters of these rings upon the chart, as accurately as I could, I found them also in the same proportion to one another with the rings made by light transmitted through the two object-glasses. For the diameters of the four first of the bright rings, measured between the brightest parts of their orbits, at the distance of six feet from the speculum, were $1\frac{15}{16}$, $2\frac{5}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{3}{8}$ inches; whose squares are in arithmetical progression of the numbers 1, 2, 3, 4. If the White circular spot in the middle be reckoned amongst the rings, and its central light, where it seems to be most luminous, be put equipollent to an infinitely little ring; the squares of the diameters of the rings will be in the progression 0, 1, 2, 3, 4, &c. I measured also the diameters of the dark circles between these luminous ones; and found their squares in the progression of the numbers $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. the diameters of the first four, at the distance of six feet from the speculum, being $1\frac{3}{16}$, $2\frac{1}{16}$, $2\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{20}$ (s) inches. If the distance of the chart from the speculum was increased or diminished, the diameters of the circles were increased or diminished proportionally.

Obs. 4. By the analogy between these rings and those described in the Observations of the first Part of this Book, I suspected that there were many more of them which spread into one another, and by interfering mixed their colours, and diluted one another so that they could not be seen apart. I viewed them therefore

(s) $4\frac{3}{20}$. So the third edition. All the rest $3\frac{3}{10}$.

through

through a prism, as I did those in the 24th Observation of the first Part of this Book. And when the prism was so placed as, by refracting the light of their mixed colours, to separate them, and distinguish the rings from one another, as it did those in that Observation; I could then see them distincter than before, and easily number eight or nine of them, and sometimes twelve or thirteen. And had not their light been so very faint, I question not but that I might have seen many more.

of thick transparent Plates.

Obs. 5. Placing a prism at the window to refract the intromitted beam of light, and cast the oblong spectrum of colours on the speculum: I covered the speculum with a black paper, which had in the middle of it a hole to let any one of the colours pass through to the speculum, whilst the rest were intercepted by the paper. And now I found rings of that colour only, which fell upon the speculum. If the speculum was illuminated with Red, the rings were totally Red with dark intervals; if with Blue, they were totally Blue, and so of the other colours. And when they were illuminated with any one colour, the squares of their diameters, measured between their most luminous parts, were in the arithmetical progression of the numbers 0, 1, 2, 3, 4; and the squares of the diameters of their dark intervals, in the progression of the intermediate numbers $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$. But if the colour was varied, they varied their magnitude. In the Red, they were largest; in the Indigo and Violet, least; and in the intermediate colours, Yellow, Green and Blue, they were of several intermediate bignesses answering to the colour; that is, greater in Yellow than in Green, and greater in Green than in Blue. And hence I knew, that when the speculum was illuminated with White light, the Red and Yellow, on the outside of the rings, were produced by the least refrangible rays, and the Blue and Violet by the most refrangible; and that the colours of each ring spread into the colours of the neighbouring rings on either side, after the manner explained in the first and second Part of this Book; and, by mixing, diluted one another so that they could not be distinguished; unless near the center, where they were least mixed. For in this Observation I could see the rings more distinctly, and to a greater number than before; being able in the Yellow light to

Reflexion and Colours

number eight or nine of them, beſides a faint ſhadow of a tenth. To ſatisfy myſelf how much the colours of the ſeveral rings ſpread into one another, I meaſured the diameters of the ſecond and third rings; and found them, when made by the confine of the Red and Orange, to be to the ſame diameters, when made by the confine of Blue and Indigo, as 9 to 8, or thereabouts. For it was hard to determine this proportion accurately. Alſo the circles made ſucceſſively by the Red, Yellow and Green, differed more from one another than thoſe made ſucceſſively by the Green, Blue and Indigo. For the circle made by the Violet was too dark to be ſeen. To carry on the computation, let us therefore ſuppoſe, that the differences of the diameters of the circles made by the utmoſt Red, the confine of Red and Orange, the confine of Orange and Yellow, the confine of Yellow and Green, the confine of Green and Blue, the confine of Blue and Indigo, the confine of Indigo and Violet, and outmoſt Violet, are in proportion as the differences of the lengths of a monochord which ſound the tones in an eight; *ſol*, *la*, *fa*, *ſol*, *la*, *mi*, *fa*, *ſol*, that is, as the numbers $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{27}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{18}$. And if the diameter of the circle made by the confine of Red and Orange be 9A, and that of the circle made by the confine of Blue and Indigo be 8A, as above; their difference, 9A − 8A, will be to the difference of the diameters of the circle made by the outmoſt Red, and by the confine of Red and Orange as $\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{27}$ to $\frac{1}{9}$, that is as $\frac{8}{27}$ to $\frac{1}{9}$, or 8 to 3; and to the difference of the circles made by the outmoſt Violet, and by the confine of Blue and Indigo as $\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{27}$ to $\frac{1}{27}+\frac{1}{18}$, that is, as $\frac{8}{27}$ to $\frac{5}{54}$, or as 16 to 5. And therefore theſe differences will be $\frac{3}{8}$A and $\frac{5}{16}$A. Add the firſt to 9A, and ſubduct the laſt from 8A, and you will have the diameters of the circles made by the leaſt and moſt refrangible rays, $\frac{75}{8}$A and $\frac{61\frac{1}{2}}{8}$A. Theſe diameters are therefore to one another as 75 to $61\frac{1}{2}$, or 50 to 41; and their ſquares as 2500 to 1681, that is, as 3 to 2 very nearly. Which proportion differs not much from the proportion of the diameters of the circles made by the outmoſt Red and outmoſt Violet, in the 13th Obſervation of the firſt Part of this Book.

Obſ. 6. Placing my eye where theſe rings appeared plaineſt, I ſaw the ſpeculum tinged all over with waves of colours (Red, Yellow, Green, Blue); like thoſe which, in the Obſervations of the firſt Part of this Book, appeared between the object-glaſſes and upon bubbles of water, but much larger. And after the manner of thoſe, they were of various magnitudes in various poſitions of the eye; ſwelling and ſhrinking as I moved my eye this way and that way. They were formed like arcs of concentrick circles, as thoſe were; and when my eye was over againſt the center of the concavity of the ſpeculum (that is, 5 feet and 10 inches diſtant from the ſpeculum) their common center was in a right line with that center of concavity, and with the hole in the window. But in other poſtures of my eye their center had other poſitions. They appeared by the light of the clouds, propagated to the ſpeculum through the hole in the window; and when the ſun ſhone through that hole upon the ſpeculum, his light upon it was of the colour of the ring whereon it fell; but, by its ſplendor, obſcured the rings made by the light of the clouds, unleſs when the ſpeculum was removed to a great diſtance from the window, ſo that his light upon it might be broad and faint. By varying the poſition of my eye, and moving it nearer to or farther from the direct beam of the ſun's light, the colour of the ſun's reflected light conſtantly varied upon the ſpeculum, as it did upon my eye; the ſame colour always appearing to a by-ſtander upon my eye, which to me appeared upon the ſpeculum. And thence I knew, that the rings of colours upon the chart were made by theſe reflected colours, propagated thither from the ſpeculum in ſeveral angles; and that their production depended not upon the termination of light and ſhadow.

of thick tranſparent Plates.

Obſ. 7. By the analogy of all theſe phænomena with thoſe of the like rings of colours deſcribed in the firſt Part of this Book; it ſeemed to me, that theſe colours were produced by this thick plate of glaſs, much after the manner that thoſe were produced by very thin plates. For, upon trial, I found that if the quick-ſilver were rubbed off from the backſide of the ſpeculum, the glaſs alone would cauſe the ſame rings of colours; but much more faint than before: and therefore the phænomenon depends not upon the quick-ſilver, unleſs ſo far as the quick-ſilver, by increaſing the reflexion of the backſide of the glaſs, increaſes the

Reflexion and Colours

light of the rings of colours. I found alſo that a ſpeculum of metal without glaſs, made ſome years ſince for optical uſes, and very well wrought, produced none of thoſe rings; and thence I underſtood that theſe rings ariſe not from one ſpecular ſurface alone, but depend upon the two ſurfaces of the plate of glaſs whereof the ſpeculum was made, and upon the thickneſs of the glaſs between them. For, as in the 7th and 19th Obſervations of the firſt Part of this Book, a thin plate of air, water or glaſs, of an even thickneſs, appeared of one colour, when the rays were perpendicular to it; of another, when they were a little oblique; of another, when more oblique; of another, when ſtill more oblique, and ſo on: ſo here, in the ſixth Obſervation, the light, which emerged out of the glaſs in ſeveral obliquities, made the glaſs appear of ſeveral colours; and being propagated in thoſe obliquities to the chart, there painted rings of thoſe colours. And as the reaſon why a thin plate appeared of ſeveral colours in ſeveral obliquities of the rays, was, that the rays of one and the ſame ſort are reflected by the thin plate at one obliquity, and tranſmitted at another; and thoſe of other ſorts tranſmitted where theſe are reflected, and reflected where theſe are tranſmitted: ſo the reaſon why the thick plate of glaſs, whereof the ſpeculum was made, did appear of various colours in various obliquities, and in thoſe obliquities propagated thoſe colours to the chart, was, that the rays of one and the ſame ſort did, at one obliquity, emerge out of the glaſs; at another, did not emerge, but were reflected back towards the quick-ſilver by the hither ſurface of the glaſs: and, accordingly as the obliquity became greater and greater, emerged and were reflected alternately for many ſucceſſions; and that in one and the ſame obliquity the rays of one ſort were reflected, and thoſe of another tranſmitted. This is manifeſt by the fifth Obſervation of this Part of this Book. For in that Obſervation, when the ſpeculum was illuminated by any one of the Priſmatick Colours, that light made many rings of the ſame colour upon the chart with dark intervals; and therefore, at its emergence out of the ſpeculum, was alternately tranſmitted and not tranſmitted from the ſpeculum to the chart for many ſucceſſions, according to the various obliquities of its emergence.

And when the colour caſt on the ſpeculum by the priſm was varied, the rings became of the colour caſt on it, and varied their bigneſs with their colour; and therefore the light was now alternately tranſmitted and not tranſmitted, from the ſpeculum to the chart, at other obliquities than before. It ſeemed to me therefore, that theſe rings were of one and the ſame original with thoſe of thin plates; but yet with this difference, that thoſe of thin plates are made by the alternate reflexions and tranſmiſſions of the rays at the ſecond ſurface of the plate, after one paſſage through it; but here, the rays go twice through the plate, before they are alternately reflected and tranſmitted. Firſt, they go through it from the firſt ſurface to the quick-ſilver; and then return through it from the quick-ſilver to the firſt ſurface; and there are either tranſmitted to the chart, or reflected back to the quick-ſilver, accordingly as they are in their fits of eaſy Reflexion or Tranſmiſſion, when they arrive at that ſurface. For the intervals of the fits of the rays, which fall perpendicularly on the ſpeculum and are reflected back in the ſame perpendicular lines, by reaſon of the equality of theſe angles and lines, are of the ſame length and number within the glaſs after reflexion, as before; by the 19th Propoſition of the third Part of this Book. And therefore, ſince all the rays that enter through the firſt ſurface are in their fits of eaſy Traſmiſſion at their entrance; and as many of theſe as are reflected by the ſecond, are in their fits of eaſy Reflexion there; all theſe muſt be again in their fits of eaſy Tranſmiſſion at their return to the firſt; and by conſequence there go out of the glaſs to the chart, and form upon it the White ſpot of light in the center of the rings. For the reaſon holds good in all ſorts of rays, and therefore all ſorts muſt go out promiſcuouſly to that ſpot, and by their mixture cauſe it to be White. But the intervals of the fits of thoſe rays, which are reflected more obliquely than they enter, muſt be greater after reflexion than before, by the 15th and 20th Propoſitions. And hence it may happen that the rays, at their return to the firſt ſurface, may, in certain obliquities, be in fits of eaſy Reflexion, and return back to the quick-ſilver; and, in other intermediate obliquities, be again in fits of eaſy Traſmiſſion, and ſo go out to the chart, and paint on it

of thick tranſparent Plates.

Reflexion and Colours

it the rings of colours about the White ſpot. And becauſe the intervals of the fits, at equal obliquities, are greater and fewer in the leſs refrangible rays, and leſs and more numerous in the more refrangible; therefore the leſs refrangible, at equal obliquities, ſhall make fewer rings than the more refrangible; and the rings made by thoſe ſhall be larger than the like number of rings made by theſe; that is, the Red rings ſhall be larger than the Yellow, the Yellow than the Green, the Green than the Blue, and the Blue than the Violet; as they were really found to be in the fifth Obſervation. And therefore the firſt ring, of all colours encompaſſing the White ſpot of light, ſhall be Red without any Violet within, and Yellow and Green and Blue in the middle, as it was found in the ſecond Obſervation; and theſe colours in the ſecond ring, and thoſe that follow, ſhall be more expanded, till they ſpread into one another, and blend one another by interfering.

Theſe ſeem to be the reaſons of theſe rings in general; and this put me upon obſerving the Thickneſs of the glaſs, and conſidering whether the dimenſions and proportions of the rings may be truly derived from it by computation.

Obſ. 8. I meaſured therefore the thickneſs of this concavo-convex plate of glaſs, and found it every where $\frac{1}{4}$ of an inch preciſely. Now, by the ſixth Obſervation of the firſt Part of this Book, a thin plate of air tranſmits the brighteſt light of the Firſt ring, that is the bright Yellow, when its thickneſs is the $\frac{1}{89000}$th part of an inch; and by the tenth Obſervation of the ſame Part, a thin plate of glaſs tranſmits the ſame light of the ſame ring, when its thickneſs is leſs in proportion of the ſine of refraction to the ſine of incidence; that is, when its thickneſs is the $\frac{11}{1513000}$th or $\frac{1}{137545}$th part of an inch, ſuppoſing the ſines are as 11 to 17. And if this thickneſs be doubled, it tranſmits the ſame bright light of the Second ring; if tripled, it tranſmits that of the Third, and ſo on; the bright Yellow light in all theſe caſes being in its fits of Tranſmiſſion. And therefore if its thickneſs be multiplied 34386 times, ſo as to become $\frac{1}{4}$ of an inch, it tranſmits the ſame bright light of the 34386th ring. Suppoſe this be the bright Yellow light, tranſmitted perpendicularly from the reflecting convex ſide of the glaſs through the concave ſide, to the

of thick tranſparent Plates.

the White ſpot in the center of the rings of colours on the chart: and by a rule in the 7th and 19th Obſervations in the firſt Part of this Book, and by the 15th and 20th Propoſitions of the third Part of this Book, if the rays be made oblique to the glaſs, the thickneſs of the glaſs requiſite to tranſmit the ſame bright light of the ſame ring, in any obliquity, is to this thickneſs of $\frac{1}{4}$ of an inch, as the ſecant of a certain angle to the radius; the ſine of which angle is the firſt of an hundred and ſix arithmetical means between the ſines of incidence and refraction, counted from the ſine of incidence, when the refraction is made out of any plated body into any medium encompaſſing it, that is, in this caſe, out of glaſs into air. Now if the thickneſs of the glaſs be increaſed by degrees, ſo as to bear to its firſt thickneſs (viz. that of a quarter of an inch) the proportions which 34386 (the number of fits of the Perpendicular rays in going through the glaſs towards the White ſpot in the center of the rings) hath to 34385, 34384, 34383 and 34382 (the numbers of the fits of the Oblique rays in going through the glaſs towards the firſt, ſecond, third and fourth rings of colours). And if the firſt thickneſs be divided into 100000000 equal parts, the increaſed thickneſſes will be 100002908, 100005816, 100008725 and 100011633; and the angles, of which theſe thickneſſes are ſecants, will be 26′ 13″, 37′ 5″, 45′ 6″ and 52′ 26″, the radius being 100000000; and the ſines of theſe angles are 762, 1079, 1321 and 1525; and the proportional ſines of refraction 1172, 1659, 2031 and 2345, the radius being 100000. For ſince the ſines of incidence, out of glaſs into air, are to the ſines of refraction as 11 to 17; and to the above-mentioned ſecants, as 11 to the firſt of 106 arithmetical means between 11 and 17, that is, as 11 to $11\frac{6}{106}$; thoſe ſecants will be to the ſines of refraction, as $11\frac{6}{106}$ to 17, and by this analogy will give theſe ſines. So then if the obliquities of the rays to the concave ſurface of the glaſs be ſuch, that the ſines of their refraction, in paſſing out of the glaſs through that ſurface into the air, be 1172, 1659, 2031, 2345, the bright light of the 34386th ring ſhall emerge at the thickneſſes of the glaſs which are to $\frac{1}{4}$ of an inch, as 34386 to 34385, 34384, 34383, 34382, reſpectively. And therefore if the

Reflexion and Colours

thickneſs in all theſe caſes be $\frac{1}{4}$ of an inch (as it is in the glaſs of which the ſpeculum was made) the bright light of the 34385th ring ſhall emerge where the ſine of refraction is 1172; and that of the 34384th, 34383d and 34382d ring, where the ſine is 1659, 2031 and 2345 reſpectively. And in theſe angles of refraction the light of theſe rings ſhall be propagated from the ſpeculum to the chart; and there paint rings about the white central round ſpot of light, which we ſaid was the light of the 34386th ring. And the ſemi-diameters of theſe rings ſhall ſubtend the angles of refraction made at the concave ſurface of the ſpeculum; and by conſequence their diameters ſhall be to the diſtance of the chart from the ſpeculum, as thoſe ſines of refraction doubled are to the radius; that is, as 1172, 1659, 2031, and 2345, doubled, are to 100000. And therefore if the diſtance of the chart from the concave ſurface of the ſpeculum be ſix feet (as it was in the third of theſe Obſervations) the diameters of the rings of this bright Yellow light upon the chart ſhall be 1'688, 2'389, 2'925, 3'375 inches. For theſe diameters are to ſix feet, as the above-mentioned ſines doubles are to the radius. Now theſe diameters of the bright Yellow rings, thus found by computation, are the very ſame with thoſe found in the third of theſe Obſervations by meaſuring them, viz. with $1\frac{11}{16}$, $2\frac{3}{8}$, $2\frac{11}{12}$, and $3\frac{3}{8}$ inches; and therefore the theory of deriving theſe rings from the Thickneſs of the plate of glaſs, of which the ſpeculum was made, and from the obliquity of the emerging rays, agrees with the Obſervation. In this computation I have equalled the diameters of the bright rings made by light of all colours, to the diameters of the rings made by the bright Yellow. For this Yellow makes the brighteſt part of the rings of all colours. If you deſire the diameters of the rings made by the light of any other unmixed colour, you may find them readily, by putting them to the diameters of the bright Yellow ones in a ſubduplicate proportion of the intervals of the fits of the rays of thoſe colours, when equally inclined to the refracting or reflecting ſurface, which cauſed thoſe fits; that is, by putting the diameters of the rings made by the rays in the extremities and limits of the ſeven colours, Red, Orange, Yellow, Green, Blue, Indigo, Violet, proportional to the cube-

roots of the numbers 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}$, which expreſs the lengths of a monochord ſounding the notes in an eighth: for by this means the diameters of the rings of theſe colours will be found pretty nearly in the ſame proportion to one another, which they ought to have by the fifth of theſe Obſervations.

of thick tranſparent Plates.

And thus I ſatisfied myſelf that theſe rings were of the ſame kind and original with thoſe of thin plates; and by conſequence that the fits, or alternate diſpoſitions of the rays to be reflected and tranſmitted, are propagated to great diſtances from every reflecting and refracting ſurface. But yet to put the matter out of doubt, I added the following Obſervation.

Obſ. 9. If theſe rings thus depend on the Thickneſs of the plate of glaſs, their diameters at equal diſtances from ſeveral ſpeculums, made of ſuch concavo-convex plates of glaſs as are ground on the ſame ſphere, ought to be reciprocally in a ſubduplicate proportion of the Thickneſſes of the plates of glaſs. And if this proportion be found true by experience, it will amount to a demonſtration, that theſe rings, like thoſe formed in thin plates, do depend on the Thickneſs of the glaſs. I procured therefore another concavo-convex plate of glaſs, ground on both ſides to the ſame ſphere with the former plate. Its thickneſs was $\frac{5}{62}$ parts of an inch; and the diameters of the three firſt bright rings, meaſured between the brighteſt parts of their orbits at the diſtance of ſix feet from the glaſs, were 3. $4\frac{1}{6}$. $5\frac{1}{8}$. inches. Now the thickneſs of the other glaſs, being $\frac{1}{4}$ of an inch, was to the thickneſs of this glaſs as $\frac{1}{4}$ to $\frac{5}{62}$; that is, as 31 to 10, or 310000000 to 100000000; and the roots of theſe numbers are 17607 and 10000; and in the proportion of the firſt of theſe roots to the ſecond, are the diameters of the bright rings made in this Obſervation by the thinner glaſs, 3. $4\frac{1}{6}$. $5\frac{1}{8}$, to the diameters of the ſame rings made in the third of theſe Obſervations by the thicker glaſs, $1\frac{11}{16}$. $2\frac{3}{8}$. $2\frac{11}{12}$; that is, the diameters of the rings are reciprocally in a ſubduplicate proportion of the Thickneſſes of the plates of glaſs.

So then in plates of glaſs which are alike concave on one ſide, and alike convex on the other ſide, and alike quick-ſilvered on the convex ſides, and differ in nothing but their Thickneſs; the

Reflexion and Colours

diameters of the rings are reciprocally in a ſubduplicate proportion of the Thickneſſes of the plates. And this ſhews ſufficiently, that the rings depend on both the ſurfaces of the glaſs. They depend on the Convex ſurface, becauſe they are more luminous when that ſurface is quick-ſilvered over, than when it is without quick-ſilver. They depend alſo upon the Concave ſurface, becauſe without that ſurface a ſpeculum makes them not. They depend on both ſurfaces, and on the diſtances between them, becauſe their bigneſs is varied by varying only that diſtance. And this dependence is of the ſame kind with that, which the colours of thin plates have on the diſtance of the ſurfaces of thoſe plates, becauſe the bigneſs of the rings, and their proportion to one another, and the variation of their bigneſs ariſing from the variation of the Thickneſs of the glaſs, and the Orders of their colours, is ſuch as ought to reſult from the Propoſitions in the end of the third Part of this Book, derived from the phænomena of the colours of thin plates ſet down in the firſt Part.

There are yet other phænomena of theſe rings of colours, but ſuch as follow from the ſame Propoſitions, and therefore confirm both the truth of thoſe Propoſitions, and the analogy between theſe rings and the rings of colours made by very thin plates. I ſhall ſubjoin ſome of them.

Obſ. 10. When the beam of the ſun's light was reflected back from the ſpeculum not directly to the hole in the window, but to a place a little diſtant from it, the common center of that ſpot, and of all the rings of colours fell in the middle way between the beam of the Incident light, and the beam of the Reflected light; and by conſequence in the center of the ſpherical concavity of the ſpeculum; whenever the chart, on which the rings of colours fell, was placed at that center. And as the beam of Reflected light, by inclining the ſpeculum, receded more and more from the beam of Incident light, and from the common center of the coloured rings between them; thoſe rings grew bigger and bigger, and ſo alſo did the White round ſpot; and new rings of colours emerged ſucceſſively out of their common center, and the white ſpot became a white ring encompaſſing them; and the Incident and Reflected beams of light always fell upon the oppoſite

of thick tranſparent Plates.

ſite parts of this white ring, illuminating its perimeter like two mock ſuns in the oppoſite parts of an iris. So then the diameter of this ring, meaſured from the middle of its light on one ſide to the middle of its light on the other ſide, was always equal to the diſtance between the middle of the Incident beam of light, and the middle of the Reflected beam, meaſured at the chart on which the rings appeared: and the rays, which formed this ring, were reflected by the ſpeculum in angles equal to their angles of incidence, and by conſequence to their angles of refraction at their entrance into the glaſs; but yet their angles of reflexion were not in the ſame planes with their angles of incidence.

Obſ. 11. The colours of the new rings were in a contrary order to thoſe of the former, and aroſe after this manner. The white round ſpot of light in the middle of the rings continued white to the center, till the diſtance of the incident and reflected beams at the chart was about $\frac{7}{8}$ parts of an inch, and then it began to grow dark in the middle. And when that diſtance was about $1\frac{3}{16}$ of an inch, the white ſpot was become a ring, encompaſſing a dark round ſpot, which in the middle inclined to Violet and Indigo. And the luminous rings encompaſſing it were grown equal to thoſe dark ones, which in the four firſt Obſervations encompaſſed them; that is to ſay, the white ſpot was grown a white ring equal to the firſt of thoſe dark rings; and the firſt of thoſe luminous rings was now grown equal to the ſecond of thoſe dark ones, and the ſecond of thoſe luminous ones to the third of thoſe dark ones, and ſo on. For the diameters of the luminous rings were now $1\frac{3}{10}$, $2\frac{1}{10}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{10}$, &c. inches.

When the diſtance between the incident and reflected beams of light became a little bigger, there emerged out of the middle of the dark ſpot, after the Indigo, a Blue; and then out of that Blue, a pale Green; and ſoon after a Yellow and Red. And when the colour at the center was brighteſt, being between Yellow and Red, the bright rings were grown equal to thoſe rings which in the four firſt Obſervations next encompaſſed them; that is to ſay, the white ſpot in the middle of thoſe rings was now become a white ring equal to the firſt of thoſe bright rings; and the firſt of thoſe bright ones was now come equal to the ſecond of thoſe,

and

Reflexion and Colours

and so on. For the diameters of the white ring, and of the other luminous rings encompassing it, were now $1\frac{11}{16}$, $2\frac{3}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{3}{8}$, &c. or thereabouts.

When the distance of the two beams of light at the chart was a little more increased, there emerged out of the middle in order after the Red, a Purple, a Blue, a Green, a Yellow, and a Red inclining much to Purple; and when the colour was brightest, being between Yellow and Red, the former Indigo, Blue, Green, Yellow and Red, were become an iris, or ring of colours, equal to the first of those luminous rings which appeared in the four first Observations; and the White ring, which was now become the second of the luminous rings, was grown equal to the second of those; and the first of those, which was now become the third ring, was become equal to the third of those; and so on. For their diameters were $1\frac{11}{16}$, $2\frac{3}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{3}{8}$ inches, the distance of the two beams of light, and the diameter of the white ring being $2\frac{3}{8}$ inches.

When these two beams became more distant, there emerged out of the middle of the purplish Red, first a darker round spot; and then, out of the middle of that spot, a brighter. And now the former colours (Purple, Blue, Green, Yellow, and purplish Red) were become a ring equal to the first of the bright rings mentioned in the four first Observations; and the rings about This ring were grown equal to the rings about That respectively; the distance between the two beams of light and the diameter of the white ring, which was now become the third ring, being about 3 inches.

The colours of the rings in the middle began now to grow very dilute, and if the distance between the two beams was increased half an inch or an inch more, they vanished; whilst the White ring, with one or two of the rings next it on either side, continued still visible. But if the distance of the two beams of light was still more increased, these also vanished: for the light which, coming from several parts of the hole in the window, fell upon the speculum in several angles of incidence, made rings of several bignesses, which diluted and blotted out one another, as I knew by intercepting some part of that light. For if I intercepted

cepted that part which was neareſt to the axis of the ſpeculum, the rings would be leſs; if the other part, which was remoteſt from it, they would be bigger.

of thick tranſparent Plates.

Obſ. 12. When the colours of the priſm were caſt ſucceſſively on the ſpeculum, that ring, which in the two laſt Obſervations was White, was of the ſame bigneſs in all the colours; but the rings without it were greater in the Green than in the Blue, and ſtill greater in the Yellow, and greateſt in the Red. And, on the contrary, the rings within that White circle were leſs in the Green than in the Blue, and ſtill leſs in the Yellow, and leaſt in the Red. For the angles of reflexion of thoſe rays which made this ring, being equal to their angles of incidence, the fits of every reflected ray, within the glaſs after reflexion, are equal in length and number to their fits of the ſame ray, within the glaſs before its incidence on the reflecting ſurface. And therefore ſince all the rays of all ſorts, at their entrance into the glaſs, were in a fit of Tranſmiſſion, they were alſo in a fit of Tranſmiſſion at their returning to the ſame ſurface after reflexion; and by conſequence were tranſmitted, and went out to the White ring on the chart. This is the reaſon why that ring was of the ſame bigneſs in all the colours, and why in a mixture of all it appears White. But in rays which are reflected in other angles, the interval of the fits of the leaſt refrangible, being greateſt, make the rings of their colour, in their progreſs from this White ring either outwards or inwards, increaſe or decreaſe by the greateſt ſteps; ſo that the rings of this colour without are greateſt, and within leaſt. And this is the reaſon why, in the laſt Obſervation, when the ſpeculum was illuminated with White light, the Exterior rings, made by all colours, appeared Red without and Blue within; and the interior, Blue without and Red within.

Theſe are the phænomena of thick convexo-concave plates of glaſs, which are every where of the ſame thickneſs. There are yet other phænomena, when theſe plates are a little thicker on one ſide than on the other; and others when the plates are more or leſs concave than convex, or plano-convex, or double-convex. For in all theſe caſes the plates make rings of colours, but after various manners; all which, ſo far as I have yet obſerved, follow

Reflexion and Colours

low from the Propoſitions in the end of the third Part of this Book, and ſo conſpire to confirm the truth of thoſe Propoſitions. But the phænomena are too various, and the calculations, whereby they follow from thoſe Propoſitions, too intricate to be here proſecuted. I content myſelf with having proſecuted this kind of phænomena ſo far as to diſcover their cauſe, and by diſcovering it, to ratify the Propoſitions in the third Part of this Book.

Obſ. 13. As light reflected by a lens, quick-ſilvered on the backſide, makes the rings of colours above deſcribed, ſo it ought to make the like rings of colours in paſſing through a drop of water. At the firſt reflexion of the rays within the drop, ſome colours ought to be tranſmitted, as in the caſe of a lens, and others to be reflected back to the eye. For inſtance, if the diameter of a ſmall drop or globule of water be about the 500th part of an inch, ſo that a Red-making ray, in paſſing through the middle of this globule, has 250 fits of eaſy Tranſmiſſion within the globule, and that all the Red-making rays, which are at a certain diſtance from this middle ray round about it, have 249 fits within the globule, and all the like rays, at a certain farther diſtance round about it, have 248 fits, and all thoſe at a certain farther diſtance 247 fits, and ſo on; theſe concentrick circles of rays, after their tranſmiſſion, falling on a white paper, will make concentrick rings of Red upon the paper, ſuppoſing the light which paſſes through one ſingle globule, ſtrong enough to be ſenſible. And, in like manner, the rays of other colours will make rings of other colours. Suppoſe now that in a fair day the ſun ſhines through a thin cloud of ſuch globules of water or hail, and that the globules are all of the ſame bigneſs; and the ſun, ſeen through this cloud, ſhall appear encompaſſed with the like concentrick rings of colours; and the diameter of the firſt ring of Red ſhall be $7\frac{1}{4}$ degrees; that of the ſecond, $10\frac{1}{4}$ degrees; that of the third, 12 degrees 33 minutes. And accordingly as the globules of water are bigger or leſs, the rings ſhall be leſs or bigger. This is the Theory, and experience anſwers it. For in *June* 1692 I ſaw by reflexion, in a veſſel of ſtagnating water, three halos, crowns, or rings of colours about the ſun, like three little rain-bows, concentrick to his body. The colours

colours of the Firſt or innermoſt crown were Blue next the Sun, Red without, and White in the middle between the Blue and Red. Thoſe of the Second crown were Purple and Blue within, and pale Red without, and Green in the middle. And thoſe of the Third were pale Blue within, and pale Red without. Theſe crowns encloſed one another immediately, ſo that their colours proceeded in this continual order from the ſun outward: Blue, White, Red; Purple, Blue, Green; pale Yellow and Red; pale Blue, pale Red. The diameter of the Second crown, meaſured from the middle of the Yellow and Red on one ſide of the Sun to the middle of the ſame colour on the other ſide, was $9\frac{1}{3}$ degrees, or thereabouts. The diameters of the Firſt and Third I had not time to meaſure; but that of the Firſt ſeemed to be about five or ſix degrees, and that of the Third about twelve. The like crowns appear ſometimes about the moon: for in the beginning of the year 1664, *Feb.* 19th at night, I ſaw two ſuch crowns about her. The diameter of the Firſt, or innermoſt, was about three degrees, and that of the Second about five degrees and an half. Next about the moon was a circle of White, and next about that the inner crown; which was of a Blueiſh Green within next the White, and of a Yellow and Red without: and next about theſe colours were Blue and Green on the inſide of the outward crown, and Red on the outſide of it. At the ſame time there appeared a halo about 22 degrees 35′ diſtant from the center of the moon. It was Elliptical, and its long diameter was perpendicular to the horizon, verging below fartheſt from the moon. I am told that the moon has ſometimes three or more concentrick crowns of colours, encompaſſing one another, next about her body. The more equal the globules of water or ice are to one another, the more crowns of colours will appear, and the colours will be the more lively. The halo, at the diſtance of $22\frac{1}{2}$ degrees from the moon, is of another ſort. By its being Oval and remoter from the moon below than above, I conclude, that it was made by refraction, in ſome ſort of hail or ſnow floating in the air in an horizontal poſture; the Refracting angle being about 58 or 60 degrees.

Halos encircling the Sun and Moon.

THE

THIRD BOOK

OF

OPTICKS.

Observations concerning the Inflexions of the Rays of Light, and the Colours made thereby.

Inflexion of the

GRIMALDO has informed us, that if a beam of the ſun's light be let into a dark room through a very ſmall hole, the ſhadows of things, in this light, will be larger than they ought to be, if the rays went on by the bodies in ſtrait lines; and that theſe ſhadows have three parallel fringes, bands or ranks, of coloured light adjacent to them. But if the hole be enlarged, the fringes grow broad, and run into one another, ſo that they cannot be diſtinguiſhed. Theſe broad ſhadows and fringes have been reckoned by ſome to proceed from the ordinary refraction of the air, but without due examination of the matter. For the circumſtances of the phænomenon, ſo far as I have obſerved them, are as follows.

Obſ. 1. I made in a piece of lead a ſmall hole with a pin, whoſe breadth was the 42d part of an inch: for 21 of theſe pins laid together took up the breadth of half an inch. Through this hole,

Fig. 1.

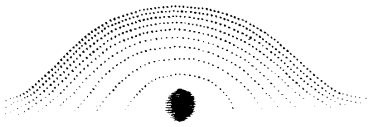


Fig. 2.

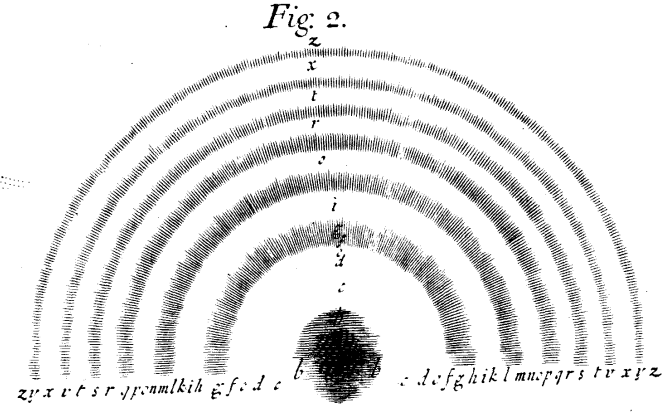


Fig. 3.

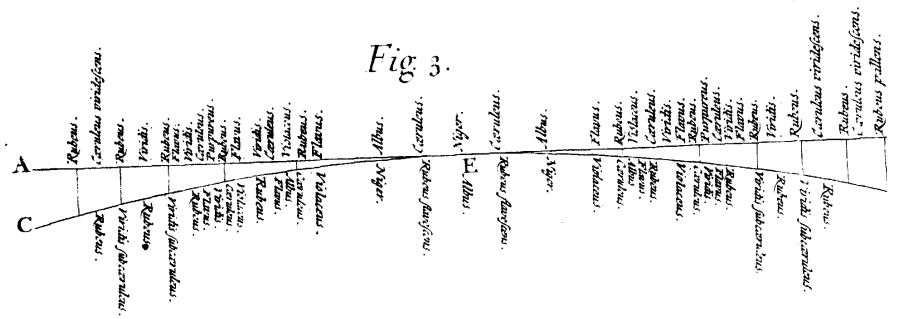


Fig. 4.

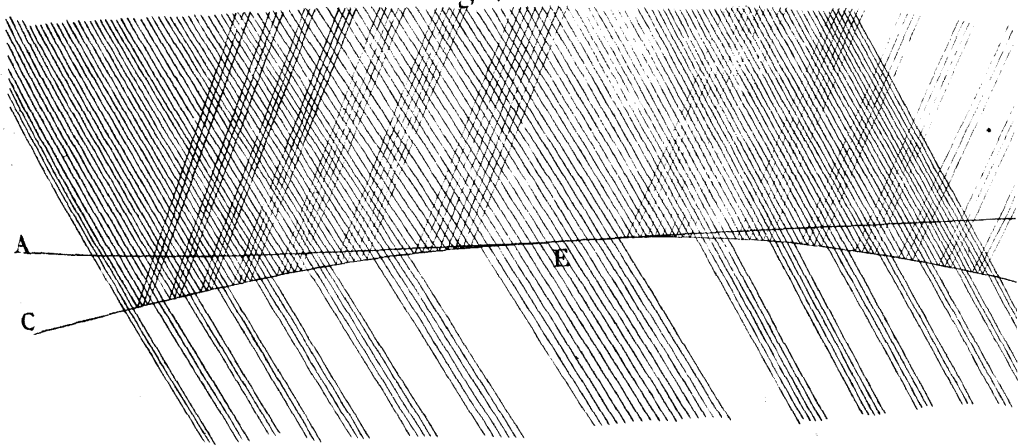


Fig. 5.



Fig. 6.

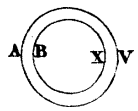
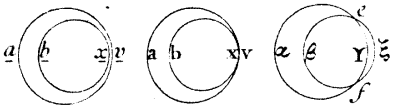


Fig. 7.



hole, I let into my darkened chamber a beam of the ſun's light; and found that the ſhadows of hairs, threads, pins, ſtraws, and ſuch like ſlender ſubſtances, placed in this beam of light, were conſiderably broader than they ought to be, if the rays of light paſſed on by theſe bodies in right lines. And particularly a hair of a man's head, whoſe breadth was but the 280th part of an inch, being held in this light, at the diſtance of about twelve feet from the hole, did caſt a ſhadow, which, at the diſtance of four inches from the hair, was the ſixtieth part of an inch broad; that is, above four times broader than the hair: and at the diſtance of two feet from the hair, was about the eight and twentieth part of an inch broad; that is, ten times broader than the hair: and at the diſtance of ten feet, was an eighth part of an inch broad; that is, 35 times broader. Rays of Light.

Nor is it material whether the hair be encompaſſed with air, or with any other pellucid ſubſtance. For I wetted a poliſhed plate of glaſs, and laid the hair in the water upon the glaſs; and then laying another poliſhed plate of glaſs upon it, ſo that the water might fill up the ſpace between the glaſſes, I held them in the aforeſaid beam of light, ſo that the light might paſs through them perpendicularly, and the ſhadow of the hair was, at the ſame diſtances, as big as before. The ſhadows of ſcratches, made in poliſhed plates of glaſs, were alſo much broader than they ought to be; and the veins in poliſhed plates of glaſs, did alſo caſt the like broad ſhadows. And therefore the great breadth of theſe ſhadows proceeds from ſome other cauſe, than the refraction of the air.

Let the circle X [in *fig.* I.] repreſent the middle of the hair; ADG, BEH, CFI, three rays, paſſing by one ſide of the hair at ſeveral diſtances; KNQ, LOR, MPS, three other rays, paſſing by the other ſide of the hair at the like diſtances; D, E, F, and N, O, P, the places where the rays are bent in their paſſage by the hair; G, H, I and Q, R, S, the places where the rays fall on a paper GQ; IS the breadth of the ſhadow of the hair caſt on the paper; and TI, VS, two rays paſſing to the points I and S without bending, when the hair is taken away. And it is manifeſt that all the light between theſe two rays, TI and VS, is bent in

Inflexions of the

paſſing by the hair, and turned aſide from the ſhadow IS; becauſe if any part of this light were not bent, it would fall on the paper within the ſhadow, and there illuminate the paper, contrary to experience. And becauſe when the paper is at a great diſtance from the hair, the ſhadow is broad, and therefore the rays, TI and VS, are at a great diſtance from one another, it follows that the hair acts upon the rays of light at a good diſtance in their paſſing by it. But the action is ſtrongeſt on the rays, which paſs by at leaſt diſtances; and grows weaker and weaker, accordingly as the rays paſs by at diſtances greater and greater, as is repreſented in the ſcheme: for thence it comes to paſs, that the ſhadow of the hair is much broader, in proportion to the diſtance of the paper from the hair, when the paper is nearer the hair, than when it is at a great diſtance from it.

Obſ. 2. The ſhadows of all bodies (metals, ſtones, glaſs, wood, horn, ice, &c.) in this light were bordered with three parallel fringes or bands of coloured light; whereof that which was contiguous to the ſhadow was broadeſt and moſt luminous; and that which was remoteſt from it was narroweſt; and ſo faint, as not eaſily to be viſible. It was difficult to diſtinguiſh the colours, unleſs when the light fell very obliquely upon a ſmooth paper, or ſome other ſmooth white body; ſo as to make them appear much broader, than they would otherwiſe do. And then the colours were plainly viſible in this order: the Firſt or innermoſt fringe was Violet and deep Blue next the ſhadow; and then light Blue, Green and Yellow in the middle, and Red without. The Second fringe was almoſt contiguous to the firſt, and the Third to the ſecond; and both were Blue within the Yellow, and Red without; but their colours were very faint, eſpecially thoſe of the third. The colours therefore proceeded in this order from the ſhadow; Violet, Indigo, pale Blue, Green, Yellow, Red; Blue, Yellow, Red; pale Blue, pale Yellow and Red. The ſhadows, made by ſcratches and bubbles in poliſhed plates of glaſs, were bordered with the like fringes of coloured light. And if plates of looking-glaſs, ſloped off near the edges with a diamond-cut, be held in the ſame beam of light; the light, which paſſes through the parallel planes of the glaſs, will be bordered with the like

fringes of colours, where thoſe planes meet with the diamond-cut; and by this means there will ſometimes appear four or five fringes of colours. Let AB, CD [in *fig.* 2.] repreſent the parallel planes of a looking-glaſs, and BD the plane of the diamond-cut, making at B a very obtuſe angle with the plane AB. And let all the light, between the rays ENI and FBM, paſs directly through the parallel planes of the glaſs, and fall upon the paper between I and M; and all the light between the rays GO and HD be refracted by the oblique plane of the diamond-cut BD, and fall upon the paper between K and L; and the light which paſſes directly through the parallel planes of the glaſs, and falls upon the paper between I and M, will be bordered with three or more fringes at M.

Rays of Light.

So by looking on the ſun through a feather or black ribband held cloſe to the eye, ſeveral rain-bows will appear; the ſhadows, which the fibres or threads caſt on the *Tunica Retina*, being bordered with the like fringes of colours.

Obſ. 3. When the hair was twelve feet diſtant from this hole, and its ſhadow fell obliquely upon a flat white ſcale of inches and parts of an inch, placed half a foot beyond it, and alſo when the ſhadow fell perpendicularly upon the ſame ſcale, placed nine feet beyond it; I meaſured the breadth of the ſhadow and fringes as accurately as I could, and found them in parts of an inch as follows.

Inflexion of the

At the diſtance of	half a foot	nine feet
The breadth of the ſhadow	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{9}$
The breadth between the middles of the brighteſt light of the innermoſt fringes on either ſide the ſhadow	$\frac{1}{38}$ or $\frac{1}{39}$	$\frac{7}{30}$
The breadth between the middles of the brighteſt light of the middlemoſt fringes on either ſide the ſhadow	$\frac{1}{23\frac{1}{2}}$	$\frac{4}{17}$
The breadth between the middles of the brighteſt light of the outmoſt fringes on either ſide the ſhadow	$\frac{1}{18}$ or $\frac{1}{18\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{10}$
The diſtance between the middles of the brighteſt light of the firſt and ſecond fringes	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{21}$
The diſtance between the middles of the brighteſt light of the ſecond and third fringes	$\frac{1}{170}$	$\frac{1}{31}$
The breadth of the luminous part (Green, White, Yellow and Red) of the firſt fringe	$\frac{1}{170}$	$\frac{1}{31}$
The breadth of the darker ſpace between the firſt and ſecond fringes	$\frac{1}{340}$	$\frac{1}{45}$
The breadth of the luminous part of the ſecond fringe	$\frac{1}{290}$	$\frac{1}{55}$
The breadth of the darker ſpace between the ſecond and third fringes	$\frac{1}{1450}$	$\frac{1}{83}$

Theſe meaſures I took, by letting the ſhadow of the hair, at half a foot diſtance, fall ſo obliquely on the ſcale, as to appear twelve times broader, than when it fell perpendicularly on it at the ſame diſtance, and ſetting down in this Table the twelfth part of the meaſures I then took.

Obſ. 4. When the ſhadow and fringes were caſt obliquely upon a ſmooth white body, and that body was removed farther and farther from the hair, the Firſt fringe began to appear, and look brighter than the reſt of the light, at the diſtance of leſs than a quarter of an inch from the hair; and the dark line, or ſhadow, between that and the Second fringe, began to appear at a leſs diſtance from the hair than that of the third part of an inch. The Second fringe began to appear, at a diſtance from the hair of leſs than half an inch; and the ſhadow between that and the third fringe, at a diſtance leſs than an inch; and the Third fringe, at a diſtance leſs than three inches. At greater diſtances they became much more ſenſible, but kept very nearly the ſame proportion of their breadths and intervals, which they had at their firſt appearing. For the diſtance between the middle of the Firſt and the

the middle of the Second fringe, was to the diſtance between the middle of the Second and middle of the Third fringe, as three to two, or ten to ſeven. And the laſt of theſe two diſtances was equal to the breadth of the bright light or luminous part of the Firſt fringe. And this breadth was to the breadth of the bright light of the Second fringe as ſeven to four; and to the dark interval of the Firſt and Second fringe as three to two; and to the like dark interval between the Second and Third, as two to one. For the breadths of the fringes ſeemed to be in the progreſſion of the numbers 1, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{5}}$, and their intervals to be in the ſame progreſſion with them; that is, the fringes and their intervals together to be in the continual progreſſion of the numbers 1, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{5}}$, or thereabouts. And theſe proportions held the ſame, very nearly, at all diſtances from the hair; the dark intervals of the fringes being as broad, in proportion to the breadth of the fringes, at their firſt appearance, as afterwards at great diſtances from the hair, though not ſo dark and diſtinct. Rays of Light.

Obſ. 5. The ſun ſhining into my darkened chamber, through a hole a quarter of an inch broad; I placed at the diſtance of two or three feet from the hole a ſheet of paſte-board, which was blackened all over on both ſides, and in the middle of it had a hole, about three quarters of an inch ſquare, for the light to paſs through. And behind the hole I faſtened to the paſte-board with pitch the blade of a ſharp knife, to intercept ſome part of the light, which paſſed through the hole. The planes of the paſte-board and blade of the knife were parallel to one another, and perpendicular to the rays. And when they were ſo placed, that none of the ſun's light fell on the paſteboard, but all of it paſſed through the hole to the knife, and there part of it fell upon the blade of the knife, and part of it paſſed by its edge: I let this part of the light, which paſſed by, fall on a white paper two or three feet beyond the knife; and there ſaw two ſtreams of faint light ſhoot out both ways from the beam of light into the ſhadow, like the tails of comets. But becauſe the ſun's direct light, by its brightneſs upon the paper, obſcured theſe faint ſtreams, ſo that I could ſcarce ſee them; I made a little hole in the midſt of the paper, for that light to paſs through, and fall on a black cloth behind

Inflexion of the

behind it; and then I ſaw the two ſtreams plainly. They were like one another, and pretty nearly equal in length and breadth, and quantity of light. Their light, at that end next the ſun's direct light, was pretty ſtrong for the ſpace of about a quarter of an inch, or half an inch; and in all its progreſs from that direct light decreaſed gradually, till it became inſenſible. The whole length of either of theſe ſtreams, meaſured upon the paper at the diſtance of three feet from the knife, was about ſix or eight inches; ſo that it ſubtended an angle, at the edge of the knife, of about 10 or 12, or at moſt 14 degrees. Yet ſometimes I thought I ſaw it ſhoot three or four degrees farther; but with a light ſo very faint that I could ſcarce perceive it, and ſuſpected it might (in ſome meaſure at leaſt) ariſe from ſome other cauſe, than the two ſtreams did. For placing my eye in that light, beyond the end of that ſtream which was behind the knife, and looking towards the knife, I could ſee a line of light upon its edge; and that not only when my eye was in the line of the ſtreams, but alſo when it was without that line, either towards the point of the knife, or towards the handle. This line of light appeared contiguous to the edge of the knife, and was narrower than the light of the innermoſt fringe, and narroweſt when my eye was fartheſt from the direct light; and therefore ſeemed to paſs between the light of that fringe and the edge of the knife; and that which paſſed neareſt the edge, to be moſt bent, though not all of it.

Obſ. 6 I placed another knife by this, ſo that their edges might be parallel, and look towards one another; and that the beam of light might fall upon both the knives, and ſome part of it paſs between their edges. And when the diſtance of their edges was about the 400th part of an inch, the ſtream parted in the middle, and left a ſhadow between the two parts. This ſhadow was ſo black and dark, that all the light which paſſed between the knives ſeemed to be bent, and turned aſide to the one hand or to the other. And as the knives ſtill approached one another, the ſhadow grew broader, and the ſtreams ſhorter at their inward ends which were next the ſhadow, until, upon the contact

tact of the knives, the whole light vaniſhed, leaving its place to the ſhadow. Rays of Light.

And hence I gather, that the light which is leaſt bent, and goes to the inward ends of the ſtreams, paſſes by the edges of the knives at the greateſt diſtance; and this diſtance, when the ſhadow begins to appear between the ſtreams, is about the 800th part of an inch. And the light, which paſſes by the edges of the knives at diſtances ſtill leſs and leſs, is more and more bent, and goes to thoſe parts of the ſtreams which are farther and farther from the direct light; becauſe when the knives approach one another till they touch, thoſe parts of the ſtreams vaniſh laſt, which are fartheſt from the direct light.

Obſ. 7. In the fifth Obſervation the fringes did not appear; but, by reaſon of the breadth of the hole in the window, became ſo broad as to run into one another, and, by joining, to make one continued light in the beginning of the ſtreams. But in the ſixth, as the knives approached one another, a little before the ſhadow appeared between the two ſtreams, the fringes began to appear on the inner ends of the ſtreams on either ſide of the direct light; three on one ſide, made by the edge of one knife; and three on the other ſide, made by the edge of the other knife. They were diſtincteſt, when the knives were placed at the greateſt diſtance from the hole in the window; and ſtill became more diſtinct, by making the hole leſs; inſomuch that I could ſometimes ſee a faint lineament of a fourth fringe, beyond the three above-mentioned. And as the knives continually approached one another, the fringes grew diſtincter and larger, until they vaniſhed. The outmoſt fringe vaniſhed firſt, and the middlemoſt next, and the innermoſt laſt. And after they were all vaniſhed, and the line of light which was in the middle between them was grown very broad, enlarging itſelf on both ſides into the ſtreams of light deſcribed in the fifth Obſervation; the above-mentioned ſhadow began to appear in the middle of this line, and divide it along the middle into two lines of light, and increaſed until the whole light vaniſhed. This enlargement of the fringes was ſo great, that the rays, which go to the innermoſt fringe, ſeemed to

Inflexion of the

be bent above twenty times more when this fringe was ready to vaniſh, than when one of the knives was taken away.

And from this and the former Obſervation compared, I gather, that the light of the Firſt fringe paſſed by the edge of the knife, at a diſtance greater than the 800th part of an inch; and the light of the Second fringe paſſed by the edge of the knife, at a greater diſtance than the light of the firſt fringe did; and that of the Third, at a greater diſtance than that of the ſecond; and that of the ſtreams of light, deſcribed in the fifth and ſixth Obſervations, paſſed by the edges of the knives at leſs diſtances than that of any of the fringes.

Obſ. 8. I cauſed the edges of two knives to be ground truly ſtrait; and pricking their points into a board, ſo that their edges might look towards one another, and, meeting near their points, contain a rectilinear angle; I faſtened their handles together with pitch, to make this angle invariable. The diſtance of the edges of the knives from one another, at the diſtance of four inches from the angular point, where the edges of the knives met, was the eighth part of an inch; and therefore the angle, contained by the edges, was about 1 degree 54′. The knives, thus fixed together, I placed in a beam of the ſun's light, let into my darkened chamber through a hole the 42d part of an inch wide, at the diſtance of 10 or 15 feet from the hole; and let the light, which paſſed between their edges, fall very obliquely upon a ſmooth white ruler at the diſtance of half an inch, or an inch, from the knives; and there ſaw the fringes, made by the two edges of the knives, run along the edges of the ſhadows of the knives, in lines parallel to thoſe edges, without growing ſenſibly broader; till they met in angles equal to the angle contained by the edges of the knives; and where they met and joined, they ended without croſſing one another. But if the ruler was held at a much greater diſtance from the knives, the fringes, where they were farther from the place of their meeting, were a little narrower, and became ſomething broader and broader, as they approached nearer and nearer to one another; and after they met they croſſed one another, and then became much broader than before.

Whence

Rays of Light.

Whence I gather, that the diſtances, at which the fringes paſs by the knives, are not increaſed nor altered by the approach of the knives; but the angles, in which the rays are there bent, are much increaſed by that approach; and that the knife, which is neareſt any ray, determines which way the ray ſhall be bent, and the other knife increaſes the bent.

Obſ. 9. When the rays fell very obliquely upon the ruler, at the diſtance of the third part of an inch from the knives; the dark line between the firſt and ſecond fringe of the ſhadow of one knife, and the dark line between the firſt and ſecond fringe of the ſhadow of the other knife, met with one another at the diſtance of the fifth part of an inch from the end of the light, which paſſed between the knives at the concourſe of their edges. And therefore the diſtance of the edges of the knives, at the meeting of theſe dark lines, was the 160th part of an inch. For as four inches to the eighth part of an inch, ſo is any length of the edges of the knives, meaſured from the point of their concourſe, to the diſtance of the edges of the knives at the end of that length; and ſo is the fifth part of an inch to the 160th part. So then the dark lines above-mentioned meet in the middle of the light, which paſſes between the knives, where they are diſtant the 160th part of an inch; and the one half of that light paſſes by the edge of one knife, at a diſtance not greater than the 320th part of an inch, and, falling upon the paper, makes the fringes of the ſhadow of that knife; and the other half paſſes by the edge of the other knife, at a diſtance not greater than the 320th part of an inch, and, falling upon the paper, makes the fringes of the ſhadow of the other knife. But if the paper be held at a diſtance from the knives greater than the third part of an inch, the dark lines above-mentioned meet at a greater diſtance than the fifth part of an inch from the end of the light, which paſſed between the knives at the concourſe of their edges; and therefore the light, which falls upon the paper where thoſe dark lines meet, paſſes between the knives, where their edges are diſtant above the 160th part of an inch.

For at another time, when the two knives were diſtant eight feet and five inches from the little hole in the window, made with a

Inflexion of the

ſmall pin as above; the light which fell upon the paper, where the aforeſaid dark lines met, paſſed between the knives, where the diſtance between their edges was as in the following Table, when the diſtance of the paper from the knives was alſo as follows.

Diſtances of the Paper from the Knives in Inches.	Diſtance between the edges of the Knives in milleſimal parts of an Inch.
$1\frac{1}{5}$.	0'012
$3\frac{1}{5}$.	0'020
$8\frac{1}{5}$.	0'034
32.	0'057
96.	0'081
131.	0'087

And hence I gather that the light, which makes the fringes upon the paper, is not the ſame light at all diſtances of the paper from the knives; but when the paper is held near the knives, the fringes are made by light, which paſſes by the edges of the knives at a leſs diſtance, and is more bent, than when the paper is held at a greater diſtance from the knives.

Obſ. 10. When the fringes of the ſhadows of the knives fell perpendicularly upon a paper, at a great diſtance from the knives, they were in the form of hyperbolas, and their dimenſions were as follows. Let CA, CB [in *fig.* 3.] repreſent lines drawn upon the paper parallel to the edges of the knives, and between which all the light would fall, if it paſſed between the edges of the knives without reflexion; DE, a right line drawn through C, making the angles ACD, BCE, equal to one another, and terminating all the light, which falls upon the paper from the point where the edges of the knives meet; *eis*, *fkt*, and *glv*, three hyperbolical lines, repreſenting the *terminus* of the ſhadow of one of the knives, the dark line between the firſt and ſecond fringes of that ſhadow, and the dark line between the ſecond and third fringes of the ſame ſhadow; *xip*, *ykq* and *zlr*, three other hyperbolical lines, repreſenting the *terminus* of the ſhadow of the other knife, the dark line between the firſt and ſecond fringes of that ſhadow, and the dark line between the ſecond and third fringes of the ſame ſhadow. And conceive that theſe three hyperbolas are like and equal to the former three; and croſs them in the points

Rays of Light.

points *i*, *k* and *l*; and that the ſhadows of the knives are terminated, and diſtinguiſhed from the firſt luminous fringes, by the lines *eis* and *xip*, until the meeting and croſſing of the fringes; and then thoſe lines croſs the fringes in the form of dark lines, terminating the firſt luminous fringes within ſide, and diſtinguiſhing them from another light, which begins to appear at *i*, and illuminates all the triangular ſpace, *ip*DE*s*, comprehended by theſe dark lines, and the right line DE. Of theſe hyperbolas one aſymptote is the line DE, and the other aſymptotes are parallel to the lines CA and CB. Let *rv* repreſent a line, drawn any where upon the paper, parallel to the aſymptote DE; and let this line croſs the right lines AC in *m*, and BC in *n*, and the ſix dark hyperbolical lines in *p*, *q*, *r*; *s*, *t*, *v*; and by meaſuring the diſtances *ps*, *qt*, *rv*, and thence collecting the lengths of the ordinates *np*, *nq*, *nr*, or *ms*, *mt*, *mv*; and doing this at ſeveral diſtances of the line *rv* from the aſymptote DE; you may find as many points of theſe hyperbolas as you pleaſe, and thereby know that theſe curve lines are hyperbolas differing little from the Conical hyperbola. And by meaſuring the lines C*i*, C*k*, C*l*, you may find other points of theſe curves.

For inſtance, when the knives were diſtant from the hole in the window ten feet, and the paper from the knives nine feet, and the angle contained by the edges of the knives, to which the angle ACB is equal, was ſubtended by a chord which was to the radius as 1 to 32, and the diſtance of the line *rv* from the aſymptote DE was half an inch: I meaſured the lines *ps*, *qt*, *rv*, and found them 0'35, 0'65, 0'98 inches reſpectively; and by adding to their halfs the line $\frac{1}{2}mn$ (which here was the 128th part of an inch, or 0'0078 inches) the ſums, *np*, *nq*, *nr*, were 0'1828, 0'3328, 0'4978 inches. I meaſured alſo the diſtances of the brighteſt parts of the fringes, which run between *pq* and *st*, *qr* and *tv*, and next beyond *r* and *v*, and found them 0'5, 0'8, and 1'17 inches.

Obſ. 11. The ſun ſhining into my darkened room, through a ſmall round hole made in a plate of lead with a ſlender pin as above; I placed at the hole a priſm to refract the light, and form on the oppoſite wall the ſpectrum of colours, deſcribed in the third

Inflexion of the

third Experiment of the firſt Book. And then I found that the ſhadows of all bodies, held in the coloured light between the priſm and the wall, were bordered with fringes of the colour of that light, in which they were held. In the full Red light they were totally Red, without any ſenſible Blue or Violet; and in the deep Blue light they were totally Blue, without any ſenſible Red or Yellow; and ſo in the Green light they were totally Green, excepting a little Yellow and Blue, which were mixed in the Green light of the priſm. And comparing the fringes made in the ſeveral coloured lights, I found that thoſe made in the Red light were largeſt, thoſe made in the Violet were leaſt, and thoſe made in the Green were of a middle bigneſs. For the fringes with which the ſhadow of a man's hair were bordered, being meaſured croſs the ſhadow, at the diſtance of ſix inches from the hair; the diſtance, between the middle and moſt luminous part of the Firſt or innermoſt fringe on one ſide of the ſhadow, and that of the like fringe on the other ſide of the ſhadow, was, in the full Red light, $\frac{1}{37\frac{1}{2}}$ of an inch; and, in the full Violet, $\frac{1}{46}$. And the like diſtance, between the middle and moſt luminous parts of the Second fringes on either ſide the ſhadow, was, in the full Red light, $\frac{1}{22}$; and, in the Violet, $\frac{1}{27}$ of an inch. And theſe diſtances of the fringes held the ſame proportion, at all diſtances from the hair, without any ſenſible variation.

So then the rays, which made theſe fringes in the Red light, paſſed by the hair at a greater diſtance, than thoſe did which made the like fringes in the Violet; and therefore the hair, in cauſing theſe fringes, acted alike upon the Red light, or leaſt refrangible rays, at a greater diſtance, and upon the Violet, or moſt refrangible rays, at a leſs diſtance; and by thoſe actions diſpoſed the Red light into larger fringes, and the Violet into ſmaller, and the lights of intermediate colours into fringes of intermediate bigneſſes, without changing the colour of any ſort of light.

When therefore the hair, in the firſt and ſecond of theſe Obſervations, was held in the white beam of the Sun's light, and caſt a ſhadow, which was bordered with three fringes of coloured light; thoſe colours aroſe not from any new Modifications impreſſed upon the rays of light by the hair; but only from the various

rious Inflexions, whereby the ſeveral ſorts of rays were ſeparated from one another, which before ſeparation, by the mixture of all their colours, compoſed the white beam of the ſun's light; but whenever ſeparated compoſe lights of the ſeveral colours, which they are originally diſpoſed to exhibit. In this 11th Obſervation, where the colours are ſeparated before the light paſſes by the hair, the leaſt refrangible rays, which when ſeparated from the reſt make Red, were inflected at a greater diſtance from the hair; ſo as to make three Red fringes at a greater diſtance from the middle of the ſhadow of the hair: and the moſt refrangible rays, which when ſeparated make Violet, were inflected at a leſs diſtance from the hair; ſo as to make three Violet fringes, at a leſs diſtance from the middle of the ſhadow of the hair: and other rays, of intermediate degrees of refrangibility, were inflected at intermediate diſtances from the hair; ſo as to make fringes of intermediate colours, at intermediate diſtances from the middle of the ſhadow of the hair. And in the ſecond Obſervation, where all the colours are mixed in the white light which paſſes by the hair, theſe colours are ſeparated by the various Inflexions of the rays; and the fringes, which they make, appear all together; and the Innermoſt fringes, being contiguous, make one broad fringe compoſed of all the colours in due order; the Violet lying on the inſide of the fringe next the ſhadow; the Red, on the outſide fartheſt from the ſhadow; and the Blue, Green and Yellow, in the middle. And, in like manner, the middlemoſt fringes of all the colours lying in order, and being contiguous, make another broad fringe compoſed of all the colours; and the outmoſt fringes of all the colours lying in order, and being contiguous, make a third broad fringe compoſed of all the colours. Theſe are the three fringes of coloured light, with which the ſhadows of all bodies are bordered in the ſecond Obſervation.

Rays of Light.

When I made the foregoing Obſervations, I deſigned to repeat moſt of them with more care and exactneſs; and to make ſome new ones, for determining the manner how the rays of light are bent in their paſſage by bodies, for making the fringes of colours with the dark lines between them. But I was then interrupted, and cannot now think of taking theſe things into further conſideration.

deration. And ſince I have not finiſhed this part of my deſign, I ſhall conclude with propoſing only ſome Queries, in order to a farther ſearch to be made by others.

Queries.

Query 1. Do not bodies act upon light at a diſtance; and by their action bend its rays; and is not this action (*cæteris paribus*) ſtrongeſt at the leaſt diſtance?

Qu. 2. Do not the rays which differ in refrangibility differ alſo in flexibility; and are they not by their different inflexions ſeparated from one another, ſo as after ſeparation to make the colours in the three fringes above deſcribed? And after what manner are they inflected to make thoſe fringes?

Qu. 3. Are not the rays of light, in paſſing by the edges and ſides of bodies, bent ſeveral times backwards and forwards, with a motion like that of an eel? And do not the three fringes of coloured light above-mentioned, ariſe from three ſuch bendings?

Qu. 4. Do not the rays of light, which fall upon bodies and are reflected or refracted, begin to bend before they arrive at the bodies; and are they not Reflected, Refracted and Inflected by one and the ſame principle, acting variouſly in various circumſtances?

Qu. 5. Do not bodies and light act mutually upon one another; that is to ſay, bodies upon light in emitting, reflecting, refracting and inflecting it; and light upon bodies, for heating them, and putting their parts into a vibrating motion, wherein heat conſiſts?

Qu. 6. Do not Black bodies conceive heat more eaſily from light than thoſe of other colours do, by reaſon that the light falling on them is not reflected outwards; but enters the bodies, and is often reflected and refracted within them, until it be ſtifled and loſt?

Qu. 7. Is not the ſtrength and vigour of the action between light and Sulphureous bodies obſerved above, one reaſon why Sulphureous bodies take fire more readily, and burn more vehemently, than other bodies do?

Qu.

(a) —— *their Parts*] Nothing of what follows of this eighth Query was in the firſt Edition. From the words *And do not all bodies*, to the words *Oil of anniſeeds*, was added (with ſome ſmall variety noted below) in the firſt Latin edition of Dr. *Clarke*. And the remaining part firſt appeared

Qu. 8. Do not all Fixed bodies, when heated beyond a certain degree, emit light and ſhine; and is not this emiſſion performed by the vibrating motions of their Parts (a). And do not all bodies, which abound with Terreſtrial parts, and eſpecially with Sulphureous ones, emit light, as often as thoſe Parts are ſufficiently agitated; whether that agitation be made by heat, or by friction, or percuſſion, or putrefaction, or by any vital motion, or any other cauſe? As for inſtance; ſea water in a raging ſtorm; quick-ſilver agitated *in Vacuo*; the back of a cat, or neck of a horſe obliquely ſtruck or rubbed in a dark place; wood, fleſh and fiſh, while they putrefy; vapours, ariſing from putrefied waters, uſually called *Ignes Fatui*; ſtacks of moiſt hay, or corn, growing hot by fermentation; glow-worms, and the eyes of ſome animals, by vital motions (b); the vulgar *Phoſphorus* (c) agitated by the attrition of any body, or by the Acid particles of the air; ambar (d), and ſome diamonds by ſtriking, preſſing or rubbing them; ſcrapings of ſteel, ſtruck off with a flint; iron, hammered very nimbly till it become ſo hot as to kindle ſulphur thrown upon it; the axle-trees of chariots taking fire by the rapid rotation of the wheels; and ſome liquors mixed with one another, whoſe particles come together with an impetus, as oil of vitriol diſtilled from its weight of nitre, and then mixed with twice its weight of oil of anniſeeds. So alſo a globe of glaſs about 8 or 10 inches in diameter, being put into a frame where it may be ſwiftly turned round its axis, will in turning ſhine, where it rubs againſt the palm of one's hand applied to it: and if at the ſame time a piece of white paper, or a white cloth, or the end of one's finger, be held at the diſtance of about a quarter of an inch, or half an inch, from that part of the glaſs where it is moſt in motion, the Electrick vapour, which is excited by the friction of the glaſs againſt the hand, will, by daſhing againſt the white paper, cloth or finger, be put into ſuch an agitation as to emit light; and make the white paper, cloth or finger, appear lucid like a glow-

Query VIII. Of the emiſſion of Light by heated bodies.

peared in the ſecond *Engliſh* edition.

(b) — *Glow-worms*—*by vital motions.*] Not in Dr. *Clarke's* firſt *Latin*.

(c) — *Phoſphorus.*] Phoſphorus Bononienſis, radiis lumini's agitatus; Phoſphorus vulgaris, &c. Dr. *Clarke's* firſt *Latin*.

(d) *Ambar.*] Not in Dr. *Clarke's* firſt *Latin*.

Queries IX, X.

worm; and in ruſhing out of the glaſs, will ſometimes puſh againſt the finger ſo as to be felt. And the ſame things have been found by rubbing a long and large cylinder of glaſs or ambar with a paper held in one's hand, and continuing the Friction till the glaſs grew warm.

Of the form of Fire.

Qu. 9. Is not Fire a body heated ſo hot, as to emit light copiouſly? For what elſe is a red hot iron than fire? And what elſe is a burning coal than red hot wood?

—of Flame.

Qu. 10. Is not Flame a vapour, fume or exhalation heated red hot, that is, ſo hot as to ſhine? For bodies do not flame without emitting a copious fume, and this fume burns in the flame. The *Ignis Fatuus* is a vapour ſhining without heat; and is there not the ſame difference between this vapour and flame, as between rotted wood ſhining without heat and burning coals of fire? In diſtilling hot ſpirits, if the head of the ſtill be taken off, the vapour, which aſcends out of the ſtill, will take fire at the flame of a candle, and turn into flame, and the flame will run along the vapour from the candle to the ſtill. Some bodies heated by motion or fermentation, if the heat grow intenſe, fume copiouſly; and if the heat be great enough, the fumes will ſhine, and become flame. Metals in fuſion do not flame for want of a copious fume, except ſpelter, which fumes copiouſly, and thereby flames. All flaming bodies, as oil, tallow, wax, wood, foſſil coals, pitch, ſulphur, by flaming waſte and vaniſh into burning ſmoke; which ſmoke, if the flame be put out, is very thick and viſible, and ſometimes ſmells ſtrongly, but in the flame loſes its ſmell by burning; and, according to the nature of the ſmoke, the flame is of ſeveral colours; as that of ſulphur, blue; that of copper opened with ſublimate, green; that of tallow, yellow; that of camphire, white (e). Smoke paſſing through flame cannot but grow red hot; and red hot ſmoke can have no other appearance than that of flame (f). When gun-powder takes fire, it goes away into flaming ſmoke. For the charcoal and ſulphur eaſily take fire,

(e) — *that of Camphire white.*] Not in the firſt edition.

(f) —*flame.*] What follows of this 10th Query was not in the firſt edition, but appeared in the firſt *Latin* of Dr. *Clarke*.

(g) — *which ariſe from them.*] What follows of this 11th Query was not in the firſt edition, but

fire, and ſet fire to the nitre; and the ſpirit of the nitre being thereby rarified into vapour, ruſhes out with exploſion much after the manner that the vapour of water ruſhes out of an æolipile; the ſulphur alſo, being volatile, is converted into vapour, and augments the exploſion. And the Acid vapour of the ſulphur (namely, that which diſtills under a bell into oil of ſulphur) entering violently into the Fixed body of the nitre, ſets looſe the ſpirit of the nitre, and excites a greater fermentation; whereby the heat is farther augmented, and the fixed body of the nitre is alſo rarified into fume, and the exploſion is thereby made more vehement and quick. For if ſalt of Tartar be mixed with gun-powder, and that mixture be warmed till it takes fire; the exploſion will be more violent and quick than that of gun-powder alone: which cannot proceed from any other cauſe than the action of the vapour of the gun-powder upon the ſalt of tartar, whereby that ſalt is rarified. The exploſion of gun-powder ariſes therefore from the violent action, whereby all the mixture, being quickly and vehemently heated, is rarified and converted into fume and vapour: which vapour, by the violence of that action, becoming ſo hot as to ſhine, appears in the form of flame.

Queries X, XI.

Formal cauſe of the Sun.

Qu. 11. Do not Great bodies conſerve their heat the longeſt, their parts heating one another; and may not Great denſe and Fixed bodies, when heated beyond a certain degree, emit light ſo copiouſly, as by the emiſſion and re-action of its light, and the reflexions and refractions of its rays within its pores, to grow ſtill hotter, till it comes to a certain period of heat, ſuch as is that of the ſun? And are not the ſun and fixed ſtars great earths vehemently hot; whoſe heat is conſerved by the greatneſs of the bodies, and the mutual action and re-action between them, and the light which they emit; and whoſe parts are kept from fuming away, not only by their Fixity, but alſo by the vaſt weight and denſity of the atmoſpheres incumbent upon them, and very ſtrongly compreſſing them, and condenſing the vapours and exhalations which ariſe from them (g)? For if water be made

but appeared in the firſt *Latin* of Dr. *Clarke*, except that we find nothing there anſwering to the final words, *and a very ſmall quantity of vapours and exhalations*, which were firſt inſerted in the ſecond *Engliſh*.

Queries xi, xii.

warm in any pellucid veſſel emptied of air, that water in the *vacuum* will bubble and boil as vehemently, as it would in the open air in a veſſel ſet upon the fire till it conceives a much greater heat. For the weight of the incumbent atmoſphere keeps down the vapours, and hinders the water from boiling, until it grow much hotter than is requiſite to make it boil *in Vacuo*. Alſo a mixture of tin and lead, being put upon a red hot iron *in Vacuo*, emits a fume and flame; but the ſame mixture in the open air, by reaſon of the incumbent atmoſphere, does not ſo much as emit any fume, which can be perceived by ſight. In like manner the great weight of the atmoſphere, which lies upon the globe of the ſun, may hinder bodies there from riſing up and going away from the ſun, in the form of vapours and fumes; unleſs by means of a far greater heat, than that which, on the ſurface of the earth, would very eaſily turn them into vapours and fumes. And the ſame great weight may condenſe thoſe vapours and exhalations, as ſoon as they ſhall at any time begin to aſcend from the ſun, and make them preſently fall back again into him; and by that action increaſe his heat, much after the manner that in our earth the air increaſes the heat of a culinary fire. And the ſame weight may hinder the globe of the ſun from being diminiſhed, unleſs by the emiſſion of light, and a very ſmall quantity of vapours and exhalations.

Of the ſenſe of Sight.

Qu. 12. Do not the rays of light, in falling upon the bottom of the eye, excite vibrations in the *Tunica Retina*? Which vibrations, being propagated along the ſolid fibres of the Optick nerves into the brain, cauſe the ſenſe of ſeeing. For becauſe denſe bodies conſerve their heat a long time, and the denſeſt bodies conſerve their heat the longeſt; the vibrations of their parts are of a laſting nature, and therefore may be propagated along ſolid fibres of uniform denſe matter to a great diſtance, for conveying into the brain the impreſſions made upon all the organs of ſenſe. For that motion, which can continue long in one and the ſame part of a body, can be propagated a long way from one part to another, ſuppoſing the body homogeneal, ſo that the motion may not be reflected, refracted, interrupted or diſordered by any unevenneſs of the body.

Qu.

Queries xiii, xiv, xv. Of the perception of different colours.

Qu. 13. Do not ſeveral ſorts of rays make vibrations of ſeveral bigneſſes; which according to their bigneſſes excite ſenſations of ſeveral colours: much after the manner that the vibrations of the air, according to their ſeveral bigneſſes, excite ſenſations of ſeveral Sounds? And particularly do not the moſt refrangible rays excite the ſhorteſt vibrations, for making a ſenſation of deep Violet; the leaſt refrangible, the largeſt, for making a ſenſation of deep Red; and the ſeveral intermediate ſorts of rays, vibrations of ſeveral intermediate bigneſſes, to make ſenſations of the ſeveral intermediate colours?

Harmony of colours.

Qu. 14. May not the harmony and diſcord of colours, ariſe from the proportions of the vibrations propagated through the fibres of the Optick nerves into the brain; as the harmony and diſcord of ſounds ariſe from the proportions of the vibrations of the air? For ſome colours, if they be viewed together, are agreeable to one another, as thoſe of gold and Indigo, and others diſagree.

Reaſon of ſingle Viſion.

Qu. 15. Are not the ſpecies of objects, ſeen with both eyes, united where the Optick nerves meet before they come into the brain; the fibres on the right ſide of both nerves uniting there, and after union going thence into the brain, in the nerve which is on the right ſide of the head; and the fibres on the left ſide of both nerves uniting in the ſame place, and after union going into the brain, in the nerve which is on the left ſide of the head; and theſe two nerves meeting in the brain, in ſuch a manner that their fibres make but one entire ſpecies or picture; half of which, on the right ſide of the ſenſorium, comes from the right ſide of both eyes, through the right ſide of both Optick nerves, to the place where the nerves meet, and from thence on the right ſide of the head into the brain; and the other half, on the left ſide of the ſenſorium, comes in like manner from the left ſide of both eyes. For the Optick nerves of ſuch animals, as look the ſame way with both eyes, as of men, dogs, ſheep, oxen, &c. meet before they come into the brain; but the Optick nerves of ſuch animals as do not look the ſame way with both eyes, as of fiſhes and of the chameleon, do not meet, if I am rightly informed.

Queries XVI, XVII. Duration of the vibrations of the Optic Nerve, which produce the ſenſe of Sight.

Qu. 16. When a man in the dark preſſes either corner of his eye with his finger, and turns his eye away from his finger, he will ſee a circle of colours like thoſe in the feather of a peacock's tail. If the eye and the finger remain quiet, theſe colours vaniſh in a ſecond minute of time; but if the finger be moved with a quavering motion, they appear again ([h]). Do not theſe colours ariſe from ſuch motions, excited in the bottom of the eye, by the preſſure and motion of the finger, as at other times are excited there by light for cauſing viſion? And do not the motions once excited continue about a ſecond of time before they ceaſe ([i])? And when a man by a ſtroke upon his eyes ſees a flaſh of light, are not the like motions excited in the *Retina* by the ſtroke ([k])? And when a coal of fire, moved nimbly in the circumference of a circle, makes the whole circumference appear like a circle of fire; is it not becauſe the motions excited in the bottom of the eye, by the rays of light, are of a laſting nature; and continue till the coal of fire, in going round, returns to its former place? And conſidering the laſtingneſs of the motions excited in the bottom of the eye by light, are they not of a vibrating nature?

Efficient cauſe of the fits of Tranſmiſſion and Reflexion.

Qu. 17. If a ſtone be thrown into ſtagnating water, the waves excited thereby continue ſome time to ariſe, in the place where the ſtone fell into the water, and are propagated from thence in concentrick circles, upon the ſurface of the water, to great diſtances. And the vibrations or tremors excited in the air by percuſſion, continue a little time to move from the place of percuſſion, in concentrick ſpheres, to great diſtances. And in like manner, when a ray of light falls upon the ſurface of any pellucid body, and is there refracted or reflected: may not waves of vibrations, or tremors, be thereby excited in the refracting or reflecting medium at the point of incidence; and continue to ariſe there, and to be propagated from thence, as long as they continue to ariſe and be propagated, when they are excited in the bottom of the eye by the preſſure or motion of the finger, or by the light which comes from the coal of fire in experiments abovementioned?

([h]) *If the eye—appear again.*] Not in the firſt edition, nor in Dr. *Clarke's* firſt *Latin*.
([i]) *And do not—before they ceaſe.*] Not in the firſt edition, nor in Dr. *Clarke's* firſt *Latin*.
([k]) *—Retina by the ſtroke.*] With theſe words the Book ends in the firſt edition. The remaining

mentioned? And are not theſe vibrations propagated from the point of incidence to great diſtances? And do they not overtake the rays of light, and by overtaking them ſucceſſively, do they not put them into the fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion deſcribed above? For if the rays endeavour to recede from the denſeſt part of the vibration, they may be alternately accelerated and retarded by the vibrations overtaking them.

Queries XVIII, XIX.

Qu. 18. If in two large tall cylindrical veſſels of glaſs inverted, two little thermometers be ſuſpended ſo as not to touch the veſſels, and the air be drawn out of one of theſe veſſels, and theſe veſſels, thus prepared, be carried out of a cold place into a warm one; the thermometer *in Vacuo* will grow warm as much, and almoſt as ſoon as the thermometer which is not *in Vacuo*: and when the veſſel is carried back into the cold place, the thermometer *in Vacuo* will grow cold, almoſt as ſoon as the other thermometer. Is not the heat of the warm room conveyed through the *Vacuum* by the vibrations of a much ſubtiler medium than air, which, after the air was drawn out, remained in the *Vacuum*? And is not this medium the ſame with that medium by which light is refracted or reflected, and by whoſe vibrations light communicates heat to bodies, and is put into fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion? And do not the vibrations of this medium, in hot bodies, contribute to the intenſeneſs and duration of their heat? And do not hot bodies communicate their heat to contiguous cold ones, by the vibrations of this medium propagated from them into the cold ones? And is not this medium exceedingly more rare and ſubtile than the air, and exceedingly more elaſtick and active? And doth it not readily pervade all bodies? And is it not (by its elaſtick force) expanded through all the heavens?

Probability of a Medium more ſubtile than Air.

Qu. 19. Doth not the refraction of light proceed from the different denſity of this æthereal medium in different places, the light receding always from the denſer parts of the medium? And is not the denſity thereof greater in free and open ſpaces,

which may be the mechanical efficient of refraction.

ing paragraph of this Query, and the eight Queries that immediately follow, namely, the 17th, 18th, 19th, 20th, 21ſt, 22d, 23d, 24th, firſt appeared in the ſecond *Engliſh* edition, and are not found in Dr. *Clarke's* firſt *Latin*.

void

Queries xx, xxi.

void of air and other groſſer bodies, than within the pores of water, glaſs, cryſtal, gems, and other compact bodies? For when light paſſes through glaſs or cryſtal, and, falling very obliquely upon the farther ſurface thereof, is totally reflected; the total reflexion ought to proceed rather from the Denſity and Vigour of the medium without and beyond the glaſs, than from the Rarity and Weakneſs thereof.

This medium denſer in empty ſpaces than within denſe bodies.

Qu. 20. Doth not this æthereal medium, in paſſing out of water, glaſs, cryſtal, and other compact and denſe bodies into empty ſpaces, grow denſer and denſer by degrees; and by that means refract the rays of light not in a point, but by bending them gradually in curve lines? And doth not the gradual condenſation of this medium extend to ſome diſtance from the bodies; and thereby cauſe the inflexions of the rays of light, which paſs by the edges of denſe bodies, at ſome diſtance from the bodies?

The mechanical efficient of Gravity.

Qu. 21. Is not this medium much rarer within the denſe bodies of the ſun, ſtars, planets and comets, than in the empty celeſtial ſpaces between them? And in paſſing from them to great diſtances, doth it not grow denſer and denſer perpetually; and thereby cauſe the Gravity of thoſe great bodies towards one another, and of their parts towards the bodies; every body endeavouring to go from the denſer parts of the medium towards the rarer? For if this medium be rarer within the ſun's body than at its ſurface, and rarer there than at the hundredth part of an inch from its body, and rarer there than at the fiftieth part of an inch from its body, and rarer there than at the orb of *Saturn*; I ſee no reaſon why the increaſe of denſity ſhould ſtop any where, and not rather be continued through all diſtances from the ſun to *Saturn*, and beyond. And though this increaſe of denſity may at great diſtances be exceeding ſlow, yet if the Elaſtick force of this medium be exceeding great, it may ſuffice to impel bodies from the denſer parts of the medium towards the rarer, with all that power which we call Gravity. And that the Elaſtick force of this medium is exceeding great, may be gathered from the ſwiftneſs of its vibrations. Sounds move about 1140 *Engliſh* feet in a ſecond minute of time; and in ſeven or eight minutes of time, they move about one hundred *Engliſh* miles. Light moves from

from the ſun to us in about ſeven or eight minutes of time; which diſtance is about 70000000 *Engliſh* miles, ſuppoſing the horizontal parallax of the ſun to be about 12″. And the vibrations or pulſes of this medium, that they may cauſe the alternate fits of eaſy Tranſmiſſion and eaſy Reflexion, muſt be ſwifter than light; and by conſequence above 700000 times ſwifter than ſounds. And therefore the Elaſtick force of this medium, in proportion to its denſity, muſt be above 700000 × 700000 (that is, above 490000000000) times greater than the Elaſtick force of the air is in proportion to its denſity. For the velocities of the pulſes of elaſtick mediums are in a ſubduplicate *ratio* of the elaſticities and the rarities of the mediums taken together.

Queries xxii, xxiii.

As attraction is ſtronger in ſmall magnets than in great ones, in proportion to their bulk; and gravity is greater in the ſurfaces of ſmall planets than in thoſe of great ones, in proportion to their bulk; and ſmall bodies are agitated much more by Electric Attraction than great ones; ſo the ſmallneſs of the rays of light may contribute very much to the power of the agent, by which they are refracted. And ſo if any one ſhould ſuppoſe that *æther*, like our air, may contain particles which endeavour to recede from one another (for I do not know what this *æther* is) and that its particles are exceedingly ſmaller than thoſe of air, or even than thoſe of light: the exceeding ſmallneſs of its particles may contribute to the greatneſs of the force, by which thoſe particles may recede from one another; and thereby make that medium exceedingly more rare and Elaſtick than air, and by conſequence exceedingly leſs able to reſiſt the motions of projectiles, and exceedingly more able to preſs upon groſs bodies, by endeavouring to expand itſelf.

Small reſiſtance of the æthereal medium.

Qu. 22. May not planets and comets, and all groſs bodies, perform their motions more freely, and with leſs reſiſtance in this æthereal medium than in any fluid, which fills all ſpace adequately without leaving any pores, and by conſequence is much denſer than quick-ſilver or gold? And may not its reſiſtance be ſo ſmall as to be inconſiderable? For inſtance; if this *æther* (for ſo I will call it) ſhould be ſuppoſed 700000 times more Elaſtick than our air, and above 700000 times more rare; its reſiſtance would

Queries XXIII, XXIV.

would be above 600000000 times leſs than that of water. And ſo ſmall a reſiſtance would ſcarce make any ſenſible alteration in the motions of the planets in ten thouſand years. If any one would aſk how a medium can be ſo rare, let him tell me how the air, in the upper parts of the atmoſphere, can be above an hundred thouſand times rarer than gold. Let him alſo tell me, how an Electrick body can by friction emit an exhalation ſo rare and ſubtle, and yet ſo potent, as by its emiſſion to cauſe no ſenſible diminution of the weight of the electrick body; and to be expanded through a ſphere, whoſe diameter is above two feet, and yet to be able to agitate and carry up leaf-copper, or leaf-gold, at the diſtance of above a foot from the electrick body? And how the *effluvia* of a magnet can be ſo rare and ſubtile, as to paſs through a plate of glaſs without any reſiſtance or diminution of their force, and yet ſo potent as to turn a magnetick needle beyond the glaſs?

The æthereal medium the mechanical efficient of Viſion.

Qu. 23. Is not Viſion performed chiefly by the vibrations of this medium, excited in the bottom of the eye by the rays of light, and propagated through the ſolid, pellucid and uniform *Capillamenta* of the Optick nerves into the place of ſenſation? And is not Hearing performed by the vibrations either of this or ſome other medium, excited in the Auditory nerves by the tremors of the air, and propagated through the ſolid, pellucid and uniform *Capillamenta* of thoſe nerves into the place of ſenſation? And ſo of the other ſenſes.

—of Animal motion.

Qu. 24. Is not Animal motion performed by the vibrations of this medium, excited in the brain by the power of the will, and propagated from thence through the ſolid, pellucid and uniform *Capillamenta* of the nerves into the muſcles, for contracting and dilating them? I ſuppoſe that the *Capillamenta* of the nerves are each of them Solid and Uniform, that the vibrating motion of the æthereal medium may be propagated along them from one end to the other uniformly, and without interruption: for obſtructions in the nerves create palſies. And that they may be ſufficiently uniform, I ſuppoſe them to be pellucid when viewed ſingly; though the reflexions in their cylindrical ſurfaces may make the whole nerve, compoſed of many *Capillamenta*, appear Opake and White.

White. For Opacity ariſes from Reflecting ſurfaces, ſuch as may diſturb and interrupt the motions of this medium. Query XXV.

Original properties of rays of Light.

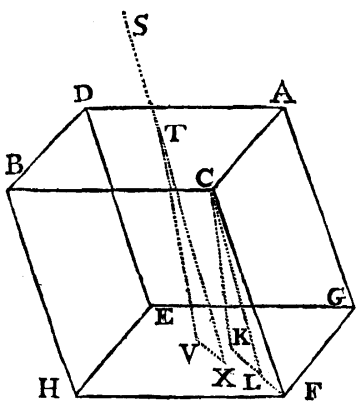
Qu. 25. Are there not other original properties of the rays of light, beſides thoſe already deſcribed? An inſtance of another original property we have in the refraction of Iſland Cryſtal, deſcribed firſt by *Eraſmus Bartholine*, and afterwards more exactly by *Hugenius*, in his Book *De la Lumiere*. This cryſtal is a pellucid fiſſile ſtone, clear as water or cryſtal of the rock, and without colour; enduring a red heat without loſing its tranſparency, and, in a very ſtrong heat, calcining without fuſion: ſteeped a day or two in water, it loſes its natural poliſh: being rubbed on cloth, it attracts pieces of ſtraws and other light things, like ambar or glaſs; and with *aqua fortis* it makes an ebullition. It ſeems to be a ſort of Talk, and is found in form of an oblique parallelopiped, with ſix parallelogram ſides and eight ſolid angles. The obtuſe angles of the parallelograms are each of them 101 degrees and 52 minutes; the acute ones 78 degrees and 8 minutes. Two of the ſolid angles oppoſite to one another, as C and E, are encompaſſed each of them with three of theſe Obtuſe angles; and each of the other ſix, with one Obtuſe and two Acute ones. It cleaves eaſily in planes parallel to any of its ſides, and not in any other planes. It cleaves with a gloſſy polite ſurface, not perfectly plane, but with ſome little unevenneſs. It is eaſily ſcratched, and, by reaſon of its ſoftneſs, it takes a poliſh very difficultly. It poliſhes better upon poliſhed looking-glaſs than upon metal; and perhaps better upon pitch, leather or parchment. Afterwards it muſt be rubbed with a little oil or white of an egg, to fill up its ſcratches; whereby it will become very tranſparent and polite. But for ſeveral experiments, it is not neceſſary to poliſh it. If a piece of this cryſtalline ſtone be laid upon a book; every letter of the book, ſeen through it, will appear double, by means of a double refraction. And if any beam of light falls either perpendicularly, or in any oblique angle, upon any ſurface of this cryſtal; it becomes divided into two beams by means of the ſame double refraction. Which beams are of the ſame colour with the incident beam of light, and ſeem equal to one another in the Quantity of their

See the following Scheme, p. 228.

Iſland Cryſtal.

Query xxv. Iſland Cryſtal.

light, or very nearly equal. One of theſe refractions is performed by the uſual rule of Opticks; the ſine of incidence out of air into this cryſtal being to the ſine of refraction as five to three. The other refraction, which may be called the unuſual refraction, is performed by the following Rule.



Let ADBC repreſent the Refracting ſurface of the cryſtal; C, the biggeſt ſolid angle at that ſurface; GEHF, the oppoſite ſurface; and CK, a perpendicular on that ſurface. This perpendicular makes with the edge of the cryſtal CF, an angle of 19 deg. 3′. Join KF; and in it take KL, ſo that the angle KCL be 6 deg. 40′. and the angle LCF 12 deg. 23′. And if ST repreſent any beam of light incident at T, in any angle, upon the Refracting ſurface ADBC, let TV be the refracted beam determined by the given proportion of the ſines 5 to 3, according to the uſual rule of Opticks. Draw VX parallel and equal to KL. Draw it the ſame way from V, in which L lieth from K; and joining TX, this line TX ſhall be the other refracted beam, carried from T to X, by the unuſual refraction.

If therefore the incident beam ST be perpendicular to the Refracting ſurface, the two beams TV and TX, into which it ſhall become divided, ſhall be parallel to the lines CK and CL; one of thoſe beams going through the cryſtal perpendicularly, as it ought to do by the uſual laws of Opticks; and the other, TX, by an unuſual refraction, diverging from the perpendicular, and making with it an angle VTX of about $6\frac{2}{3}$ degrees, as is found by experience. And hence the plane VTX, and ſuch like planes, which are parallel to the plane CFK, may be called the planes of Perpendicular refraction. And the coaſt, towards which the lines KL and VX are drawn, may be called the coaſt of an unuſual refraction.

In

In like manner cryſtal of the rock has a double refraction: but the differences of the two refractions is not ſo great and manifeſt as in iſland cryſtal. Queries xxv, xxvi.

When the beam ST, incident on iſland cryſtal, is divided into two beams, TV and TX, and theſe two beams arrive at the farther ſurface of the glaſs; the beam TV, which was refracted at the firſt ſurface after the uſual manner, ſhall be again refracted entirely after the uſual manner at the ſecond ſurface; and the beam TX, which was refracted after the unuſual manner in the firſt ſurface, ſhall be again refracted entirely after the unuſual manner in the ſecond ſurface; ſo that both theſe beams ſhall emerge out of the ſecond ſurface in lines parallel to the firſt incident beam ST. Iſland Cryſtal.

And if two pieces of iſland cryſtal be placed one after another, in ſuch manner that all the ſurfaces of the latter be parallel to all the correſponding ſurfaces of the former: the rays, which are refracted after the uſual manner in the firſt ſurface of the firſt cryſtal, ſhall be refracted after the uſual manner in all the following ſurfaces; and the rays, which are refracted after the unuſual manner in the firſt ſurface, ſhall be refracted after the unuſual manner in all the following ſurfaces. And the ſame thing happens, though the ſurfaces of the cryſtals be any ways inclined to one another, provided that their planes of Perpendicular refraction be parallel to one another.

And therefore there is an original difference in the rays of light, by means of which ſome rays are in this experiment conſtantly refracted after the uſual manner, and others conſtantly after the unuſual manner: for if the difference be not original, but ariſes from new modifications impreſſed on the rays at their firſt refraction, it would be altered by new modifications in the three following refractions; whereas it ſuffers no alteration, but is conſtant, and has the ſame effect upon the rays in all the refractions. The unuſual refraction is therefore performed by an Original Property of the rays. And it remains to be enquired, whether the rays have not more Original Properties than are yet diſcovered?

Qu. 26. Have not the rays of light ſeveral ſides, endued with ſeveral original Properties? For if the planes of Perpendicular refraction of the ſecond cryſtal, be at right angles with the planes The rays of Light have ſeveral ſides.

of

Query xxiv. Rays of Light.

of Perpendicular refraction of the firſt cryſtal; the rays, which are refracted after the uſual manner in paſſing through the firſt cryſtal, will be all of them refracted after the unuſual manner in paſſing through the ſecond cryſtal; and the rays, which are refracted after the unuſual manner in paſſing through the firſt cryſtal, will be all of them refracted after the uſual manner in paſſing through the ſecond cryſtal. And therefore there are not two ſorts of rays differing in their nature from one another, one of which is conſtantly and in all poſitions refracted after the uſual manner, and the other conſtantly and in all poſitions after the unuſual manner. The difference between the two ſorts of rays, in the Experiment mentioned in the 25th Queſtion, was only in the poſitions of the ſides of the rays to the planes of Perpendicular refraction. For one and the ſame ray is here refracted ſometimes after the uſual, and ſometimes after the unuſual manner, according to the poſition which its ſides have to the cryſtals. If the ſide of the ray is poſited the ſame way to both cryſtals, it is refracted after the ſame manner in them both: but if that ſide of the ray, which looks towards the coaſt of the unuſual refraction of the firſt cryſtal, be 90 degrees from that ſide of the ſame ray, which looks towards the coaſt of the unuſual refraction of the ſecond cryſtal (which may be effected by varying the poſition of the ſecond cryſtal to the firſt, and by conſequence to the rays of light) the ray ſhall be refracted after ſeveral manners in the ſeveral cryſtals. There is nothing more required to determine whether the rays of light, which fall upon the ſecond cryſtal, ſhall be refracted after the uſual or after the unuſual manner; but to turn about this cryſtal, ſo that the coaſt of this cryſtal's unuſual refraction may be on this or on that ſide of the ray. And therefore every ray may be conſidered as having four ſides or quarters; two of which, oppoſite to one another, incline the ray to be refracted after the unuſual manner, as often as either of them are turned towards the coaſt of unuſual refraction; and the other two, whenever either of them are turned towards the coaſt of unuſual refraction, do not incline it to be otherwiſe refracted than after the uſual manner. The two firſt may therefore be called the ſides of unuſual refraction. And ſince theſe diſpoſitions were

in the rays, before their incidence on the ſecond, third and fourth ſurfaces of the two cryſtals; and ſuffered no alteration, ſo far as appears, by the refraction of the rays in their paſſage through thoſe ſurfaces; and the rays were refracted by the ſame laws in all the four ſurfaces: it appears, that thoſe diſpoſitions were in the rays originally, and ſuffered no alteration by the firſt refraction; and that by means of thoſe diſpoſitions the rays were refracted at their incidence on the firſt ſurface of the firſt cryſtal; ſome of them after the uſual, and ſome of them after the unuſual manner, accordingly as their ſides of unuſual refraction were then turned towards the coaſt of the unuſual refraction of that cryſtal, or ſideways from it. Queries XXV. XXVI. XXVII. have ſeveral ſides.

Every ray of light has therefore two oppoſite ſides, originally endued with a property on which the unuſual refraction depends, and with other two oppoſite ſides not endued with that property. And it remains to be enquired, whether there are not more properties of light by which the ſides of the rays differ, and are diſtinguiſhed from one another.

In explaining the difference of the ſides of the rays abovementioned, I have ſuppoſed that the rays fall perpendicularly on the firſt cryſtal. But if they fall obliquely on it, the ſucceſs is the ſame. Thoſe rays which are refracted after the uſual manner in the firſt cryſtal, will be refracted after the unuſual manner in the ſecond cryſtal, ſuppoſing the planes of Perpendicular refraction to be at right angles with one another, as above; and on the contrary.

If the planes of the Perpendicular refraction of the two cryſtals be neither parallel nor perpendicular to one another, but contain an Acute angle: the two beams of light which emerge out of the firſt cryſtal, will be each of them divided into two more at their incidence on the ſecond cryſtal. For in this caſe the rays, in each of the two beams, will ſome of them have their ſides of unuſual refraction, and ſome of them their other ſides, turned toward the coaſt of the unuſual refraction of the ſecond cryſtal.

Qu. 27. Are not all hypotheſes erroneous which have hitherto been invented for explaining the phænomena of light, by new modifications of the rays? For thoſe phænomena depend not upon

Query XXVIII.

new modifications, as has been ſuppoſed, but upon the Original and Unchangeable properties of the rays.

Light conſiſts not in preſſion, or motion, propagated through a fluid Medium.

Qu. 28. Are not all hypotheſes erroneous, in which light is ſuppoſed to conſiſt in preſſion or motion, propagated through a fluid medium? For in all theſe hypotheſes, the phænomena of light have been hitherto explained, by ſuppoſing that they ariſe from new modifications of the rays; which is an erroneous ſuppoſition.

If light conſiſted only in preſſion propagated without actual motion; it would not be able to agitate and heat the bodies, which refract and reflect it. If it conſiſted in motion propagated to all diſtances in an inſtant; it would require an infinite force every moment, in every ſhining particle, to generate that motion. And if it conſiſted in preſſion or motion, propagated either in an inſtant or in time, it would bend into the ſhadow. For preſſion or motion cannot be propagated in a fluid in right lines beyond an obſtacle, which ſtops part of the motion, but will bend and ſpread every way into the quieſcent medium, which lies beyond the obſtacle ([1]). Gravity tends downwards; but the preſſure of water, ariſing from gravity, tends every way with equal force; and is propagated as readily, and with as much force, ſideways as downwards, and through crooked paſſages as through ſtrait ones. The waves on the ſurface of ſtagnating water, paſſing by the ſides of a broad obſtacle which ſtops part of them, bend afterwards, and dilate themſelves gradually into the quiet water behind the obſtacle. The waves, pulſes or vibrations of the air, wherein ſounds conſiſt, bend manifeſtly; though not ſo much as the waves of water. For a bell, or a cannon, may be heard beyond a hill, which intercepts the ſight of the ſounding body; and ſounds are propagated as readily through crooked pipes, as through ſtreight ones. But light is never known to follow crooked paſſages, nor to bend into the ſhadow. For the fixed ſtars, by the interpoſition of any of the planets, ceaſe to be ſeen. And ſo do the parts of the ſun by the interpoſition of the moon, *Mercury* or *Venus*. The rays, which paſs very near to the edges of any body, are bent a little by the action of the body, as we ſhewed above; but this

([1]) Princip. Lib. II. Prop. XLII.

bending

bending is not towards, but from the ſhadow, and is performed only in the paſſage of the ray by the body, and at a very ſmall diſtance from it. So ſoon as the ray is paſt the body, it goes right on. Query XXVIII.

To explain the unuſual refraction of iſland cryſtal by preſſion or motion propagated, has not hitherto been attempted (to my knowledge) except by *Huygens*; who for that end ſuppoſed two ſeveral vibrating mediums within that cryſtal. But when he tried the refractions in two ſucceſſive pieces of that cryſtal, and found them ſuch as is mentioned above: he confeſſed himſelf at a loſs for explaining them. For preſſions or motions, propagated from a ſhining body through an uniform medium, muſt be on all ſides alike; whereas by thoſe experiments it appears, that the rays of light have different properties in their different ſides. He ſuſpected that the pulſes of *æther*, in paſſing through the firſt cryſtal, might receive certain new modifications; which might determine them to be propagated in this or that medium within the ſecond cryſtal, according to the poſition of that cryſtal. But what modifications thoſe might be, he could not ſay; nor think of any thing ſatisfactory in that point. And if he had known that the unuſual refraction depends not on new modifications, but on the original and unchangeable diſpoſitions of the rays, he would have found it as difficult to explain how thoſe diſpoſitions, which he ſuppoſed to be impreſſed on the rays by the firſt cryſtal, could be in them before their incidence on that cryſtal; and in general, how all rays, emitted by ſhining bodies, can have thoſe diſpoſitions in them from the beginning. To me, at leaſt, this ſeems inexplicable, if light be nothing elſe than preſſion or motion propagated through *æther*.

Mais pour dire comment cela ſe fait, je n'ay rien trove juſqu' ici qui me ſatisfaſſe. C. H. de la lumiere. c. 5. p. 91.

And it is as difficult to explain by theſe hypotheſes, how rays can be alternately in fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion; unleſs perhaps one might ſuppoſe, that there are in all ſpace two æthereal vibrating mediums, and that the vibrations of one of them conſtitute light, and the vibrations of the other are ſwifter, and as often as they overtake the vibrations of the Firſt, put them

Query xxviii. No denſe matter

into thoſe fits (m). But how two *æthers* can be diffuſed through all ſpace, one of which acts upon the other, and by conſequence is re-acted upon, without retarding, ſhattering, diſperſing and confounding one another's motions, is inconceivable. And againſt filling the heavens with fluid mediums, unleſs they be exceeding rare, a great objection ariſes from the regular and very laſting motions of the planets and comets in all manner of courſes through the heavens. For thence it is manifeſt, that the heavens are void of all ſenſible reſiſtance, and by conſequence of all ſenſible matter.

For the reſiſting power of fluid mediums ariſes partly from the attrition of the parts of the medium, and partly from the *vis inertiæ* of the matter. That part of the reſiſtance of a ſpherical body, which ariſes from the attrition of the parts of the medium, is very nearly as the diameter; or at the moſt, as the *factum* of the diameter, and the velocity of the ſpherical body together. And that part of the reſiſtance, which ariſes from the *vis inertiæ* of the matter, is as the ſquare of that *factum* (n). And by this difference the two ſorts of reſiſtance may be diſtinguiſhed from one another in any medium; and theſe being diſtinguiſhed, it will be found that almoſt all the reſiſtance of bodies of a competent magnitude, moving in air, water, quick-ſilver, and ſuch like fluids, with a competent velocity, ariſes from the *vis inertiæ* of the parts of the fluid.

Now that part of the reſiſting power of any medium, which ariſes from the tenacity, friction or attrition of the parts of the medium, may be diminiſhed by dividing the matter into ſmaller parts, and making the parts more ſmooth and ſlippery: but that part of the reſiſtance, which ariſes from the *vis inertiæ*, is proportional to the denſity of the matter, and cannot be diminiſhed by dividing the matter into ſmaller parts, nor by any other means than

(m) The remaining part of this paragraph, in the firſt of the two *Latin* editions of Dr. *Clarke*, ſtood thus. Verum duo ibi confingere Ætherum genera, ubi nulla ratio cogat ut vel unum quidem admittamus; exiſtimare porro duo Ætherum genera ita in omnia ſpatio unà ineſſe poſſe, ut tamen invicem non intermiſceantur, nec in unum Medium coeant; comminiſci denique duo illa Ætherum genera diſtinctas ita habere poſſe vibrationes, ut tamen duo Luminis genera non conſtituant; hæ quidem mihi videntur difficultates inexplicabiles. Præterea nulla eſſe omnino iſtiuſmodi media fluida, inde colligo, quòd Planetæ & Cometæ regulari adeo & diuturno motu per ſpatia

than by decreaſing the denſity of the medium. And for theſe reaſons the denſity of fluid mediums is very nearly proportional to their reſiſtance. Liquors which differ not much in denſity, as water, ſpirit of wine, ſpirit of turpentine, hot oil, differ not much in reſiſtance. Water is thirteen or fourteen times lighter than quick-ſilver, and by conſequence thirteen or fourteen times rarer; and its reſiſtance is leſs than that of quick-ſilver in the ſame proportion, or thereabouts, as I have found by experiments made with pendulums. The open air, in which we breathe, is eight or nine hundred times lighter than water, and by conſequence eight or nine hundred times rarer; and accordingly its reſiſtance is leſs than that of water in the ſame proportion, or thereabouts; as I have alſo found by experiments made with pendulums (o). And in thinner air the reſiſtance is ſtill leſs; and at length, by rarifying the air, becomes inſenſible. For ſome feathers falling in the open air meet with great reſiſtance; but in a tall glaſs, well emptied of air, they fall as faſt as lead or glaſs, as I have ſeen tried ſeveral times. Whence the reſiſtance ſeems ſtill to decreaſe in proportion to the denſity of the fluid. For I do not find by any experiments, that bodies moving in quick-ſilver, water or air, meet with any other ſenſible reſiſtance, than what ariſes from the denſity and tenacity of thoſe ſenſible fluids; as they would do, if the pores of thoſe fluids, and all other ſpaces, were filled with a denſe and ſubtile fluid (p). Now if the reſiſtance in a veſſel, well emptied of water, was but an hundred times leſs than in the open air, it would be about a million of times leſs than in quick-ſilver. But it ſeems to be much leſs in ſuch a veſſel; and ſtill much leſs in the heavens, at the height of three or four hundred miles from the earth, or above. For Mr. *Boyle* has ſhewed, that air may be rarified above ten thouſand times in veſſels of glaſs; and the heavens are much emptier of air, than any *vacuum* we can make below. For ſince the air is compreſſed by the weight of the incumbent atmoſphere, and the denſity of air is

Query xxviii. in the planetary regions.

ſpatia cæleſtia undique & quaquaverſum & in omnes partes ferantur. Inde enim liquet ſpatia cæleſtia omnis ſenſibilis reſiſtentiæ, & conſequenter omnis ſenſibilis materiæ, expertia eſſe.

In the ſecond *Engliſh* edition, and all that ſucceeded, it appeared as we now give it.

(n) Princip. Lib. II. Prop. xxxv. Cor. 5. and Prop. xxxviii. Cor. 1.

(o) Princip. Lib. II. Sect. vi. Scholium.

(p) See Princip. Lib. II. Sect. vi. Scholium towards the end.

Query xxviii. No denſe matter

proportional to the force compreſſing it; it follows by computation, that at the height of about ſeven and a half *Engliſh* miles from the earth, the air is four times rarer than at the ſurface of the earth; and at the height of 15 miles, it is ſixteen times rarer than that at the ſurface of the earth; and at the height of $22\frac{1}{2}$, 30, or 38 miles, it is reſpectively 64, 256, or 1024 times rarer, or thereabouts; and at the height of 76, 152, 228 miles, it is about 1000000, 1000000000000 or 1000000000000000000 times rarer; and ſo on (q).

Heat promotes fluidity very much, by diminiſhing the tenacity of bodies. It makes many bodies fluid, which are not fluid in cold; and increaſes the fluidity of tenacious liquors, as of oil, balſam and honey, and thereby decreaſes their reſiſtance. But it decreaſes not the reſiſtance of water conſiderably; as it would do, if any conſiderable part of the reſiſtance of water aroſe from the attrition, or tenacity, of its parts. And therefore the reſiſtance of water ariſes principally, and almoſt entirely, from the *vis inertiæ* of its matter; and by conſequence, if the heavens were as denſe as water, they would not have much leſs reſiſtance than water; if as denſe as quick-ſilver, they would not have much leſs reſiſtance than quick-ſilver; if abſolutely denſe, or full of matter without any *vacuum*, let the matter be never ſo ſubtile and fluid, they would have a greater reſiſtance than quick-ſilver. A ſolid globe in ſuch a medium would loſe above half its motion in moving three times (r) the length of its diameter; and a globe not ſolid, ſuch as are the planets, would be retarded ſooner. And therefore to make way for the regular and laſting motions of the planets and comets, it is neceſſary to empty the heavens of all matter; except perhaps ſome very thin vapours, ſteams or *effluvia*, ariſing from the atmoſpheres of the earth, planets and comets, and from ſuch an exceeding rare æthereal medium as we deſcribed above. A denſe fluid can be of no uſe for explaining

(q) Concerning the rarity of the air at all heights above the earth's ſurface, ſee the ſixth Section of my diſcourſe on the Barometer publiſhed in the Volume of the Philoſophical Tranſactions.

(r) — *three times.*] Our Author ſeems to make the ſuppoſition of a ſolid, or abſolutely denſe globe moving in a fluid *Plenum*. The denſity therefore of the globe is ſuppoſed equal to that of the fluid, wherein it is ſuppoſed to move. Should we not, therefore, according to the 4th Cor. of Princip. Lib. II. Prop. xxxviii. for *three times*, read *twice?*

the

Query xxviii. in the planetary regions.

the phænomena of Nature, the motions of the planets and comets being better explained without it (s). It ſerves only to diſturb and retard the motions of thoſe great bodies, and make the frame of Nature languiſh: and in the pores of bodies, it ſerves only to ſtop the vibrating motions of their parts, wherein their heat and activity conſiſts. And as it is of no uſe, and hinders the operations of Nature, and makes her languiſh; ſo there is no evidence for its exiſtence, and therefore it ought to be rejected. And if it be rejected, the hypotheſes that light conſiſts in preſſion or motion propagated through ſuch a medium, are rejected with it.

And for rejecting ſuch a medium, we have the authority of thoſe the oldeſt and moſt celebrated philoſophers of *Greece* and *Phœnicia*, who made a *vacuum* and atoms, and the gravity of atoms, the firſt principles of their philoſophy; tacitly attributing gravity to ſome other cauſe than denſe matter (t). Later philoſophers baniſh the conſideration of ſuch a cauſe out of Natural Philoſophy, feigning hypotheſes for explaining all things mechanically, and referring other cauſes to metaphyſicks. Whereas the main buſineſs of natural philoſophy is to argue from phænomena without feigning hypotheſes, and to deduce cauſes from effects, till we come to the very Firſt cauſe; which certainly is not mechanical: and not only to unfold the mechaniſm of the world, but chiefly to reſolve theſe and ſuch like Queſtions. *What is there in places* [*almoſt*] (u) *empty of matter, and whence is it that the ſun and planets gravitate towards one another, without* [*denſe*] (u) *matter between them? Whence is it that Nature doth nothing in vain; and whence ariſes all that order and beauty which we ſee in the world? To what end are comets; and whence is it that planets move all one and the ſame way in orbs concentrick, while comets move all manner of ways in orbs very excentrick; and what*

(s) *A denſe fluid—without it.*] For this ſentence we had in Dr. *Clarke's* firſt *Latin*, Materia illa fictitia & commentitia, quâ cæli ſunt repleti, nullo modo utilis eſt ad explicanda Phænomena Naturæ; quando Planetarum quidem & Cometarum motus, ope Gravitatis meliùs explicantur ſine illâ; gravitaſque per illam nondum fuit explicata.

(t) — *other cauſe than denſe matter.*] Alii alicui cauſæ à materiâ diverſæ. Dr. *Clarke's* firſt *Latin*.

(u) — *almoſt—denſe.*] Theſe two words have nothing anſwering to them in Dr. *Clark's* firſt *Latin*.

Query XXVIII, XXIX.

hinders the fixed ſtars from falling upon one another (x)*? How came the bodies of animals to be contrived with ſo much art, and for what ends were their ſeveral Parts? Was the eye contrived without ſkill in Opticks, and the ear without knowledge of ſounds? How do the motions of the body follow from the will; and whence is the inſtinct in animals? Is not the ſenſory of animals that place, to which the ſenſitive ſubſtance is preſent; and into which the ſenſible ſpecies of things are carried through the nerves and brain, that there they may be perceived by their immediate preſence to that ſubſtance? And theſe things being rightly diſpatched, Does it not appear from phænomena, that there is a Being incoporeal, living, intelligent, omnipreſent, who, in infinite ſpace, as it were in his ſenſory* (y)*, ſees the things themſelves intimately, and throughly perceives them, and comprehends them wholly by their immediate preſence to himſelf: of which things the images only, carried through the organs of ſenſe into our little ſenſoriums, are there ſeen and beheld by that which in us perceives and thinks.* And though every true ſtep made in this philoſophy brings us not immediately to the knowledge of the Firſt cauſe, yet it brings us nearer to it, and on that account is to be highly valued.

Of the Form of Light.

Qu. 29. Are not the rays of light very ſmall bodies emitted from ſhining ſubſtances? For ſuch bodies will paſs through uniform mediums in right lines, without bending into the ſhadow; which is the nature of the rays of light. They will alſo be capable of ſeveral properties, and be able to conſerve their properties unchanged in paſſing through ſeveral mediums; which is another condition of the rays of light. Pellucid ſubſtances act upon the rays of light, at a diſtance, in refracting, reflecting and inflecting them; and the rays mutually agitate the parts of thoſe ſubſtances at a diſtance, for heating them; and this action and reaction, at a diſtance, very much reſembles an Attractive force between

(x) — *the fixed Stars from falling.*] Quo minus Sol & Stellæ fixæ in ſe mutuò irruant. Dr. *Clarke's* firſt *Latin.*

(y) — *in infinite ſpace as it were in his ſenſory.*]

Νυ; δι οι αψευδης, βασιληιος, αφθιτο αιθηρ,
Ωι δη παιλα κλυει και φραζεται ηδι τις εστιν
Ανδη ηδ' ενοπη, ηδ' αυ κλυτο, ηδε μεν οσσα,
Η λησεν Διος ωας υπεξιμενος Κρονιωνος.

I am

tween bodies. If refraction be performed by attraction of the rays, the ſines of incidence muſt be to the ſines of refraction in a given proportion; as we ſhewed in our principles of philoſophy (z): and this rule is true by experience. The rays of light, in going out of glaſs into a *vacuum*, are bent towards the glaſs; and if they fall too obliquely on the *vacuum*, they are bent backwards into the glaſs, and totally reflected; and this reflexion cannot be aſcribed to the reſiſtance of an abſolute *vacuum*, but muſt be cauſed by the power of the glaſs attracting the rays at their going out of it into the *vacuum*, and bringing them back. For if the farther ſurface of the glaſs be moiſtened with water or clear oil, or liquid and clear honey; the rays, which would otherwiſe be reflected, will go into the water, oil, or honey; and therefore are not reflected, before they arrive at the farther ſurface of the glaſs, and begin to go out of it. If they go out of it into the water, oil or honey; they go on, becauſe the attraction of the glaſs is almoſt balanced, and rendered ineffectual by the contrary attraction of the liquor. But if they go out of it into a *vacuum*, which has no attraction to balance that of the glaſs; the attraction of the glaſs either bends and refracts them, or brings them back and reflects them. And this is ſtill more evident by laying together two priſms of glaſs, or two object-glaſſes of very long teleſcopes, the one plane, the other a little convex, and ſo compreſſing them that they do not fully touch, nor are too far aſunder. For the light, which falls upon the farther ſurface of the firſt glaſs, where the interval between the glaſſes is not above the ten hundred thouſandth part of an inch, will go through that ſurface, and through the air or *vacuum* between the glaſſes, and enter into the ſecond glaſs; as was explained in the firſt, fourth and eighth Obſervations of the firſt Part of the ſecond Book. But if the ſecond glaſs be taken away; the light, which goes out of the ſecond ſurface of the firſt glaſs into the air or *vacuum*, will not go on forwards, but turns back into the

Query XXXI.

I am ſingular in imagining a reſemblance between Sir *Iſaac Newton's* notion of ſpace as the ſenſory of God, and that which we find in theſe Orphic Verſes. The learned *Geſner* has remarked it. *His verſibus poterat uti Clarckius ad naturam ſpatii ſui declarandam, quatenus illud ſenſorium quoddam Dei dici poſſe putavit.* It muſt be confeſſed, this opinion is more tolerable in poetry than in philoſophy.

(z) Princip. Lib. II. Prop. XCIV.

firſt

Query xxix. Form of Light.

firſt glaſs, and is reflected; and therefore it is drawn back by the power of the firſt glaſs, there being nothing elſe to turn it back. Nothing more is requiſite for producing all the variety of colours and degrees of refrangibility, than that the rays of light be bodies of different ſizes; the leaſt of which may make Violet, the weakeſt and darkeſt of the colours, and be more eaſily diverted by Refracting ſurfaces from the right courſe; and the reſt, as they are bigger and bigger, may make the ſtronger and more lucid colours, Blue, Green, Yellow and Red, and be more and more difficultly diverted. Nothing more is requiſite for putting the rays of light into fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion, than that they be ſmall bodies, which by their attractive powers, or ſome other force, ſtir up vibrations in what they act upon; which vibrations being ſwifter than the rays, overtake them ſucceſſively, and agitate them; ſo as by turns to increaſe and decreaſe their velocities, and thereby put them into thoſe fits. And laſtly, the unuſual refraction of iſland cryſtal looks very much as if it were performed by ſome kind of Attractive virtue, lodged in certain ſides both of the rays, and of the particles of the cryſtal. For were it not for ſome kind of diſpoſition, or virtue, lodged in ſome ſides of the particles of the cryſtal, and not in their other ſides, and which inclines and bends the rays towards the coaſt of unuſual refraction; the rays, which fall perpendicularly on the cryſtal, would not be refracted towards that coaſt rather than towards any other coaſt, both at their incidence and at their emergence, ſo as to emerge perpendicularly, by a contrary ſituation of the coaſt of unuſual refraction, at the ſecond ſurface; the cryſtal acting upon the rays, after they have paſſed through it and are emerging into the air, or, if you pleaſe, into a *vacuum*. And ſince the cryſtal by this diſpoſition or virtue does not act upon the rays, unleſs when one of their ſides of unuſual refraction looks towards that coaſt; this argues a virtue or diſpoſition in thoſe ſides of the rays, which anſwers to and ſympathizes with that virtue or diſpoſition of the cryſtal, as the poles of two magnets anſwer to one another. And as magnetiſm may be intended and remitted, and is found only in the magnet and in iron: ſo this virtue, of refracting the Perpendicular, rays is greater in iſland cryſtal, leſs

leſs in cryſtal of the rock, and is not yet found in other bodies. I do not ſay that this virtue is Magnetical; it ſeems to be of another kind: I only ſay, that whatever it be, it is difficult to conceive how the rays of light, unleſs they be bodies, can have a permanent virtue in two of their ſides, which is not in their other ſides; and this without any regard to their poſition to the ſpace, or medium, through which they paſs. Queries xixx, xxx.

What I mean in this Queſtion by a *vacuum*, and by the attractions of the rays of light towards glaſs or cryſtal, may be underſtood by what was ſaid in the 18th, 19th and 20th Queſtions ([aa]).

Qu. 30. Are not groſs bodies and light convertible into one another; and may not bodies receive much of their activity from the particles of light which enter their compoſition? For all Fixed bodies, being heated, emit light ſo long as they continue ſufficiently hot; and light mutually ſtops in bodies, as often as its rays ſtrike upon their parts, as we ſhewed above. I know no body leſs apt to ſhine than water; and yet water, by frequent diſtillations, changes into fixed earth, as Mr. *Boyle* has tried; and then this earth, being enabled to endure a ſufficient heat, ſhines by heat like other bodies. Mutual convertibility of groſs bodies and light.

The changing of bodies into light, and light into bodies, is very conformable to the courſe of Nature, which ſeems delighted with tranſmutations. Water, which is a very fluid taſteleſs ſalt, ſhe changes by heat into vapour, which is a ſort of air; and by cold into ice, which is a hard, pellucid, brittle, fuſible ſtone; and this ſtone returns into water by heat, and vapour returns into water by cold. Earth by heat becomes fire, and by cold returns into earth. Denſe bodies by fermentation rarify into ſeveral ſorts of air; and this air by fermentation, and ſometimes without it, returns into denſe bodies. Mercury appears ſometimes in the form of a fluid metal; ſometimes in the form of a hard brittle metal; ſometimes in the form of a corroſive pellucid ſalt, called ſublimate; ſometimes in the form of a taſteleſs, pellucid, volatile white earth, called *Mercurius dulcis*; or in that of a red opake volatile earth, called Cinnabar; or in that of a red

([aa]) This laſt paragraph of this Query was not in Dr. *Clark's* firſt *Latin*.

Queries xxx, xxxi.

a red or white precipitate; or in that of a fluid ſalt; and in diſtillation it turns into vapour; and being agitated *in vacuo*, it ſhines like fire. And after all theſe changes it returns again into its firſt form of mercury. Eggs grow from inſenſible magnitudes, and change into animals; tadpoles, into frogs; and worms, into flies. All birds, beaſts and fiſhes, inſects, trees, and other vegetables, with their ſeveral parts, grow out of water and watery tinctures and ſalts; and, by putrefaction, return again into watery ſubſtances. And water, ſtanding a few days in the open air, yields a tincture, which (like that of malt) by ſtanding longer yields a ſediment and a ſpirit; but before putrefaction is fit nouriſhment for animals and vegetables. And among ſuch various and ſtrange tranſmutations, why may not Nature change bodies into light, and light into bodies ([bb])?

Elective Attractions.

Qu. 31. Have not the ſmall particles of bodies certain powers, virtues or forces, by which they act at a diſtance, not only upon the rays of light for reflecting, refracting and inflecting them, but alſo upon one another, for producing a great part of the phænomena of Nature? For it is well known that bodies act one upon another by the attractions of gravity, magnetiſm and electricity; and theſe inſtances ſhew the tenor and courſe of Nature, and make it not improbable, but that there may be more Attractive powers than theſe. For Nature is very conſonant and conformable to herſelf. How theſe attractions may be performed, I do not here conſider. What I call attraction, may be performed by Impulſe, or by ſome other means unknown to me. I uſe

([bb]) In the firſt edition of Dr. *Clark's Latin* we find added here what follows: "Jam quidem eorum corporum, quæ ſunt ejuſdem generis et virtutis, quanto eſt quodque minutius, tanto fortiorem habet, pro ratione magnitudinis ſuæ, vim attrahentem. Fortior comperta eſt ea vis in parvis Magnetibus, pro ratione ponderis ſui, quàm in majoribus: nam parvorum magnetum partes, cùm ſint inter ſe proximiores, vires ſuas faciliùs in unum conjungunt. Quocirca radii Luminis, cùm ſint corporum omnium (quod ſciamus) minutiſſima, expectandum erit, ut vires attrahentes habere reperiantur omnium fortiſſimas. Quàm fortes autem eæ ſint, regulâ ſequente colligi poterit. Attractio radii Luminis, pro quantitate materiæ ſuæ, eſt ad gravitatem quam corpus aliquod projectum habet, pro quantitate itidem materiæ ſuæ, in compoſitâ ratione velocitatis radii luminis ad velocitatem corporis illius projecti, & flexuræ, ſeu curvaturæ lineæ, quam Radius deſcribit in loco Refractionis, ad flexuram, ſeu curvaturam lineæ quam id corpus projectum deſcribit; ita videlicet, ſi inclinatio Radii ad ſuperficiem refringentem eadem ſit, quæ eſt corporis illius projecti ad Horizontem. Atque ex hâc quidem proportione colligo, attractionem Radiorum Luminis eſſe amplius 1000000000000000 partibus majorem quàm Gravitatem corporum in ſuperficie Terræ, pro quantitate materiæ quæ in eis ineſt; ſi ſcilicet lumen è Sole in Terram circiter

uſe that word here to ſignify only in general any force by which bodies tend towards one another, whatſoever be the cauſe. For we muſt learn, from the phænomena of Nature, what bodies attract one another, and what are the laws and properties of the attraction, before we enquire the cauſe by which the attraction is performed. The attractions of gravity, magnetiſm and electricity, reach to very ſenſible diſtances, and ſo have been obſerved by vulgar eyes; and there may be others which reach to ſo ſmall diſtances as hitherto eſcape obſervation; and perhaps electrical attraction may reach to ſuch ſmall diſtances, even without being excited by friction. Elective Attractions.

For when ſalt of tartar runs *per deliquium*, is not this done by an attraction between the particles of the ſalt of tartar, and the particles of the water, which float in the air in the form of vapours? And why does not common ſalt, or ſalt-petre, or vitriol, run *per deliquium*, but for want of ſuch an attraction? Or why does not ſalt of tartar draw more water out of the air, than in a certain proportion to its quantity, but for want of an attractive force after it is ſatiated with water? And whence is it but from this Attractive power that water, which alone diſtills with a gentle lukewarm heat, will not diſtill from ſalt of tartar without a great heat? And is it not from the like Attractive power between the particles of oil of vitriol and the particles of water, that oil of vitriol draws to it a good quantity of water out of the air; and after it is ſatiated draws no more, and in diſtillation lets go the water very difficultly? And when the water and oil of vitriol, poured ſucceſſively into the ſame veſſel, grow very hot in the

circiter ſeptem vel octo minutorum ſpatio pervenit. Et in ipſo radiorum contactu, eorum vis multo adhuc major eſſe poteſt. Tanta autem vis in radiis non poteſt non ingentes effectus obtinere in illis materiæ particulis, quibuſcum in corporibus componendis conjuncti ſint; ad efficiendum, ut particulæ illæ ſe invicem attrahant, & inter ſe moveantur. Quæ res ut melius intelligatur, Quæſtionem ſequentem proponam.

All this was omitted in the ſecond *Engliſh*, and all the ſucceeding editions. The Rule given for comparing the accelerative attraction of the rays of Light with the accelerative force of Gravity is erroneous; our Author having put the ſimple inſtead of the duplicate proportion of the velocities. For if corpuſcles deſcribe orbits about two different centers; when the radii drawn to thoſe centers are equally inclined to the curves, the accelerative forces will bear to each other a proportion, which will be compounded of the duplicate proportions of the velocities, and the proportion of the curvatures. The moſt ſimple caſe of this Theorem, which is when the radius, drawn to the center of the forces in each orbit, is perpendicular to the curve, is demonſtrated in my Notes upon the xxviiith Propoſition of the third Book of the Principia. And from the demonſtration of that caſe, the Mathematical Reader will perceive the truth of the general Propoſition.

Elective

mixing, does not this heat argue a great motion in the parts of the liquors? And does not this motion argue, that the parts of the two liquors, in mixing, coaleſce with violence; and by conſequence, ruſh towards one another with an accelerated motion? And when *aqua fortis*, or ſpirit of vitriol, poured upon filings of iron, diſſolves the filings with a great heat and ebullition, is not this heat and ebullition effected by a violent motion of the parts? And does not that motion argue, that the acid parts of the liquor ruſh towards the parts of the metal with violence, and run forcibly into its pores, till they get between its outmoſt particles and the main maſs of the metal, and ſurrounding thoſe particles looſen them from the main maſs, and ſet them at liberty to float off into the water? And when the Acid particles, which alone would diſtill with an eaſy heat, will not ſeparate from the particles of the metal without a very violent heat, doth not this confirm the attraction between them?

When ſpirit of vitriol, poured upon common ſalt, or ſalt-petre, makes an ebullition with the ſalt and unites with it; and in diſtillation the ſpirit of the common ſalt or ſalt-petre comes over much eaſier than it would do before; and the acid part of the ſpirit of vitriol ſtays behind; does not this argue, that the fixed alcaly of the ſalt attracts the acid ſpirit of the vitriol more ſtrongly than its own ſpirit; and not being able to hold them both, lets go its own? And when oil of vitriol is drawn off from its weight of nitre, and from both the ingredients a compound ſpirit of nitre is diſtilled, and two parts of this ſpirit are poured on one part of oil of cloves or caraway ſeeds, or of any ponderous oil of Vegetable or Animal ſubſtances, or oil of turpentine thickened with a little balſam of ſulphur, and the liquors grow ſo very hot in mixing, as preſently to ſend up a burning flame: does not this very great and ſudden heat argue, that the two liquors mix with violence; and that their parts, in mixing, run towards one another with an accelerated motion, and claſh with the greateſt force? And is it not for the ſame reaſon that well rectified ſpirit of wine, poured on the ſame compound ſpirit, flaſhes; and that the *Pulvis fulminans*, compoſed of ſulphur, nitre, and ſalt of tartar, goes off with a more ſudden and violent exploſion than

gun-

gun-powder; the Acid ſpirits of the ſulphur and nitre ruſhing towards one another, and towards the ſalt of tartar, with ſo great a violence, as by the ſhock to turn the whole at once into vapour and flame? Where the diſſolution is ſlow, it makes a ſlow ebullition and a gentle heat; and where it is quicker, it makes a greater ebullition with more heat; and where it is done at once, the ebullition is contracted into a ſudden blaſt or violent exploſion, with a heat equal to that of fire and flame. So when a drachm of the above-mentioned compound ſpirit of nitre was poured upon half a drachm of oil of caraway ſeeds *in vacuo*; the mixture immediately made a flaſh like gun-powder, and burſt the exhauſted receiver, which was a glaſs ſix inches wide, and eight inches deep. And even the groſs body of ſulphur powdered, and with an equal weight of iron filings, and a little water made into paſte, acts upon the iron; and in five or ſix hours grows too hot to be touched, and emits a flame. And by theſe experiments, compared with the great quantity of ſulphur with which the earth abounds, and the warmth of the interior parts of the earth, and hot ſprings, and burning mountains, and with damps, mineral corruſcations, earthquakes, hot ſuffocating exhalations, hurricanes and ſpouts; we may learn, that ſulphureous ſteams abound in the bowels of the earth and ferment with minerals, and ſometimes take fire with a ſudden corruſcation and exploſion; and if pent up in ſubterraneous caverns, burſt the caverns with a great ſhaking of the earth, as in ſpringing of a mine. And then the vapour, generated by the exploſion, expiring through the pores of the earth, feels hot and ſuffocates; and makes tempeſts and hurricanes; and ſometimes cauſes the land to ſlide, or the ſea to boil; and carries up the water thereof in drops, which by their weight fall down again in ſpouts. Alſo ſome ſulphureous ſteams, at all times when the earth is dry, aſcending into the air, ferment there with Nitrous acids; and, ſometimes taking fire, cauſe lightning and thunder, and fiery meteors. For the air abounds with acid vapours fit to promote fermentations; as appears by the ruſting of iron and copper in it, the kindling of fire by blowing, and the beating of the heart by means of reſpiration. Now the above-mentioned motions are ſo

Attractions.

great

Elective

great and violent, as to ſhew that in fermentations, the particles of bodies which almoſt reſt, are put into new motions by a very potent principle, which acts upon them only when they approach one another, and cauſes them to meet and claſh with great violence, and grow hot with the motion, and daſh one another into pieces, and vaniſh into air, and vapour, and flame.

When ſalt of tartar *per deliquium*, being poured into the ſolution of any metal, precipitates the metal, and makes it fall down to the bottom of the liquor in the form of mud: does not this argue, that the Acid particles are attracted more ſtrongly by the ſalt of tartar than by the metal, and by the ſtronger attraction go from the metal to the ſalt of tartar? And ſo when a ſolution of iron in *Aqua fortis* diſſolves the *Lapis Calaminaris*, and lets go the iron; or a ſolution of copper diſſolves iron immerſed in it, and lets go the copper; or a ſolution of ſilver diſſolves copper, and lets go the ſilver; or a ſolution of mercury in *Aqua fortis*, being poured upon iron, copper, tin or lead, diſſolves the metal and lets go the mercury: does not this argue, that the Acid particles of the *Aqua fortis* are attracted more ſtrongly by the *Lapis Calaminaris* than by iron; and more ſtrongly by iron, than by copper; and more ſtrongly by copper, than by ſilver; and more ſtrongly by iron, copper, tin and lead, than by mercury? And is it not for the ſame reaſon that iron requires more *Aqua fortis* to diſſolve it than copper, and copper more than the other metals; and that of all metals, iron is diſſolved moſt eaſily, and is moſt apt to ruſt; and next after iron, copper?

When oil of vitriol is mixed with a little water, or is run *per deliquium*, and in diſtillation the water aſcends difficultly, and brings over with it ſome part of the oil of vitriol in the form of ſpirit of vitriol, and this ſpirit being poured upon iron, copper, or ſalt of tartar, unites with the body and lets go the water: doth not this ſhew, that the Acid ſpirit is attracted by the water, and more attracted by the Fixed body than by the water, and therefore lets go the water to cloſe with the fixed body? And is it not for the ſame reaſon that the water and Acid ſpirits, which are mixed together in vinegar, *Aqua fortis*, and ſpirit of ſalt, cohere and riſe together in diſtillation; but if the *menſtruum* be poured on

Attractions.

on ſalt of tartar, or on lead or iron, or any Fixed body which it can diſſolve, the acid by a ſtronger attraction adheres to the body, and lets go the water? And is it not alſo from a mutual attraction, that the ſpirits of ſoot and ſea-ſalt unite and compoſe the particles of ſal-armoniac; which are leſs volatile than before, becauſe groſſer and freer from water; and that the particles of ſal-armoniac in ſublimation carry up the particles of antimony, which will not ſublime alone; and that the particles of mercury, uniting with the acid particles of ſpirit of ſalt, compoſe mercury ſublimate; and with the particles of ſulphur, compoſe cinnabar; and that the particles of ſpirit of wine and ſpirit of urine well rectified unite; and, letting go the water which diſſolved them, compoſe a conſiſtent body; and that in ſubliming cinnabar from ſalt of tartar, or from quick lime, the ſulphur, by a ſtronger attraction of the ſalt or lime, lets go the mercury, and ſtays with the fixed body; and that when mercury ſublimate is ſublimed from antimony, or from regulus of antimony, the ſpirit of ſalt lets go the mercury, and unites with the antimonial metal, which attracts it more ſtrongly; and ſtays with it, till the heat be great enough to make them both aſcend together; and then carries up the metal with it in the form of a very fuſible ſalt, called butter of antimony; although the ſpirit of ſalt alone be almoſt as volatile as water, and the antimony alone as fixed as lead?

When *Aqua fortis* diſſolves ſilver and not gold, and *Aqua regia* diſſolves gold and not ſilver; may it not be ſaid, that *Aqua fortis* is ſubtile enough to penetrate gold as well as ſilver, but wants the Attractive force to give it entrance; and that *Aqua regia* is ſubtile enough to penetrate ſilver as well as gold, but wants the Attractive force to give it entrance? For *Aqua regia* is nothing elſe than *Aqua fortis* mixed with ſome ſpirit of ſalt, or with ſal-armoniac; and even common ſalt, diſſolved in *Aqua fortis*, enables the *menſtruum* to diſſolve gold, though the ſalt be a groſs body. When therefore ſpirit of ſalt precipitates ſilver out of *Aqua fortis*; is it not done by attracting and mixing with the *Aqua fortis*, and not attracting, or perhaps repelling ſilver? And when water precipitates antimony out of the ſublimate of antimony and ſal-armoniac, or out of butter of antimony; is it not done by its diſſolving,

Elective

diſſolving, mixing with, and weakening the ſal-armoniac or ſpirit of ſalt, and its not attracting, or perhaps repelling the antimony? And is it not for want of an Attractive virtue between the parts of water and oil, of quick-ſilver and antimony, of lead and iron, that theſe ſubſtances do not mix; and by a weak attraction, that quick-ſilver and copper mix difficultly; and from a ſtrong one, that quick-ſilver and tin, antimony and iron, water and ſalts, mix readily? And in general, is it not from the ſame principle that heat congregates homogeneal bodies, and ſeparates heterogeneal ones?

When arſnick with ſoap gives a regulus, and with mercury ſublimate a volatile fuſible ſalt, like butter of antimony; doth not this ſhew, that arſnick, which is a ſubſtance totally volatile, is compounded of fixed and volatile parts, ſtrongly cohering by a mutual attraction, ſo that the volatile will not aſcend without carrying up the fixed? And ſo, when an equal weight of ſpirit of wine and oil of vitriol are digeſted together, and in diſtillation yield two fragrant and volatile ſpirits, which will not mix with one another, and a fixed black earth remains behind; doth not this ſhew, that oil of vitriol is compoſed of volatile and fixed parts ſtrongly united by attraction, ſo as to aſcend together in form of a volatile, acid, fluid ſalt, until the ſpirit of wine attracts and ſeparates the volatile parts from the fixed? And therefore, ſince oil of ſulphur *per campanam* is of the ſame nature with oil of vitriol, may it not be inferred, that ſulphur is alſo a mixture of volatile and fixed parts ſo ſtrongly cohering by attraction, as to aſcend together in ſublimation. By diſſolving flowers of ſulphur in oil of turpentine, and diſtilling the ſolution, it is found that ſulphur is compoſed of an inflammable thick oil or fat bitumen, an acid ſalt, a very fixed earth, and a little metal. The three firſt were found not much unequal to one another, the fourth in ſo ſmall a quantity as ſcarce to be worth conſidering. The Acid ſalt, diſſolved in water, is the ſame with oil of ſulphur *per campanam*; and abounding much in the bowels of the earth, and particularly in markaſites, unites itſelf to the other ingredients of the markaſite, which are, bitumen, iron, copper and earth, and with them compounds alume, vitriol and ſulphur. With

Attractions.

With the earth alone it compounds alum; with the metal alone, or metal and earth together, it compounds vitriol; and with the bitumen and earth it compounds ſulphur. Whence it comes to paſs, that markaſites abound with thoſe three minerals. And is it not from the mutual attraction of the ingredients, that they ſtick together for compounding theſe minerals, and that the bitumen carries up the other ingredients of the ſulphur, which without it would not ſublime? And the ſame queſtion may be put concerning all, or almoſt all the groſs bodies in nature. For all the parts of animals and vegetables are compoſed of ſubſtances volatile and fixed, fluid and ſolid, as appears by their analyſis; and ſo are ſalts and minerals, ſo far as chemiſts have been hitherto able to examine their compoſition.

When mercury ſublimate is re-ſublimed with freſh mercury, and becomes *mercurius dulcis*, which is a white taſteleſs earth ſcarce diſſolvable in water; and *mercurius dulcis*, re-ſublimed with ſpirit of ſalt, returns into mercury ſublimate; and when metals, corroded with a little Acid, turn into ruſt, which is an earth taſteleſs and indiſſolvable in water; and this earth, imbibed with more acid, becomes a metallic ſalt; and when ſome ſtones, as ſpar of lead, diſſolved in proper *menſtruums*, become ſalts: do not theſe things ſhew, that ſalts are dry earth and watery acid united by attraction; and that the earth will not become, a ſalt without ſo much acid as makes it diſſolvable in water? Do not the ſharp and pungent taſtes of acids ariſe from the ſtrong attraction, whereby the acid particles ruſh upon and agitate the particles of the tongue? And when metals are diſſolved in acid *menſtruums*, and the acids, in conjunction with the metal, act after a different manner; ſo that the compound has a different taſte, much milder than before, and ſometimes a ſweet one: is it not becauſe the acids adhere to the metallic particles, and thereby loſe much of their activity? And if the acid be in too ſmall a proportion to make the compound diſſolvable in water, will it not, by adhering ſtrongly to the metal, become unactive and loſe its taſte, and the compound be a taſteleſs earth? For ſuch things, as are not diſſolvable by the moiſture of the tongue, act not upon the taſte.

Elective

As gravity makes the ſea flow round the denſer and weightier parts of the globe of the earth; ſo the attraction may make the watery acid flow round the denſer and compacter particles of earth, for compoſing the particles of ſalt. For otherwiſe the acid would not do the office of a medium between the earth and common water, for making ſalts diſſolvable in the water; nor would ſalt of tartar readily draw off the acid from diſſolved metals, nor metals the acid from mercury. Now as in the great globe of the earth and ſea, the denſeſt bodies by their gravity ſink down in water, and always endeavour to go towards the center of the globe; ſo in particles of ſalt, the denſeſt matter may always endeavour to approach the center of the particle: ſo that a particle of ſalt may be compared to a chaos; being denſe, hard, dry, and earthy in the center; and rare, ſoft, moiſt, and watery in the circumference. And hence it ſeems to be, that ſalts are of a laſting nature, being ſcarce deſtroyed, unleſs by drawing away their watery parts by violence, or by letting them ſoak into the pores of the central earth by a gentle heat in putrefaction, until the earth be diſſolved by the water, and ſeparated into ſmaller particles; which, by reaſon of their ſmallneſs, make the rotten compound appear of a black colour. Hence alſo it may be, that the parts of animals and vegetables preſerve their forms, and aſſimilate their nouriſhment; the ſoft and moiſt nouriſhment eaſily changing its texture by a gentle heat and motion, till it becomes like the denſe, hard, dry, and durable earth in the center of each particle. But when the nouriſhment grows unfit to be aſſimilated, or the central earth grows too feeble to aſſimilate it, the motion ends in confuſion, putrefaction and death.

If a very ſmall quantity of any ſalt or vitriol be diſſolved in a great quantity of water, the particles of the ſalt or vitriol will not ſink to the bottom, though they be heavier in *ſpecie* than the water; but will evenly diffuſe themſelves into all the water, ſo as to make it as ſaline at the top as at the bottom. And does not this imply, that the parts of the ſalt or vitriol recede from one another, and endeavour to expand themſelves, and get as far aſunder as the quantity of water, in which they float, will allow? And does not this endeavour imply, that they have a Repulſive

pulſive force by which they fly from one another; or, at leaſt, Attractions. that they attract the water more ſtrongly than they do one another? For as all things aſcend in water, which are leſs attracted than water, by the gravitating power of the earth; ſo all the particles of ſalt which float in water, and are leſs attracted than water by any one particle of ſalt, muſt recede from that particle, and give way to the more attracted water.

When any ſaline vapour is evaporated to a cuticle and let cool, the ſalt concretes in regular figures; which argues, that the particles of the ſalt, before they concreted, floated in the liquor at equal diſtances in rank and file, and by conſequence that they acted upon one another by ſome power, which at equal diſtances is equal, at unequal diſtances unequal. For by ſuch a power they will range themſelves uniformly, and without it they will float irregularly, and come together as irregularly. And ſince the particles of iſland cryſtal act all the ſame way upon the rays of light, for cauſing the unuſual refraction; may it not be ſuppoſed, that in the formation of this cryſtal, the particles not only ranged themſelves in rank and file for concreting in regular figures, but alſo, by ſome kind of polar virtue, turned their homogeneal ſides the ſame way?

The parts of all homogeneal hard bodies, which fully touch one another, ſtick together very ſtrongly. And for explaining how this may be, ſome have invented hooked atoms, which is begging the queſtion; and others tell us, that bodies are glued together by Reſt; that is, by an occult quality, or rather by nothing ([dd]): and others, that they ſtick together by conſpiring motions, that is, by relative Reſt amongſt themſelves. I had rather infer from their coheſion, that their particles attract one another by ſome force, which in immediate contact is exceeding ſtrong, at ſmall diſtances performs the Chemical operations abovementioned, and reaches not far from the particles with any ſenſible effect.

All bodies ſeem to be compoſed of hard particles: for otherwiſe fluids would not congeal; as water, oils, vinegar, and ſpirit or oil of vitriol do by freezing; mercury, by fumes of lead; ſpi-

([dd]) —*by reſt—by nothing.*]—Quiete; hoc eſt planè nihilo. Dr. *Clarke*'s firſt *Latin.*

Elective

rit of nitre and mercury, by diſſolving the mercury and evaporating the flegm; ſpirit of wine and ſpirit of urine, by deflegming and mixing them; and ſpirit of urine and ſpirit of ſalt, by ſubliming them together to make ſal-armoniac. Even the rays of light ſeem to be hard bodies; for otherwiſe they would not retain different properties in their different ſides. And therefore hardneſs may be reckoned the property of all uncompounded matter. At leaſt, this ſeems to be as evident as the univerſal impenetrability of matter. For all bodies, ſo far as experience reaches, are either hard, or may be hardened; and we have no other evidence of univerſal impenetrability, beſides a large experience without an experimental exception. Now if compound bodies are ſo very hard as we find ſome of them to be, and yet are very porous, and conſiſt of parts which are only laid together; the ſimple particles which are void of pores, and were never yet divided, muſt be much harder. For ſuch hard particles being heaped up together, can ſcarce touch one another in more than a few points; and therefore muſt be ſeparable by much leſs force, than is requiſite to break a ſolid particle, whoſe parts touch in all the ſpace between them, without any pores or interſtices to weaken their coheſion. And how ſuch very hard particles, which are only laid together, and touch only in a few points, can ſtick together, and that ſo firmly as they do, without the aſſiſtance of ſomething which cauſes them to be attracted or preſſed towards one another, is very difficult to conceive

The ſame thing I infer alſo from the cohering of two poliſhed marbles *in Vacuo*; and from the ſtanding of quick-ſilver in the barometer at the height of 50, 60 or 70 inches, or above, whenever it is well purged of air and carefully poured in, ſo that its parts

(ee) *The atmoſphere by its weight, &c.*] Inſtead of the ſequel of this paragraph, Dr. *Clarke's* firſt *Latin* had what follows.

Nonnulli exiſtimant, marmora illa compreſſa eſſe Æthere quodam ambiente, argentumque vivum eodem Æthere ſurſum in tubam impelli. Verùm ſi ætherii illi tranſitus patet, vel per argentum vivum, vel per vitrum; fieri non poteſt, ut is argentum vivum ſurſum in tubum impellat. Et ſi tranſitus ei per neutrum patet, jam non poterit is permittere, ut argentum vivum ſubſidat; quomodo illud ſubſidit quidem, ſi vitrum ſuccutiatur, adeoque argentum vivum à ſe disjungit; ſive argentum vivum habeat in ſe bullulas aliquas aëris, quæ impediant, quo minùs partes ejus conſtingant, & cohæreant inter ſe. Atque etiam idem experimentum obſervatum fuit in aquâ, ab omni priùs aere probè depurgatâ. Quum argentum vivum congelatum ſit fumis plumbi, vel aqua frigore,

parts be every where contiguous both to one another and to the glaſs (ee). The atmoſphere by its weight preſſes the quick-ſilver into the glaſs, to the height of 29 or 30 inches. And ſome other agent raiſes it higher, not by preſſing it into the glaſs, but by making its parts ſtick to the glaſs, and to one another. For upon any diſcontinuation of parts, made either by bubbles or by ſhaking the glaſs, the whole mercury falls down to the height of 29 or 30 inches. Attractions.

And of the ſame kind with theſe experiments are thoſe that follow (ff). If two plane poliſhed plates of glaſs (ſuppoſe two pieces of a poliſhed looking-glaſs) be laid together, ſo that their ſides be parallel, and at a very ſmall diſtance from one another, and then their lower edges be dipped into water, the water will riſe up between them. And the leſs the diſtance of the glaſs is, the greater will be the height to which the water will riſe. If the diſtance be about the hundredth part of an inch, the water will riſe to the height of about an inch; and if the diſtance be greater or leſs in any proportion, the height will be reciprocally proportional to the diſtance very nearly. For the attractive force of the glaſſes is the ſame, whether the diſtance between them be greater or leſs; and the weight of the water drawn up is the ſame, if the height of it be reciprocally proportional to the diſtance of the glaſſes. And in like manner, water aſcends between two marbles, poliſhed plane, when their poliſhed ſides are parallel, and at a very ſmall diſtance from one another. And if ſlender pipes of glaſs be dipped at one end into ſtagnating water, the water will riſe up within the pipe; and the heighth, to which it ariſes, will be reciprocally proportional to the diameter of the cavity of the pipe, and will equal the height to which it riſes between two planes of

gore, partes liquoris congelati ita cohærent, ut corpus durum conſtituant. Atque experimento quidem jam memorato, de liquoribus in barometro ad tam inſolitam usque altitudinem ſuſpenſis, apparet partes corporum etiam fluidorum cohærere inter ſe. Unde facilè intelligi poteſt, quæcunque demum cauſa efficiat ut partes Glaciei & Metallorum durorum cohæreant inter ſe, eandem itidem efficere, ut partes eorundem corporum etiam liquefactorum cohæreant; licet fortaſſis minùs firmè. Nam particulæ quidem corporum liquefactorum inter ſe huc illuc perpetuò ſublabuntur.

In the ſecond *Engliſh*, and all the ſucceeding editions, the paragraph appeared as we now give it.

(ff) *And of the ſame kind with theſe experiments, &c.*] Nothing of all that follows to the words, *philoſophy to find them out*, was in the firſt *Latin* of Dr. *Clarke*. But the whole firſt appeared in the ſecond *Engliſh*.

glaſs,

Elective

glaſs, if the ſemidiameter of the cavity of the pipe be equal to the diſtance between the planes, or thereabouts. And theſe experiments ſucceed after the ſame manner *in Vacuo* as in the open air (as hath been tried before the Royal Society) and therefore are not influenced by the weight or preſſure of the atmoſphere.

And if a large pipe of glaſs be filled with ſifted aſhes, well preſſed together in the glaſs, and one end of the pipe be dipped into ſtagnating water; the water will riſe up ſlowly in the aſhes, ſo as in the ſpace of a week or fortnight to reach up within the glaſs, to the height of 30 or 40 inches above the ſtagnating water. And the water riſes up to this height by the action only of thoſe particles of the aſhes, which are upon the ſurface of the elevated water; the particles which are within the water, attracting or repelling it as much downwards as upwards. And therefore the action of the particles is very ſtrong. But the particles of the aſhes being not ſo denſe and cloſe together as thoſe of glaſs, their action is not ſo ſtrong as that of glaſs; which keeps quickſilver ſuſpended to the height of 60 or 70 inches, and therefore acts with a force, which would keep water ſuſpended to the height of above 60 feet.

By the ſame principle a ſponge ſucks in water; and the glands in the bodies of animals, according to their ſeveral natures and diſpoſitions, ſuck in various juices from the blood.

If two plane poliſhed plates of glaſs three or four inches broad, and twenty or twenty-five long, be laid, one of them parallel to the horizon, the other upon the firſt, ſo as at one of their ends to touch one another, and contain an angle of about 10 or 15 minutes; and the ſame be firſt moiſtened, on their inward ſides, with a clean cloth dipped into oil of oranges or ſpirit of turpentine; and a drop or two of the oil or ſpirit be let fall upon the lower glaſs at the other end; ſo ſoon as the upper glaſs is laid down upon the lower, ſo as to touch it at one end, as above, and to touch the drop at the other end, making with the lower glaſs an angle of about 10 or 15 minutes; the drop will begin to move towards the concourſe of the glaſſes, and will continue to move with

(gg) That is, a weight of 547 or 820 *lbs.* or upon an average 5½ *cwt.* taking the weight of a cubic

Attractions.

with an accelerated motion, till it arrives at that concourſe of the glaſſes. For the two glaſſes attract the drop, and make it run that way, towards which the attractions incline. And if, when the drop is in motion, you lift up that end of the glaſſes where they meet, and towards which the drop moves, the drop will aſcend between the glaſſes, and therefore is attracted. And as you lift up the glaſſes more and more, the drop will aſcend ſlower and ſlower, and at length reſt; being then carried downward by its weight, as much as upwards by the attraction. And by this means you may know the force, by which the drop is attracted at all diſtances from the concourſe of the glaſſes.

Now by ſome experiments of this kind (made by Mr. *Hawkſby*) it has been found that the attraction is almoſt reciprocally in a duplicate proportion of the diſtance of the middle of the drop from the concourſe of the glaſſes, viz. reciprocally in a ſimple proportion, by reaſon of the ſpreading of a drop, and its touching each glaſs in a larger ſurface; and again reciprocally in a ſimple proportion, by reaſon of the attractions growing ſtronger within the ſame quantity of attracting ſurface. The attraction therefore, within the ſame quantity of attracting ſurface, is reciprocally as the diſtance between the glaſſes. And therefore where the diſtance is exceeding ſmall, the attraction muſt be exceeding great. By the Table in the ſecond Part of the ſecond Book, wherein the Thickneſs of coloured plates of water between two glaſſes are ſet down, the Thickneſs of the plate, where it appears very black, is three-eighths of the ten hundredth thouſandth part of an inch. And where the oil of oranges between the glaſſes is of this thickneſs, the attraction, collected by the foregoing rule, ſeems to be ſo ſtrong, as within a circle of an inch in diameter, to ſuffice to hold up a weight equal to that of a cylinder of water of an inch in diameter, and two or three furlongs in length (gg). And where it is of a leſs thickneſs, the attraction may be proportionally greater, and continue to increaſe, until the thickneſs do not exceed that of a ſingle particle of the oil. There are therefore agents in Nature able to make the par-

cubic foot of water, as it is ſtated in the Principia, Lib. II. Sect. VIII. Schol.

ticles

Elective

ticles of bodies ſtick together by very ſtrong attractions. And it is the buſineſs of Experimental Philoſophy to find them out.

Now the ſmall particles of matter may cohere by the ſtrongeſt attractions, and compoſe bigger particles of weaker virtue; and many of theſe may cohere and compoſe bigger particles, whoſe virtue is ſtill weaker; and ſo on for divers ſucceſſions, until the progreſſion end in the biggeſt particles, on which the operations in chemiſtry, and the colours of Natural bodies depend; and which, by adhering, compoſe bodies of a ſenſible magnitude. If the body is compact, and bends or yields inward to preſſion without any ſliding of its parts, it is Hard and Elaſtick, returning to its figure with a force riſing from the mutual attraction of its parts. If the parts ſlide upon one another, the body is Malleable or Soft. If they ſlip eaſily, and are of a fit ſize to be agitated by heat, and the heat is big enough to keep them in agitation, the body is Fluid; and if it be apt to ſtick to things, it is Humid; and the drops of every Fluid affect a round figure, by the mutual attraction of their parts, as the globe of the earth and ſea affects a round figure, by the mutual attraction of its parts by gravity.

Since metals diſſolved in acids attract but a ſmall quantity of the acid, their Attractive force can reach but to a ſmall diſtance from them. And as in Algebra, where Affirmitive quantities vaniſh and ceaſe, there Negative ones begin; ſo in Mechanicks, where Attraction ceaſes, there a Repulſive virtue ought to ſucceed. And that there is ſuch a virtue, ſeems to follow from the reflexions and inflexions of the rays of light. For the rays are repelled by bodies, in both theſe caſes, without the immediate contact of the reflecting or inflecting body. It ſeems alſo to follow from the emiſſion of light; the ray, ſo ſoon as it is ſhaken off from a ſhining body by the vibrating motion of the parts of the body, and gets beyond the reach of attraction, being driven away with exceeding great velocity. For that force, which is ſufficient to turn it back in reflexion, may be ſufficient to emit it. It ſeems alſo

[bb] —— *quantity for quantity.*] Here followed in Dr. *Clarke's* firſt *Latin.* Ex eo, quòd particulæ Aeris à ſe invicem & à corporibus denſis recedere conentur, fit etiam, ut Aer rarior ſit in tubis vitreis exilibus, quàm in amplioribus ſpatiis; & per raritatem illam vi minore, quàm apertus Aer,

alſo to follow from the production of air and vapour: the particles, when they are ſhaken off from bodies by heat or fermentation, ſo ſoon as they are beyond the reach of the attraction of the body, receding from it, and alſo from one another, with great ſtrength; and keeping at a diſtance, ſo as ſometimes to take up above a million of times more ſpace than they did before, in the form of a denſe body. Which vaſt contraction and expanſion ſeems unintelligible, by feigning the particles of air to be ſpringy and ramous, or rolled up like hoops, or by any other means than a Repulſive power. The particles of fluids, which do not cohere too ſtrongly, and are of ſuch a ſmallneſs as renders them moſt ſuſceptible of thoſe agitations which keep liquors in a *fluor*, are moſt eaſily ſeparated and rarified into vapour; and in the language of the chemiſts, they are volatile, rarifying with an eaſy heat, and condenſing with cold. But thoſe which are groſſer, and ſo leſs ſuſceptible of agitation, or cohere by a ſtronger attraction, are not ſeparated without a ſtronger heat, or perhaps not without fermentation. And theſe laſt are the bodies, which chemiſts call Fixed, and being rarified by fermentation, become true permanent air: thoſe particles receding from one another with the greateſt force, and being moſt difficultly brought together, which upon contact adhere moſt ſtrongly. And becauſe the particles of permanent air are groſſer, and ariſe from denſer ſubſtances than thoſe of vapours; thence it is that true air is more ponderous than vapour, and that a moiſt atmoſphere is lighter than a dry one, quantity for quantity[bb]. From the ſame Repelling power it ſeems to be, that flies walk upon the water without wetting their feet; and that the object-glaſſes of long teleſcopes lie upon one another without touching; and that dry powders are difficultly made to touch one another ſo as to ſtick together, unleſs by melting them, or wetting them with water, which by exhaling may bring them together; and that two poliſhed marbles, which by immediate contact ſtick together, are difficultly brought ſo cloſe together as to ſtick.

Aer, premat ſuperficiem aquæ in quam inferior tubuli demerſa ſit extremitas; adeoque permittat ut aqua illac in tubulam aſcendat: quæ eſt Philtrationis cauſa, uti olim explicavit D. *Hookius.* Porro eidem vi repellenti tribuendum videntur, quòd Muſcæ, &c.

Neceſſity of active principles

And thus Nature will be very conformable to herſelf, and very ſimple; performing all the great motions of the heavenly bodies by the attraction of gravity, which intercedes thoſe bodies; and almoſt all the ſmall ones of their particles, by ſome other Attractive and Repelling powers, which intercede the particles. The *vis inertiæ* is a paſſive principle, by which bodies perſiſt in their motion or reſt; receive motion in proportion to the force impreſſing it, and reſiſt as much as they are reſiſted. By this principle alone there never could have been any motion in the world. Some other principle was neceſſary for putting bodies into motion; and now they are in motion, ſome other principle is neceſſary for conſerving the motion. For from the various compoſition of two motions, it is very certain that there is not always the ſame Quantity of motion in the world. For if two globes, joined by a ſlender rod, revolve about their common center of gravity with an uniform motion, while that center moves on uniformly in a right line drawn in the plane of their circular motion; the ſum of the motions of the two globes, as often as the globes are in the right line deſcribed by their common center of gravity, will be bigger than the ſum of their motions, when they are in a line perpendicular to that right line ([ii]). By this inſtance it appears, that motion may be got or loſt. But by reaſon of the tenacity of fluids, and attrition of their parts, and the weakneſs of elaſticity in ſolids, motion is much more apt to be loſt than got, and is always upon the decay. For bodies, which are either abſolutely hard, or ſo ſoft as to be void of elaſticity, will not rebound from one another. Impenetrability makes them only ſtop. If two equal bodies meet directly *in Vacuo*, they will, by the laws of motion, ſtop where they meet, and loſe all their motion, and remain in reſt; unleſs they be Elaſtick, and receive new motion from their ſpring. If they have ſo much elaſticity as ſuffices to make them rebound with a quarter, or half, or three-quarters of the force with which they come together, they will loſe three-quarters, or half, or a quarter of their motion. And this may be

([ii]) The contrary ſeems to be true; that the ſum of the motions will be the greateſt, when the rod connecting the revolving bodies is perpendicular to the right line, along which the common center of gravity is moved. But in either way the different quantity of that ſum of motion, in

be tried, by letting two equal pendulums fall againſt one another from equal heights. If the pendulums be of lead or ſoft clay, they will loſe all, or almoſt all, their motions: if of Elaſtick bodies, they will loſe all but what they recover from their Elaſticity ([kk]). If it be ſaid, that they can loſe no motion, but what they communicate to other bodies; the conſequence is, that *in Vacuo* they can loſe no motion, but when they meet, they muſt go on and penetrate one another's dimenſions ([kk]). If three equal round veſſels be filled, the one with water, the other with oil, the third with molten pitch, and the liquors be ſtirred about alike to give them a vortical motion; the pitch, by its tenacity, will loſe its motion quickly; the oil, being leſs tenacious, will keep it longer; and the water, being leſs tenacious, will keep it longeſt, but yet will loſe it in a ſhort time. Whence it is eaſy to underſtand, that if many contiguous *vortices* of molten pitch were each of them as large as thoſe, which ſome ſuppoſe to revolve about the ſun and fixed ſtars; yet theſe, and all their parts, would, by their tenacity and ſtiffneſs, communicate their motion to one another, till they all reſted among themſelves. *Vortices* of oil or water, or ſome fluider matter, might continue longer in motion; but unleſs the matter were void of all tenacity and attrition of parts, and communication of motion (which is not to be ſuppoſed) the motion would conſtantly decay. Seeing therefore the variety of motion, which we find in the world, is always decreaſing; there is a neceſſity of conſerving and recruiting it by active principles: ſuch as are the cauſe of gravity, by which planets and comets keep their motions in their orbs, and bodies acquire great motion in falling; and the cauſe of fermentation, by which the heart and blood of animals are kept in perpetual motion and heat; the inward parts of the earth are conſtantly warmed, and in ſome places grow very hot; bodies burn and ſhine; mountains take fire; the caverns of the earth are blown up; and the ſun continues violently hot and lucid, and warms all things by his light. For we meet with very little motion in the world, beſides what

to prevent the decay of Motion.

in theſe two poſitions of the rod, equally makes for our Author's aſſertion. Of which, perhaps, there is yet a more ſtriking proof in the prodigious generation of motion by the colliſion of Elaſtic Bodies in certain arrangements. Vid. Hugen. *De Motu Corporum ex percuſſione.*

([kk]) *If it be ſaid—Dimenſions.*] Nothing anſwering to this ſentence in Dr. *Clarke's* firſt *Latin.*

is owing to these active principles ([ll]). And if it were not for these principles, the bodies of the earth, planets, comets, sun, and all things in them, would grow cold and freeze, and become inactive masses; and all putrefaction, generation, vegetation and life would cease, and the planets and comets would not remain in their orbs.

Of the Creation of Matter.

All these things being considered, it seems probable to me, that God in the beginning formed matter in solid, massy, hard, impenetrable, moveable ([mm]) particles; of such sizes and figures, and with such other properties, and in such proportion to space ([nn]), as most conduced to the end for which he formed them; and that these primitive particles being solids, are incomparably harder than any Porous bodies compounded of them; even so very hard, as never to wear or break in pieces: no ordinary power being able to divide what God himself made One, in the first creation. While the particles continue entire, they may compose bodies of one and the same nature and texture in all ages: but should they wear away, or break in pieces, the nature of things, depending on them, would be changed. Water and earth, composed of old worn particles and fragments of particles, would not be of the same nature and texture now, with water and earth composed of entire particles, in the beginning. And therefore that nature may be lasting, the changes of corporeal things are to be placed only in the various separations, and new associations, and motions of these permanent particles; compound bodies being apt to break, not in the midst of solid particles, but where those particles are laid together, and only touch in a few points.

Principles of Motion.

It seems to me farther, that these particles have not only a *Vis inertiæ*, accompanied with such Passive laws of motion as naturally result from that force; but also that they are moved by certain Active principles, such as is that of gravity, and that which causes fermentation, and the cohesion of bodies. These principles

([ll]) —— *these active principles.*] In the first *Latin* of Dr. *Clarke* the sentence stood thus. Nam admodum paulum motûs in Mundo invenimus, præterquam quod vel ex his Principiis actuosis, vel ex imperio Voluntatis, manifesto oritur. The next sentence, *And if it were not for these principles—not remain in their orbs*, does not appear at all in the first *Latin*.

([mm]) —— *impenetrable, moveable*] Impenetrabiles, inertes & mobiles. Dr. *Clarke's* first *Latin*.

([nn]) —— *to space.*]—eoque numero et quantitate pro ratione spatii in quo futurum erat ut moverentur.

ples I consider not as Occult qualities, supposed to result from the specifick forms of things, but as general laws of Nature, by which the things themselves are formed: their truth appearing to us by phænomena, though their causes be not yet discovered. For these are manifest qualities, and their causes only are occult ([oo]). And the *Aristotelians* gave the name of Occult qualities not to manifest qualities, but to such qualities only as they supposed to lie hid in bodies, and to be the unknown causes of manifest effects: such as would be the causes of gravity, and of Magnetick and Electrick attractions, and of fermentations, if we should suppose that these forces, or actions, arose from qualities unknown to us, and uncapable of being discovered and made manifest. Such Occult qualities put a stop to the improvement of Natural Philosophy, and therefore of late years have been rejected. To tell us, that every species of things is endowed with an occult specifick quality, by which it acts and produces manifest effects, is to tell us nothing: but to derive two or three general principles of motion from phænomena, and afterwards to tell us how the properties and actions of all corporeal things follow from those manifest principles, would be a very great step in philosophy, though the causes of those principles were not yet discovered: and therefore I scruple not to propose the principles of motion above-mentioned, they being of very general extent, and leave their causes to be found out ([pp]).

An intelligent Creator.

Now by the help of these principles, all material things seem to have been composed of the hard and solid particles above-mentioned; variously associated, in the first creation, by the counsel of an intelligent Agent. For it became Him who created them, to set them in order. And if he did so, it is unphilosophical to seek for any other origin of the world, or to pretend that it might arise out of a chaos by the mere laws of Nature; though being once formed, it may continue by those laws for many ages. For

verentur. Dr. *Clarke's* first *Latin*; and so the sentence stands in Dr. *Clarke's* second *Latin* edition, which in most places was so corrected as to agree exactly with the second *English*. And to make sense of the passage, something is evidently wanting here to answer to the words of the *Latin*, *in quo futurum erat ut moverentur*. For to speak of particles of matter as bearing proportion to space indefinitely, were absurd.

([oo]) *And the Aristotelians——have been rejected.*] Not in Dr. *Clarke's* first *Latin*.

([pp]) *and leave their causes to be found out.*] Not in Dr. *Clarke's* first *Latin*.

while comets move in very excentrick orbs in all manner of poſitions, blind Fate could never make all the planets move one and the ſame way in orbs concentrick, ſome inconſiderable irregularities excepted, which may have riſen from the mutual actions of comets and planets upon one another, and which will be apt to increaſe, till this ſyſtem wants a reformation. Such a wonderful uniformity in the planetary ſyſtem muſt be allowed the effect of choice. And ſo muſt the uniformity in the bodies of animals, they having generally a right and a left ſide ſhaped alike, and on either ſide of their bodies two legs behind, and either two arms, or two legs, or two wings before upon their ſhoulders; and between their ſhoulders a neck (qq) running down into a backbone, and a head upon it; and in the head two ears, two eyes, a noſe, a mouth, and a tongue, alike ſituated. Alſo the firſt contrivance of thoſe very artificial parts of animals, the eyes, ears, brain, muſcles, heart, lungs, midriff, glands, larynx, hands, wings, ſwimming bladders, natural ſpectacles, and other organs of ſenſe and motion; and the inſtinct of brutes and inſects, can be the effect of nothing elſe than the wiſdom and ſkill of a powerful ever-living Agent; who, being in all places, is more able by his will to move the bodies within his boundleſs uniform ſenſorium (rr), and thereby to form and reform the parts of the univerſe, than we are by our will to move the parts of our own bodies (ss).

God not the Soul of the World.

And yet we are not to conſider the world as the body of God, or the ſeveral parts thereof as the parts of God. He is an uniform Being, void of organs, members or parts; and they are his creatures ſubordinate to him, and ſubſervient to his will; and he is no more the ſoul of them, than the ſoul of a man is the ſoul of the ſpecies of things carried through the organs of ſenſe into the place of its ſenſation, where it perceives them by means of its immediate preſence, without the intervention of any third

(qq) —— *running down into a backbone.*] Not in the firſt *Latin* of Dr. *Clarke.*

(rr) —— *his boundleſs uniform ſenſorium*]—infinito ſuo ſenſorio. Dr. *Clarke's* firſt *Latin.*

(ss) —— *than we are by our will to move the parts of our own bodies.*]—quam Anima noſtra, quæ eſt in nobis imago Dei, voluntate ſuâ ad corporis noſtri membra movenda valet. Dr. *Clarke's* firſt *Latin.*

(tt) *And yet we are not to conſider——things themſelves.*] Not in Dr. *Clarke's* firſt *Latin.*

(uu) —— *and in ſeveral proportions to ſpace.*]—vario quoque numero & quantitate pro ratione ſpatii

third thing. The organs of ſenſe are not for enabling the ſoul to perceive the ſpecies of things in its ſenſorium, but only for conveying them thither; and God has no need of ſuch organs, he being every where preſent to the things themſelves (tt). And ſince ſpace is diviſible *in infinitum*, and matter is not neceſſary in all places, it may be alſo allowed, that God is able to create particles of matter of ſeveral ſizes and figures, and in ſeveral proportions to ſpace (uu), and perhaps of different denſities (xx) and forces, and thereby to vary the laws of Nature, and make worlds of ſeveral ſorts in ſeveral parts of the univerſe. At leaſt, I ſee nothing of contradiction in all this.

As in Mathematicks, ſo in Natural Philoſophy, the inveſtigation of difficult things by the method of analyſis, ought ever to precede the method of compoſition. This analyſis conſiſts in making experiments and obſervations, (yy) and in drawing general concluſions from them by induction, and admitting of no objections againſt the concluſions, but ſuch as are taken from experiments, or other certain truths. For hypotheſes are not to be regarded in Experimental Philoſophy. And although the arguing from experiments and obſervations by induction be no demonſtration of general concluſions; yet it is the beſt way of arguing which the nature of things admits of, and may be looked upon as ſo much the ſtronger, by how much the induction is more general. And if no exception occur from phænomena, the concluſion may be pronounced generally. But if at any time afterwards any exception ſhall occur from experiments; it may then begin to be pronounced, with ſuch exceptions as occur. By this way of analyſis we may proceed from compounds to ingredients; and from motions to the forces producing them; and in general, from effects to their cauſes; and from particular cauſes to more general ones, till the argument end in the moſt general. This is the method of Analyſis. And the Syntheſis conſiſts in aſ-

ſpatii in quo inſunt. Dr. *Clarke's* firſt and ſecond *Latin.*

(xx) How the primordial atoms, perfectly ſimple and perfectly ſolid, i. e. without pore, ſhould differ in denſity, I cannot underſtand. It is true, different figures and ſizes of the firſt ſolid atoms may produce very different denſities of the compounds ſeverally formed from them, though in the ſame degree of compoſition. Perhaps this might be our Author's meaning.

(yy) —— *and in drawing general concluſions.*] Of all that follows to the words *Exceptions as occur*, there was nothing in the firſt *Latin* of Dr. *Clarke.*

ſuming

ſuming the cauſes diſcovered, and eſtabliſhed as principles, and by them explaining the phænomena proceeding from them, and proving the explanations.

In the two firſt Books of theſe Opticks, I proceeded by this analyſis to diſcover and prove the original differences of the rays of light in reſpect of refrangibility, reflexibility, and colour; and their alternate fits of eaſy Reflexion and eaſy Tranſmiſſion; and the properties of bodies, both opake and pellucid, on which their reflexions and colours depend. And theſe diſcoveries being proved, may be aſſumed in the method of compoſition for explaining the phænomena ariſing from them: an inſtance of which method I gave in the end of the firſt Book. In this third Book I have only begun the analyſis of what remains to be diſcovered about light, and its effects upon the frame of nature; hinting ſeveral things about it, and leaving the hints to be examined and improved by the farther experiments and obſervations of ſuch as are inquiſitive. And if Natural Philoſophy in all its parts, by purſuing this method, ſhall at length be perfected; the bounds of Moral Philoſophy will be alſo enlarged. For ſo far as we can know by Natural Philoſophy what is the Firſt cauſe, what power he has over us, and what benefits we receive from him; ſo far our duty towards him, as well as that towards one another, will appear to us by the light of Nature. And, no doubt, if the worſhip of falſe gods had not blinded the heathen, their Moral Philoſophy would have gone farther than to the four Cardinal Virtues. And inſtead of teaching the tranſmigration of ſouls, and to worſhip the ſun and moon, and dead heroes; they would have taught us to worſhip our true Author and Benefactor, as their anceſtors, did under the government of *Noah* and his ſons, before they corrupted themſelves (ᶻᶻ).

(ᶻᶻ) —— *as their anceſtors—themſelves.*] Not in the firſt *Latin* of Dr. *Clarke*, nor in the ſecond *Engliſh*. In Dr. *Clarke's* ſecond *Latin* the concluding ſentence ſtands thus. Quod quidem fecerunt majores ipſorum, antequam animum moreſque ſuos corruperant. Lex enim moralis ab origine gentibus univerſis erant ſeptem illa Nonchidarum præcepta: quorum præceptorum primum erat, unum eſſe agnoſcendum ſummum Dominum Deum, ejuſque cultum non eſſe in alios transferendum. Etenim ſine hoc principio nihil eſſet virtus aliud niſi merum nomen. In the third *Engliſh* the final ſentence appeared as we now give it.

THE END OF THE OPTICS.

Fig 1.

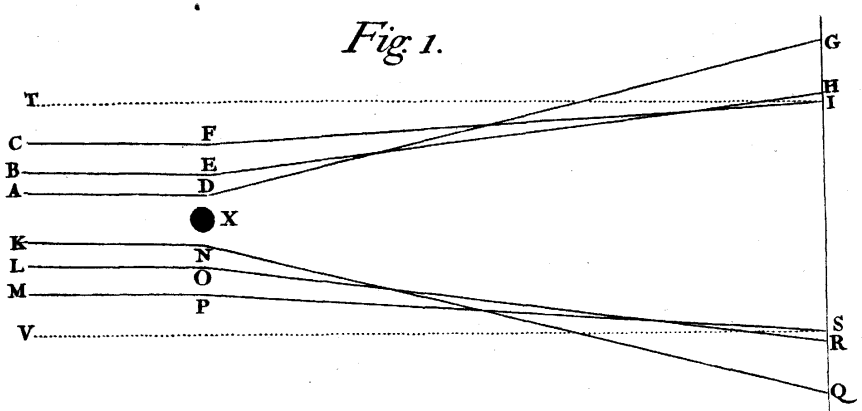


Fig 2.

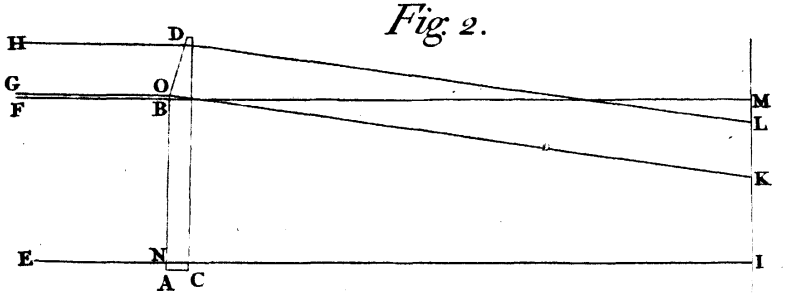
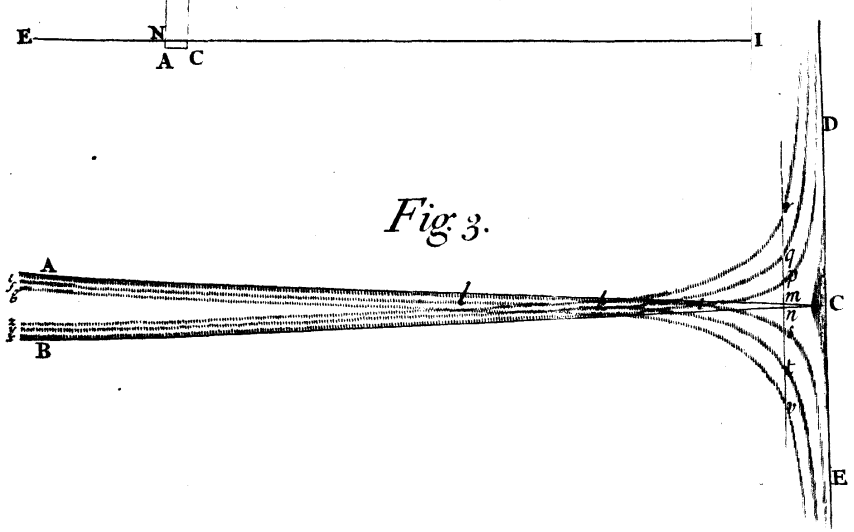


Fig 3.



LETTERS

OF

SIR ISAAC NEWTON

ON

VARIOUS SUBJECTS IN NATURAL PHILOSOPHY.

NOW FIRST

PUBLISHED AT LENGTH FROM THE ORIGINAL PAPERS EXTANT

IN THE

ARCHIVES OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON.

I. *Letters relating to Reflecting Teleſcopes,* Pag. 269
II. *Letters relating to the Theory of Light and Colours,* 295
III. *Letters relating to the Excitation of Electricity in Glaſs,* 375

LETTERS, &c.

RELATING TO

REFLECTING TELESCOPES.

I.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, March 16, 167⅓.

THE book, which my carrier by forgetfulneſs diſappointed me of the laſt week, I have now received, and thank you for it. With the teleſcope which I have made, I have ſometimes ſeen objects, and particularly the moon, very diſtinct in thoſe parts of it, which were near the ſides of the viſible angle. And at other times, when it hath been otherwiſe put together, it hath exhibited things, not without ſome confuſion. Which difference I attributed chiefly to ſome imperfection, that might poſſibly be, either in the figures of the metals or eye-glaſs; and once I found it cauſed by a little tarniſhing of the metal, in 4 or 5 days of moiſt weather.

One of the fellows of our College is making ſuch another teleſcope, with which laſt night I looked on Jupiter; and he ſeemed as diſtinct and ſharply defined, as I have ſeen him in other teleſcopes. When he hath finiſhed it, I will examine more ſtrictly, and ſend you an account of its performances. For it ſeems to be ſomething better than that which I made. Yours, &c.

II.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, March 19, 167⅓.

IN my laſt letter I gave you occaſion to ſuſpect, that the inſtrument which I ſent you is, in ſome reſpect or other, indiſpoſed;

or

or that the metals are tarniſhed. And by your letter of *March* 16, I am fully confirmed in that opinion. For whilſt I had it, it repreſented the moon in ſome parts of it as diſtinctly, as other teleſcopes uſually do, which magnify as much as that. Yet I very well know, that that inſtrument hath its imperfections, both in the compoſition of the metal, and in its being badly caſt; as you may perceive by a ſcabrous place near the middle of the metal on the poliſhed ſide, and alſo in the figure of the metal near that ſcabrous place. And in all thoſe reſpects, that inſtrument is capable of further improvement.

You ſeem to intimate, that the proportion of 38 to 1 holds only for its magnifying objects at ſmall diſtances. But if for ſuch diſtances, ſuppoſe 500 feet, it magnify at that rate, by the rules of Optics it muſt, for the greateſt diſtance imaginable, magnify more than $37\frac{1}{4}$ to 1; which is ſo inconſiderable a diminiſhing, that it may be even then as 38 to 1.

Here is made another inſtrument like the former, which does very well. Yeſterday I compared it with a ſix-foot teleſcope; and found it not only to magnify more, but alſo more diſtinctly. And to-day I found, that I could read in one of the Philoſophical Tranſactions, placed in the ſun's light, at an hundred foot diſtance; and that at an hundred and twenty foot diſtance, I could diſcern ſome of the words. When I made this trial, its aperture, defined next the eye, was equivalent to more than an inch and a third part of the object metal. This may be of ſome uſe to thoſe, that ſhall endeavour any thing in reflexions; for hereby they will in ſome meaſure be enabled to judge of the goodneſs of their inſtruments. I am, &c.

III.

ISAACI NEWTONI Matheſeos in Acad. Cantab. Prof. INVENTUM NOVUM quo Teleſcopia longa inſigniter contrahantur citra Effecti fraudes. Exhibitum. Soc. Reg. Lond. $167\frac{1}{2}$ *.

AB Speculum concavum metallicum, fundo Tubi adhæreus; cujus radius 14 digit. Anglicor.

CD

* This deſcription was drawn up by Mr. *Oldenburg*, by order of the Royal Society, to be tranſmitted

CD ſpeculum metallicum planum ovale, bacillo ferreo agglutinatum, et circulo æneo, intra tubi cavitatem mobili, infixum.

F lens vitrea, cujus latus ſuperius planum, inferius convexum, radius autem circa digiti ſemiſſis.

GGGG pars tubi interior, circulo æreo HI firmiter conſtricta, ita ut non facilè moveri poſſit.

PQKL pars tubi poſterior, circulo æneo, PQ, immobiliter infixa. O uncus ferreus, circulo æneo PQ affixus, ultra tubi axem extenſus; cui clavus cochleatus N immiſſus tubi partem poſteriorem antrorſum pellit, vel retrahit, ad ſpeculorum debitam diſtantiam inveſtigandam, parte priore fixâ remanente.

NMGI ferrum curvatum, quod tubum ſuſtinet; globo ligneo verſatili S, clavo R affixum.

Centrum ſpeculi plani, CD, locatur in axe Tubi; ita ut in ipſum perpendicularis, à centro lentis demiſſa, cum axe angulum rectum conſtituat; et objecti ſpecies, à ſpeculo concavo in idem repercuſſa, verſus lentis focum E reflectatur.

Corona ventilogio ornamenti gratiâ impoſita, 300 circiter pedibus diſtans, cùm uno oculo huic tubo admoto ſpectabatur altero in chartam ſubjectam, 11 circiter digitis ab ipſo diſtantem, magnitudine et figurâ A inſignitâ apparebat. Tubus autem vulgaris 25 digit. longus, lente objectivâ convexâ, oculari verò utrinque concavâ (cujus radius 2. digit eſt) oculo admoto, figuram coronæ magnitudine B, eâdem obſervatâ chartæ ab oculo diſtantiâ, alteri oculo exhibebat, conſentientibus poſt repetita experimenta DD. Brounker, Wren, Hook.

IV.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, Jan. 6, $167\frac{4}{5}$.

THE deſcription of the inſtrument you ſent is very well; only the radius of the concave metal, which you put 14 inches, is more juſtly $12\frac{2}{3}$ or 13 inches; and the radius of the eye-glaſs, which you put half an inch, is the twelfth part of it, if not leſs: for the metal collects the ſun's rays at $6\frac{1}{3}$ inches diſtance, and the

tranſmitted to Mr. *Hugens* at *Paris*. The Society judging this the beſt method of ſecuring the fame of this great invention to the Author.

eye-

eye-glaſs is leſs than $\frac{1}{6}$ of an inch diſtance from its vertex. By the tools alſo to which they were ground, I know their dimenſions; and particularly meaſuring the diameter of the hemiſpherical concave, in which the eye-glaſs was ground, I find it the ſixth part of an inch.

Perhaps it may give ſome ſatisfaction to Mr. *Hugens* to underſtand, in what degree it repreſents things diſtinct, and free from colours; and to know the aperture by which it admits light. And after the words [verſus focum E reflectatur] it may not be amiſs to add this note.

Conferendo diſtantias foci iſtius à verticibus lentis et ſpeculi concavi, hoc eſt EF $\frac{1}{6}$ dig. et ETV $6\frac{1}{3}$ dig. prodit ratio 1 ad 38; quâ judicatur objecta 38 vicibus circiter ampliari.

And to this proportion is very conſentaneous the obſervation of the crown on the weather-cock. For the ſcheme repreſents it bigger by $2\frac{1}{2}$ times, when ſeen through this, than when through an ordinary perſpective. And ſo ſuppoſing that to magnify 13 or 14 times (as by the deſcription it ſhould) this by experiment proportionably muſt magnify almoſt as much as I have aſſigned it.

To the objection, that with it objects are difficultly found; I may anſwer, that that is the inconvenience of all tubes that magnify much. And that after a little uſe, the inconvenience will grow leſs; for I could readily enough find any day objects, by knowing which way they were poſited from other objects, that I accidentally ſaw in it. But in the night to find ſtars, I confeſs is troubleſome enough; yet this may be eaſily remedied by two ſights affixed to the iron rod, by which the tube is ſuſtained; and ſuch I once intended ſhould have been made, before I ſent it away from me; but that I thought the defect would not be judged material. If ſuch ſights be not found a ſufficient remedy, there may be an ordinary proſpective glaſs faſtened to the ſame frame with the tube, and directed towards the ſame object, as *Des Cartes* in his *Dioptrics* hath deſcribed, for remedying the ſame inconvenience of his beſt teleſcopes.

The plane ſide of the eye-glaſs is apt to be ſoiled with the duſt falling down upon it. And therefore the little leaden ring, put into the orifice of the bigger leaden barrel to moderate its aperture, muſt be ſometimes taken out, and the glaſs wiped with

leather done upon the ſmall end of a ſtick, or other ſuch like contrivance. But care muſt be taken, that the ſaid ring be not loſt; for without it objects appear very confuſed, at the edges of the apparent ſpace. So if the concave metal contract any dullneſs, by moiſture or otherwiſe; it ought to be taken out and rubbed with gentle leather, but not with putty, or any thing that may wear the metal.

I am very ſenſible of the honour done me by the biſhop of Sarum, in propoſing me a candidate, and which I hope will be further conferred upon me by my election into the Society. And if ſo, I ſhall endeavour to teſtify my gratitude, by communicating what my poor and ſolitary endeavours can effect, towards promoting the Philoſophical deſign.. I am, &c.

V.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, Jan. 18, 167$\frac{1}{2}$.

UNDERSTANDING, by your laſt, that ſome of the fellows of the Hon. Society, in order to a bigger reflective Teleſcope, are deviſing a fit metalline matter; let me preſume to give them this caution, that whilſt they ſeek for a white, hard and durable metalline compoſition, they reſolve not upon ſuch an one as is full of ſmall pores, only diſcoverable by a microſcope: for though ſuch an one may, to appearance, take a good poliſh, yet the edges of thoſe ſmall pores will wear away faſter in the poliſhing, than the other parts of the metal; and ſo, however the metal ſeem polite, yet it ſhall not reflect with ſuch an accurate regularity as it ought to do. Thus tin-glaſs, mixed with ordinary bell-metal, makes it more white, and apt to reflect a greater quantity of light; but withal, its fumes raiſed in the fuſion, like ſo many aerial bubbles, fill the metal full of the microſcopical pores. But white arſenick both blanches the metal, and leaves it ſolid, without any ſuch pores; eſpecially if the fuſion hath not been too violent. What the ſtellate regulus of *Mars* (which I have ſome- Compoſition for the great Mirror.

Compoſition times uſed) or rather ſuch like ſubſtance, will do, deſerves particular examination.

Let me add further this intimation; that putty, or other ſuch like powder, with which it is poliſhed, by the ſharp angles of its particles, fretteth the metal, if it be not very fine, and filleth it full of ſuch ſmall holes as I ſpeak of. Wherefore care muſt be taken of that, before judgment be given, whether the metal be, throughout the body of it, porous or not.

I deſire, that in your next letter you would inform me, for what time the Society continue their weekly meetings; becauſe if they continue them for any time, I am purpoſing them, to be conſidered of and examined, an account of a Philoſophical diſcovery, which induced me to the making of the ſaid Teleſcope; and I doubt not but will prove much more grateful than the communication of that inſtrument; being in my judgment the oddeſt, if not the moſt conſiderable detection, which hath hitherto been made in the operations of Nature.

VI.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, Jan. 29, 167½.

NOT having tried many proportions of the arſenick and metal, I do not affirm which is abſolutely beſt, but think there may conveniently be uſed any quantity of arſenick equalling in weight between a ſixth and an eighth part of the copper; a greater proportion making the metal brittle.

The way which I uſed is this: I firſt melted the copper alone, then put in the arſenick, which being melted, I ſtirred them a little together, bewaring, in the mean time, not to draw in breath near the pernicious fumes. After this I put in tin; and again, ſo ſoon as that was melted (which was very ſuddenly) I ſtirred them well together, and immediately poured them off.

I know not, whether by letting them ſtand longer on the fire after the tin was melted, a higher degree of fuſion would have made the metal porous; but I thought that way I proceeded ſafeſt.

In

In that metal, which I ſent to *London*, there was no arſenick, for the large Mirror. but a ſmall proportion of ſilver; as I remember, one ſhilling in three ounces of metal. But I thought the ſilver did as much harm in making the metal ſoft, and ſo leſs fit to be poliſhed, as good in rendering it white and luminous.

At another time I mixed arſenick one ounce, copper ſix ounces, and tin two ounces; and this an acquaintance of mine hath poliſhed better than I did the other. I am, &c.

VII.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, Feb. 20, 167½.

I Received your's February 17th. And having conſidered Mr. *Hook's* obſervations on my diſcourſe, am glad that ſo acute an objector hath ſaid nothing that can enervate any part of it. For I am ſtill of the ſame judgment, and doubt not but that upon ſeverer examinations it will be found as certain a truth, as I have aſſerted it. You ſhall very ſuddenly have my anſwer.

In Mr. *Hugenius's* letter there are ſeveral handſome and ingenious remarks: and what he ſays concerning the grinding of Parabolical Conoids by geometrical rules, I do with him deſpair of. But I doubt not but that the thing may be in ſome meaſure accompliſhed by mechanical deviſes. This is all at preſent from, yours, &c.

VIII.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, March 26, 1672.

ABOUT ten days ſince, at night, I ſaw a dull ſtar ſouth-weſt A Comet. of *Perſeus*, which I now take to have been that comet of which you gave me information; but it was very ſmall, and had not any viſible tail, which made me regard it no further, and I fear it will now be difficult to find it.

Performance and imperfections of the metalline Reflector.

Since my laſt letter, I have further compared, and find that of metal to repreſent as well the moon as nearer objects, ſomething diſtincter than the other. But I muſt tell you alſo, that I find that other (which I borrowed to make the compariſon) to be none of the beſt in the kind, and therefore would not have you rely on the obſervations made with it, but rather eſtimate the performances of the metalline teleſcope by the diſtances of between 100 and 120 feet, at which I and others could read in the Tranſactions, as I found by meaſure; at which time the aperture was $1\frac{1}{3}$ of an inch, which I knew by trying, that an obſtacle of that breadth was requiſite to intercept all the light which came from one point of the object. I ſhould tell you alſo, that the little plain piece of metal next to the glaſs is not truly figured, whereby it happens, that objects are not ſo diſtinct at the middle as at the edges. And, I hope, that by correcting its figure (in which I find more difficulty than one would expect) they will appear all over diſtinct and diſtincter in the middle than at the edges. And I doubt not, but then the performances will be greater. But yet I find, that there is more light loſt by reflection of the metal I have hitherto uſed than by tranſmiſſion through glaſſes, for which reaſon a ſhallower charge would probably do better for obſcure objects, ſuppoſe ſuch a one as would make it magnify 34 or 32 times; but of bright objects at any diſtance it ſeems capable of magnifying 38 or 40 times with ſufficient diſtinctneſs; and for all objects the ſame charge, I believe, may be allowed, if the ſteely matter employed at *London* be more ſtrongly reflective, than this which I have uſed.

Lengths, apertures, and charges.

The performances of one of theſe inſtruments of any length being known, it will appear, by this following Table, what may be expected from thoſe of other lengths by this way, if art can accompliſh what is promiſed by the theory. In the firſt column is expreſſed the length of the teleſcope in feet, which doubled, gives the ſemidiameter of the ſphere on which the concave metal is to be ground. In the ſecond columns are the proportions of the apertures for thoſe ſeveral lengths; the third column are the proportions of the charges or diameters of the ſpheres on which the convex ſuperficies of the eye-glaſſes are to be ground.

Lengths.	Apertures.	Charges.
$\frac{1}{2}$	100	100
1	168	119
2	283	141
3	383	157
4	476	168
5	562	178
6	645	186
8	800	200
10	946	211
12	1084	221
16	1345	238
20	1591	254
24	1824	263

Lengths, apertures, and charges.

The uſe of this Table will beſt appear by example. Suppoſe, therefore, a half-foot teleſcope may diſtinctly magnify 30 times with an inch aperture, and be it required to know what ought to be the analogous conſtitution and performance of a four-foot teleſcope: by the ſecond column, as 100 to 476, ſo are the apertures; as alſo the numbers of times which they magnify. And conſequently ſince the half-foot tube hath an inch aperture, and magnifyeth 30 times; a four-foot tube proportionally ſhould have $4\frac{76}{100}$ inches aperture, and magnify 143 times. And by the third column, as 100 to 168, ſo are their charges. And therefore if the diameter of the convexity of the eye-glaſs for a half-foot teleſcope be $\frac{1}{5}$ of an inch, that for a four ſhould be $\frac{168}{500}$; that is, about $\frac{1}{3}$ of an inch. In like manner if a half-foot teleſcope may diſtinctly magnify 36 times with $1\frac{1}{4}$ of an inch aperture, a four-foot teleſcope ſhould with equal diſtinctneſs magnify 171 times with 6 inches aperture. And one of ſix foot ſhould magnify 232 times with $8\frac{2}{3}$ inches aperture; and ſo of other lengths. But what the event will really be, we muſt wait to ſee determined by experience; only this I thought fit to inſinuate, that they which intend to make trials in other lengths, may more readily know how to deſign their inſtruments. Thus for a four-foot tube, ſince the aperture ſhould be 5 or 6 inches, there will be required a piece of metal 7 or 8 inches broad at leaſt; becauſe the figure will ſcarcely be true to the edges: and the thickneſs of the metal muſt be proportional to the breadth, leaſt it bend in the grinding. The metals being poliſhed, there may be trials made with ſeveral eye-glaſſes to find what charge may, with beſt advantage, be made uſe of. Thus much of theſe teleſcopes; and at preſent I ſhall trouble you no farther, than to thank you for your laſt intelligence, by which you have obliged, Sir,

&c.

IX.

IX.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, March 30, 1672.

Advantages of Reflectors.

I Doubt not but Monſ. *Auzout* will allow the advantage of reflections in the theory to be very great, when he ſhall be informed himſelf of the different refrangibility of the ſeveral rays of light; and for the pratique part, it is in ſome meaſure manifeſt, by the inſtruments already made, to what degree of vivacity and brightneſs a metalline ſubſtance may be poliſhed: nor is it improbable, but that there may be new ways of poliſhing found out for metal, which will far excel thoſe that are yet in uſe. And when a metal is once well poliſhed, it will be a long while preſerved from tarniſhing, if diligence be uſed to keep it dry, and cloſe ſhut up from the air. For the principal cauſe of tarniſhing ſeems to be the condenſing of moiſture on its poliſhed ſurface; which, by an acid ſpirit wherewith the atmoſphere is impregnated, corrodes and ruſts it; or at leaſt at its exhaling, leaves it covered over with a thin ſkin, conſiſting partly of an earthy ſediment of that moiſture, and partly of the duſt which, flying to and fro in the air, had ſettled and adhered to it. When there is not occaſion to make frequent uſe of the inſtruments, there may be other ways to preſerve the metals for a long time, as perhaps by immerging them in ſpirit of wine, or ſome other convenient liquor. And if they chance to tarniſh, yet their poliſh may be recovered by rubbing them with a ſoft piece of leather, or other tender ſubſtance, without the aſſiſtance of any fretting powders, unleſs they happen to be ruſty, for then they muſt be new poliſhed. I am very ſenſible, that metal reflects leſs light than glaſs tranſmits; and for that inconvenience I gave you a remedy in my laſt letter, by aſſigning a ſhallower charge in proportion to the aperture than is uſed in other teleſcopes. But as I have found ſome metalline ſubſtances to be more ſtrongly reflective, and to poliſh better, and to be freer from tarniſhing than others, ſo I hope there may be in time found out ſome ſubſtance much freer from thoſe inconveniences, than any yet known.

In the mean time, to remedy in ſome meaſure theſe inconveniences, I ſhall propound a way of uſing, inſtead of the little oval metal, a glaſs or chryſtal figured like a triangular priſm, as you ſee it repreſented in the firſt ſcheme by the figure A, B, C. Its ſide AB*ba* I ſuppoſe to perform the office of that metal, by reflecting towards the eye-glaſs the light which comes from the concave DE, which light I ſuppoſe to enter into this priſm at its ſide CB*bc* and CB*bc*; and leſt any colours ſhould be produced by the refraction of thoſe planes, it is requiſite that the angles of the priſm at A*a* and B*b* be preciſely equal. Which may be moſt conveniently performed by making them half right angles, and conſequently the third angle at *cc* a right one. The plane AB*ba*, without being foliated, will reflect all the light incident on it, eſpecially if the priſm be made of chryſtal. But to exclude all unneceſſary light, it is convenient that it be all over covered with ſome black ſubſtance, excepting two circular ſpaces of the planes AC and B*c* for the uſeful light to paſs through, as you ſee it deſigned in the ſecond Scheme. The length of this priſm ſhould be ſuch, that its ſides A*c* and B*c* may be four ſquare; and ſo much of the angles B and *b* as are ſuperfluous ought to be ground off, to give paſſage to as much light as is poſſible from the object to the concave. There is one very conſiderable advantage of this priſm which the oval metal is not capable of, without uſing two eye-glaſſes, and it is that of its ſides A*cca* and B*ccb* be ground convex lens. The manner you have expreſſed in the third Scheme, where ſuppoſe G to be the focus of the concave, and F of the eye-glaſs at which the rays croſs twice before their arrival at the eye. But it is convenient, that the firſt trials be made with priſms whoſe ſides are all of them plane. And thus much concerning Monſ. *Auzout's* conſiderations.

Remedy of want of Light.

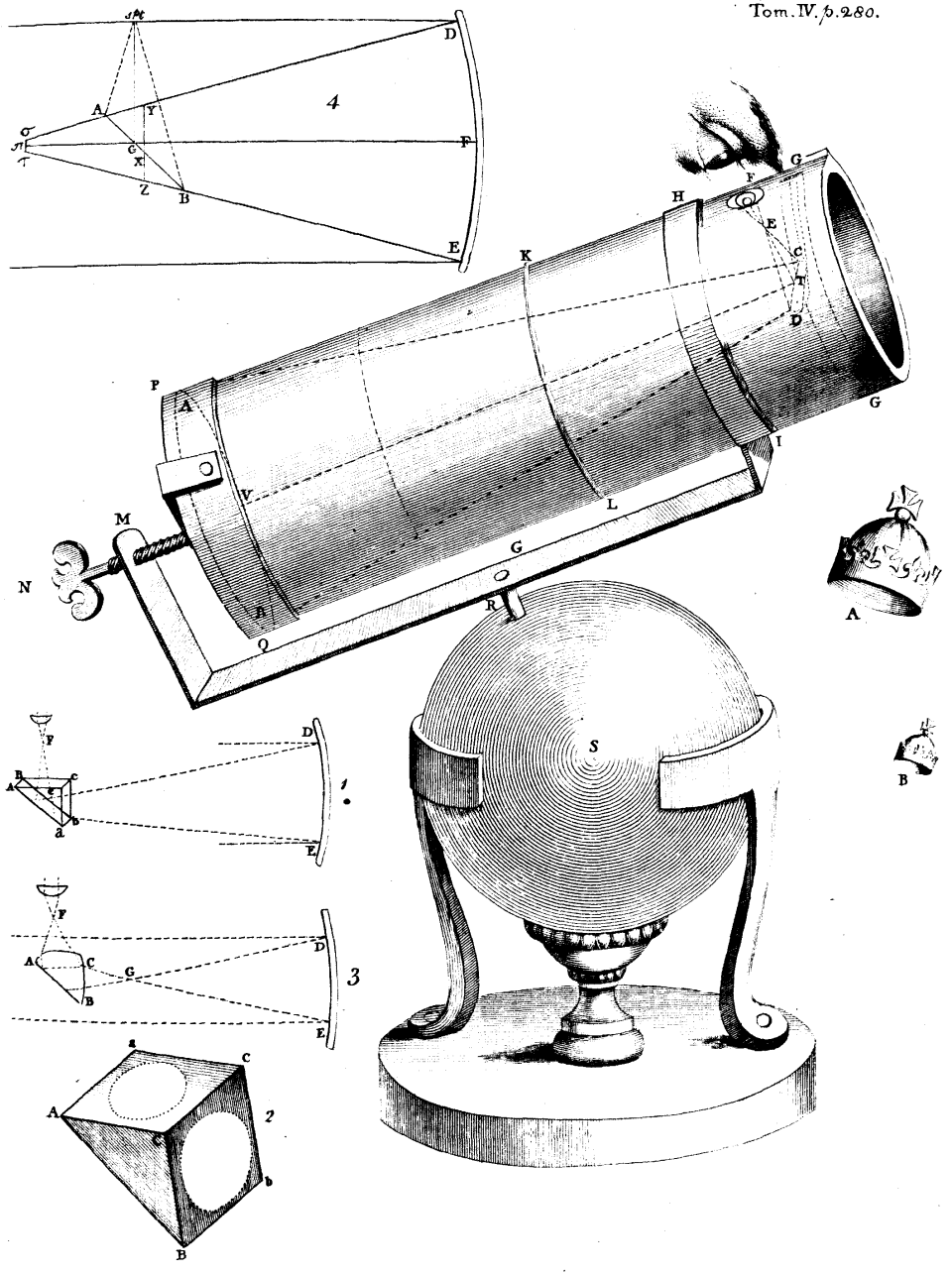
To the queries of Monſ. *Denys*, I anſwer, 1. That a tube of ſix inches is capable of bearing an aperture (limitted next the eye) ſo large, that an obſtacle of $1\frac{1}{4}$ or $1\frac{1}{3}$ of an inch in breadth, ſhall be requiſite to intercept all the light coming from one point of the object towards the concave metal.

But it is convenient, that the tube be a little wider than that aperture

Adjuſtment of the diameter

of the Tube to its Length.

aperture preciſely requires, ſuppoſe $1\frac{1}{2}$ or $1\frac{2}{3}$ of an inch, and not more; and the whole breadth of the metal ſhould not be leſs than two inches, becauſe its figure towards the edge will ſcarcely be ſo true as to be uſeful. And by that means it may be alſo conveniently faſtened to the end of the tube on the outſide, ſo at pleaſure to be taken off, and laid up cloſe from the air, to preſerve it from tarniſhing. How the diameter of the tube is to be enlarged according to its length, will appear by the table of apertures and charges which I ſent you in my laſt letter of *March* 28; namely, the cube of its length ſhould be proportional to the ſquare of its diameter or aperture at the metal. So that the advantage of augmenting the length of tubes, is by this way far greater than by refractions, where their length ought to be proportional to the ſquare of the diameter of the aperture. 2. The breadth, or ſhorteſt diameter of the little oval metal for a tube of ſix inches, ſhould not be greater than $\frac{1}{3}$, nor leſs than $\frac{1}{4}$ of an inch. And the longeſt diameter ſhould be to the ſhorteſt, as about 10 to 7. But you may more exactly determine theſe diameters for tubes of all lengths after this manner. In the fourth figure, let AB repreſent the oval ſet edgwiſe; DE, the concave; FG, its axis; GP, the reflex of that axis; st, the diameter of the hole through which the light is tranſmitted to the eye, and p the center of that hole. Produce F, G to π, ſo that Gπ may be equal to Gp; erect $\pi\sigma$ and $\pi\tau$ equal to ps and pt; and from σ and τ draw two lines, σD and τE, to the outmoſt parts of the concave within the tube, interſecting AB in A and B; and AB ſhall be the long diameter of the oval, which biſect in X; and perpendicular to FX erect XY and XZ, occurring with σd and τE in Y and Z; and a mean proportional between XY and XZ, doubled, ſhall be the other ſhort diameter: for by viewing the Scheme you will eaſily perceive, that an oval, deſcribed with thoſe rectangular conjugate diameters, is of ſufficient bigneſs to reflect all the uſeful light towards the eye, if it be rightly placed in the tube; and a broader metal would not only intercept ſo many of the beſt rays, but ſome of the ſcattering light, reflected every way from its ſuperfluous parts, would fall on the eye-glaſs, and make the object appear ſomething confuſed, and



and as it were in a miſt. This, Sir, is that which, in anſwer to your letter, my preſent thoughts ſuggeſt to your faithful ſervant, &c.

X.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, May 4, 1672.

Of Mr. Caſſegrain's Teleſcope.

I Should be glad to meet with any improvement of the catadioptrical teleſcope, but that deſign of it which, as you inform me, M. *Caſſegrain* hath communicated three months ſince, and now printed in the *French* Journal, I fear will not anſwer expectation; for when I firſt applied myſelf to try the effects of reflections, Mr. *Gregory's Optica Promota* (printed in the year 1663) being fallen into my hands, where there is an inſtrument deſcribed (pag. 94) like that of Mr. *Caſſegrain*, with a hole in the midſt of the object-glaſs, to tranſmit the light to an eye-glaſs placed behind it; I had thence an occaſion of conſidering that ſort of conſtructions, and found their diſadvantages ſo great, that I ſaw it neceſſary, before I attempted any thing in the practice, to alter the deſign of them, and place the eye-glaſs at the ſide of the tube, rather than at the middle.

Diſadvantages of the Gregorian Conſtruction.

The diſadvantages of it you will underſtand by theſe particulars: 1. There will be more light loſt in the metal, by reflexion from the little convex ſpeculum, than from the oval plane: for it is an obvious obſervation, that light is moſt copiouſly reflected from any ſubſtance when incident moſt obliquely. 2. The convex ſpeculum will not reflect the rays ſo truly as the oval plane, unleſs it be of an hyperbolic figure, which is incomparably more difficult to form than a plane; and, if truly formed, yet would only reflect thoſe rays truly which reſpect the axis. 3. The errors of the ſaid convex will be much augmented by the too great diſtance through which the rays reflected muſt paſs, before their arrival at the eye-glaſs; for which reaſon, I find it convenient to make the tube no wider than is neceſſary, that the eye-glaſs may be placed as near to the oval plane as is poſſible, without obſtructing any uſeful light in its

its paſſage to your object-metal. 4. The errors of the object-metal will be more augmented by reflexion from the convex than from the plane, becauſe of the inclination or deflexion of the convex on all ſides from the points on which every ray ought to be incident. 5thly. For theſe reaſons there is requiſite an extraordinary exactneſs in the figure of the little convex; whereas I find by experience, that it is much more difficult to communicate an exact figure to ſuch ſmall pieces of metal, than to thoſe that are greater. 6. Becauſe the errors at the perimeter of the concave object-metal cauſed by the ſphericalneſs of its figure, are very much augmented by the little convex; it will not, without indiſtinctneſs, bear ſo large an aperture, as in the other conſtruction. 7. By reaſon that the little convex conduces very much to the magnifying virtue of the inſtrument which the oval plane doth not, it will magnify much more in proportion to the ſphere on which the great concave is ground, than in the other deſign. And ſo magnifying objects much more than it ought to do in proportion to its aperture, it muſt repreſent them very obſcure and dark; and not only ſo, but alſo confuſed, by reaſon of its being overcharged. Nor is there any convenient remedy for this; for if the little convex be made of a larger ſphere, that will cauſe a greater inconvenience, by intercepting too many of the beſt rays; or if the charge of the eye-glaſs be made ſo much ſhallower as is neceſſary, the angle of viſion will thereby become ſo little, that it will be very difficult and troubleſome to find an object; and of that object, when found, there will be but a very ſmall part ſeen at once.

Diſadvantages of Caſſegrain's Conſtruction.

By this you may perceive, that the three advantages which Monſ. *Caſſegrain* propounds to himſelf are rather diſadvantages; for, according to his deſign, the aperture of the inſtrument will be but ſmall, the object dark and confuſed, and alſo difficult to be found. Nor do I ſee why the reflexion is more upon the ſame axis, and ſo more natural in one caſe than in the other, ſince the axis itſelf is reflected towards the eye by the oval plane. And the eye may be defended from external light as well at the ſide as at the bottom of the tube. You ſee, therefore, that

that the advantages of this deſign are none; but the diſadvantages ſo great and unavoidable, that I fear it never will be put in practice with good effect; and when I conſider, that by reaſon of its reſemblance with other teleſcopes, it is ſomething more obvious than the other conſtruction, I am apt to believe, that thoſe who have attempted any thing in Catoptricks, have ever tried it in the firſt place; and that their bad ſucceſs in that attempt hath been the cauſe why nothing hath been done in reflexions.

For Mr. *Gregory*, ſpeaking of theſe inſtruments in the aforeſaid book, p. 95, ſaith, *De mechanicâ horum ſpeculorum et lentium, ab aliis fruſtra tentatâ, ego, in mechanicis minùs verſatus, nihil dico*; ſo that there have been trials made of theſe teleſcopes, but yet in vain. And I am informed, that about 7 or 8 years ſince, Mr. *Gregory* himſelf, at *London*, cauſed one of ſix foot to be made by Mr. *Reive*, which I take to be according to the aforeſaid deſign deſcribed in his book, becauſe though made by a very ſkillful artiſt, yet it was without ſucceſs.

I could wiſh, therefore, M. *Caſſegrain* had tried his deſign, before he divulged it; but if for further ſatisfaction he pleaſe hereafter to try it, I believe the ſucceſs will inform him, that ſuch projects are of little moment, till they be put in practice. I am, Sir, your humble ſervant,

&c.

XI.

To Mr. COLLINS.

SIR, Dec. 10, 1672.

Of Gregory's ſecond Conſtruction.

MR. *GREGORY* is pleaſed to conſider further the moſt advantageous conſtruction of cata-dioptrical teleſcopes. And as his deſign in his *Optica Promota* excels that of Mr. *Caſſegrain* (though they differ ſo ſlightly, that I thought it not worth the while to take notice of the difference) the advantage being, that the little concave ellipſis comes nearer to a ſpherical figure than the convex hyperbola, ſo I conceive his preſent propoſal excels them both; of making the ſpeculum plane. And this I conjecture is the

way which Signior *Salvetti*, one of the grand duke's muſicians, mentioned in the laſt Tranſactions, intends to make experiment of; excepting that, inſtead of the convex eye-glaſs, he may probably ſubſtitute a concave one to erect the object. But yet I cannot think it the beſt; it being liable to the 1ſt, 3d and laſt of theſe difficulties urged againſt Mr. *Caſſegrain*; and, in my judgment, not wholly capable of the advantages which Mr. *Gregory* propounds.

Advantages of oblique Reflection.

The firſt diſadvantage was, that more light is loſt in direct than oblique reflexion. I am convinced by ſeveral obſervations, that reflexion is not made by the ſolid parts of a body, as is commonly preſumed, but by the confine of the two mediums, whereof one is within and the other without the body. And as ſtones are reflected by water, when thrown obliquely, which force their way into it, when thrown directly downwards; ſo the rays of light (whether corporeal like ſtones or not) are moſt eaſily and copiouſly reflected when incident moſt obliquely. This you may obſerve in the paſſage of light out of glaſs into air; which is reflected more and more copiouſly, as the obliquity is increaſed, until beyond a certain degree of obliquity it be wholly reflected. Alſo in the reflection of light by an imperfectly poliſhed plate of braſs or ſilver, or any other metal; you may obſerve, that the image of objects, which by direct reflexion appear dull and confuſed, appear by very oblique reflexion pretty diſtinct and vigorous. This advantage of oblique reflexion would be inconſiderable, if metal reflected almoſt all the light directly incident on it. But ſo far as I can obſerve, there is at leaſt a third part, if not the better half, of the light loſt and ſtifled in the metal at every reflexion; and it is of ſome eſtimation, if a third or fourth part of that may be redeemed, by ſetting the flat ſpeculum obliquely. As for Mr. *Gregory's* inſinuation, that direct rays have the advantage of oblique; becauſe a direct ball is directed more regularly from a rough wall than an oblique one; if he pleaſe to conſider how different are the cauſes and circumſtances of thoſe reflexions, poſſibly, upon ſecond thoughts, he may apprehend why the contrary ought to

happen in light: at leaſt the experiment of the rudely-poliſhed plate of metal may perſuade him.

The next diſadvantage, ariſing from the diſtance of the little ſpeculum from the eye-glaſs, being allowed; I paſs to the laſt: which is to this effect. That if to diminiſh the magnifying virtues of the inſtrument, the little ſpeculum be made of a larger ſphere (as it is in Mr. *Gregory's* deſign, a plane being equivalent to a ſphere whoſe center is indefinitely diſtant) that would cauſe too many of the beſt rays to be intercepted. And though in his deſign ſcarce a fourth part of the whole light be intercepted, yet thoſe rays ſeem to me of more value than twice their number next the circumference of the tube, becauſe they principally conduce to diſtinct viſion. Their loſs will be judged conſiderable by thoſe, that have thought the loſs of ſcarce the 40th part of the light in my way worthy of being objected, by reaſon that they were the beſt of the rays.

There are yet other conſiderations by which Mr. *Gregory's* tube may perhaps be thought leſs advantageous. As, that unleſs the ſpeculum, F, be made ſo broad as to intercept more than a quarter, or perhaps than a third part of the whole light, it will be difficult to enlarge the aperture, as is requiſite for viewing dull and obſcure objects: that the eye-glaſs, if placed at the bottom, will ſcarcely be well defended from the unuſeful glaring light, which in the day-time comes from objects on all ſides the flat ſpeculum; at leaſt not ſo well as by ſetting it at the ſide; and that an artificer can ſcarcely poliſh the great concave ſo truly when perforated in the middle: for the metal near the hole will be apt to wear away too faſt, as it doth near the exterior limb. And though the hole may be made after it is poliſhed, yet if the figure happen to be leſs true, or if afterwards the metal chance to tarniſh, it muſt be poliſhed again.

As for the advantages propounded by Mr. *Gregory*, I ſee not why the firſt ſhould be reckoned for one, viz. that the diſtance EF grows almoſt the one-half leſs, and therefore the errors of the concave CD are almoſt diminiſhed upon the plane F by one-half. For how much thoſe errors of the concave CD are increaſed or diminiſhed, is to be eſtimated by the divarication of the rays,

not

not at the plane F, but at the focus of that concave CD. And there the errors in both caſes will be alike, provided the ſpeculum F be accurately plane. But if there be any irregularities in the figure of the ſpeculum F, they will cauſe errors ſo much greater in one caſe than in the other, as that ſpeculum is remoter from the eye-glaſs; which in large teleſcopes may be more than 15 or 20 inches.

Great advantage of the ſhortneſs of the Tube.

The other advantage, viz. that his tube will be little more than half the length of mine, I ſhould allow to be very conſiderable; if I thought, that with equal art in the mechaniſm, it would be made to do the ſame effect. The greateſt difficulty is in forming the great concave; which when once well done, perhaps it may be thought moſt advantageous to make the beſt uſe of it with a longer tube.

Convenience of varying the charge greater in the Newtonian Conſtruction.

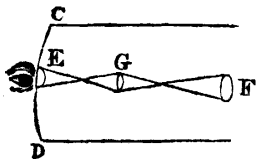
The ſuppoſed advantage of teleſcopes with convex or concave ſpeculums, in that they may have any deſireable charge, by altering the diſtances of the eye-glaſs and ſpecula, agrees more conveniently with my deſign of the inſtrument, if that ſpeculum be made uſe of, which I deſcribed in a letter to Mr. *Oldenburg*, in anſwer to Mr. *Hugens's* conſiderations on theſe ſubjects; which poſſibly you may have ſeen. For inſtance; to double the charge, the eye-glaſs in the other way muſt be drawn out almoſt as far behind the great concave as the little ſpeculum is before it; whereby the length of the tube will be almoſt doubled. Whereas in my way it need be drawn out no farther from the ſide of the tube than a quarter of the tube's diameter. The charge may be alſo conveniently varied, by having 2 or 3 eye-glaſſes of ſeveral depths ſet in a girdle; any of which may be adjuſted to the metal F by ſliding the girdle about the tube, or by ſliding the ring within the tube to which the metal F is faſtened.

That teleſcopes with convex or concave ſpeculums ſhould be overcharged, is not neceſſary; but yet it is not avoidable without running upon one of the other two inconveniencies, deſcribed in the 7th particular of my conſiderations on Mr. *Caſſegrain's* tube, as I there intimated.

To diminiſh ſome of the aforeſaid diſadvantages, there may be ſtill new variations or additions to theſe deſigns. As, for inſtance, by

by uſing two eye-glaſſes. Suppoſe CD repreſent the great concave; F, the little ſpeculum; E, the eye-glaſs; and G, another double convex-glaſs, between E and F, on both ſides of which the rays croſs. This way of redoubling theſe tubes ſeems not inferior to the reſt. For thus the object appears erect; the ſpeculum F intercepts leſs light, and the charge may be varied at pleaſure, only by changing the poſitions of G and F. But yet this is not without imperfections: and particularly, beſides thoſe common with the other deſigns, this glaſs G will intercept many of the beſt rays in their paſſage from the concave CD to the little ſpeculum F; unleſs it be made leſs than is conſiſtent with ſome other inconveniencies. And by the iterated decuſſations of the rays, objects will be rendered leſs diſtinct; as is manifeſt in dioptric teleſcopes, where 2 or 3 eye-glaſſes are applied to erect the object.

Advantage of a double Eye-glaſs.



As to the attempt in which Mr. *Reeves* was employed, I preſumed it had been done with much more accurateneſs than Mr. *Gregory* now ſignifies: becauſe Mr. *Hook*, who you know is a curious and accurate experimenter, affirms, in his conſiderations on my letter to Mr. *Oldenburg* concerning refractions and colours, publiſhed in the Tranſactions, No. 80, that he made ſeveral experiments with that inſtrument. And though he lays the blame on Mr. *Reeves's Encheiria*, yet he ſays not that he blamed him then, when the experiment was made. His words are theſe; " I have made ſeveral trials both for teleſcopes and microſcopes " by reflexions, which I have mentioned in my Micrography; " but deſerted it as to teleſcopes, when I conſidered, that the focus " of a ſpherical concave is not a point, but a line; and that the " rays are leſs truely reflected to a point by a concave, than re- " fracted by a convex. Which made me ſeek that by refraction, " which I found could not be expected by reflexion. Nor, in- " deed, could I find any effect of it, by one of ſix-foot radius, " which about 7 or 8 years ſince Mr. *Reeves* made for Mr. *Gre- " gory*, with which I made ſeveral trials. But it *now appears* " that it was for a want of a good *encheiria*, from which cauſe

" many

" many good experiments have been loſt. Both which conſide-
" rations diſcouraged me from attempting further that way; eſpe-
" cially ſince I found the parabola much more difficult to execute
" than the hyperbola or ellipſis."

From hence I might well infer, that the want of a good *encheiria* appeared not till now: and that Mr. *Hook* was diſcouraged from attempting further that way, only by theſe 2 or 3 conſiderations: that a convex, as he preſumes, refracts more truly than a concave reflects: that he found no effect by one of ſix foot radius, which till now he attributed to ſome other cauſe than the want of a good *encheiria*; namely, to the ſuppoſed leſs true reflexion of a ſpherical concave: and that he apprehended a greater difficulty of deſcribing a parabola than an hyperbola or ellipſis. Nor could I well interpret the cauſe, from which many good experiments have been loſt, to have been other than the want of a good *encheiria*; which till afterwards appears not to have been wanting. I contend not, that this was Mr. *Hook's* meaning; but only that his words ſeemed to import thus much. Which gave me occaſion to think, there was no diligence wanting in making the experiment; eſpecially ſince he expreſſeth, that he made ſeveral trials with it.

And that you may not think I ſtrained Mr. *Gregory's* ſenſe, where he ſpeaks of hyperbolic and elliptic glaſſes and ſpeculums attempted in vain; I could aſk, to what end thoſe ſpeculums were attempted, if not to compoſe optic inſtruments? Which is all I would infer from thoſe words. For that theſe inſtruments, if at all attempted, were attempted in vain, is evident by the want of ſucceſs.

This, Sir, I have ſaid, not that I deſire to diſcourage the trial of any practical way; or to contend with Mr. *Gregory* about ſo ſlender a difference. For I doubt not, but when he wrote his *Optica Promota*, he could have deſcribed more faſhions than one of theſe teleſcopes, and perhaps have run through all the poſſible caſes of them, if he had thought it worth his pains. Becauſe Mr. *Caſſegrain* propounded his ſuppoſed invention pompouſly, as if the main buſineſs was in the contrivance of theſe inſtruments; I thought fit to ſignify, that that was none of his contrivance,

contrivance, nor ſo advantageous as he imagined. And I have now ſent you theſe further conſiderations on Mr. *Gregory's* anſwer, only to let you ſee, that I choſe the moſt eaſy and practicable way to make the firſt trials. Others may try other ways. Nor do I think it material which way theſe inſtruments are perfected, ſo they be perfected.

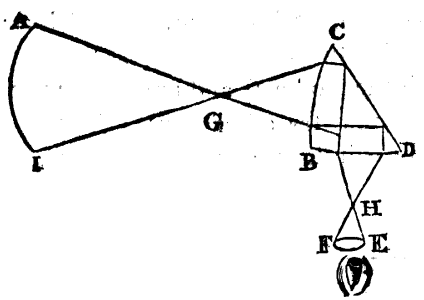
XII.

Mr. NEWTON'S anſwer to a letter of Mr. GREGORY'S, dated March 7, 1673, directed to Mr. COLLINS.

SIR, Cambridge, April 9, 1763.

HAVING peruſed Mr. *Gregory's* candid reply, I have thought good to ſend theſe further conſiderations upon the differences that ſtill are between us. And, firſt, that a well poliſhed plate reflects, at the obliquity of 45 degrees, more truly than direct ones, ſeems to me very certain. For the flat *tubercula*, or ſhallow vallies, ſuch as may be the remains of ſcratches almoſt worn out, will cauſe the leaſt errors in the obliqueſt rays, which fall on all ſides the hill, excepting on the middle of the foreſide and backſide of it; that is, where the hill inclines directly towards or directly from the ray. For if the ray fall on that ſection of the hill, its error is, in all obliquities, juſt double of the hill's declivity. But if it fall on any other part of the hill, its error is leſs than double, if it be an oblique ray; and that ſo much the leſs, by how much the ray is obliquer. But if it be a direct ray, its error is juſt double to the declivity, and therefore greateſt in that caſe. I preſume, Mr. *Gregory*, if you think it convenient to tranſmit this to him, will eaſily apprehend me. Advantage of oblique Reflection proved.

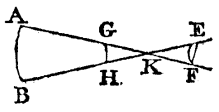
How the charge may be varied at pleaſure in my teleſcope, will appear by this figure, where A repreſents the great concave; E, the eye-glaſs; and BCD, a priſm of glaſs or cryſtal; whoſe ſides, BC and BD, are not flat, but ſpherically convex. So that the rays which come from G, the focus of the great concave A, may, by the refraction of the firſt ſide BC, be reduced into parallelism; and after reflexion from the baſe, CD, be made, by the To vary the charge at pleaſure in the Newtonian conſtruction.



refraction of the next ſide, BD, to converge to the focus of the eye-glaſs H. The teleſcope being thus formed, it appears how the charge may be altered, by varying the diſtances of the glaſſes and ſpeculum.

Limitation of the aperture of the Eye-glaſs.

As for the objection, that Mr. *Gregory's* teleſcope will be either overcharged or have too ſmall an angle of viſion, &c. I apprehend, that the difference between us lies in limiting the aperture of the eye-glaſs. Mr. *Gregory* puts it equal to that of the little concave; but I ſhould rather determine it by this proportion: That if a middle point be taken between the eye-glaſs and its focus; the apertures of the eye-glaſs and concave be proportional to their diſtances from that point. That is, ſuppoſe AB the little concave; EF, the eye-glaſs; GH, their common focus or image; and K, the mean diſtance between GH and EF. From the extremityof AB draw AK, and BK, cutting on the eye-glaſs at F and E; and EF ſhall be its aperture.



Reaſon of the Limitation.

The reaſon of this limitation is, that the ſuperfluous light, which comes on all ſides of the ſpeculum, AB, to the ſpace, GH, in which the picture of the object is made, may fall beſides the eye-glaſs. For if it ſhould paſs through it to the eye, it would exceedingly blend thoſe parts of the picture with which it is mixed; and ſuch are thoſe parts of it which extend themſelves beyond the lines AK, BK: as I remember I ſaid in my former letter; that the ſcattering light, which falls on the eye-glaſs, will diſturb the viſion. And this is to be underſtood of any ſtraggling light, which comes not from the picture. But if it come from the picture to the eye-glaſs, the diſturbance will be much greater, ſo as not to be allowed of. Againſt the firſt I ſee no very convenient remedy; and againſt the laſt, none but aſſigning a ſmall aperture to the eye-glaſs, ſuppoſing the teleſcope is uſed in the day-time, or in too great light, or to view the moon, or any ſtar

ſtar very near her, or near the brighter planets. And if for this reaſon the aperture be limitted by any rule; the angle of viſion will become very ſmall, as I affirmed: for inſtance, in that caſe when Mr. *Gregory* in his poſtſcript puts it about 20 degrees, it will be reduced to leſs than half a degree. Yet I confeſs there is a way, by which the angle of viſion may be ſomething enlarged, but it will not be very conſiderably, unleſs the eye-glaſs be alſo deeper charged.

Why the Eye-glaſs is uſed without a Concave.

Why I aſſign a concave with an eye-glaſs to magnify ſmall objects (in Tranſ. p. 3080) and yet an eye-glaſs without ſuch a concave to magnify the image of the great concave, which is equivalent to a ſmall object, is, becauſe that image doth not require to be magnified ſo much as an object by a microſcope: and, further, becauſe the angle of the pencil of rays, which flow from any point of the ſmall object, that the object may appear ſufficiently luminous, ought to be as great as poſſible: and a concave will with equal diſtinctneſs reflect the rays at a greater angle of the pencil than in a lens: but in the teleſcope the angles of theſe pencils are not ſo great as to tranſcend the limits, at which an eye-glaſs may, with ſufficient diſtinctneſs, refract them; and therefore in theſe inſtruments, I chooſe to lay all the ſtreſs of magnifying upon the eye-glaſs as it is well capable of; and the exceſs only upon the concave.

Concerning my citation of Mr. *Gregory* againſt Mr. *Caſſegrain*, the force of it lies only in the inference, that optic inſtruments moſt probably, according to Mr. *Caſſegrain's* deſign, had been tried by reflexion; which I think I might well infer, without having regard to the ſpecific figure of the ſpeculum, which Mr. *Gregory* there ſpoke of. And therefore I think it cannot be ſaid, that I made him ſpeak of ſpheric figures, where his meaning was of hyperbolic or elliptic ones. But if I ſhould be ſo underſtood, becauſe I put the figure of the great concave to be ſpherical, wherever I ſpecified it; I know not why I might not, by way of conſequence, make that interpretation. For it is not probable, that any man would attempt hyperbolic and elliptic figures of ſpeculums, until the event of ſpherical ones had been firſt tried.

And accordingly the trial of Mr. *Gregory* with Mr. *Reeve* was by a ſpherical figure; which trial, although I am now ſatisfied that it was made very rudely, yet by the information that I had of it, when I wrote the letter about Mr. *Caſſegrain*, I apprehended it to have been made with great diligence and curioſity; as I ſignified in my former letter at large. And this I hope may excuſe me for ſpeaking of it in the Tranſactions, as if it had been tried with more accuracy than really it was. And thus much concerning the teleſcope.

The deſign of the burning ſpeculum appears to me very plauſible, and worthy of being put in practice. What artiſts may think of it, I know not; but the greateſt difficulty in the practice, that occurs to me, is to proportion the two ſurfaces ſo, that the force of both may be in the ſame point according to the theory; but perhaps it is not neceſſary to be ſo curious. For it ſeems to me, that the effect would ſcarce be ſenſibly leſs, if both ſides ſhould be ground to the concave and gage of the ſame tool.

LETTERS

RELATING TO THE

THEORY OF LIGHT AND COLOURS

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, Feb. , 167½.

TO perform my late promiſe to you, I ſhall without further ceremony acquaint you, that in the year 1666 (at which time I applied myſelf to the grinding of optick-glaſſes of other figures than ſpherical) I procured me a triangular glaſs-priſm, to try therewith the celebrated phænomena of colours. And in order thereto, having darkened my chamber, and made a ſmall hole in my window-ſhuts, to let in a convenient quantity of the ſun's light, I placed my priſm at its entrance, that it might be thereby refracted to the oppoſite wall. It was at firſt a very pleaſing divertiſement, to view the vivid and intenſe colours produced thereby; but after a while applying myſelf to conſider them more circumſpectly, I became ſurpriſed to ſee them in an oblong form; which, according to the received laws of refractions, I expected ſhould have been circular. They were terminated at the ſides with ſtreight lines, but at the ends the decay of light was ſo gradual, that it was difficult to determine juſtly what was their figure, yet they ſeemed ſemicircular. Of the coloured priſmatic Spectrum.

Comparing the length of this coloured *ſpectrum* with its breadth, I found it about five times greater; a diſproportion ſo extravagant, that it excited me to a more than ordinary curioſity of examining from whence it might proceed. I could ſcarce think, that the various thickneſs of the glaſs, or the termination Proportion of the length of the Spectrum to its breadth.

with

The diſproportion no effect of the confine of the ſhade.

with ſhadow or darkneſs, could have any influence on light to produce ſuch an effect: yet I thought it not amiſs, firſt to examine thoſe circumſtances, and ſo tried what would happen by tranſmitting light through parts of the glaſs of divers thickneſſes, or through holes in the window of divers bigneſſes, or by ſetting the priſm without, ſo that the light might paſs through it, and be refracted, before it was terminated by the hole: but I found none of thoſe circumſtances material. The faſhion of the colours was in all theſe caſes the ſame.

Nor of any unevenneſs in the glaſs.

Then I ſuſpected, whether by any unevenneſs in the glaſs, or other contingent irregularity, theſe colours might be thus dilated. And to try this, I took another priſm like the former, and ſo placed it, that the light paſſing through them both, might be refracted contrary ways, and ſo by the latter returned into that courſe from which the former had diverted it: for by this means I thought the regular effects of the firſt priſm would be deſtroyed by the ſecond priſm, but the irregular ones more augmented, by the multiplicity of refractions. The event was, that the light, which by the firſt priſm was diffuſed into an oblong form, was by the ſecond reduced into an orbicular one, with as much regularity as when it did uot at all paſs through them. So that whatever was the cauſe of that length, it was not any contingent irregularity.

Nor of the different incidence of rays from different parts of the Sun.

I then proceeded to examine more critically, what might be effected by the difference of the incidence of rays coming from divers parts of the ſun; and to that end, meaſured the ſeveral lines and angles belonging to the image. Its diſtance from the hole or priſm was 22 foot; its utmoſt length $13\frac{1}{4}$ inches; its breadth $2\frac{5}{8}$; the diameter of the hole $\frac{1}{4}$ of an inch. The angle which the rays, tending towards the middle of the image, made with thoſe lines, in which they would have proceeded without refraction, was 44 deg. 56 min. and the vertical angle of the priſm 63 deg. 12 min. Alſo the refractions on both ſides the priſm, that is, of the incident and emergent rays, were, as near as I could make them, equal; and conſequently about 54 deg. 4 min. And the rays fell perpendicularly upon the wall. Now ſubducting the diameter of the hole from the length and breadth

of the image, there remains 13 inches in the length, and $2\frac{3}{8}$ the breadth, comprehended by thoſe rays which paſſed through the center of the ſaid hole; and conſequently the angle of the hole, which that breadth ſubtended, was about 31 min. anſwerable to the ſun's diameter; but the angle which its length ſubtended, was more than 5 ſuch diameters, namely, 2 deg. 49 min.

Having made theſe obſervations, I firſt computed from them the refractive power of that glaſs, and found it meaſured by the ratio of the ſines 20 to 31; and then by that ratio I computed the refractions of two rays flowing from oppoſite parts of the ſun's *diſcus*, ſo as to differ 31 min. in their obliquity of incidence, and found that the emergent rays ſhould have comprehended an angle of about 31 min. as they did before they were incident.

But becauſe this computation was founded on the hypotheſis of the proportionality of the ſines of incidence and refraction, which though by my own experience I could not imagine to be ſo erroneous, as to make that angle but 31 min. which in reality was 2 deg. 49 min. yet my curioſity cauſed me again to take my priſm: and having placed it at my window, as before, I obſerved, that by turning it a little about its axis to and fro, ſo as to vary its obliquity to the light, more than an angle of 4 or 5 degrees, the colours were not thereby ſenſibly tranſlated from their place on the wall; and conſequently by that variation of incidence, the quantity of refraction was not ſenſibly varied. By this experiment, therefore, as well as by the former computation, it was evident, that the difference of the incidence of rays, flowing from divers parts of the ſun, could not make them after decuſſation diverge at a ſenſibly greater angle, than that at which they before converged; which being at moſt but about 31 or 32 min. there ſtill remained ſome other cauſe to be found out, from whence it could be 2 deg. 49 min.

Nor from a curvilinear motion of the refracted Rays.

Then I began to ſuſpect, whether the rays, after their trajection through the priſm, did not move in curve lines, and according to their more or leſs curvity, tend to divers parts of the wall. And it increaſed my ſuſpicion, when I remembered that I had often ſeen a tennis-ball, ſtruck with an oblique racket, deſcribe ſuch a curve line. For, a circular as well as a progreſſive mo-

tion being communicated to it by that ſtroke, its parts, on that ſide where the motions conſpire, muſt preſs and beat the contiguous air more violently than on the other, and there excite a reluctancy and re-action of the air proportionably greater. And for the ſame reaſon, if the rays of light ſhould poſſibly be globular bodies, and by their oblique paſſage out of one medium into another acquire a circulating motion; they ought to feel the greater reſiſtance from the ambient æther, on that ſide where the motions conſpire, and thence be continually bowed to the other. But notwithſtanding this plauſible ground of ſuſpicion, when I came to examine it, I could obſerve no ſuch curvity in them. And beſides (which was enough for my purpoſe) I obſerved, that the difference betwixt the length of the image and the diameter of the hole, through which the light was tranſmitted, was proportionable to their diſtance.

Experimentum Crucis.

The gradual removal of theſe ſuſpicions at length led me to the *experimentum crucis*, which was this. I took two boards, and placed one of them cloſe *behind the priſm at the window*, ſo that the light might paſs through a ſmall hole, made in it for the purpoſe, and fall on the other board, which I placed at about 12 feet diſtance, having firſt made a ſmall hole in it alſo for ſome of that incident light to paſs through. Then I placed another priſm behind this ſecond board, ſo that the light trajected through both the boards might paſs through that alſo, and be again refracted before it arrived at the wall. This done, I took the firſt priſm in my hand, and turned it to and fro ſlowly about its axis, ſo much as to make the ſeveral parts of the image, caſt on the ſecond board, ſucceſſively paſs through the hole in it, that I might obſerve to what places on the wall the ſecond priſm would refract them. And I ſaw, by the variation of thoſe places, that the light, tending to that end of the image towards which the refraction of the firſt priſm was made, did in the ſecond priſm ſuffer a refraction conſiderably greater than the light tending to the other end. And ſo the true cauſe of the length of that image was detected to be no other, than that *light* is not ſimilar or homogeneal, but conſiſts of *difform rays, ſome of which are more refrangible than others*; ſo that without any difference in their

their incidence on the ſame medium, ſome ſhall be more *refracted* than others; and therefore that, according to their *particular degrees of refrangibility*, they were tranſmitted through the priſm to divers parts of the oppoſite wall.

True cauſe of the imperfection of Teleſcopes.

When I underſtood this, I left off my aforeſaid glaſs-works; for I ſaw, that the perfection of teleſcopes was hitherto limited, not ſo much for want of glaſſes truly figured according to the preſcriptions of optick authors (which all men have hitherto imagined) as becauſe that *light* itſelf is an heterogeneous mixture of *differently refrangible rays*: ſo that were a glaſs ſo exactly figured as to collect any one ſort of rays into one point, it could not collect thoſe alſo into the ſame point, which, having the ſame incidence upon the ſame medium, are apt to ſuffer a different refraction. Nay, I wondered, that ſeeing the difference of refrangibility was ſo great as I found, teleſcopes ſhould arrive to that perfection they are now at: for, meaſuring the refractions in one of my priſms, I found, that ſuppoſing the common ſine of incidence upon one of its planes was 44 parts, the ſine of refraction of the utmoſt rays on the red end of the colours, made out of the glaſs into the air, would be 68 parts; and the ſine of refraction of the utmoſt rays on the other end, 69 parts; ſo that the difference is about a 24th or 25th part of the whole refraction. And, conſequently, the object-glaſs of any teleſcope cannot collect all the rays which come from one point of an object, ſo as to make them convene at its focus in leſs room than in a circular ſpace, whoſe diameter is the 50th part of the diameter of its aperture; which is an irregularity, ſome hundreds of times greater than a circularly figured *lens*, of ſo ſmall a ſection as the object-glaſſes of long teleſcopes are, would cauſe by the unfitneſs of its figure, were light uniform.

This made me take reflections into conſideration; and finding them regular, ſo that the angle of reflection of all ſorts of rays was equal to their angle of incidence, I underſtood, that by their mediation optick inſtruments might be brought to any degree of perfection imaginable, provided a reflecting ſubſtance could be found which would poliſh as finely as glaſs, and reflect as much light as glaſs tranſmits, and the art of communicating to it a parabolick

rabolick figure be alſo attained. But theſe ſeemed very great difficulties, and I have alſo thought them inſuperable, when I farther conſidered, that every irregularity in a reflecting ſuperficies makes the rays ſtray 5 or 6 times more out of their due courſe, than the like irregularities in a refracting one: ſo that a much greater curioſity would be here requiſite, than in figuring glaſſes for refraction.

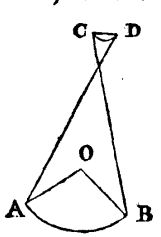
First Reflecting Teleſcope.

Amidſt theſe thoughts, I was forced from *Cambridge*, *anno* 1666, by the intervening plague, and it was more than two years before I proceeded further. But then having thought on a tender way of poliſhing, proper for metal, whereby, as I imagined, the figure would be corrected to the laſt; I began to try what might be effected in this kind, and by degrees ſo far perfected an inſtrument, in the eſſential parts of it like that I ſent to *London*, by which I could diſcern *Jupiter's* four concomitants, and ſhewed them divers times to two others of my acquaintance. I could alſo diſcern the moon-like *phaſe* of *Venus*, but not very diſtinctly, nor without ſome niceneſs in diſpoſing the inſtrument.

From that time I was interrupted till this laſt autumn, when I made another. And as that was ſenſibly better than the firſt, eſpecially for day-objects, ſo I doubt not but they will be ſtill brought to a much greater perfection by their endeavours, who, as you inform me, are taking care about it at *London*.

Deſign of a Microſcope by Reflection.

I have ſometimes thought to make a microſcope, which ſhould have, inſtead of an object-glaſs, a reflecting piece of metal. For



theſe inſtruments ſeem as capable of improvement as teleſcopes, and perhaps more; becauſe but one reflective piece of metal is requiſite in them, as you may perceive by the diagram; where AC repreſenteth the object-metal; CD, the eye-glaſs; F, their common focus; and O, the other focus of the metal, in which the object is placed.

But to return from this digreſſion, I told you, that light is not ſimilar or homogeneral, but conſiſts of difform rays, ſome of which are more refrangible than others: ſo that of thoſe which are alike incident on the ſame medium, ſome ſhall be more refracted than others; and that not by virtue of the glaſs, or other external

external cauſe, but from a pre-diſpoſition, which every particular ray hath to ſuffer refraction.

Origin of Colours.

I SHALL now proceed to acquaint you with another more notable *difformity* in its rays, wherein the origin of colours is unfolded: concerning which I ſhall lay down the doctrine firſt; and then, for its examination, give you an inſtance of two of the experiments, as a ſpecimen of the reſt.

The doctrine you will find comprehended and illuſtrated in the following propoſitions.

I. As the rays of light differ in degrees of refrangibility, ſo they alſo differ in their diſpoſition to exhibit this or that particular colour. Colours are not qualifications of light, derived from refractions, or reflections of natural bodies (as it is generally believed) but original and connate properties, which in divers rays are divers. Some rays are diſpoſed to exhibit a Red colour, and no other; ſome a Yellow, and no other; ſome a Green, and no other; and ſo of the reſt. Nor are there only rays proper and particular to the more eminent colours, but even to all their intermediate gradations.

II. To the ſame degree of refrangibility ever belongs the ſame colour, and to the ſame colour ever belongs the ſame degree of refrangibility. The leaſt refrangible rays are all diſpoſed to exhibit a Red colour; and contrarily, thoſe rays which are diſpoſed to exhibit a Red colour, are all the leaſt refrangible: ſo the moſt refrangible rays are all diſpoſed to exhibit a deep Violet colour; and contrarily, thoſe which are apt to exhibit ſuch a Violet colour, are all the moſt refrangible: and ſo to all the intermediate colours in a continued ſeries belong intermediate degrees of refrangibility. And this analogy betwixt colours and refrangibility is very preciſe and ſtrict; the rays always either exactly agreeing in both, or proportionably diſagreeing in both.

III. The ſpecies of colour, and degree of refrangibility proper to any particular ſort of rays, is not mutably by refraction, nor by reflection from natural bodies, nor by any other cauſe that I could yet obſerve. When any one ſort of rays hath been well parted from thoſe of other kinds, it hath afterwards obſtinately retained its colour, notwithſtanding my utmoſt endeavours to change

Origin of

change it. I have refracted it with prisms, and reflected it with bodies, which in day-light were of other colours; I have intercepted it with the coloured film of air, interceding two compressed plates of glass; transmitted it through coloured mediums, and through mediums irradiated with other sorts of rays, and diversly terminated it; and yet could never produce any new colour out of it. It would, by contracting or dilating, become more brisk, or faint, and by the loss of many rays, in some cases very obscure and dark; but I could never see it changed in specie.

IV. Yet seeming transmutations of colours may be made, where there is any mixture of divers sorts of rays: for in such mixtures, the component colours appear not; but, by their mutual allaying each other, constitute a middling colour. And therefore, if by refraction, or any other of the aforesaid causes, the difform rays, latent in such a mixture, be separated, there shall emerge colours different from the colour of the composition. Which colours are not new generated, but only made apparent by being parted; for if they be again intirely mixed and blended together, they will again compose that colour, which they did before separation. And, for the same reason, transmutations, made by the convening of divers colours, are not real; for when the difform rays are again severed, they will exhibit the very same colours, which they did before they entered the composition; as you see Blue and Yellow powders, when finely mixed, appear to the eye Green; and yet the colours of the component corpuscles are not thereby really transmuted, but only blended. For when viewed with a good microscope, they still appear Blue and Yellow interspersedly.

V. There are therefore two sorts of colours, the one original and simple, the other compounded of these. The original or primary colours are, Red, Yellow, Green, Blue, and a Violet-Purple, together with Orange, Indico, and an indefinite variety of intermediate gradations.

VI. The same colours in specie, with these primary ones, may be also produced by composition. For a mixture of Yellow and Blue makes Green; of Red and Yellow makes Orange; of Orange and Yellowish Green makes Yellow. And, in general, if

Colours.

if any two colours be mixed, which in the series of those generated by the prism are not too far distant from one another; they, by their mutual alloy, compound that colour, which in the said series appeareth in the midway between them. But those which are situated at too great a distance, do not so. Orange and Indico produce not the intermediate Green, nor Scarlet and Green the intermediate Yellow.

VII. But the most surprizing and wonderful composition was that of Whiteness. There is no one sort of rays which alone can exhibit this. It is ever compounded; and to its composition are requisite all the aforesaid primary colours, mixed in a due proportion. I have often with admiration beheld, that all the colours of the prism being made to converge, and thereby to be again mixed, as they were in the light before it was incident upon the prism, reproduced light entirely and perfectly White, and not at all sensibly differing from a direct light of the sun, unless when the glasses I used were not sufficiently clear; for then they would a little incline it to their colour.

VIII. Hence, therefore, it comes to pass, that Whiteness is the usual colour of light; for light is a confused aggregate of rays indued with all sorts of colours, as they were promiscuously darted from the various parts of luminous bodies. And of such a confused aggregate, as I said, is generated Whiteness, if there be a due proportion of the ingredients; but if any one predominate, the light must incline to that colour; as it happens in the blue flame of brimstone; the yellow flame of a candle; and the various colours of the fixed stars.

IX. These things considered, the manner how colours are produced by the prism is evident. For, of the rays, constituting the incident light, since those which differ in colour proportionally differ in refrangibility, they, by their unequal refractions, must be severed and dispersed into an oblong form in an orderly succession, from the least refracted Scarlet, to the most refracted Violet. And for the same reason it is, that objects, when looked upon through a prism, appear coloured. For the differm rays, by their unequal refractions, are made to diverge towards several parts of the *retina*, and there express the images of things coloured;

Origin of loured; as in the former caſe they did the ſun's image upon a wall. And by this inequality of refractions, they become not only coloured, but alſo very confuſed and indiſtinct.

X. Why the colours of the rainbow appear in falling drops of rain, is alſo from hence evident. For thoſe drops, which refract the rays diſpoſed to appear Purple in greateſt quantity to the ſpectator's eye, refract the rays of other ſorts ſo much leſs, as to make them paſs beſide it; and ſuch are the drops on the inſide of the primary bow, and on the outſide of the ſecondary or exterior one. So thoſe drops, which refract in greateſt plenty the rays apt to appear Red toward the ſpectator's eye, refract thoſe of other ſorts ſo much more, as to make them paſs beſide it; and ſuch are the drops on the exterior part of the primary, and interior part of the ſecondary bow.

XI. The odd phænomena of an infuſion of *lignum nephriticum*, leaf-gold, fragments of coloured glaſs, and ſome other tranſparently coloured bodies, appearing in one poſition of one colour, and of another in another, are on theſe grounds no longer riddles. For thoſe are ſubſtances apt to reflect one ſort of light, and tranſmit another; as may be ſeen in a dark room, by illuminating them with ſimilar or uncompounded light. For then they appear of that colour only with which they are illuminated; but yet in one poſition more vivid and luminous than in another, accordingly as they are diſpoſed more or leſs to reflect or tranſmit the incident colour.

XII. From hence alſo is manifeſt the reaſon of an unexpected experiment, which Mr. *Hook*, ſomewhere in his *Micrography*, relates to have made with two wedge-like tranſparent veſſels, filled the one with a Red, the other with a Blue liquor: namely, that though they were ſeverally tranſparent enough, yet both together became opake: for if one tranſmitted only Red, and the other only Blue, no rays could paſs through both.

XIII. I might add more inſtances of this nature, but I ſhall conclude with this general one: That the colours of all natural bodies have no other origin than this; that they are variouſly qualified to reflect one ſort of light in greater plenty than another. And this I have experienced in a dark room, by illuminating thoſe

thoſe bodies with uncompounded light of divers colours. For Colour. by that means any body may be made to appear of any colour. They have there no appropriate colour, but ever appear of the colour of the light caſt upon them; but yet with this difference, that they are moſt briſk and vivid in the light of their own day-light colour. *Minium* appeareth there of any colour indifferently, with which it is illuſtrated; but yet moſt luminous in Red: and ſo Biſe appeareth indifferently of any colour, with which it is illuſtrated; but yet moſt luminous in Blue: and therefore *Minium* reflecteth rays of any colour, but moſt copiouſly thoſe endowed with Red; and conſequently when illuſtrated with day-light, that is, with all ſorts of rays promiſcuouſly blended, thoſe qualified with Red ſhall abound moſt in the reflected light, and by their prevalence cauſe it to appear of that colour. And for the ſame reaſon Biſe, reflecting Blue moſt copiouſly, ſhall appear Blue by the exceſs of thoſe rays in its reflected light; and the like of other bodies. And that this is the entire and adequate cauſe of their colours is manifeſt, becauſe they have no power to change or alter the colours of any ſort of rays incident apart, but put on all colours indifferently, with which they are enlightened.

Theſe things being ſo, it can be no longer diſputed, whether Light not a Quality. there be colours in the dark, or whether they be the qualities of the objects we ſee; no, nor perhaps whether light be a body. For, ſince colours are the qualities of light, having its rays for their intire and immediate ſubject, how can we think thoſe rays qualities alſo, unleſs one quality may be the ſubject of, and ſuſtain another? which, in effect, is to call it ſubſtance. We ſhould not know bodies for ſubſtances, were it not for their ſenſible qualities; and the principal of thoſe being now found due to ſomething elſe, we have as good reaſon to believe that to be a ſubſtance alſo.

Beſides, who ever thought any Quality to be a heterogeneous aggregate, ſuch as light is diſcovered to be? But to determine more abſolutely what light is, after what manner refracted, and by what modes or actions it produceth in our minds the phantaſms of colours, is not ſo eaſy: and I ſhall not mingle conjectures with certainties.

REVIEWING what I have written, I ſee the diſcourſe itſelf will lead to divers experiments ſufficient for its examination: and therefore I ſhall not trouble you farther than to deſcribe one of thoſe which I have already inſinuated.

Proof by Experiment.

In a darkened room make a hole in the ſhut of a window, whoſe diameter may conveniently be about a third part of an inch, to admit a convenient quantity of the ſun's light: and there place a clear and colourleſs priſm, to refract the entering light towards the further part of the room; which, as I ſaid, will thereby be diffuſed into an oblong coloured image. Then place a lens of about 3 foot radius, ſuppoſe a broad object-glaſs of a three foot teleſcope, at the diſtance of about 4 or 5 foot from thence, through which all thoſe colours may at once be tranſmitted, and made by its refraction to convene at a further diſtance of about 10 or 12 feet. If at that diſtance you intercept this light with a ſheet of white paper, you will ſee the colours converted into Whiteneſs again by being mingled. But it is requiſite that the priſm and lens be placed ſteady, and that the paper, on which the colours are caſt, be moved to and fro; for by ſuch motion you will not only find at what diſtance the Whiteneſs is moſt perfect, but alſo ſee how the colours gradually convene and vaniſh into whiteneſs; and afterwards, having croſſed one another in that place where they compound whiteneſs, are again diſſipated and ſevered, and, in an inverted order, retain the ſame colours which they had before they entered the compoſition. You may alſo ſee, that if any of the colours at the lens be intercepted, the whiteneſs will be changed into the other colours. And therefore, that the compoſition of whiteneſs be perfect, care muſt be taken that none of the colours fall beſides the lens. In the annexed deſign of this experiment, ABC [*vid. Lect. Opt. Par. II. Tab. III. fig.* 14.] expreſſeth the priſm ſet endwiſe to ſight, cloſe by the hole F, of the window EG. Its vertical angle, ACB, may conveniently be about 63 deg. MN deſigneth the lens: its breadth, $2\frac{1}{2}$, or 3 inches. OF, one of the ſtraight lines, in which diſform rays may be conceived to flow ſucceſſively from the ſun. FP, and FT, two of thoſe rays unequally refracted, which the lens makes to converge towards X, and after decuſſation to diverge

verge again. And PT, X, $\pi\tau$, the paper, at divers diſtances, on which the colours are projected; which in X conſtitute whiteneſs, but are Red and Yellow in T, and τ, and Blue and Purple in P, and π.

Immutability of Homogeneal Light.

If you proceed further to try the impoſſibility of changing any uncompounded colour, which I have aſſerted in the 3d and 13th Propoſitions, it is requiſite that the room be made very dark; leſt any ſcattering light, mixing with the colour, diſturb and allay it, and render it compound contrary to the deſign of the experiment: it is alſo requiſite that there be a perfecter ſeparation of the colours, than, after the manner above deſcribed, can be made by the refraction of one ſingle priſm; and how to make ſuch further ſeparations, will ſcarce be difficult to them that conſider the diſcovered laws of refractions. But if trials ſhall be made with colours not throughly ſeparated, there muſt be allowed changes proportionable to the mixture. Thus if compound Yellow light fall upon the Blue biſe, the biſe will not appear perfectly Yellow, but rather Green: becauſe there are in the Yellow mixture many rays endued with Green; and Green, being leſs remote from the uſual Blue colour of biſe than Yellow, is the more copiouſly reflected by it.

In like manner, if any one of the priſmatic colours, ſuppoſe Red, be intercepted, on deſign to try the aſſerted impoſſibility of reproducing the colour out of the others which are pretermitted; it is neceſſary, either that the colours be very well parted before the Red be intercepted, or that together with the Red, the neighbouring colours, into which any Red is ſecretly diſperſed, that is, the Yellow and perhaps Green too, be intercepted: or elſe, that allowance be made for the emerging of ſo much Red out of the Yellow-green, as may poſſibly have been diffuſed, and ſcatteringly blended in thoſe colours. And if theſe things be obſerved, the new production of Red, or of any other intercepted colour, will be found impoſſible.

This I conceive is enough for introduction to experiments of this kind; which, if any of the Royal Society ſhall be ſo curious as to proſecute, I ſhall be very glad to be informed with what ſucceſs: that if any thing ſeem to be defective, or to thwart this relation,

I may have an opportunity of giving further direction about it; or of acknowledging my errors, if I have committed any.

II.

NEWTONUS OLDENBURGO S.

Reply to Ignatius Pardies.

ACCEPI obſervationes Reverendi Patris Ignatii Pardies in Epiſtolam meam de Lucis refractionibus et Coloribus ad te conſcriptam; quo nomine me illi devinctum agnoſco; atque hæc difficultatibus, quas propoſuit, diluendis reſcribo.

The length of the priſmatic image of the Sun not cauſed by unequal incidence of the Rays.

Imprimis ait longitudinem ſolaris imaginis, à refractione priſmatis refractione effectam, non aliâ indigere cauſâ, quàm diverſa radiorum ab oppoſitis partibus ſolaris diſci profluentium incidentia; adeoque non probare diverſam refrangibilitatem radiorum. Et quo aſſertionis ejus veritatem confirmet, oſtendit caſum, in quo ex diverſâ incidentiâ triginta minutorum, differentia refractionis poteſt eſſe duorum graduum cum viginti tribus minutis, vel etiam paulo major, prout exigit meum experimentum. Sed hallucinatus eſt reverendus Pater: nam refractiones à diverſâ parte priſmatis, quantum poteſt inæquales ſtatuit R. P. Pardies, cùm tamen ego tum in experimentis, tum in calculo de experimentis iſtis inito, æquales adhibuerim. Sit autem ABC * priſmatis ſectio ad axem ejus perpendicularis; XL, & YK, radii duo in F (medio foraminis) decuſſantes, & in priſma illud incidentes ad K, & L; ſintque eorum refracti KH, & LI, ac denuo HP, & IT. Et cùm refractiones ad latus AC, æquales eſſe refractionibus ad latus BC, quàm proximè ſuppoſuerim; ſi AC, & BC, ſtatuantur æqualia, ſimilis erit radiorum KH, & LI ad AB, baſin priſmatis, inclinatio; adeoque ang. CLI = ang. CHK; & ang. CIL = ang. CKH. Quare etiam refractiones in K, & I, æquales erunt; ut & in L, & H; atque adeo ang. PHA = ang. FLB; & ang. TIA = ang. BKF; & proinde refractorum HP, & IT, eadem erit ad invicem inclinatio, ac eſt incidentium radiorum FL, & FK. Sit ergo angulus KFL, 30 min. æqualis nempe ſolari diametro, & erit angulus, quem HI, & *mn*, comprehendunt, etiam 30 min. ſi modo radii FL, & FK, æqualiter refrangibiles ſtatuantur. At mihi experienti prodiit angulus ille circiter 2 gr. 49 min. quem radius HP,

* Vide Opt. Book I. Par. I. Tab. III. fig. 13.

extremum

extremum violaceum colorem, & *mn*, cæruleum exhibens, conſtituere; ac proinde radios illos diverſimode refrangibiles eſſe, ſive refractiones ſecundum diſparem ſinuum incidentiæ & refractionis rationem peragi, neceſſario concedendum eſt.

Addit præterea R. P. quòd non ſufficit ad obeundum ritè calculum, ex longitudine imaginis impactæ in chartam ſubtrahere magnitudinem foraminis feneſtræ; quandoquidem etiam poſito foramine indiviſibili, adhuc fieret aliud veluti foramen latum in poſteriori ſuperficie priſmatis. Mihi tamen videtur, his non obſtantibus, quòd refractiones radiorum, in anteriori æquè ac poſteriori ſuperficie priſmatis decuſſantium, ex adhibitis principiis poſſint ritè computari. Sed ſi res ſecus eſſet, latitudo hiatûs in poſteriori ſuperficie, quod ad inſtar foraminis eſt, haud efficeret errorem duorum minutorum ſecundorum; & in rebus practicis non operæ pretium duco ad minutias iſtas attendere.

The unequal refractions of the different colours in the *Experimentum Crucis* not cauſed by unequal incidence.

Illi inſuper experimento, quod *Crucis* vocaveram, nihil adverſatur R. P. dum contendit, inæquales radiorum, diverſis coloribus imbutorum, refractiones, ex inæqualibus incidentiis effectas fuiſſe. Nam radiis per duo admodum parva, ab invicem diſtantia, & immota foramina tranſeuntibus, incidentiæ illæ, prout ego experimentum inſtitui, omnino æquales erant, & tamen refractiones liquido inæquales. Sin ille de experimentis noſtris dubitet, oro, ut radiorum diverſis coloribus præditorum refractiones ex incidentiis paribus menſuret, & ſentiet inæquales eſſe. Si modus ille, quem ego ad hoc negotium adhibui, minùs placeat (quo tamen nullus poteſt eſſe luculentior) facile eſt alios excogitare, ſicut & alios ipſe haud paucos cum fructu expertus ſum.

Objections from the mixture of coloured powders anſwered.

Contra Theoriam de coloribus objicitur, quòd pulveres diverſorum colorum permiſti non candidum ſed ſubobſcurum & fuſcum colorem exhibent. Mihi vero albus, niger & omnes intermedii fuſci, qui ab albo & nigro permiſtis componi poſſunt, non ſpecie coloris ſed quantitate lucis tantùm differre videntur. Et cùm in miſtione pigmentorum, ſingula corpuſcula non niſi proprium colorem reflectant, adeoque maxima pars lucis incidentis ſupprimatur & retineatur: lux reflexa ſubobſcura evadet, & quaſi cum tenebris permiſta; adeo ut non intenſum alborem, ſed qualem nigredinis permiſtio conficit, hoc eſt fuſcum, exhibere debeat.

Objection from the mixture of coloured fluids in the same vessel answered.

Objicitur deinde, quòd à liquoribus quibuscunque diversi coloris in eodem vase commistis, æquè ac in diversis vasis contentis, opacitas oriri debet; quod tamen, ait, verum non esse. Sed non video consequentiam. Nam plurimi liquores agunt in se invicem, & novam sibi mutuò partium contexturam secreto inducunt; unde opaci, diaphani, vel variis coloribus, ex coloribus permistorum nullo modo oriundis, præditi evadere possunt. Et hâc de causâ experimenta hujusmodi minùs apta semper existimavi, à quibus conclusiones deduci possint. Subnoto tamen, quòd ad hoc experimentum requiruntur liquores saturis & intensis coloribus præditi, qui perpaucos nisi proprii coloris radios transmittant; quales rarò occurrunt, ut videbitur illuminando liquores cum diversis coloribus prismatis in obscurato cubiculo. Nam pauci reperientur, qui in propriis coloribus satis diaphani appareant, inque alienis opaci. Convenit præterea, ut adhibiti colores sint inter se oppositi, quales existimo fore rubrum & cæruleum, vel flavum & violaceum, vel etiam viridem & purpureum illum qui coccineo affinis est. Et ex hujusmodi liquoribus nonnulli, quorum partes tingentes non congrediuntur, fortasse permisti evadunt opaciores. Sed de eventu nihil sum sollicitus, tum quòd luculentius est experimentum in liquoribus seorsim existentibus, tum quòd experimentum illud, sicut & iridis, tincturæ nephriticæ, & aliorum corporum naturalium phænomena, non ad probandam sed ad illustrandam tantùm doctrinam proposui.

Quod R. P. Theoriam nostram *hypothesin* vocat, amicè habeo, siquidem ipsi nondum constet. Sed alio tamen consilio propositeram, & nihil aliud continere videtur quàm proprietates quasdam lucis, quas jam inventas probare haud difficile existimo, & quas si non veras esse cognoveram, pro futili & inani speculatione mallem repudiare, quàm pro meâ *hypothesi* agnoscere.

Quid verò censeri mereatur, ex responsionibus ad animadversiones Domini——fortasse statim prodituris clariùs patebit. Interim vale, et perge amare tibi devinctissimum

III.

III.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, April , 1672.

I herewith * send you an answer to the Jesuit *Pardie's* considerations, in the conclusion of which, you may possibly apprehend me a little too positive; but I speak only for myself. I am highly sensible of your good will, in communicating to me such observations as occur concerning my theories, or cata-dioptrical instruments, and I desire you to continue that favour to me. Mr. *Hugens* has very well observed the confusion of refractions near the edges of a lens, where its two superficies are inclined much like the planes of a prism; whose refractions are in like manner confused. But it is not from the inclination of those superficies, so much as from the heterogeneity of light, that that confusion is caused. For by illuminating an object with homogeneal light, I have seen it far distincter through a prism, than I could by light that was heterogeneal.

I suppose the design of Sir *Robert Moray's* experiments is, to have their events expressed with such observations as may occur concerning them.

Touching the first, I have observed, that the solar image falling on a paper, placed at the focus of the lens, was, by the interposed prism, drawn out in length proportional to the prism's refraction, or distance from that focus. And the chief observable here, which I remember, was, that the streight edges of the oblong image were distincter than they would have been without the lens.

Experiment on the rays coming from Venus.

Considering that the rays, coming from the planet *Venus*, are much less inclined one to another, than those which come from the opposite parts of the sun's disk; I once tried an experiment or two with her light. And to make it sufficiently strong, I found it necessary to collect it first by a broad lens; and then, interposing a prism between the lens and its focus, at such distance

* This enclosed the preceding Letter.

that

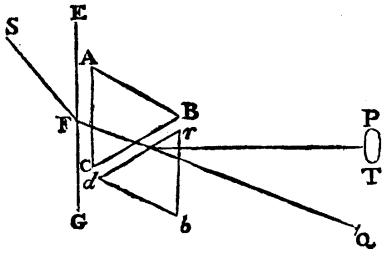
that all the light might paſs through the priſm, I found the focus, which before appeared like a lucid point, to be drawn out into a long ſplendid line by the priſm's refraction.

I have ſometimes deſigned to try how a fixed ſtar, ſeen through a long teleſcope, would appear, by interpoſing a priſm between the teleſcope and my eye. But by the appearance of *Venus*, viewed with my naked eye through a priſm, I preſage the event.

Concerning the ſecond experiment, I have occaſionally obſerved, that by covering both ends of the priſm with paper at ſeveral diſtances from the middle, the breadth of the ſolar image will be increaſed or diminiſhed as much, as is the aperture of the priſm, without any variation of the length: or, if the aperture be augmented on all ſides, the image on all ſides will be ſo much and no more augmented.

Of the third experiment, I have occaſion to ſpeak in my anſwer to another perſon; where you will find the effects of two priſms, in all croſs poſitions of one to another, deſcribed. But if one priſm alone be turned about, the coloured image will only be tranſlated from place to place, deſcribing a circle, or ſome other conick ſection on the wall, on which it is projected, without ſuffering any alteration in its ſhape, unleſs ſuch as may ariſe from the obliquity of the wall, or caſual change of the priſm's obliquity to the ſun's rays.

The effect of the fourth experiment I have already inſinuated, telling you, that light, paſſing through parts of the priſm of divers thickneſſes, did ſtill exhibit the ſame phænomena.



Note, the long axes of the two priſms in the above-mentioned experiment are parallel to one another. Other circumſtances reſpecting their poſition, you will better underſtand from the annexed ſcheme. In which, let EG deſign the window; F, the hole in it through which the light arrives at the priſms; ABC, the firſt priſm, which refracts the light towards PT, painting there the colours

colours in an oblong; and *dbr* the ſecond priſm, which refracts back again the rays to Q, where the long image, PT, is contracted into a round one. I ſuppoſe the plane *dr* parallel to BC, and *br* to AC, that no rays may be equally refracted contrary ways in both priſms. The priſms muſt alſo be placed very near to one another; for if their diſtance be ſo great, that colours begin to appear in the light, before its incidence on the ſecond priſm, thoſe colours will not be deſtroyed by the contrary refractions of that priſm.

Theſe things being obſerved, the round image, Q, will appear of the ſame bigneſs, which it doth when both the priſms are taken away, that the light may paſs directly towards Q from the hole without any refraction at all: and its diameter will equal the breadth of the long image PT, if thoſe images be equally diſtant from the priſms.

If an accurate conſideration of theſe refractions be deſigned, it is convenient that a lens be placed in the hole F, or immediately after the priſms, ſo that its focus be at the image Q, or PT. For thereby the perimeter of the image Q, and the ſtreight ſides of the image PT, will become much better defined than otherwiſe.

Thus far concerning Sir *Robert Moray's* propoſals. I have nothing more at preſent, unleſs to deſire you, that, in the letter wherein I ſent you of the table of apertures and charges, you would change an expreſſion concerning the ſix-foot tube, where I intimated, that it was none of the beſt in its kind. For leſt the friend, of whom it was borrowed, ſhould think I depreciate it, I had rather that the expreſſion ſhould be a little intimated after this manner; that I am not very well aſſured of its goodneſs, and therefore deſire, that the other experiment of reading at 100 foot diſtance, ſhall rather be confided in. You will do me a favour to peruſe the reſt of that letter alſo, before you commit it to the preſs. For I writ it in ſo much haſte, that I had no time to peruſe it: and by rendering my expreſſions more perſpicuous, or leſs ambiguous, you will ſtill oblige, yours, &c.

IV.

NEWTONUS OLDENBURGO S.

Reply to further objections of Ignatius Pardies.

IN obſervationibus R. P. Ignatii Pardies, quas ad te denuo conſcripſit, an majus ſit humanitatis argumentum, quòd meis reſponſionibus vim omnem attribuit, an ingenii, quòd objectiones proponit, quæ ſi non probè tollantur, doctrinam meam fruſtrari poſſunt, vix dixerim. Utrumque ſanè ad determinandam veritatem optimè conducit; efficitque, ut acceptis quàm lubentiſſimè reſpondeam.

Objection. That the length of the coloured image may be explained by Grimaldi's hypotheſis, or by Hook's.

Ait R. P. quòd abſque variâ diverſorum radiorum refrangibilitate, poſſibile ſit explicare longitudinem colorum; puta ex hypotheſi *P. Grimaldi*, per diffuſionem luminis, quod ſupponitur eſſe ſubſtantia quædam rapidiſſimè mota; vel ex hypotheſi *Hookii* noſtri, per diffuſionem vel expanſionem undulationum, quas ſtatuit in æthere à lucidis corporibus excitatas, quaquaverſum propagari. Addo, quòd ex hypotheſi *Carteſianâ* poteſt etiam effingi conſimilis diffuſio conatûs vel preſſionis globulorum; perinde ut in explicatione caudæ cometæ ſupponitur. Et eadem diffuſio vel expanſio juxta aliam quamvis hypotheſin, in quâ lumen ſtatuitur eſſe vis, actio, qualitas, vel ſubſtantia quælibet, à luminoſis corporibus undique emiſſa, effingi poteſt.

Ut his reſpondeam, animadvertendum eſt, quòd doctrina illa, quam de refractione & coloribus explicui, in quibuſdam lucis proprietatibus ſolummodo conſtitit, neglectis hypotheſibus per quas proprietates illæ explicari debent.

Optimus enim et tutiſſimus philoſophandi modus videtur, ut imprimis rerum proprietatis diligenter inquiramus, & per experimenta ſtabiliamus; ac dein tardiùs contendamus ad hypotheſes pro rerum explicatione. Nam hypotheſes ad explicandas rerum proprietates tantùm accommodari debent, & non ad determinandas uſurpari, niſi quatenus experimenta ſubminiſtrare poſſint. Et ſi quis ex ſolâ hypotheſium poſſibilitate de veritate rerum conjecturam faciat, non video quo pacto quicquam certi in ullâ ſcientiâ determinare poſſit; ſiquidem alias atque alias hypotheſes ſemper licet excogitari, quæ novas difficultates ſuppeditare videbuntur.

Quamobrem

Quamobrem ab hypotheſium contemplatione, tanquam improprio argumentandi loco, hic abſtinendum eſſe cenſui, & vim objectionis abſtrahendam, ut pleniorem & magis generalem reſponſionem accipiat.

Reply. Definition of Light, and Rays of Light.

Itaque per lumen intelligo quodlibet ens vel entis poteſtatem (ſive ſit ſubſtantia, ſive quævis ejus vis, actio, vel qualitas) quod à corpore lucido rectâ pergens aptum ſit ad excitandam viſionem; & per radios luminis intelligo minimas vel quaſlibet indefinitè parvas ejus partes, quæ ab invicem non dependent, quales ſunt illi omnes radii, quos lucentia corpora, vel ſimul vel ſucceſſivè, ſecundum rectas lineas emittunt. Nam illæ tum collaterales tum ſucceſſivæ partes luminis ſunt independentes; ſiquidem unæ abſque aliis intercipi poſſint, & in quaſlibet plagas ſeorſim reflecti vel refringi. Et hoc præcognito, objectionis vis omnis in eo ſita erit; quòd colores per aliquam luminis ultra foramen diffuſionem, quæ non oritur ab inæquali diverſorum radiorum ſeu luminis independentium partium refrangibilitate, in longum diduci poſſint.

Quod autem non aliunde oblongentur ſuperiùs monſtravi, in literis relatis in Philoſoph. Tranſact. Numb. 80. Et ut rationes faciliùs perſpiciantur, non gravabor jam fuſiùs explicare.

The fact proved, that Rays are unequally refracted in equal incidences.

Scilicet ex obſervatione, quòd Radii poſt Refractionem non incurvabantur, ſed rectâ ad parietem progreſſi fuerint, patuit, eandem fuiſſe eorum ad ſe mutuò inclinationem cùm modò exierunt priſmate, atque cùm impegerunt in parietem; & proinde longitudo colorum ex inclinatione radiorum emerſit, quam inter refringendum obtinuere; hoc eſt ex quantitate refractionis, quam ſinguli radii in priſmate patiebantur. Adeoque cum colorum longitudo latitudinem aliquot vicibus ex obſervatione ſuperavit; ſequitur majorem fuiſſe inæqualitatem refractionum, quàm potuit oriri ex inæqualitate incidentiarum. Quinimo ex figurâ Imaginis coloratæ, quòd nempe non fuit Ovalis, ſed latera duabus parallelis rectis lineis terminata, patuit eam ex indefinitè multis imaginibus Solis, per inæqualem refractionem in longam diſtractis & ſerie continuâ diſpoſitis, conſtitui; adeoque radios, à ſingulis partibus ſolaris diſci provenientes, per totam ferè longitudinem colorum diſpergi; & proinde ſimiliter incidentium inæquales eſſe refractiones. Id quod aliis etiam indiciis oſtendi poſſet.

Of the cauſe of that fact.

Conſtat itaque diverſas eſſe refractiones, ubi pares ſunt incidentiæ. Sed ampliùs inquirendum eſt, unde oriatur illa diverſitas? An ſit à causâ aliquâ incertâ & irregulari, vel certâ lege, ſecundum quam radius quilibet aptus eſt determinatam aliquam refractionem pati. Per incertas & irregulares cauſas intellige aſperitates in ſuperficie; vel venas diverſæ denſitatis in interiori parte Vitri, ex quo Priſma conflatur; item irregularem ſitum pororum, quos nonnulli ob luminis tranſmiſſionem per vitrum omnifariam trajici ſtatuunt; necnon tremores & inæquales commotiones partium Ætheris, Aeris vel Vitri; radiorum, in refringente ſuperficie ſe mutuò fortaſſe comprimentium, reſulturam ab invicem; ejuſdem cujuſque radii diviſionem ac diſſipationem in partes divergentes, quas vel numero finitas vel indefinitè multas, in ſuperficie aliquâ continuatim jacentes, imaginari liceat; vel quamvis aliam diffuſionem et dilatationem luminis, quam poſſumus excogitare, non ortam ex diversâ prædiſpoſitione cujuſque radii ad refractionem, in certo aliquo & conſtanti gradu, patiendam.

That it is no irregular uncertain cauſe.

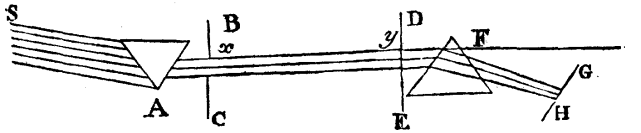
Quòd autem diverſa refractio non orta ſit ex ullis ejuſmodi cauſis incertis & irregularibus, probavi per experimentum duorum conſimilium priſmatum in contrario ſitu juxtà poſitorum, ita ut poſterius contrariâ ſuâ refractione retroflecteret radios, & ſic regulares effectus prioris deſtrueret, ſed per iteratas refractiones, augeret irregulares. Utpote ſi prius priſma diffunderet, ac divergere faceret parallelos radios, ex. gr. per aſperam polituram, inæquabilem denſitatem, aut irregularem ſitum pororum in priſmatis, vel per tremulos motus partium Ætheris, Aeris aut Vitri; vel per dilatationem luminis propter partium ejus (*i. e.* radiorum) ſe mutuò comprimentium relaxationem verſus adjacentia ſpatia, quæ vel nullo vel minus conſtipato lumine irradiantur; vel denique per cujuſque radii dilatationem aut diffractionem in complures divergentes radios: tum ſane poſterius priſma magis diffunderet ac diſſiparet radios per dictas irregularitates Ætheris, Aeris aut Vitri; vel per iteratam dilatationem luminis, à refringentis ſuperficiei reſiſtentiâ denuò conſtipati ac diffuſi; vel etiam per cujuſque radii, à priori diffractione orti, iteratam diffractionem ac diviſionem in longè plures divergentes radios. Et ſic Lumen magis diſpergeretur per refractionem ſecundi Priſmatis, & in parietem projectam

projectam imaginem duplo longiorem minimum exhiberet, quàm per ſolam refractionem prioris Priſmatis exhiberi potuiſſet. Quamobrem cùm, experientiâ teſte, refractio ſecundi Priſmatis adeo non diſpergat Lumen, ut contrahat, & in priſtinum ſtatum reducat, efficiatque ut in formâ Coni poſtea progrediatur, perinde ac ſi nullam omnino Refractionem paſſum fuiſſet; concedendum eſt, diffuſionem Luminis, à refractione anterioris Priſmatis effectam, non oriri ab aliquâ præfatarum cauſarum, aut aliâ quâvis irregularitate, ſed diverſæ Refrangibilitati radiorum ſolummodo tribuendam eſſe; utpote quâ radius unuſquiſque, ex inſitâ diſpoſitione tantam Refractionem in poſteriori, ac in priori paſſus, reducitur in paralleliſmum cum ſe ipſo; & ſic omnes radii ad ſe mutuò eaſdem inclinationes reſumunt, quas ante refractiones habuere.

Nor any other than the unequal refrangibility of the Rays.

Demum ut hæc omnia ſummè confirmarem, adjeci experimentum illud, quod jam nomine *crucis* paſſim inſignitur; de cujus conditionibus cùm R. P. dubitaverit, placuit jam deſignare Schemate. Sit BC anterior tabula, cui priſma A immediatè præfigi-

Experimentum Crucis deſcribed.



tur; ſitque DE altera tabula, quaſi 12 pedibus abinde diſtans, cui ſuffigitur alterum priſma F. Tabulæ autem ad *x* & *y*, ita preforentur, ut aliquantulum lucis, ab anteriori priſmate refractæ, trajici poſſit per utrumque foramen ad ſecundum priſma, inque eo denuo refringi. Jam priſma anterius circa axem reciproco motu convertatur, & colores in tabulam poſteriorem DE procidentes, per vices attollentur ac deprimentur; eoque pacto alius atque alius color ſucceſſivè pro arbitrio trajici poteſt per foramen ejus *y*, ad poſterius priſma, dum cæteri colores in tabulam impingunt: et videbis, radios diverſis coloribus præditos diverſam pati refractionem in illo poſteriori priſmate, ex eo quòd ad diverſa loca parietis vel cujuſvis obſtaculi GH, pedibus aliquot ulterius remoti, allabentur; puta violacei radii ad H, rubri ad G, & intermedii ad loca intermedia: & tamen, propter determinatam poſitionem foraminum, neceſſe eſt ut ſimilis ſit incidentia radiorum cujuſque coloris

coloris per utrumque trajecti. Atque ita ex menſurâ conſtat radios, diverſis coloribus affectos, habere diverſas leges refractionum.

Cauſe of Pardies miſtake.

Sed ſuſpicor unde adductus ſit R. P. in dubitationem; nempe videtur collocâſſe primum priſma, A, poſt tabulam BC, atque ita convertendo circa axem, veriſimile eſt inclinationem radiorum, qui interjacent foramina, propter intermediam refractionem fuiſſe mutatam. At, ex deſcriptione prius expoſitâ, debuit tabula illa collocari poſt priſma, ut radii inter foramina in directum jacerent; quemadmodum, ex verbis, *I took two boards, and placed one of them cloſe behind the priſm at the window*, conſtare poteſt. Et uſus experimenti idem innuit.

Ex abundanti placet obſervare, quòd in hoc experimento colorata lux, ob refractionem ſecundi priſmatis, longè minùs diffunditur ac divaricat, quàm cùm alba exiſtit, adeo ut imago ad G, vel H, ſit pene circularis; præſertim ſi priſmata ſtatuantur parallella, & in contrario ſitu angulorum, prout in ſchemate deſignantur. Quinetiam, ſi præterea diameter foraminis *y* adæquet latitudinem colorum, nulla erit ejuſdem coloratæ lucis in longum diffuſio; ſed imago, quæ à quopiam colore ad G, vel H, effingitur (poſitis circularibus foraminibus, & refractione poſterioris priſmatis non majori quàm prioris, radiiſque ad obſtaculum quàm proximè perpendicularibus) erit planè circularis. Id quod arguit diffuſionem, de quâ ſuprà egimus, non ex contagione vel continuitate materiæ undulantis, aut celerrimè motæ, vel ſimilibus cauſis ortam eſſe, ſed ex certâ refractionum cujuſque generis radiorum lege. Cur autem imago illa in uno caſu ſit circularis, & in aliis nonnihil oblongata, & quomodo diffuſio lucis in longitudinem in quolibet caſu pro arbitrio minui poſſit, à geometris determinandum, & cum experientiâ conferendum relinquo.

Poſtquam proprietates lucis his & ſimilibus experimentis ſatis exploratæ fuerint, ſpectando radios tanquam ejus ſive collaterales ſive ſucceſſivas partes, de quibus experti ſumus per independentiam quòd ſint ab invicem diſtinctæ; hypotheſes exinde dijudicandæ ſunt, & quæ non poſſunt conciliari rejiciendæ. Sed leviſſimi negotii eſt accommodare hypotheſes ad hanc doctrinam. Nam ſi quis hypotheſin Carteſianam defendere velit, dicendum eſt, globulos eſſe inæquales: vel preſſiones globulorum eſſe alias aliis fortiores,

fortiores, & inde diverſimodè refrangibiles, & aptas ad excitandam ſenſationem diverſorum colorum. Et ſic, juxta hypotheſin Cl. *Hookii* dicendum eſt, undulationes ætheris eſſe alias majores, ſive craſſiores aliis. Atque ita in cæteris. Hæc enim videtur eſſe ſummè neceſſaria lex & conditio hypotheſium, in quibus naturalia corpora ponuntur conſtare ex quamplurimis corpuſculis acervatim contextis, ut à diverſis lucentium corpuſculis, vel ejuſdem corpuſculi diverſis partibus (prout motu, figurâ, mole, aut aliis qualitatibus differunt) inæquales preſſiones, motiones aut mota corpuſcula per æthera quaquaverſum trajiciantur, ex quibus confuſè miſtis lux conſtitui ſupponetur. Et nihil durius eſſe poteſt in iſtis hypotheſibus quàm contraria ſuppoſitio.

Ex aperturâ ſive dilatatione lucis in poſteriori facie priſmatis, quam R. P. dixit eſſe veluti foramen, ſufficit, quòd error non emerget ſenſibilis, ſi modo aliquis emerget. Quòd ſi calculus juxta obſervationes præcisè ineatur, error erit nullus. Nam diametro foraminis à longitudine imaginis ſubductâ; reſtabit longitudo, quam imago haberet, ſi modo foramen ante priſma eſſet indiviſibile, idque non obſtante præfatâ lucis dilatatione in poſteriori facie priſmatis; ut facilè oſtenditur. Deinde, ex datâ illâ longitudine imaginis, ac diſtantiâ à foramine indiviſibili, ut & poſitione & formâ priſmatis, & ad id inclinatione incidentium radiorum, ac angulo, quem refracti radii ad medium imaginis tendentes, cum à centro ſolis incidentibus conſtituunt, cætera omnia determinantur. Et quæ determinant refractiones & poſitiones radiorum, ſufficiunt ad calculum iſtarum refractionum ritè ineundum. Sed res non tanti eſſe videtur, ut moram inferat.

Quòd R. P. doctrinam noſtram hypotheſin vocaverit, non aliunde factum eſſe credo, quàm quòd vocabulum uſurpavit, quod primum occurrit; ſiquidem mos obtinuit, ut quicquid exponitur in Philoſophiâ dicatur hypotheſis. Et ego ſane non alio conſilio vocabulum iſtud reprehendi; quàm ut ne invaleſceret appellatio, quæ rectè philoſophantibus præjudicio eſſe poſſet. Reverend. verò Patris candor in omnibus conſpicitur; indeque modus efferendi benevolentiam, qui mihi minimè convenit. Quòd tamen noſtra non diſplicent vehementer gaudeo Vale. Dabam Cantabrigiæ II. Junii 1672.

V.

V.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, July , 1672.

Of the true method of examining this Theory.

IN the mean while give me leave, Sir, to inſinuate, that I cannot think it effectual for determining truth, to examine the ſeveral ways by which phænomena may be explained, unleſs where there can be a perfect enumeration of all thoſe ways. You know, the proper method for enquiring after the properties of things, is to deduce them from experiments. And I told you, that the theory which I propounded, was evinced to me, not by inferring, *it is thus, becauſe it is not otherwiſe*; that is, not by deducing it only from a confutation of contrary ſuppoſitions, but by deriving it from experiments concluding poſitively and directly. The way therefore to examine it, is, by conſidering whether the experiments, which I propound, do prove thoſe parts of the theory to which they are applied; or by proſecuting other experiments which the theory may ſuggeſt for its examination. And this I would have done in a due method; the laws of refraction being thoroughly enquired into and determined, before the nature of colours be taken into conſideration. It may not be amiſs to proceed according to the ſeries of theſe Queries; which I could wiſh were determined by the event of proper experiments, declared by thoſe that may have the curioſity to examine them.

1. Whether rays, that are alike incident on the ſame medium, have unequal refractions? And how great are the inequalities of their refractions at any incidence?

2. What is the law, according to which each ray is more or leſs refracted; whether it be, that the ſame ray is ever refracted according to the ſame ratio of the ſines of incidence and refraction; and divers rays, according to divers ratios; or that the refraction of each ray is greater or leſs without any certain rule? That is, whether each ray have a certain degree of refrangibility, according to which its refraction is performed; or is refracted without that regularity?

3. Whether

3. Whether rays, which are endued with particular degrees of refrangibility, when they are by any means ſeparated, have particular colours conſtantly belonging to them; *viz.* the leaſt refrangible, Scarlet; the moſt refrangible, deep Violet; the middle, Sea-Green; and others, other colours? And on the contrary?

4. Whether the colour of any ſort of rays apart may be changed by refraction?

5. Whether colours by coaleſcing do really change one another to produce a new colour, or produce it by mixing only?

6. Whether a due mixture of rays, indued with all variety of colours, produces light perfectly like that of the ſun, and which hath all the ſame properties, and exhibits the ſame phænomena?

7. Whether the component colours of each mixture be really changed; or be only ſeparated, when from that mixture various colours are produced again by refraction?

8. Whether there be any other colours produced by refraction, than ſuch as ought to reſult from the colours belonging to the diverſly refrangible rays, by their being ſeparated or mixed by that refraction?

To determine by experiments theſe and ſuch like queries, which involve the propounded theory, ſeems the moſt proper and direct way to a concluſion. And therefore I could wiſh all objections were ſuſpended taken from hypotheſes, or any other heads than theſe two: of ſhewing the inſufficiency of experiments to determine theſe queries, or prove any other parts of my theory, by aſſigning the flaws and defects in my concluſions drawn from them; or of producing other experiments, which directly contradict me, if any ſuch may ſeem to occur. For if the experiments, which I urge, be defective, it cannot be difficult to ſhew the defects; but if valid, then by proving the theory, they muſt render all objections invalid.

VI.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, July 11, 1672.

I HAVE already told you, that at the peruſal of Mr. *Hook's Conſiderations* on my letter concerning Refractions and Colours, I found nothing that, as I conceived, might not without difficulty be anſwered. But, I muſt confeſs, at the firſt receipt of thoſe conſiderations I was a little troubled to find a perſon ſo much concerned for an *hypotheſis*, from whom in particular I moſt expected an unconcerned and indifferent examination of what I propounded. But yet I doubt not we have one common deſign; a ſincere endeavour after knowledge, without valuing uncertain ſpeculations for their ſubtleties, or deſpiſing certainties for their plainneſs. And on confidence of this it is, that I make this return to his Diſcourſe.

Of the improvement of Teleſcopes.

The firſt thing that offers itſelf is leſs agreeable to me, and I begin with it becauſe it is ſo. Mr. *Hook* thinks himſelf concerned to reprehend me for laying aſide the thoughts of improving optics by refractions. But he knows well it is not for one man to preſcribe rules to the ſtudies of another, eſpecially not without underſtanding the grounds on which he proceeds. Had he obliged me by a private letter on this occaſion, I would have acquainted him with my ſucceſſes in the trials that I have made in that kind; which I ſhall now ſay have been leſs than I ſometimes expected, and perhaps leſs than he at preſent hopes for. But ſince he is pleaſed to take it for granted, that I have let this ſubject paſs without due examination, I muſt refer him to my former letter, by which that conjecture will appear to be ungrounded; for what I ſaid there, was in reſpect of teleſcopes of the ordinary conſtruction, ſignifying, that their improvement is not to be expected from the well figuring of glaſſes, as opticians have imagined. But I deſpaired not of their improvement by other conſtructions, which made me cautious to inſert nothing that might intimate the contrary. For although ſucceſſive refractions, which are all made the ſame way, do neceſſarily more and more augment the errors of the firſt refraction; yet it ſeemed not

not impoſſible for contrary refractions ſo to correct each other's inequalities, as to make their difference regular; and if that could be conveniently effected, there would be no further difficulty. Now to this end I examined what may be done not only by glaſſes alone, but more eſpecially by a complication of divers ſucceſſive mediums; as by two or more glaſſes or cryſtals with water, or ſome other fluid between them; all which together may perform the office of one glaſs, eſpecially of the object-glaſs on whoſe conſtruction the perfection of the inſtrument chiefly depends. But what the reſults in theory, or by trials, have been, I may poſſibly find a more proper occaſion to declare.

Truth of Reflection.

To the aſſertion, that rays are leſs true reflected to a point by a concave than refracted by a convex, I cannot aſſent; nor do I underſtand, that the focus of the latter is leſs a line than that of the former. The truth of the contrary you will rather perceive by this following Table, computed for ſuch a reflecting concave and refracting convex; on ſuppoſition that they have equal apertures, and collect parallel rays at an equal diſtance from their vertex; which diſtance being divided into 15000 parts, the diameter of the concave ſphere will be 60000 of thoſe parts, and of the convex 10000; ſuppoſing the ſines of incidence and refraction to be in round numbers, as 2 to 3. And this Table ſhews how much the exterior rays, at ſeveral apertures, fall ſhort of their principal focus.

The diameter of the Aperture.	The parts of the Axis intercepted between the vertex and the rays reflected.	refracted.	The error by Reflection.	Refraction.
2000	14991½	14865	8⅓	135
4000	14966	14449	33	551
6000	14924	13699	76	1301
8000	14865	12475	135	2525
10000	14787	9472	213	5528

By this you may perceive, that the errors of the refracting convex are ſo far from being leſs, that they are more than ſixteen times greater than the like errors of the reflecting concave, eſpecially in great apertures, and that without reſpect to the heterogeneous conſtitution of light: ſo that however the contrary ſuppoſition might make Mr. *Hook* reject reflexions, as uſeleſs for the promoting of opticks, yet I muſt for this, as well as other

conſiderations, prefer them in the theory before refractions. Whether the parabola be more difficult to deſcribe than the hyperbola or ellipſis, may be a query; but I ſee no abſolute neceſſity of endeavouring after any of their deſcriptions. For if metals can be ground truly ſpherical, they will bear as great apertures as, I believe, men will be well able to communicate an exact poliſh to. And for dioptrick teleſcopes I told you, that the difficulty conſiſted not in the figure of the glaſs, but in the difformity of refractions; which, if it did not, I could tell you a better, and more eaſy remedy, than the uſe of the conic ſections.

Reply to Mr. Hook's objections to the Theory.

Thus much concerning the practique part of opticks. I ſhall now take a view of Mr. *Hook's* conſiderations on my theories. And thoſe conſiſt in aſcribing an hypotheſis to me, which is not mine; in aſſerting an hypotheſis, which, as to the practical parts of it, is not againſt me; in granting the greateſt part of my diſcourſe, if explicated by that hypotheſis; and in denying ſome things, the truth of which would have appeared by an experimental examination.

The hypotheſis of the corporeity of Light no neceſſary foundation of the Newtonian Theory.

Of theſe particulars I ſhall diſcourſe in order; and firſt of the *hypotheſis*, which Mr. *Hook* hath aſſigned me in theſe words: *But grant his firſt ſuppoſition, that light is a body, and that as many colours or degrees thereof as there may be, ſo many bodies there may be, all which compounded together would make white, &c.* This, it ſeems, Mr. *Hook* takes for my hypotheſis. It is true, that from my theory I argue the corporeity of light, but I do it without any abſolute poſitiveneſs, as the word *perhaps* intimates, and make at moſt but a very plauſible conſequence of the doctrine, and not a fundamental ſuppoſition, nor ſo much as any part of it, which was wholly comprehended in the precedent propoſitions. And I wonder how Mr. *Hook* could imagine, that when I had aſſerted the theory with the greateſt rigor, I ſhould be ſo forgetful, as afterwards to aſſert the fundamental ſuppoſition itſelf with no more than a *perhaps*. Had I intended any ſuch hypotheſis, I ſhould ſomewhere have explained it. But I knew that the properties, which I declared of light, were in ſome meaſure capable of being explicated not only by that, but by many other mechanical hypotheſes; and therefore I choſe to decline

decline them all, and ſpeak of light in general terms, conſidering it abſtractedly as ſomething or other propagated every way in ſtreight lines from luminous bodies, without determining what that thing is; whether a confuſed mixture of difform qualities, or modes of bodies, or of bodies themſelves; or of any virtues, powers or beings whatſoever. And for the ſame reaſon I choſe to ſpeak of colours according to the information of our ſenſes, as if they were qualities of light without us. Whereas by that hypotheſis, I muſt have conſidered them rather as modes of ſenſation, excited in the mind by various motions, figures, or ſizes of the corpuſcles of the light, making various mechanical impreſſions on the organs of ſenſe, as I expreſſed it in that place where I ſpake of the corporeity of light.

Its near affinity with Hook's hypotheſis.

But ſuppoſing I had propounded this hypotheſis, I underſtand not why Mr. *Hook* ſhould ſo much endeavour to oppoſe it. For certainly it hath a much greater affinity with his own hypotheſis, than he ſeems to be aware of; the vibrations of æther being as uſeful and neceſſary in this, as in his own. For aſſuming the rays of light to be ſmall bodies, emitted every way from ſhining ſubſtances, thoſe, when they impinge on any refracting or reflecting ſuperficies, muſt as neceſſarily excite vibrations in the æther, as ſtones do in water, when thrown into it. And ſuppoſing theſe vibrations to be of ſeveral depths or thickneſſes, accordingly as they are excited by the ſaid corpuſcular rays of various ſizes and velocities; of what uſe they will be for explicating the manner of reflexion and refraction, the production of heat by the ſun's beams, the emiſſion of light from burning, putrifying, or other ſubſtances, whoſe parts are vehemently agitated, the phænomena of thin tranſparent plates and bubbles, and of all natural bodies, the manner of viſion, and the difference of colours, as alſo their harmony and diſcord; I ſhall leave to their conſideration, who may think it worth their endeavour to apply this hypotheſis to the ſolution of phænomena.

Of Hook's hypotheſis. Conformity of that and of every mechanical hypotheſis with the Newtonian doctrine.

In the ſecond place I told you, that Mr. *Hook's* hypotheſis, as to the fundamental part of it, is not againſt me. The fundamental ſuppoſition is, that the parts of bodies, when briſkly agitated, do excite vibrations in the æther, which are propagated every way from thoſe bodies in ſtreight lines, and cauſe a ſenſa-

tion

tion of light, by beating and dashing against the bottom of the eye; something after the manner that vibrations in the air cause a sensation of sound, by beating against the organs of hearing. Now the most free and natural application of this hypothesis to the solution of phænomena I take to be this: That the agitated parts of bodies, according to their several sizes, figures, and motions, excite vibrations in the æther of various depths or bignesses; which, being promiscuously propagated through that medium to our eyes, effect in us a sensation of light of a white colour: but if by any means those of unequal bignesses be separated from one another, the largest, a sensation of a Red colour; the least, or shortest, of a deep Violet; and the intermediate ones, of intermediate colours. Much after the manner that bodies, according to their several sizes, shapes, and motions, excite vibrations in the air of various bignesses, which, according to those bignesses, make several tones in sound. That the largest vibrations are best able to overcome the resistance of a refracting superficies, and so break through it with least refraction: whence the vibrations of several bignesses, that is, the rays of several colours, which are blended together in light, must be parted from one another by refraction; and so cause the phænomena of prisms, and other refracting substances. And that it depends on the thickness of a thin transparent plate or bubble, whether a vibration shall be reflected at its further superficies, or transmitted; so that according to the number of vibrations interceding the two superficies, they may be reflected or transmitted for many successive thicknesses. And since the vibrations, which make Blue and Violet, are supposed shorter than those that make Red and Yellow; they must be reflected at a less thickness of the plate, which is sufficient to explicate all the ordinary phænomena of those plates or bubbles; and also of all natural bodies, whose parts are like so many fragments of such plates. These seem to be the most plain, genuine, and necessary conditions of this hypothesis; and they agree so justly with my theories, that, if Mr. *Hook* think fit to apply them, he need not on that account fear a divorce from it. But yet how he will defend it from other difficulties, I know hot; for to me the fundamental supposition itself

self seems impossible; namely, that the waves or vibrations of any fluid can, like the rays of light, be propagated in streight lines, without a continual and very extravagant spreading and bending every way into the quiescent medium, where they are terminated by it. I am mistaken if there be not both experiment and demonstration to the contrary: and as to the other two or three hypotheses which he mentions, I had rather believe them subject to the like difficulties, than suspect that Mr. *Hook* should select the worst for his own.

What I have said of this, may be easily applied to all other mechanical hypotheses, in which light is supposed to be caused by any pression or motion whatsoever, excited in the æther by the agitated parts of luminous bodies. For it seems impossible, that any of those motions or pressions can be propagated in streight lines, without the like spreading every way into the shadowed medium, on which they border. But yet, if any man can think it possible, he must at least allow, that those motions, or endeavours to motion, caused in the æther by the several parts of any lucid bodies, which differ in size, figure, and agitation, must necessarily be unequal; which is enough to denominate light an aggregate of difform rays, according to any of those hypotheses. And if those original inequalities may suffice to difference the rays in colour and refrangibility, I see no reason why they, that adhere to any of those hypotheses, should seek for other causes of these effects, unless (to use Mr. *Hook's* argument) they will multiply entities without necessity.

Of Hook's concessions, and the limitations of them to his hypothesis.

The third thing to be considered, is, the condition of Mr. *Hook's* concessions, which is, that I would explicate my theories by his hypothesis: and if I could but comply with him in that point, there would be little or no difference between us: for he grants, that without any respect to a different incidence of rays, there are different refractions; but he would have it explicated, not by the different refrangibility of several rays, but by the splitting and rarifying of æthereal pulses. He grants my third, fourth, and sixth Propositions; the sense of which is, that uncompounded colours are unchangeable, and that compounded colours are changeable, only by resolving them into the colours of which they are compounded; and that all the changes,

changes, which can be wrought in colours, are effected only by variouſly mixing or parting them: but he grants them, on condition that I will explicate colours by the two ſides of a ſplit pulſe, and ſo make but two ſpecies of them, accounting all other colours in the world to be but various degrees and dilutings of thoſe two. And he further grants, that whiteneſs is produced by the convention of all colours; but then I muſt allow it to be not only by mixture of thoſe colours, but by a further uniting of the parts of the ray ſuppoſed to be formerly ſplit. If I would proceed to examine theſe his explications, I think it would be no difficult matter to ſhew, that they are not only inſufficient, but in ſome reſpects unintelligible. For though it be eaſy to conceive how motion may be dilated and ſpread, or how parallel motions may become diverging; yet I underſtand not by what artifice any linear motion can, by a refracting ſuperficies, be infinitely dilated and rarified ſo as to become ſuperficial: or if that be ſuppoſed, yet I underſtand as little why it ſhould be ſplit at ſo ſmall an angle only, and not rather ſpread, and diſperſed through the whole angle of refraction. And, further, though I can eaſily imagine how unlike motions may croſs one another, yet I cannot well conceive how they ſhould coaleſce into one uniform motion, and then part again, and recover their former unlikeneſs; notwithſtanding that I conjecture the ways by which Mr. *Hook* may endeavour to explain it. So that the direct, uniform, and undiſturbed pulſes, ſhould be ſplit and diſturbed by refraction; and yet the oblique and diſturbed pulſes perſiſt without ſplitting, or further diſturbance, by following refractions, is as unintelligible. And there is as great difficulty in the number of colours, as you will ſee hereafter.

The Newtonian doctrine independent of every hypotheſis.

But whatever be the advantages or diſadvantages of this hypotheſis, I hope Mr. *Hook* will excuſe me from taking it up, ſince I do not think it needful to explicate my doctrine by any hypotheſis at all; for if light be conſidered abſtractedly without reſpect to any hypotheſis, I can as eaſily conceive, that the ſeveral parts of a ſhining body may emit rays of different colours, and other qualities, of all which light is conſtituted, as that the ſeveral parts of a falſe or uneven ſtring, or of agitated water in a brook

brook or a cataract, or the ſeveral pipes of an organ inſpired all at once, or all the variety of ſounding bodies in the world together, ſhould produce ſounds of ſeveral tones, and propagate them through the air confuſedly intermixed. And if there were any natural bodies, which could reflect ſounds of one tone, and ſtifle or tranſmit thoſe of another; then, as the echo of a confuſed aggregate of all tones would be that particular tone, which the echoing body is diſpoſed to reflect: ſo ſince even by Mr. *Hook's* conceſſions there are bodies apt to reflect rays of one colour, and ſtifle or tranſmit thoſe of another; I can as eaſily conceive, that thoſe bodies, when illuminated by mixture of all colours, muſt appear of that colour only which they reflect.

But when Mr. *Hook* would inſinuate a difficulty in theſe things, by alluding to ſounds in the ſtring of a muſical inſtrument before percuſſion, or in the air of an organ-bellows before its arrival to the pipes: I muſt confeſs I underſtand it as little, as if he had ſpoke of light in a piece of a wood, before it be ſet on fire; or in the oil of a lamp, before it aſcend up the match to feed the flame.

Difficulties of Hook's diſcourſe.

You ſee therefore how much it is beſides the buſineſs in hand, to diſpute about hypotheſis. For which reaſon I ſhall now, in the laſt place, proceed to abſtract the difficulties involved in Mr. *Hook's* diſcourſe, and, without having regard to any hypotheſis, conſider them in general terms. And they may be reduced to theſe queries: Whether the unequal refractions, made without reſpect to any inequality of incidence, be cauſed by the different refrangibility of ſeveral rays, or by the ſplitting, breaking, or diſſipating the ſame ray into diverging parts? Whether there be more than two ſorts of colours; and whether whiteneſs be a mixture of all colours?

The firſt of theſe queries you may find already determined by an experiment in my former letter: the deſign of which was to ſhew, that the length of the coloured image proceeded not from any unevenneſs in the glaſs, or any other contingent irregularity in the refractions. Amongſt other irregularities, I know not what is more obvious to ſuſpect, than a fortuitous dilating and ſpreading of light, after ſome ſuch manner as *Des Cartes* hath

deſcribed in his æthereal refractions for explicating the tail of a comet; or as Mr. *Hook* now ſuppoſeth to be effected by the ſplitting and rarifying of his æthereal pulſes. And to prevent the ſuſpicion of any ſuch irregularities, I told you, that I refracted the light contrary ways with two priſms ſucceſſively; to deſtroy thereby the regular effects of the firſt priſm by the ſecond; and to diſcover the irregular effects, by augmenting them with iterated refractions. Now, amongſt other irregularities, if the firſt priſm had ſpread and diſſipated every ray into an indefinite number of diverging parts; the ſecond ſhould, in like manner, have ſpread and diſſipated every one of thoſe parts into a further indefinite number: whereby the image would ſtill be more dilated, contrary to the event. And this ought to have happened, becauſe thoſe linear diverging parts depend not on one another for the manner of their refraction, but are every one of them as truly and compleatly rays, as the whole was before its incidence, as may appear by intercepting them ſeverally.

The reaſonableneſs of this proceeding will, perhaps, better appear, by acquainting you with this further circumſtance. I ſometimes placed the ſecond priſm in a poſition tranſverſe to the firſt, on deſign to try if it would make the long image become four-ſquare, by refractions croſſing thoſe which had drawn the round image into a long one. For if amongſt other irregularities the refraction of the firſt priſm did, by ſplitting, dilate a linear ray into a ſuperficial, the croſs refractions of that ſecond priſm ought, by further ſplitting, to dilate, and draw that ſuperficial ray into a pyramidal ſolid. But upon trial I found it otherwiſe; the image being as regularly oblong as before, and inclined to both the priſms at an angle of 45 degrees.

I tried alſo all other poſitions of the ſecond priſm, by turning the ends about its middle part, and in no caſe could obſerve any ſuch irregularity. The image was ever alike inclined to both priſms, its breadth anſwering to the ſun's diameter, and its length being greater or leſs, accordingly as the refractions more or leſs agreed or contradicted one another. And by theſe obſervations, ſince the breadth of the image was not augmented by the croſs refraction of the ſecond priſm, that refraction muſt have been performed

performed without any ſplitting and dilating of the ray: and therefore at leaſt the light incident on that priſm muſt be granted an aggregate of rays unequally refrangible in my ſenſe. And ſince the image was equally inclined to both priſms, and conſequently the refractions alike in both, it argues, that they were performed according to ſome conſtant law without any irregularity.

To determine the ſecond query, Mr. *Hook* refers to an experiment made with two wedge-like boxes; the deſign of which was to produce all colours out of a mixture of two. But there is a double defect in this inſtance; for it appears not that by this experiment all colours can be produced out of two; and if they could, yet the inference would not follow. That all colours cannot, by the experiment, be produced out of two, will appear by conſidering, that the tincture of *aloes*, which afforded one of thoſe colours, was not all over of one uniform colour, but appeared Yellow near the edge of the box, and Red at other places where it was thicker, affording all variety of colours from a pale Yellow to a deep Red or Scarlet, according to the various thickneſs of the liquor. And ſo the ſolution of copper, which afforded the other colour, was of various Blues and Indicos: ſo that inſtead of two colours, here is a great variety made uſe of, for the production of all colours. Thus, for inſtance, to produce all ſorts of Greens, the ſeveral degrees of Yellow and pale Blue muſt be mixed; but to compound Purples, the Scarlet and deep Blue or Indico are to be the ingredients. Original colours more than two.

Now if Mr. *Hook* contend, that all the Reds and Yellows of the one liquor, or Blues and Indicos of the other, are only various degrees and dilutings of the ſame colour, and not divers colours; that is a begging of the queſtion: and I ſhould as ſoon grant, that the two-thirds or ſixths in muſic are but ſeveral degrees of the ſame ſound, and not divers ſounds. Certainly it is much better to believe our ſenſes informing us, that Red and Yellow are divers colours; and to make it a philoſophical query, why the ſame liquor doth, according to its various thickneſs, appear of thoſe divers colours; than to ſuppoſe them to be the ſame colour, becauſe exhibited by the ſame liquor. For if that were

the ſufficient reaſon, then Blue and Yellow muſt alſo be the ſame colour, ſince they are both exhibited by the ſame tincture of *nephritick* wood.

But that they are divers colours, you will more fully underſtand by the reaſon of them, which is this: The tincture of aloes is qualified to tranſmit moſt eaſily the rays indued with Red; moſt difficulty, the rays indued with Violet; and with intermediate degrees of facility, the rays indued with intermediate colours. So that where the liquor is very thin, it may ſuffice to intercept moſt of the Violet, and yet tranſmit moſt of the other colours; all which together muſt compound a middle colour, that is, a faint Yellow. And where it is ſo much thicker, as alſo to intercept moſt of the Blue and Green; the remaining Green, Yellow, and Red, muſt compound an Orange. And where the thickneſs is ſo great, that ſcarce any rays can paſs through it, beſides thoſe indued with Red; it muſt appear of that colour, and that ſo much the deeper and obſcurer, by how much the liquor is thicker. And the ſame may be underſtood of the various degrees of Blue exhibited by the ſolution of copper, by reaſon of its diſpoſition to intercept Red moſt eaſily, and tranſmit a deep Blue or Indico colour moſt freely.

But ſuppoſing that all colours might, according to this experiment, be produced out of two by mixture; yet it follows not, that thoſe two are the only original colours, and that for a double reaſon. Firſt, becauſe thoſe two are not themſelves original colours, but compounded of others; there being no liquor, nor any other body in nature, whoſe colour in day-light is wholly uncompounded. And then, becauſe though thoſe two were original, and all others might be compounded of them; yet it follows not that they cannot be otherwiſe produced. For I ſaid, that they had a double origin, the ſame colours to ſenſe being in ſome caſe compounded, and in others uncompounded; and ſufficiently declared in my third and fourth Propoſitions, and in the concluſion, by what properties the one might be known and diſtinguiſhed from the other. But becauſe I ſuſpect, by ſome circumſtances, that the diſtinction might not be rightly apprehended; I ſhall once more declare it, and further explain it by examples.

That

Rule to diſtinguiſh compounded and uncompounded colours.

That colour is *primary, or original, which cannot by any art be changed, and whoſe rays are all alike refrangible*; *and that compounded, which is changeable into other colours, and whoſe rays are not alike refrangible.* For inſtance, to know whether the colour of any Green object be compounded or not, view it through a priſm; and if it appear confuſed, and the edges tinged with Blue, Yellow, or any variety of other colours, then is that Green compounded of ſuch colours, as at its edges emerge out of it. But if it appear diſtinct and well defined, and intirely Green to the very edges, without any other colours emerging; it is of an original and uncompounded Green. In like manner, if a refracted beam of light, being caſt on a white wall, exhibit a Green colour; to know whether that be compounded, refract the beam with an interpoſed priſm: and if you find any difformity in the refractions, and the Green be transformed into Blue, Yellow, or any variety of other colours; you may conclude, that it was compounded of thoſe colours which emerge. But if the refraction be uniform, and the Green perſiſt without any change of colour, then it is original and uncompounded. And the reaſon why I call it ſo, is, becauſe a Green, indued with ſuch properties, cannot be produced by any mixing of other colours.

Now if two green objects may, to the naked eye, appear of the ſame colour; and yet one of them, through a priſm, ſeem confuſed, and variegated with other colours at the edges; and the other diſtinct and intirely Green: or, if there may be two beams of light which, falling on a white wall, do, to the naked eye, exhibit the ſame Green colour; and yet one of them, when tranſmitted through a priſm, be uniformly and regularly refracted, and retain its colour unchanged; and the other be irregularly refracted, and made to divaricate into a multitude of other colours: I ſuppoſe theſe two Greens will, in both caſes, be granted of a different origin and conſtitution. And if by mixing colours a Green cannot be compounded with the properties of the unchangeable Green, I think I may call that an uncompounded colour; eſpecially ſince its rays are all alike refrangible, and uniform in all reſpects.

The

The ſame rule is to be obſerved in examining whether Red, Orange, Yellow, Blue, or any other colour, be compounded or not. And, by the way, ſince all White objects through the priſm appeared confuſed, and terminated with colours; Whiteneſs muſt, according to this diſtinction, be ever compounded; and that the moſt of all colours, becauſe it is the moſt confuſed and changed by refractions.

A way of improving Microſcopes.

From hence I may take occaſion to communicate a way for the improvement of microſcopes by refraction; which I do the more willingly, becauſe Mr. *Hook* hath made ſuch excellent uſe of that inſtrument; and I ſhall be glad if it will contribute any thing to your promotion of thoſe his ingenious endeavours, or add to his inventions of that kind. The way is, by illuminating the object in a darkened room with light of any convenient colour, not too much compounded. For by that means the microſcope will, with diſtinctneſs, bear a deeper charge and larger aperture; eſpecially if its conſtruction be ſuch as I may hereafter deſcribe: for the advantage in ordinary microſcopes will not be ſo ſenſible.

Whiteneſs a mixture of all colours.

There remains now the third query to be conſidered; and that is, whether Whiteneſs be an uniform colour, or a diſſimilar mixture of all colours. The experiment which I brought to decide it, Mr. *Hook* thinks may be otherwiſe explained, aud ſo concludes nothing. But he might eaſily have ſatisfied himſelf, by trying what would be the reſult of a mixture of all colours. And that very experiment might have ſatisfied him, if he had examined it by the various circumſtances. One circumſtance I there declared, of which I ſee no notice taken; and it is, that if any colour at the lens be intercepted, the whiteneſs will be changed into the other colours. If all the colours but Red be intercepted, the Red alone, in the concourſe or croſſing of the rays, will not conſtitute whiteneſs, but continues as much Red as before; and ſo of the other colours. So that the buſineſs is not only to ſhew how rays, which before the concourſe exhibit colours, do in the concourſe exhibit White: but to ſhew how, in the ſame place where the ſeveral ſorts of rays apart exhibit ſeveral colours, a confuſion of all together make White. For inſtance, if Red alone be firſt tranſmitted to the paper at the place of

of concourſe, and then the other colours be let fall on that Red: the queſtion will be, whether they convert it into White, by mixing with it only; as Blue, falling upon Yellow light, is ſuppoſed to compound Green: or whether there be ſome further change wrought in the colours by their mutual acting on one another, until, like contrary peripatetic qualities, they become aſſimilated. And he that ſhall explicate this caſe mechanically, muſt conquer a double impoſſibility. He muſt firſt ſhew, that many unlike motions in a fluid can, by claſhing, ſo act on one another, and change each other, as to become one uniform motion; and then, that an uniform motion can of itſelf, without any new unequal impreſſions, depart into a great variety of motions regularly unequal. And after this he muſt further tell me, why all objects appear not of the ſame colour; that is, why their colours in the air, where the rays that convey them every way are confuſedly mixed, do not aſſimilate one another, and become uniform, before they arrive at the ſpectator's eye.

But if there be yet any doubting, it is better to put the event on further circumſtances of the experiment, than to acquieſce in the poſſibility of any hypothetical explication. As, for inſtance, by trying what will be the apparition of theſe colours in a very quick conſecution of one another. And this may be eaſily performed by the rapid gyration of a wheel with many ſpokes, or coggs in its perimeter, whoſe interſtices and thickneſſes may be equal; and of ſuch a largeneſs, that if the wheel be interpoſed between the priſm and the White concourſe of the colours, one half of the colours may be intercepted by a ſpoke or cogg, and the other half paſs through an interſtice. The wheel being in this poſture, you may firſt turn it ſlowly about, to ſee all the colours fall ſucceſſively on the ſame place of the paper, held at the aforeſaid concourſe: and if you then accelerate its gyration, until the conſecution of thoſe colours be ſo quick, that you cannot diſtinguiſh them ſeverally; the reſulting colour will be a whiteneſs perfectly like that which an unrefracted beam of light exhibiteth, when in like manner ſucceſſively interrupted by the ſpokes or coggs of that circulating wheel. And that this whiteneſs is produced only by a ſucceſſive intermixture of the colours, without

without their being aſſimilated or reduced to any uniformity, is certainly beyond all poſſibility of doubting; unleſs things that exiſt not at the ſame time, may notwithſtanding act on one another.

There are yet other circumſtances, by which the truth might have been decided; as by viewing the White concourſe of the colours through another priſm, placed cloſe to the eye, by whoſe refraction that whiteneſs may appear again transformed into colours. And then, to examine their origin, if an aſſiſtant intercept any of the colours at the lens before their arrival at the whiteneſs, the ſame colours will vaniſh from amongſt thoſe, into which that whiteneſs is converted by the ſecond priſm. Now if the rays which diſappear be the ſame with thoſe that are intercepted; then it muſt be acknowledged, that the ſecond priſm makes no new colour in any rays which were not in them before their concourſe at the paper: which is a plain indication, that the rays of ſeveral colours remain diſtinct from one another in the whiteneſs, and that from their previous diſpoſitions are derived the colours of the ſecond priſm. And, by the way, what is ſaid of their colours, may be applied to their refrangibility. The aforeſaid wheel may be alſo here made uſe of. And if its gyration be neither too quick nor too ſlow, the ſucceſſion of the colours may be diſcerned through the priſm, whilſt, to the naked eye of a by-ſtander, they exhibit whiteneſs.

There is ſomething ſtill remaining to be ſaid of this experiment. But this I conceive is enough to enforce it, and ſo to decide the controverſy. However, I ſhall now proceed to ſhew ſome other ways of producing whiteneſs by mixtures; ſince I perſuade myſelf, that this aſſertion above the reſt appears paradoxical, and is with moſt difficulty admitted. And becauſe Mr. *Hook* deſires an inſtance of it in bodies of divers colours, I ſhall begin with that. But in order thereto, it muſt be conſidered, that ſuch coloured bodies reflect but ſome part of the light incident on them, as is evident by the 13th Propoſition; and therefore the light, reflected from an aggregate of them, will be much weakened by the loſs of many rays. Whence a perfect and intenſe whiteneſs is not to be expected, but rather a colour

between thoſe of light and ſhadow, or ſuch a Grey or dirty colour as may be made by mixing White and Black together. And yet ſuch a colour will reſult, may be collected from the colour of duſt found in every corner of a houſe, which hath been obſerved to conſiſt of many coloured particles. There may be alſo produced the like dirty colour, by mixing ſeveral painter's colours together. And the ſame may be effected by painting a top (ſuch as boys play with) of divers colours; for when it is made to circulate by whipping, it will appear of ſuch a dirty colour.

Greys not ſpecifically different from White.

Now the compounding of theſe colours is proper to my purpoſe, becauſe they differ not from whiteneſs in the ſpecies of colours, but only in degrees of luminouſneſs, which, did not Mr. *Hook* concede it, I might thus evince. A beam of the ſun's light being tranſmitted into a darkened room, if you illuminate a ſheet of white paper by that light reflected from a body of any colour; the paper will always appear of the colour of that body, by whoſe reflected light it is illuminated. If it be a Red body, the paper will be Red; if a Green, it will be Green; and ſo of the other colours. And the reaſon is, that the fibres or threads, of which the paper conſiſts, are all tranſparent and ſpecular; and ſuch ſubſtances are known to reflect colours without changing them. To know, therefore, to what ſeries of colours a Grey belongeth, place any Grey body, ſuppoſe a mixture of painted colours, in the ſaid light; and the paper, being illuminated by its reflection, ſhall appear White; and the ſame thing will happen, if it be illuminated by reflection from a Black ſubſtance.

Greys and Black by what diſtinguiſhed from White.

Theſe, therefore, are all of one ſpecies; but yet they ſeem to be diſtinguiſhed not only by degrees of luminouſneſs, but alſo by ſome other inequalities, whereby they become more harſh or pleaſant: and the diſtinction ſeems to be, that Grays, and perhaps Black, are made by an uneven defect of light, conſiſting as it were of many little veins or ſtreams, which differ either in luminouſneſs, or in the unequal diſtribution of diverſly coloured rays, ſuch as ought to be cauſed by reflection from a mixture of White and Black, or of diverſly coloured corpuſcles. But when ſuch imperfectly mixed light is, by a ſecond reflection from the paper, more evenly and uniformly blended, it becomes more

pleaſant, and exhibits a faint or ſhaddowed whiteneſs. And that ſuch little irregularities as theſe may cauſe theſe differences is not improbable, if we conſider how much variety may be cauſed in ſounds of the ſame tone by irregular and uneven jarrings. And, beſides, theſe differences are ſo little, that I have ſometimes doubted whether they be any at all; when I have conſidered, that a Black and a White body being placed together, the one in a ſtrong light, and the other in a very faint light ſo proportioned, that they might appear equally luminous; it hath been difficult to diſtinguiſh them, when viewed at a diſtance, unleſs when the Black ſeemed more Blueiſh, and the White body in a light ſtill fainter, hath, in compariſon of the Black body itſelf, appeared Black.

Another way of compounding Whiteneſs.

This leads me to another way of compounding Whiteneſs, which is this: that if four or five bodies of the more eminent colours, or a paper painted all over in ſeveral parts of it with thoſe ſeveral colours in a due proportion, be placed in the ſaid beam of light; the light reflected from thoſe colours to another white paper, held at a convenient diſtance, ſhall make that paper appear White. If it be held too near the colours, its parts will ſeem of thoſe colours which are neareſt them; but by removing it further, that all its parts may be equally illuminated by all the colours, they will be more and more diluted, until they become perfectly White. And you may further obſerve, that if any of the colours be intercepted, the paper will no longer appear White, but of the other colours which are not intercepted. Now that this Whiteneſs is a mixture of the ſeverally coloured rays, falling confuſedly on the paper, I ſee no reaſon to doubt of; becauſe if the light became uniform and ſimilar before it fell on the paper, it muſt much more be uniform, when at a greater diſtance it falls on the ſpectator's eye; and ſo the rays which come from ſeveral colours would, in no qualities, differ from one another, but all of them exhibit the ſame colour to the ſpectator, contrary to what he ſees. Not much unlike this inſtance it is, that if a poliſhed piece of metal be ſo placed, that the colours appear in it as a looking-glaſs, and then the metal be made rough, that by a confuſed reflection thoſe apparent colours may be blended together,

gether, they ſhall diſappear, and by their mixture cauſe the metal to look White.

Of the Whiteneſs of Froth.

But further to enforce this experiment, if inſtead of the paper any white froth, conſiſting of ſmall bubbles, be illuminated by reflection from the aforeſaid colours, it ſhall to the naked eye ſeem White; and yet through a good microſcope the ſeveral colours will appear diſtinct on the bubbles, as if ſeen by reflection from ſo many ſpherical ſurfaces; with my naked eye being very near, I have alſo diſcerned the ſeveral colours on each bubble; and yet at a greater diſtance, where I could not diſtinguiſh them apart, the froth hath appeared entirely White. And at the ſame diſtance, when I looked intently, I have ſeen the colours diſtinctly on each bubble; and yet by ſtraining my eyes, as if I would look at ſomething far off beyond them, thereby to render the viſion confuſed, the froth hath appeared without any other colour than Whiteneſs. And what is here ſaid of froth, may be eaſily underſtood of the paper or metal in the foregoing experiments; for their parts are ſpecular bodies, like thoſe bubbles, and perhaps with an excellent microſcope the colours may be alſo ſeen intermixedly reflected from them.

In proportioning the ſeverally coloured bodies to produce theſe effects, there may be ſome niceneſs; and it will be more convenient to make uſe of the colours of the priſm caſt on a wall, by whoſe reflection the paper, metal, froth, and other white ſubſtances may be illuminated: and I uſually made my trials this way, becauſe I could better exclude any ſcattering light from mixing with the colours to dilute them.

To this way of compounding Whiteneſs may be referred that other, by mixing light after it hath been trajected through tranſparently coloured ſubſtances. For inſtance, if no light be admitted into a room but only through coloured glaſs, whoſe ſeveral parts are of ſeveral colours in a pretty equal proportion, all white things in the room ſhall appear White, if they be not held too near the glaſs: and yet this light with which they are illuminated cannot poſſibly be uniform, becauſe if the rays, which at their entrance are of divers colours, do, in their progreſs through the room, ſuffer any alteration to be reduced to an

uniformity, the glaſs would not, in the remoteſt parts of the room, appear of the very ſame colour which it doth when the ſpectator's eye is very near it. Nor would the rays, when tranſmitted into another dark room through a little hole in an oppoſite door or partition-wall, project on a paper the ſpecies or repreſentation of the glaſs in its proper colours.

And, by the way, this ſeems a very fit and cogent inſtance of ſome other parts of my theory, and particularly of the 13th Propoſition. For in this room all natural bodies whatever appear of their proper colours; and all the phænomena of colours in nature, made either by refraction or without it, are here the ſame as in the open air. Now the light in this room being ſuch a diſſimilar mixture as I have deſcribed in my Theory, the cauſes of all theſe phænomena muſt be the ſame that I have there aſſigned. And I can ſee no reaſon to ſuſpect, that the ſame phænomena ſhould have other cauſes in the open air. The ſucceſs of this experiment may be eaſily conjectured by the appearance of things in a church or chapel, whoſe windows are of coloured glaſs; or in the open air, when it is illuſtrated with clouds of various colours.

There are yet other ways by which I have produced Whiteneſs: as by caſting ſeveral colours from two or more priſms upon the ſame place, by refracting a beam of light with two or three priſms ſucceſſively, to make the diverging colours converge again; by reflecting one colour upon another; and by looking through a priſm on an object of many colours; and, which is equivalent to Mr. *Hook's* way of mixing colours, by concave-wedges filled with coloured liquors, I have obſerved the ſhadows of a painted glaſs-window to become white, where thoſe of many colours have at a great diſtance interfered. But yet, for further ſatisfaction, he may try, if he pleaſe, the effects of four or five ſuch wedges filled with liquors of as many colours.

Beſides all theſe, the colours of water-bubbles, and other thin pellucid ſubſtances, afford ſeveral inſtances of Whiteneſs, produced by their mixture; with one of which I ſhall conclude this particular. Let ſome water, in which a convenient quantity of ſoap or waſh-bal is diſſolved, be agitated into a froth; and after that froth hath

hath ſtood a while without further agitation, till you ſee the bubbles of which it conſiſts begin to break, there will appear a great variety of colours all over the top of every bubble, if you view them near at hand; but if you view them at ſo great a diſtance, that you cannot diſtinguiſh the colours one from another, the froth will appear perfectly White.

Thus much concerning the deſign and ſubſtance of Mr. *Hook's* conſiderations. There are yet ſome particulars to be taken notice of; as the denial of the *Experimentum Crucis*. On this I choſe to lay the whole ſtreſs of my diſcourſe, which therefore was the principal thing to have been objected againſt. But I cannot be convinced of its inſufficiency by a ſhort bare denial, without aſſigning a reaſon for it. I am apt to believe it hath been miſunderſtood. For otherwiſe it would have prevented the diſcourſes about rarefying and ſplitting of rays; becauſe the deſign of it is to ſhew, that rays of divers colours, conſidered apart, do at equal incidences ſuffer unequal refractions, without being ſplit, rarefied, or any way dilated. *Experimentum Crucis* affirmed.

In the conſiderations on my firſt and ſecond Propoſitions, Mr. *Hook* hath rendered my doctrine of unequal refrangibility very imperfect and maimed, by explicating it wholly by the ſplitting of rays; whereas I chiefly intended it in thoſe refractions, which are performed without that ſuppoſed irregularity, ſuch as the *Experimentum Crucis* might have informed him of. And in general I find, that whilſt he hath endeavoured to explicate my Propoſitions hypothetically, the more material ſuggeſtions, by which I deſigned to recommend them, have eſcaped his conſideration; ſuch as are the unchangeableneſs of the degree of refrangibility peculiar to any ſort of rays; the ſtrict analogy between the degrees of refrangibility and colours; the diſtinction between compounded and uncompounded colours; the unchangeableneſs of uncompounded colours; and the aſſertion, that if any one of the priſmatic colours be wholly intercepted, that colour cannot be new produced out of the remaining light by any further refraction or reflection whatſoever; and of what length and efficacy theſe particulars are for enforcing the theory, I deſire, therefore, may be now conſidered. Hook's repreſentation of the Newtonian doctrine very imperfect.

In

Degree of certainty in the Science of Colours.

In the laſt place, I ſhould take notice of a caſual expreſſion, which intimates a greater certainty in theſe things, than I ever promiſed, *viz. the certainty of Mathematical Demonſtrations.* I ſaid, indeed, that the ſcience of colours was mathematical, and as certain as any other part of Optics; but who knows not that Optics, and many other mathematical ſciences, depend as well on phyſical ſciences, as on mathematical demonſtrations? And the abſolute certainty of a ſcience cannot exceed the certainty of its principles. Now the evidence, by which I aſſerted the propoſitions of colours, is in the next words expreſſed to be from experiments, and ſo but phyſical: whence the Propoſitions themſelves can be eſteemed no more than phyſical principles of a ſcience. And if thoſe principles be ſuch, that on them a mathematician may determine all the phænomena of colours, that can be cauſed by refractions, and that by diſputing or demonſtrating after what manner, and how much, thoſe refractions do ſeparate or mingle the rays, in which ſeveral colours are originally inherent; I ſuppoſe the ſcience of colours will be granted mathematical, and as certain as any part of Optics. And that this may be done, I have good reaſon to believe, becauſe ever ſince I became firſt acquainted with theſe principles, I have, with conſtant ſucceſs in the events, made uſe of them for this purpoſe.

Thus much I have thought fit to return to Mr. *Hook's* conſiderations, which, that it may bring ſatisfaction in this part of Optics to the honourable members of the Royal Society, hath been the rule of my intentions. Yours, &c.

VII.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge.

I Received you letter, with Mr. *Hugen's* kind preſent, which I have viewed with great ſatisfaction, finding it full of very ſubtle and uſeful ſpeculation very worthy of the author. I am glad that we are to expect another diſcourſe of the *vis centrifuga*, which ſpeculation may prove of good uſe in natural philoſophy and aſtronomy, as well as mechanics.

Eſtimation of the ſun's parallax by the moon's.

Thus, for inſtance, if the reaſon why the ſame ſide of the moon is ever towards the earth, be the greater *conatus* of the other ſide to recede from it; it will follow, upon ſuppoſition of the earth's motion about the ſun, that the greateſt diſtance of the ſun from the earth is to the greateſt diſtance of the moon from the earth not greater than 10000 to 56: and therefore the parallax of the ſun will not be leſs than $\frac{56}{10000}$ of the parallax of the moon. Becauſe were the ſun's diſtance leſs in proportion to that of the moon, ſhe would have a greater *conatus* from the ſun than from the earth. I thought alſo ſometimes, that the moon's libration might depend upon her *conatus* from the ſun and earth compared together, till I apprehended a better cauſe.

An illegitimate ſuppoſition in Mr. Hugen's demonſtration of his 18th Prop. *de deſcenſu gravium.*

In the demonſtration of the 18th Propoſition, *De deſcenſu gravium*, there ſeems to be an illegitimate ſuppoſition; namely, that the flexures at B and C do not hinder the motion of the deſcending body. For in reality they will hinder it; ſo that the body, which deſcends from A, ſhall not acquire ſo great velocity when arrived at D, as one which deſcends from E. If this ſuppoſition be made, becauſe a body deſcending by a curve line meets with no ſuch oppoſition, and this propoſition is laid down in order to the contemplation of motion in curve lines; then it ſhould have been ſhewn, that though rectilinear flexures do hinder, yet the infinitely little flexures, which are in curves, though infinite in number, do not at all hinder the motion.

Evolution.

The rectifying curve lines by that way, which Mr. *Hugens* calls evolution, I have been ſome time conſidering alſo; and have met with a way of reſolving it, which ſeems more ready and free from the trouble of calculation, than that of Mr. *Hugens.* If he pleaſe, I will ſend it him. The Problem alſo is capable of being improved, by being propounded thus more generally.

Curvas invenire qualeſcunque, quarum longitudines cum propoſitæ alicujus Curvæ longitudine, vel cum aread ejus, ad datam lineam applicatâ, comparari poſſunt.

White not to be produced out of two uncompounded Colours.

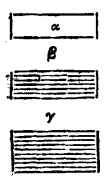
Concerning the buſineſs of colours, when Mr. *Hugens* hath ſhewn how White may *be produced out of two uncompounded colours, I will tell him, why he can conclude nothing from that*; my meaning

meaning was, that ſuch a White, were there any ſuch, would have different properties from the White which I had reſpect to, when I deſcribed my Theory; that is, from the White of the ſun's immediate light, of the ordinary objects of our ſenſes, and of all white phænomena that have hitherto fallen under my obſervation. And thoſe different properties would evince it to be of a different conſtitution: inſomuch, that ſuch a production of White would be ſo far from contradicting, that it would rather illuſtrate and confirm my Theory; becauſe by the difference of that from other Whites, it would appear, that other Whites are not compounded of only two colours like that And therefore if Monſ. *H.* would prove any thing, it is requiſite that he do not only produce out of two primitive colours a White, which to the naked eye ſhall appear like other Whites, but alſo ſhall agree with them in all other properties.

But to let you underſtand wherein ſuch a White would differ from other Whites, and why from thence it would follow, that other Whites are otherwiſe compounded; I ſhall lay down this poſition.

That a compounded colour can be reſolved into no more ſimple colours, than thoſe of which it is compounded.

This ſeems to be ſelf-evident; and I have alſo tried it ſeveral ways, and particularly by this which follows. Let α repreſent an

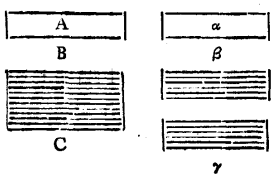


oblong piece of White paper, about $\frac{1}{3}$ or $\frac{1}{4}$ of an inch broad, and illuminated in a dark room, with a mixture of two colours caſt upon it from two priſms; ſuppoſe a deep Blue and Scarlet, which muſt ſeverally be as uncompounded as they can conveniently be made. Then, at a convenient diſtance, ſuppoſe of ſix or eight yards, view it through a clear triangular glaſs or cryſtal priſm, held parallel to the paper; and you ſhall ſee the two colours parted from one another in the faſhion of two images of the paper, as they are repreſented at β and γ; where ſuppoſe β the Scarlet, and γ the Blue, without Green, or any other colour between them.

Now from the aforeſaid poſition I deduce theſe two concluſions. 1. That if there were found out a way to compound White of two ſimple colours, that White would be again reſolvable into no more

more than two. 2. That if other Whites, as that of the ſun's light, &c. be reſolvable into more than two ſimple colours, as I find by experiment that they are, then they muſt be compounded of more than two.

To make this plainer, ſuppoſe that A repreſents a White body, illuminated by a direct beam of the ſun, tranſmitted through a



ſmall hole into a dark room; and α, ſuch another body, illuminated by a mixture of two ſimple colours; which, if poſſible, may make it alſo appear of a White colour exactly like A. Then, at a convenient diſtance, view theſe two Whites through a priſm; and A will be changed into a ſeries of all colours, Red, Yellow, Green, Blue, Purple, with their intermediate degrees ſucceeding in order from B to C. But α, according to the aforeſaid experiment, will only yield thoſe two colours of which it was compounded; and thoſe not conterminate like the colours at BC, but ſeparate from one another, as at β and γ, by means of the different refrangibility of the rays, to which they belong. And thus by comparing theſe two Whites, they would appear to be of a different conſtitution, and A to conſiſt of more colours than α. So that what Monſ. *H.* contends for, would rather advance my Theory by the acceſs of a new kind of White, than conclude againſt it. But I ſee no hopes of compounding ſuch a White.

As for Monſ. *H.* his expreſſion, *That I maintain my doctrine with ſome concern*; I confeſs it was a little ungrateful to me, to meet with objections which had been anſwered before, without having the leaſt reaſon given me, why thoſe anſwers were inſufficient. Thoſe anſwers were to ſhew, that there are other ſimple colours beſides Blue and Yellow; I inſtanced in a ſimple or homogeneal Green, ſuch as cannot be made by mixing Blue and Yellow, or any other colours. And I alſo ſhewed why, ſuppoſing that all colours might be produced out of two, yet it would not follow that thoſe two are the only original colours. The reaſons I deſire you would compare with what hath now been ſaid of White. And ſo the neceſſity of all colours to produce White,

might have appeared by that experiment, where I ſay, That if any colour at the lens be intercepted, the Whiteneſs (which is compounded of them all) will be changed into (the reſult of) the other colours.

However, ſince there ſeems to have happened ſome miſunderſtanding between us, I ſhall endeavour to explain myſelf a little further in theſe things, according to the following method.

DEFINITIONS.] I. I call that Light homogeneal, ſimilar or uniform, whoſe rays are equally refrangible.

II. And that heterogeneal, whoſe rays are unequally refrangible.

Note. There are but three affections of light, in which I have obſerved its rays to differ, *viz. refrangibility, reflexibility* and *colour*; and thoſe rays which agree in refrangibility, agree alſo in the other two, and therefore may well be defined homogeneal; eſpecially ſince men uſually call thoſe things homogeneal, which are ſo in all qualities that come under their knowledge, though in other qualities, that their knowledge extends not to, there may poſſibly be ſome heterogeneity.

III. Thoſe colours I call ſimple, or homogeneal, which are exhibited by homogeneal light.

IV. And thoſe compounded or heterogeneal, which are exhibited by heterogeneal light.

V. Different colours, I call not only the more eminent ſpecies, Red, Yellow, Green, Blue, Purple, but all other the minuteſt gradations; much after the ſame manner that not only the more eminent degrees of muſick, but all the leaſt gradations are eſteemed different ſounds.

PROPOSITIONS.] I. The ſun's light conſiſts of rays differing by indefinite degrees of refrangibility.

II. Rays which differ in refrangibility when parted from one another, do proportionally differ in the colours which they exhibit. Theſe two Propoſitions are matter of fact.

III. There are as many ſimple or homogeneal colours, as degrees of refrangibility: for to every degree of refrangibility belongs

longs a different colour, by Prop. II. and that colour is ſimple, by Def. I. and III.

IV. Whiteneſs, in all reſpects like that of the ſun's immediate light, and of all the uſual objects of our ſenſes, cannot be compounded of two ſimple colours alone: for ſuch a compoſition muſt be made by rays that have only two degrees of refrangibility, by Def. I. and III; and therefore it cannot be like that of the ſun's light, by Prop. I; nor, for the ſame reaſon, like that of ordinary White objects.

V. Whiteneſs, in all reſpects like that of the ſun's immediate light, cannot be compounded of ſimple colours, without an indefinite variety of them: for to ſuch a compoſition there are requiſite rays endued with all the indefinite degrees of refrangibility, by Prop. I. And thoſe infer as many ſimple colours, by Def. I. and III. and Prop. II. and III.

To make theſe a little plainer, I have added alſo the Propoſitions that follow.

VI. The rays of light do not act on one another in paſſing through the ſame medium. This appears by ſeveral former paſſages, and is capable of further proof.

VII. The rays of light ſuffer not any change of their qualities from refraction.

VIII. Nor afterwards from the adjacent quiet medium. Theſe two Propoſitions are manifeſt *de facto* in homogeneal light, whoſe colour and refrangibility is not at all changeable, either by refraction, or by the contermination of a quiet medium. And as for heterogeneal light, it is but an aggregate of ſeveral ſorts of homogeneal light; no one ſort of which ſuffers any more alteration than if it were alone; becauſe the rays act not on one another, by Prop. VI. and therefore the aggregate can ſuffer none. Theſe two Propoſitions alſo might be further proved apart by experiments, too long to be here deſcribed.

IX. There can no homogeneal colours be educed out of light by refraction, which were not commixt in it before; becauſe by Prop. VII. and VIII. refraction changeth not the qualities of the rays, but only ſeparates thoſe which have diverſe qualities, by means of the different refrangibility.

X. The ſun's light is an aggregate of an indefinite variety of homogeneal colours; by Prop. I. III. and IX. And hence it is, that I call homogeneal colours alſo primitive or original.

And thus much concerning colours.

Monſ. *H.* has thought fit to inſinuate, that the aberration of rays, by their different refrangibility, is not ſo conſiderable a diſadvantage in glaſſes, as I ſeemed to be willing to make men believe, when I propounded concave mirrors as the only hopes of perfecting teleſcopes. But if he pleaſe to take his pen, and compute the errors of a glaſs and ſpeculum, that collect rays at equal diſtances, he will find how much he is miſtaken; and that I have not been extravagant, as he imagines, in preferring reflexions. And as for what he ſays of the difficulty of the *praxis*, I know it is very difficult; and by thoſe ways which he attempted it, I believe unpracticable. But there is a way inſinuated in the Tranſactions, p. 3080, by which it is not improbable, but that as much may be done in large teleſcopes, as I have thereby done in ſhort ones; but yet not without more than ordinary diligence and curioſity.

Pray with theſe notes return my thanks to Mr. *Hugens* for his book.

Of Sluſius's method of Tangents.

By a former letter of your's, I was a little dubious whether Mr. *Sluſius* might not apprehend, by what you wrote to him concerning me, that I pretended to his method of drawing tangents, until I underſtood by Mr. *Collins* that you ſignified to him, that you thought it here of a later date. For it ſeems to me, that he was acquainted with it ſome years before he printed his *Meſolabum*, and conſequently before I underſtood it. But if it had been otherwiſe, yet ſince he firſt imparted it to his friends and the world, it ought deſervedly to be accounted his. As for the methods, they are the ſame; though I believe derived from different principles. But I know not whether his principles afford it ſo general as mine; which extends to equations affected with ſurd terms, without reducing them to another form. But, if you pleaſe, let this paſs.

The incongruities you ſpeak of, I paſs by. But I muſt, as formerly, ſignify to you, that I intend to be no farther ſollicitous about

about matters of philoſophy. And therefore I hope you will not take it ill, if you find me never doing any thing more in that kind: or rather that you will favour me in my determination, by preventing, ſo far as you can conveniently, any objections, or other philoſophical letters, that may concern me. For your proffer about my quarterly payments, I thank you. But I would not have you trouble yourſelf to get them excuſed, if you have not done it already. And now being tired with this long letter, I muſt, in haſte, write myſelf your's, &c.

VIII.

Mr. NEWTON'S anſwer to Monſ. HUGENIUS'S letter of Jan. 14, $16\frac{72}{73}$.

SIR,

The fallacy of Mr. Hugens's method of examining Colours.

IT ſeems to me, that M. *Hugens* takes an improper way of examining the nature of colours, whilſt he proceeds upon compounding thoſe that are already compounded, as he doth in the former part of his letter. Perhaps he would ſooner ſatisfy himſelf, by reſolving light into colours, as far as may be done by art, and then by examining the properties of thoſe colours apart; and afterwards by trying the effects of reconjoining two or more, or all of thoſe: and, laſtly, by ſeparating them again, to examine what changes that reconjunction had wrought in them. This will prove a tedious and difficult taſk, to do it as it ought to be done; but I could not be ſatisfied, till I had gone through it. However, I only propound it, and leave every man to his own method.

All colours not to be derived from Yellow and Blue.

As to the contents of his letter, I conceive my former anſwer to the *quære* about the number of colours is ſufficient, which was to this effect. That all colours cannot practically be derived out of Yellow and Blue, and conſequently that thoſe hypotheſes are falſe, which imply they may. If you aſk, what colours cannot be derived out of Yellow and Blue, I anſwer, none of thoſe which I defined to be original; and if he can ſhew by experiment how they may, I will acknowledge myſelf in an error.

Nor

Nor is it eaſier to frame an hypotheſis, by aſſuming only two original colours, rather than an indefinite variety; unleſs it be eaſier to ſuppoſe, that there are but two figures, ſizes, and degrees of velocity, or force of the æthereal corpuſcles or pulſes, rather than an indefinite variety, which certainly would be a very harſh ſuppoſition. No man wonders at the indefinite variety of waves of the ſea, or of ſands on the ſhore; but were they all of but two ſizes, it would be a very puzzling phænomenon. And I ſhould think it as unaccountable, if the ſeveral parts or corpuſcles of which a ſhining body conſiſts, which muſt be ſuppoſed of various figures, ſizes, and motions, ſhould impreſs but two ſorts of motion on the adjacent æthereal medium; or any other way beget but two ſorts of rays. But to examine how colours may be thus explained hypothetically, is, beſides, my purpoſe. I never intended to ſhew wherein conſiſts the nature and difference of colours, but only to ſhew, that *de facto* they are original and immutable qualities of the rays which exhibit them; and to leave it to others to explicate, by mechanical hypotheſes, the nature and difference of the qualities; which I take to be no very difficult matter. But I would not be underſtood, as if their difference conſiſted in the different refrangibility of thoſe rays; for that different refrangibility conduces to their production no otherwiſe, than by ſeparating the rays whoſe qualities they are. Whence it is, that the ſame rays exhibit the ſame colours, when ſeparated by any other means; as by their different reflexibility; a quality not yet diſcourſed of.

White not to be produced from Yellow, Green and Blue.

In the next particular, where M. *Hugens* would ſhew, that it is not neceſſary to mix all colours for the production of White; the mixture of Yellow, Green, and Blue, without Red or Violet, which he propounds for that end, will not produce White, but Green; and the brighteſt part of the Yellow will afford no other colour but Yellow, if the experiment be made in a room well darkened, as it ought, becauſe the coloured light is much weakened by the reflexion, and ſo apt to be diluted by the mixing of the other ſcattering light. But yet there is an experiment or two mentioned in my letter in the Tranſactions, Numb. 88, by which I have produced White out of two colours alone, and that variouſly,

ouſly, as out of Orange and a full Blue, and out of Red and pale Blue, and out of Yellow and Violet; as alſo out of other pairs of intermediate colours. The moſt convenient experiment for performing this was, that of caſting the colours of one priſm upon thoſe of another, after a due manner. But what M. *Hugens* can deduce from hence, I ſee not; for the two colours were compounded of all others, and ſo the reſulting White, to ſpeak properly, was compounded of them all, and only decompounded of thoſe two. For inſtance, the Orange was compounded of Red, Orange, Yellow, and ſome Green; and the Blue and Violet, full Blue, light Blue, and ſome Green, with all their intermediate degrees; and conſequently the Orange and Blue together made an aggregate of all colours, to conſtitute the White. Thus if one mix Red, Orange and Yellow powders, to make an Orange; and Green, Blue, and Violet powders, to make a Blue: and, laſtly, the two mixtures to make a Grey: that Grey, though decompounded of no more than two mixtures, is yet compounded of all the ſix powders as truly, as if the powders had been all mixed at once. This is ſo plain, that I conceive there can be no further ſcruple; eſpecially to them who know how to examine whether a colour be ſimple or compounded, and of what colours it is compounded: which having explained in another place, I need not now repeat. If, therefore M. *Hugens* would conclude any thing, he muſt ſhew how White may be produced out of two uncompounded colours; which, when he hath done, I will further tell him why he can conclude nothing from that. But I believe there cannot be found an experiment of that kind; becauſe, as I remember, I once tried by gradual ſucceſſion the mixture of all pairs of uncompounded colours, and though ſome of them were paler and nearer to White than others, yet none could be truly called White. But it being ſome years ſince this trial was made, I remember not well the circumſtances; and therefore recommend it to others to be tried again.

Of the aberrant rays in Teleſcopes.

In the laſt place, had I thought the diſtinctneſs of the picture which (for inſtance) a twelve-foot object-glaſs caſts into a darkened room, to be ſo contrary to me as M. *Hugens* is pleaſed to affirm, I ſhould have mended my Theory in that point, before I propounded

propounded it. For that I had thought on that difficulty, you may eaſily gueſs by an expreſſion ſomewhere in my firſt letter to this purpoſe, that I wondered how teleſcopes could be brought to ſo great perfection by refractions, which were ſo irregular. But to take away the difficulty, I muſt acquaint you, firſt, That though I put the greateſt lateral error of the rays from one anther to be about $\frac{1}{50}$ of the glaſs's diameter, yet their greateſt error from the points, on which they ought to fall, will be but $\frac{1}{100}$ of that diameter: and then, that the rays, whoſe error is ſo great, are but very few, in compariſon to thoſe which are refracted more juſtly. For the rays, which fall upon the middle parts of the glaſs, are refracted with ſufficient exactneſs; as alſo are thoſe that fall near the perimeter, and have a mean degree of refrangibility. So that there remain only the rays which fall near the perimeter, and are moſt or leaſt refrangible, to cauſe any ſenſible confuſion in the picture. And theſe are yet ſo much further weakened by the greater ſpace, through which they are ſcattered; that the light which falls on the due point is infinitely more denſe, than that which falls on any other point round about it. Which, though it may ſeem a paradox, yet is eaſily demonſtrable. Yea, although the light, which paſſeth through the middle parts of the glaſs, were wholly intercepted, yet would the remaining light convene infinitely more denſe at the due points, than at other places. And by this axis of denſity, the light which falls in, or inſenſibly near, the juſt point, may, I conceive, ſtrike the ſenſorium ſo vigorouſly, that the impreſs of the weak light, which errs round about it, ſhall, in compariſon, not be ſtrong enough to be animadverted, or to cauſe any more ſenſible confuſion in the picture, than is found by experience. This I conceive is enough to ſhew why the picture appears ſo diſtinct, notwithſtanding the irregular refraction. But if this ſatisfy not, M. *Hugens* may try, if he pleaſe, how diſtinct the picture will appear, when all the lens is covered, excepting a little hole next its edge on one ſide only. And if in this caſe he pleaſe to meaſure the breadth of the colours, thus made at the edge of the ſun's picture, he will perhaps find it approach nearer to my proportion than he expects.

X.

X.

To Mr. OLDENBURG.

SIR,

WHEN you ſhewed me Mr. *Line's* ſecond letter, I remember I told you, that I thought an anſwer in writing would be inſignificant; becauſe the diſpute was not about any ratiocination, but my veracity in relating an experiment, which he denies will ſucceed, as it is deſcribed in my printed letter: for this is to be decided not by diſcourſe, but new trial of the experiment.

What it is that impoſes upon Mr. *Line*, I cannot imagine; but I ſuſpect he has not tried the experiment ſince he acquainted himſelf with my Theory; but depends upon his old notions, taken up before he had any hint given to obſerve the figure of the coloured image. I ſhall deſire him, therefore, before he returns any anſwer, to try it once more for his ſatisfaction, and according to this manner.

Directions for making the experiment with the Priſm.

Let him take any priſm, and hold it ſo that its axis may be perpendicular to the ſun's rays; and in this poſture let it be placed as cloſe as may be to the hole, through which the ſun ſhines into a dark room; which hole may be about the bigneſs of a pea. Then let him turn the priſm ſlowly about its axis, and he ſhall ſee the colours move upon the oppoſite wall; firſt, towards that place to which the ſun's direct light would paſs, if the priſm were taken away; and then back again. When they are in the middle of theſe two contrary motions, that is, when they are neareſt that place to which the ſun's direct ray tends, there let him ſtop; for then are the rays equally refracted on both ſides the priſm. In this poſture of this priſm, let him obſerve the figure of the colours; and he ſhall find it not round, as he contends, but oblong; and ſo much the more oblong as the angle of the priſm, comprehended by the refracting planes, is bigger; and the wall, on which the colours are caſt, more diſtant from the priſm; the colours, Red, Yellow, Green, Blue, Purple, ſucceeding in order, not from one ſide of the figure to the other, as in Mr. *Line's* con-

jecture, but from one end to the other; and the length of the figure being not parallel, but tranſverſe to the axis of the priſm. After this manner I uſed to try the experiment; and it will not ſucceed well, if the day be not clear, and the priſm placed cloſe to the hole; or ſo near at leaſt, that all the ſun's light, that comes from the hole, may paſs through the priſm alſo, ſo as to appear in a round form, if intercepted by a paper immediately after it has paſſed the priſm.

When Mr. *Line* has tried this, I could wiſh he would proceed a little further, to try that which I called the *experimentum crucis*. For when he has tried them (which, by his denying them, I know he has not done yet as they ſhould be tried) I preſume he will reſt ſatisfied.

Three or four days after you gave me a ſight of Mr. *Line's* ſecond letter, I remember I thereupon ſhewed the firſt of theſe two experiments to that gentleman, whom you found with me when you gave me that viſit. And whilſt I was ſhewing it to him, *A. H.* a member of the Royal Society, came in; and I ſhewed it to him alſo. And you may remember, that *R. H.* two or three years ago, in a letter read before the Royal Society, and tranſmitted to me, gave teſtimony not only to the experiments queſtioned by Mr. *Line*, but to all thoſe ſet down in my firſt letter about colours, as having tried them himſelf: and when you read Mr. *Line's* letter at a meeting of the ſaid Society, and was pleaſed to do me the favour to propound the experiment to be tried in their preſence, *R. H.* ſpoke of it to them as a thing not to be queſtioned. But if it have not yet been tried before them, and any of them, upon Mr. *Line's* confidence, doubt of it; I promiſe, when I ſhall have the happineſs to be at any more of their aſſemblies, upon the leaſt hint, to ſhew them the trial of it; and I hope I ſhall not be troubleſome, becauſe it may be tried, though not ſo perfectly, even without darkening a room, or the expence of any more time than half a quarter of an hour; although, if Mr. *Line* perſiſt in his denial of it, I could wiſh it might be tried ſooner there, than I ſhall have an opportunity to be among them.

I have

I have returned you Mr. *Line's* letter. It came to my hands but this week; the gentleman by whom you ſent it having not yet been at *Cambridge*, but tranſmitting it to me from *Oxford*.

I had ſome thoughts of writing a further diſcourſe about colours to be read at one of your Aſſemblies; but find it yet againſt the grain, to put pen to paper any more on that ſubject. But however, I have one diſcourſe by me of that ſubject, written when I ſent my firſt letters to you about colours, and of which I then gave you notice. This you may command, when you think it will be convenient, if the cuſtom of reading weekly diſcourſes ſtill continue. In the mean while, I am, &c.

X.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Jan. 10, 167⅞.

CONCERNING the experiment of the glaſs and papers, I ſhould add theſe two to the former directions. One, that the glaſs be rubbed with a full handful of ſtuff, which may cover and rub all the glaſs at once: for thus its electric virtue will be more eaſily and vigorouſly excited, than if rubbed with a little only, doubled up but once or twice. This rubbing with the ſtuff, I ſuppoſe, rarifies and diffuſes the electric *effluvia* from the glaſs into the air; and the knocking or rubbing with the finger-ends puts the diffuſed *effluvia* into irregular motions. The other thing I would note is, that the papers may perhaps be too little, as well as too great. Too ſmall ones will be apter to ſtick to the glaſs or table. If the experiment be tried with a glaſs three or four inches broad, ſet about $\frac{1}{6}$ of an inch from the table, and the papers of a thin ſort of paper cut into triangular pieces, the ſides of thoſe triangles may not unfitly be about the 20th or 25th part of an inch, more or leſs. It may be beſt tried with bits of ſeveral ſizes put in at once; and if there be put in a piece or two of the wing of a fly, thoſe, I find, will move more eaſily, though ſcarce ſo variouſly. Theſe and the former directions obſerved, I cannot imagine how you ſhould miſs; though I cannot promiſe

Directions about an experiment of Electricity.

all things will appear juſtly to you as they do to me, there being unaccountable circumſtances, which may make a difference.

Reply to inſinuations of Mr. Hook's.

I am obliged to you, Sir, for your candour, in acquainting me with Mr. *Hook's* inſinuations. It is but a reaſonable piece of juſtice, I ſhould have an opportunity to vindicate myſelf from what may be undeſervedly caſt on me; and therefore, ſince you have been pleaſed to be my repreſentative there, and I have no means of knowing what is done but by you, I hope you will continue that equitable candour; though I think the preſent buſineſs of no great moment as to me, not imagining that the Royal Society are to be impoſed on in a thing ſo plain, or that Mr. *Hook* himſelf will perſiſt in a miſtake, when he hears the difference ſtated. The only thing I ſaid he could pretend taken from his hypotheſis, was the diſpoſition of æther to vibrate; and yet whilſt he graſps at all, he is likely to fall ſhort of this too. That æthereal vibrations are light, is his; but that æther may vibrate (which is all, I ſuppoſe) is to be had from a higher fountain: for that æther is a finer degree of air, and air a vibrating medium, are old notions, and the principles I go upon. I deſire Mr. *Hook* to ſhew me, therefore, I ſay not only the ſum of the hypotheſis I wrote, which is his inſinuation, but only part of it taken out of his *Micrographia*; but then I expect too, that he inſtance in what is his own. It is moſt likely he will pretend, I had from him the application of vibrations to the ſolution of the phæno-mena of thin plates: and yet all the uſe I make of vibrations, is, to ſtrengthen or weaken the reflecting power of the æthereal ſuperficies; which is ſo far from being in his *Micrographia*, that the laſt ſpring, when I told him of the reflecting power of the æthereal ſuperficies, he took it for a new notion; having till then ſuppoſed light to be reflected by the parts of groſs bodies. To the things that he has from *Des Cartes*, pray add this, *that the parts of ſolid bodies have a vibrating motion*, leaſt he ſhould ſay I had from him what I ſay about heat. And his having from *Des Cartes* the reduction of all colours to two, you may, if need be, explain further for me thus. That as *Des Cartes* puts every *globulus* to be urged forward on one ſide by the illuminated me-dium, and impeded on the other by the dark one; ſo Mr. *Hook* puts

puts every vibration to be promoted at one end, and retarded at the other by thoſe mediums; and thence both alike derive two modifications of light, on the two ſides of the refracted beam, for the production of all colours.

Directions about the proper management of the priſm, in anſwer to Mr. Line.

By Mr. *Gaſcoin's* letter, one might ſuſpect that Mr. *Linus* tried the experiment ſome other way than I did; and therefore I ſhall expect, till his friends have tried it according to my late diſcove-ries: in which trial it may poſſibly be a further guidance to them to acquaint them, that the priſm caſts from it ſeveral images. One is that oblong one of colours which I mean, and this is made by two refractions only. Another there is, made by two refrac-tions and an intervening reflexion; and this is round and colour-leſs, if the angles of the priſm be exactly equal; but if the an-gles at the reflecting baſe be not equal, it will be coloured; and that ſo much the more, by how much unequaller the angles are; but yet not much unround, unleſs the angles be very unequal. A third image there is made by one ſimple reflexion; and this is always round and colourleſs. The only danger is in miſtaking the ſecond for the firſt. But they are diſagreeable not only by the length and lively colours of the firſt, but by its different mo-tion too: for whilſt the priſm is turned continually the ſame way about its axis, the ſecond and third move ſwiftly, and go always on the ſame way till they diſappear; but the firſt moves ſlow; and grows continually ſlower, till it be ſtationary; and then turns back again, and goes back faſter and faſter, till it vaniſh in the place where it began to appear. If without darkening their room, they hold the priſm at their window in the ſun's open light; in ſuch a poſture, that its axis be perpendicular to the ſun-beams; and then turn it about its axis, they cannot miſs of ſeeing the firſt image: which having found, they may double up a paper once or twice, and make a round hole in the middle of it about $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{4}$ of an inch broad, and hold the paper imme-diately before the priſm, that the ſun may ſhine on the priſm through that hole; and the priſm being ſtayed and held ſtea-dy, in that poſture which makes the image ſtationary; if the image then fall directly on an oppoſite wall, or on a ſheet of paper placed at the wall, ſuppoſe 15 or 20 foot from the priſm,

or

or further off, they will ſee that image in ſuch an oblong figure as I have deſcribed, with the Red at one end, the Violet at the other, and a blueiſh Green in the middle; and if they obſcure their room as much as they can by drawing curtains or otherwiſe, it will make the colours the more conſpicuous.

This direction I have ſet down, that no body, into whoſe hands a priſm ſhall happen, may find difficulty or trouble in trying it. But when Mr. *Linus's* friends have tried it thus, they may proceed to repeat it in a dark room, with a leſs hole made in their window-ſhut. And then I ſhall deſire, that they will ſend you a full and clear deſcription how they tried it, expreſſing the length, breadth, and angles of the priſm; its poſition to the incident rays, and to the window-ſhut; the bigneſs of the hole in that ſhut, through which the ſun ſhined on their priſm; what ſide of the priſm the ſun ſhined on; and at what ſide the light came out of it again; the diſtance of the priſm from the oppoſite paper or wall, on which the refracted light was caſt perpendicularly; and the length, breadth, and figure of the ſpace there illuminated by that light; and the ſituation of each colour within that figure: and if they pleaſe to illuſtrate their deſcription with a ſcheme or two, it will make the buſineſs plainer. By this means, if there be any difference in our way of experimenting, I ſhall be the better enabled to diſcern it, and give them notice where the failure is, and how to rectify it. I ſhould be glad too, if they would favour me with a deſcription of the experiment, as it has been hitherto tried by Mr. *Linus*; that I may have an opportunity to conſider, what there is in that which makes againſt me. And becauſe Mr. *Gaſcoin* ſeems to ſuſpect, that my directions, ſent Mr. *Linus*, differ from what I have printed; I deſire alſo that he would ſignify wherein he thinks they may differ, ſo as to need reconciling. Fuller they are, but not different, nor any other than I have followed above theſe ſeven years.

History of the diſpute with Mr. Line.

As for my ſuſpicion, that Mr. *Linus* might poſſibly rely on old experiments; his quoting Sir *Kenelm Digby* for a by-ſtander, might have made any other ſtranger to his way, as well as me, ſuſpect it. But I wonder moſt at Mr. *Gaſcoin's* inſinuation, as if I influenced the preſs in what concerns Mr. *Linus* and me. You know, Sir, I never

I never ſpoke or hinted a ſyllable to you, concerning printing or not printing any thing of Mr. *Linus*; nor ſo much as knew of the printing his firſt letter, till it was out in the Tranſactions. When you ſent it to me, I, out of a great deſire to avoid controverſies (which, as you know, I had entertained long before) wrote back to you, that I had no mind to meddle with it: but, as I was ready to ſeal that letter, I added a poſtſcript to this purpoſe: That ſeeing Mr. *Linus* was deſigning ſomething about light for the preſs, to prevent publiſhing his miſtake, you might, if you thought fit, ſignify to him (but not from me) that the experiment was tried otherwiſe than he ſuggeſted; and that in ſuch and ſuch reſpects, which I there named. And the ſubſtance of this poſtſcript was that you publiſhed at the end of his firſt letter, on which Mr. *Gaſcoin* here animadverts; but was ſo far from being deſigned for the preſs by me, that the firſt ſight of it, together with his letter in the Tranſactions, made me ſay to one, that I wiſhed they had been ſuppreſſed; for I doubted the printing them would make Mr. *Linus* unquiet, and ſo in the end create me trouble. As for his ſecond letter which you ſhewed me at *London*, I returned it again to you ſo ſoon as I had read it, and never ſaw it ſince, perſiſting in my deſire to avoid the controverſy. And at my returning it, you moved me for an anſwer, with this argument, that if I waved it, Mr. *Linus* was like to make the more ſtir: to which I replied, that the buſineſs, being about matter of fact, was not proper to be decided by writing, but by trying it before competent witneſſes. Whereupon, at your motion, I told you what was requiſite; and by your procurements, preparations were accordingly made for its trial at the next aſſembly of the Royal Society, as I underſtood by Mr. *Hook*: but the day proved cloudy, and before another aſſembly I returned to *Cambridge*, and from that time never enquired after nor regarded the matter further, till you ſent me Mr. *Linus's* third letter. This is the hiſtory of Mr. *Linus's* buſineſs, ſo far as I know it: which I have ſet down, that his friends may ſee he has not been dealt with obliquely, as they ſeem to apprehend. All, I think, that they can object to you is, that you were at a ſtand; becauſe you could not engage me in the controverſy; and to me, that I had no mind

mind to be engaged: a liberty every body has a right to, and may gladly make uſe of ſometimes at leaſt, and eſpecially if he want leiſure, or meet with prejudice or groundleſs inſinuations. But I hope to find none of this in Mr. *Gaſcoin*. The handſome genius of his preſent letter, makes me hope it for the future. In the mean time I deſire with him, that you would publiſh Mr. *Linus's* letters as ſoon as you can conveniently, to prevent further miſapprehenſions. I am, &c.

XI.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, Feb. 29, $167\frac{5}{6}$.

BY reading Mr. *Linus's* letter, when you ſhewed it to me at *London*, I retained only a general remembrance, that Mr. *Linus* denied what I affirmed, and ſo could ſay nothing in particular to it. But having the opportunity to read it again in Numb. CXXI. of the Tranſactions, I perceive he would perſuade you, that the information you gave him about the experiment is as inconſiſtent with my printed letters, as with experience. And therefore, leſt any, who have not read thoſe letters, ſhould take my ſilence in this point for an acknowledgment, I thought it not amiſs to ſend you ſomething in anſwer to this alſo.

He tells you, that "whereas you aſſure him, Firſt, that the "experiment was made in clear days; ſecondly, that the priſm "was placed cloſe to the hole, ſo that the light had no room to "diverge; and, thirdly, that the image was not parallel, but "tranſverſe to the axis of the priſm: if theſe aſſertions be com-"pared with my relation of the experiment in the Phil. Tranſ. "Numb. LXXX. p. 3076. it will evidently appear they cannot be "admitted, as being directly contrary to what is there delivered." His reaſons are theſe:

Firſt, that I ſaid the ends of the long image ſeemed ſemicircular, which, ſays he, "never happens in any of the three caſes "above-ſaid." But this is not to ſet me at odds with myſelf, but with the experiment. For it is there deſcribed to happen in them all;

all; and I ſtill ſay it doth happen in them. Let others try the experiment, and judge.

Further he ſays, that the priſm is placed at a diſtance from the hole in the ſcheme of the experiment in Numb. LXXXIV. p. 4091 (a). But what if it were ſo there? For that is the ſcheme of a demonſtration, not of the experiment; and would have ſerved for the demonſtration, had the diſtance been put twenty times greater than it is. In the ſchemes of the experiment, Numb. LXXX. p. 3086 (b), and Numb. LXXXIII. p. 4061 (c), it is repreſented cloſe, and cloſe enough the ſcheme, Numb. LXXXIII. p. 4061 (c). But Mr. *Linus* thought fit to wink at thoſe, and pitch upon the ſcheme of a demonſtration; and ſuch a ſcheme too, as hath no hole at all repreſented in it. For the ſcheme, Numb. LXXXIV. p. 4091, is this (a). In which the rays are not ſo far diſtant from one another at G, L; but that the hole, had I expreſſed it, might have been put there, and yet have comprehended them. But if we ſhould put the hole at *x*, their decuſſation, yet it will not be any thing to his purpoſe; the diſtance *x*G, or *x*L, being but about half the breadth of a ſide of the priſm ($\frac{1}{2}$AC); which I conceive is not a twentieth part of the diſtance requiſite in his conjecture.

Thirdly, he ſays, that "more might be ſaid out of my rela-"tion to ſhew, that the image was not tranſverſe; for if it had "been tranſverſe, I could not have been ſurprized (as I ſaid I "was) to ſee the length thereof ſo much exceed the breadth; it "being a thing ſo obvious and eaſy to be explicated by the ordi-"nary rules of refraction." But, on the contrary, it may rather be ſaid, that if the image had been parallel, I could not have been ſurprized to ſee the length thereof ſo much exceed the breadth, it being a thing ſo extremely obvious, as not to need any explication. For who, that had but common ſenſe, and ſaw the whole priſm, or a good part of it illuminated, could not expect that the light ſhould have the ſame long figure upon the wall, that it had when it came out of the priſm? Mr. *Linus*, therefore, while he would ſtrengthen his argument, by repreſenting me well ſkilled in optics, does but overthrow it. But where he ſays, "I could not have been ſurprized at the length, had the "image been *tranſverſe*, it being a thing ſo obvious, and eaſy to

(a) See p. 308, lin. 20. (b) See p. 306, lin. 30. (c) See p. 312.

" be explicated by the ordinary rules of refraction." Let any man take the experiment entire, as I have there delivered it, that is with this condition, that the refractions on both ſides the priſm were equal, and try if he can reconcile it with the ordinary rules of refraction. On the contrary, he may find the impoſſibility of ſuch a reconciliation demonſtrated, in my anſwer to *P. Pardies*. Num. LXXXIV. p. 4091 (a).

In the laſt place he objects, that my ſaying, in Num. LXXX. p. 3077 (b), that the incident refractions were, in the experiment, equal to the emergent, proves again that the long image was parallel. And yet that very ſaying is a ſufficient argument that I meant the contrary; becauſe it becomes wholly impertinent, if applied to a parallel image; but in the other caſe is a very neceſſary circumſtance. What is added, therefore, of *P. Pardies*, might have been ſpared; eſpecially ſince that learned perſon underſtood my diſcourſe to be meant of a tranſverſe image, and acquieſced in my anſwers.

This in anſwer to Mr. *Linus's* letter. And now to take away the like ſuſpicion from his friends, if my declaration of my meaning ſatisfy not; I ſhall note ſome further paſſages in my letters, whereby they may ſee how I was to be underſtood from the beginning, as to the aforeſaid circumſtances.

For the day; I expreſs every where that the experiment was tried in the ſun's light; and in Num. LXXX. p. 3077 (c), that the breadth of the image by meaſure anſwered to the ſun's diameter. But becauſe it is pretended I was impoſed upon; I would aſk, what the experiment, as it is advanced to that which I called the *experimentum crucis*, can have to do with a cloudy day. For if the *experimentum crucis*, which is that which I depend on, can have nothing to do with a cloudy day, then it is to no purpoſe to talk of a cloudy day in the firſt experiment, which does but lead on to that. But if this ſatisfy not, let the Tranſactions, in Num. LXXXIII. p. 4060, be conſulted (d). For there I tell you, how, by applying a lens to the priſm, the ſtreight edges of the oblong image became diſtincter than they would have been without the lens: a circumſtance which cannot happen in Mr. *Linus's* caſe of a bright cloud.

(a) See p. 308. (b) See p. 297. (c) See p. 297, lin. 4 and 5. (d) See p. 311, lin. 25—27.

For

For the poſition of the priſm; I tell you, Num. LXXX. p. 3076 (a), that it was placed at the ſun's entrance into the chamber: and in page 3085 (b), I bad to make a hole in the ſhut, and there place the priſm: and in the next page I ſay again, that the priſm ABC is to be ſet cloſe by the hole F of the window EG; and accordingly repreſent it cloſe in the figure. Alſo in page 3077 (c) I tell you, that the diſtance of the image from the hole, or priſm, was 22 feet: which is as much as to ſay, that the priſm, ſuppoſe that ſide of it next the hole, was as far from the image as the hole itſelf was; and conſequently that the priſm and the hole were contiguous. Alſo in p. 3078 (d), where inſtead of the window-ſhut I made uſe of a hole in a looſe board, I tell you expreſsly, that I placed the board behind the priſm. All theſe paſſages are in my very firſt letter about colours. And who, therefore, would imagine, that any one, that had read that letter, ſhould ſo much as ſuſpect, that I placed the priſm, I ſay not at ſo great a diſtance as Mr. *Linus* ſuppoſes, but at any diſtance worth conſidering.

Laſtly, for the poſition of the image, it is repreſented tranſverſe to the axis of the priſm in the figures Num. LXXX. p. 3086 (e), Num. LXXXIII. p. 4061 (f), and Num. LXXXV. p. 5016 (g). And in Num. LXXXVIII. p. 5093 (h), where I made uſe of two croſs priſms, I tell you expreſsly, that the image was croſs to both of them, at an angle of 45 degrees. The calculation alſo, Num. LXXX. p. 3077 (i), are not to be underſtood without ſuppoſing the image croſs. Nor are my notions about different refrangibility otherwiſe intelligible. For in Mr. *Linus's* ſuppoſition, the rays that go to the two ends of the image are equally refracted. So for colours: The Red, according to my deſcription, falls at one end of the image; and the Blue, at the other; which cannot happen but in a tranſverſe image. The ſame poſition is alſo demonſtrable from what I ſaid in Num. LXXX. p. 3076 (k), about turning the long image into a round one, by the contrary refractionof a ſecond priſm, further explained in Num. LXXXIII. p. 4061 (l). For this is not to be done in Mr. *Linus's* furniſe

(a) See p. 295, lin. 10. (b) See p. 306, lin. 5—8. (c) See p. 296, lin. 28.
(d) See p. 298, lin. 18. (e) See p. 306, lin. 30. (f) See p. 312. (g) See p. 317.
(h) See p. 330, lin. 29. (i) See p. 296. (k) See p. 296, lin. 20. (l) See p. 312.

of a parallel image; and therefore had Mr. *Linus* conſidered it, he could never have run into that ſurmiſe.

This I ſuppoſe is enough to manifeſt the three particulars: any one of which, being evidenced, is ſufficient to take away the ſcruple. And therefore Mr. *Linus's* friends need not fear, but that the further directions I ſent them lately for trying the experiment, are the ſame with thoſe I have followed from the beginning; nor trouble themſelves about any thing but to try the experiment right. But yet, becauſe Mr. *Gaſcoin* has been pleaſed to inſinuate his ſuſpicion, that I do differ from himſelf in thoſe directions; I ſhall not ſcruple here to reduce them into particulars, and ſhew where each particular is to be found.

Firſt, then, he is to get a priſm with an angle about 60 or 65 degrees (Num. LXXX. p. 3077 (a), and p. 3086 (b). If the angle be about 63 degrees, as that was which I made uſe of (Num. LXXX. p. 3077 (a),) he will find all things ſucceed exactly as I deſcribed them there. But if it be bigger or leſs, as 30, 40, 50, or 70 degrees, the refraction will be accordingly bigger or leſs; and conſequently the image longer or ſhorter. If his priſm be pretty nearly equilateral, ſuch as I ſuppoſe are uſually ſold in other places as well as in *England*, he may make uſe of the biggeſt angle. But he muſt be ſure to place the priſm ſo, that the refraction be made by the two planes which comprehend this angle. I could almoſt ſuſpect, by conſidering ſome circumſtances in Mr. *Linus's* letter, that his error was in this point; he expecting the image ſhould become as long by a little refraction, as by a great one; which yet being too groſs an error to be ſuſpected of any optician, I ſay nothing of it; but only hint this to Mr. *Gaſcoin*, that he may examine all things.

Secondly, having ſuch a priſm, he muſt place it ſo, that the axis be perpendicular to the rays (Num. LXXXIV. p. 4091, lin. 18, 19 (c).) A little error in this point makes no ſenſible variation of the effect.

Thirdly, the priſm muſt be ſo placed, that the refractions on both ſides be equal (Num. LXXX. p. 3077 (d),) which ſhew it was

(a) See p. 296, lin. 33. (b) See p. 306, lin. 3. (c) See p. 308, lin. 20—22.
(d) See p. 296, lin. 33—35.

to

to be readily done, by turning it about its axis, and ſtaying it when you let the image reſt between two contrary motions, as I explained in my late deſcriptions, ſo I hinted before (Num. LXXX. p. 3077, lin. 34, 35, 36 (a).) If there ſhould be an error in this point alſo, it can do no hurt.

Fourthly, the diameter of the hole I put $\frac{1}{4}$ of an inch (Num. LXXX. p. 3077 (b),) and placed the priſm cloſe to it, even ſo cloſe as to be contiguous (Num. LXXX. p. 3077, lin. 4, 5 (c).) But yet there needs no curioſity in theſe circumſtances. The hole may be of any other bigneſs, and the priſm at a diſtance from the hole; provided things be ſo ordered, that the light appear of a round form, if intercepted perpendicularly at its coming out of the priſm. Nor needs there any curioſity in the day. The clearer it is, the better; but if it be a little cloudy, that cannot much prejudice the experiment, ſo the ſun do but ſhine diſtinctly through the cloud.

Theſe things being thus ordered, if the refracted light fall perpendicularly on a wall or paper, at 20 feet or more from the priſm; it will appear in an oblong form, croſs to the axis of the priſm, Red at one end, and Violet at the other; the length five times the breadth, more or leſs, according to the quantity of the refraction; the ſides, ſtreight lines parallel to one another; and the ends confuſed, but yet ſeeming ſemicircular.

I hope, therefore, Mr. *Linus'* friends will not entertain themſelves any further about incongruous ſurmiſes, but try the experiment, as Mr. *Gaſcoin* has promiſed. And then, ſince Mr. *Gaſcoin* tells you, that "the experiment being of itſelf extraordina-" ry and ſurprizing, and beſides uſhering in new principles into " optics, quite contrary to the common and received; it will be " hard to perſuade it at a truth, till it made ſo viſible to all, as it " were a ſhame to deny it;" if he eſteem it ſo extraordinary, he may have the privilege of making it ſo viſible to all, that it will be a ſhame to deny it. For I dare ſay, after his teſtimony, nobody elſe will ſcruple it. And I make no queſtion but he will hit of it, it being ſo plain and eaſy, that I am very much at a loſs to imagine what way Mr. *Linus* took to miſs.

(a) See p. 297, lin. 20—23. (b) See p. 296, lin. 29. (c) See p. 296, lin. 28.

XII.

XII.

To Mr. OLDENBURG.

SIR,

THE things oppoſed by Mr. *Line* being upon trials found true and granted me, I begin with the new queſtion about the proportion of the length of the image to its breadth. I call it a new one. For though Mr. *Line* in his laſt letter ſpake againſt ſo great a length, as I aſſign; yet, as it ſeems to me, it was not to grant any tranſverſe length ſhorter than that aſſigned by me (for in his firſt letter he abſolutely denied that there would be any ſuch length) but to lay the greater emphaſis upon his diſcourſe, whilſt in defence of common optics, he was diſputing in general againſt a tranſverſe image. And therefore, in my anſwer, I did not preſcribe the juſt quantity of the refracting angle, with which I would have the experiment repeated: which would have been a neceſſary circumſtance, had the diſpute been about the juſt proportion of the length to the breadth. Yet I added * this note, that the bigger the angle of the priſm is, the greater will be the length in proportion to the breadth (*); not imagining, but that when he had found in any priſm the length of the image tranſverſe to the axis, he would eaſily thence conclude, that a priſm with a greater angle would make the image longer; and conſequently, that by uſing an angle great enough, he might bring it to equal, or exceed the length aſſigned by me; as indeed he might: for, by taking an angle of 70 or 75 degrees, or a little greater, he might have made the length not only five, but ſix or eight times the breadth, or more. No wonder, therefore, that Mr. *Lucas* found the image ſhorter than I did, ſeeing he tried the experiment with a leſs angle.

* In my firſt letter in Phil. Tranſ. Num. CXXI. p. 500.

The angle, indeed, which I uſed was but about 63 deg. 12 min. and his is ſet to 60 degrees; the difference of which from mine being but 3 deg. 12 min. is too little to reconcile us; but yet it will bring us conſiderably nearer together. And if this angle was not exactly meaſured, but the round number of 60 degrees ſet down by gueſs, or by a leſs accurate meaſure (as I ſuſ-

(*) See p. 353, lin. 30, 31

pect

pect by the conjectural meaſure of the refraction of his priſm, by the ratio of the ſines as 2 to 3, ſet down at the ſame time, inſtead of an experimental one), then might it be 2 or 3 degrees leſs than 60 deg. if not ſtill leſs: and all this, if it ſhould be ſo, would take away the greateſt part of the difference between us.

But however it be, I am well aſſured my own obſervation was exact enough. For I have repeated it divers times ſince the receipt of Mr. *Lucas's* letter, and that without any conſiderable difference of my obſervations, either from one another, or from what I wrote before: and that it might appear experimentally, how the increaſe of the angle increaſes the length of the image, and alſo that nobody, who has a mind to try the experiment exactly, might be troubled to procure a priſm which has an angle juſt of the bigneſs aſſigned by me, I tried the experiment with divers angles, and have ſet down my trials in the following Table; where the firſt column expreſſes the angles of two priſms which I uſed, which are meaſured as exactly as I could, by applying them to the angle of a ſector; and the ſecond column expreſſes, in inches, the length of the image made by each of thoſe angles; its breadth being two inches, its diſtance from the priſm 18 feet and 4 inches, and the breadth of the hole in the window-ſhut $\frac{1}{4}$ of an inch.

	Angles.	Lengths.		Angles.	Lengths.
The firſt priſm	56° 10′	$7\frac{1}{4}$	The ſecond priſm	54° 0′	$7\frac{1}{3}$
	60 24	$9\frac{1}{2}$		62 12	$10\frac{1}{3}$
	63 26	$10\frac{1}{3}$		63 48	$10\frac{1}{4}$

You may perceive, that the length of the images, in reſpect of the angles that made them, are ſomething greater in the ſecond priſm than in the firſt; but that was becauſe the glaſs, of which the ſecond priſm was made, had the greater refractive power.

The days in which I made theſe trials were pretty clear, but not ſo clear as I deſired; and therefore, afterwards meeting with a day as clear as I deſired, I repeated the experiment with the ſecond priſm, and found the lengths of the image made by its ſeveral angles, to be about $\frac{1}{4}$ of an inch greater than before; the meaſures being thoſe ſet down in the Table.

The

	Angles.		Lengths.
The ſecond priſm	54°	0′	$7\frac{1}{3}$
	62	12	10
	63	48	11

The reaſon of this difference, I apprehend, was, that in the cleareſt days the light of the white ſkies, which dilutes and renders inviſible the fainteſt colours at the ends of the image, is a little diminiſhed in a clear day, and ſo gives leave to the colours to appear to a great length; the ſun's light at the ſame time becoming briſker, and ſo ſtrengthening the colours, and making the faint ones at the two ends more conſpicuous: for I have obſerved, that in days ſomething cloudy, whilſt the priſm has ſtood unmoved at the window, the image would grow a little longer or a little ſhorter, accordingly as the ſun was more or leſs obſcured by thin clouds, which paſſed over it; the image being ſhorteſt while the cloud was brighteſt, and the ſun's light fainteſt. Whence it is eaſy to apprehend, that if the light of the clouds could be quite taken away, ſo that the ſun might appear ſurrounded with darkneſs, or if the ſun's light were much ſtronger than it is, the colours would ſtill appear to a greater length.

In all theſe obſervations the breadth of the image was juſt two inches. But obſerving that the ſides of the two priſms I uſed were not exactly plain, but a little convex (the convexity being about ſo much as that of a double convex-glaſs of a ſixteen or eighteen-foot teleſcope) I took a third priſm, whoſe ſides were as much concave as thoſe of the other were convex: and this made the breadth of the image to be two inches and a third part of an inch; the angles of this priſm, and the lengths of the image made by each of thoſe angles, being thoſe expreſſed in this Table.

Angles.	Lengths.
58°	$8\frac{1}{2}$
$59\frac{1}{2}$	9
$62\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{3}$

In this caſe you ſee the concave figure of the ſides of the priſm by making the rays diverge a little, cauſes the breadth of

the image to be greater in proportion to its length than it would be otherwiſe. And this I thought fit to give you notice of, that Mr. *Lucas* may examine, whether his priſm hath not this fault. If a priſm may be had with ſides exactly plain, it may do well to try the experiment with that; but it is better if the ſides be about ſo much convex as thoſe of mine are, becauſe the image will thereby become much better defined: for this convexity of the ſides does the ſame effect, as if you ſhould uſe a priſm with ſides exactly plain, and between it and the hole in the window-ſhut, place an object-glaſs of an 18 foot teleſcope, to make the round image of the ſun appear diſtinctly defined on the wall, when the priſm is taken away, and conſequently the long image made by the priſm to be much more diſtinctly defined, eſpecially at its ſtreight ſides, than it would be otherwiſe.

One thing more I ſhall add: That the utmoſt length of the image, from the fainteſt Red at one end, to the fainteſt Blue at the other, muſt be meaſured. For in my firſt letter about colours, where I ſet down the length to be five times the breadth, I called that length the utmoſt length of the image; and I meaſured the utmoſt length, becauſe I account all that length to be cauſed by the immediate light of the ſun; ſeeing the colours, as I noted above, become viſible to the greateſt length in the cleareſt days, that is, when the light of the ſun tranſcends moſt the light of the clouds. Sometimes there will happen to ſhoot out from both ends of the image a glaring light a good way beyond theſe colours; but this is not to be regarded, as not appertaining to the image. If the meaſures be taken right, the whole length will exceed the length of the ſtreight ſides by about the breadth of the image.

By theſe things ſet down thus circumſtantially, I preſume Mr. *Lucas* will be enabled to accord his trials of the experiment with mine; ſo nearly at leaſt, that there ſhall not remain any very conſiderable difference between us. For if ſome little difference ſhould ſtill remain, that need not trouble us any further, ſeeing there may be many various circumſtances which may conduce to it; ſuch as are not only the different figures of priſms, but alſo the different refractive power of glaſſes, the different diameters

of the ſun at divers times of the year, and the little errors that may happen in meaſuring lines and angles, or in placing the priſm at the window; though, for my part, I took care to do theſe things as exactly as I could. However, Mr. *Lucas* may make ſure to find the image as long or longer than I have ſet down, if he take a priſm whoſe ſides are not hollow ground, but plain, or (which is better) a very little convex, and whoſe refracting angle is as much greater than that I uſed, as that he hath hitherto tried it with is leſs; that is, whoſe angle is about 66 or 67 degrees, or, if he will, a little greater.

Concerning Mr. *Lucas's* other experiments, I am much obliged to him that he would take theſe things ſo far into conſideration, and be at ſo much pains for examining them; and I thank him ſo much the more, becauſe he is the firſt that hath ſent me an experimental examination of them. But yet it will conduce to his more ſpeedy and full ſatisfaction, if he a little change the method which he has propounded, and, inſtead of a multitude of things, try only the *Experimentum Crucis*: for it is not number of experiments, but weight to be regarded; and where one will do, what need many? Had I thought more requiſite, I could have added more. For before I wrote my firſt letter to you about colours; I had then taken much pains in trying experiments about them, and written a tractate on that ſubject; wherein I had ſet down at large the principal of the experiments I had tried: amongſt which there happened to be the principal of thoſe experiments which Mr. *Lucas* has now ſent me. And as for the experiments ſet down in my firſt letter to you, they were only ſuch as I thought convenient to ſelect out of that tractate.

But ſuppoſe thoſe had been my whole ſtore; yet Mr. *Lucas* ſhould not have grounded his diſcourſe upon a ſuppoſition of any want of experiment, till he had examincd thoſe few. For if any of thoſe be demonſtrative, they will need no aſſiſtants, nor leave room for further diſputing about what they demonſtrate.

The main thing he goes about to examine is, the different refrangibility of Light; and this I demonſtrated by the *Experimentum Crucis*. Now if this demonſtration be good, there needs no further

ther examination of the thing; if not good, the fault of it is to be ſhewn: for the only way to examine a demonſtrated propoſition is to examine the demonſtration. Let that experiment therefore be determined in the firſt place, and that which it proves be acknowledged; and then, if Mr. *Lucas* wants my aſſiſtance to unfold the difficulties which he fancies to be in the experiments he has propounded, he ſhall freely have it. At preſent I ſhall ſay nothing in anſwer to his experimental diſcourſe, but this in general; That it has proceeded partly from ſome miſunderſtanding of what he writes againſt, and partly for want of due caution in trying experiments; and that amongſt his experiments, there is one, which, when duly tried, is, next to the *Experimentum Crucis*, the moſt conſpicuous experiment, I know, for proving the different refrangibility of light, which he brings it to prove againſt.

By the poſtſcript of Mr. *Lucas's* letter, one not acquainted with what has paſſed, might think that he quotes the obſervation of the Royal Society againſt me; whereas the relation of their obſervation, which you ſent to *Liege*, contained nothing at all about the juſt proportion of the length of the image to its breadth according to the angle of the priſm, nor any thing more (ſo far as I can perceive by your laſt) than what was pertinent to the things then in diſpute, *viz.* that they found them ſucceed as I had affirmed. And therefore, ſince Mr. *Lucas* has found the ſame ſucceſs, I ſuppoſe, that when he expreſſeth, That *he much rejoiced to ſee the trials of the* R. Society *agree ſo exactly with his*, he meant only ſo far as his agreed with mine.

And becauſe I am again upon this firſt experiment, I ſhall deſire that Mr. *Lucas* will repeat it with all the exactneſs and caution that may be, regard being had to the information about it, ſet down in this letter. And then I deſire to have the length and breadth of the image, with its diſtance from the priſm, ſet down exactly in feet and inches, and parts of an inch; that I may have an opportunity to conſider what relation its length and breadth have to the ſun's diameter. For I know that Mr. *Lucas'* obſervation cannot hold, where the refracting angle of the priſm is full 60 degrees, and the day is clear, and the full length of the

colours is meaſured, and the breadth of the image anſwers to the ſun's diameter. And ſeeing I am well aſſured of the truth and exactneſs of my own obſervations, I ſhall be unwilling to be diverted by any other experiments, to have a fair end made of this in the firſt place.

P. S. I had like to have forgotten to adviſe, that the *Experimentum Crucis*, and ſuch others as ſhall be made for knowing the nature of colours, be made with priſms that refract ſo much, as to make the length of the image five times its breadth, and rather more than leſs; for otherwiſe, experiments will not ſucceed ſo plainly with others, as they have done with me.

LET-

LETTERS

RELATING TO THE

EXCITATION OF ELECTRICITY IN GLASS.

I.

EXTRACT FROM THE MINUTES

OF THE

ROYAL SOCIETY.

Dec. 9, 1675.

THE company taking particular notice, among other things, of an experiment mentioned in this hypotheſis, deſired it might be tried, *viz.* That having laid upon a table a round piece of glaſs, about two inches broad, in a braſs ring, ſo that the glaſs might be about one-third of an inch from the table, and the air between them incloſed on all ſides after the manner as if he had whelved a little ſieve upon the table: and then rubbing the glaſs briſkly, till ſome little fragments of paper, laid on the table under the glaſs, began to be attracted, and move nimbly to and fro; after he had done rubbing the glaſs, the papers would continue a pretty while in various motions; ſometimes leaping up to the glaſs, and reſting there a-while; then leaping down and reſting there, and then leaping up and down again: and this ſometimes in lines ſeeming perpendicular to the table, ſometimes in oblique ones; ſometimes alſo leaping up in one arch, and down in another, divers times together, without ſenſible reſting between; ſometimes ſkip in a bow from one part of the glaſs to another, without touching the table; and ſometimes hang by a corner, and turn often about very nimbly, as if they had been carried about in the midſt of a whirldwind; and be otherwiſe variouſly moved, every paper with a divers motion. And upon ſliding his finger on the upper ſide of the glaſs, though neither the glaſs nor incloſed air below were moved thereby, yet would the papers, as they hung under the glaſs, receive ſome new

motion,

motion, inclining this or that way, according as he moved his finger.

The experiment he propoſes to be varied with a larger glaſs placed further from the table, and to make uſe of bits of leaf-gold inſtead of papers, eſteeming that this will ſucceed much better, ſo as perhaps to make the gold riſe and fall in ſpiral lines, or whirl for a time in the air, without touching the table of glaſs.

Ordered, That this experiment be tried the next meeting.

II.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Cambridge, Dec. 14, 1675.

THE notice you gave me of the Royal Society's intending to ſee the experiment of glaſs rubbed, to cauſe various motions in bits of paper underneath, put me upon recollecting myſelf a little further about it. And then remembering, that if one edge of the braſs hoop was laid downward, the glaſs was as near again to the table, as it was when the other edge was laid downward; and that the papers played beſt when the glaſs was neareſt to the table; I began to ſuſpect, that I had ſet down a greater diſtance of the glaſs from the table, than I ſhould have done. For in ſetting down that experiment, I truſted to the idea I had of the bigneſs of the hoop; in which I might eaſily be miſtaken, having not ſeen it of a long time. And this ſuſpicion was increaſed by trying the experiment with an object-glaſs of a teleſcope placed about the third part of an inch from the table. For I could not ſee the papers play any thing near ſo well, as I had ſeen them formerly. Whereupon I looked for the old hoop with its glaſs; and at length found the hoop, the glaſs being gone. But by the hoop I perceived, that when one edge was turned down, the glaſs was almoſt the third part of an inch from the table: and when the other edge was down, which made the papers play ſo well, the glaſs was ſcarce the eighth part of an inch from the table. This I thought fit to ſignify to you, that if the experiment ſucceed not well at the diſtance I ſet down; it may be tried

at a leſs diſtance, and that you may alter my paper, and write in it an eighth part of an inch, inſtead of $\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{3}$ of an inch. The bits of paper ought to be very little, and of thin paper; perhaps little bits of the wings of a fly, or other light ſubſtances, may do better than paper. Some of the motions, as that of hanging by a corner, and twirling about, and that of leaping from one part of the glaſs to another without touching the table, happen but ſeldom; but it made me take the more notice of them.

Pray preſent my humble ſervice to Mr. *Boyle* when you ſee him, and thanks for the favour of the converſe I had with him at Spring. My conceit at trepanning the common æther, as he was pleaſed to expreſs it, makes me begin to have the better thoughts on, that he was pleaſed to entertain it with a ſmile. I am apt to think, that when he has a ſett of experiments to try in his air-pump, he will make that one to ſee how the compreſſion or relaxation of a muſcle will ſhrink or ſwell, ſoften or harden, lengthen or ſhorten it.

As for regiſtering the two diſcourſes, you may do it; only I deſire you would ſuſpend till my next letter, in which I intend to ſet down ſomething to be altered, and ſomething to be added in the hypotheſis, being in the mean while, Sir, &c.

III.

Extract from the Minutes of the ROYAL SOCIETY.

Dec. 16, 1675.

MR. NEWTON'S experiment of glaſs rubbed to cauſe various motions in bits of paper underneath was tried, but ſucceeded not in theſe circumſtances with which it was tried. This trial was made upon the reading of a letter of his dated the 14th of Dec. 1675, at *Cambridge*, wherein he gives ſome particular directions about the experiment.

Ordered, That the Secretary ſhould write again to the ſaid Mr. *Newton*, and acquaint him with the want of ſucceſs of his experiment; and deſire him, that he would ſend his own apparatus wherewith he had made it: as alſo to enquire whether he had

ſecured the papers, being moved by the air, that might ſomewhere ſteal in.

IV.

To Mr. OLDENBURG.

SIR, Dec. 21, 1675.

UPON your letter, I took another glaſs, 4 inches broad and $\frac{1}{4}$ of an inch thick, of ſuch glaſs as teleſcopes are made of; and placed it a $\frac{1}{6}$ part of an inch from the table. It was ſet in ſuch a piece of wood, as the object-glaſſes of teleſcopes uſe to be ſet: and the experiment ſucceeded well. After the rubbing was ſtill, and all was ſtill, the motion of the papers would continue ſometimes while I counted a hundred; every paper leaping up about twenty times more or leſs, and down as often. I tried it alſo with two other glaſs that belong to a teleſcope, and it ſucceeded with both. And I make no queſtion but any glaſs will do, that ſhall be excited to electric virtue; as I think any may. If you have a mind to try any of theſe glaſſes, you may have them. But I ſuppoſe, if you cannot make it do in other glaſs, you will fail in any I can ſend you. I am apt to ſuſpect the failure was in the manner of rubbing: for I have obſerved, that the rubbing variouſly, or with various things, alters the caſe. At one time I rubbed the aforeſaid great glaſs with a napkin, twice as much as I uſed to do with my gown, and nothing would ſtir; and yet preſently rubbing it with ſomething elſe, the motions ſoon began. After the glaſs has been much rubbed too, the motions are not ſo laſting; and the next day I found the motions fainter and difficulter to excite than the firſt. If the Society have a mind to attempt it any more, I can give no better advice than this: To take a new glaſs not yet rubbed (perhaps one of the old ones may do well enough after it has lain ſtill a while) and let this be rubbed, not with linen nor ſoft nappy woollen, but with ſtuff whoſe threads may rake the ſurface of the glaſs, ſuppoſe tamerine or the like doubled up in the hand; and this with a briſk motion as may be, till 100 or 150 may be counted; the glaſs lying

lying all the while over the papers. Then if nothing ſtir, rub the glaſs with the finger-ends half a ſcore times to and fro, or knock your finger-ends as often upon the glaſs: for this rubbing or knocking with your finger-ends, after the former rubbing, conduces moſt to excite the papers. If nothing ſtir yet, rub again with the cloth till 60 or 80 may be counted; and then rub or knock again with your fingers, and repeat this till the electric virtue of the glaſs be ſo far excited as to take up the papers; and then a very little rubbing or knocking now and then will revive the motions. In doing all this, let the rubbing be always done as nimbly as may be; and if the motion be circular like that of glaſs-grinders, it may be better. But if you cannot make it yet ſucceed, it muſt be let alone till I have ſome opportunity of trying it before you. As for the ſuſpicion of the paper being moved by the air, I am ſecure from that: yet in the other of drawing the leaf-gold to above a foot diſtance, which I never went about to try myſelf till the laſt week, I ſuſpect the air might raiſe the gold, and then a ſmall attraction might determine it towards the glaſs: for I could not make it ſucceed.

As for Mr. *Hook's* inſinuation, that the ſum of the hypotheſis I ſent you, had been delivered by him in his Micrography, I need not be much concerned at the liberty he takes in that kind. Yet becauſe you think it may be well, if I ſtate the difference I take to be between them, I ſhall do it as briefly as I can; and that the rather, that I may avoid the ſavour of having done any thing unjuſtifiable or unhandſome towards Mr. *Hook*. But for this end, I muſt firſt, to ſee what is his, caſt out what he has borrowed from *Des Cartes*, or others, *viz.* That there is an æthereal medium: That light is the action of this medium: That this medium is leſs implicated in the parts of ſolid bodies, and ſo moves more freely in them, and tranſmits light more readily through them; and that after ſuch a manner as to accelerate the rays in a certain proportion: That refraction ariſes from this acceleration, and has ſines proportional: That light is at firſt uniform: That colours are ſome diſturbance or modification of its rays by refraction, or reflexion: That the colours of a priſm are made by means of the quieſcent medium accelerating ſome motion of

the rays on one ſide, where Red appears, and retarding it on the other ſide, where Blue appears: and that there are but theſe two original colours or colour making modifications of light, which by their various degrees, or, as Mr. *Hook* calls it, dilutings, produce all intermediate ones. This rejected, the remainder of his hypotheſis is, that he has changed *Des Cartes* preſſing or progreſſive motion of the medium to a vibrating one; the rotation of the *globuli* to the obliquation of the pulſes; and the accelerating their rotation on the one hand, and retarding it on the other by the quieſcent medium, to produce colours, to the like action of the medium on the two ends of his pulſe for the ſame end. And having thus far modified his by the Carteſian hypotheſis, he has extended it farther to explicate the phænomena of thin plates; and added another explication of the colours of natural bodies fluid and ſolid.

This, I think, is in ſhort the ſum of his hypotheſis. And in all this, I have nothing common with him, but the ſuppoſition that æther is a medium ſuſceptible of vibrations. Of which ſuppoſition I make a very different uſe: he ſuppoſing it light itſelf; which I ſuppoſe it is not. This is as great a difference, as is between him and *Des Cartes*. But beſides this, the manner of refraction and reflexion, and the nature and production of colours in all caſes, which take up the body of my diſcourſe, I explain very differently from him; and even in the colours of thin tranſparent ſubſtances, I explain every thing after a way ſo differing from him, that the experiments, I ground my diſcourſe on, deſtroy all he has ſaid about them. And the two main experiments, without which the manner of the production of thoſe colours is not to be found out, were not only unknown to him when he wrote his Micrography, but even laſt Spring; as I underſtood in mentioning them to him. This therefore is the ſum of what is common to us; That æther may vibrate. And ſo if he thinks fit to uſe that notion of colours ariſing from the various bigneſs of pulſes, without which his hypotheſis will do nothing, his will borrow as much from my anſwer to his objections, as that I ſend you does from his Micrography.

But it may be, he means, that I have made uſe of his obſervations. And of ſome I did: as that of the inflexion of rays, for which I quoted him: that of opacity ariſing from the interſtices of the parts of bodies, which I inſiſt not on: and that of plated bodies exhibiting colours; a phænomenon, for the notice of which I thank him. But he left me to find out and make ſuch experiments about it, as might inform me of the manner of the production of thoſe colours to ground an hypotheſis on: he having given no farther inſight into it than this, that the colour depended on ſome certain thickneſs of the plate. Though what that thickneſs was at every colour, he confeſſes in his Micrography he had attempted in vain to learn. And therefore ſeeing I was left to meaſure it myſelf, I ſuppoſe he will allow me to make uſe of what I took the pains to find out. And this I hope may vindicate me from what Mr. *Hook* has been pleaſed to charge me with.

Sir, I doubt I have already troubled you with too large a letter, and ſo break off abruptly, yours, &c.

V.

Extract from the Minutes of the ROYAL SOCIETY.

Dec. 30, 1675.

—READ a leter of Mr. *Newton's*, dated *Dec.* 21, 1675, in which he aſſures, that the experiment had been repeated by him again with good ſucceſs, and gives yet further directions for the making of it ſucceſsfully.

Ordered, That theſe directions ſhould be obſerved at the next trial to be made at the next meeting of the Society.

VI.

Jan. 13, $16\frac{75}{76}$.

MR. *NEWTON'S* experiment of glaſs rubbed to cauſe various motions in bits of paper underneath, being made according to his more particular directions, did ſucceed very well. The rubbing

rubbing was made both with a ſcrubbing-bruſh made of ſhort hog's-briſtles, with a knife, the haft of a knife made with whale-bone, and with the nail of one's finger. It appeared, that touching many parts at once with a hard and rough body, did produce the effect expected.

A LET-

A

LETTER

TO THE

HON. MR. BOYLE

ON THE

CAUSE OF GRAVITATION.

Copy of a Letter from SIR I. NEWTON TO THE HON. MR. BOYLE.

HON. SIR, Feb. 28, 167⅝.

I HAVE ſo long deferred to ſend you my thoughts about the phyſical qualities we ſpoke of, that, did I not eſteem myſelf obliged by promiſe, I think I ſhould be aſhamed to ſend them at all. The truth is, my notions about things of this kind are ſo indigeſted, that I am not well ſatisfied myſelf in them; and what I am not ſatisfied in, I can ſcarce eſteem fit to be communicated to others, eſpecially in natural philoſophy, where there is no end of fanſying. But becauſe I am indebted to you, and yeſterday met with a friend, Mr. *Maulyverer*, who told me, he was going to *London*, and intended to give you the trouble of a viſit, I could not forbear to take the opportunity of conveying this to you by him.

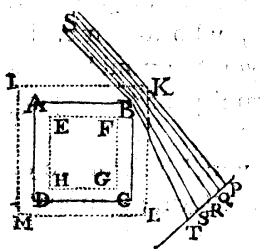
It being only an explication of qualities, which you deſire of me; I ſhall ſet down my apprehenſions in the form of ſuppoſitions, as follow.

And, firſt, I ſuppoſe that there is diffuſed through all places an æthereal ſubſtance, capable of contraction or dilatation, ſtrongly elaſtic; and, in a word, much like air in all reſpects, but far more ſubtile.

2. I ſuppoſe this Æther pervades all groſs bodies, but yet ſo as to ſtand rarer in their pores than in free ſpaces; and ſo much the

the rarer, as their pores are leſs. And this I ſuppoſe (with others) to be the cauſe, why light, incident on thoſe bodies, is refracted towards the perpendicular; why two well-poliſhed metals cohere in a receiver exhauſted of air: why quick-ſilver ſtands ſometimes up to the top of a glaſs pipe, though much higher than 30 inches; and one of the main cauſes, why the parts of all bodies cohere; alſo the cauſe of philtration, and of the riſing of water in ſmall glaſs pipes, above the ſurface of the ſtagnating water they are dipped into: for I ſuſpect the æther may ſtand rarer not only in the inſenſible pores of bodies, but even in the very ſenſible cavities of thoſe pipes. And the ſame principle may cauſe menſtruums to pervade with violence the pores of the bodies they diſſolve; the ſurrounding æther as well as the atmoſphere preſſing them together.

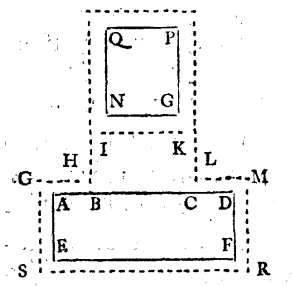
3. I ſuppoſe the rarer Æther within bodies, and the denſer without them, not to be terminated in a mathematical ſuperficies, but to grow gradually into one another: the external æther beginning to grow rarer, and the internal to grow denſer, at ſome little diſtance from the ſuperficies of the body, and running through all intermediate degrees of denſity in the intermediate ſpaces. And this may be the cauſe why light, in *Grimaldi's* experiment, paſſing by the edge of a knife, or other opake body, is turned aſide, and as it were refracted; and by that refraction makes ſeveral colours. Let ABCD be a denſe body, whether opake or tranſparent; EFGH, the outſide of the uniform æther, which is within it; IKLM, the inſide of the uniform æther, which is without it; and conceive the æther, which is between EFGH and IKLM, to run through all intermediate degrees of denſity, between that of the two uniform æthers on either ſide. This being ſuppoſed, the rays of the ſun, SB, SK, which paſs by the edge of this body, between B and K, ought, in their paſſage through the unequally denſe æther there, to receive a ply from the denſer æther, which is on that ſide towards K; and that the more, by how much they paſs nearer to the body; and thereby to be ſcattered through the



ſpace

ſpace PQRST, as by experience they are found to be. Now the ſpace between the limits EFGH and IKLM, I ſhall call the ſpace of the æther's *graduated rarity*.

4. When two bodies, moving towards one another, come near together, I ſuppoſe the æther between them to grow rarer than before; and the ſpaces of its graduated rarity to extend further from the ſuperficies of the bodies towards one another; and this by reaſon of the æther cannot move and play up and down ſo freely, in the ſtrait paſſage between the bodies, as it would before they came ſo near together.



Thus, if the ſpace of the æther's graduated rarity reach from the body ABCDEF, only to the diſtance GHLMRS, when no other body is near it; yet may it reach farther, as to IK, when another body, NGPQ, approaches: and as the other body approaches more and more, I ſuppoſe the æther between them will grow rarer and rarer.

Theſe ſuppoſitions I have ſo deſcribed, as, if I thought the ſpaces of gradual æther had preciſe limits, as is expreſſed at IKLM, in the firſt figure, and GMRS, in the ſecond: for thus I thought I could better expreſs myſelf. But really, I do not think they have ſuch preciſe limits, but rather decay inſenſibly; and, in ſo decaying, extend to a much greater diſtance, than can eaſily be believed, or need be ſuppoſed.

5. Now from the fourth ſuppoſition, it follows, that when two bodies, approaching one another, come ſo near together as to make the æther between them begin to rarify; they will begin to have a reluctance from being brought nearer together, and an endeavour to recede from one another: which reluctance and endeavour will increaſe as they come nearer together, becauſe thereby they cauſe the interjacent æther to rarify more and more: but at length, when they come ſo near together, that the exceſs of preſſure of the external æther, which ſurrounds the bodies, above that of the rarified æther, which is between them, is ſo great, as to overcome the reluctance which the bodies have from

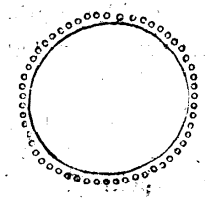
being brought together; then will that exceſs of preſſure drive them with violence together, and make them adhere ſtrongly to one another, as was ſaid in the ſecond ſuppoſition. For inſtance, in the ſecond figure, when the bodies ED and NP are ſo near together, that the ſpaces of the æther's graduated rarity begin to reach to one another, and meet in the line IK; the other between them will have ſuffered much rarification, which rarification requires much force, that is, much preſſing of the bodies together: and the endeavour, which the æther between them has to return to its former natural ſtate of condenſation, will cauſe the bodies to have an endeavour of receding from one another. But, on the other hand, to counterpoiſe this endeavour, there will not yet be any exceſs of denſity of the æther which ſurrounds the bodies, above that of the æther which is between them at the line IK. But if the bodies come nearer together, ſo as to make the æther in the mid-way-line, IK, grow rarer than the ſurrounding æther; there will ariſe, from the exceſs of denſity of the ſurrounding æther, a compreſſure of the bodies towards one another; which, when by the nearer approach of the bodies, it becomes ſo great as to overcome the aforeſaid endeavour the bodies have to recede from one other, they will then go towards one another, and adhere together. And, on the contrary, if any power force them aſunder, to that diſtance where the endeavour to recede begins to overcome the endeavour to accede, they will again leap from one another. Now, hence I conceive it is, chiefly, that a fly walks on water without wetting her feet, and conſequently without touching the water; that two poliſhed pieces of glaſs are not without preſſure brought to contact, no, not though the one be plain, the other a little convex; that the particles of duſt cannot by preſſing be made to cohere, as they would do, if they did but fully touch; that the particles of tinging ſubſtances, and ſalts diſſolved in water, do not of their own accord concrete and fall to the bottom, but diffuſe themſelves all over the liquor, and expand ſtill more, if you add more liquor to them. Alſo, that the particles of vapours, exhalations, and air, do ſtand at a diſtance from one another, and endeavour to recede from one another, as the preſſure of the incumbent atmoſphere

atmoſphere will let them: for I conceive the confuſed maſs of vapours, air, and exhalations, which we call the atmoſphere, to be nothing elſe but the particles of all ſorts of bodies, of which the earth conſiſts, ſeparated from one another, and kept at a diſtance by the ſaid principle.

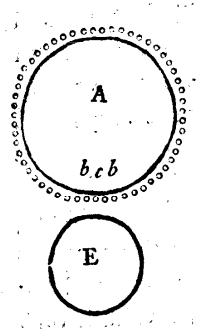
From theſe principles, the actions of menſtruums upon bodies may be thus explained. Suppoſe any tinging body, as cochineal or logwood, be put into water, ſo ſoon as the water ſinks into its pores, and wets on all ſides, any particle, which adheres to the body, only by the principle in ſecond ſuppoſition; it takes off, or at leaſt much diminiſhes the efficacy of that principle, to hold the particle to the body, becauſe it makes the æther on all ſides the particle to be of a more uniform denſity than before. And then the particle being ſhaken off by any little motion, floats in the water, and with many ſuch others, makes a tincture; which tincture will be of ſome lively colour, if the particles be all of the ſame ſize and denſity; otherwiſe of a dirty one. For the colours of all natural bodies whatever, ſeem to depend on nothing but the various ſizes and denſities of their particles: as I think you have ſeen deſcribed by me more at large in another paper. If the particles be very ſmall (as are thoſe of ſalts, vitriols, and gums) they are tranſparent; and as they are ſuppoſed bigger and bigger, they put on the ſecolours in order; Black, White, Yellow, Red; Violet, Blue, pale Green, Yellow, Orange, Red; Purple, Blue, Green, Yellow, Orange, Red, &c. as is diſcerned by the colours, which appear at the ſeveral thickneſſes of very thin plates of tranſparent bodies. Whence, to know the cauſes of the changes of colours, which are often made by the mixtures of ſeveral liquors, it is to be conſidered, how the particles of any tincture may have their ſize or denſity altered by the infuſion of another liquor.

When any metal is put into common water, the water cannot enter into its pores to act on it and diſſolve it: not that water conſiſts of too groſs parts for this purpoſe, but becauſe it is unſociable to metal: for there is a certain ſecret principle in nature, by which liquors are ſociable to ſome things, and unſociable to others. Thus water will not mix with oil, but readily with ſpirit

rit of wine, or with ſalts; it ſinks alſo into wood, which quick-ſilver will not; but quick-ſilver ſinks into metals, which water will not; ſo *aqua fortis* diſſolves ſilver, not gold; *aqua regis* gold, and not ſilver, &c. But a liquor, which is of itſelf unſociable to a body, may, by the mixture of a convenient mediator, be made ſociable: ſo molten lead, which alone will not mix with copper, or with *regulus* of *mars*, by the addition of tin, is made to mix with either: and water, by the mediation of ſaline ſpirits, will mix with metal. Now when any metal is put in water, impregnated with ſuch ſpirits as into *aqua fortis*, *aqua regis*, *ſpirit* of *vitriol*, or the like; the particles of the ſpirits, as they in floating in the water ſtrike on the metal, will, by their ſociableneſs, enter into its pores, and gather round its outſide particles, and, by advantage of the continual tremor the particles of the metal are in, hitch themſelves in by degrees between thoſe particles and the body, and looſen them from it; and the water entering into the pores together with the ſaline ſpirits, the particles of the metal will be thereby ſtill more looſed, ſo as by that motion the ſolution puts them into to be eaſily ſhaken off, and made to float in the water: the ſaline particles ſtill encompaſſing the metallic ones, as a coat or ſhell does a kernell, after the manner expreſſed in the annexed figure; in which figure I have made the particles round, though they may be cubical, or of any other ſhape.



If into a ſolution of metal, thus made, be poured a liquor abounding with particles, to which the former ſaline particles are more ſociable than to the particles of the metal (ſuppoſe with particles of ſalt of tartar); then, ſo ſoon as they ſtrike on one another in the liquor, the ſaline will adhere to thoſe particles more firmly than to the metalline ones; and by degrees be wrought off from thoſe, to encloſe theſe. Suppoſe A, a metalline particle encloſed with ſaline ones of ſpirit of nitre; and E, a particle of ſalt of tartar contiguous to two of the particles of the ſpirit of nitre *b* and *c*: and ſuppoſe the particle E is impelled by any motion towards *d*, ſo as to roll about the particle *c*, till it touch the particle *d*; the particle *b* adhering more firmly to E than to A, will be forced off from



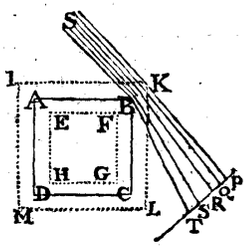
A. And by the ſame means the particle E, as it rolls about it, will tear off the reſt of the ſaline particles from A, one after another, till it has got them all, or almoſt all, about itſelf. And when the metallic particles are thus diveſted of the nitrous ones, which, as a mediator between them and the water, held them floating in it; the alcalizate ones crouding for the room, the metallic ones took up before, will preſs theſe towards one another, and make them come more eaſily together: ſo that by the motion they continually have in the water, they ſhall be made to ſtrike on one another; and then, by means of the principle in the ſecond ſuppoſition, they will cohere, and grow into cluſters, and fall down by their weight to the bottom, which is called precipitation.

In the ſolution of metals, when a particle is looſing from the body, ſo ſoon as it gets to that diſtance from it, where the principle of receding, deſcribed in the 4th and 5th ſuppoſitions, begins to overcome the principle of acceding, deſcribed in the ſecond ſuppoſition; the receding of the particle will be thereby accelerated, ſo that the particle ſhall, as it were with violence, leap from the body, and, putting the liquor into a briſk agitation, beget and promote that heat, we often find to be cauſed in ſolutions of metal. And if any particle happen to leap off thus from the body, before it be ſurrounded with water, or to leap off with that ſmartneſs as to get looſe from the water, the water, by the principle, in the 4th and 5th ſuppoſitions, will be kept off from the particle, and ſtand round about it like a ſpherical hollow arch, not being able to come to a full contact with it any more. And ſeveral of theſe particles afterwards gathering into a cluſter, ſo as by the ſame principle to ſtand at a diſtance from one another without any water between them, will compoſe a bubble. Whence I ſuppoſe it is, that, in briſk ſolutions, there uſually happens an ebullition.

This is one way of tranſmuting groſs compact ſubſtances into aereal ones. Another way is by heat. For as faſt as the motion of heat can ſhake off the particles of water from the ſurface

of it; thoſe particles, by the ſaid principle, will float up and down in the air at a diſtance both from one another, and from the particles of air, and make that ſubſtance we call vapour. Thus I ſuppoſe it is, when the particles of a body are very ſmall, (as I ſuppoſe thoſe of water are) ſo that the action of heat alone may be ſufficient to ſhake them aſunder. But if the particles be much larger, they then require the greater force of diſſolving menſtruums to ſeparate them, unleſs by any means the particles can be firſt broken into ſmaller ones. For the moſt fixed bodies, even gold itſelf, ſome have ſaid, will become volatile only by breaking their parts ſmaller. Thus may the volability, and fixedneſs of bodies, depend on the different ſizes of their parts.

And on the ſame difference of ſize may depend the more or leſs permanency of aereal ſubſtances in their ſtate of rarification. To underſtand this, let us ſuppoſe ABCD to be a large piece of any metal; EFGH, the limit of the interior uniform æther; and B, a part of the metal at the ſuperficies AB. If this part, or particle B, be ſo little, that it reaches not to the limit EF; it is plain that the æther, at its center, muſt be leſs rare than if the particle were greater: for were it greater, its center would be further from the ſuperficies AB; that is, in a place where the æther, by ſuppoſition, is rarer. The leſs the particle B therefore, the denſer the æther at its center; becauſe its center comes nearer to the edge AB, where the æther is denſer than within the limit EFGH. And if the particle were divided from the body, and removed to a diſtance from it, where the æther is ſtill denſer, the æther within it muſt proportionally grow denſer. If you conſider this, you may apprehend how, by diminiſhing the particle, the rarity of the æther within it will be diminiſhed, till between the denſity of the æther without, and the denſity of the æther within it, there be little difference; that is, till the cauſe be almoſt taken away which ſhould keep this, and other ſuch particles, at a diſtance from one another. For that cauſe, explained in the 4th and 5th



ſuppoſitions,

ſuppoſitions, was the exceſs of denſity of the external æther above that of the internal. This may be the reaſon, then, why the ſmall particles of vapours eaſily come together, and are reduced back into water; unleſs the heat, which keeps them in agitation, be ſo great as to diſſipate them as faſt as they come together: but the groſſer particles of exhalations, raiſed by fermentation, keep their aereal form more obſtinately, becauſe the æther within them is rarer.

Nor does the ſize only, but the denſity of the particles alſo, conduce to the permanency of aereal ſubſtances. For the exceſs of denſity of the æther without ſuch particles, above that of the æther within them, is ſtill greater: which has made me ſometimes think, that the true permanent air may be of a metallic original: the particles of no ſubſtances being more denſe than thoſe of metals. This I think is alſo favoured by experience; for I remember I once read in the Philoſophical Tranſactions how Mr. *Hugens*, at *Paris*, found, that the air made by diſſolving ſalt of tartar would, in two or three days time, condenſe and fall down again; but the air made by diſſolving a metal continued without condenſing or relenting in the leaſt. If you conſider then how, by the continual fermentations made in the bowels of the earth, there are aereal ſubſtances raiſed out of all kinds of bodies; all which together make the atmoſphere, and that of all theſe, the metallic are the moſt permanent, you will not perhaps think it abſurd, that the moſt permanent part of the atmoſphere, which is the true air, ſhould be conſtituted of theſe: eſpecially ſince they are the heavieſt of all other, and ſo muſt ſubſide to the lower parts of the atmoſphere, and float upon the ſurface of the earth, and buoy the lighter exhalation and vapours, to float in greateſt plenty above them. Thus, I ſay, it ought to be with the metallic exhalations, raiſed in the bowels of the earth by the action of acid menſtruums; and thus it is with the true permanent air: for this, as in reaſon it ought to be eſteemed the moſt ponderous part of the atmoſphere, becauſe the loweſt; ſo it betrays its ponderoſity, by making vapours aſcend readily in it; by ſuſtaining miſts and clouds of ſnow; and by buoying up groſs and ponderous ſmoak. The air alſo is the moſt groſs, un-

active part of the atmoſphere, affording living things no nouriſhment, if deprived of the more tender exhalations and ſpirits that float in it; and what more unactive, or remote from nouriſhment, than metallic bodies.

I ſhall ſet down one conjecture more, which came into my mind now as I was writing this letter: it is about the cauſe of gravity. For this end, I will ſuppoſe æther to conſiſt of parts differing from one another in ſubtilty by indefinite degrees: that in the pores of bodies, there is leſs of the groſſer æther in proportion to the finer, than in open ſpaces; and conſequently, that in the great body of the earth there is much leſs of the groſſer æther, in proportion to the finer, than in the regions of the air: and that yet the groſſer æther in the air affects the upper regions of the earth, and the finer æther in the earth the lower regions of the air in ſuch a manner, that, from the top of the air to the ſurface of the earth, and again from the ſurface of the earth to the center thereof, the æther is inſenſibly finer and finer. Imagine, now, any body ſuſpended in the air, or lying on the earth; and the æther being, by the hypotheſis, groſſer in the pores which are in the upper parts of the body, than in thoſe which are in the lower parts; and that groſſer æther, being leſs apt to be lodged in thoſe pores, than the finer æther below; it will endeavour to get out, and give way to the finer æther below, which cannot be, without the bodies deſcending to make room above for it to go out into.

From this ſuppoſed gradual ſubtilty of the parts of the æther, ſome things above might be further illuſtrated, and made more intelligible; but by what has been ſaid, you will eaſily diſcern whether, in theſe conjectures, there be any degree of probability; which is all I aim at. For my own part, I have ſo little fancy to things of this nature, that, had not your encouragement moved me to it, I ſhould never, I think, have thus far ſet pen to paper about them. What is amiſs, therefore, I hope you will the more eaſily pardon in yours, &c.

D E

NATURA ACIDORUM.

DE

NATURA ACIDORUM.

ACIDORUM particulæ ſunt aqueis craſſiores, & propterea minùs volatiles; at terreſtribus multo ſubtiliores, & propterea multo minùs fixæ. Vi magnâ attractivâ pollent, & in hâc vi conſiſtit earum activitas; quâ & corpora diſſolvunt, & organa ſenſuum agitant & pungunt. Mediæ ſunt naturæ inter aquam & corpora, & utraque attrahunt. Per vim ſuam attractivam congregantur circum particulas corporum, ſeu lapideas ſeu metallicas, iiſque undique adhærent arctiſſimè, ut ab iiſdem deinceps per diſtillationem vel ſublimationem vix poſſint ſeparari; attractæ verò & undique congregatæ elevant disjungunt ac diſcutiunt particulas corporum ab invicem; id eſt, corpora diſſolvunt; & per vim attractionis, quâ ruunt in corpora, commovent fluidum, & calorem excitant; particulaſque nonnullas adeo diſcutiunt, ut in aërem convertant, & bullulas generant. Et hæc eſt ratio diſſolutionis & fermentationis violentæ. Acidum verò, attrahendo aquam æquè ac particulas corporum, efficit ut particulæ diſſolutæ promptè miſceantur cum aquâ, eique innatent ad modum ſalium. Et quemadmodum globus terræ per vim gravitatis, attrahendo aquam fortiùs quàm corpora leviora, efficit ut leviora aſcendant in aquâ & fugiant in terra; ſic particulæ ſalium, attrahendo aquam, fugant ſe mutuò, & ab invicem quàm maximè recedendo, per aquam totam expanduntur.

Particulæ

Particulæ ſalis Alkali ex terreis et acidis ſimiliter unitis conſtant; ſed hæ acidæ vi magnâ attractivâ pollent, ut per ignem non ſeparentur à ſale, utque metalla diſſoluta præcipitent, attrahendo ab ipſis particulas acidas quibus diſſolvebantur.

Si particulæ acidæ in minori proportione cum terreſtribus jungantur, tam arctè retinentur à terreſtribus, ut ab iis ſupprimi ac occultari videantur; neque enim ſenſum jam pungunt neque attrahunt aquam; ſed corpora dulcia, & quæ cum aquâ ægrè miſcentur, hoc eſt pinguia componunt: ut fit in Mercurio dulci, ſulphure communi, Lunâ Corneâ, & Cupro, quod Mercurius ſublimatus corroſit. Ab acidi verò ſic ſuppreſſi vi attractivâ fit, ut pinguia corporibus propè univerſis adhæreant, & flammam facilè concipiant; ſi modò acidum calefactum inveniat alias corporum in fumo accenſorum particulas, quas fortiùs attrahat quàm proprias: ſed & acidum in ſulphureis ſuppreſſum, fortiùs attrahendo particulas aliorum corporum, ſcilicet terreas, quàm proprias, fermentationem brutam & naturalem ciet, & fovet, uſque ad putrefactionem compoſiti; quæ putrefactio ſita eſt in eo, quòd Acidi *particulæ* fermentationem diu foventes, tandem in interſtitia minima et partes primæ compoſitionis interjacentia ſeſe inſinuant, intimèque iis partibus unitæ mixtionem novam efficiunt, non amovendam nec cum priore commutandam.

Cogitationes variæ.

Flamma eſt fumus candens, differtque à fumo, ut ferrum rubens ab ignito ſed non rubente.

Calor eſt agitatio partium quaquaverſum.

Nihil eſt abſolutè quieſcens ſecundum partes ſuas, & ideò frigidum, præter atomos, vacui ſcilicet expertes.

Terra augetur aquâ in eam converſâ, et omnia in aquam reduci poſſunt.

Nitrum abit diſtillatione magnam partem in ſpiritum acidum, relictâ terrâ; quia acidum nitri attrahit phlegma, et idcirco ſimul aſcendunt, conſtituuntque ſpiritum. At nitrum carbone accenſum magnam partem abit in Sal Tartari, quia ignis eo modo applicatus partes acidi & terræ in ſe impingit, fortiúſque unit.

Spiritus ardentes ſunt Olea cum phlegmate, per fermentationem, ſ. ſ. unita.

Tinctura Cochinellæ, cum ſpiritu Vini facta, in aquæ magnam molem immiſſa, parvâ licet doſi, totam tamen aquam inficit; ſcilicet quia particulæ Cochinellæ magis attrahuntur ab aquâ, quàm à ſe mutuò.

Aqua non habet magnam vim diſſolvendi, quia pauco acido gaudet; acidum enim dicimus, quod multum attrahit & attrahitur. Videmus nempe ea quæ in aqua ſolvuntur, lentè & ſine efferveſcentiâ ſolvi; at ubi eſt attractio fortis, & particulæ menſtrui undique attrahuntur à particulâ metalli; vel potius particula metalli undique attrahitur à particulis menſtrui, hæ illam abripiunt, & circumſiſtunt; hoc eſt, metallum corrodunt; hæ eædem particulæ ſenſorio applicatæ ejus partes eodem modo divellunt, doloremque inferunt. Acidæ appellantur relictâ ſcilicet terrâ ſubtili cui adhærebant, ob majorem attractionem ad liquidum linguæ, &c.

In omni ſolutione per menſtruum, particulæ ſolvendæ magis attrahuntur à partibus menſtrui quàm à ſe mutuò.

In omni fermentatione eſt acidum ſuppreſſum, quod coagulat præcipitando.

Oleum, cum nimis magnâ mole phlegmatis intimè mixtum, fit ſalinum quiddam, & ſic acetum conſtituit; hîc etiam Tartari, ſeu terræ admiſtæ, habenda eſt ratio.

Mercurius attrahitur, i. e. corroditur ab acidis; & ſicut pondere obſtructiones tollit, ita vi attractrice acida infringit.

Mercurius eſt volatilis, & facilè elevatur calore; quia ejus particulæ ultimæ compoſitionis ſunt parvæ, & facilè ſeparantur, ſeparatæque ſeſe fugant; ut fit in particulis vaporis fluidorumque rarefactorum.

Aqua comprimi non poteſt; quia ejus particulæ jamjam ſe tangunt: ut ſi ſe tangerent particulæ aëris (comprimi aer poteſt quia ipſius particulæ nondum ſe tangunt) aer evaderet in marmor. Sequitur ex Prop. XXIII. Lib. 2. Princip. Philoſ.

Aurum particulas habet ſe mutuò trahentes; harum ſumma vocentur primæ compoſitionis; harum ſummarum ſummæ, ſecundæ, &c.

Poteſt Mercurius, poteſt Aqua Regis poros pervadere, qui particulas ultimæ compoſitionis interjacent, at non alios. Si poſſet menſtruum alios illos pervadere, vel ſi auri partes primæ & ſecundæ compoſitionis poſſent ſeparari, fieret aurum fluidum & malleabile. Si aurum fermenteſcere poſſet, in aliud quodvis corpus poſſet transformari.

Viſciditas eſt, vel ſolùm defectus fluiditatis (quæ ſita eſt in partium parvitate & ſic ſeparabilitate, intellige partes ultimæ compoſitionis) vel defectus lubricitatis, ſeu lævoris, partes unas ſupra alias labi impediens. Hujus viſciditatis acidum ſæpe cauſa eſt, ſæpe ſpiritus alius lubricus terræ junctus; ut Oleum Terebinthinæ, capiti ſuo mortuo redditum, fit tenax.

Ratio cur charta oleo inuncta tranſitum oleo, non Aquæ, concedat, eſt, quia aqua Oleo non miſcetur, ſed fugatur ab eo.

Acidum primigenium videtur conſtare particulis ſphæricis, hoc eſt ſummè attractivis; & particulæ hæ ſunt majores aquæ, & minores terræ partibus, ſeu inter eas mediæ & utrarumque attractrices.

Cùm acidæ partes, minores ſcilicet, aliquod diſſolvunt, id faciunt, quia partem rei ſolvendæ includunt undique, utpote majorem quâlibet acidi partium.

TABULÆ DUÆ

CALORUM ALTERA

ALTERA REFRACTIONUM.

I.

TABULA QUANTITATUM

ET

GRADUUM CALORIS.

Colorum partes æquales.	Colorum gradus.	Calorum Deſcriptiones et Signa.
		CALOR aëris hyberni ubi aqua incipit gelu rigeſcere. Innoteſcit hic calor accuratè locando Thermometrum in nive compreſſâ, quo tempore gelu ſolvitur.
0, 1, 2.		Calores aëris hyberni.
2, 3, 4.		Calores aëris verni & autumnalis.
4, 5, 6.		Calores aëris æſtivi.
6.		Calor uſitatus aëris meridiani circa menſem Julium.
12.	1	Calor maximus quem Thermometer ad contactum corporis humani concipit. Idem circiter eſt calor avis ova incubantis.
14 $\frac{3}{11}$	1$\frac{1}{4}$	Calor balnei propè maximus quem quis, manu immerſâ & conſtanter agitatâ, diutiùs perferre poteſt. Idem ferè eſt calor ſanguinis recens effuſi.
17	1$\frac{1}{4}$	Calor balnei maximus quem quis, manu immerſâ & immobili manente, diutiùs perferre poteſt.
20 $\frac{2}{11}$	1$\frac{3}{4}$	Calor balnei quo cera innatans & liquefacta defervescendo rigeſcit, & diaphaneitatem amittit.

24	2	Calor balnei quo cera innatans incaleſcendo liqueſcit, & in continuo fluxu ſine ebullitione conſervatur.
28 $\frac{6}{11}$	$2\frac{1}{4}$	Calor mediocris inter calores quo cera liqueſcit, & aqua ebullit.
34	$2\frac{1}{2}$	Calor quo aqua vehementer ebullit; & miſtura duarum partium plumbi, trium partium ſtanni & quinque partium biſmuti deferveſcendo rigeſcit. Incipit aqua ebullire calore partium 33, & calorem partium pluſquam $34\frac{1}{2}$ ebulliendo vix concipit. Ferrum verò deferveſcens calore partium 35 vel 36, ubi aqua calida, & 37, ubi frigida in ipſum guttatim incidit, deſinit ebullitionem excitare.
40 $\frac{4}{11}$	$2\frac{3}{4}$	Calor minimus quo miſtura unius partis plumbi, quatuor partium ſtanni, & quinque partium biſmuti incaleſcendo liqueſcit, & in continuo fluxu conſervatur.
48	3	Calor minimus quo miſtura æqualium partium ſtanni & biſmuti liqueſcit. Hæc miſtura calore partium 47 deferveſcendo coagulatur.
57	$3\frac{1}{4}$	Calor quo miſtura duarum partium ſtanni, & unius partis biſmuti funditur, ut & miſtura trium partium ſtanni & duarum plumbi: ſed miſtura quinque partium ſtanni & duarum partium biſmuti hoc calore deferveſcendo rigeſcit. Et idem facit miſtura æqualium partium plumbi & biſmuti.
68	$3\frac{1}{2}$	Calor minimus quo miſtura unius partis biſmuti, & octo partium ſtanni funditur. Stannum per ſe funditur calore partium 72, & deferveſcendo rigeſcit calore partium 70.
81	$3\frac{3}{4}$	Calor quo biſmutum funditur; ut & miſtura quatuor partium plumbi, & unius partis ſtanni. Sed miſtura quinque partium plumbi, & unius partis ſtanni, ubi fuſa eſt & deferveſcit, in hoc calore rigeſcit.
96	4	Calor minimus quo plumbum funditur. Plumbum incaleſcendo funditur calore partium 96 vel 97, & deferveſcendo rigeſcit calore partium 95.

Calor

114	$4\frac{1}{4}$	Calor quo corpora ignita, deferveſcendo, penitus deſinunt in tenebris nocturnis lucere; & viciſſim, incaleſcendo, incipiunt in iiſdem tenebris lucere, ſed luce tenuiſſimâ quæ ſentiri vix poſſit. Hoc calore liqueſcit miſtura æqualium partium ſtanni & reguli martis; & miſtura ſeptem partium biſmuti & quatuor partium ejuſdem Reguli deferveſcendo rigeſcit.
136	$4\frac{1}{4}$	Calor quo corpora ignita in tenebris nocturnis candent, in crepuſculo verò neutiquam. Hoc calore tum miſtura duarum partium reguli martis & unius partis biſmuti, tum etiam miſtura quinque partium reguli martis & unius partis ſtanni deferveſcendo rigeſcit. Regulus per ſe rigeſcit calore partium 146.
161	$4\frac{3}{4}$	Calor quo corpora ignita in crepuſculo, proximè ante ortum ſolis, vel poſt occaſum ejus, manifeſtò candent; in clarâ verò diei luce neutiquam, aut non niſi perobſcurè.
192	5	Calor prunarum in igne parvo culinari, ex carbonibus foſſilibus bituminoſis conſtructo, & abſque uſu ſollium ardente. Idem eſt calor ferri, in tali igne quantum poteſt candentis. Ignis parvi culinaris, qui ex lignis conſtat, calor paulo major eſt; nempe partium 200 vel 210. Et ignis magni major adhuc eſt calor; præſertim ſi ſollibus cieatur.

In hujus Tabulæ columnâ primâ habentur gradus caloris in proportione arithmeticâ; computum inchoando à calore, quo aqua incipit gelu rigeſcere, tanquam ab infimo caloris gradu, ſeu communi termino caloris & frigoris; & ponendo calorem externum corporis humani eſſe partium duodecim. In ſecundâ columnâ habentur gradus caloris in ratione geometricâ; ſic ut ſecundus gradus ſit duplo major primo, tertius item ſecundo, & quartus tertio, & primus ſit calor externus corporis humani ſenſibus æquatus. Patet autem per hanc Tabulam, quòd calor aquæ bullientis ſit ferè triplo major quàm calor corporis humani; & quòd calor ſtanni liqueſcentis ſit ſextuplo major, & calor plumbi liqueſcentis octuplo major, & calor Reguli liqueſcentis duodecuplo ma-

jor, & calor ordinarius ignis culinaris ſexdecim vel ſeptemdecim vicibus major, quàm calor idem corporis humani.

Conſtructa fuit hæc Tabula ope Thermometri & Ferri candentis. Per Thermometrum inveni menſuram calorum omnium uſque ad calorem quo ſtannum funditur, & per ferrum calefactum inveni menſuram reliquorum. Nam calor quem ferrum calefactum corporibus frigidis ſibi contiguis dato tempore communicat, hoc eſt, calor quem ferrum dato tempore amittit, eſt ut calor totus ferri. Ideoque ſi tempora refrigerii ſumantur æqualia, calores erunt in ratione geometricâ, & propterea per tabulam logarithmorum facilè inveniri poſſunt.

Primùm igitur per Thermometrum, ex oleo lini conſtructum, inveni, quòd ſi oleum, ubi Thermometer in nive liqueſcente locabatur, occupabat ſpatium partium 10000; idem oleum, calore primi gradûs ſeu corporis humani rarefactum, occupabat ſpatium 10256; & calore aquæ jamjam ebullire incipientis, ſpatium 10705; & calore aquæ vehementer ebullientis, ſpatium 10725; & calore ſtanni liquefacti deferveſcentis, ubi incipit rigeſcere, & conſiſtentiam amalgamatis induere, ſpatium 11516; & ubi omnino rigeſcit, ſpatium 11496. Igitur oleum rarefactum fuit ad dilatatum in ratione 40 ad 39, per calorem corporis humani; in ratione 15 ad 14, per calorem aquæ bullientis; in ratione 15 ad 13, per calorem ſtanni deferveſcentis, ubi incipit coagulari & rigeſcere; & in ratione 23 ad 20, per calorem quo ſtannum deferveſcens omnino rigeſcit. Rarefactio aëris æquali calore fuit decuplo major quàm rarefactio olei; & rarefactio olei quaſi quindecim vicibus major quàm rarefactio ſpiritûs vini. Et ex his inventis, ponendo calores olei ipſius rarefactioni proportionales, & pro calore corporis humani ſcribendo partes 12, prodiit calor aquæ ubi incipit ebullire, partium 33; & ubi vehementiùs ebullit, partium 34; & calor ſtanni, ubi vel liqueſcit, vel deferveſcendo incipit rigeſcere, & conſiſtentiam amalgamatis induere, prodiit partium 72; & ubi deferveſcendo rigeſcit, & induratur, partium 70.

His cognitis, ut reliqua inveſtigarem, calefeci ferrum ſatis craſſum, donec ſatis canderet; & ex igne cum forcipe etiam candente exemptum locavi ſtatim in loco frigido, ubi ventus conſtanter ſpirabat; & huic imponendo particulas diverſorum metallorum, & aliorum

aliorum corporum liquabilium, notavi tempora refrigerii; donec particulæ omnes, amiſſâ fluiditate, rigeſcerent, & calor ferri æquaretur calori corporis humani. Deinde ponendo quòd exceſſus calorum ferri & particularum rigeſcentium ſupra calorem atmoſphæræ, Thermometro inventum, eſſent in progreſſione geometricâ, ubi tempora ſunt in progreſſione arithmeticâ, calores omnes innotuere. Locavi autem ferrum, non in aëre tranquillo, ſed in vento uniformiter ſpirante; ut aër à ferro calefactus ſemper abriperetur à vento, & aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu ſuccederet. Sic enim aëris partes æquales æqualibus temporibus calefactæ ſunt, & calorem conceperunt calori ferri proportionalem.

Calores autem ſic inventi eandem habuerunt rationem inter ſe cum caloribus per Thermometrum inventis; & propterea rarefactiones olei ipſius caloribus proportionales eſſe rectè aſſumpſimus.

II.

Tabula Refractionum Siderum ad Altitudines apparentes.

Alt. Appar. deg.	m.	Refractio. m.	sec.	Alt. Appar. deg.	Refractio. m.	sec.	Alt. Appar. deg.	Refractio. m.	sec.
0	0	33	45	16	3	4	46	0	52
0	15	30	24	17	2	53	47	0	50
0	30	27	35	18	2	43	48	0	48
0	45	25	11	19	2	34	49	0	47
1	0	23	7	20	2	26	50	0	45
1	15	21	20	21	2	18	51	0	44
1	30	19	46	22	2	11	52	0	42
1	45	18	22	23	2	5	53	0	40
2	0	17	8	24	1	59	54	0	39
2	30	15	2	25	1	54	55	0	38
3	0	13	20	26	1	49	56	0	36
3	30	11	57	27	1	44	57	0	35
4	0	10	48	28	1	40	58	0	34
4	30	9	50	29	1	36	59	0	32
5	0	9	2	30	1	32	60	0	31
5	30	8	21	31	1	28	61	0	30
6	0	7	45	32	1	25	62	0	28
6	30	7	14	33	1	22	63	0	27
7	0	6	47	34	1	19	64	0	26
7	30	6	22	35	1	16	65	0	25
8	0	6	0	36	1	13	66	0	24
8	30	5	40	37	1	11	67	0	23
9	0	5	22	38	1	8	68	0	22
9	30	5	6	39	1	6	69	0	21
10	0	4	52	40	1	4	70	0	20
11	0	4	27	41	1	2	71	0	19
12	0	4	5	42	1	0	72	0	18
13	0	3	47	43	0	58	73	0	17
14	0	3	31	44	0	56	74	0	16
15	0	3	17	45	0	54	75	0	15

DE

PROBLEMATIS BERNOULLIANIS.

PRÆNOBILI VIRO

D. CAROLO MONTAGUE

Armig. Scacarii Cancellari, & Societatis Regiæ Præsidi.

Jan. 30, 169⅝.

Accepi, Vir Ampliſſime, heſterno die duo Problematum, à JOHANNE BERNOULLIO Mathematicorum acutiſſimo propoſitorum, exemplaria, *Groningæ* edita in hæc verba

Acutiſſimis qui toto Orbe florent Mathematicis S. P. D.

JOHANNES BERNOULLI, MATH. P. P.

CUM compertum habeamus, vix quicquam eſſe, quod magis excitet generoſa ingenia ad moliendum quod conducit augendis ſcientiis, quàm difficilium pariter & utilium quæſtionum propoſitionem; quarum enodatione, tanquam ſingulari, ſiquâ aliâ viâ, ad nominis claritatem perveniant ſibique apud poſteritatem æterna extruant monumenta: ſic me nihil gratius orbi mathematico facturum

rum ſperavi, quàm ſi, imitando exemplum tantorum virorum, MERSENNI, PASCALII, FERMATII, *præſertim recentis illius anonymi ænigmatiſtæ* Florentini *, *aliorumque qui idem ante me fecerunt, præſtantiſſimis hujus ævi analyſtis proponerem aliquod Problema, quo, quaſi lapide Lydio, ſuas methodos examinare, vires intendere, &, ſi quid invenirent, nobiſcum communicare poſſent; ut quiſque ſuas exinde promeritas laudes à nobis, publicè id profitentibus, conſequeretur.*

Factum autem illud eſt ante ſemeſtre in Actis Lipſ. m. Jun. *pag.* 269, *ubi tale problema propoſui, cujus utilitatem cum jucunditate conjunctam videbunt omnes, qui cum ſucceſſu ei ſe applicabunt. Sex menſium ſpatium à primâ publicationis die Geometris conceſſum eſt, intra quod, ſi nulla ſolutio prodiret in lucem, me meam exhibiturum promiſi. Sed ecce elapſus eſt terminus, & nihil ſolutionis comparuit; niſi quod Celeb.* LEIBNITIUS, *de profundiore geometriâ præclarè meritus, me per litteras certiorem fecerit, ſe jam feliciter diſſolviſſe nodum pulcherrimi hujus, uti vocabat, & inauditi antea problematis; inſimulque humaniter rogavit, ut præſtitutum limitem ad proximum paſcha extendi paterer; quo interea apud Gallos, Italóſque, idem illud publicari poſſet, nulluſque adeò ſupereſſet locus ulli de anguſtiâ termini querelæ. Quam honeſtam petitionem non ſolùm induſi, ſed ipſe hanc prorogationem promulgare decrevi; viſurus num qui ſint, qui nobilem hanc & arduam quæſtionem aggreſſuri, poſt longum temporis intervallum, tandem enodationis compotes fierent. Illorum interim in gratiam, ad quorum manus* Acta Lipſienſia *non perveniunt, propoſitionem hic repeto.*

* *Vincentius* VIVIANI ann. 1692. ænigma geometricum propoſuit, de miro opificio Teſtudinis quadrabilis hemiſphericæ; videantur *Acta Eruditorum* hujus anni, menſe Junio, *pag.* 274, vel Vita VIVIANI in Hiſt. Acad. Reg. Scient. Pariſ. ann. 1703.

PROB.

PROB. I.

Determinare lineam curvam data duo puncta, in diverſis ab horizonte diſtantiis & non in eâdem rectâ verticali poſita, connectentem, ſuper quâ mobile, propriâ gravitate decurrens & à ſuperiori puncto moveri incipiens, citiſſimè deſcendat ad punctum inferius.

Senſus problematis hic eſt: ex infinitis lineis, quæ duo illa data puncta conjungunt, vel ab uno ad alteram duci poſſunt, eligatur illa, juxta quam ſi incurvetur lamina tubi canaliſve formam habens, ut ipſi impoſitus globulus & liberè dimiſſus, iter ſuum ab uno puncto ad alterum emetiatur tempore breviſſimo.

Ut verò omnem ambiguitatis anſam præcaveamus; ſcire B. L. volumus, nos hìc admittere GALILÆI *hypotheſin, de cujus veritate, ſepoſitâ reſiſtentiâ, jam nemo eſt ſaniorum geometrarum qui ambigat;* velocitates ſcilicet acquiſitas gravium cadentium eſſe in ſubduplicatâ ratione altitudine emenſarum: *quamquam aliàs noſtra ſolvendi methodus univerſaliter ad quamvis aliam hypotheſin ſeſe extendat.*

Cùm itaque nihil obſcuritatis ſuperſit, obnixè rogamus omnes & ſingulos hujus ævi geometras, accingant ſe promptè, tentent, diſcutiant quicquid in extremo ſuarum methodorum receſſu abſconditum tenent. Rapiat qui poteſt præmium, quod ſolutori paravimus; non quidem auri, non argenti ſummam, quo abjecta tantùm & mercenaria conducuntur ingenia, à quibus ut nihil laudabile, ſic nihil, quod ſcientiis fructuoſum, expectamus; ſed cùm virtus ſibi ipſi ſit merces pulcherrima, atque gloria immenſum habeat calcar, offerimus præmium, quale convenit ingenui ſanguinis viro, conſertum ex honore, laude, & plauſu; quibus magni noſtri Apollinis perſpicacitatem, publicè & privatim, ſcriptis & dictis coronabimus, condecorabimus, & celebrabimus.

Quòd ſi verò feſtum paſchatis præterierit, nemine deprehenſo, qui quæſitum noſtrum ſolverit; nos quæ ipſi invenimus publico non invidebimus: incomparabilis enim LEIBNITIUS *ſolutiones tum ſuam, tum noſtram, ipſi jam pridem commiſſam, protinus, ut ſpero, in lucem emittet; quas ſi geometræ, ex penitiori quodam fonte petitas, perſpexerint,*

perſpexerint, nulli dubitamus, quin anguſtos vulgaris geometriæ limites agnoſcant, noſtraque proin inventa tanto pluris faciant, quanto pauciores eximiam noſtram quæſtionem ſoluturi extiterint, etiam inter illos ipſos, qui per ſingulares, quas tantoperè commendant, methodos, interioris geometriæ latibula non ſolùm intimè penetrâſſe, ſed etiam ejus pomœria, theorematibus ſuis aureis, nemini, ut putabant, cognitis, ab aliis tamen jam longè priùs editis, mirum in modum extendiſſe gloriantur.

PROBLEMA ALTERUM PURE GEOMETRICUM.

Quod priori ſubnectimus, & Strenæ loco Eruditis proponimus.

Ab EUCLIDIS *tempore vel tyronibus notum eſt, ductam utcunque à puncto dato rectam lineam, à circuli peripheriâ ita ſecari, ut rectangulum duorum ſegmentorum, inter punctum datum & utramque peripheriæ partem interceptorum, ſit eidem conſtanti perpetuò æquale. Primus ego oſtendi, in eodem* Actorum Jun. *pag.* 265, *hanc proprietatem infinitis aliis curvis convenire, illamque adeò circulo non eſſe eſſentialem: arreptâ hinc occaſione, propoſui geometris determinandam Curvam, vel Curvas, in quibus non rectangulum, ſed ſolidum ſub uno & quadrato alterius ſegmentorum æquetur ſemper eidem: ſed à nemine hactenus ſolvendi modus prodiit; exhibebimus eum, quandocumque deſiderabitur. Quoniam autem non niſi per Curvas tranſcendentes quæſito ſatisfacimus; en aliud, cujus ſolutio per merè algebraicas in noſtrâ eſt poteſtate.*

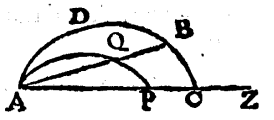
Quæritur Curva ejus proprietatis, ut duo illa ſegmenta, ad quamcunque potentiam datam elevata & ſimul ſumta, faciant ubique unam eandemque ſummam.

Caſum ſimpliciſſimum, exiſtente ſcilicet numero potentiæ 1, *ibidem in* Actis, *pag.* 266, *jam ſolutum dedimus; generalem verò ſolutionem, quam etiamnum premimus, analyſis eruendam relinquimus.*

Dabam Groningæ, ipſis Cal. Jan. 1697.

HACTENUS BERNOULLIUS. *Problematum verò ſolutiones ſunt bujuſmodi.*

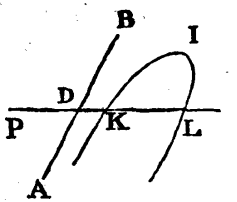
A dato



A dato puncto A, ducatur recta infinita, APCZ, horizonti parallela; & ſuper eâdem rectâ deſcribatur, tum Cyclois quæcunque, AQP, rectæ AB ductæ, & ſi opus ſit productæ, occurrens in puncto Q, tum cyclois alia ABC; cujus baſis, & altitudo ſit ad prioris baſem & altitudinem reſpectivè, ut AB ad AQ. Et hæc cyclois noviſſima tranſibit per punctum B, & erit curva illa linea, in quâ grave à puncto A ad punctum B vi gravitatis ſuæ citiſſimè perveniet. Q. E. I.

PROBLEMA II.

Problema alterum, ſi rectè intellexi (nam, quæ in *Actis Lipſ.* ab auctore citantur ad id ſpectantia nondum vidi) ſic proponi poteſt. Quæritur Curva KIL eâ lege, ut ſi recta PKL à dato quodam puncto P, ceu polo, utcunque ducatur, & eidem curvæ in punctis duobus K, & L occurrat; poteſtates duorum ejus ſegmentorum, PK, & PL, à dato illo puncto P ad occurſus illos ductorum, ſi ſint æquè altæ, (id eſt, vel quadrata, vel cubi, vel quadrato-quadrata, &c.) datam ſummam PKq + PLq vel PK *cub.* + PL *cub.* &c. (in omni rectæ illius poſitione) conficiant.



SOLUTIO.

Per datum quodvis punctum, A, ducatur recta quævis infinita poſitione data, ADB, rectæ mobili PKL occurrens in D: & nominentur AD, x; & PK, vel PL, y; ſintque Q, & R quantitates ex quantitatibus quibuſcunque datis, & quantitate x quomodocunque conſtantes, & relatio inter x, & y, definiatur per hanc æquationem $yy + Qy + R = 0$. Et ſi R ſit quantitas data, rectangulum ſub ſegmentis PK & PL dabitur. Si Q ſit quantitas data, ſumma ſegmentorum illorum, ſub ſignis propriis conjunctorum, dabitur (a). Si $QQ - 2R$ datur, ſumma quadratorum (PKq + PLq) dabitur. Si $Q^3 - 3QR$ data ſit quantitas, ſumma cuborum (PK *cub.* + PL *cub.*) dabitur. Si $Q^4 - 4QQR + 2RR$ data ſit quantitas, ſumma quadrato-

(a) Sequuntur hæc ex notiſſimo Theoremate Girardi de coefficientium procreatione. Vide Arith. Vniv. C. XVIII.

quadratorum ($PKqq + PLqq$) dabitur. Et ſic deinceps in infinitum (a). Efficiatur itaque ut R, Q, QQ + 2R, Q3 + 3QR, &c. datæ ſint quantitates, & problema ſolvetur. Q. E. F.

Ad eundem modum Curvæ inveniri poſſunt, quæ tria, vel plura abſcindent ſegmenta, ſimiles proprietates habentia. Sit æquatio $y^3 + Qyy + Ry + S = 0$, ubi Q, R, & S, quantitates ſignificant ex quantitatibus quibuſcunque datis, & quantitate x utcunque conſtantes, & Curva abſcindet ſegmenta tria. Et ſi S data ſit quantitas contentum ſolidorum illorum trium dabitur. Si Q ſit quantitas data ſumma trium illorum dabitur. Si QQ − 2R ſit data quantitas, ſumma quadratorum ex tribus illis dabitur.

IV.

De ratione temporis, quo grave labitur per rectam data duo puncta conjungentem ad tempus breviſſimum, quo, vi gravitatis, tranſit ab horum uno ad alterum per arcum Cycloidis.

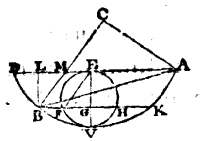
THEOREMA.

Si in Cycloide AVD, *cujus baſis* AD *eſt horizonti parallela, vertice* V *deorſum ſpectante, ex* A *ducatur utcunque recta* AB Cycloidi *occurrens in* B, *ex quo ducatur recta* BC *curvæ* Cycloidis BD *in* B *normalis, ad quam ex* A *demittatur perpendicularis recta* AC: *dico tempus, quo grave è quiete cadens ex* A, *vi ſuæ gravitatis, decurrit rectam* AB, *eſſe ad tempus, quo percurrit curvam* AVB, *ſicut recta* AB *ad rectam* AC.

Per B ducatur BL, parallela Cycloidis axi VE; & BK, baſi AD parallela occurrens axi in G, &, circulo ſuper diametrum EV deſcripto, in F & H; Cycloidi denique in K. Ducatur recta BF, quæ, ex Cycloidis naturâ, parallela eſt rectæ BC. Unde BM eſt æqualis EF, & EM æqualis BF; quæ, propter Cycloidem, æquatur arcui VF; & proinde AM eſt æqualis arcui EHVF.

Per Prop. XXV. Par. II. *Horologii Oſcillatorii* HUGENII, tempus, quo grave è quiete cadens percurrit AV, eſt ad tempus caſûs per EV, ut ſemi-circumferentia ad diametrum; &, per dictæ partis propoſitionem ultimam, tempus, quo grave percurrit VB, poſt decurſam AV (nempe æquale tempori, quo grave percurrit KV, poſt

(a) Patent hæc per formulas Girardi pro conſummatione poteſtatum è radicibus æquationum ncognitis. Vide Arithmet. Univ. C. XVIII. Not. b.



poſt decurſam AK), eſt ad tempus lapſûs per AV, ſicut arcus VF ad ſemi-circumferentiam; adeòque ad tempus caſûs per EV, ſicut FV ad diametrum, quare tempus, quo grave percurrit curvam AVB, eſt ad tempus caſûs per EV, ſicut arcus EHVF, ad diametrum EV. Sed, tempus caſûs per EV, eſt ad tempus caſûs per LB (ſive EG), ſicut EV ad EF. Igitur, ex æquo, tempus, quo grave percurrit AVB, eſt ad tempus caſûs per LB, ſicut arcus EHVF ad ſubtenſam EF; hoc eſt ut recta AM, ad rectam MB. Rurſus, tempus caſûs per LB eſt ad tempus lapſûs per AB, ut LB ad AB. Ergo ratio temporis, quo grave percurrit AVB, ad tempus quo percurrit AB, componitur ex ratione AM ad MB, & ratione LB ad BA; adeoque æqualis eſt rationi AM×LB ad MB×BA. Sed AM×LB eſt æquale MB×AC; quia utrumque æquatur duplo trianguli ABM. Et igitur, tempus, quo grave è quiete cadens percurrit curvam Cycloidis AVB, eſt ad tempus, quo percurrit rectam AB, ſicut MB×AC, ad MB×BA; id eſt, ſicut AC ad AB. Q. E. D.

Similiterque procedet demonſtratio, ſi punctum B, ſit inter A & V.

V.

PROBLEMATIS

Olim in Actis Eruditorum Lipſiæ propoſiti

SOLUTIO GENERALIS.

In *Actis Eruditorum* pro menſe *Octobri* anni 1698, pag. 471, D. JOHANNES BERNOULLIUS hæc ſcripſit. " Methodum, quam " optaveram generalem ſecandi Curvas ordinatim poſitione datas, " ſive algebraicas, ſive tranſcendentales, in angulo recto, ſive " obliquo invariabili, ſive datâ lege variabili, tandem ex voto " erui: cui, LEIBNITIO approbatore, ne γρῦ addi poteſt ad ul- " teriorem perfectionem, & vel ideo tantùm quòd perpetuò ad " æquationem deducat: in quâ ſi interdum indeterminatæ ſunt " inſeparabiles, methodus non ideo imperfectior eſt, non enim " hujus ſed alîus eſt methodi indeterminatas ſeparare: rogamus

" igitur fratrem ut velit ſuas quoque vires exercere in re tanti " momenti. Suſcepti laboris non pœnitebit, ſi felix ſucceſſus " fructu jucundo compenſaverit. Scio relicturum ſuum, quem " nunc fovet, modum, qui in pauciſſimis tantùm exemplis adhi- " beri poteſt."

Hi tres viri celeberrimi ſeſe, jam ab annis quatuor vel quinque circiter, in ſolvendis hujuſmodi problematibus exercuerant. Abſque ſpiritu divinandi eandem ſolutionem cum *Bernoulliana* tradere difficile fuerit. Sufficit quòd ſolutio ſequens ſit generalis, & ad æquationem ſemper deducat.

PROBLEMA.

Quæritur methodus generalis inveniendi ſeriem Curvarum, quæ Curvas in ſerie aliâ quâcumque datâ conſtitutas, ad angulum vel datum, vel datâ lege variabilem, ſecabunt.

SOLUTIO.

Natura Curvarum ſecandarum dat tangentes earundem ad interſectionum puncta quæcunque: & anguli interſectionum dant perpendicula Curvarum ſecantium; & perpendicula duo coeuntia, per concurſum ſuum ultimum, dant centrum curvaminis Curvæ ſecantis ad punctum interſectionis cujuſcunque. Ducatur abſciſſa in ſitu quocumque commodo, & ſit ejus fluxio unitas; & poſitio perpendiculi dabit fluxionem primam ordinatæ ad Curvam quæſitam pertinentis; & curvamen hujus Curvæ dabit fluxionem ſecundam ejuſdem ordinatæ. Et ſic problema ſemper deducetur ad æquationes. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Non hujus, ſed alius eſt methodi æquationes reducere, & indeterminatas ſeparare; abſolutè, ſi fieri poſſit; ſin minus, per ſeries infinitas. Problema hocce, cùm nullius ferè ſit uſûs, in *Actis Eruditorum* annos plures neglectum & inſolutum manſit. Et eâdem de cauſâ ſolutionem ejus non ulteriùs proſequor.

PROPOSITIONS

FOR

DETERMINING THE MOTION OF A BODY

URGED BY

TWO CENTRAL FORCES,

COMMUNICATED

BY THE LATE WILLIAM JONES, ESQ.

TO

THE LATE DR. BRADLEY.

PROPOSITION I.

If a body, projected in a given direction, be conſtantly drawn towards two fixed points, which are not both in the ſame plane with the direction, it ſhall deſcribe, by lines drawn from the two fixed points, equal ſolids in equal times, about the line joining the ſaid points.

SUPPOSE a body projected in the direction AP (fig. 1.) and acted upon by two centripetal forces towards the fixed points

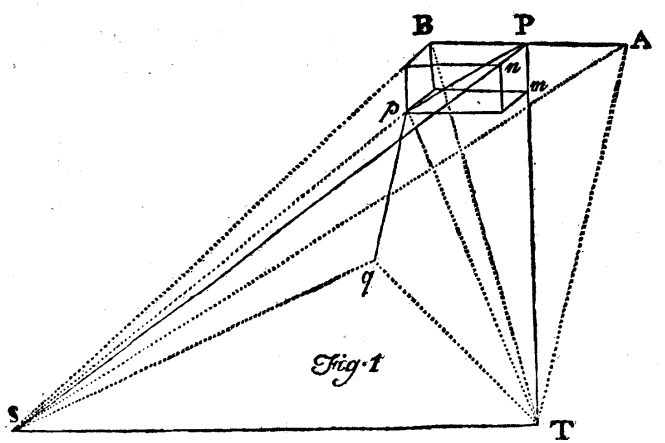


Fig. 1

T and S; and the angles PAS, PAT in different planes. Imagine the time divided into equal moments; and in the firſt moment the

the body, by its given force, ſhould move through the line AP: likewiſe in the ſecond moment, if no new force was added, it ſhould continue to move in the ſame ſtrait line through PB = AP. But when the body has come to P, ſuppoſe it acted upon by two centripetal forces, in the directions PT, PS. Suppoſe theſe forces in proportion to that in the direction AP, as the lines P*m*, and P*n*, to the line AP = PB; and with the three lines PB, P*n*, P*m*, compleat the parallelepipid P*p*; and the body in P being acted on by theſe three forces, in the directions PB, P*m*, P*n*, which forces are as theſe three lines, it ſhall move through the diagonal of the parallelopipid made on theſe lines; that is, in the ſecond moment of time the body, inſtead of moving from P to B, ſhall move from P to *p*. And drawing the lines S*p*, T*p*, and SA, TA, I ſay the ſolid SPT*p* is equal to the ſolid SATP.

Draw the lines SB, TB. The ſolids SPTB, SPT*p*, having the ſame baſe SPT, and being between the ſame parallel planes *nm* and B*p*, are equal. Again, the ſolids SPTB, SPTA, are equal; becauſe being on the ſame baſe SPT, they have equal altitudes. (Letting fall perpendiculars from the points B and A, upon the ſame plane SPT, in which from theſe perpendiculars, drawing lines to the points A and B, there are two right-angled triangles, with one ſide equal, *viz.* PB = AP; and one acute angle equal, *viz.* the inclination of the line AB to the plane SPT, therefore the perpendiculars are equal, which are the altitudes of the two ſolids SPTB, SPTA). Therefore the ſolids SPT*p*, SATP, are equal. Q. E. D.

In like manner, in the third moment of time, the body at *p*, being acted on by three forces in the direction P*p*, *p*T, *p*S, ſhall move through the line *pq*, ſo as to make the ſolids, SPT*p*, SPT*q*, equal. And ſo in every other moment of time, the body ſhall deſcribe, by lines drawn from the two fixed points T and S, a little ſolid equal to the ſolid SATP.

Thus then the moments of the ſolid deſcribed by the rays drawn from the fixed points, T, S, to the moving body, being proportional to the moments of time, it follows, that the ſolid itſelf is proportional to the time in which it is deſcribed. Q. E. D.

PROP.

PROP. II.

If a body, acted upon by two centripetal forces, as above, revolve in a curve round the line joining theſe two centers, its velocity in any point of the curve ſhall be reciprocally proportional to a rectangle of the perpendicular from one of the centers upon the tangent to the given point in the curve, and the perpendicular from the other center upon the plane of the aforeſaid perpendicular and tangent.

Let the body P move in the curve P*p* (fig. 2.) round the line TS, joining the two centers of attraction S and T. Let PZ be a

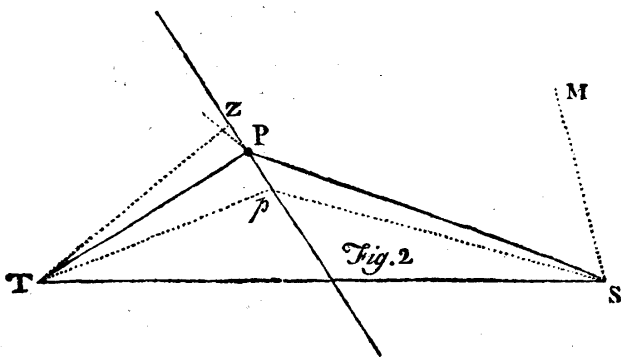


Fig. 2

tangent to the curve in P; upon which, from T, let fall the perpendicular TZ; and upon the plane of the lines TZ, ZP let fall from S the perpendicular SM; and the velocity of the body in P ſhall be reciprocally as the rectangle TZ × SM.

Suppoſe in a moment of time the body moves from P to *p*, draw the lines *p*S and *p*T. The time being given, the velocity is directly as the ſpace; that is, the velocity of the body at P is directly as the line P*p*.

Again, the time being given, the ſolid TP*p*S, which is proportional to the time (by the preceding Propoſition) is alſo given. But the ſolid TP*p*S is proportional to the baſe multiplied by the perpendicular altitude, that is, to the triangle TP*p*, into the perpendicular altitude SM. The triangle TP*p* is proportional to

$Pp \times TZ$, therefore the ſolid $TPps$ is proportional to $Pp \times TZ \times SM$. And this being a given quantity, Pp becomes reciprocally proportional to $TZ \times SM$, that is, the velocity is reciprocally as the rectangle $TZ \times SM$. Q. E. D.

PROP. III.

If a body, attracted by two fixed points T, S *(fig. 3.) revolve in a curve, it ſhall, with a ray drawn from one of theſe points,* T, *to*

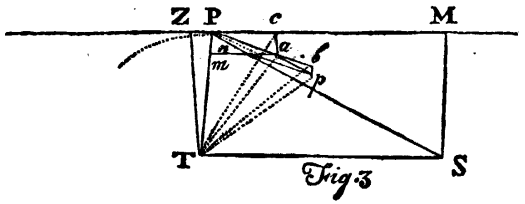


Fig. 3

any point in the curve, in equal moments of time, deſcribe unequal areas, whoſe differences ſhall be as the attractive force towards the other point S, *multiplied into the line* $TZ \times \frac{PM}{PS}$; PM *being a tangent to the curve in the given point* P, *and* TZ, SM, *perpendiculars from* T *and* S *upon this tangent.*

Suppoſe the body in the point P, acted on in the direction Pc, Pm, Pn, with forces proportional to theſe lines. By the forces Pc, and Pm, it ſhould move through Pa, the diagonal of the parallelogram mPc; and with the forces Pa and Pn it ſhould move through Pp, the diagonal of the parallelogram apn. Draw the lines cT, aT, pT; deſcribe the arch pb with the radius Pp, and draw bT. I ſay, the difference of the triangles PcT, PaT, is proportional to $Pn \times TZ \times \frac{PM}{PS}$.

The triangles PcT, PaT, being between the ſame parallelas Pm, ca, are equal.—Again, the triangle $PpT = PbT$, becauſe the ſides Pp, Pb, are equal, and the angle pPT common (the angle bPp being infinitely ſmall) therefore $PpT - PcT = PbT - PaT = abT$. But the triangle abT is as the baſe $ab \times$ into the perpendicular altitude TZ. And the triangles apb, SPM, right-angled at M and b, have

have the angle pab = the angle SPM (the lines PS, ap, and PM, Pp, Pb, being ſuppoſed parallel) therefore they are ſimilar, that is, $PS : PM :: ap : ab$. Therefore $ab = ap \times \frac{PM}{PS}$: and the triangle abT is as $\frac{TZ \times ap \times Pm}{PS} = Pn \times TZ \times \frac{PM}{PS}$. Q. E. D.

Now the difference of the triangles PcT, PpT, is the difference of the areas deſcribed by the body P, with the ray PT in the ſame moment of time. Therefore the body P, thus conſtantly acted upon by two centripetal forces, ſhall revolve in a curve; deſcribing about one of theſe centers, in equal moments of time, unequal areas, whoſe difference is proportional to the area $f \times TZ \times \frac{PM}{PS}$. Q. E. D. (Calling the attraction towards S, the other center, f.)

FOUR
LETTERS
FROM
SIR ISAAC NEWTON
TO
DOCTOR BENTLEY;
CONTAINING
SOME ARGUMENTS
IN
PROOF OF A DEITY.

LETTERS, &c.

SIR,

WHEN I wrote my Treatiſe about our Syſtem, I had an eye upon ſuch principles as might work with conſidering men, for the belief of a Deity; and nothing can rejoice me more than to find it uſeful for that purpoſe. But if I have done the public any ſervice this way, it is due to nothing but induſtry and patient thought.

As to your firſt Query, it ſeems to me, that if the matter of our ſun and planets, and all the matter of the univerſe, were evenly ſcattered throughout all the heavens, and every particle had an innate gravity towards all the reſt, and the whole ſpace, throughout which this matter was ſcattered, was but finite; the matter on the outſide of this ſpace would by its gravity tend towards all the matter on the inſide, and by conſequence fall down into the middle of the whole ſpace, and there compoſe one great ſpherical maſs. But if the matter was evenly diſpoſed throughout an infinite ſpace, it could never convene into one maſs; but ſome of it would convene into one maſs and ſome into another,

ſo

LETTER FIRST.

ſo as to make an infinite number of great maſſes, ſcattered at great diſtances from one to another throughout all that infinite ſpace. And thus might the ſun and fixed ſtars be formed, ſuppoſing the matter were of a lucid nature. But how the matter ſhould divide itſelf into two ſorts; and that part of it, which is fit to compoſe a ſhining body, ſhould fall down into one maſs and make a ſun; and the reſt, which is fit to compoſe an opake body, ſhould coaleſce, not into one great body, like the ſhining matter, but into many little ones: Or if the ſun at firſt were an opake body like the planets, or the planets lucid bodies like the ſun, how he alone ſhould be changed into a ſhining body, whilſt all they continue opake; or all they be changed into opake ones, whilſt he remains unchanged; I do not think explicable by meer natural cauſes, but am forced to aſcribe it to the counſel and contrivance of a voluntary Agent.

The ſame power, whether natural or ſupernatural, which placed the ſun in the center of the ſix primary planets, placed *Saturn* in the center of the orbs of his five ſecondary planets; and *Jupiter* in the center of his four ſecondary planets; and the earth in the center of the moon's orb; and therefore, had this cauſe been a blind one without contrivance or deſign, the ſun would have been a body of the ſame kind with *Saturn*, *Jupiter*, and the earth; that is, without light or heat. Why there is one body in our ſyſtem qualified to give light and heat to all the reſt, I know no reaſon, but becauſe the author of the ſyſtem thought it convenient: and why there is but one body of this kind, I know no reaſon, but becauſe one was ſufficient to warm and enlighten all the reſt. For the *Carteſian* hypotheſis of ſuns loſing their light, and then turning into comets, and comets into planets, can have no place in my Syſtem, and is plainly erroneous: becauſe it is certain, that as often as they appear to us, they deſcend into the ſyſtem of our planets, lower than the orb of *Jupiter*, and ſometimes lower than the orbs of *Venus* and *Mercury*; and yet never ſtay here, but always return from the ſun with the ſame degrees of motion by which they approached him.

LETTER FIRST.

To your ſecond Query I anſwer, that the motions, which the planets now have, could not ſpring from any natural cauſe alone, but were impreſſed by an intelligent Agent. For ſince comets deſcend into the region of our planets, and here move all manner of ways, going ſometimes the ſame way with the planets, ſometimes the contrary way, and ſometimes in croſs ways, the planes inclined to the plane of the ecliptick, and at all kinds of angles, it is plain that there is no natural cauſe which could determine all the planets, both primary and ſecondary, to move the ſame way and in the ſame plane, without any conſiderable variation: this muſt have been the effect of counſel. Nor is there any natural cauſe which could give the planets thoſe juſt degrees of velocity, in proportion to their diſtances from the ſun, and other central bodies, which were requiſite to make them move in ſuch concentrick orbs about thoſe bodies. Had the planets been as ſwift as comets, in proportion to their diſtances from the ſun (as they would have been, had their motion been cauſed by their gravity, whereby the matter, at the firſt formation of the planets, might fall from the remoteſt regions towards the ſun) they would not move in concentrick orbs, but in ſuch eccentrick ones as the comets move in. Were all the planets as ſwift as *Mercury*, or as ſlow as *Saturn* or his ſatellites; or were their ſeveral velocities otherwiſe much greater or leſs than they are, as they might have been, had they aroſe from any other cauſe than their gravities; or had the diſtances from the centers, about which they move, been greater or leſs than they are with the ſame velocities; or had the quantity of matter in the ſun, or in *Saturn*, *Jupiter*, and the earth, and by conſequence their gravitating power been greater or leſs than it is; the primary planets could not have revolved about the ſun, nor the ſecondary ones about *Saturn*, *Jupiter*, and the Earth, in concentrick circles as they do, but would have moved in hyperbolas or parabolas, or in ellipſes very eccentrick. To make this ſyſtem, therefore, with all its motions, required a cauſe which underſtood, and compared together, the quantities of matter in the ſeveral bodies of the ſun and planets, and the gravitating powers reſulting from thence; the ſeveral diſtances of the primary planets from the ſun, and of the ſecondary

LETTER FIRST.

condary ones from *Saturn*, *Jupiter*, and the Earth; and the velocities, with which theſe planets could revolve about thoſe quantities of matter in the central bodies; and to compare and adjuſt all theſe things together in ſo great a variety of bodies, argues that cauſe to be not blind and fortuitous, but very well ſkilled in mechanicks and geometry.

To your third Query I anſwer, that it may be repreſented that the ſun may, by heating thoſe planets moſt which are neareſt to him, cauſe them to be better concocted, and more condenſed by that concoction. But when I conſider that our earth is much more heated in its bowels below the upper cruſt, by ſubterraneous fermentations of mineral bodies than by the ſun; I ſee not why the interior parts of *Jupiter* and *Saturn* might not be as much heated, concocted, and coagulated by thoſe fermentations as our earth is: and therefore this various denſity ſhould have ſome other cauſe than the various diſtances of the planets from the ſun. And I am confirmed in this opinion by conſidering, that the planets of *Jupiter* and *Saturn*, as they are rarer than the reſt, ſo they are vaſtly greater, and contain a far greater quantity of matter, and have many ſatellites about them; which qualifications ſurely aroſe not from their being placed at ſo great a diſtance from the ſun, but were rather the cauſe why the Creator placed them at great diſtance. For by their gravitating powers they diſturb one another's motions very ſenſibly, as I find by ſome late obſervations of Mr. *Flamſteed*; and had they been placed much nearer to the ſun and to one another, they would by the ſame powers have cauſed a conſiderable diſturbance in the whole ſyſtem.

To your fourth Query I anſwer, that, in the hypotheſis of *vortices*, the inclination of the axis of the earth might, in my opinion, be aſcribed to the ſituation of the earth's *vortex* before it was abſorbed by the neighbouring *vortices*, and the earth turned from a ſun to a comet; but this inclination ought to decreaſe conſtantly in compliance with the motion of the earth's *vortex*, whoſe axis is much leſs inclined to the ecliptick; as appears by the motion of the moon carried about therein. If the ſun by his

his rays could carry about the planets, yet I do not ſee how he could thereby effect their diurnal motions. LETTER FIRST.

Laſtly, I ſee nothing extraordinary in the inclination of the earth's axis for proving a Deity; unleſs you will urge it as a contrivance for Winter and Summer, and for making the earth habitable towards the poles; and that the diurnal rotations of the ſun and planets, as they could hardly ariſe from any cauſe purely mechanical, ſo by being determined all the ſame way with the annual and menſtrual motions, they ſeem to make up that harmony in the ſyſtem, which, as I explained above, was the effect of choice, rather than chance.

There is yet another argument for a Deity, which I take to be a very ſtrong one; but till the principles on which it is grounded are better received, I think it more adviſeable to let it ſleep.

I am, &c;

Cambridge,
Dec. 10, 1692.

LETTER II.

SIR,

LETTER SECOND. I AGREE with you, that if matter, evenly diffuſed through a finite ſpace, not ſpherical, ſhould fall into a ſolid maſs, this maſs would affect the figure of the whole ſpace, provided it were not ſoft, like the old chaos, but ſo hard and ſolid from the beginning, that the weight of its protuberant parts could not make it yield to their preſſure. Yet by earthquakes looſening the parts of this ſolid, the protuberances might ſometimes ſink a little by their weight, and thereby the maſs might, by degrees, approach a ſpherical figure.

The reaſon why matter evenly ſcattered through a finite ſpace would convene in the midſt, you conceive the ſame with me; but that there ſhould be a central particle, ſo accurately placed in the middle, as to be always equally attracted on all ſides, and thereby continue without motion, ſeems to me a ſuppoſition fully as hard, as to make the ſharpeſt needle ſtand upright on its point upon a looking-glaſs. For if the very mathematical center of the central particle be not accurately in the very mathematical center of the attractive power of the whole maſs, the particle will not be attracted equally on all ſides. And much harder it is to ſuppoſe all the particles in an infinite ſpace ſhould be ſo accurately poiſed one among another, as to ſtand ſtill in a perfect equilibrium. For I reckon this as hard as to make, not one needle only, but an infinite number of them (ſo many as there are particles in an infinite ſpace) ſtand accurately poiſed upon their points. Yet I grant it poſſible, at leaſt by a Divine Power; and if they were once to be placed, I agree with you, that they would continue in that poſture without motion for ever, unleſs put into new motion by the ſame power. When therefore I ſaid, that matter, evenly ſpread through all ſpace, would convene by its gravity

gravity into one or more great maſſes, I underſtand it of matter not reſiſting in an accurate poiſe. LETTER SECOND.

But you argue, in the next paragraph of your letter, that every particle of matter, in an infinite ſpace, has an infinite quantity of matter on all ſides, and by conſequence an infinite attraction every way, and therefore muſt reſt in equilibrio, becauſe all infinites are equal. Yet you ſuſpect a paralogiſm in this argument; and I conceive the paralogiſm lies in the poſition, that all infinites are equal. The generality of mankind conſider infinites no other ways than indefinitely; and in this ſenſe, they ſay all infinites are equal; though they would ſpeak more truly if they ſhould ſay, they are neither equal nor unequal, nor have any certain difference, or proportion one to another. In this ſenſe, therefore, no concluſions can be drawn from them, about the equality, proportions, or differences of things; and they that attempt to do it, uſually fall into paralogiſms. So when men argue againſt the infinite diviſibility of magnitude, by ſaying, that if an inch may be divided into an infinite number of parts, the ſum of thoſe parts will be an inch; and if a foot may be divided into an infinite number of parts, the ſum of thoſe parts muſt be a foot; and therefore ſince all infinites are equal, thoſe ſums muſt be equal, that is, an inch equal to a foot; the falſeneſs of the concluſion ſhews an error in the premiſes: and the error lies in the poſition, that all infinites are equal. There is therefore another way of conſidering infinites, uſed by mathematicians, and that is under certain definite reſtrictions and limitations, whereby infinites are determined to have certain differences or proportions to one another. Thus Dr. *Wallis* conſiders them in his *Arithmetica Infinitorum*; where, by the various proportions of infinite ſums, he gathers the various proportions of finite magnitudes: which way of arguing is generally allowed by mathematicians, and yet would not be good, were all infinites equal. According to the ſame way of conſidering infinites, a mathematician would tell you, that though there be an infinite number of infinite little parts in an inch, yet there is twelve times that number of ſuch parts in a foot; that is, the infinite number of thoſe parts in a foot is not equal to, but twelve

LETTER SECOND.

times bigger than the infinite number of them in an inch. And ſo a mathematician will tell you, that if a body ſtood in equilibrio between any two equal and contrary attracting infinite forces, and if to either of theſe forces you add any new finite attracting force; that new force, how little ſoever, will deſtroy their equilibrium, and put the body into the ſame motion into which it would put it, were thoſe two contrary equal forces but finite, or even none at all: ſo that in this caſe the two equal infinites, by the addition of a finite to either of them, become unequal in our ways of reckoning; and after theſe ways we muſt reckon, if from the conſiderations of infinites we would always draw true concluſions.

To the laſt part of your letter I anſwer, firſt, that if the earth (without the moon) were placed any where with its center in the *Orbis Magnus*, and ſtood ſtill there without any gravitation or projection, and there at once were infuſed into it, both a gravitating energy towards the ſun, and a tranſverſe impulſe of a juſt quantity moving it directly in a tangent to the *Orbis Magnus*; the compounds of this attraction and projection would, according to my notion, cauſe a circular revolution of the earth about the ſun. But the tranſverſe impulſe muſt be a juſt quantity; for if it be too big or too little, it will cauſe the earth to move in ſome other line. Secondly, i do not know any power in Nature which would cauſe this tranſverſe motion without the Divine arm. *Blondel* tells us ſomewhere in his book of Bombs, that *Plato* affirms, that the motion of the planets is ſuch, as if they had all of them been created by God in ſome region very remote from our ſyſtem, and let fall from thence towards the ſun, and ſo ſoon as they arrived at their ſeveral orbs, their motion of falling turned aſide into a tranſverſe one. And this is true, ſuppoſing the gravitating power of the ſun was double, at that moment of time in which they all arrive at their ſeveral orbs; but then the Divine power is here required in a double reſpect, namely, to turn the deſcending motions of the falling planets into a ſide motion, and at the ſame time to double the attractive power of the ſun. So then gravity may put the planets into motion, but without the Divine Power it could never put them into ſuch a circulating motion,

tion, as they have about the ſun; and therefore for this, as well as other reaſons, I am compelled to aſcribe the frame of this ſyſtem to an intelligent Agent. LETTER SECOND.

You ſometimes ſpeak of gravity as eſſential and inherent to matter. Pray do not aſcribe that notion to me; for the cauſe of gravity is what I do not pretend to know, and therefore would take more time to conſider of it.

I fear what I have ſaid of infinites will ſeem obſcure to you; but it is enough if you underſtand that infinites, when conſidered abſolutely without any reſtriction or limitation, are neither equal nor unequal, nor have any certain proportion one to another; and therefore the principle that all infinites are equal, is a precarious one.

I am, Sir, &c.

Trinity College,
Jan. 17, 1692-3.

LETTER III.

SIR,

Cambridge,
Feb. 25, 1692-3.

BECAUSE you deſire ſpeed, I will anſwer your letter with what brevity I can. In the ſix poſitions you lay down in the beginning of your letter, I agree with you. Your aſſuming the *Orbis Magnus* 7000 diameters of the earth wide, implies the ſun's horizontal parallax to be half a minute. *Flamſteed* and *Caſſini* have of late obſerved it to be about 10″, and thus the *Orbis Magnus* muſt be 21,000, or in a rounder number 20,000 diameters of the earth wide. Either computation I think will do well, and I think it not worth while to alter your numbers.

In the next part of your letter you lay down four other poſitions founded upon the ſix firſt. The firſt of theſe four ſeems very evident; ſuppoſing you take attraction ſo generally, as by it to underſtand any force, by which diſtant bodies endeavour to come together without mechanical impulſe. The ſecond ſeems

not

LETTER THIRD.

not ſo clear. For it may be ſaid, that there might be other ſyſtems of worlds before the preſent ones, and others before thoſe, and ſo on to all paſt eternity; and by conſequence, that gravity may be co-eternal to matter, and have the ſame effect from all eternity as at preſent; unleſs you have ſomewhere proved, that old ſyſtems cannot gradually paſs into new ones; or that this ſyſtem had not its original from the exhaling matter of former decaying ſyſtems, but from a chaos of matter evenly diſperſed throughout all ſpace. For ſomething of this kind, I think, you ſay was the ſubject of your ſixth Sermon; and the growth of new ſyſtems out of old ones, without the mediation of a Divine Power, ſeems to me apparently abſurd.

The laſt clauſe of the ſecond poſition I like very well. It is inconceivable, that inanimate brute matter ſhould, without the mediation of ſomething elſe, which is not material, operate upon, and affect other matter without mutual contact; as it muſt do, if gravitation, in the ſenſe of *Epicurus*, be eſſential and inherent in it. And this is one reaſon, why I deſired you would not aſcribe innate gravity to me. That gravity ſhould be innate, inherent and eſſential to matter, ſo that one body may act upon another at a diſtance through a *vacuum*, without the mediation of any thing elſe, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me ſo great an abſurdity, that I believe no man who has in philoſophical matters a competent faculty of thinking, can ever fall into it. Gravity muſt be cauſed by an agent acting conſtantly according to certain laws; but whether this agent be material or immaterial, I have left to the conſideration of my readers.

Your fourth aſſertion, that the world could not be formed by innate gravity alone, you confirm by three arguments. But in your firſt argument you ſeem to make a *Petitio Principii*; for whereas many ancient philoſophers and others, as well Theiſts as Atheiſts, have all allowed, that there may be worlds and parcels of matter innumerable or infinite, you deny this, by repreſenting it as abſurd, as that there ſhould be poſitively an infinite arithmetical ſum or number, which is a contradiction *in terminis*; but you do not prove it as abſurd. Neither do you prove, that what

LETTER THIRD.

what men mean by an infinite ſum or number, is a contradiction in nature; for a contradiction *in terminis* implies no more than an impropriety of ſpeech. Thoſe things, which men underſtand by improper and contradictious phraſes, may be ſometimes really in Nature without any contradiction at all: a ſilver irkhorn, a paper lanthorn, an iron whetſtone, are abſurd phraſes; yet the things ſignified thereby are really in Nature. If any man ſhould ſay, that a number and a ſum, to ſpeak properly, is that which may be numbered and ſummed, but things infinite are numberleſs, or, as we uſually ſpeak, innumerable and ſumleſs, or inſummable, and therefore ought not to be called a number or ſum; he will ſpeak properly enough, and your argument againſt him will, I fear, loſe its force. And yet if any man ſhall take the words, number and ſum, in a larger ſenſe, ſo as to underſtand thereby things, which in the proper way of ſpeaking are numberleſs and ſumleſs (as you ſeem to do when you allow an infinite number of points in a line) I could readily allow him the uſe of the contradictious phraſes of innumerable number, or ſumleſs ſum, without inferring from thence any abſurdity in the thing he means by thoſe phraſes. However, if by this, or any other argument, you have proved the finiteneſs of the univerſe, it follows, that all matter would fall down from the outſides, and convene in the middle. Yet the matter in falling might concrete into many round maſſes, like the bodies of the planets; and theſe, by attracting one another, might acquire an obliquity of deſcent, by means of which they might fall, not upon the great central body, but upon the ſide of it, and fetch a compaſs about, and then aſcend again by the ſame ſteps and degrees of motion and velocity with which they deſcended before, much after the manner that the comets revolve about the ſun; but a circular motion in concentrick orbs about the ſun, they could never acquire by gravity alone.

And though all the matter were divided at firſt into ſeveral ſyſtems, and every ſyſtem by a Divine Power conſtituted like ours; yet would the outſide ſyſtems deſcend towards the middlemoſt; ſo that this frame of things could not always ſubſiſt without a

LETTER THIRD.

Divine Power to conſerve it, which is the ſecond argument; and to your third I fully aſſent.

As for the paſſage of *Plato*, there is no common place from whence all the planets being let fall, and deſcending with uniform and equal gravities (as *Galileo* ſuppoſes) would at their arrival to their ſeveral orbs acquire their ſeveral velocities, with which they now revolve in them. If we ſuppoſe the gravity of all the planets towards the ſun to be of ſuch a quantity as it really is, and that the motions of the planets are turned upwards, every planet will aſcend to twice its height from the ſun. *Saturn* will aſcend till he be twice as high from the ſun as he is at preſent, and no higher; *Jupiter* will aſcend as high again as at preſent, that is, a little above the orb of *Saturn*; *Mercury* will aſcend to twice his preſent height, that is, to the orb of *Venus*; and ſo of the reſt; and then by falling down again from the places to which they aſcended, they will arrive again at their ſeveral orbs with the ſame velocities they had at firſt, and with which they now revolve.

But if ſo ſoon as their motions by which they revolve are turned upwards, the gravitating power of the ſun, by which their aſcent is perpetually retarded, be diminiſhed by one half, they will now aſcend perpetually, and all of them at all equal diſtances from the ſun will be equally ſwift. *Mercury*, when he arrives at the orb of *Venus*, will be as ſwift as *Venus*; and he and *Venus*, when they arrive at the orb of the Earth, will be as ſwift as the Earth; and ſo of the reſt. If they begin all of them to aſcend at once, and aſcend in the ſame line, they will conſtantly, in aſcending, become nearer and nearer together, and their motions will conſtantly approach to an equality, and become at length ſlower than any motion aſſignable. Suppoſe, therefore, that they aſcended till they were almoſt contiguous, and their motions inconſiderably little, and that all their motions were at the ſame moment of time turned back again; or, which comes almoſt to the ſame thing, that they were only deprived of their motions, and let fall at that time, they would all at once arrive at their ſeveral orbs, each with the velocity it had at firſt; and if their motions were then turned ſideways, and at the ſame time the

the gravitating power of the ſun doubled, that it might be ſtrong enough to retain them in their orbs, they would revolve in them as before their aſcent. But if the gravitating power of the ſun was not doubled, they would go away from their orbs into the higheſt heavens in parabolical lines. Theſe things follow from my *Princip. Math. Lib. I. Prop.* XXXIII, XXXIX, XXXV, XXXVI.

LETTER THIRD.

I thank you very kindly for your deſigned preſent, and reſt yours, &c.

LETTER IV.

SIR,

Cambridge, Feb 11, 1693.

THE hypotheſis of deriving the frame of the world, by mechanical principles, from matter evenly ſpread through the heavens, being inconſiſtent with my ſyſtem, I had conſidered it very little before your letters put me upon it, and therefore trouble you with a line or two more about it, if this comes not too late for your uſe.

LETTER FOURTH.

In my former I repreſented, that the diurnal rotations of the planets could not be derived from gravity, but required a Divine Arm to impreſs them. And though gravity might give the planets a motion of deſcent towards the ſun, either directly or with ſome little obliquity, yet the tranſverſe motions by which they revolve in their ſeveral orbs, required the Divine Arm to impreſs them according to the tangents of their orbs. I would now add, that the hypotheſis of matter's being at firſt evenly ſpread through the heavens, is, in my opinion, inconſiſtent with the hypotheſis of innate gravity, without a ſupernatural power to reconcile them; and therefore it infers a Deity. For if there be innate gravity, it is impoſſible now for the matter of the Earth and all the planets and ſtars to fly up from them, and become evenly ſpread throughout all the heavens, without a ſupernatural power; and certainly that which can never be hereafter without a ſupernatural power, could never be heretofore without the ſame power.

You queried whether matter, evenly ſpread throughout a finite ſpace, of ſome other figure than ſpherical, would not, in falling down towards a central body, cauſe that body to be of the ſame figure with the whole ſpace; and I anſwered, yes. But in my anſwer it is to be ſuppoſed that the matter deſcends directly downwards to that body, and that that body has no diurnal rotation.

This, Sir, is all I would add to my former letters.

I am yours, &c.

COMMERCIUM EPISTOLICUM DE VARIA RE MATHEMATICA,

INTER

CELEBERRIMOS PRÆSENTIS SECULI MATHEMATICOS.

VIZ.

Iſaacum Newtonum Equitem Auratum.
D. Iſaacum Barrow.
D. Jacobum Gregorium.
D. Johannem Walliſium.
D. J. Keillium.
D. J. Collinium.
D. Gulielmum Leibnitium.
D. Henricum Oldenbourgum.
D. Franciſcum Sluſium.

ET ALIOS.

JUSSU SOCIETATIS REGIÆ IN LUCEM EDITUM

ET JAM

Unà cum Recenſione præmiſſâ inſignis Controverſiæ inter Leibnitium & Keillium de primo Inventore Methodi Fluxionum; & Judicio primarii, ut ferebatur, Mathematici ſubjuncto, iterum impreſſum. A. D. 1725.

AD

LECTOREM.

CUM primum Commercium Epistolicum lucem vidit, D. Leibnitius *Viennæ agens, ut librum sine responso dimitteret, prætendit per biennium se eundem non vidisse, sed ad judicium primarii Mathematici, & harum rerum peritissimi, & à partium studio alieni se provocásse. Et sententiam ejus,* 7 Jun. 1713, *datam, schedulæ volanti* 29 Julii *datæ inclusam, per orbem sparsit, sine nomine vel Judicis, vel Impressoris, vel Urbis in quâ impressa fuit. Et sub finem anni* 1715, *in Literis quas ad Abbatem de Comitibus tunc* Londini *agentem scripsit, confugit ad Quæstiones novas de Qualitatibus occultis, gravitate universali, Miraculis, Organis & Sensorio Dei, spatio, Tempore, Vacuo, Atomis, Perfectione mundi, & Intelligentiâ supramundanâ; & Problema ex Actis Eruditorum desumptum proposuit ab Analystis Anglis solvendum. Quæ omnia ad rem nil spectant.*

Sed & Consessum à Regiâ Societate constitutum, qui Commercium ex antiquis monumentis ediderant, accusavit, quasi partibus studuissent; &, literas antiquas edendo, omisissent omnia quæ vel pro ipso, vel contra Newtonum *facerent. Et ut hoc probaret, scripsit is in primâ suâ ad Abbatem epistolâ, quòd in secundo suo in Angliam itinere,* Collinius *ostenderit ipsi partem Commercii sui; in quâ* Newtonus *agnoscebat ignorantiam suam in pluribus, dicebatque*

(inter alia) quòd nihil invenisset circa dimensiones Curvilinearum, quæ celebrantur, præter dimensionem Cissoidis : sed Confessus hoc totum suppressit. Et Newtonus, *in Epistolâ suâ ad dictum Abbatem* 26 *Feb.* $17\frac{15}{16}$ *datâ, respondit, hoc non fuisse omissum, sed extare in Epistolâ suâ ad* Oldenburgum 24 Octob. 1676 *missâ, & impressum fuisse in Commercio Epistolico pag.* 74, *lin.* 10, 11. *Et subinde* Leibnitius, *in proximâ suâ ad Abbatem illum Epistolâ* Apr. 9, 1719 *datâ, agnovit se* errâsse. Sed, *inquit*, exemplum dabo aliud. *Newtonus* in unâ Epistolarum ejus ad *Collinium* agnovit, se non posse invenire magnitudinem sectionum secundarum (vel segmentorum secundorum) sphæroidum & corporum similium: sed Confessus hunc locum, vel hanc Epistolam, minimè edidit. Newtonus *autem, in Observationibus suas in hanc* Leibnitii *Epistolam scripsit, respondit : si Confessus hoc omisisset, rectè omnino omissum fuisse, cùm hujusmodi cavillationes ad Quæstionem, de quâ agitur, nil spectent : sed Confessum hoc minimè omisisse.* Collinius, *in Epistolâ ad D.* Gregorium 24 Decem. 1670, *ut & in alterâ ad D.* Bertet 1671 (*utrisque impressis in Commercio, p.* 24, 26) *scripsit quòd Methodus* Newtoni *se extenderet ad secunda Solidorum segmenta, quæ per rotationem generantur. Et* Oldenburgius *idem scripsit ad* Leibnitium *ipsum* 8 Dec. 1674, *ut videre est in Commercio, pag.* 39. Leibnitius *igitur iterum erravit. Nam & in Transactionibus Philosophicis pro* Jan. & Feb. 1718, *pag.* 925, *dicitur quòd Abbas de Comitibus* per horas aliquot inspexit Epistolas antiquas, & Libros Epistolarum in Archivis R. Societatis asservatos, ut aliquid inveniret, quod vel pro *Leibnitio*, vel contra *Newtonum* faceret, & in Commercio Epistolico omissum fuisset; sed ejus generis nihil invenire potuit.

Insuper D. Leibnitius, *ut Commercium Epistolicum sine responso dimitteret, in primâ suâ ad Abbatem de Comitibus Epistolâ dixit, eos, qui contra ipsum scripsissent (id est Confessum à Regia Societate constitutum) candorem ejus aggressos esse per interpretationes duras & malè fundatas, & voluptatem non habituros esse videndi responsa ejus ad pusillas rationes eorum, qui iis tam malè utuntur. Interpretationes illæ nullius quidem sunt auctoritatis, nisi quam ab Epistolis derivant; sed malè fundatas esse* Leibnitius *nunquam ostendit.*

Subinde

Subinde vero Newtonus, *qui ægre adductus est ut scriberet, in primâ suâ ad Abbatem Epistolâ* 26 Feb. $17\frac{1}{6}$ *ita rescripsit.* D. *Leibnitius* hactenus respondere recusavit, bene intelligens impossibile esse res factas refutare. Silentium suum hâc in re excusat, prætexens se librum nondum vidisse, & otium illi non esse ad examinandum, sed se orâsse Mathematicum celebrem, ut hoc negotium in se susciperet.—Utitur & novo prætextu ne respondeat, dicens quòd Angli voluptatem non habebunt videndi responsa ejus ad pusillas eorum rationes, & proponens disputationes novas Philosophicas ineundas & problemata solvenda : quæ duo ad rem nil spectant. *D.* Leibnitius *autem, in proximâ suâ ad Abbatem Epistolâ* 9 Apr. 1716 *datâ, pergebat se excusare ne responderet.* Ut operi, *inquit*, contra me edito sigillatim respondeam, opus erit alio opere non minore quàm hoc est; percurrendum erit corpus magnum minutorum ante annos 30 vel 40 præteritorum, quorum perparvum reminiscor; examinandæ erunt veteres epistolæ, quarum plures sunt perditæ; præterquam quòd maximâ ex parte non conservavi minuta mearum, & reliquæ sepultæ sunt in maximo chartarum acervo, quem non possum sine tempore & patientiâ discutere. Sed otium mihi minimè suppetit aliis negotiis alterius prorsus generis occupato. *Et paulo post :* literas truncare non debuerunt. Nam parvum est inter chartas meas, vel cujus minuta mihi relinquuntur. Sic omnibus perpensis, videns tantas malignitatis & fallaciæ notas, credidi indignum esse me ingredi discussionem cum hominum genere, qui se tam malè gerunt. Sentio quòd in iis refutandis difficile fuerit ab opprobriis & expressionibus asperis abstinere, talibus quas eorum facta merentur; & non cupio hujusmodi spectaculum exhibere publico, in animo habens tempus meum melius impendere, quod mihi pretiosum esse debet, & contemnens judicium eorum qui super tali opere sententiam contra me pronunciare vellent; præsertim cum Societas Regia hoc facere noluit. *Hæc* Leibnitius. *Quæstionem primam deserit rixando, & Quæstiones novas proponit.*

Attamen post ejus mortem, quæ contigit proximo Mense Novembris, *in Elogio ejus quod in Actis Eruditorum pro Mense* Julio *anni* 1717 *impressum fuit, amici ejus scripserunt* eum Commercio Epistolico Anglorum quoddam suum idemque amplius opponere decrevisse :

creviſſe: & paucis ante obitum diebus Cl. *Wolfio* ſignificâſſe ſe Anglos, famam ipſius laceſſentes, reipſâ refutaturum. Quamprimum enim à laboribus hiſtoricis vacaturus ſit, daturum ſe aliquid in Analyſi prorſus inexpectatum, & cum inventis quæ hactenus in publicum proſtant, ſive *Newtoni*, ſive aliorum, nihil quicquam affine habens. *Hæc illi. Verùm ex jam dictis patet, illum non aliud habuiſſe Commercium Epiſtolicum, quod ederet. Et inventum novum, his nihil affine habens, ad rem nihil ſpectat. Miſſis ægrorum ſomniis, Quæſtio tota ad epiſtolas antiquas referri debet.*

Initio ſecundæ ad Abbatem de Comitibus Epiſtolæ, D. Leibnitius *primam* Newtoni *Epiſtolam vocavit* ſpeciem chartæ provocatoriæ ex parte *Newtoni: dein addidit*; in arenam deſcendere nolui contra ejus milites emiſſarios, ſive intelligas accuſatorem ſupra fundamentum Commercii Epiſtolici, ſive præfationem ſpectes acrimoniæ plenam, quam alius quidam novæ Principiorum editioni præmiſit: ſed cùm is per ſe jam lubens apparebit, paratus ſum ipſi ſatisfactionem dare. *Et* Newtonus *reſpondit*, D. *Leibnitium* literas & chartas antiquas ſeponere, & ad quæſtiones circa philoſophiam & res alias confugere. Et magnum illum Mathematicum, cui ſine nomine, ut judici, epiſtolam 7 *Jun.* 1713 datam attribuerat, jam velo ſublato ut militem in hâc rixâ pro ſe inducere, mathematicos in Anglia provocantem ad problemata ſolvenda; quaſi duellum [*cum* Leibnitio *ſcilicet*] vel forte prælium cum exercitu diſcipulorum ejus [*quos jactat*] methodus eſſet magis idonea ad veritatem dirimendam, quàm diſcuſſio veterum & authenticorum ſcriptorum, & Matheſis factis heroicis, vice rationum ac demonſtrationum, abhinc implenda eſſet. *Hic rationes ac demonſtrationes alludunt ad argumenta è ſcriptis veteribus deſumpta, & facta heroica ad contentiones philoſophicas & problematicas ad rem nil ſpectantes, ad quas D.* Leibnitius *à prioribus aufugit.*

Quæ novæ Principiorum editioni præmiſſa ſunt, Newtonus *non vidit, antequam Liber in lucem prodiit. Quæ de Quæſtionibus Philoſophicis diſputata ſunt, D.* Des Maizeaux *collegit, & in lucem edidit. Solutiones Problematum maximâ ex parte lucem viderunt in Actis Eruditorum. Hæc omnia ad rem nil ſpectant. Commercii Epiſtolici exempla tantùm pauca impreſſa fuerunt, & ad Mathematicos miſſa qui de his rebus judicare poſſent, neque proſtant venalia. Ideoque*

que hunc Librum, ut & ejus Recenſionem quæ in Tranſactionibus Philoſophicis ac Diario Literario, anno 1715, *anno & ſeptem vel octo menſibus ante obitum D.* Leibnitii, *impreſſa fuit, iterum imprimere viſum eſt; ut hiſtoria vera ex antiquis monumentis deducta, miſſis diſputationibus quæ ad rem nil ſpectant, ad poſteros perveniat; & ſic finis imponatur huic controverſiæ. Nam D.* Leibnitius *à Quæſtione deſciſcens emortuus eſt, & judicium poſteris relinquitur.*

Denique Judicium primarii Mathematici ſubjunctum eſt, unà cum notis; quibus pateat, eidem in Recenſione prædictâ, vivente Leibnitio, *reſponſum eſſe, & ſcopum ejus fuiſſe tantùm, ut Commercium Epiſtolicum ſine reſponſo dimitteretur.*

RECENSIO LIBRI

Qui inſcriptus eſt *Commercium Epiſtolicum Collinii & aliorum de Analyſi Promotâ*, & publicatus eſt juſſu Regiæ Societatis Londinenſis, circa controverſiam inter D. Leibnitz & D. Keill, de primo inventore *Methodi Fluxionum*, ſive, ut nonnulli appellant, *Methodi Differentialis*: Anglicè primùm edita in Actis Regiæ Societatis, A. D. 1715, & Gallicè eodem anno in Diario Literario Tom. VII. nunc ex Anglico in Latinum verſa.

CUM variæ Relationes apud exteros de Commercio hoc publicatæ ſint, mutilæ omnes & imperfectæ; viſum eſt ut plenior hæc, quæ ſequitur, Recenſio in publicum edatur.

Commercium hoc contextum eſt ex variis epiſtolis chartiſque, in archivis Regiæ Societatis repoſitis; quæ ſingulæ hîc ſuo ordine ac ſerie collocantur, & vel ex latinis fideliter tranſcriptæ ſunt, vel ex anglicis fideliter in latinum tranſlatæ: numeroſo Conſeſſu à Regiâ Societate deputato, ut & literæ originales inſpicerentur, & earum exemplaria examinarentur. Cæterùm hæc, de quâ agitur, eſt methodus generalis reſolvendi finitas æquationes in infinitas, & applicandi æquationes illas, tam finitas quàm infinitas, ad ſolutionem problematum, per methodum *Fluxionum* & *Momentorum*. Primò autem differemus de eâ Methodi parte, quæ conſiſtit in reſolvendo finitas æquationes in infinitas, & eâ ratione quadrando figuras curvilineas. Per infinitas æquationes intelliguntur illæ, quæ involvunt ſeriem terminorum convergentium, & ad veritatem propiùs propiúſque accedentium in infinitum; ita ut poſtremò à veritate diſtent minùs ullâ datâ quantitate; &, ſi in infinitum continuentur, nullam omninò differentiam relinquant.

Walliſius

Walliſius in opere ſuo arithmetico, publicato A. D. 1657. Cap. 33. Prop. LXVIII. reduxit refractionem $\frac{A}{1-R}$, per perpetuam diviſionem, in ſeriem $A+AR+AR^2+AR^3+AR^4+$ &c.

Vicecomes Brounker quadravit hyperbolam per hanc ſeriem $\frac{1}{1x^1}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+$ &c. hoc eſt per hanc $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+$ &c. conjungendo ſingulos binos terminos in unum. Et hæc quadratura publicata eſt in Actis Regiæ Societatis, menſe Aprili 1668.

Paulo pòſt Dominus Mercator evulgavit demonſtrationem hujus quadraturæ per diviſionem Domini Walliſii; & deinceps haud multo pòſt Jacobus Gregorius geometricam ejuſdem demonſtrationem in lucem edidit. Hi libelli, paucis poſtquàm editi ſunt menſibus, Cantabrigiam miſſi ſunt ad Dominum Barrovium per Dominum Johannem Collins; & per Barrovium traditi Iſaaco Newtono tunc Cantabrigiæ degenti, utpote Collegii S. Trinitatis Socio, (nunc autem Londini Equiti Aurato) menſe Junio 1669. Hâc occaſione, Barrovius viciſſim Collinio miſit tractatum Newtoni, qui inſcribebatur *Analyſis per æquationes numero terminorum infinitas*. Is tractatus in Commercio Epiſtolico agmen ducit, continetque univerſalem methodum id in omnibus figuris faciendi, quod vicecomes Brounker & Mercator in ſolâ hyperbolâ fecerant. Porro Mercator, per annos ſexdecim adhuc ſuperſtes, nihil tentavit aut progreſſus eſt ultra ſolam illam hyperbolæ quadraturam. Illa verò Newtoni per omnes figuras progreſſio ſatis oſtendit, nihil eum in eâ re Mercatoris operâ aut ope indiguiſſe. Ne tamen litiget quiſquam, aut cavilletur; concedit Newtonus & Brounkerum inveniſſe, & Mercatorem demonſtrâſſe, ſeriem illam pro hyperbolâ quadrandâ, annos prius aliquot quàm in publicum ederent; & proinde prius quàm Newtonus generalem ſuam methodum inveniſſet. Commerc. Epiſt. N° I.

De tractatu iſto qui inſcribitur *Analyſis*, &c. Newtonus in epiſtolâ ad Oldenburgium miſſâ, datâque 24 *Octob.* 1676, hæc verba habet, quæ ſequuntur: ‘ *Eo ipſo tempore quo Mercatoris Logarithmotechnia prodiit, communicatum eſt per amicum D. Barrow* ‘ *(tunc Matheſeos profeſſorem Cantab.) cum D. Collinio compendium quoddam harum ſerierum, in quo ſignificaveram areas & longitudines Curvarum omnium, & Solidorum ſuperficies & contenta* ‘ *ex* lb. N° LVII.

'*ex datis rectis*; &, *vice versâ, ex his datis rectas determinari posse*; '& *methodum indicatam illustraveram diversis seriebus*.' Hujus porro serierum compendii certiores fecit Collinius Jacobum Gregorium Scotum, Dominos Bertet & Vernon apud Gallos, Alphonsum Borellum Italum, Dominos Strode, Townsend, Oldenburg, Dary, aliosque apud Anglos, variis epistolis datis ann. 1669, 1670, 1671 & 1672, ut ipsæ epistolæ adhuc testantur. Ipse præterea Oldenburgius communicavit eandem *Analysin* cum D. Francisco Slusio, Leodii tum agente, & ex eâ aliquot ἑήσεις citavit; literis datis 14 *Sept.* 1669, & in librum Regiæ Soc. epistolarem transcriptis. Porrò Collinius in epistolâ ad Jac. Gregorium, 25 *Novemb.* 1669, sic de methodo in *Analysi* illâ contentâ loquitur.

Fr. N° XIV. XIX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. Ib. N° XIII. Ib. N° XIV.

'Barrovius provinciam suam publicè prælegendi remisit cui-'dam nomine Newtono Cantabrigiensi; cujus, tanquam viri acu-'tissimo ingenio præditi, in præfatione Prælectionum Opticarum 'meminit. Quippe antequam ederetur Mercatoris Logarithmo-'technia, eandem methodum adinvenerat, eamque ad omnes 'Curvas generaliter, & ad circulum diversimodè applicârat.' Literis verò ad D. Davidem Gregorium datis 11 *Aug.* 1676, his verbis de eâ loquitur: 'Paucos post menses quàm editi sunt hi libri (viz. 'Mercatoris Logarithmotechnia, & Exercitationes Geometricæ Gre-'gorii) missi sunt ad Barrovium Cantabrigiæ. Ille autem re-'sponsum dedit, hanc infinitarum serierum doctrinam à Newtono 'biennium ante, excogitatam fuisse, quàm ederetur Mercatoris Lo-'garithmotechnia, & generaliter omnibus figuris applicatam; si-'mulque transmisit D. Newtoni opus manuscriptum.' Horum autem librorum posterior prodiit circa finem anni 1668; Barrovius verò dictum serierum compendium Collinio misit, Julio insequente; ut ex tribus ejus epistolis constat. Collinius porro, in literis ad D. Strode 26 Julii 1672, sic de eo compendio scribit: 'Exemplar ejus (Logarithmotechniæ) misi Barrovio Cantabrigiam, 'qui quasdam Newtoni chartas extemplo remisit; è quibus & 'aliis, quæ prius ab auctore cum Barrovio communicatæ fuerant, 'patet illam methodum à dicto Newtono aliquot annis antea excogitatam, & modo universali applicatam fuisse. Ita ut ejus ope 'in quâvis figurâ curvilineâ propositâ, quæ unâ vel pluribus proprietatibus definitur, quadratura vel area dictæ figuræ, accurata 'si

Ib. N° VII. Ib. N° I. Ib. N° XXIV.

'si possibile sit, sin minus infinitè vero propinqua, evolutio vel 'longitudo lineæ curvæ, centrum gravitatis figuræ, Solida ejus 'rotatione genita, & eorum superficies, sine ullâ radicum extrac-'tione obtineri queant. Postquam intellexerat D. Gregorius hanc 'methodum, à D. Mercatore in Logarithmotechniâ usurpatam, & 'hyperbolæ quadrandæ adhibitam, quamque adauxerat ipse Gre-'gorius, jam universalem redditam esse, omnibusque figuris ap-'plicatam, acri studio eandem acquisivit, multumque in eâ eno-'dandâ desudavit. Uterque D. Newtonus & Gregorius in animo 'habent hanc methodum exornare: D. Gregorius autem D. New-'tonum primum ejus inventorem anticipare haud integrum ducit.' In aliâ verò epistolâ, ad Oldenburgium scriptâ & cum D. Leibnitio communicandâ, datâque 14 *Jun.* 1676, hæc memorat Collinius: 'Hujus autem methodi ea est præstantia; ut, cùm tam latè pa-'teat, ad nullam hæreat difficultatem. Gregorium autem alios-'que in eâ fuisse opinione arbitror, ut quicquid uspiam antea de 'hâc re innotuit, quasi dubia diluculi lux fuit, si cum meridianâ 'claritate conferatur.'

Ib. N° XLV.

Porro hic Newtoni tractatus primùm typis editus est à D. Guli-elmo Jones, qui apographum ejus repperit in scriniis Collinii, ipsius manu scriptum; & postea cum originali contulit, à D. Newtono mutuato. Continet autem prædictam generalem methodum Analyseos, monstrantem quomodo resolvendæ sunt finitæ æquationes in infinitas; utque, per methodum momentorum, applicandæ sunt æquationes, tam finitæ quàm infinitæ, ad omnium problematum solutionem. Incipit verò, ubi finem fecit Wallisius, & methodum quadraturarum super tres regulas struit. A. D. 1710.

Wallisius anno 1655, *Arithmeticam* suam *Infinitorum* in lucem dedit; per cujus libri Prop. LIX. si abscissa cujusvis curvilinearis figuræ vocetur x, & n atque m sint numeri, & ordinatæ ad rectos angulos erectæ sint $x^{\frac{m}{n}}$; area figuræ erit $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$. Atque hoc assumitur à D. Newtono, tamquam prima regula, super quam fundat suam Curvarum quadraturam. Wallisius autem propositionem hanc demonstravit gradatim, per multas particulares propositiones; tandemque omnes in unam collegit per tabulam casuum. Newtonus verò omnes casus in unum reduxit, per dignitatem

Ib. N° II.

tatem cum indefinito indice: & ſub extremo Compendii, ſemel ſimulque demonſtravit per methodum ſuam momentorum; primuſque indefinitos dignitatum indices in operationes analyſeos introduxit.

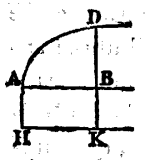
Cæterum per CVIII Propoſitionem *Arithmeticæ Infinitorum* Walliſii, perque plures alias propoſitiones quæ ſequuntur; ſi Ordinata compoſita fuerit ex duabus vel pluribus ordinatis cum ſignis ſuis + & − acceptis, Area compoſita erit ex duabus vel pluribus areis cum ſignis ſuis + & − acceptis reſpectivè. Atque hoc
Ib. N° III. à D. Newtono aſſumitur, tamquam regula ſecunda, ſuper quam inſtituit ſuam quadraturarum methodum.

Ib. N° IV. Tertia verò regula eſt, ut reducantur fractiones & radicales, & affectæ radices æquationum in ſeries convergentes, cùm quadratura non aliter ſuccedat: & ut per regulas primam ac ſecundam quadrentur figuræ, quarum Ordinatæ ſunt ſinguli termini ſerierum.

Ib. N° XLVIII. Newtonus, in epiſtolâ ad Oldenburgium ſcriptâ 13 *Jun.* 1676, & Leibnitio tranſmiſſâ, modum docuit reducendi quamlibet dignitatem cujuſlibet binominalis in ſeriem convergentem; & per eam ſeriem quadrandi Curvam, cujus Ordinata eſt illa dignitas. Et à D. Leibnitio rogatus, ut fontem hujus theorematis explicare
Ib. N° LV. vellet, reſcripſit per epiſtolam datam 24 *Octob.* 1676; ſe paulo ante peſtem, quæ Londini graſſabatur anno 1665, cùm legeret Arithmeticam Infinitorum Walliſii, cogitaretque de interpolandâ ſerie x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$, &c. inveniſſe aream circuli eſſe $x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{9}x^9$ − &c. & perſequendo methodum interpolationis, ſe prædictum theorema excogitâſſe; atque ejus ope reductionem fractionum & ſurdarum in ſeries convergentes, per diviſionem & radicum extractionem, inveniſſe; ac tum ad affectarum radicum extractionem perrexiſſe. Atquæ hæ
Ib. N° IV. reductiones regula ſunt tertia.

Cùm in hoc ſerierum compendio trinas has regulas explicuiſſet Newtonus, variiſque exemplis eas illuſtrâſſet; deſignavit is ideam deducendi aream ex ordinatâ, conſiderando aream tamquam
Ib. N° X. quantitatem naſcentem, & augeſcentem ſive creſcentem per fluxionem continuam, in proportione longitudinis ordinatæ, & ſuppenendo abſciſſam uniformiter creſcere in proportione ad tempus. Atque

Atque ex momentis temporis, nomen *Momentorum* indidit momentaneis augmentis, ſive partibus areæ atque abſciſſæ, infinitè parvis, quæ in momentis temporis generantur. Momentum lineæ punctum vocavit, ex mente Cavallerii; quamvis non ſit punctum geometricum, ſed lineola infinitè brevis: momentum autem areæ vel ſuperficiei vocavit lineam, ſecundum eundem Cavallerium; licet non ſit linea geometrica, ſed ſuperficies latitudine infinitè exili. Cúmque Ordinatam conſideraret tanquam momentum areæ, eo nomine intellexit rectangulos ſub geometricâ Ordinatâ & momento abſciſſæ; licet illud momentum non ſemper exprimatur. *Sit* ABD, inquit, *Curva quævis*, & AHKB



rectangulum, cujus latus AH, *vel* KB, *eſt unitas. Et cogita rectam* DBK, *uniformiter ab* AH, *motam areas* ABD & AK *deſcribere: & quòd* [recta] BK (1) *ſit momentum quo* [area] AK (x), & [recta] BD (y) *momentum quo* [curvilinea] ABD *gradatim augetur: & quòd ex momento* BD, *perpetim dato, poſſis per præcedentes* [tres] *regulas aream* ABD, *ipſo deſcriptam, inveſtigare; ſive cum areâ* AK (x), *momento* 1 *deſcriptâ, conferre.* Hæc Newtoni idea eſt operationis in curvis quadrandis: quoque modo hanc ad alia problemata applicet, in verbis proxime ſequentibus monſtrat: *jam*, inquit, *quâ ratione ſuperficies* ABD, *ex momento ſuo perpetim dato, per præcedentes* [tres] *regulas elicitur, eádem quælibet alia quantitas ex momento ſuo ſic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.* Cæterùm poſt Ib. N° X, XII.
aliquot exempla, methodum addit regreſſionis ab areâ, arcu, ſolidove contento ad abſciſſam; docetque ut eadem methodus extendat ſe ad Curvas mechanicas, determinando earum ordinatas, tangentes, areas, longitudines, &c. Utque aſſumendo quamvis æquationem exprimentem relationem inter aream abſciſſamque Curvæ, per hanc methodum invenias Ordinatam. Atque hoc eſt fundamentum methodi fluxionum & momentorum, quod Newtonus, in literis datis 24 *Octob.* 1676, hâc ſententiâ comprehendit: *Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones; & vice verſâ.*

In hoc *Compendio* uniformem fluxionem temporis, vel cujuſvis Ib. N° X, XII.
exponentis temporis, per unitatem repreſentat Newtonus; momentum autem temporis, vel exponentis ſui, per literam o; fluxiones

verò

verò aliarum quantitatum, per quævis alia ſymbola; ac momenta earum quantitatum, per rectangulos ſub illis ſymbolis & literâ *o*; aream porro Curvarum, per ordinatam in quadrato incluſam; aream pro fluente, & ordinatâ pro ejus fluxione poſitis. Cùm autem propoſitionem aliquam demonſtrat, literam *o* adhibet pro finito momento temporis vel ejus exponentis, aut cujuſvis quantitatis uniformiter fluentis; totamque calculationem abſolvit per geometriam veterum, in finitis figuris ſive ſchematibus, ſine ullâ approximatione: & cùm primùm calculatio peracta eſt, & æquatio reducta, ſupponit momentum *o* decreſcere in infinitum, atque evaneſcere. Cùm verò non demonſtrat, ſed ſolùm inveſtigat propoſitionem; quo citiùs rem conficiat, ſupponit momentum *o* eſſe infinitè parvum, & in ſcribendo illud negligit, omnibuſque approximationum modis utitur, quos nullum in concluſione errorem parituros autumat. Prioris generis ſpecimen habes ſub finem Compendii, ubi primam trium illarum regularum, quas initio libri poſuerat, erat demonſtraturus. Secundi generis exempla ibidem habes; cùm invenit curvarum linearum longitudinem *p.* 15*; & cùm eruit ordinatas, areas, & longitudines Curvarum mechanicarum *p.* 18, 19†: narratque, quâ viâ per eandem methodum tangentes duci poſſint ad Curvas mechanicas, *p.* 19‡. Atque in epiſtolâ datâ 10 *Decemb.* 1672, addit, problemata de curvaturâ Curvarum, ſeu geometricarum ſive mechanicarum, per eandem methodum ſolvi. Ex quibus manifeſtum eſt, ſe jam tum ſuam methodum ad ſecunda ac tertia momenta extendiſſe: cùm enim areæ Curvarum conſiderantur tamquam fluentes, ut in hâc Analyſi fieri ſolet, ordinatæ exprimunt fluxiones primas; tangentes autem datæ ſunt per fluxiones ſecundas, & curvaturæ per tertias. Et vel in Analyſi hâc *p.* 16§. ubi Newtonus ait, *Momentum eſt ſuperficies, cùm de Solidis*; *& linea, cùm de ſuperficiebus*; *& punctum, cùm de lineis agitur*; perinde eſt ac ſi dixiſſet, cùm Solida conſiderantur tamquam fluentia, eorum momenta ſuperficies ſunt; & eorum momentorum momenta, vel ſecunda momenta, lineæ ſunt; & horum momentorum momenta, ſive tertia momenta, puncta ſunt, ſecundum ſententiam Cavallerii: atque in *Principiis* ſuis *Philoſophiæ*, ubi frequenter conſiderat lineas tamquam fluentes, à punctis deſcriptas, quorum velocitates creſcunt vel decreſcunt,

Ib. N° XII.

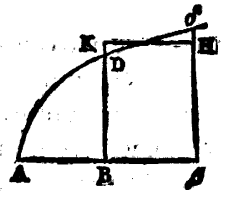
Ib. N° XXVI.

* Tom. I. p. 275. † Tom. I. p. 278, 279. ‡ Tom. I. p. 279. § Tom. I. p. 276.

velocitates

velocitates ſunt fluxiones primæ; & earum incrementa, ſecundæ. Ac problema illud, *Datâ æquatione fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice verſâ*, ad fluxiones omnes pertinet; ut conſtat ex ſolutionis ejus exemplis à Walliſio publicatis, Tom. II, operum ſuorum, p. 391, 392, 396. Quin & in Lib. II. *Principiorum Philoſophiæ*, Prop. XIV. differentiam ſecundam Newtonus appellat differentiam momentorum.

Quoque meliùs intelligas, quo calculationis genere Newtonus uſus fuerit anno 1669, vel ante, cùm hoc analyſeos ſuæ compendium ſcripſit; ponam hîc ejus demonſtrationem primæ illius regulæ, ſuprà memoratæ. N° XII.



'Sit Curvæ alicujus, AD∂, baſis AB=*x*; perpendiculariter applicata BD=*y*; & area ABD =*z*, ut prius. Item ſit Bβ=*o*, BK=*v*, & rectangulum BβHK (*ov*) æquale ſpatio Bβ∂D.

'Eſt ergo Aβ=*x*+*o*, & A∂β=*z*+*ov*. His præmiſſis, ex relatione inter *x* & *z*, ad arbitrium aſſumptâ, quæro *y*; ut ſequitur. Pro lubitu ſumatur [æquatio] $\frac{1}{3}x^3=z$, ſive $\frac{1}{9}x^3=zz$. Tum *x*+*o* (Aβ) pro *x*, & *z*+*ov* (A∂β) pro *z* ſubſtitutis, prodibit $\frac{1}{9}$ in $x^3+3xxo+3xoo+o^3$ = (ex naturâ Curvæ) $z^2+2zou+o^2v^2$. Et ſublatis $\frac{1}{9}x^3$ & *zz* æqualibus, reliquiſque per *o* diviſis, reſtabit $\frac{1}{9}$ in $3x^2+3xo+o^2=2zv+ov^2$. Si jam ſupponamus Bβ in infinitum diminui, & evaneſcere, ſive *o* eſſe nihil; erunt *v* & *y* æquales, & termini per *o* multiplicati evaneſcent; ideoque reſtabit $\frac{1}{9}\times 3xx=2zv$, ſive $\frac{1}{3}xx\,(=zy)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}\left(=\frac{x^1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=y$. Quare contra, ſi $x^{\frac{1}{2}}=y$, erit $\frac{1}{3}x^3=z$.

'Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n}\times ax^{\frac{m+n}{n}}=z$: ſive ponendo $\frac{na}{m+n}=c$, & $m+n=p$; ſi $cx^{\frac{p}{n}}=z$, ſive $c^nx^p=z^n$; tum *x*+*o* pro *x*, & *z*+*ov* (ſive quod perinde eſt *z*+*oy*) pro *z* ſubſtitutis, prodit c^n in x^p+pox^{p-1}, &c. $=z^n+noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe [ſerierum] terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis c^nx^p & z^n æqualibus, reliquiſque per *o* diviſis, reſtat $c^npx^{p-1}=nyz^{n-1}$ $=\frac{nyz^n}{z}=\frac{nyc^nx_p}{\frac{p}{cx^n}}$; ſive dividendo per c^nx^p, erit $px^{-1}=\frac{ny}{\frac{p}{cx^n}}$; ſive

'$pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc eſt
'm pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare è contra ſi $ax^{\frac{m}{n}} = y$,
'erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.'

Eâdem operandi ratione, etiam regula ſecunda demonſtrari poteſt. Et ſi quælibet æquatio aſſumatur, relationem exprimens inter abſciſſam & aream; ordinata inveniri poterit eâdem ratione; ut in proximis Analyſeos verbis indicatur. Et ſi illa ordinata, in unitatem ducta, pro areâ novæ Curvæ ponatur, novæ illius Curvæ ordinata eâdem methodo inveniri poteſt; atque ita in perpetuum. Hæque ordinatæ primam, ſecundam, tertiam, quartam, ſequenteſque fluxiones primæ areæ repræſentant.

Hæc Newtoniana fuit operandi methodus, eo tempore quo compendium illud ſuæ Analyſeos ſcripſit: eâdemque methodo uſus eſt in libro Quadraturarum, atque in hunc uſque diem adhuc utitur.

In exemplis, quibus methodum ſerierum & momentorum in Compendio hoc illuſtrat, hæc ſunt: Eſto radius circuli 1; arcus, z; ſinus, x; æquationes pro inveniendo arcu, cujus ſinus eſt datus, & ſinu, cujus arcus eſt datus, erunt

N° X. $$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \&c.$$
$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \&c.$$

N° XIV, XIX, XX. Hujus methodi notitiam Collinius Gregorio dedit ſub autumno anni 1669; ac Gregorius, ope unius ex ſeriebus Newtonianis, poſt integrum annuum laborem, methodum demum invenit *Decemb.* 1670: & bimeſtri poſt tempore, in epiſtolâ datâ 15 *Feb.* 1671, varia theoremata, per eam reperta, Collinio miſit; datâ etiam communicandi licentiâ. Collinius autem facillimus erat ad communicandum quæcunque vel à Newtono vel Gregorio accepiſſet; ut patet ex epiſtolis in hoc Commercio jam publicatis. In ſeriebus, quas in dictâ epiſtolâ miſit Gregorius, hæ duæ ſunt: Eſto radius circuli r; arcus, a; & tangens, t: æquationes, pro inveniendo arcu cujus tangens data eſt, & tangente cujus arcus datus eſt, erunt hæ,

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \&c.$$
$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \&c.$$

Eo ipſo anno 1671 D. Leibnitius duos tractatus edidit Londini; unum Societati Regiæ, alterum Academiæ Scientiarum *Pariſienſi* dedicatum; & in prioris dedicatione commercium ſuum epiſtolare cum D. Oldenburgio memorat.

Menſe *Feb.* 167$\frac{1}{3}$, cùm, in ædibus D. Boyle, Leibnitius in D. Pel- N° XXX.
lium incidiſſet, ſibi arrogare viſus eſt differentialem methodum Moutoni; cúmque Pellius oſtendiſſet methodum illam non novam eſſe, ſed Moutoni, perſtitit nihilominus Leibnitius in vindicandâ ſibi inventione illâ; præ ſe ferens, ſuo ſe marte inveniſſe, Moutoniani operis ignarum, multumque eam promoviſſe.

Cùm Newtoni ſerierum una Gregorio miſſa eſſet, tentavit ille eam deducere ex ſeriebus ſuis, inter ſe combinatis; ut ipſe in epiſtolâ narrat datâ 19 *Decemb.* 1670. Ac per ſimilem aliquam methodum Leibnitius, priuſquam Londino diſcederet, repperiſſe videtur ſummam ſerici fractionum decreſcentium in infinitum, N° XXX.
quarum numerator eſt numerus datus, denominatores autem ſunt triangulares, vel pyramidales, vel triangulo-triangulares, &c. Ingens verò myſterium! De ſerie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\&c.$ ſubduc omnes terminos præter primum, & remanebit 1 $(=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\&c.) = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\&c.$ Et ab hâc ſerie deme omnes terminos, excepto primo, & remanebit $\frac{1}{2} = \frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\frac{2}{4\times 5\times 6}+\&c.$ Et à priore ſerie deduc omnes terminos præter duos primos, & remanebit $\frac{1}{2} = \frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{2\times 4}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{4\times 6}+\&c.$

Sub finem *Febr.* vel initium *Martii*, 167$\frac{1}{3}$, Leibnitius, Londino N° XXXI.
relicto, Pariſios ſe contulit; & ad uſque menſem Junium ſequentem commercium cum Oldenburgio habuit: deinde Algebram & Geometriam ſublimiorem didicit, & menſe *Julio* anni 1674, N° XXXII.
commercium cum Oldenburgio renovavit; ſcribens ſe mirificum habere theorema, quod daret circuli, vel ejus ſectoris cujuſcunque, aream accuratè in ſerie numerorum rationalium; *Octobri* autem inſequente ſcripſit, ſe inveniſſe circumferentiam circuli in ſerie ſimpliciſſimorum numerorum; & eâdem *methodo* (ſic enim theorema illud nominat) quemvis arcum, cujus ſinus datus ſit, poſſe inveniri

veniri in ſimili ſerie, licet proportio ad totam circumferentiam ignoretur. Theorema ergo iſtud hoc efficiebat; ut inveniretur quivis ſector, vel arcus, cujus ſinus datus ſit. Si ignota eſſet arcûs proportio ad circumferentiam totam, theorema, ſive methodus iſta, tantummodo arcum exhibuit; ſin nota eſſet, etiam integram circumferentiam dedit: & proinde erat theorema prius illud ex duobus ſupradictis Newtoni. Demonſtratio vero hujus theorematis Leibnitio tum non innotuit. Quippe in epiſtolâ datâ 12 *Maii* 1676, rogavit Oldenburgium, ut demonſtrationem ejus à Collinio ſibi pararet; eam ſignificans methodum, per quam Newtonus id invenerat. N° XLIV.

In epiſtolâ à Collinio ſcriptâ, datâque 15 *Apr.* 1675, Oldenburgius ad Leibnitium miſit octo ex Newtonianis & Gregorianis ſeriebus; in quibus erant duæ illæ Newtoni ſupradictæ, pro inveniendo arcu, cujus ſinus datus eſt, & ſinu, cujus datus eſt arcus; duæque illæ Gregorii jam antè memoratæ, pro inveniendo arcu, cujus tangens data eſt, & tangente cujus datus eſt arcus. Leibnitius verò in reſponſo dato 20 *Maii* 1675, ſe epiſtolam illam accepiſſe his verbis confitebatur. *Literas tuas multâ fruge algebraicâ refertas accepi; pro quibus tibi & doctiſſimo Collinio gratias ago. Cùm nunc, præter ordinarias curas, mechanicis imprimis negotiis diſtrahar, non potui examinare ſeries quas miſiſtis, ac cum meis comparare. Ubi fecero, perſcribam tibi ſententiam meam: nam aliquot jam anni ſunt, quod inveni meas viâ quâdam ſic ſatis ſingulari.* N° XXXVI. N° XXXVII.

Nunquam tamen poſtea, vel * agnovit Leibnitius ſe recepiſſe illas ſeries; vel indicavit, quâ in re ſuæ ab illis differrent; vel unquam ullas alias protulit, præter illas ab Oldenburgio miſſas, aut ſeries numerales ex eis deductas in caſibus particularibus. Quid autem egerit cum Gregorii ſerie, pro inveniendo arcu cujus tangens data eſt, ipſe narrat in Actis Eruditorum menſis *April.* 1691, p. 178. *Jam, inquit, anno* 1675, *compoſitam habebam opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ, ab amicis ab illo tempore lectum, &c.* Per theorema pro tranſmutandis figuris, ſimile illis Barrovii & Gregorii, jam tandem invenerat ſeriei hujus demonſtrationem; atque

* Cùm hæc recenſio ſcriberetur, non agnoverat; ſed anno ſubſequente, in epiſtolâ ad Cometiſam

atque id erat Opuſculi iſtius argumentum. Nondum tamen acquiſiverat cæterarum demonſtrationem; & occaſionem nactus hujus quoque expetendæ, ſequentem epiſtolam Oldenburgio ſcripſit 12 *Maii*, 1676, Pariſiis datam:

Cùm Gregorius Mohr Danus nobis attulerit communicatam ſibi à doctiſſimo Collinio veſtro expreſſionem rationis inter arcum & ſinum, per infinitas ſeries ſequentes; poſito ſinu x, *arcu* z, *radio* 1, N° XLIV.

$$z = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \&c.$$

$$x = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 - \tfrac{1}{5040}z^7 + \tfrac{1}{362880}z^9 - \&c.$$

Hæc, INQUAM, *cùm nobis attulerit ille, quæ mihi valdè ingenioſa videntur, & poſterior imprimis ſeries elegantiam quandam ſingularem habeat: ideo rem gratam mihi feceris, vir clariſſime, ſi demonſtrationem tranſmiſeris. Habebis viciſſim mea, ab his longè diverſa, circa hanc rem meditata; de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perſcripſiſſe credo, demonſtratione tamen non additâ, quam nunc polio. Oro ut Clariſſimo Collinio multam à me ſalutem dicas: is facilè tibi materiam ſuppeditabit ſatisfaciendi deſiderio meo.*

Hîc, qui illud INQUAM legerit, facilè exiſtimaverit Leibnitium duas illas ſeries nunquam antea vidiſſe; *diverſaque ejus circa hanc rem meditata* prorſus aliud eſſe, quàm ſerierum unam, quas anno ſuperiore receperat ab Oldenburgio, demonſtrationemque iſtam, quam tunc expoliret, quantivis pretii fore; quippe quam pro Newtonianæ methodi munere ἀντίδωρον acceptiſſimum erat miſſurus.

Hâc epiſtolâ receptâ, Oldenburgius Colliniuſque, literis ad Newtonum ſcriptis, vehementer operam dabant, ut ipſe Newtonus methodum ſuam deſcriberet, Leibnitio communicandam. Quam ob rem Newtonus epiſtolam ſcripſit, 13 *Junii* 1676 datam: in quâ eo modo ſerierum methodum deſcripſit, quo antea in ſupradicto compendio fecerat; hâc tamen differentiâ: hîc fuſè deſcripſit reductionem dignitatis binomialis in ſeriem; at reductionem per diviſionem, radicumque affectarum extractionem, leviter tantùm attigit: illîc reductionem fractionum & radicalium in ſeries, per diviſionem radicumque extractionem, fuſè deſcripſit; at poſuit tantummodo duos primos terminos ſeriei, in quam dignitas binomialis reduci poſſit. Inter exempla, quæ epiſtola illa contiN° XLVIII.

ſam de *Kilmanſegg*, agnovit ſe tunc ab Oldenburgio accepiſſe [*Des Eſſais*] ſerierum ſpecimina.

nebat,

N° XLIX. nebat, erant ſeries pro inveniendo numero, cujus logarithmus ſit datus, & pro inveniendo verſo ſinu, cujus arcus datus ſit. Hæc epiſtola Pariſios miſſa eſt 26 *Jun.* 1676, unà cum manuſcripto quodam Collinii, extracta quædam continente ex epiſtolis Jacobi Gregorii.

N° XLVI. Gregorius enim prope finem anni 1675 diem ſuum obierat; Colliniuſque, exoratus à Leibnitio aliiſque ex Academiâ Scientiarum, extracta ex ejus epiſtolis confecit; quæ adhuc extant ipſius Collinii manu exarata, hoc titulo: *Extracta ex D.* Gregorii *literis, D.* Leibnitio *commodanda, qui exorandus eſt, ut cùm uſus eis fuerit, tibi ea remittat.* Porro hæc extracta ad Leibnitium miſſa fuiſſe, teſtis eſt ipſe Collinius, in epiſtolâ ad Davidem Gregorium, Jacobi τῦ μακαρίτυ fratrem, datâ 11 *Aug.* 1676; idque amplius conſtat ex Leibnitii Tſchurnhauſiique reſponſis.

Leibnitii reſponſum, Oldenburgio miſſum datumque 27 *Aug.*
N° LI. 1676, ſic incipit. *Literæ tuæ, die* Julii 26 *datæ, plura ac memorabiliora circa rem analyticam continent, quàm multa volumina ſpiſſa de his rebus edita. Quare tibi pariter, ac clariſſimis viris Newtono ac Collinio, gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum eſſe voluiſtis.* Et prope finem epiſtolæ, poſtquam Newtonia-
N° LIII. næ epiſtolæ contenta enarrâſſet, ita pergit: *Ad alia tuarum literarum venio, quæ doctiſſimus Collinius communicare gravatus non eſt. Vellem adjeciſſet appropinquationis Gregorianæ linearis demonſtrationem. Fuit enim his certè ſtudiis promovendis ampliſſimus.* Reſponſum verò Tſchurnhauſii, datum 1 *Sept.* 1676, cùm New-
N° LIV. toni de ſeriebus epiſtolam commemoràſſet, his verbis concluditur: *Similia porro, quæ hâc in re præſtitit eximius ille geometra Gregorius, memoranda certè ſunt. Et quidem optimè famæ ipſius conſulturi ſunt, qui, ipſius relicta manuſcripta luci publicæ ut exponantur, operam navabunt.* In priore epiſtolæ parte, ubi de ſeriebus Newtonianis loquitur, ſe eas leviter percurriſſe dicit, viſurum ſi fortè in eis inveniret Leibnitii ſeriem pro circulo hyperbolâve quadrandis. Quòd ſi in extractis Gregorianarum epiſtolarum eam inqui-
N° XX, XLVI. ſiviſſet, repperiſſet utique in epiſtolâ 15 *Feb.* 1671, ſuprà memoratâ. Quippe extracta illa, in quibus ea habetur epiſtola, ſuperſunt adhuc Collinii manu ſcripta.

Quamquam

Quamquam autem ſeriem illam, de quâ agitur, jam bis ab Oldenburgio Leibnitius accepiſſet, illam ipſam tamen, in epiſtolâ datâ 27 *Aug.* 1676, velut ſuam Oldenburgio remiſit, quaſi munus ἀνάθημα N° LII. ξιον pro methodo Newtoni; præ ſe ferens, ſe jam triennio antè, vel amplius, amicis ſuis Pariſienſibus eam oſtendiſſe; hoc eſt, biennio prius quàm eam accepiſſet in Oldenburgii epiſtolâ 15 *Apr.* 1675. Atqui illo tempore ſeriem illam ſuam eſſe neſciebat; uti conſtat N° XXXVI, XXXVII. ex ipſius reſponſo 20 *Maii* 1675, ſuprà citato. Fieri quidem potuit, ut Londini eam acceperit, ac amicis Pariſienſibus oſtenderit, trienniè prius quàm Oldenburgio eam remiſerit: minimè tamen conſtat, ſe ejus demonſtrationem tam maturè nactum eſſe. Hanc ubi primùm reppererat, tunc demum in opuſculo ſuo eam exhibuit, cumque amicis communicavit: idque ipſe narrat contigiſſe anno 1675. Illud verò probandum & evincendum eſt, ſe prius eam penes ſe habuiſſe, quàm ab Oldenburgio eam accepiſſet. Quippe in reſponſo ſuo ad Oldenburgium, nullam ex ſeriebus tunc miſſis ſuam eſſe ſciebat; celabatque ab amicis Pariſienſibus, ſe illam cum pluribus aliis ab Oldenburgio accepiſſe, ac vidiſſe ſe Gregorii epiſtolam, in quâ is Collinio eam miſerat, ineunte anno 1671.

In eâdem epiſtolâ, 27 *Aug.* 1676, poſtquam deſcripſerat quadraturam ſuam circuli hyperbolæque æquilateræ, hæc addit Leibnitius: *Viciſſim, ex ſeriebus regreſſuum, pro hyperbolâ hanc inveni:* N° LII. *Sit numerus aliquis, unitate minor,* $1-m$; *ejuſque logarithmus hyperbolicus,* l. *Erit* $m=\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1\times 2}+\frac{l^3}{1\times 2\times 3}-\frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4}+$ &c. *Si numerus ſit major unitate, ut* $l+n$, *tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodiit regula, quæ in Newtoni epiſtolâ expreſſa eſt: ſcilicet erit* $n=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1\times 2}+\frac{l^3}{1\times 2\times 3}+\frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4}+$ &c. *Quod regreſſum ex arcubus attinet, incideram ego directè in regulam, quæ ex dato arcu ſinum complementi exhibet. Nempe ſinus complementi* $=1-\frac{a^2}{1\times 2}+\frac{a^4}{1\times 2\times 3\times 4}-$ &c. *Sed poſtea quoque deprehendi, ex eâ illam nobis communicatam, pro inveniendo ſinu recto, qui eſt* $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times 2\times 3}+\frac{a^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}-$ &c. *poſſe demonſtrari.*

In his verbis Leibnitius ſibi laudem vindicat co-inventionis quatuor harum ſerierum: quamvis methodus eas inveniendi, ipſo

expetente,

expetente, ad eum missa fuerit; quam tamen nondum intelligere, nec comprehendere poterat. In eâdem utique epistolâ 27 *Aug.* 1676, orabat D. Newtonum, ut clariùs eam explicaret.

N° LII. Verba ipsius sunt: *Sed desideraverim, ut clarissimus Newtonus nonnulla quoque ampliùs explicet; ut originem theorematis, quod initio ponit: item modum quo quantitates p, q, r, in suis operationibus invenit: ac denique quomodo in methodo regressuum se gerat; ut cùm ex logarithmo quærit numerum. Neque enim explicat quomodo id ex methodo suâ derivetur.* Præ se tulit, inveniisse se duas series pro numero cujus logarithmus sit datus; & tamen in ipsâ eâ epistolâ Newtonum rogat, ut methodum eas ipsas duas series inveniendi sibi explicare velit.

Ubi hanc ejus epistolam accepisset Newtonus, rescripsit se omnes illas quatuor series jam ei communicâsse; quarum duæ priores una eademque series esset, literâ / pro logarithmo positâ cum suo signo + vel −; tertia verò excessûs esset radii supra sinum versum, pro quo jam antea series ad eum missa fuisset. His lectis, destitit Leibnitius ab inventione hâc sibi vindicandâ. Præter hæc,

N° LXIV. in eâdem epistolâ 24 *Oct.* 1676, quod petierat Leibnitius, methodos suas regressionis apertiùs explicavit. Leibnitius tamen, epistolâ 21 *Jun.* 1677 datâ, ulteriorem adhuc petebat explicationem: paulo verò post, cùm Newtoni epistolam repetitâ vice legisset,

N° LXV. rescripsit 12 *Jul.* 1677, se jam, quod ignoraverat, intelligere; & ex chartis suis repositis animadvertere, se jam antea unam ex Newtoni methodis adhibuisse; in exemplo verò, quo fortè esset usus, cùm nihil pulchri & elegantis proveniret, se, pro solitâ suâ impatientiâ, postea eam abjecisse. Plures itaque (si credere fas est) directas series, & proinde earum inveniendarum methodum habuit, priusquam inveniisset methodum inversam, ejusque postea oblitus esset. Quòd si chartas suas repositas diligentiùs pervolvisset, etiam hanc inversam methodum ibi repperisset. Sed, propriarum scilicet methodorum oblitus, Newtonianas desiderabat.

N° L. Cùm Newtonus, in epistolâ datâ 13 *Jun.* 1676, methodum suam serierum enarrâsset, hæc addidit: *Ex his videre, est quantum fines analyseos per hujusmodi infinitas æquationes ampliantur: quippe quæ, earum beneficio, ad omnia penè dixerim problemata, si numeralia*

meralia Diophanti & similia excipias, sese extendit. Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim quædam problemata, in quibus non licet ad series infinitas per divisionem vel extractionem radicum, simplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa reductionem infinitarum serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parciùs scribo, quòd hæ speculationes diu mihi fastidio esse cæperunt; adeo ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim. His D. Leibnitius, in epistolâ suâ N° LIII. 27 *Aug.* 1676 datâ, sic respondit: *Quod dicere videmini, pleraque difficultates (exceptis problematis Diophanteis) ad series infinitas reduci, id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira & implexa, ut neque ab æquationibus pendeant, neque ex quadraturis. Qualia sunt, ex multis aliis, problemata methodi tangentium inversæ.* Et D. Newtonus in epistolâ suâ 24 *Octob.* 1676 rescripsit: N° LXIV. *Ubi dixi omnia pene problemata solubilia existere; volui de iis præsertim intelligi, circa quæ Mathematici se hactenus occupárunt; vel saltem in quibus raticinia mathematica locum aliquem obtinere possunt. Nam alia sane adeo perplexis conditionibus implicita excogitare liceat, ut non satis comprehendere valeamus: & multo minùs tantarum computationum onus sustinere, quod ista requirerent. Attamen ne nimium dixisse videar, inversa de tangentibus problemata sunt in potestate, aliaque illis difficiliora. Ad quæ solvenda usus sum duplici methodo, unâ concinniori, alterâ generaliori. Utramque visum est impræsentia literis transpositis consignare, ne propter alios idem obtinentes, institutum in aliquibus mutare coger.* 5acedæioeffh &c. id est: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis, ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantùm in assumptione seriei pro quantitate quâlibet incognitâ, ex quâ cætera commodè derivari possunt; & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis, ad eruendos terminos assumptæ seriei.*

Ex duabus his Newtoni epistolis certò constat, jam tum, vel potius ante quinquennium, inveniisse illum reductionem problematum ad æquationes fluxionales & series convergentes: & ex responso Leibnitii ad harum epistolarum priorem, æquè certum est,

tum nondum hunc inveniſſe reductionem problematum, vel adæquationes differentiales, vel ad ſeries convergentes.

N° XXXVIII. Idque ampliùs ex eis manifeſtum eſt, quæ de hâc re ſcripſit Leibnitius anno 1691, in Actis Eruditorum: *Jam anno* 1675, *inquit, compoſitum habebam opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ, ab amicis ab illo tempore lectum; ſed quod, materiâ ſub manibus creſcente, limare ad editionem non vacavit, poſtquam aliæ occupationes ſupervenere; præſertim cùm nunc prolixiùs exponere, vulgari more, quæ analyſis noſtra paucis exhibet, non ſatis operæ pretium videatur.* Hanc Quadraturam, vulgari more compoſitam, proferre cœpit Pariſiis anno 1675. Anno proximo demonſtrationem ejus expoliebat, Oldenburgio mittendam, ceu methodi Newtonianæ ἀνταλλαγμα; N° XLIV. ut narrat in epiſtolâ 12 *Maii* 1676: & proinde, in epiſtolâ 27 *Aug.* 1676, eam miſit contextam & edolatam more vulgari. Hieme inſequente, in Germaniam reverſus per Angliam & Hollandiam, ut negotia publica capeſſeret, non vacavit ampliùs ad eam prælo parandam, nec operæ pretium exiſtimavit, ea more vulgari prolixiùs explicare, quæ analyſis ejus paucis exhibet. Hanc ergo novam analyſin excogitavit, jam in Germaniam reverſus; & proinde non ante annum 1677.

Idque ampliùs adhuc conſtat ex conſideratione ſequenti. Barrovius methodum ſuam tangentium anno 1670 in lucem edidit. Inde Gregorius methodum tangentium hauſit abſque computa- N° XVI. tione, uti ad Collinium ſcripſit 5 *Sept.* 1670. Newtonus autem ſuam tangentium cum Collinio communicavit anno 1672, in epiſ- N° XXVI. tolâ 10 *Decemb.* datâ, atque hæc ibi addidit. *Hoc eſt unum particulare, vel Corollarium potius, methodi generalis; quæ extendit ſe, citra moleſtum ullum calculum, non modò ad ducendum tangentes ad quaſvis Curvas, ſive geometricas, ſive mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas, aliaſve Curvas reſpicientes; verùm etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora problematum genera de curvitatibus, areis, longitudinibus, centris gravitatis Curvarum, &c. Neque, quemadmodum Huddenii methodus de maximis & minimis, ad ſolas reſtringitur æquationes illas, quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri iſti, quâ æquationum exegeſin inſtituo, reducendo eas ad ſeries infinitas.* D. autem Sluſius ſuam tangentium methodum ad Oldenburgium miſit 17 *Jan.* $167\frac{1}{3}$,

$167\frac{1}{3}$, eaque paulo poſt in Tranſactionibus eſt publicata. Comperta verò eſt eadem prorſus eſſe cum illâ Newtoni. Fundata erat ſuper tribus lemmatibus; quorum primum erat, *Differentia duarum dignitatum ejuſdem gradûs applicata ad differentiam laterum dat partes ſingulares gradûs inferioris ex binomio laterum, ut* $\frac{y^2-x^2}{y-x} = yy+yx+xx$, *id eſt, ſecundum notationem Leibnitii,* $\frac{dy^2}{dy} = 2yy$. Newtonianæ epiſtolæ, 10 *Decemb.* 1672, exemplar ad Leibni- N° XLVI. tium ab Oldenburgio miſſum eſt, inter chartas Jacobi Gregorii, unà cum aliâ Newtoni epiſtolâ 13 *Jun.* 1676 datâ. In his duabus cùm memoraret Newtonus, ſe generalem admodum analyſin habere, partim conſiſtentem ex methodo ſerierum convergentium, partim ex aliâ methodo, quâ applicabat eas ſeries ad ſolutionem omnium ferè problematum, exceptis forte numeralibus quibuſdam quales illæ ſunt Diophanti, eruebatque tangentes, areas, longitudines, contenta ſolida, centra gravitatis, curvitateſque Curvarum ac curvilinearum figurarum, ſeu geometricarum, ſive mechanicarum, minimè hærendo ad ſurdas; methodumque illam tangentium Sluſianam non niſi ramum, vel corollarium, eſſe alterius hujus methodi: his Leibnitius viſis, dum domum per Hollandiam reverteretur, tum demum meditabatur promotionem methodi Sluſianæ. Quippe in epiſtolâ ad Oldenburgium Amſte- N° LXV. lodami datâ $\frac{18}{28}$ *Novemb.* 1676, ſic ſcripſit: *Methodus tangentium, à Sluſio publicata, nondum rei faſtigium tenet. Poteſt aliquid ampliùs præſtari in eo genere, quod maximi foret uſûs ad omnis generis problemata, etiam ad meam (ſine extractionibus) æquationum ad ſeries reductionem. Nimirum poſſet brevis quædam calculari circa tangentes tabula, eouſque continuanda donec progreſſio tabulæ appareat; ut eam ſcilicet quiſque, quouſque libuerit, ſine calculo continuare poſſit.* Hæc verò erat illa promotio Sluſianæ methodi in methodum generalem, quam tum in animo verſabat Leibnitius: exque illis ejus verbis, *poteſt aliquid amplius præſtari in eo genere, quod maximi foret uſûs ad omnis generis problemata*, unica res hæc fuiſſe videtur, quâ ille methodum eam ad omnis generis problemata vellet extendere. Promotio verò per calculum differentialem nondum ei in mentem venerat; ea quippe referenda erit ad annum ſequentem.

N° LVII. In proximis literis, 24 *Octob.* 1676, mentionem analyſeos ſuæ fecit Newtonus, communicatæ per Barrovium cum Collinio anno 1669; alteriuſque item tractatûs, anno 1671 ſcripti, de ſeriebus convergentibus, deque alterâ illâ methodo, quâ tangentes ducerentur more Sluſii, maximæque ac minimæ determinarentur, & quadratura Curvarum expeditior fieret, idque non hæſitando ad radicales; quâque invenirentur ſeries, quæ certis caſibus finirentur, & quadraturam Curvarum darent in æquationibus finitis, ubi fieri poſſet. Fundamentum autem harum operationum concluſit in hanc ſententiam, ænigmaticè, ut ſuprà, expreſſam; *Datâ æ-*
N° LVII. *quatione fluentes quotcunque quantitates involvente, fluxiones invenire; & vice verſâ.* Quibus extra omnem dubitationem ponitur, ſe jam antea fluxionum methodum excogitâſſe. Quòd ſi reliqua in epiſtolâ illâ animadvertantur; conſtabit utique, ſe methodum illam jam tum ad magnam perfectionem provexiſſe, & feciſſe admodum generalem: cùm illæ in libro ſuo Quadraturarum propoſitiones, methodique ſerierum convergentium, lineamque curvam ducendi per quemvis datorum punctorum numerum, jam tum ſibi innotuerunt. Quippe, cùm fluxionum methodus haud procedit in æquationibus finitis, æquationes in ſeries convergentes reducit per theorema binomiale, perque fluentium extractionem ex æquationibus, fluxiones earum involventibus vel non involventibus. Cúmque æquationes finitæ defuerint, ſeries convergentes ex problematis conditionibus deducit; aſſumendo terminos ſerierum gradatim, & per conditiones illas determinando. Cúmque porro fluentes à fluxionibus ſint derivandæ, & fluxionum lex defuerit; legem eam invenit quamproximè, parabolicam lineam per quemlibet datorum punctorum numerum ducendo. Atque his progreſſionibus, vel illo tempore fluxionum ſuam methodum multo magis univerſalem fecerat Newtonus, quàm vel hodie eſt methodus Leibnitii differentialis.

Hæc Newtoni epiſtola, data 24 *Octob.* 1676, in fine menſis illius, vel initio ſequentis, viſa eſt Leibnitio Londini; ejuſque exemplar Hanoveriæ ei obtigit, initio veris inſequentis: atque ipſe
N° LXVI. paulo pòſt Leibnitius, epiſtolâ datâ 21 *Jun.* 1677, reſcripſit: *Clariſſimi Sluſii methodum tangentium nondum eſſe abſolutam, celeberrimo Newtono aſſentior. Et jam à multo tempore rem tangentium generaliùs*

generaliùs tractavi, ſcilicet per differentias ordinatarum—Hinc nominando in poſterum, dy *differentiam duarum proximarum* y, &c. Hîc demum primò cœpit Leibnitius differentialem ſuam methodum proferre: neque vel minimum argumentum eſt, prius eam ſe ſciviſſe, quàm poſtremas Newtoni literas accepiſſet. Dicit quidem, *jam à multo tempore rem tangentium generaliùs ſe tractaviſſe, ſcilicet per differentias ordinatarum.* Atqui in aliis literis eodem modo jam affirmaverat, ſe plures convergentes ſeries, tam directas quàm inverſas, inveniſſe; priuſquam ullam inveniendi eas methodum haberet: oblitumque jam fuiſſe inverſæ methodi ſerierum; priuſquam utilitatem ejus perciperet. Nemo in cauſâ propriâ ſibi teſtis eſt. Iniquus admodum fuerit judex, omniumque gentium jura conculcaverit, qui quemquam in ſuâ cauſâ pro legitimo teſte admiſerit. Illud ergo eſt probandum ac oſtendendum, jam antea methodum hanc Leibnitium inveniſſe, quàm literas illas Newtoni accepiſſet. Quòd ſi hoc nullo argumento confirmatum fuerit; de primo methodi inventore nulla ſupereſt controverſia.

Marchio Hoſpitalius, vir candidiſſimus, in præfatione libri ſui *De Analyſi quantitatum infinitè parvarum*, A. D. 1696 editâ, narrat; ut, paulo poſt tangentium methodum à Carteſio publicatam, Fermatius quoque methodum invenerit, quam ipſe tandem Carteſius ſuâ in pleriſque ſimpliciorem eſſe confeſſus eſt. ‘Nondum tamen, inquit Hoſpitalius, tam ſimplex erat, quàm poſtea ‘à Barrovio reddita eſt, naturam polygonorum propius conſiderando; quæ ſponte ſuâ menti objicit parvulum triangulum, ‘compoſitum ex particulâ Curvæ, inter duas ordinatas ſibi infinitè ‘propinquas jacentis, & ex differentiâ duarum iſtarum ordinatarum, duarumque itidem correſpondentium abſciſſarum. Atque hoc triangulum illi ſimile eſt, quod ex tangente et ordinatâ ‘& ſubtangente fieri debet: adeo ut per unam ſimplicem analogiam omnis jam calculatio evitetur, quæ & in Carteſianâ, & in ‘hâc ipſâ priùs methodo, neceſſaria erat. Quo tamen vel hæc, vel ‘Carteſiana, revocari ad uſus poſſet, neceſſariò tollendæ erant ‘fractiones & radicales. Ob hujus itaque calculi imperfectionem, introductus eſt ille alter celeberrimi Leibnitii; qui infignis geometra inde eſt exorſus, ubi Barrovius aliique deſierant.

‘Porro

'Porro hic ejus calculus in regiones hactenus ignotus aditum fe-
'cit; atque ibi tot & tanta patefecit, quæ vel doctiſſimos totius
'Europæ Mathematicos in admirationem conjecerunt, &c.'

Hactenus Hoſpitalius. Non viderat nimirum Newtoni analyſin, neque epiſtolas ejus 10 *Dec.* 1672, 13 *Jun.* 1676, & 24 *Octob.* 1676 datas: quarum nulla ante annum 1699 typis publicata eſt. Neſcius itaque Newtonum hæc omnia effeciſſe, atque indicâſſe Leibnitio, Leibnitium ipſum arbitratus eſt inde incepiſſe, ubi deſierat Barrovius; Leibnitium docuiſſe, quo pacto Barrovii methodus adhiberetur non hærendo ad fractiones & ſurdas, eâque re mirificè eam ampliâſſe & promoviſſe. Similiterque Jacobus Bernoullius in Actis Eruditorum *Jan.* 1691, p. 14, ſic memorat: *Qui calculum Barrovianum, quem in lectionibus ſuis geometricis adumbravit author, cujuſque ſpecimina ſunt: tota illa propoſitionum inibi contentarum farraga, intellexerit*; [calculum] *alterum, à domino Leibnitio inventum, ignorare vix poterit; utpote qui in priori illo fundatus eſt, & niſi fortè in differentialium notatione, & operationis aliquo compendio, ab eo non differt.*

Jam verò, in methodo ſuâ tangentium, Barrovius ducit duas ordinatas indefinitè ſibi invicem propinquas, literamque *a* ponit pro ordinatarum differentiâ, proque abſciſſarum differentiâ literam *e*; & in ducendis tangentibus has tres regulas ſtatuit: 1. *Inter computandum, inquit, omnes abjicio terminos, in quibus ipſarum* a *vel* e *poteſtas habeatur, vel in quibus ipſæ ducuntur in ſe. Etenim ipſi termini nihil valebunt.* 2. *Poſt æquationem conſtitutam, omnes abjicio terminos, literis conſtantes quantitates notas ſeu determinatas ſignificantibus, aut in quibus non habentur* a *vel* e. *Etenim illi termini ſemper ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt.* 3. *Pro* a *ordinatam, & pro* e *ſubtangentem ſubſtituo. Hinc demum ſubtangentis quantitas dignoſcitur.*

N° LXVI. Hactenus Barrovius. Leibnitius autem in epiſtolâ 21 *Jun.* 1677 ſuprà citatâ, in quâ primò differentialem ſuam methodum cœpit proponere, Barrovianam hanc tangentium methodum exactè ſecutus eſt; præterquam quòd literas, *a* & *e*, Barrovianas mutaverit in *dx* & *dy*. Quippe in exemplo, quod ibi exhibet, duas ducit parallelas lineas; atque omnes terminos ſub inferiore lineâ ponit, in quibus *dx* & *dy* (diviſim vel junctim) ſunt plus unius dimenſionis;

ſionis; omnes verò terminos, in quibus *dx* & *dy* abſunt, ſuper lineam ſuperiorem ſtatuit; &, ob rationes à Barrovio datas, omnes hos terminos facit evaneſcere. Jam autem per terminos in quibus *dx* & *dy* unius tantùm dimenſionis ſunt, quoſque inter binas illas lineas ponit, proportionem ſubtangentis ad ordinatam determinat. Rectè itaque animadvertit Marchio Hoſpitalius, Leibnitium inde incipere, ubi Barrovius deſierat; quippe utriuſque methodus tangentium prorſus eſt eadem.

Illud tamen Leibnitius de hâc methodo ſuperannotat; concluſionem nempe hujus calculi cum Sluſii regulâ coincidere; illamque regulam cuivis, qui hanc methodum intelligat, in promptu occurrere. Acutè ſanè: quippe in epiſtolis ſuis Newtonus indicaverat, Sluſianam regulam generalis ſuæ methodi Corollarium tantùm eſſe.

Cúmque in epiſtolis Newtonus dixiſſet, in ducendis tangentibus, maximiſque & minimis determinandis, methodum ſuam procedere, non hæſitando ad ſurdas; Leibnitius itidem annotat, ſic promoveri poſſe tangentium ſuam methodum, ut ad ſurdas & fractiones non hæreamus; & deinde addit: *Arbitror, quæ celare* N° LXVI. *voluit Newtonus, de tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento quadraturas quoque reddi faciliores, me in hâc ſententiâ confirmat; nimirum ſemper figuræ illæ ſunt quadrabiles, quæ ſunt ad æquationem differentialem.* Ex quibus ejus verbis, cum præcedente calculatione comparatis, non dubium eſt, quin tum ſatis ſciverit Leibnitius, Newtono ad manum fuiſſe methodum hæc omnia efficientem; apparetque eum tentaviſſe, ſi fortè differentialis tangentium methodus Barroviana ad eadem efficienda promoveri poſſet.

Differentialis hujus methodi elementa publicavit Leibnitius in Actis Eruditorum *Nov.* 1684; exempliſque ducendi tangentes, maximaſque & minimas determinandi, eam illuſtravit; quibus addit: *Et hæc quidem initia ſunt geometriæ cujuſdam multo ſublimioris, ad difficillima ac pulcherrima quæque etiam mixtæ matheſeos problemata pertingentis; quæ ſine calculo differentiali,* AUT SIMILI, *non temerè quiſquam pari facilitate tractabit.* Ubi, cùm dicit AUT SIMILI, ſine dubio ad Newtoni methodum reſpexit; totaque iſta

periodus

periodus nihil amplius in se habet, quàm quod Newtonus, in literis 1672 & 1676, de suâ generali methodo affirmaverat.

Et in Actis Eruditorum 1686, p. 279, *Malo autem, inquit Leibnitius,* dx *& similia adhibere, quàm literas pro illis, quia illud* dx *est modificatio quædam ipsius* x, *&c.* Sciebat scilicet in hâc methodo literas, more Barrovii, satis commodè posse adhiberi; malebat tamen novis symbolis uti, *dx* & *dy*; etsi nihil per hæc symbola fieri possit, quod non breviùs commodiúsque per singulas literas fiat.

Anno sequente in lucem edita sunt Newtoni Principia Philosophiæ; refertus liber ejusmodi problematibus, qualia Leibnitius difficillima appellaverat, *& pulcherrima etiam mixtæ matheseos problemata; quæ sine calculo differentiali, aut* SIMILI, *non temerè quisquam pari facilitate tractabit.* De hoc libro sic locutus est Marchio Hospitalius, *quasi totus ferè per hunc calculum compositus esset.* Et ipse adeo Leibnitius, epistolâ ad Newtonum datâ Hanoveriæ $\frac{7}{17}$ *Martii* 1693, ipsiusque manu scriptâ, quæ adhuc superest, & Regiæ Societati nuper est exhibita, eandem rem agnoscebat his verbis: *Mirificè ampliaveras geometriam tuis seriebus; sed edito Principiorum opere, ostendisti patere tibi, quæ analysi receptæ non subsunt. Conatus sum ego quoque, notis commodis adhibitis, quæ differentias & summas exhibeant, geometriam illam, quam transcendentem appello, analysi quodammodo subjicere; nec res malè processit.* Atque iterum in responso ad D. Fatium, quod habetur in Actis Eruditorum *Maii* 1700, p. 203, versu 21, id fassus est Leibnitius.

In secundi libri Principiorum lemmate secundo, elementa hujus calculi syntheticè demonstrata sunt; & in fine lemmatis est scholium, his verbis: *In literis, quæ mihi cum Geometrâ peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cùm significarem me compotem esse methodi determinandi maximas & minimas, ducendi tangentis & similia peragendi, quæ in terminis surdis, æquè ac in rationalibus, procederet; & literis transpositis hanc sententiam involventibus* [Datâ æquatione quotcunque quantitates fluentes involvente, fluxiones invenire, & vice versâ] *eandem celarem: rescripsit vir clarissimus* [anno proximo] *se quoque in ejusmodi methodum incidisse; & methodum suam communicavit, à meâ vix abludentem*

dentem, præterquam in verborum & notarum formulis. Utriusque fundamentum continetur in hoc lemmate. In illis epistolis, & in aliâ 10 *Decemb.* 1672 datâ (cujus exemplar post annos quatuor ab Oldenburgio ad Leibnitium mittebatur, ut suprà diximus) adeo apertè explicaverat suam methodum Newtonus; ut non difficile fuerit Leibnitio, subsidio methodi tangentium Barrovianæ, ex illis epistolis eam exsculpere. Certum tamen est, ex argumentis suprà allatis, non priùs eum sciviſſe eam, quàm epistolas illas legisset. N° XXVI.

Duarum Newtoni epistolarum, 13 *Jun.* & 24 *Octob.* 1676, exemplar ab Oldenburgio acceperat Wallisius, & ex eis plura publicaverat in Algebrâ suâ, Anglicè editâ 1683, Latinè autem 1693; pauloque pòst ex Hollandiâ admonitus est, ut epistolas illas integras publicaret; quia notiones de fluxionibus Newtonianæ cum plausu ibi per hominum ora ferrentur, sub nomine methodi differentialis Leibnitii. Quamobrem in præfatione primi suorum operum Tomi, A. D. 1695 editi, ejus rei mentionem injecit. Et in epistolâ ad Leibnitium, datâ 1 *Dec.* 1696, quæ in tertio tomo extat, hæc de eâ re habet: *Cùm præfationis præfigendæ postremum folium erat sub prælo, ejusque typos jam posuerant typothetæ; me monuit amicus quidam, harum rerum gnarus, qui peregrè fuerat, tum talem methodum in Belgio prædicari, tum illam cum Newtoni methodo fluxionum quasi coincidere. Quod fecit ut, translatis typis jam positis, monitum interseruerim.* Quin & in epistolâ ad Newtonum, datâ 10 *April.* 1695 & Regiæ Societati nuper exhibitâ, sic de eâ re verba facit: *Utinam typis ederes prolixas illas duas epistolas* Junii & Augusti (Octobrem *dicere debuit)* 1676. Operum Vol. II. p. 386.

‘ *Ex Hollandiâ certior factus sum, amicos ibi tuos hoc postulare;*
‘ *quia notiones tuæ de fluxionibus Leibnitio ibi ascribuntur, sub*
‘ *nomine calculi differentialis. Hoc ex Hollandiâ accepi, cùm totus*
‘ *hic tomus, præter partem præfationis, jam prælo subjectus esset; ita*
‘ *ut nihil aliud inferere hîc potuerim, dum cessarent operæ, præter*
‘ *brevem illam, quam ibi reperies, narrationem. Non tam æquus es*
‘ *vel tuo vel gentis tuæ honori, quàm oportebat: cùm res quantivis*
‘ *pretii tam diu in scriniis celas, donec alii honorem tibi debitum*
‘ *præripiant. Conatus sum in eo negotio debitum tibi reddere; do-*
‘ *leoque me non binas istas epistolas integras atque ἀυτολεξεὶ edidisse.*’

Porro illa brevis mentio, quam Wallisius præfationi illi inseruit, his verbis habetur: *In secundo volumine inter alia habetur Newtoni methodus de Fluxionibus, ut ille loquitur, consimilis naturæ cum Leibnitii, ut hic loquitur, calculo differentiali; quod, qui utramque methodum contulerit, satis advertat; utut sub loquendi formulis diversis: quam ego descripsi (Algebræ, Cap.* XCI. *&c. præsertim, Cap.* XCV.) *ex binis Newtoni literis, aut earum alteris,* Junii 13, *& Octob.* 24, 1676, *ad Oldenburgium datis, cum Leibnitio communicandis; iisdem ferè verbis, saltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur, ubi* METHODUM HANC LEIBNITIO EXPONIT, *tum ante* DECEM ANNOS *nedum plures* [id est anno 1666 vel 1665] *ab ipso excogitatam. Quod moneo, ne quis causetur, de hoc calculo differentiali nihil à nobis dictum esse.*

His ad hunc modum actis, anni sequentis mense Junio, editores Actorum Lipsiensium, vel potius, ut ex stylo colligitur, ipse Leibnitius, cùm de duobus prioribus Wallisii tomis narrationem contexunt, hujus in præfatione clausulæ mentionem fecerunt; quæstique sunt, non quòd dixerit Newtonum, in duabus illis epistolis, explicuisse Leibnitio fluxionum methodum, decennio antè vel amplius à se inventam; sed quòd, de calculo differentiali verba faciens, eamque ut ait ob rationem, *ne quis causetur de calculo differentiali nihil ab ipso dictum fuisse,* non monuerit lectorem, jam tum Leibnitium calculum illum penes se habuisse, cùm mutuæ illæ inter ipsum & Newtonum literæ, Oldenburgii operâ, hinc inde scriberentur. Et in pluribus post illa epistolis, inter Leibnitium & Wallisium de eâ re conscriptis, non negabat Leibnitius, Newtonum, toto ante eas literas datas decennio, dictam methodum invenisse; id quod affirmaverat ibi Wallisius: non præ se ferebat, tam maturè se suam methodum excogitâsse; nullo argumento probabat, se ante annum 1677 in eam incidisse; neque id ipsum probabat, nisi ex Newtoni concessu; non affirmabat ipse, se maturiùs habuisse; laudabat Newtonum, quòd in hâc re tam candidè egerit; concedebat, utramque methodum eodem in summâ recidere; seque idcirco solitum, communi Analyseos infinitesimæ nomine utramque indigitare: adjiciebat, sicuti Vietæ Cartesiique methodi, communi Analyseos specioſæ nomine ferebantur, licet in aliquibus differrent; ita fortè suam Newtonique methodos

thodos in aliquibus differre posse: nihilque sibi vindicabat, præterquam illa in quibus, ut ipsi videbatur, inter se differebant, notatione scilicet, æquationibus differentialibus & æquationibus exponentialibus. In epistolâ tamen 21 *Jun.* 1677, æquationes differentiales sibi ac Newtono communes esse existimabat. N° LXVI.

Hic erat, eo tempore, inter Wallisium & Leibnitium controversiæ status. Quadriennio vero pòst, cùm D. Fatius suspicionem injecerat, posse fieri ut Leibnitius, secundus calculi inventor, à Newtono, primo ejus ante multos annos inventore, nonnihil surripuerit; Leibnitius in responso suo, in Actis Eruditorum *Maii* 1700 edito, concedebat, Newtonum suâ solâ Minervâ methodum excogitâsse; neque negabat, Newtonum multis annis se priorem in eam incidisse: neque plus sibi arrogabat, quàm se quoque, propriâ Minervâ, ac sine ope Newtoni, eandem repperisse; præque se ferebat, tum cùm primùm eam typis ederet, nescîsse se quicquam præter methodum tangentium à Newtono inventum esse. Cúmque de sublimi quâdam parte methodi loqueretur, quâ Newtonus A. C. 1686, Solidum minimæ resistentiæ invenerat, hæc addidit: *Quam, inquit, methodum ante D. Newtonum & me nullus, quod sciam, geometra habuit; uti ante hunc, maximi nominis geometram,* NEMO, *specimine publicè dato, se habere probavit; ante dominos Bernoullios & me nullus communicavit.* Huc usque igitur inventoris primi nomen minimè sibi vindicavit Leibnitius; non ausus id facere ante obitum Wallisii, postremi illorum senum, qui, quæ inter Anglos & Leibnitium per annos quadraginta acta erant, optimè noverant. Decessit autem Wallisius mense *Octobri* 1703; Leibnitius verò sibi demum arrogare hoc cœpit *Januario* 1705.

Newtonus tractatum suum de Quadraturis edit 1704; is vero* diu ante editionem scriptus erat. Quippe plurima ex eo citata sunt in epistolis 24 *Octob.* & 8 *Novemb.* 1676. Spectat autem ad methodum fluxionum; & ne pro novo opere haberetur, iterabat id Newtonus, quod ante annos novem à Wallisio publicatum erat, nullo tum contradicente, hanc nempe methodum gradatim fuisse repertam, annis 1665 & 1666. Jam autem actorum Lipsi-

* De hoc tractatu Ralphsonus in historia sua fluxionum Cap. I. sic scripsit. "Newtonus anno "1704, parvum edidit tractatum; quem, circa annum 1676, ex tractatu antiquiore extraxit; "quemque doctus Halleius & ego, circa annum 1691, Cantabrigiæ in manibus nostris habuimus."

Porro illa brevis mentio, quam Wallisius præfationi illi inseruit, his verbis habetur: *In secundo volumine inter alia habetur Newtoni methodus de Fluxionibus, ut ille loquitur, consimilis naturæ cum Leibnitii, ut hic loquitur, calculo differentiali; quod, qui utramque methodum contulerit, satis advertat; utut sub loquendi formulis diversis: quam ego descripsi (Algebræ, Cap.* XCI. *&c. præsertim, Cap.* XCV.) *ex binis Newtoni literis, aut earum alteris,* Junii 13, *& Octob.* 24, 1676, *ad Oldenburgium datis, cum Leibnitio communicandis; iisdem ferè verbis, saltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur, ubi* METHODUM HANC LEIBNITIO EXPONIT, *tum ante* DECEM ANNOS *nedum plures* [id est anno 1666 vel 1665] *ab ipso excogitatam. Quod moneo, ne quis causetur, de hoc calculo differentiali nihil à nobis dictum esse.*

His ad hunc modum actis, anni sequentis mense Junio, editores Actorum Lipsiensium, vel potius, ut ex stylo colligitur, ipse Leibnitius, cùm de duobus prioribus Wallisii tomis narrationem contexunt, hujus in præfatione clausulæ mentionem fecerunt; quæstique sunt, non quòd dixerit Newtonum, in duabus illis epistolis, explicuisse Leibnitio fluxionum methodum, decennio antè vel amplius à se inventam; sed quòd, de calculo differentiali verba faciens, eamque ut ait ob rationem, *ne quis causetur de calculo differentiali nihil ab ipso dictum fuisse,* non monuerit lectorem, jam tum Leibnitium calculum illum penes se habuisse, cùm mutuæ illæ inter ipsum & Newtonum literæ, Oldenburgii operâ, hinc inde scriberentur. Et in pluribus post illa epistolis, inter Leibnitium & Wallisium de eâ re conscriptis, non negabat Leibnitius, Newtonum, toto ante eas literas datas decennio, dictam methodum invenisse; id quod affirmaverat ibi Wallisius: non præ se ferebat, tam maturè se suam methodum excogitâsse; nullo argumento probabat, se ante annum 1677 in eam incidisse; neque id ipsum probabat, nisi ex Newtoni concessu; non affirmabat ipse, se maturius habuisse; laudabat Newtonum, quòd in hâc re tam candidè egerit; concedebat, utramque methodum eodem in summâ recidere; seque idcirco solitum, communi Analyseos infinitesimæ nomine utramque indigitare: adjiciebat, sicuti Vietæ Cartesiique methodi, communi Analyseos speciosæ nomine ferebantur, licet in aliquibus differrent; ita fortè suam Newtonique methodos

thodos in aliquibus differre posse: nihilque sibi vindicabat, præterquam illa in quibus, ut ipsi videbatur, inter se differebant, notatione scilicet, æquationibus differentialibus & æquationibus exponentialibus. In epistolâ tamen 21 *Jun.* 1677, æquationes differentiales sibi ac Newtono communes esse existimabat. N° LXVI.

Hic erat, eo tempore, inter Wallisium & Leibnitium controversiæ status. Quadriennio vero post, cùm D. Fatius suspicionem injecerat, posse fieri ut Leibnitius, secundus calculi inventor, à Newtono, primo ejus ante multos annos inventore, nonnihil surripuerit; Leibnitius in responso suo, in Actis Eruditorum *Maii* 1700 edito, concedebat, Newtonum suâ solâ Minervâ methodum excogitâsse; neque negabat, Newtonum multis annis se priorem in eam incidisse: neque plus sibi arrogabat, quàm se quoque, propriâ Minervâ, ac sine ope Newtoni, eandem repperisse; præque se ferebat, tum cùm primùm eam typis ederet, nescîsse se quicquam præter methodum tangentium à Newtono inventum esse. Cúmque de sublimi quâdam parte methodi loqueretur, quâ Newtonus A. C. 1686, Solidum minimæ resistentiæ invenerat, hæc addidit: *Quam, inquit, methodum ante D. Newtonum & me nullus, quod sciam, geometra habuit; uti ante hunc, maximi nominis geometram,* NEMO, *specimine publicè dato, se habere probavit; ante dominos Bernoullios & me nullus communicavit.* Huc usque igitur inventoris primi nomen minimè sibi vindicavit Leibnitius; non ausus id facere ante obitum Wallisii, postremi illorum senum, qui, quæ inter Anglos & Leibnitium per annos quadraginta acta erant, optimè noverant. Decessit autem Wallisius mense *Octobri* 1703; Leibnitius verò sibi demum arrogare hoc cœpit *Januario* 1705.

Newtonus tractatum suum de Quadraturis edit 1704; is vero* diu ante editionem scriptus erat. Quippe plurima ex eo citata sunt in epistolis 24 *Octob.* & 8 *Novemb.* 1676. Spectat autem ad methodum fluxionum; & ne pro novo opere haberetur, iterabat id Newtonus, quod ante annos novem à Wallisio publicatum erat, nullo tum contradicente, hanc nempe methodum gradatim fuisse repertam, annis 1665 & 1666. Jam autem actorum Lipsi-

* De hoc tractatu Ralphsonus in historia sua fluxionum Cap. I. sic scripsit. "Newtonus anno "1704, parvum edidit tractatum; quem, circa annum 1676, ex tractatu antiquiore extraxit; "quemque doctus Halleius & ego, circa annum 1691, Cantabrigiæ in manibus nostris habuimus."

enſium editores (hoc eſt, ipſe Leibnitius) cùm de tractatu hoc
N° LXXIX. agerent, affirmabant Leibnitium fuiſſe primum ejus methodi inventorem, & Newtonum pro differentiis fluxiones ſubſtituiſſe. Atque hæc affirmatio ortum dedit præſenti controverſiæ.

N° LXXIX. Quippe D. Keillius, in epiſtolâ in Tranſactionibus Philoſophicis editâ, retorſit in eos hoc telum : *Fluxionum, inquiens, Arithmeticam ſine omni dubio primus invenit D. Newtonus ; ut cuilibet ejus epiſtolas, à Walliſio editas, legenti facilè conſtabit. Eadem tamen Arithmetica poſtea, mutatis nomine & notationis modo, à D. Leibnitio in Actis Eruditorum edita eſt.*

Newtonus, priuſquam vidiſſet id, quod in actis Leipſienſibus publicatum fuerat, ægrè tulit à D. Keillio hoc dictum eſſe ; ne fortè inde lis aliqua naſceretur. Leibnitius quoque, hoc acerbius interpretans quàm vel à Keillio cogitatum fuerat, in literis ad D.
N° LXXX. Sloane datis 4 *Martii* 1711, de hoc ut calumniâ queſtus eſt; petiitque, ut Regia Societatis injungeret Keillio, palinodiam ut publicè caneret. Keillius verò id quod ſcriptum erat probaturum ſe ac defenſurum profitetur ; licentiâ à Newtono, cui quod in Actis Lipſienſibus dictum eſt oſtendebatur, impetratâ. Leibnitius au-
N° LXXXV. tem, in alterâ ad D. Sloane epiſtolâ 29 *Decemb.* 1711 datâ, neglectâ accuſationis ſuæ probatione, candorem modò ſuum prædicare, de quo vel dubitare incivile foret ; non modum oſtendere, quo methodum inveniſſet; in Actis Lipſienſibus ſuum cuique datum eſſe; ſe inventionem novem annis (ſeptem credo dicere debuit) penes ſe celaviſſe, ne quiſquam (Newtonum intelligit) eam
6 ſibi præripuiſſe glorietur ; Keillium eſſe hominem juvenem, rerum anteactarum ignarum ; dixiſſe illud, Newtono nolente ; rixoſum porro hominem eſſe, cui ſilentium imponi debeat ; ſe cupere, ut Newtonus ipſe ſententiam de hâc re ſuam pronuntiaret. Atqui ſatis noverat, nihil amplius Keillium dixiſſe, quàm quod tredecim ante annis, nullo tum contra eunte, dixerat Walliſius : noverat Newtonum ſententiam de hâc re tuliſſe, in introductione ad librum Quadraturarum, priùs in lucem editum, quàm hæc lis moveretur. Walliſius verò jam ad plures abierat : qui reſtabant in Angliâ Mathematici, pro noviciis habentur : de cujuſvis candore Leibnitius jure ſuo dubitare volet ; Newtonus denique, niſi

vel diſſimulaverit rem, vel abnegaverit, in rixas & moleſtias trahendus eſt.

Regia itaque Societas, cujus auctoritati non minus Leibnitius, quàm Keillius (uterque ſcilicet in ea Socii) parere debebant, bis à Leibnitio huc provocata, nefaſque eſſe exiſtimans, vel damnare vel notare Keillium, re nondum examinatâ ; ſcienſque nec Newtonum neque Leibnitium, qui in vivis ſoli vel ſcirent quid, vel meminiſſent, quod in his rebus ante annos quadraginta actum ſit, in hâc Keillii cauſâ teſtes eſſe poſſe ; negotium id dederunt numeroſo ex Societate conſeſſui, ut excuterent veteres in Archivis ſuis Epiſtolas & Chartas, & quid in eis de hoc negotio reperiſſent, So- N° LXXXVI.
cietati exponerent : quam expoſitionem ut primùm Societas acceperat, & ipſam, & Epiſtolas, Chartaſque ipſas, in publicum edi juſſit. Ceterùm ex illis id Conſeſſui compertum viſum eſt, Newtonum anno 1669, vel antea, methodum illam penes ſe habuiſſe; Leibnitium verò non ante annum 1677.

Ut methodi differentialis primum ſe auctorem venditaret Leibnitius, inſimulavit Newtonum, literâ *o*, more vulgari, pro dato incremento τῦ *x* primò fuiſſe uſum ; qui mos differentialis methodi utilitates tollit : poſt edita verò Principia mutaviſſe *o* in $\dot{x}$, ſubſtituendo $\dot{x}$ pro dx. Hoc verò nunquam quis probaverit ; Newtonum unquam *o* in $\dot{x}$ mutaviſſe, vel uſurpâſſe $\dot{x}$ pro dx, vel omiſiſſe uti literâ *o*. Newtonus in Analyſi, anno 1669 vel antea ſcriptâ, & in libro de Quadraturis, & in Principiis Philoſophiæ uſus eſt literâ *o* ; atque adhuc utitur, eodem planè quo priùs ſenſu. In libro de Quadraturis uſus eſt literâ *o* unà cum ſymbolo $\dot{x}$; ideoque non poſuit unum loco alterius. Symbola iſta, *o* & $\dot{x}$, pro rebus diverſi generis poſita ſunt. Prius eſt momentum ; alterum fluxio eſt, ſive velocitas ; ut ſuprà eſt explicatum. Cùm litera *x* pro quantitate uniformiter fluente ponitur, ſymbolum $\dot{x}$ eſt unitas ; & litera *o* (ſeu $1\dot{x}o$) momentum ; atque $\dot{x}o$ & dx idem ambo momentum ſignificant. Literæ punctatæ numquam indicant momenta ; niſi cum multiplicantur per momentum *o*, vel expreſſum vel ſubintellectum, quo infinitè parvæ evadant ; & tum rectangula pro momentis ponuntur.

Newtonus non in formis ſymbolorum ſuam methodum conſtituit, neque ſe alligat ad ullam unam ſpeciem ſymbolorum pro

fluentibus & fluxionibus. Ubi areas Curvarum pro fluentibus ponit, ſæpe ponit ordinatas pro fluxionibus, & fluxiones denotat per ſymbola ordinatarum; ut in Analyſi ſuâ fecit. Ubi lineas pro fluentibus ponit, quævis ſymbola ponit pro velocitatibus punctorum lineas deſcribentium, hoc eſt, pro fluxionibus primis; & quævis alia ſymbola, pro incremento earum velocitatum, hoc eſt, pro fluxionibus ſecundis; ut ſæpe fit in Principiis Philoſophiæ. Ubi autem literas x, y, z, pro fluentibus ponit; earum fluxiones denotat vel per alias literas, ut p, q, r; vel per eaſdem literas aliâ formâ poſitas, ut x, y, z; vel $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, punctatas; vel per quaſvis lineas, ut DE, FG, HI, conſideratas tamquam earum exponentes. Atque hoc quidem manifeſtum eſt ex libro ejus de Quadraturis: ubi, in primâ propoſitione, fluxiones indicat per literas punctatas; in ultimâ propoſitione, per ordinatas Curvarum; & in introductione, per alia ſymbola, dum methodum explicat, illuſtratque per exempla. Leibnitius, in ſuâ methodo, nulla fluxionum ſymbola habet; & idcirco Newtoniana fluxionum ſymbola ſunt in eo genere prima. Leibnitius ſymbolis illis momentorum, ſive differentiarum, dx, dy, dz, primò uti cœpit anno 1677: Newtonus momenta denotabat per rectangula ſub fluxionibus & momento o, cùm Analyſin ſuam ſcriberet, anno 1669 vel antea. Leibnitius ſymbolis $\int x$, $\int y$, $\int z$, pro ſummis ordinatarum uſus eſt, jam inde ab anno 1686: Newtonus, in Analyſi ſuâ, eandem rem denotavit, inſcribendo ordinatam in quadrato vel rectangulo, ad hunc modum; $\boxed{\frac{aa}{6x}}$. Omnia Newtoni ſymbola ſunt in ſuo quæque genere prima.

N° XII.

N° VIII.

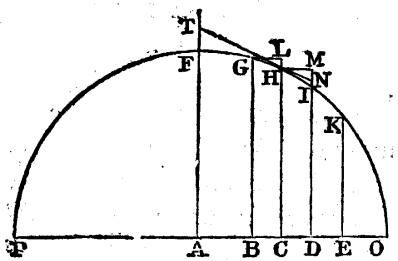
Quandoquidem autem inſimulatum eſt, uſum literæ o vulgarem eſſe, ac methodi differentialis utilitates tollere; è contrario, fluxionum methodus, prout à Newtono uſurpata eſt, omnes differentialis methodi utilitates habet, & præterea alias. Elegantior eſt; quippe in ejus calculo una tantùm infinitè parva quantitas eſt per ſymbolum denotata, idque ſymbolum eſt o. Nullas quantitatum infinitè parvarum ideas habemus: & idcirco in ſuam methodum fluxiones introduxit Newtonus, ut, quantum fieri poſſit, per finitas quantitates procederet. Naturalis magis eſt magiſque geometrica; fundata ſcilicet ſuper primis quantitatum naſcentium

centium rationibus, quæ exiſtentiam in geometria habent: cùm indiviſibilia contrà, ſuper quibus fundata eſt differentialis methodus, nullam exiſtentiam habeant, nec in geometriâ neque in naturâ. Sunt quidem rationes primæ quantitatum naſcentium; at non ſunt quantitates primæ naſcentes. Natura quantitates generat per continuum fluxum, ſive increſcentiam: talemque arearum & Solidorum generationem admiſerunt veteres Geometræ; cùm lineam unam in aliam ducerent, per motum localem, ad generandam aream; atque aream in lineam per motum localem ducerent, ad generandum Solidum: at computatio indiviſibilium, ut inde componatur area vel Solidum, nunquam in hunc uſque diem in geometriâ locum habuit. Porro Newtoniana methodus utilior quoque eſt illâ alterâ, atque certior; quippe adaptata & ad promptè inveniendam propoſitionem per tales approximationes, quales in concluſione nullum errorem creent, & ad eam exactè demonſtrandam: Leibnitiana verò methodus ad inveniendam tantùm propoſitionem, non ad demonſtrandam accommodata eſt. Cùm operatio non ſuccedat in æquationibus finitis, confugere ſolet Newtonus ad ſeries convergentes; unde methodus ejus fit incomparabiliter magis univerſalis, quàm illa Leibnitii, quæ intra finitas æquationes terminatur: ſiquidem ille nullam partem habet in infinitarum ſerierum methodo. Annos poſt aliquot quàm ſierierum methodus inventa eſt, Leibnitius propoſitionem invenit pro tranſmutandis curvilinearibus figuris, in alias æqualium arearum curvilineares, ut inde per ſeries convergentes quadrentur; at methodi figuras illas alias, per tales ſeries, quadrandi non erant Leibnitii. Ope novæ illius Analyſeos, majorem illarum propoſitionum partem, quæ in Principiis Philoſophiæ habentur, invenit Newtonus. At cùm antiqui Geometræ, quo certiora omnia fierent, nihil in geometriam admiſerint, priuſquam ſyntheticè demonſtratum eſſet; idcirco propoſitiones ſuas ſyntheticè demonſtravit Newtonus, ut cœlorum ſyſtema ſuper certâ geometriâ conſtitueretur. Atque ea cauſa eſt, cur homines harum rerum imperiti analyſin latentem, cujus ope propoſitiones illæ inventæ ſunt, difficulter admodum perſpiciant.

Inſimulatum eſt, Newtonum, in ſcholio ſub finem libri de Quadraturis, poſuiſſe tertium, quartum, quintumque terminos ſerici convergentis

convergentis reſpectivè æquales ſecundæ, tertiæ, quartæque differentiis primi termini; & proinde methodum ſecundæ, tertiæ, quartæque differentiarum tum non intellexiſſe. Atqui in primâ libri ejus propoſitione, anno 1693 à Walliſio editâ, modum oſtendit inveniendi primam, ſecundam, tertiam, ſequenteſque fluxiones in infinitum: ac proinde cùm librum eum ſcriberet, ante annum nempe 1676, omnium omnino fluxionum inveniendarum methodum intellexit; & conſequenter, omnium differentiarum. Quòd ſi eam non intellexit, cùm anno 1704 ſcholium illud in fine libri ſubjunxerit: neceſſe eſt hoc eo contigiſſe, quòd per iſtorum annorum intervallum de memoriâ fortè ei exciderat. Hoc ſolum igitur diſquirendum eſt, oblitus ne fuit methodi ſecundarum tertiarumque differentiarum ante annum 1704.

Principiorum Philoſophiæ libri ſecundi propoſitione decimâ, cùm exponeret utilitates aliquot terminorum convergentis ſeriei ad ſolvenda problemata, hoc docet Newtonus: Si primus nempe ſeriei terminus repræſentet ordinatam, CH, cujuſcumque curvæ lineæ, PHQ; & CHDM ſit parallelogrammum infinitè exile, cujus latus, DM, ſecet Curvam in I, & tangentem ejus, HN, in N; tum ſecundus ſeriei terminus repræſentabit lineam MN, & tertius terminus lineam NI. Atqui linea NI dimidium tantùm eſt ſecundæ differentiæ ordinatæ: & proinde, cùm Principia ſua Newtonus ſcriberet, tertium terminum ſeriei æqualem poſuit dimidio ſecundæ differentiæ termini primi: & conſequenter, non oblitus tum erat methodi differentiarum ſecundarum.



Dum in eo opere verſaretur, ſæpiſſimè ei conſiderandum erat incrementum vel decrementum velocitatum, quibuſcum quantitates generantur; inque eâ re rectè argumentatur. Atqui incrementum illud, vel decrementum, eſt ipſa ſecunda fluxio quantitatis: non ergo oblitus tum erat methodi fluxionum ſecundarum.

Anno 1692 Newtonus, à Walliſio rogatus, miſit ei propoſitionem primam libri de Quadraturis, cum exemplis ejus in primis ſecundis tertiiſque fluxionibus; id quod cuivis videre eſt in Walliſii operum tomo ſecundo (anno 1693 edito) pag. 391, 392,

393 & 396. Ideoque ne tum quidem oblitus erat methodi ſecundarum fluxionum.

Nec ſane veriſimile eſt, ſe anno 1704, cùm dictum ſcholium adderet fine libri de Quadraturis, oblitum eſſe non ſolùm primæ ipſius illius libri propoſitionis, ſed & ultimæ quoque, ad quam ſcholium iſtud ſubtextum erat. Si vocula *ut*, quæ in ſcholio illo inter verba *erit* & *ejus* caſu aliquo excidiſſe potuit, ibi reponatur; tum ſcholium iſtud & duabus illis propoſitionibus, & ceteris Newtoni ſcriptis, congruet: & fruſtrà omnino erunt, qui oblivionem hîc cavillantur.

Atque hactenus de naturâ atque hiſtoriâ harum methodorum egimus: porro haud abs re fuerit, de toto hoc negotio obſervationes pauculas ſubjungere.

In Commercio hoc Epiſtolico, tres memorantur Leibnitii tractatus; ſcripti nempe omnes poſtquam exemplar Principiorum Newtoni Hanoveriam ei miſſum fuerat; poſtquam viderat quoque ejuſdem libri recenſionem, in Actis Eruditorum *Jan.* & *Feb.* 1689. In his verò Leibnitii tractatibus, primariæ Newtoniani libri propoſitiones novo modo recomponuntur, Leibnitioque arrogantur; quaſi priùs eas ipſe invenerat, quàm Newtoni liber ederetur. Quis teſtem in ſuâ ipſius cauſâ patienter ferat! Vel fidem faciat Leibnitius, ſe, ante Newtoni librum editum, eas excogitâſſe; vel de eis ſibi vindicandis pudorem habeat. N° LXXII.

In tractatuum illorum poſtremo, viceſima propoſitio (quæ omnium Newtonianarum primaria eſt) Corollarium fit propoſitionis decimæ nonæ. Atqui decima illa nona demonſtrationem ſibi annexam habet παράλογον & falſam. Aut evincat itaque Leibnitius, demonſtrationem illam non falſam eſſe; aut fateatur ſe 19 & 20 propoſitiones non ejus demonſtrationis ope repperiſſe; ſed, quo Newtoni eximiam illam propoſitionem pro ſuâ venditaret, demonſtrationem ejus extundere fruſtrà tentaviſſe. Quippe in XX Propoſitione præ ſe fert, neſciſſe ſe, quâ eam viâ Newtonus invenerat; ut fidem ſcilicet lectori faceret, ſe, ſine illius ope, eandem repperiſſe.

Ex erroribus in XV^a & XIX^a Leibnitii propoſitione commiſſis, oſtenderat Keillius, Leibnitium, cùm tres illos tractatus ſcriberet, operandi vias in ſecundis differentiis non optimè calluiſſe. Id

quod amplius adhuc constat, ex illius Tractatûs tertii Propositionibus x, xi, & xii. Has enim constituit ceu fundamentum infinitesimalis suæ Analyseos, in considerandis viribus centrifugis; & decimam quidem proponit in relatione ad centrum curvitatis orbitæ; in undecimâ tamen & duodecimâ eam adhibet in relatione ad centrum circulationis. Cùm hæc duo diversa centra confuderit, in fundamentalibus his propositionibus, super quibus calculum suum struebat; non potuit fieri, quin in superædificando peccaret: neque ex erroribus illis extricare se valuit, per ignorantiam suam in secundis tertiisque differentiis. Atque hoc ulteriùs constat, ex sexto secundi tractatûs articulo. Quippe in isto articulo lapsus est Leibnitius; peccatumque eo admisit, quòd nesciret secundas tertiasque differentias rectè tractare. Cùm hos itaque tractatus componeret, in discipulorum adhuc classe versabatur; idque eum decet, si pudor est, candidè fateri.

Omnino ergo verisimile est, quemadmodum ex dictis tribus Newtoni epistolis, cum Barrowianâ tangentium methodo comparatis, differentialem illam methodum extuderat Leibnitius; ita decennio post, cùm Newtoni Principia Philosophiæ in publicum prodirent, aliquatenus eum in illâ progressum esse; dum tentaret dictam methodum ad primarias Newtoni propositiones extendere; & eâ occasione tres illos tractatus conficeret. Quippe propositiones, quæ in illis habentur, si errores & quisquilias demperis, omnino vel Newtonianæ sunt, vel ut corollaria ex eis facilè deducendæ; in aliâ scilicet verborum formâ, re tamen non diversâ, jam antè à Newtono publicatæ. Has tamen Leibnitius venditavit, tamquam à se solo diu antè inventas, quàm à Newtono fuit editæ. Nempe in extremo primi tractatûs, se invenisse eas fingit, antequam Newtoniana Principia prodiissent; immo nonnullas ex eis, antequam ipse Parisiis discessisset, hoc est, ante *Octobrem* anni 1676. Tractatum autem secundum claudit his verbis: *Multa ex his dedûci possunt praxi accommodata; sed nobis nunc fundamenta geometrica jecisse sufficerit, in quibus maxima consistebat difficultas: & fortassis, attentè consideranti, vias quasdam novas, satis antea impeditas, aperuisse videbimur. Omnia autem respondent nostræ Analysi infinitorum; hoc est calculo summarum & differentiarum, cujus elementa quædam in his Actis dedimus, communibus quoad licuit verbis hîc expressa.* In his, ut vides, jactat Leibnitius, se primum *fundamenta geometrica, in quibus maxima consistebat difficultas*, in hoc ipso tractatu secundo posuisse; seque solum *vias quasdam novas satis antea impeditas* in tractatu eodem aperuisse: cùm tamen priùs fermè biennio prodiissent Newtoni Principia, atque in hoc ipso tractatu edolando, subsidio fuissent Leibnitio; quin & *communibus quoad licuit verbis* composita essent; atque omnia ista fundamenta omnesque istas vias novas in se continerent. Atque horum omnium conscius erat Leibnitius, tum cùm tractatum illum ederet; ultroque tum agnoscere & prædicare debebat, Newtonum fuisse, qui *Fundamenta Geometrica in quibus maxima consistebat difficultas* primus posuerit; *qui vias novas, satis antea impeditas*, primus expediverit. Atque hæc quidem omnia quodammodo agnoscebat in responso ad D. Fatium; *Quam methodum*, inquiens, *ante dominum Newtonum & me, nullus quod sciam geometra habuit; uti ante hunc, maximi nominis geometram,* NEMO, SPECIMINE *publicè dato, se habere* PROBAVIT. Atqui quod eâ occasione tam liberè fassus est Leibnitius; si candor, si honor ei constet, ubique ac semper profiteri debet.

In epistolâ suâ 28 *Maii* 1697, ad Wallisium scriptâ, sic narrat Leibnitius: *Methodum, inquit, fluxionum profundissimi Newtoni cognatam esse methodo meæ differentiali, non tantùm animadverti, postquam opus ejus* [Principiorum scilicet] *& tuum prodiit; sed etiam professus sum in Actis Eruditorum, & alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minùs quàm ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo Analyseos Infinitesimalis; quæ latiùs quàm tetragonistica patet. Interim quemadmodum & Vietæa & Cartesiana methodus Analyseos Speciosæ nomine venit, discrimina tamen nonnulla supersunt; ita fortasse & Newtoniana & Mea differunt in nonnullis.* Et in his quoque profitetur Leibnitius, cùm Newtoni Principia prodiissent, se percepisse statim affinitatem, quæ inter geminas methodos intercedit; & idcirco communi se utramque infinitesimalis methodi nomine vocitare; quin & candoris sui esse, ut affinitatem illam agnoscat. Atqui si pro homine candido haberi se postulat; idem hoc, quod agnovit olim, & nunc debet agnoscere. Quin & fatetur methodum Newtonianam eo ferè gradu suæ methodo præiviisse, quo Vietæam Cartesianæ: N° LXXVI.

ſianæ: atque ut inter has, ſic inter ſuam & Newtoni, diſcrimina quædam manere: & deinde ea enumerat, quibus methodum Newtoni ampliâſſe, & promoviſſe ſe arbitratur. Atqui temporis illam prærogativam, quam tum; apud Walliſium, Newtono concedebat; etiam adhuc, & apud ſuos, debet concedere.

Cùm diſcrimina illa, ſive augmenta, Newtoni methodo à ſe addita memorat Leibnitius; in ſecundo loco ponit Differentiales Æquationes. Atqui epiſtolæ illæ, quæ anno 1676 inter ipſos interceſſerunt, clarè monſtrant Newtonum eo tempore differentiales iſtas habuiſſe; Leibnitium verò minimè. In tertio loco recenſet Æquationes Exponentiales: atqui has quoque Anglis debet Leibnitius. Walliſius, in ſerierum interpolatione, conſideravit fractos & negativos dignitatum indices: Newtonus in computationes analyticas fractos (a), ſurdos, negativos, & indefinitos dignitatum
N° LXIV. indices introduxit; & epiſtolâ 24 *Octob.* 1676 certiorem fecit Leibnitium, ad affectas æquationes, quæ dignitates eas, quarum indices fracti vel ſurdi erant, involverent, ſuam methodum ſe extendere.
N° LXIX. In reſponſo autem, 21 *Jan.* 1677 dato, viciſſim petit à Newtono Leibnitius, ut dicere vellet quid de reſolutione æquationum ſentiret, involventium dignitates quarum indices eſſent indeterminati; quales hæ eſſent, $x^y + y^x = xy$. $x^x + y^y = x + y$. Atqui has ipſas æquationes nunc exponentiales nominat; ſeque orbi literato venditat primum earum inventorem; hancque ut eximiam quandam inventionem oſtentat: nec tamen vel agnovit hactenus auxilia, ad rem eam inveniendam, à Newtono ſibi ſubminiſtrata; nec vel uno exemplo utilitatem ejus, ubi dignitatum indices ſint fluentes, oſtendere valuit. Cùm autem, ut credibile eſt, nondum eam, pro ſolitâ ſuâ impatientiâ, præque talis exempli inopiâ abjecerit; æquum eſt, ut ſperemus tandem eum aliquando mirificam ejus utilitatem publicè oſtenſurum eſſe.

N° LXIV. In epiſtolâ ad Leibnitium, 24 *Octob.* 1676 datâ, Newtonus dixerat, ſe binas, inverſa tangentium problemata & alia ejuſmodi difficilia reſolvendi, methodos habere; quarum unam conſiſtere *in aſſumendo ſeriem pro quâvis ignotâ quantitate, unde ceteræ commodè poſſent deduci; & in conferendo homologos terminos ſuborientis æquationis, pro determinandis aſſumptæ ſeriei terminis.* Quid hîc

(a) Vide Tom. I. p. 10, Not. b.

facit

facit Leibnitius? Multos poſt annos, in Actis ſcilicet Eruditorum *Auguſti* 1693, hanc methodum tamquam ſuam publicat, ejuſque primam ſibi inventionem arrogat. Aut publicè verò huic abrenuntiet; aut argumentis vincat ſe eam inveniſſe, priuſquam dictas Newtoni literas acceperit.

Illud quoque publicè ei confitendum eſt; ſe Oldenburgii epiſtolam 15 *Aprilis* 1675 accepiſſe; quâ plurimæ ſeries convergentes pro Curvis quadrandis, & imprimis illa Jacobi Gregorii pro arcu dati tangentis inveniendo, atque inde circulo quadrando, continebantur. Hoc quidem privatim faſſus eſt, epiſtolâ ad Oldenburgium, propriâ manu 20 *Maii* 1675 ſcriptâ, quæque etiam adhùc ſupereſt in libro Regiæ Societatis epiſtolari: nondum tamen publicè agnovit; ut tum ſane factum oportuit, cùm illam ipſam ſeriem ut ſuam maluit edere. N° XXXVII.

Porro illud quoque agnoſcendum ei eſt publicè; ſe extracta epiſtolarum Gregorianarum accepiſſe, quæ ipſius rogatu Pariſios ei miſit Oldenburgius menſe *Junio* 1676; in quibus erat una Gregorii, de iſtâ ſerie 15 *Feb.* 1671; & Newtoni alia, de Methodo Fluxionum, 10 *Decemb.* 1672. N° XLVI. N° XLIII.

Quandoquidem autem in epiſtolâ, 28 *Dec.* 1675, Oldenburgio ſignificavit Leibnitius, ſe ſeriem illam cum amicis Pariſienſibus, biennio antè, communicâſſe; deque eâ re aliquoties ad ipſum ſcripſiſſe: in aliâ item epiſtolâ, 12 *Maii* 1676, ſe de ſerie illâ ante aliquot annos ad ipſum literas dediſſe: porro in aliâ, 27 *Aug.* 1676, ſe ſeriem illam amicis oſtendiſſe triennio antè & ampliùs, hoc eſt, quàm primùm Pariſios à Londino veniſſet: illud à Leibnitio jure expectamus, ut dicat quî evenerit, ut, cùm Oldenburgii epiſtolam 15 *Apr.* 1675 acciperet, illam ipſam ſeriem eſſe ſuam ignoraverit. N° XLIV. N° LII. N° XLII.

In epiſtolis, 15 *Jul.* & 26 *Octob.* 1674 datis, non niſi unam ſeriem memorat Leibnitius pro circuli circumferentiâ; methodumque, quâ ad hanc pervenerit, ſibi etiam ſeriem obtuliſſe dicit, pro arcu cujus ſinus datus fuerit, etſi arcûs proportio ad circumferentiam totam ſit ignota. Ergo iſta methodus, ex dato triginta graduum ſinu, ſeriem ei ſuppeditavit pro circumferentiâ totâ. Quòd ſi ſeriem quoque habuit pro totâ circumferentiâ, à XLV graduum tangente deductam; rogatur ut publicè doceat, quâ methodo, quæ ambas iſtas ſeries ei dare poſſet, eo tempore ſit uſus: N° XXXII. XXXIII.

uſus: cùm methodus per figurarum tranſmutationem nequaquam hoc efficere valeat. Rogatur inſuper, ut rationem reddat, cur in iſtis epiſtolis non niſi unam circuli quadraturam memoret.

Porro ſi anno 1674 jam tum demonſtrationem habuit ſeriei pro inveniendo, cujus ſinus datus ſit, arcu; rogatur, ut eam in pub-
N° XLIV. -licum proferat; dicatque, cur in epiſtolâ 12 *Maii* 1676 ab Olden--burgio peteret, ut ille Newtoni demonſtrationem pro ipſâ illâ ſe--rie à Collinio adipiſceretur; & quâ tandem re Newtoniana ſeries -à ſuâ illâ differat. Quippe ex his omnibus non levis ſuſpicio ori--tur, Newtonianam ſeriem, pro reperiendo cujus ſinus datus ſit arcu, Leibnitio dum in Angliâ commoraretur, eſſe traditam: illumque poſtea, 1673, Pariſienſibus eam amicis pro ſuâ venditâſſe; proximoque anno, etiam ad Oldenburgium, quaſi de ſuâ literas dediſſe, quo demonſtrationem, ſive methodum ſerierum ejuſmodi inveniendarum, expiſcaretur. Anno verò inſequente, cùm Oldenburgius & iſtam, de quâ loquimur, ſeriem, & illam Gregorianam, & ſex præterea alias ad ipſum miſiſſet; non diutiùs eam ſeriem arrogare ſibi Leibnitius ſuſtinuit, inopiâ demonſtrationis: ſeque dixit, ſeries iſtas lentè examinare, cumque ſuis comparare; quaſi ſuæ illæ à ſeriebus ex Angliâ miſſis eſſent diverſæ. Denique, cùm ſeriei Gregorianæ demonſtrationem extudiſſet per figurarum tranſmutationem, Pariſienſibus eam ſeriem amicis velut ſuam oſtentare cœpit; ut ipſe in Actis Eruditorum *Apr.* 1691, pag. 178 narrat; *Jam anno*, inquiens, 1675 *compoſitum habebam opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ, ab amicis ab illo tempore lectum, &c.* At amicos iſtos celavit epiſtolam, quâ per Oldenburgium illam ſeriem nactus eſt; ipſique adeo Oldenburgio aſſeveravit, ſe, uno alterove anno ante ſcriptam ejus epiſtolam, ſeriem iſtam reperiſſe. Porro & ſequente anno, cùm binas Newtoni ſeries per
N° XLIV. Gregorium quendam Mohr iteratò accepiſſet, ſic de eis ad Oldenburgium ſcripſit, ut numquam ſibi antea viſis; ab eóque petiit, ut, per Collinium, Newtoni, pro eis inveniendis, methodum nanciſceretur. Cæterùm hanc gravem ſuſpicionem ſi eluere volet Leibnitius; illud imprimis argumentis certis oſtendat, ſe ſeriem iſtam Gregorianam, priuſquam per Oldenburgium eam accepiſſet, ſuo ſolius acumine repperiſſe.

Hoc

Hoc quoque, prout æquum eſt, monſtrabit Leibnitius; quâ primùm methodo diverſas illas regreſſionis ſeries, pro circulo & hyperbolâ, à Newtono quidem ad ipſum miſſas 13 *Jun.* 1676, at N° XLIX. in epiſtolâ ſuâ 27 ſequentis *Auguſti* ſibi attributas, invenerit, an- N° LII. tequam à Newtono eas accepiſſet.

Cùmque ab ipſo rogatus Newtonus regreſſionis methodum ei N° LXIV. indicaviſſet; quam ut primùm legit Leibnitius, neque ſuam eſſe agnovit, & ne intellexit quidem: poſtea verò quàm percipere N° LXX. eam potuit; ut ſuam ſibi arrogavit, olim ſcilicet à ſe inventam, ſed in chartis ſuis reconditis oblivione ſepultam: vel probet Leibnitius, ſi candidi æquique hominis nomen cupit auferre, ſe primum ejus methodi inventorem eſſe, vel vero inventori concedat.

In literis ad Oldenburgium datis 3 *Feb.* 167$\frac{2}{3}$ proprietatem N° XXII. quandam ſeriei numerorum, naturalium, triangularium, pyramidalium, triangulo-triangulorum, &c. ut inventum ſuum oſtentavit Leibnitius; quoque majorem fidem faceret, mirari viſus eſt D. Paſcalium, in triangulo ſuo Arithmetico, eam præteriſſe. Ceterùm is liber Paſcalii anno editus eſt 1665, atque iſtam ipſam ſeriei ejus proprietatem continet. Agnoſcat itaque Leibnitius, proprietatem iſtam minimè à Paſcalio fuiſſe præteritam; neque pergat ſibi vindicare, cum veri inventoris injuriâ.

Abrenuntiet quoque methodo differentiali Newtoni; neque ſe N° XXX. in partes ingerat, quaſi ſecundus ſcilicet inventor. Secundis inventoribus, etiam reverâ talibus, vel exiguus vel nullus eſt honos; tituli vel juris nihil eſt. Quid cum iſtis igitur fiet, qui vel ſecundos ſe fuiſſe, nullis certis argumentis poſſunt evincere? In literis ad D. Sloane, 29 *Decemb.* 1711 datis, amicos ait ſuos probè ſcire, N° LXXXV. quo pacto differentialem methodum invenerit. Quid amicos nobis narrat? Ipſe planè, aperte, ſine tergiverſatione dicat, quâ eam viâ repperierit.

In iiſdem ad D. Sloane literis narrat, ſe, novennio ante quàm eam in lucem ederet, methodo potitum eſſe; hoc eſt, anno 1675 vel priùs. Atqui certum eſt, 27 *Aug.* 1676, cùm literas ad Oldenburgium mitteret, nondum illum habuiſſe eam. Quippe ibi affirmat, problemata inverſæ tangentium methodi, plurimaque alia, non poſſe ad ſeries infinitas, neque ad æquationes, aut qua-

draturas reduci. Quomodo hæc duo conciliari inter se possint, ipse, ubi otium est, videbit.

Jam suprà didicimus, Leibnitium, dum per Angliam & Hollandiam domum rediret, dedisse operam Slusianæ pro tangentibus methodo promovendæ, & ad omne genus problemata extendendæ; eâque causâ generalem tangentium tabulam conficere voluisse. Nondum igitur veram istius methodi promotionem invenerat. Atqui semestri ferè pòst tempore, cùm in veram ejus promotionem recens inciderat, rescripsit his verbis: *Clarissimi Slusii methodum tangentium nondum esse absolutam, celeberrimo*
N° LXVI. *Newtono assentior: & jam* A MULTO TEMPORE *rem tangentium generaliùs tractavi, scilicet per differentias ordinatarum.* Bene sanè, à multo tempore; nimirum semestri. Excogitet jam aliquid, pro candore suo, Leibnitius, cur tantillum temporis ut multum deprædicaverit; nisi eo consilio, ut inventoris titulum Newtono præriperet; fidemque faceret, se, diu antequam Newtoni literis eam edoctus esset, differentialem methodum penes se habuisse.

In Actis Eruditorum *Junii* 1696, dum duos priores Wallisianorum Operum tomos recensent editores (hoc est, ipse Leibnitius) ita narrant: *Ceterùm ipse Newtonus, non minùs candore quàm præclaris in rem mathematicam meritis insignis, publicè & privatim agnovit Leibnitium, tum cùm, interveniente celeberrimo viro Henrico Oldenburgio Bremensi Societatis Regiæ Anglicanæ tunc secretario, inter ipsos, ejusdem jam tum Societatis socios, commercium intercederet, id est, jam ferè antè annos viginti & amplius, calculum suum differentialem, seriesque infinitas, & pro iis quoque methodos generales habuisse; quod Wallisius, in præfatione operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit; quoniam de eo fortasse non satis ipsi constabat. Cæterùm differentiarum consideratio Leibnitiana, cujus mentionem facit Wallisius, nequis scilicet, ut ipse ait, causaretur de calculo differentiali nihil ab ipso dictum fuisse, meditationes aperuit, quæ aliunde non æquè nascebantur.* Ex his patet à Leibnitio lectam esse præfationem illam Wallisii; in quâ narrat is, Newtonum, anno 1676, methodum suam fluxionum Leibnitio explicavisse; quam tamen decennio antè, vel ampliùs, Newtonus invenisset. Atqui à Newtono nunquam creditum est, Leibnitium ante annum 1677 differentialem methodum

dum invenisse: ipseque adeò Leibnitius, in Actis Eruditorum *Apr.* 1691, p. 178, fassus est, inventam esse postquam domum Parisiis rediisset ad negotia publica capessenda; hoc est, post annum 1676. Quod autem ad generalem ejus infinitarum serierum methodum attinet; tantum abest ut generalis dicenda sit, ut vel exiguæ vel nullius prorsus sit utilitatis; nisi fortè ut ansam Leibnitio præbeat, quâ Gregorianam, pro circulo quadrando, seriem sibi adhamet transferatque.

In responso ad D. Fatium, in Actis Erud. 1700, p. 203, edito, hæc habet Leibnitius. *Ipse* [Newtonus] *scit unus omnium optimè, satisque indicavit publicè, cùm sua Mathematica Naturæ Principia publicaret, anno* 1687, *nova quædam inventa geometrica, quæ ipsi communia mecum fuere,* NEUTRUM LUCI AB ALTERO ACCEPTÆ, *sed meditationibus quemque suis debere; & à me decennio antè* [*i. e. anno* 1677] *expósita fuisse.* Atqui in libro Principiorum hîc ad partes vocato, minimè agnovit Newtonus, suis eam methodum viribus inventam Leibnitium, non à Newtonianis illis epistolis adjutum: Wallisiusque nuper contrarium asseveraverat, refellente tum nemine, vel contradicente. Quòd si postea eam sine ope Newtoni quàm maximè inveniisset Leibnitius, secundis tamen inventoribus exilis prorsus est gratia, nec nisi in inferiori subsellio locus; ne dicam, jus omnino nullum.

In eodem ad Fatium responso hæc quoque habet Leibnitius: *Certè cùm elementa calculi mea edidi anno* 1684, *ne constabat quidem mihi aliud de inventis ejus* [sc. Newtoni] *in hoc genere, quàm, quod ipse olim significaverat in literis, posse se tangentes invenire non sublatis irrationalibus; quod Hugenius quoque se posse mihi significavit postea, etsi cæterorum ejus calculi adhuc expers. Sed majora multo conseeutum Newtonum, viso demum libro Principiorum ejus, satis intellexi.* In his iterum agnovit, librum Principiorum ad Newtonianam fluxionum methodum sibi aditum patefeciisse: idem tamen ipse jam negat, quicquam illius methodi in dicto libro contineri. In his simulat, se, priusquàm iste liber prodiisset, nihil amplius de Newtoni inventionibus sciviisse, quàm quòd methodum quandam tangentium habuerit; & ex isto demum methodum ejus fluxionum percepisse: atqui in epistolâ, 21 *Jun.* 1677 datâ, agnovit methodum eam ad curvilinearum figuratum quadraturas

draturas se extendere, suæque similem esse. Verba ejus hæc sunt:

N° LXVI. *Arbitror quæ celare voluit Newtonus, de tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento quadraturas quoque reddi faciliores, me in sententia hâc confirmât; nimirum semper figuræ illæ sunt quadrabiles, quæ sunt ad æquationem differentialem.*

N° XXVI, XLVI, XLVIII, LIV. Newtonus in tribus illis epistolis, quas, ut diximus, ab Oldenburgio Leibnitius acceperat, tam generalem esse suam methodum dixerat, ut ope æquationum, finitarum & infinitarum, determinaret maximas & minimas, tangentes, areas, solida contenta, centra gravitatis, longitudines ac curvitates curvarum linearum, curvilinearumque figurarum, idque sine ablatione radicalium; extenderetque se ad similia problemata in Curvis, ut vulgo vocantur, Mechanicis; itemque ad problemata tangentium inversa; & ad omnia ferè, nisi fortè numeralia quædam, qualia sunt Diophanti.

N° LI. Leibnitius verò, in epistolâ 27 *Aug.* 1676, vix credere se posse

N° XXVI. finxit, eam methodum tam esse generalem. Newtonus, in primâ ex tribus illis epistolâ, tangentium methodum proposuit, ex generali eâ methodo deductam, exemploque eam illustravit; generalisque methodi ramum, vel corollarium, esse monuit; & ejusmodi esse Slusianam, quæ nondum tum prodierat, conjecit. Hâc re excitatus Leibnitius meditabatur, siquâ viâ promovere posset methodum Slusianam, eamque ad omnia problemata extendere; quemadmodum jam antè ex ejus literis monstravimus. In tertiâ

N° LVIII. verò epistolâ suam methodum illustraverat Newtonus per theoremata pro quadraturis, & eorum exempla. Quibus adjutus Leib-

N° LXVI. nitius, in epistolâ 21 *Junii* 1677, methodum suam cum Newtonianâ congruere dixit, ducendo tangentes; producendo methodum Slusii; procedendo sine fractionum & surdarum ablatione; quadraturasque reddendo multò expeditiores. His tot & toties actis, ad conterraneos suos affirmare, se, cùm differentialem methodum anno 1684 ederet, nihil tum amplius de Newtoni invento inaudivisse, quàm quòd is methodum quandam tangentium haberet, cujus tandem est hominis?

Vide Acta Eruditorum pro mens. Nov. 1684. Porro eo tempore Leibnitius de suâ methodo nihil aliud explicaverat, nisi per eam tangentes duci posse, maximasque & minimas determinari, sine ademptione fractionum vel surdarum. Hoc verò

verò totum etiam per Newtoni methodum effici posse, certo sciebat; neque candidi erat hominis id dissimulare. Cùm autem hactenus suam methodum exposuisset Leibnitius, addidit, se hîc geometriæ multo sublimioris initia posuisse, pervenientis ad difficillima quæque & utilissima problemata, quæ sine calculo differentiali, AUT SIMILI, vix solvi possint. Quid verò illud AUT SIMILI sibi vellet, quî quæso conterranei ejus, sine Œdipode, poterant intelligere? Enimvero planis disertisque verbis dictum ab eo oportuit, SIMILEM illam, quam innuit, methodum Newtoni fuisse; quàm latè ea pateret, quàm à longo tempore reperta esset, prout ipse ex Angliâ didicisset, narrare; suamque illâ posteriorem esse confiteri. Hoc omnes controversias præcidisset; hoc candidi & honesti viri officium erat. Horum tamen omnium quasi oblitus, suis ille conterraneis, in responso ad Fatium, prædicat, se cùm anno 1684 calculi sui elementa ederet, nihil tum de ullâ SIMILI methodo inaudivisse; nihil de ullâ aliâ nisi ad ducendas tangentes: quod qualis hominis fuerit, aliis dicendum relinquo.

Illud denique Leibnitio est expediendum: quî factum sit, ut in responsis suis ad Wallisium & Fatium, quorum uterque primi ejus methodi inventoris gloriam Newtono detulerat, nihil tum ipse de se, ut priore inventore, dicebat; sed senum geometrarum mortem operiebatur, aliosque, qui superstites adhuc sunt, pro novitiis habebat: quin & ipsum Newtonum adortus, cum quoquam se alio certaturum negabat. Atqui dixerat ei Newtonus, in epistolâ 24 *Octob.* 1676, se tum ante annos quinque, quo quietiùs N° LVII. ætatem ageret, consilium publicandi, quæ de hoc argumento scripserat, abjecisse: & ex eo quidem tempore studiosè vitavit omnes, de rebus philosophicis ac mathematicis, disputationes; quin & à commercio de his rebus literario, ut disputationibus ansam porrigente, datâ operâ abstinuit; eandemque ob causam, neque de Leibnitio queri priùs sustinuit, quàm in Actis se Lipsiensibus ut plagiarium traduci vidisset; Keilliumque eo tantùm nomine in lites trahi, quòd ab hoc eum crimine vindicare conatus sit.

Insimulatum quidem est, quasi Regia Societas sententiam contra Leibnitium in hâc causâ tulisset, non utrâque parte auditâ. Non ita se res habet. Nondum sententiam tulit Societas. Leibnitius quidem postulabat à Societate, ut Keillium inauditum damnare

nare vellet: adeo ut ipse jure eodem sic damnari potuisset; cùm idem sit jus Seio quod Titio, Keillio quod Leibnitio. Cúmque accusationem suam adversus Keillium distituisset Leibnitius, jure potuisset Societas notam illi inurere. Ea verò certorum tantùm hominum confessum legit, qui scrutarentur epistolas atque chartas, quæ de his rebus in Archivis Societatis habentur; & secundum illas chartas epistolasque rem ipsam, ut erat, Societati narrarent. Non enim ideo lecti erant, ut Leibnitium vel Keillium, sed ut veteres chartas, examinarent: in eâque re probè se & honestè gesserunt. Numerosus quippe consessus erat; è viris eruditis diversarum nationum lectus: quorum fidem in epistolis chartisque examinandis, fideliterque edendis, nihil quicquam, ullius hominis gratiâ, addendo, vel omittendo, vel mutando, Societas tota comprobavit. Quin & ipsæ epistolæ atque chartæ, Societatis jussu, conservantur adhuc; ut si quis velit, ibi consuli, & cum edito Commercio Epistolico comparari possint. Illud interim submonendus est Leibnitius; cùm id Societati impingit, quasi inauditum eum condemnatum isset, id ob eam rem, per statutum ejus quoddam, commeritum se esse, ut nomen ejus inde expungatur.

Philosophia porro, quam in Principiis suis atque Opticis Newtonus excoluit, est experimentalis: illa scilicet, quæ causas rerum non fidentiùs docet, quàm per experimenta confirmari queant; neque implenda est opinationibus, quæ per phænomena nequeunt probari. Et idcirco in Opticis suis, res experimentis firmatas, ab illis quæ incertæ adhuc manent, distinxit Newtonus: & incertas aliquot ejusmodi, sub finem Opticorum, ut quærenda proposuit. Eandemque ob causam, in Principiorum præfatione, cùm memorâsset motus planetarum, cometarum, lunæ ac maris, ceu in libro illo de Gravitatis theoriâ deductos, hæc addidit: *Utinam cætera naturæ phænomena ex Principiis Mechanicis, eodem argumentandi genere, derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer, ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ, per causas nondum cognitas, vel in se mutuò impelluntur, & secundum regulares figuras cohærent, vel ab invicem fugantur, & recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustrà tentárunt.* Et sub finem ejus libri, in secundâ

cundâ editione, narrat; ut, præ inopiâ experimentorum tanto negotio sufficientium, non aggressus sit leges actionum illius spiritûs, sive agentis, describere, per quem efficitur hæc attractio. Quin & eandem ob causam de Gravitatis causâ nihil pronuntiat; quòd nulla experimenta, sive phænomena, ad manum essent, quæ causam illam certò indicare possent. Atque hoc in Principiis suis, sub ipso initio, abunde declaraverat, his verbis: *Virium causas & sedes physicas jam non expendo.* Et paulo pòst: *Voces attractionis, Impulsûs, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscuè usurpo; has vires, non physicè, sed mathematicè tantùm considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis, causamve aut rationem physicam alicubi definire; vel centris, quæ sunt puncta mathematica, vires verè & physicè tribuere; si fortè aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.* Et sub finem Optices: *Quâ causâ efficiente hæ attractiones* [sc. gravitas, visque magnetica & electrica] *peragantur, hîc non inquiro. Quam ego attractionem appello, fieri sane potest, ut ea efficiatur impulsu; vel alio aliquo modo nobis incognito. Hanc vocem attractionis ita hîc accipi velim, ut in universum solummodo vim aliquam significare intelligatur, quâ corpora ad se mutuò tendant; cujcunque demum causæ attribuenda sit illa vis: nam ex phænomenis naturæ illud nos priùs edoctos esse oportet, quænam corpora se invicem attrahant, & quænam sint leges & proprietates istius attractionis, quàm in id inquirere par sit, quânam efficiente causâ peragatur attractio.* Pauloque inferius, easdem attractiones tamquam vires considerat, quas in rerum naturâ existentiam habere, licet causæ earum nondum sint cognitæ, per phænomena constat: distinguitque eas à qualitatibus occultis, quæ à specificis rerum formis fluere existimantur. Et in scholio sub extremum Principiorum, cùm Gravitatis proprietates memorâsset, hæc addidit: *Rationem verò harum Gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere; & hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, hypothesis vocanda est; & hypotheses, seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in philosophiâ experimentali locum non habent. —— Satis est, quòd Gravitas reverâ existat, & agat secundum leges à nobis expositas, & ad corporum cœlestium & maris nostri motus*

omnes ſufficiat. Jam verò, poſt hæc omnia, quæ conſulto præmonuerat Newtonus, quis non miretur, ideo eum à quoquam ſugillari, quòd cauſas gravitatis aliarumque attractionum non per hypotheſes explicet? quaſi criminis loco eſſet, certis eſſe contentum, incerta verò dimittere. Et tamen Actorum Eruditorum (anno 1714 menſe Martio, p. 141, 142) editores, id Newtono exprobrant, quòd cauſam Gravitatis neget eſſe mechanicam; aſſeruntque, ſi ſpiritus ille, vel agens, quo electrica fit attractio, non ſit æther vel ſubtilis Carteſii materia, quâvis id hypotheſi contemtius eſſe; ut fortaſſe ſit Principium Henrici Mori hylarchium. Quin & ipſe Leibnitius, in tractatu *De bonitate Dei*, & in epiſtolis ad Hartſoekerum atque alibi, Newtono id vitio vertit, quaſi Gravitatem faceret naturalem quandam & eſſentialem corporum proprietatem, immo occultam qualitatem, ac denique miraculum. Atque hujuſmodi cavillationibus, homines hi conterraneis ſuis perſuaſum eſſe cupiunt, judicio eum & acumine parum valere; neque eum eſſe, qui methodum infiniteſimalem, rem tam arduam, invenire potuiſſet.

Illud profecto confitendum eſt; in philoſophiâ tractandâ Newtonum inter & Leibnitium plurimum intereſſe. Prior ille eo uſque progeditur, quo phænomenorum & experimentorum evidentia eum ducit; & ubi illa deficit, pedem ſiſtit: poſterior hypotheſibus ſuis ſcatet totus; eaſque proponit, non experimentis examinandas, ſed clauſis oculis credendas. Ille, inopiâ experimentorum, quæ cauſam Gravitatis certo indicare poſſint, utrum mechanica fuerit necne, non affirmat: hic, ſi mechanica non ſit, perpetuum eſſe miraculum pronuntiat. Ille, atque id quoque non definiens ſed quærens, Creatoris potentiæ tribuit, quòd minimæ quæque materiæ partes ſint duræ: hic illam materiæ duritiem conſpirantibus quibuſdam mŏtibus imputat; &, ſi cauſa ejus alia ponatur quàm mechanica, pro perpetuo eam miraculo deridendam propinat. Ille motum in homine animalem, non audet affirmare, merè eſſe mechanicum: hic purè mechanicum eſſe audacter aſſerit; cum ex hypotheſi ejus de harmoniâ præſtabilitâ, numquam anima vel mens hominis ſic agat in corpus, ut motus hujus vel impediat, vel adjuvet. Ille Deum aſſerit (*Deum in quo vivimus, & movemur, & ſumus*) eſſe omnipræſentem; non tamen

tamen ut mundi animam: hic, non mundi quidem animam eſſe, ſed INTELLIGENTIAM SUPRAMUNDANAM: ex quo illud conſequi videatur, non poſſe Deum intra mundi limites quicquam efficere, niſi per miraculum prorſus incredibile. Ille philoſophis præcipit, ut à phænomenis & experimentis ad eorum cauſas progrediantur; atque inde ad cauſarum iſtarum cauſas; & ſic deinceps, donec ad primam cauſam perveniatur. Hic omnes cauſæ primæ actiones pro miraculis haberi; omneſque leges per Dei voluntatem naturæ impreſſas pro perpetuis miraculis occultiſque qualitatibus cenſeri; & idcirco ex philoſophiâ exulare jubet. Siccine verò agitur? An perpetuæ & univerſales naturæ leges, ſi ex potentiâ Dei, cauſæve adhuc nobis incognitæ actione deriventur, pro miraculis & qualitatibus occultis, hoc eſt ex ejus ſententiâ, pro monſtris & abſurditatibus, ſunt exſibilandæ? Omnia porro pro Dei exiſtentiâ de naturæ phænomenis ſumpta argumenta, idcircóne ſunt explodenda, quia novis quis ea nominibus & ignominioſis infamet? An, ut ſuperſtitioſa & abſurda, rejicietur Philoſophia Experimentalis, quia neque ultra experimenta definire quicquam vult; neque adhuc per experimenta probare poteſt, naturæ omnia phænomena per cauſas merè mechanicas poſſe ſolvi? Res profecto digna eſt, quæ & maturè & ſeriò conſideretur.

COMMERCIUM EPISTOLICUM D. JOHANNIS COLLINS, ET ALIORUM, DE ANALYSI PROMOTA:

JUSSU

SOCIETATIS REGIÆ LONDINENSIS, ANNO 1712,

IN LUCEM PRIMUM EDITUM.

AD

LECTOREM.

QUAM ob cauſam editæ ſint hæ epiſtolæ chartulæque collectaneæ, apparebit ex literis D. Leibnitii & D. Keillii in fine ſubjunctis. Offenſionem attulerant D. Leibnitio nonnulla, quæ ſcripto prodidit D. Keillius in Actis Londinenſibus anno 1708, *injuriam D. Newtono oblatam propulſans. Datis igitur ad Societatis Regalis ſecretarium literis, de calumniâ queſtus D. Leibnitius, remedium à Societate petiit; idque eos æquum credidit judicaturos, ut D. Keillius culpam ſuam publicè fateretur. D. Keillio ea eſt pars viſa potior, ut ad illa, quæ queſtus erat D. Leibnitius, literis ſcriptis reſponderet: quibus in literis, quæ antea ediderat, & expoſuit pleniùs, & vindicavit. D. Leibnitius, nequaquam bis ſatis ſibi factum arbitratus, literas alteras ad Societatem dedit; in quibus adhuc de D. Keillio queſtus,* novum eum hominem appellat, parumque peritum rerum anteactorum cognitorem; nec mandatum ab eo, cujus intereſſet, habentem; Societatiſque æquitati committit, annon coercendæ ſint vanæ & injuſtæ vociferationes.

Verſabatur in Angliâ D. Leibnitius ineunte anno 1673, *iterumque menſe* Octobri 1676; *& interjecto illo temporis intervallo in Galliâ egit. Quo omni temporis ſpatio, mutuis acceptis datiſque literis, commercium habuit cum D. Oldenburgo; &, Oldenburgi operâ, tandem cum D. Collinio itidem, & nonnunquam etiam cum D. Newtono. Quid autem ille ex Anglis tandem, vel tum cùm Londini eſſet, vel ex literis iſtis mutuò datis, edidicerit, in eo forè vertitur hæc omnis quæſtio. D. Oldenburgus & Collinius jam diù obierunt. D. Newtonus autem tum Cantabrigiæ egit; parumque amplius novit, quàm quod ex literis ipſius à D. Walliſio deinceps editis apparet. D. Newtonus neque à D. Keillii partibus teſtis eſſe poteſt, nec D. Leibnitius ipſe à ſuis: alius autem in vivis teſtis eſt nullus. Societas itaque regalis, à D. Leibnitio bis adverſus Keillium appellata,*

lata, ſelectorum ex Societate arbitrorum conſeſſum conſtituit; qui literas, literamque tranſcriptarum libellos, aliaſque chartulas à D. Oldenburgo penes Societatem relictas, & ſiquid inter D. Collinii ſchedas repertum huc faceret, perſcrutarentur, ſententiamque ſuam ad Societatem referrent: juſſitque tandem ut ſententia illa, à ſelectorum arbitrorum conſeſſu relata, unà cum ipſis literarum, aliarumque chartularum excerptis, emitteretur.

De hâc methodo, ex methodis Serierum et Fluentium compoſitâ, ſcripſit infra Newtonus. N° VI, VII, XXII, XLVII, LIII, LVI.

*Cùm D. Newtonus Analyſin iſtam ſcripto traderet, quæ ſub initium horum collectaneorum impreſſa eſt, habuit jam tum * methodum generalem æquationes finitas in infinitas reſolvendi, & æquationes tum finitas tum infinitis applicandi ad problemata ſolvenda, ope proportionum augmentorum momentaneorum quantitatum naſcentium, & augeſcentium. Augmenta hæc appellat D. Newtonus particulas, & momenta; D. Leibnitius autem infiniteſimales, indiviſibiles, & differentias. Quantitates augeſcentes appellat D. Newtonus Fluentes; D. Leibnitius autem Summas. Et velocitates augmenti appellat D. Newtonus Fluxiones; iſtaſque fluxiones exponit per quantitatum fluentium momenta.*

Quæ pars hujus methodi in eo ſita eſt, ut æquationes finitæ in infinitas reſolvantur, eam cum D. Leibnitio, rogatu ſuo, communicavit D. Newtonus, literis ad illum datis Junii 13, & Octobris 24, 1676. *Reliquam hujus methodi partem, poſtquam eouſque explicuerat, ut eam ſatis § obviam factam exiſtimaret; ne ſibi deinceps ſubriperetur, priuſquam eam exponere viſum foret, literis occultis ita celavit, quo modo aliàs Galilæus atque Hugenius fecerant. Hujus poſterioris partis inventionem ſibi vendicat D. Leibnitius: D. Keillius autem eam D. Newtono aſſerit; Keillioque ſuffragatur ſententia ſelectorum è Societate arbitrorum conſeſſûs. Alios tamen exteros, qui methodum iſtam à D. Leibnitio acceperint, aut aliter obtinuerint, nihil quidquam in his collectaneis eſt, quod ullo pacto afficiat. Illi, quid inter D. Leibnitium & D. Oldenburgum commercii eſſet, ignorabant. Illis, quòd methodum, quam utilem eſſe compererant, in rem ſuam adhibuerint, atque excoluerint; id verò laudi eſt dandum.*

§ Vid. N° LIII.

Subjunctæ ſunt epiſtolis annotationes quædam; quò lectores, quibus minus eſt otii, & epiſtolas inter ſe faciliùs conferre, & ſemel perlectas intelligere queant.

COM-

COMMERCIUM EPISTOLICUM D. JOHANNIS COLLINS, ET ALIORUM, DE ANALYSI PROMOTA: JUSSU SOCIETATIS REGIÆ IN LUCEM EDITUM.

Excerpta ex epiſtolâ reverendi viri D. Iſaaci Barrow *ad D.* J. Collins, Cantabrigiæ, 20 Junii 1669 *datâ; cujus habetur Autographon.* N° I.

AMICUS quidam apud nos commorans, qui eximio in his rebus pollet ingenio, nudiuſtertius chartas quaſdam mihi tradidit, in quibus magnitudinum dimenſiones ſupputandi methodos, *Mercatoris* methodo pro hyperbolâ ſimiles, maximè verò generales, deſcripſit; ſimulque æquationes reſolvendi: quæ, ut opinor, tibi placebunt; quas unà cum proximis literis ad te mittam.

Ex epiſtolâ ejuſdem ad eundem, 31 Julii 1669 *datâ, pariterque ipſius* Barrovii *manu ſcriptâ.*

Mitto, quas pollicitus eram, amici chartas; quæ, uti ſpero, haud parum te oblectabunt. Remittas, quæſo, quum eas quantum tibi viſum fuerit perlegeris: id enim poſtulavit amicus meus, cùm primùm eum rogavi, ut eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igitur, obſecro, te eas recepiſſe fac me certiorem; quòd illis metuo; quippe qui eas per veredarium publicum ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gererem quàm citiſſimè.

Ex

Ex epiſtolâ ejuſdem ad eundem, 20 Aug. 1669 datâ; cujus etiam comparet autographon.

Amici chartas tibi placuiſſe gaudeo; eſt illi nomen Newtonus, collegii noſtri ſocius, & juvenis; ſecundus enim, ex quo artium magiſtri gradum cepit, jam agitur annus; & qui, eximio quo eſt acumine, permagnos in hâc re progreſſus fecit. Illas, ſi vis, cum nobili domino vicecomite Brounkero communica.

N° II. *Exemplar dictarum chartarum, manu D.* Collins *exaratum, & in ſcriniis ejus repertum, quod cum ipſius D.* Newtoni *autographo collatum ad verbum conſentire invenimus. Hujus autem titulus eſt*

DE ANALYSI PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

METHODUM generalem, quam de Curvarum quantitate——ex utrâque parte lineæ BD. [Vide Tom. I. p. 257.]

Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

N° III. REG. II. *Si valor ipſius y, &c.*——*dabitur tota area.* [Vide Tom. I. p. 258—263.]

Aliarum Omnium Quadratura.

N° IV. REG. III. *Sit valor ipſius y, &c.*——$\frac{11}{3}x^3$. [Vide Tom. I. p. 263, 264.]

Exempla Radicem extrahendo.

N° V. Si Sit $\sqrt{aa+xx} = y$, *&c.*——ſuperficies cognoſcetur. [Vide Tom. I. p. 264—268.]

Exempla per Reſolutionem Æquationum Numeralis Æquationum affectarum Reſolutio.

N° VI. Quia tota difficultas——quæ quærebatur. [Vide Tom. I. p. 268—270.]

Literalis Æquationum affectarum Reſolutio.

N° VII. His in numeris ſic——x ſit minor. [Vide Tom. I. p. 270—272.]

Alius modus eaſdem Reſolvendi.

N° VIII. Sin valor areæ tanto——magis compoſita. [Vide Tom. I. p. 272.]

N° IX. Sed hunc modum——$y = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}}$, &c. [Vide Tom. I. p. 273, 274.]

N° X. Et hæc de areis——in reliquis. [Vide Tom. I. p. 274—278.]

Applicatio

* N. B. Quadratura Curvarum per Æquationes infinitas, quæ nonnunquam terminantur & finitæ evadunt. Eadem explicatur in Prop. v. Libri de Quadraturis. Et propoſitio illa pendet à quatuor prioribus. Ideoque methodus fluxionum & momentorum, quatenus habetur in propoſitionibus

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

Et hæc de Curvis geometricis——fiat) * exactè & Geometricè determi- N° XI.
nentur. Sed iſta narrandi non eſt locus. Reſpicienti duo præ reliquis demonſtranda occurrunt. [Vide Tom. I. p. 278—280.]

1. *Demonſtratio Quadraturæ Curvarum Simplicium in Regulâ Primâ.*

Præparatio pro Regulâ Primâ demonſtrandâ.

† Sit itaque Curvæ——‡ Tum $x+o$ [Tom. I. p. 280]——§ poſſunt N° XII.
inveniri [Tom. I. p. 281]——minimarum dimenſionum. [Tom. I. p. 282.]

Excerpta ex epiſtolâ D. Oldenburgh *ad D.* Renatum Franciſcum Sluſium N° XIII.
Canonicum Leodienſem, *anno* 1669, 14 Septembris St. vet. *datâ: cujus apographum conſpicitur in libro Societatis Regiæ, quo conſervantur epiſtolæ, No. III. p.* 174.

Inſuper communicavit ille [*Bartovius*] univerſalem methodum analyticam, ipſi tranſmiſſam à D. Iſaaco Newtono, inſervientem menſurandis areis omnium ejuſmodi Curvarum, & earundem perimetrorum, in quibus ordinatæ eandem habet communem habitudinem ad baſin: hæcque methodus alia non eſt ab illâ, quam particulariter applicuit D. *Mercator* ad inveniendas areas hyperbolæ, univerſalis reddita. Auctor ſic incipit.

" *De Analyſi per Æquationes numero terminorum infinitas.*

" Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate, per infinitam " terminorum ſeriem menturandâ, olim excogitaveram, &c."

Et poſtquam ejus beneficio oſtendit complurium Curvarum quadraturam, accedit ad circulum; & convertendo $\sqrt{aa+bb}$, vel $\sqrt{aa-bb}$ in ſeriem infinitam, oſtendit complures ejuſmodi ſeries applicari poſſe ad circulum: adeo ut datis horum quibuſlibet duobus; radio nempe, ſinu, arcu, & areâ ſegmenti, reliquorum quodvis inveniri poſſit infinitè verum: res ni fallor ab omnibus auctoribus prægreſſis valdè expetita. Ejuſdem etiam adminiculo eximiè facilitavit inventionem radicis æquationis cujuſlibet, & mediarum proportionalium; & ſeriem largitur ad inveniendam lineæ Ellipticæ longitudinem. Similiter, ut oſtenderet methodum ſuam ad Curvas Mechanicas, earumque tangentes, ſe porrigere, quadrat Cycloidem ejuſque portiones; areamque curvæ Quadratricis, ejuſque perimetrum invenit: atque ad calcem ſic ait.

tionibus quinque primis Libri de Quadraturis, Newtono innotuit anno 1669.

† Exemplum luculentum calculi per momenta fluentium.

‡ Leibnitius ſcribit *dx* pro *o* vel *oxi*; *dx* pro *ov*, vel *oy*.

§ Hâc propoſitione ex æquatione fluentes involvente inveniuntur fluxiones.

" Nec quicquam hujuſmodi ſcio, ad quod hæc methodus, idque variis " modis, ſeſe non extendat. Imo tangentes ad Curvas Mechanicas, ſi " quando id non aliàs fiat, hujus ope ducuntur. Et quicquid vulgaris " Analyſis per æquationes ex finito terminorum numero conſtantes, quando " id ſit poſſibile, perficit; hæc per æquationes infinitas ſemper perficiat. " Et hæc de areis Curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant. Imo cùm pro- " blemata de Curvarum longitudine, de quantitate & ſuperficie Solidorum, " deque centro Gravitatis, poſſunt eo tandem reduci, ut quæratur quantitas " ſuperficiei planæ, lineâ curvâ terminatæ; non opus eſt quicquam de iis " adjungere."

N° XIV. *Ex epiſtolâ D.* Collins *ad D.* Jacobum Gregorium, *anno* 1669, 25 Nov. *datâ. Quæ quidem epiſtola, manu dicti D.* Collins *deſcripta, conſervatur.*

Barrovius provinciam ſuam publicè prælegendi remiſit cuidam, nomine Newtono, Cantabrigienſi; cujus, tanquam viri acutiſſimo ingenio præditi, in præfatione Prælectionum Opticarum, meminit: quique antequàm ederetur Mercatoris Logarithmotechnia, eandem methodum adinvenerat; eamque ad omnes Curvas generaliter, & ad circulum diverſimodè, applicârat.

N° XV. *Ex epiſtolâ D.* Jacobi Gregorii *ad D.* J. Collins, *ad Fanum Sti.* Andreæ *apud* Scotos *anno* 1670, 20 Aprilis *datâ, prout in autographo ipſius* Gregorii *legitur.*

Seriem à te miſſam de circuli zonâ intelligere nequeo, nempe $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7}$ — &c. Si hæc rectè deſcripta ſit, ſeriem legitimam non eſſe ſuſpicor.

N° XVI. *Ex epiſtolâ ejuſdem* Gregorii *ad eundem, anno* 1670, 3 Septemb. *datâ.*

Barrovii [geometricas] lectiones ſummâ cum voluptate & attentione perlegi; atque omnes, qui unquam hiſce de rebus ſcripſerunt, infinito intervallo ſuperâſſe comperio. Ex ejuſdem [Barrovii] methodis tangentes ducendi, cum quibuſdam è propriis collatis, inveni methodum generalem & geometricam * ducendi tangentes ad omnes Curvas ſine calculo; & quæ complectitur non tantùm Barrovii methodos particulares, ſed & ipſius generalem methodum analyticam, quam habes ſub finem lectionis decimæ. Methodus mea haud pluribus quàm duodecim continetur propoſitionibus.

N° XVII. *Ex epiſtolâ ejuſdem ad eundem anno* 1670, 23 Novemb. *datâ; cujus etiam confervatur autographon.*

Plurimæ approximationes pro circuli ſegmentis ex his facilè elici poſſunt; at vix operæ pretium erit, cùm poteſtates alternas tollere nequeo,

* Hinc innotuit methodum tangentium *Gregorii* & *Sluſii* ex methodo *Barrovii* conſequi.

quod

quod factum eſt à D. *Newtono* in ſuâ ſerie, modò ſeries ſit: nam, ut dicam quod ſentio, ad nullam mearum reducere poſſum. Autumno tamen meam pari facilitate & brevitate rem confecturam.

Ex autographo D. Jacobi Gregorii *ad eundem D.* Collins, *de Fano Sti.* Andreæ, 19 Decembris *ejuſdem anni, miſſo.* N° XVIII.

Quum poſtremas ad te dedi literas, nondum animadvertiſſem D. Newtoni ſeriem de circuli zonis, quam jam dudum ad me miſiſti, unà cum infinito iſtiuſmodi ſerierum numero, conſectarium illius eſſe poſſe, quam miſi de logarithmis; nempe, dato logarithmo invenire ejus numerum; vel radicem poteſtatis cujuſcunque puræ in infinitam ſeriem permutare. Me ſane tam tardi fuiſſe ingenii miror; qui tanto temporis ſpatio hoc non animadverteram, quum tamen multum olei & operæ in iſtâ ſerie expiſcandâ impenderam. At ut ingenuè fatear, ſemper in animum induxeram, ſi modò ſeries eſſet, me in eam incidere poſſe, ope aliquarum è ſeriebus meis pro circulo inter ſe combinatis, quarum quidem plurimas ad manus habeo; neque ullam aliam deſiderâram methodum. Series tua, paululum producta, fit $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5R^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \frac{21B^{13}}{6656R^{11}} - \frac{11B^{15}}{51206R^{13}}$ (*) &c. Eiſdem etiam poſitis, erit arcus, cujus ſinus B, $= B + \frac{B^3}{6R^2} + \frac{3B^5}{40R^4} + \frac{5B^7}{112R^6} + \frac{35B^9}{1152R^8} +$ (*) &c. Plures hujuſcemodi ſeries proferre poſſem; ſed tu fortaſſe plus meipſo de his rebus nôſti.

Ex epiſtolâ D. Collins *ad dictum D.* Gregorium, 24 Decembris, *anno* 1670 N° XIX. *datâ: cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

Quum D. Dary * Miſcellanea ſua in lucem edidit, exemplar libelli miſit ad D. Newtonum; qui dictum D. Dary ſerie, pro areâ zonæ circuli, quam ad te miſi, remuneravit: quæ ſine omni dubio ſeries eſt legitima & eximia. Ope D. Barrovii nonnullas alias ſeries, è methodo Newtoni generali derivatas, obtinui; eaſque, conſerto colloquio, deprehendi analyticè deduci poſſe è datis cujuſvis figuræ proprietatibus; & multas ſeries ad ſingulas figuras applicari poſſe. Univerſalem quoque eſſe, cujuſque ope omnes Quadraturas perficere poſſis; tam Curvarum quas Carteſius Geometricas eſſe admittit, quàm earum quas cenſet Mechanicas.

Hâc itaque methodo Curvæ omnium figurarum, communi proprietate definitarum, rectificantur; earum tangentes & centra gravitatis inveniuntur; item rotunda earum Solida, & ſegmenta ſecunda cubantur; & in univerſis Curvis, longitudine curvilineâ data, ordinatim applicatæ inveniuntur, & vice verſâ.

Exempla quædam.

Arcu z dato, invenire ſinum x, vel co-ſinum y; poſitâ unitate pro radio.

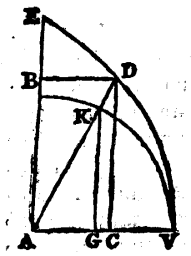
(*) Vide Analyſin per Æq. Num. Term. inf. Cap. III. § 6.
(*) Vide Analyſin per Æq. Num. Term. inf. Cap. VI. § 3.
* N. B. Miſcellanea edidit D. *Michael Dary*, anno 1669.

$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ (a) – &c.

$y = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$ (a) + &c.

Et dato ſinu x, invenire z: $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$ (b) + &c.

Quadratricem veterum quod attinet, nulla methodus, nullus geometra ejus aream exhibere valuit. Sit igitur AV, radius circuli inſcripti, unitas; & VK, arcus, x; erit area BDVA $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{4}{13230}x^7$ – &c. (c)



Tractatum hâc de re ſcripſit; in quo inventio longitudinis totius, vel datæ partis, curvæ Ellipticæ, & Quadratricis DV, nec non areæ ſupradictæ, eſt inter exempla.

N° XX. *Ex epiſtolâ D.* Jacobi Gregorii *ad D.* Collins, 15 *Feb. anno* 167$\frac{6}{7}$ *datâ, cujus habetur autographon.*

Ex quo epiſtolam ad te dedi, tres à te accepi, unam *Decemb.* 15, alteram *Dec* 24, tertiam 21 *Januarii* nuper elapſi datam.

Quod attinet Newtoni methodum univerſalem, aliquâ ex parte, ut opinor, mihi innoteſcit; tam quoad Geometricas, quàm Mechanicas curvas. Nihilo tamen minus, ob ſeries ad me miſſas, gratias habeo; quas ut remunerem, mitto quæ ſequuntur.

Sit radius $= r$; arcus $= a$; tangens $= t$; ſecans $= s$.

Et erit $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8}$, &c. (d)

Eritque $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8}$, &c. (d)

Et $s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7}$, &c. (e)

Sit nunc tangens artificialis $= t$; & ſecans artificialis $= s$; & integer quadrans $= q$.

Erit $s = \frac{a^2}{2r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{62a^{10}}{28350r^9}$, (f) &c.

Sit $2a - q = e$, & erit $t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8}$, (g) &c.

Sit nunc ſecans artificialis 45 *gr.* $= s$; ſitque $s + l$ ſecans artificialis ad libitum. Erit ejus arcus $= \frac{1}{2}q + l - \frac{l^2}{r} + \frac{4l^3}{3r^2} - \frac{7l^4}{3r^3} + \frac{14l^5}{3r^4} - \frac{452l^6}{45r^5}$, (h) &c. eritque $2a - q = t - \frac{t^3}{6r^2} + \frac{t^5}{24r^4} - \frac{61t^7}{5040r^6} + \frac{277t^9}{27576r^8}$, (i) &c.

Hîc animadvertendum eſt, radium artificialem eſſe 0; & ubi inveneris q majorem quàm $2a$, ſive artificialem ſecantem 45 *gr.* majorem eſſe datâ ſecante; mutanda eſſe ſigna, & pergendum ſecundum vulgaris Algebræ præcepta.

(a) Vide Analyſin per Æq. Num. Term. inf. Cap. VII. Sect. 2.
(b) Vide Analyſin per Æq. Num. Term. inf. Cap. VI. § 2.
(c) Vide Analyſin per Æq. Num. Term. inf. Cap. IX. § 4.

Sit

Sit ellipſis, cujus alter ſemiaxium $= r$; alter $= c$. Ex quolibet curvæ ellipticæ puncto demittatur in ſemiaxem, r, recta perpendicularis $= a$. Erit curva elliptica perpendiculari a adjacens $= a + \frac{r^2a^3}{6c^4} + \frac{4r^2c^2a^5 - r^4a^5}{40c^8} + \frac{8c^4r^2a^7 + r^6a^7 - 4c^2r^4a^7}{112c^{12}} + \frac{64c^6r^2a^9 - 48c^4r^4a^9 + 24c^2r^6a^9 - 5r^8a^9}{1152c^{16}}$, &c.

Si determinetur ellipſeos ſpecies, ſeries hæc ſimplicior evadet. Ut ſi $c = 2r$, foret Curva prædicta $= a + \frac{a^3}{96r^2} + \frac{3a^5}{2048r^4} + \frac{113a^7}{458752r^6} + \frac{3119a^9}{7549747r^8}$, &c.

Reliquis verò manentibus, ſi Curva prædicta eſſet hyperbola, prædicta quoque ſeries ei inſerviret; ſi modò omnium terminorum partes affirmentur, & negentur totus terminus tertius, totus quintus, ſeptimus, &c. in locis imparibus.

Gratias ago maximas, tam ob benevolentiam, quâ mones de meditatis meis publicandis, quàm ob perhumanas tuas pollicitationes. Nollem tantam moleſtiam tibi creare; neque mihi in animo eſt quicquam edere, præterquam quadraturam meam Circuli recuſam, additis quibuſdam nugamentis. Quod attinet methodum meam inveniendi radices omnium æquationum; una ſeries unam tantùm prodit radicem, at pro quâlibet radice infinitæ ſunt ſeries. Induſtriâ autem aliquâ opus eſt, ad ſeriem ritè incipiendam, & ad quam pertineat radicem dignoſcendam. Verùm hâc de re fuſiùsforſan aliquando ad te ſcribam. Non eſt quod metuas cuiquam, quicquid miſerim, communicare; parum enim ſolicitus ſum, utrumne meo an alieno nomine in publicum prodeat.

Ex epiſtolâ D. Collins *ad D.* Bertet Pariſiis *tum agentem. Data autem eſt* N° XXII. 21 Februarii, *anno* 170$\frac{0}{1}$; *ejuſque exemplar, manu ipſius D.* Collins *exaratum, conſervatur.*

Syſtema Algebræ integrum componere, opus eſt eximium, & dignum cui ab omnibus faveatur; præcipuè verò quia quatuor circiter abhinc annis inventa fuit à D. Iſaaco Newtono methodus analytica generalis, pro quadraturâ omnium ſpatiorum curvilineorum, tam in Curvis Geometricis quàm Mechanicis, communi aliquâ proprietate gaudentibus. Hujus ope quicquid à quadraturis pendet peragitur; ut rectificatio Curvarum; inventio tangentium & centrorum gravitatis; rotundorumque Solidorum, & eorundem ſegmentorum ſecundorum, & curvarum ſuperficierum dimenſuratio: non autem ſuperficierum Solidorum quorum axes inclinantur; uti parabolicorum conoidum, &c. hæc manet difficultas poſteris ſuperanda. Hæc omnia peraguntur approximando verum in infinitum, abſque radicum extractione, ope infinitæ ſeriei rationalium, cujuſmodi multæ ad unam eandemque figuram diverſimodè applicari poſſunt: *v. g.* ad Circulum una, ad inveniendam aream totius, vel partis cujuſvis; alia, ad inſcriptas; alia, ad adſcriptas; &c. Ita ut dato ſinu, tangente vel ſecante, inveniri poteſt longitudo arcûs, & vice verſâ, ope diverſarum ſerierum ad eam rem appropriatarum.

(d) Vide Excerp. ex Epiſt. Not. k, § 7.
(e) Vide Excerp. ex Epiſt. Not. k, § 8.
(f) Vide Excerp. ex Epiſt. Not. k, § 14.
(g) Vide Excerp. ex Epiſt. Not. k, § 22.
(h) Vide Excerp. ex Epiſt. Not. k, § 23.
(i) Vide Excerp. ex Epiſt. Not. k, § 26.

Unde fit, ut jam calculo facilior inventu ſit arcus è ſinu dato, & vice verſâ, quàm è ſinu dato ſinus dupli arcûs. Univerſim autem hoc nihil aliud eſt, quàm methodus à Mercatore uſurpata, in ejus Logarithmotechniâ, ad hyperbolam quadrandam, generalis reddita. D. Jacobus Gregorius apud Scotos nuperrimè incidit in eandem methodum.

N° XXII. *Ex epiſtolâ D.* J. Collins *in Italiam ad D.* Alphonſum Borellum *miſſâ*; & *menſe* Decembri *anno* 1671 *datâ: cujus habetur exemplar, manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

Kinckhuyſenii introductio ad Analyſin Specioſam, quam *Stel-konſt* vocat, à D. Iſaaco Newtono prælo parata eſt; qui jam Mathematicês Profeſſor apud Cantabrigienſes factus eſt. Huic adjunget ipſius methodum generalem Quadraturarum analyticam; cujus ope calculo eruit omnium curvilinearum figurarum regularium, communi aliquâ proprietate gaudentium, aream; earundem Curvarum rectificationem; inventionem centrorum gravitatis earum; itemque rotunda Solida, & ſuperficies eorum rotatione genitas; & ſecunda iſtorum Solidorum ſegmenta: imo dato quovis logarithmico ſinu, tangente vel ſecante in canone, invenire licet arcum ei competentem, abſque naturali ſinu, tangente vel ſecante prius invento, & vice verſâ; idque generaliter, ſine ullâ radicum extractione.

Hujus ſpecimen pro circulo appoſui.

N. B. In hujus epiſtolæ exemplari, locus vacuus ſeriei interferendæ hîc relictus fuit.

N° XXIII. *Ex epiſtolâ ejuſdem D.* Collins *ad D.* Franciſcum Vernon *Anglum Pariſiis tum agentem*, Londini, 26 Decembris, *anno* 1671 *datâ: cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

D. Barrovius certiorem me facit, D. Newtonum pene adornâſſe Kinckhuyſenii ad Algebram introductionem; cujus hîc brevi edendæ negotium mihi curæ erit: eamque de propriâ ipſius penu auctiorem reddidiſſe. Huic ſubjiciet generalem * ſuam infinitarum ſerierum methodum analyticam; cujus ope computantur omnium ſpatiorum curvilineorum areæ, tum Geometricorum, tum eorum quæ, ex mente Carteſii, Mechanica ſunt, modo figuræ una aliqua aut pluribus communibus proprietatibus definitæ ſint; ipſarumque Curvarum longitudines; centra gravitatis; rotunda Solida, & ſuperficies eorum rotatione genitæ. Hinc etiam eruuntur multæ pro circulo ſeries; necnon quovis numero dato, tanquam logarithmico ſinu, tangente vel ſecante, calculo perfacili, ſine ullâ radicum extractione, ſine ullis tabulis, inveniri poteſt arcus ei reſpondens, & vice verſâ; idque vero quantum velis proximè, abſque naturali ſinu, tangente, aut ſecante prius invento: tot tantiſque commodis fœta eſt hæc doctrina, de quâ non niſi comperta loquor! Unà cum his mittet viginti lectiones ejus Opticas, quas D. Barrovius opus cenſet, quo majus præſens ætas vix protulit. Admonui maturandam

* Hic tractatus unus idemque eſt ac ille, cujus mentionem fecerat D. Newtonus in epiſtolâ Oct. 24, 1676, datâ, per D. Oldenburgium D. Leibnitio communicatâ; & in quo methodi ſerierum

randam ideo eſſe impreſſionem, quoniam D. Hugenius tractatum de Dioptricâ, & de Curvarum Evolutione jam molitur. Ille autem contrà, ſe magis cupere, ut accepto harum rerum nuncio, Hugenius potius excitaretur quàm tardaretur; ratus minimè veriſimile utriuſque hypotheſes vel deductiones eaſdem eſſe poſſe.

Ex epiſtolâ D. J. Collins *ad D.* Thomam Strode, 26 Julii *anno* 1672 *datâ: cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.* N° XXIV.

Quod geometriam curvarum figurarum ſpectat; hanc tandem generaliter ad calculum analyticum reduci poſſe, omnino orbi literato novum atque inauditum eſt. Hujus æquationes ſunt ſeries, terminis numero infinitis conflatæ, quorum tamen pauci ſufficiunt communiter, ex notis curvarum proprietatibus erutæ. Auctorem quod attinet, hujuſque methodi præſtantiam, hæc accipe.

Menſe *Septembri* 1668, Mercator Logarithmotechniam edidit ſuam, quæ ſpecimen hujus methodi, i. e. ſerierum infinitarum, in unicâ tantùm figurâ, nempe quadraturam hyperbolæ continet. Haud multò poſt quàm in publicum prodierat liber, exemplar ejus Cl. Wallisio Oxoniam miſi; qui ſuum de eo judicium in Actis Philoſophicis ſtatim fecit: aliumque Barrovio Cantabrigiam; qui quaſdam Newtoni chartas, qui jam Barrovium in mathematicis prælectionibus publicis excipit, extemplo remiſit: è quibus & ex aliis, quæ olim ab auctore cum Barrovio communicata fuerant, patet illam methodum à dicto Newtono aliquot annis antea excogitatam, & modo univerſali applicatam fuiſſe: ita ut ejus ope, in quâvis figurâ curvilineâ propoſitâ, quæ unâ vel pluribus proprietatibus definitur, quadratura vel area dictæ figuræ, † accurata, ſi poſſibile ſit, ſin minus infinitè vero propinqua; evolutio, vel longitudo lineæ curvæ; centrum gravitatis figuræ; Solida, ejus rotatione genita, & eorum ſuperficies; ſine ullâ radicum extractione obtineri queant.

Poſtquam intellexerat D. Gregorius hanc methodum, à D. Mercatore in Logarithmotechniâ uſurpatam, & Hyperbolæ quadrandæ adhibitam, quamque adauxerat ipſe Gregorius, jam univerſalem redditam eſſe, omnibuſque figuris applicatam; acri ſtudio eandem acquiſivit, multumque in eâ enodandâ deſudavit.

Uterque, D. Newtonus & Gregorius, in animo habet hanc methodum exornare. D. Gregorius autem, D. Newtonum primum ejus inventorem anticipare, haud integrum ducit.

Ex epiſtolâ ad D. Collins *ad D.* Newtonum 30 Julii *anno* 1672 *datâ, cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.* N° XXV.

Parandis ſeriebus pro extrahendis radicibus in ſpeciebus [Algebraicis], ad modum Vietæ [in numericis], credo D. Gregorium haud modicam impen-

rierum infinitarum & fluxionum ſimul explicabantur, ut ibi loci memorat.

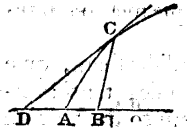
† Teſtibus igitur Barrovio & Collinio, methodus prædicta quadrandi figuras, accuratè ſi fieri poteſt, Newtono innotuit anno 1666 aut antea.

diſſe

disse speram: nihil autem de eâ re scribere suscipiet, antequam tu, methodi hujus repertor, proprias de eâ lucubrationes in lucem emiseris; sed aliis rebus per interim intentus est.

N° XXVI. *Ex epistolâ D.* Newtoni *ad D.* Collins, *anno* 1672, 10 Decembris *datâ. Repertum autem est ipsius* Newtoni *autographum in scriniis D.* Collins, *unà cum ejusdem exemplari manu D.* Collins *descripto.*

Ex animo gaudeo D. Barrovii, amici nostri reverendi, lectiones Mathematicis exteris adeo placuisse; neque parum me juvat intelligere eos [Slusium & Gregorium] in eandem mecum incidisse ducendi tangentes methodum. Qualem eam esse conjiciam, ex hoc exemplo percipies. Pone CB applicatam ad AB, in quovis angulo dato, terminari ad quamvis Curvam, AC; & dicatur AB, x; & BC, y; habitudoque inter x & y exprimatur quâlibet æquatione; puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, quâ ipsa determinatur Curva. Regula ducendi tangentem hæc est: Multiplica æquationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y; put $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3$: ut & juxta dimensiones x; puta $x^{3\,0} - 2x^{2\,1}y + b^{1\,0}x^{2\,0} - b^{2\,0}bx + b^{1\,0}yy - y^{3\,2}$. Prius productum erit numerator, & posterius, divisum per x, denominator fractionis, quæ exprimet longitudinem BD, ad cujus extremitatem, D, ducenda est tangens CD. Est ergo longitudo $BD = \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$.



Hoc est unum particulare, vel corollarium potius, methodi generalis; quæ extendit se, citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas, aliasve Curvas, respicientes; verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de curvitatibus, areis, longitudinibus, centris gravitatis Curvarum, &c. Neque, quemadmodum Huddenii methodus de Maximis & Minimis, ad solas restringitur æquationes illas, quæ quantitatibus surdis sunt immunes.

Hanc methodum intertexui * alteri isti, quâ æquationum exegesin instituo, reducendo eas ad series infinitas. Memini me ex occasione aliquando narrâsse D. Barrovio, edendis lectionibus suis occupato, instructum me esse hujusmodi methodo tangentes ducendi: sed nescio quo diverticulo, ab eâ ipsi describendâ fuerim avocatus.

Slusii methodum tangentes ducendi brevi publicè prodituram confido: quamprimum advenerit exemplar ejus, ad me transmittere ne grave ducas.

* Sc. in tractatu, quem Newtonus scripsit anno 1671. Missum autem fuit apographum hujus epistolæ ad Tschurnhausium mense Maio 1675, & ad Leibnitium mense Junio 1676.

Epistola

Epistola D. Slusii *ad* Oldenburgh, *anno* 167$\frac{5}{7}$, 17 Januarii Leodii *data, quâ continetur methodus ejus ducendi tangentes, inter epistolas Regiæ Societatis asservatur Lib. N° VI. pag.* 11. *Legitur autem impressa in Transactionibus Philosophicis, N° XC.*

Ex epistolâ D. Oldenburgh *ad D.* Slusium, *anno* 167$\frac{5}{7}$, 29 Januarii *datâ,* N° XXVII. *quâ prædictis* Slusii *literis respondetur. Legitur autem exemplar ejus in libris Regiæ Societatis, N° VI. p.* 27.

Statui, Deo dante, primâ occasione methodum ipsam, prout epistolâ tuâ continetur, Transactionibus Philosophicis inserere. Non ingratum interea fuerit, accipere quæ doctissimus noster Newtonus, in Academiâ Cantabrigiensi Mathematum Professor, de eodem argumento ad D. Collinium nostrum, qui te summopere & jugiter colit, nuper perscripsit in hæc verba.

" Non parum me juvat intelligere, mathematicos exteros in eandem " mecum incidisse ducendi tangentes methodum. Qualem eam esse conji- " ciam, ex hoc exemplo percipies. *Atque ita deinceps ut in præcedente ip-* " *sius* Newtoni *epistolâ habetur.*"

Hactenus Newtonus, quæ ideo nunc perscribo, ut cum novissimis tuis comparare possis.

Epistola D. Slusii *ad D.* Oldenburgh, *anno* 1673, 3 Maii Leodii *data, quâ* N° XXVIII. *continentur fundamenta methodi tangentium* Slusianæ, *cujusque asservatur exemplar in libris epistolarum Regiæ Societatis, N° VI. p.* 111, *impressa legitur in Phil. Transact. N° XCV.*

Ex epistolâ D. Oldenburgh *ad D.* Slusium, *anno* 1673, 10 Julii *datâ. Le-* N° XXIX. *gitur autem inter epistolas Regiæ Societatis, Lib. VI. p.* 196.

En tibi, vir illustrissime, impressum modum tuum demonstrandi methodum tuam ducendi tangentes ad quaslibet Curvas; quemadmodum postremis tuis literis eum mihi communicaveras. Subticui viri nomen offensionis evitandæ causâ. Scripsit mihi D. Newtonus in hanc sententiam.

" Ex priori tuâ epistolâ subdubitabam, existimaretne celeberrimus Slu- " sius per ea, quæ ipsi de me scripseras, me mihi tribuere methodum ip- " sius ducendi tangentes; donec intelligerem à D. Collinio, te ipsi signi- " ficâsse, eam, ex opinione tuâ, seriùs hîc inventam fuisse. Tibi quippe " videtur, eam D. Slusio perspectam fuisse, aliquot annis priusquam ederet " Mesolabum suum, proindeque antequam ego eam intelligerem. At si " res secus se haberet, cùm tamen eam primus communicaverit amicis suis " & literato orbi, jure merito ipsi debetur. Quoad methodos illas, eæ- " dem sunt, quanquam, crediderim, ex principiis diversis derivatæ. Nes- " cio tamen num ipsius principia eam largiantur adeo generalem, ac mea

" quæ ad æquationes terminis ſurdis affectas ſe extendunt, abſque eorum " ad aliam formam reductione."

Hæc ille, quæ in bonam partem à te acceptum iri confido.

N° XXX. *Excerpta ex epiſtolâ D.* Gothofredi Guilielmi Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, Londini, *anno* 167½, 3 Feb. *datâ. Hujus autographon in ſcrinio Regiæ Societatis extat, & exemplar ejus in libro epiſtolarum dictæ Societatis, N° VI. p.* 35, *deſcriptum legitur.*

Cùm heri apud illuſtriſſimum Boylium incidiſſem in clariſſimum Pellium, Mathematicum inſignem, ac de numeris incidiſſet mentio; commemoravi ego, ductus occaſione ſermonum, eſſe mihi methodum ex quodam differentiarum genere, quas voco generatrices, colligendi terminos ſerici cujuſcunque continuè creſcentis, vel decreſcentis. Differentias autem generatrices voco, ſi datæ ſeriei inveniantur differentiæ, & differentiæ differentiarum, & ipſarum ex differentiis differentiarum differentiæ, &c. & ſeries conſtituatur ex termino primo & primâ differentiâ, & primâ differentiâ differentiarum, & primâ differentiâ ex differentiis differentiarum, &c. ea ſeries erit differentiarum generatricium, ut ſi ſeries continuè creſcens vel decreſcens fuit *a, b, c, d,* poſitâ ∽ differentiæ notâ differentiæ generatrices erunt.

$$1a \cdot 2a \backsim b \cdot 3a \backsim b \backsim b \backsim c \cdot 4a \backsim b \backsim b \backsim b \backsim b \backsim c \backsim c \backsim d.$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & & & 4\ a \backsim b \backsim b \backsim c \backsim b \backsim c \backsim c \backsim d. \\ & & & 3\ a \backsim b \backsim b \backsim c & b \backsim c \backsim c \backsim d \\ & & 2\ a \backsim b & b \backsim c & c \backsim d \\ & 1\ a & b & c & d \end{array}$$

Aut in numeris; ſi ſeries ſit numerorum cubicorum deinceps ab unitate creſcentium, differentiæ generatrices erunt numeri 0, 1, 6, 6. Voco autem generatrices, quia ex iis, certo modo multiplicatis, producuntur termini ſeriei; cujus uſus tum maximè apparet, cùm differentiæ generatrices ſunt finitæ, termini autem ſeriei infiniti; ut in propoſito exemplo numerorum cubicorum.

			0			
		0		0		0
	6		6		6	
6		12		18		24
	1		7		19	
		0		1		8
			27			
30				61		
	37				91	
		64				125
			216			

Hoc cùm audiſſet clariſſimus Pellius; reſpondit, id jam fuiſſe in literas relatum à D. Mouton Canonico Lugdunenſi, ex obſervatione nobiliſſimi viri Franciſci Regnaldis Lugdunenſi, dudum in literario orbe celebris, in libro laudati D. Mouton de diametris apparentibus Solis & Lunæ. Ego, qui ex epiſtolâ quâdam à Regnaldo ad Monconiſium ſcriptâ, & diario itinerum Monconiſiano inſertâ, nomen D. Moutoni & deſignata ejus duo didiceram; diametros luminarium apparentes, & conſilium de menſuris rerum ad poſteros tranſmittendis; ignorabam tamen librum ipſum prodiiſſe. Quare apud D. Oldenburgium Societatis Regalis Secretarium, ſumtum mutuo tumultuarie

multuariè percurri, & inveni veriſſimè dixiſſe Pellium. Sed & mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur ſuſpicio, quaſi, tacitò inventoris nomine, alienis meditationibus honorem mihi quærere voluiſſem; & ſpero appariturum eſſe, non adeo egenum me meditationum propriarum, ut cogar alienas emendicare. Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindicabo. Primò ſi ipſas ſchedas meas confuſas, in quibus non tantùm inventio mea, ſed & inveniendi modus occaſioque apparet, monſtrem: deinde ſi quædam momenti maximi, Regnaldo Moutonoque indicta, addam, quæ ab heſterno veſpere confinxiſſe me non ſit veriſimile, quæque non poſſunt facilè expectari à tranſcriptore.

Ex ſchedis meis occaſio inventi hæc apparet. Quærebam modum inveniendi differentias omnis generis poteſtatum; quemadmodum conſtat differentias quadratorum eſſe numeros impares: inveneramque regulam generalem ejuſmodi.

Datâ potentiâ gradûs dati præcedente, invenire ſequentem (vel contrà) diſtantiæ datæ, vel radicum datarum; ſeu invenire potentiarum gradûs dati, utcunque diſtantium, differentias. Multiplicetur potentia, gradûs proximè præcedentis, radicis majoris per differentiam radicum; & differentia potentiarum, gradûs proximè præcedentis, multiplicetur per radicem minorem. Productorum ſumma erit quæſita differentia potentiarum, quarum radices ſunt datæ. Eandem regulam ita inflexeram, ut ſufficeret, præter radices cujuſlibet gradûs, etiamſi non proximè præcedentis, potentias datarum radicum dari, ad differentias potentiarum alterius cujuſcunque, licet altioris, gradûs inveniendas. Et oſtendi quod in quadratis obſervatur, numeros impares eſſe eorum differentias, id non niſi regulæ propoſitæ ſubſumptionem eſſe.

His meditationibus defixus, quemadmodum in quadratis differentiæ ſunt numeri impares, ita quoque quæſivi, quales eſſent differentiæ cuborum; quæ cùm irregulares viderentur, quæſivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias eſſe numeros ſenarios. Hæc obſervatio mihi aliam peperit. Videbam enim ex differentiis præcedentibus generari terminos differentiaſque ſequentes; ac proinde, ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco 0.1.6.6, ſequentes omnes. Hoc concluſo, reſtabat invenire, quo additionis, multiplicationiſve, aut horum complicationis genere, termini ſequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atque ita reſolvendo experiundoque deprehendi primum terminum, 0, componi ex primâ differentiâ generatrice, 0, ſumptâ ſemel, ſeu, vice unâ: ſecundum, 1, ex primâ 0 ſemel, & ſecundâ 1 ſemel: tertium, 8, ex primâ 0 ſemel, ſecundâ 1 bis, & tertiâ 6 ſemel: nam $0 \times 1 + 1 \times 2 + 6 \times 1 = 8$. Quartum, 27, ex primâ 0 ſemel, ſecundâ 1 ter, tertiâ 6 ter, quartâ 6 ſemel: nam $0 \times 1 + 1 \times 3 + 6 \times 3 + 6 \times 1 = 27$, &c. idque analyſis mihi univerſale eſſe comprobavit. Hæc fuit occaſio obſervationis meæ, longè alia à Moutonianâ; qui cùm in tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum Regnaldo incidit. Nec vel illi vel Regnaldo adimenda laus, quòd & Briggius in logarithmicis ſuis jam olim talia quædam, obſervante Pellio, ex parte advertit. Mihi hoc ſupereſt; ut addam nonnulla illis indicta, ad amo-

liendum transcriptoris nomen ; neque enim interest reipublicæ, quis observaverit; interest, quid observetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud Moutonium non extat, & caput tamen rei est: quinam sint illi numeri, quorum tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter se junctis, termini serierum generentur. Vides enim ex ipso modo, quo tabula ab eo pag. 385 exhibetur, non fuisse id ei satis exploratum; alioqui enim verisimile est ita tabulam fuisse dispositurum, ut ea numerorum connexio atque harmonia appareret; nisi quis de industriâ texisse dicat: ita enim se habet pars tabulæ.

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet, ex hujus tabulæ constructione, solam haberi rationem correspondûs numerorum generantium cum numero termini generati; ut cùm terminus est quartus (4) producitur ex primâ differentiâ semel, secundâ ter 3, tertiâ ter 3, quartâ semel 1; ideo in eâdem (4) lineâ transversâ locantur 1.3.3.1. Sed vel non observavit, vel dissimulavit, autor correspondûs numerorum, si à summo deorsum eundo per columnas disponantur hoc modo,

1	1					
2	1 ↖	1				
3	1	2 ↖	1			
4	1	3	3 ↖	1		
5	1	4	6	4 ↖	1	
6	1	5	10	10	5 ↖	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim statim vera genuinaque eorum natura ac generatio apparet; esse scilicet eos numeros, quos combinatorios appellare soleo, de quibus multa dixi in dissertatiunculâ de arte combinatoriâ; quosque alii appellant ordines numericos; alii in specie primam columnam, unitatum; secundam, numerorum naturalium; tertiam, triangularium; quartam, pyramidalium; quintam, triangulo triangularium &c. de quibus integer extat tractatus Paschalii sub titulo Trianguli Arithmetici; in quo tamen proprietatem numerorum

rorum ejusmodi tam illustrem tamque naturalem * non observatam sum miratus. Sed est profecto casus quidam in inveniendo, qui non semper maximis ingeniis maxima, sed sæpe etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum istorum natura, & tabulæ constructio, sive à Regnaldo sive à Moutonio dissimulata, intelligitur: semper enim terminus datus columnæ datæ componitur ex termino præcedente columnæ tam præcedentis quàm datæ: atque illud quoque apparet, non opus esse molesto calculo ad tabulam, à Moutonio propositam, continuandam, ut ipse postulat; cùm hæ numerorum series passim jam tradantur calculenturque.

Cæterùm Moutonius observatione istâ, ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos; ego, ad inveniendos ipsos numeros extremos in infinitum, cum eorum differentiis, utendum censebam. Hinc ille, non nisi cùm differentiæ ultimæ evanescunt, aut pene evanescunt, usum regulæ invenit; ego detexi innumerabiles casus, regulâ quâdam inobservatâ comprehendendos, ubi possum ex datis numeris finitis, certo modo multiplicatis, producere numeros plurimarum serierum in infinitum euntium, etsi differentiæ earum non evanescant.

Ex iisdem fundamentis possum efficere in progressionibus problemata plurima; aut in numeris singularibus, aut in rationibus vel fractionibus. Possum enim progressiones addere subtrahereque, imo multiplicare quoque & dividere, idque compendiosè.

$\frac{1}{3}$ •	$\frac{1}{4}$ •	$\frac{1}{5}$ •	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$ •	$\frac{1}{10}$ •	$\frac{1}{15}$ •	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{10}$ •	$\frac{1}{20}$ •	$\frac{1}{35}$ •	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{15}$ •	$\frac{1}{35}$ •	$\frac{1}{70}$ •	$\frac{1}{126}$
&c.	&c.	&c.	&c.

Multa alia circa hos numeros observata sunt à me, ex quibus illud eminet; quòd modum habeo summam inveniendi seriei fractionum in infinitum decrescentium; quarum numerator unitas, nominatores verò numeri isti triangulares aut pyramidales, aut triangulo-triangulares, &c.

* *Imo observata fuit. Vide Paschalii Triangulum Arithmeticum, Parisiis anno* 1665 *editum, pag.* 2, *ubi definitionum antepenultima hæc est.*

Le nombre de chaque cellule est egal a celuy de la cellule qui la precede, dans son rang perpendicularie, plus a celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, *c'est a dire le nombre de la cellule* F, *egale la cellule* C *plus la cellule* E; *& ainsi des autres.*

N° XXXI. *In ſcriniis etiam Regiæ Societatis aſſervantur autographa quinque epiſtolarum, à D.* Leibnitio *ad D.* Oldenburgum *eodem anno* 1673 *ſcriptarum; prima autem* Londini *data eſt,* Februarii 20; *reliquæ verò* Pariſiis, Martii 30, Aprilis 26, Maii 24, & Junii 8. *Omniumque, ſi ſecundum exordia, exemplaria leguntur in libro Regiæ Societatis N° VI. pag.* 34, 101, 115 & 137.

N° XXXII. *Hactenus D.* Leibnitius *in Arithmeticâ verſabatur: jam ad Geometriam ſe convertit; & anno proximo ad* Oldenburgium *ſcribit epiſtolas duas,* Pariſiis Jul. 15, & Octob. 36 *datas, quæ leguntur in libro epiſtolarum Regiæ Societatis N° VII. pag.* 93 & 110, *eædemque reperiuntur impreſſæ in tomo tertio Operum Mathematicorum D.* J. Wallis, *& in ſcriniis Reg. Societatis aſſervantur earum autographa.*

Ex harum priore 15 Julii *datâ.*

Diu eſt, quod nullas à me habuiſti literas, &c. Alia mihi theoremata ſunt, momenti non paulò majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile eſt, cujus ope area circuli, vel ſectoris ejus dati, exactè exprimi poteſt per ſeriem quandam numerorum rationalium continuè productam in infinitum. Sed & methodos quaſdam analyticas habeo, generales admodum & latè fuſas, quas majoris facio quàm theoremata particularia & exquiſita.

Ex poſteriore 26 Octob. *datâ.*

N° XXXIII. Porro, in eâ geometriæ parte rem memorabilem mihi eveniſſe nuncio. Scis D. Vicecomitem Brounkerum, & Cl. Nic. Mercatorem exhibuiſſe infinitam ſeriem numerorum rationalium, ſpatio Hyperbolæ æqualem. Sed hoc in Circulo efficere, hactenus potuit * nemo. Etſi enim illi Brounkerus & Walliſius dederint numeros rationales magis magiſque appropinquantes; nemo tamen dedit [*imo uterque dedit*; *ſed forte non ejus ſenſu*,] progreſſionem numerorum rationalium, cujus, in infinitum continuatæ, ſumma ſit exactè æqualis circulo. Sed verò mihi tandem feliciter ſucceſſit. Inveni enim ſeriem numerorum valdè ſimplicem, cujus ſumma exactè æquatur circumferentiæ circuli; poſito diametrum eſſe unitatem. Et habet ea ſeries id quoque peculiare, quod miras quaſdam circuli & hyperbolæ exhibet harmonias. Itaque tetragoniſmi circularis problema, jam à Geometriâ traductum eſt ad Arithmeticam Infinitorum: quod hactenus fruſtra quærebatur. Reſtat ergo tantùm, ut doctrina de ſerierum, ſeu progreſſionum numericarum, ſummis perficiatur. Quicunque hactenus quadraturam circuli exactam quæſivere, ne viam quidem aperuere, per quam eò pervenire poſſe ſpes ſit: *quod nunc primùm à me factum dicere auſim.* Ratio diametri ad circumferentiam exactè à me exhiberi poteſt per rationem, non quidem numeri ad numerum, id enim foret abſolutè inveniſſe; ſed per rationem numeri

* Collinius jam ante quadriennium ſeries Newtonianas, ante triennium Gregorianas, cum amicis communicare cœpit. Leibnitius in Angliâ diverſabatur anno ſuperiore (1673), & hujuſmodi ſeries nondum communicaverat; nec prius cum amicis in Angliâ communicare cœpit, quàm ab

numeri ad totam quandam ſeriem numerorum rationalium valde ſimplicem & regularem. Eâdem † methodo etiam arcûs cujuſlibet, cujus ſinus datur, geometricè exhiberi, per ejuſmodi ſeriem, valor poteſt; nullo ad integræ circumferentiæ dimenſionem recurſu. Ut adeo neceſſe non ſit, arcûs rationem ad circumferentiam noſſe.

N° XXXIV. *Excerpta ex epiſtolâ D.* Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1674, 8 Decembris *datâ, cujus aſſervatur autographum. Eadem autem legitur inter epiſtolas Regiæ Societatis, lib. N° VII. pag.* 119; *eſtque reſponſum ad literas D.* Leibnitii, 26 Octobris *præcedentis datas.*

Quod de profectu in curvilinearum dimenſione memoras, bene ſe habet: ſed ignorare te nolim Curvarum dimetiendarum rationem & methodum à laudato Gregorio, nec non ab Iſaaco Newtono, ad Curvas quaſlibet, tum mechanicas, tum geometricas, quin & circulum ipſum, ſe extendere: ita ſcilicet ut ſi in aliquâ Curvâ ordinatam dederis, iſtius methodi beneficio poſſis lineæ curvæ longitudinem, aream figuræ, ejuſdem centrum gravitatis, Solidum rotundum, ejuſque ſuperficiem, ſive erectam ſive inclinatam, Solidique rotundi ſegmenta ſecunda, horumque omnium converſa invenire: quin & dato quolibet arcu in quadrante, logarithmicum ſinum, tangentem vel ſecantem, non cognito naturali, & converſum computare. Quod verò ais neminem hactenus dediſſe progreſſionem numerorum rationalium, cujus, in infinitum continuatæ, ſumma ſit æqualis circulo; id verò tibi tandem feliciter ſucceſſiſſe, de eo quidem tibi gratulor, &c.

N° XXXV. *Ex epiſtolâ D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Pariſiis *anno* 1675, 30 Martii *datâ. Extat autographum ſcriptoris; & reperitur deſcripta inter epiſtolas Reg. Soc. N° VII. pag.* 213. *Hâc autem reſpondetur ad ſupradictas* Oldenburgi *literas,* 8 Decembris *præcedentis datas.*

Scribis, clariſſimum Newtonum veſtrum habere methodum exhibendi quadraturas omnes, omniumque curvarum ſuperficierum, & Solidorum, ex revolutione genitorum, dimenſiones, & centrorum gravitatis inventiones; per appropinquationes ſcilicet, ita enim interpretor. Quæ methodus, ſi eſt univerſalis & commodâ, meretur æſtimari; nec dubito fore ingenioſiſſimo authore dignam. Addis, tale quid *Gregorio* innotuiſſe.

N° XXXVI. *Ex epiſtolâ D.* Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1675, 15 Aprilis *datâ; cujus habetur exemplar inter epiſtolas Reg. Societatis N° VII. pag.* 216. *Hâc reſpondetur ad D.* Leibnitii *literas,* 30 Martii *præcedentis datas: Anglicè autem extat, manu D.* Collins *deſignata ac* 10 Aprilis *data, eamque Latinè tranſtulit D.* Oldenburg *& ad D.* Leibnitium *miſit.*

D. Collinius, præmiſſâ ſalute, quæ ſequuntur remittit. Primo Cl. Gregorium,

ab Oldenburgo acceperat, ut mox patebit; neque alias communicavit, quàm quas acceperat.

† Methodum exhibendi arcum cujus ſinus datur, Leibnitius ab Oldenburgo poſtea quæſivit, *Maii* 12, 1676.

gorium, in poſtremâ ſuâ ad illuſtrem Hugenium reſponſione, ſeriem ſuppeditâſſe ad ſemicircumferentiam circuli inveniendam, quæ talis.

Pone radium $= r$; dimidium latus quadrati inſcripti circulo $= d$; & differentiam inter radium & latus quadrati $= e$: ſemicircumferentia æqualis eſt $\frac{4rr}{2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{2e^4}{11340d^3} - \frac{26e^5}{748440d^4}}$ – &c. in infinitum; quæ ſeries adeo produci poteſt, ut à ſemicircumferentiâ minus differat, quàm ulla quantitas aſſignabilis.

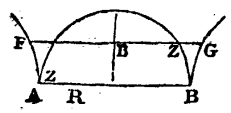
Editum hoc fuit à D. Gregorio, poſtquam D. Mercatoris Logarithmotechnia jam extabat; quæ, quàm primùm viderat lucem, ad D. Barrovium à me fuit tranſmiſſa; qui, obſervato in eâ infinitæ ſeriei uſu ad logarithmos conſtruendos, reſcribebat, methodum illam jam aliquandiu excogitatam fuiſſe à ſucceſſore ſuo Newtono; omnibuſque Curvis, earumque portionibus, geometricis æquè ac mechanicis univerſim, applicatam: cujus rei ſpecimina quædam ſubjecit, viz.

Poſitâ pro radio unitate, datoque x pro ſinu, ad inveniendum z arcum ſeries hæc eſt: $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. in infinitum. Et extractâ radice hujus æquationis, methodo ſymbolicâ, ſi dederis z pro arcu, ad inveniendum x ſinum ſeries hæc eſt;

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \text{&c.}$$

Atque hæc ſeries facilè continuatur in infinitum. Prioris beneficio, ex ſinu 30 grad. Ceulenii numeri facilè ſtruuntur.

Conſimiliter ſi ponas radium R, & B ſinum arcûs; zona, inter diametrum & chordam illi parallelam, eſt



$= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9}$ – &c. Atque eadem ſeries, mutatis ſignis termini ſecundi, quarti & ſexti, &c. inſervit aſſignandæ areæ zonæ æquilateris hyperbolæ, viz.

$$AFGB = 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \text{&c.}$$

Rurſum, dato radio R, & ſinu verſo ſive ſagittâ a, ad inveniendam aream ſegmenti reſecti à chordâ: pone b^2 pro $2Ra$, & erit ſegmentum $= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5a^9}{352b^7} - \frac{7a^{11}}{832b^9}$ – &c.

Et arcus integer $= 2b + \frac{a^2}{4b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \frac{63a^{10}}{14080b^9} + \text{&c.}$

Duæ hæ ſeries D. Gregorio habentur; quas exhibuit ex eo tempore, quo uſus eſt hâc methodo; quod ab ipſo aliquot poſt annis factum: poſtquam ſcilicet intellexerat D. Newtonum generatim eam applicâſſe. Exinde quoque ad nos miſit ſeries ſimiles ad tangentes naturales ex earundem arcubus,

* Hanc ſeriem D. Collins, initio anni 1671, à Gregorio acceperat, ut ſuprà; D. Leibnitius eandem cum amicis in Galliâ hoc anno ut ſuam communicavit, celatâ hâc epiſtolâ.

† His verbis patet ſeries, quas D. Leibnitius ſe ante annos aliquot inveniſſe profeſſus eſt, à communicatis diverſas fuiſſe. Subjungit etiam ipſe verbis diſertis *ſua a communicatis longe diverſa eſſe circa hanc rem meditata.* Vid. epiſt. *Maii* 12, 1676.

& converſim, obtinendum. Ex. gr. pone radium $= r$; arcum, a; tangentem, t: erit, $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \text{&c.}$ Et converſim ex tangente invenire arcum ejus, * $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \text{&c.}$

Atque hoc factum cùm vides, facilè credideris, poſſe eâdem methodo æquè facilè ex arcu inveniri ſinum vel tangentem logarithmicum, abſque inventione naturalis, & converſim. Pronum quoque tibi fuerit credere, methodum hanc applicari poſſe ad rectificationem quarumlibet Curvarum; particulatim verò ad lineam quadratricem, & ad inveniendam aream illius figuræ: id quod antehac, nullâ demum cum methodo, fuit præſtitum. Atque ulteriore calculationis labore extendi poteſt ad inveniendas areas ſuperficierum in rotundis Solidis inclinantibus; nec non ad inveniendas Soliditates ſecundorum ſegmentorum in Solidis rotundis. E. G. Si Conoides aliqua ſecetur à plano tranſeunte per baſin ejus, poterit id vocari ſegmentum primum; & ſi hæc portio iterum ſecetur à plano, recto ad planum prius ſecans, portio, eum in modum ſecta, hoc ipſo intenditur, ut ſit ſegmentum [ſecundum].

Porro methodus eadem applicatur inveniendis radicibus purarum poteſtatum, valdè affectarum æquationum; ita ut ex quolibet numero, abſque logarithmorum ope, excitare poſſis quamlibet poteſtatem per ſaltum, & ex quâvis poteſtate, utut affectâ, invenire radicem ejus, vel quodvis medium illud inter & unitatem aſſignatum. D. Gregorius magno labore paravit ſeriem infinitam, generatim reſpectivis poteſtatibus affectis cujuſlibet æquationis propoſitæ adaptandam; ita ut quivis Algebræ cultor, penu ipſius inſtructus, mox aptare poſſit ſeriem aliquam, ad inveniendam quamlibet radicem cujuſvis æquationis propoſitæ; poſtquam innotuit, ad quod latus noti limitis radix ceciderit. Verum id hactenus nobis non communicavit, uti nec nos illum ad id faciendum ſolicitavimus; imprimis cùm ipſe lubens permittat Newtono, ut ille primus novæ hujus methodi de infinitâ ſerie inventionem orbi mathematico patefaciat, &c.

Ex epiſtolâ D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *anno* 1675, 20 Maii, Pariſiis *datâ. Extat autographon ejus, eademque legitur in libro epiſtolarum Regiæ Societatis, N° VII. pag.* 235. *Reſponſum autem eſt ad prædictas* D. Oldenburgi *literas* 15 Aprilis *datas.* N° XXXVII.

Literas tuas, multâ fruge algebraicâ refertas, accepi; pro quibus tibi, & doctiſſimo Collinio, gratias ago. Cùm nunc præter ordinarias curas mechanicis imprimis negotiis diſtrahar, non potui examinare ſeries, quas miſiſtis, ac cum † meis comparare. Ubi fecero, ‡ perſcribam tibi ſententiam meam: nam aliquot jam anni ſunt, quod inveni meas, viâ quâdam ſic ſatis ſingulari. Collinium ipſum magni facio; quoniam omnes puræ matheſeos

‡ N.B. Hoc nunquam fecit D. Leibnitius; ſed ubi ſeries duas primas per Mohrum quendam demùm accepiſſet, poſtulavit methodum D. Newtoni, perveniendi ad illas duas ſeries, ad ſe mitti; quâ nullas priùs ab Oldenburgo accepiſſet. Et hoc pacto, epiſtolam Oldenburgi oblivioni tradendo, licentiam obtinuit ſerierum ab eo acceptarum ultimam ubi vindicandi.

partes ab ipso egregiè cultas video. Multa habeo destinata, à quibus me deterrent calculi tantùm; qui nec susci pi facilè ab homine occupato, nec alteri, nisi doctissimo ac sinceriss imo, tutò credi possunt.

N° XXXVIII. *Ex Actis Eruditorum anno* 1691 *mense* Aprili, *pag.* 178, *habentur hæc* D. Leibnitii *verba.*

Jam anno 1675 *compositum habebam* * *opusculum Quadraturæ Arithmeticæ, ab amicis ab illo tempore lectum; sed quod, materiâ sub manibus crescente, limare ad editionem non vacavit, postquam aliæ occupationes supervenere; præsertim cùm nunc prolixius exponere vulgari more, quæ Analysis nostra nova paucis exhibet, non satis operæ pretium videatur. Interim insignes quidam Mathematici, quibus veritas primariæ nostræ propositionis dudum in actis publicatæ innotuit, pro humanitate suâ, nostri qualiscunque inventi candidè meminere.*

N° XXXIX. *Excerpta ex schediasmatis manu* D. Collins *exaratis, & in scriniis ejus repertis, & nonnullis in locis* Oldenburgi *calamo castigatis; quæ quidem* D. Oldenburg *D.* Tschurnhausio *transmittenda acceperat, & Latinè verterat. Extant autem tum autographa* D. Collins, *tum responsum ad eadem* D. Oldenburgo *redditum, cum titulo manu ejus inscripto,* " Responsum ad Scriptum D. *Collinii* de *Cartesii* Inventis, Accep. d. 8 *Junii* 1675."

Nonnulli Cartesium arrogantiæ insimulârunt, afferentem se ex omnibus modis methodisve possibilibus, in optimam simplicissimamque incidisse. An ullibi hoc affirmaverit Cartesius plane nescio: certum tamen, est methodum ducendi tangentes multum promotam fuisse à Newtono & Gregorio. Ita liquet ex Newtoni epistolâ anno 1672, 10 *Decemb.* datâ. Vide N° XXVI.

N. B. In hoc schediasmate habetur apographum epistolæ hujus, ut & apographum epistolæ Gregorii *ad* Collins 5 Sept. 1670, *suprà impressæ.*

N° XL. *Ex epistolâ D.* Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1675, 24 Junii *datâ, & in libro epistolarum Regiæ Societatis, N° VII. pag.* 243 *descriptâ. Responsum autem est ad præcedentes D.* Leibnitii *literas,* 20 Maii *datas.*

Dominus Newtonus, beneficio logarithmorum graduatorum in scalis, παραλλήλως locandis ad distantias æquales, vel circulorum concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit radices æquationum. Tres regulæ rem conficiunt pro cubicis, quatuor pro biquadraticis. In harum dispositione respectivæ coefficientes omnes jacent in eâdem lineâ rectâ; à cujus puncto, tam remoto à primâ regulâ ac scalæ graduatæ sunt ab invicem, linea recta iis superextenditur, unà cum præscriptis conformibus genio æquationis; quâ in regularum unâ datur potestas pura radicis quæsitæ.

Ex

* Quadratura Arithmetica, de quâ hîc agitur, ea est, quam Gregorius cum D. Collinio, initio anni 1671, Oldenburgus cum D. Leibnitio, hoc anno, communicavit. De hâc quadraturâ D. Leibnitius opusculum vulgari more composuit, & cum amicis hoc anno communicare cœpit: anno proximo scriptum polivit, ut cum Oldenburgo communicaretur: anno tertio in patriam redux negotiis

Ex epistolâ D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis *anno* 1675, 12 Julii *datâ.* N° XLI. *Hujus extat autographum; habeturque exemplar ejus in libro epistolarum Regiæ Societatis, N° VII. pag.* 149. *Responsum autem est ad literas præcedentes D.* Oldenburgi, *& impressa legitur inter Opera D.* Wallisii. *In hâc perperam scribitur* Parius *pro* Darius.

Methodum celeberrimi Newtoni, radices æquationum inveniendi per instrumentum, credo differre à meâ. Neque enim video in meâ, quid aut logarithmi aut circuli concentrici conferant. Quoniam tamen rem vobis non ingratam video, conabor absolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii sat erit.

Scripsisti aliquoties, vestrates omnium Curvarum dimensiones per appropinquationem dare. Velim nosse, an possint dare geometricè dimensionem Curvæ ellipseos vel hyperbolæ, ex datâ circuli, aut hyperbolæ, quadraturâ.

Ex epistolâ D. Oldenburgi *ad D.* Leibnitium, *anno* 1675, 30 Septemb. N° XLII. *datâ. Cujus extat exemplar manu D.* Oldenburg *descriptum. Legitur etiam in libro Regiæ Societatis N° VII. pag.* 159, *& responsum est ad præcedentem.*

Scriptum quoddam Belgicum Belga quidam, Georgius Mohr vocatus, Algebræ & Mechanicæ probè peritus, apud Collinium nostrum reliquit; qui apographum ejus, quale hîc insertum vides, impertire tibi voluit.—— Tschurnhausius nuper Parisios hinc profectus est; & te sine dubio jam salutavit. Scire cupis, an dare nostrates geometricè possint dimensionem Curvæ ellipseos aut hyperbolæ, ex datâ circuli, aut hyperbolæ, quadraturâ. Ait Collinius, illos id præstare non posse geometricâ præcisione; sed dare eos posse ejusmodi approximationes, quæ quâcunque quantitate datâ minùs à scopo aberrabunt. Et speciatim, quod attinet alicujus arcûs circuli rectificationem, impertire tibi poterit laudatus Tschurnhausius methodum, à Gregorio nostro inventam, quam, cùm apud nos esset, Collinius ipsi communicavit.

Ex epistolâ D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis 28 Decembris *anno* 1675 N° XLIII. *datâ. Extat autographum ejus, describiturque in libro Regiæ Societatis, N° VII. pag.* 189, *& à D.* Wallisio *impressa est.*

Duarum tibi literarum debitor, rogo ne sequius interpreteris silentium meum; soleo enim interrumpi nonnunquam, & hæc studia per intervalla tractare. Quòd Tschurnhausium ad nos misisti, fecisti pro amico: multum enim ejus consuetudine delector; & ingenium agnosco in juvene præclarum & magna promittens. Inventa mihi ostendit non pauca, Analytica & Geometrica, sane perelegantia. Unde facilè judico, quid ab eo expectari possit.

gotiis publicis interesse cœpit; &, materiâ sub manibus crescente, opus ad editionem limare non ampliùs vacavit. Sed neque operæ pretium duxit, subindè prolixius exponere, vulgari more, quæ analysis sua nova paucis exhibet. Inventa est igitur hæc analysis, postquam D. Leibnitius opusculum, vulgari more compositum, polire & limare desiit, & negotiis publicis interesse cœpit.

Habebis & à me inſtrumentum æquationes omnes geometricas conſtruendi unicum : et meam quadraturam circuli, ejuſque partium, per ſeriem numerorum rationalium infinitam ; de quâ aliquoties ſcripſi, & quam jam pluſquam biennio abhinc geometris hîc communicavi.

N° XLIV. *Ex epiſtolâ D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Pariſiis, 12 Maii, *anno* 1676 *datâ ; cujus autographum in ſcriniis Regiæ Societatis aſſervatur, cum notis manu* Oldenburgi *in tergo ſcriptis.*

Cùm Gregorius Mohr Danus [*ſuperiùs Belga*], in Geometrâ & Analyſi verſatiſſimus, nobis attulerit communicatam ſibi à doctiſſimo Collinio veſtro expreſſionem relationis inter arcum & ſinum, per infinitas ſeries ſequentes : poſito ſinu x, arcu z, radio 1.

$$z = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 \text{ &c.}$$

$$x = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 - \tfrac{1}{5040}z^7 + \tfrac{1}{362880}z^9 \text{ &c.}$$

Hæc * INQUAM, cum nobis attulerit ille, quæ mihi valdè ingenioſa videntur ; & poſterior imprimis ſeries elegantiam quandam ſingularem habeat ; ideo rem gratam mihi feceris, vir clariſſime, ſi demonſtrationem tranſmiſeris. Habebis viciſſim mea ab his longè diverſa, circa hanc rem meditata ; de quibus jam aliquotab hinc annis ad te perſcripſiſſe credo ; demonſtratione tamen non additâ, quam † nunc polio. Oro ut Cl. Collinio multam à me ſalutem dicas : is facilè tibi materiam ſuppeditabit ſatisfaciendi deſiderio meo.

N° XLV. *Ex epiſtolâ D.* Collins *ad D.* Oldenburgum, *D.* Leibnitio *tum* Pariſiis *agenti tranſmittendâ. Hujus exemplar, anno* 1676, 14 Junii, *manu ipſius D.* Collins *deſcriptum, ac in ſcriniis ejus repertum, etiamnum conſervatum eſt.*

Reſpondeas, ſi placet, ad ea quæ quærit D. Leibnitius, in literis ejus 12 *Maii* datis, ſeriei primæ numeros coefficientes, $\frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}, \frac{35}{1152}$, hoc modo compoſitos eſſe, $\frac{1\times1}{2\times3} = \frac{1}{6}$; & $\frac{1}{6}\times\frac{3\times3}{4\times5} = \frac{3}{40}$; & $\frac{3}{40}\times\frac{5\times5}{6\times7} = \frac{5}{112}$; & $\frac{5}{112}\times\frac{7\times7}{8\times9} = \frac{35}{1152}$; & $\frac{35}{1152}\times\frac{9\times9}{10\times11} = \frac{63}{2816}$; atque ita deinceps in infinitum. Unde intelligi poſſit, hanc ſeriem elegantiâ minimè cedere converſæ ejuſdem ; quæ tamen illi magis arridet. Meditata ejus de eodem argumento, cùm fundamentis planè diverſis innitantur, non poſſunt nobis non eſſe acceptiſſima ; atque exoptamus ea fidem noſtram exuperare poſſe. Hujus autem methodi ea eſt præſtantia, ut cùm tam latè pateat, ad nullam hæreat difficultatem. Gregorium autem alioſque in eâ fuiſſe opinione arbitror, ut quicquid uſpiam antea de hâc re innotuit, quaſi dubia diluculi lux fuit, ſi cum meridianâ claritate conferatur.

* Quaſi ante annum eaſdem non accepiſſet ab Oldenburgio.

Hoc

Hoc anno, cùm D. Gregorius, *anno ſuperiore ad finem vergente, emortuus* N° XLVI. *eſſet, quæ cum amicis communicaverat in unum corpus, ſolicitante D.* Leibnitio, *collecta ſunt. Et extat collectio, manu D.* J. Collins *exarata, cum hoc titulo ;*

Excerpta ex D. Gregorii *epiſtolis cum D.* Leibnitio *communicanda ; tibique poſtquam perlegerit ille, reddenda. Et ſic orditur.*

D. H. Oldenburg *Armigero.*

Quandoquidem impenſè rogâſti me, permotus ſolicitationibus D. Leibnitii & aliorum ex Academiâ Regiâ Pariſinâ, ut hiſtoriolam aliquam concinnarem, ſtudia & inventa doctiſſimi D. Jacobi Gregorii, nuper defuncti, exhibentem ; quoniamque arcta inter nos amicitia, crebraque dum viveret literarum reciprocatio fuit ; in honorem nominis ejus, quæcunque majoris momenti in literis ejus occurrunt, ſummâ fide in unum colligere ſtatuo, &c.

In hâc collectione habetur epiſtola ſuperiùs impreſſa Gregorii *ad* Collins 5 Sept. 1670. *Habetur & epiſtola ſuperiùs impreſſa, quâ* Gregorius *quadraturam prædictam arithmeticam, initio anni* 1671, *cum D.* Collins *communicavit. Habetur & epiſtola D.* Newtoni *ad D.* Collins, 10 Decemb. 1672 *data, & ſuperiùs impreſſa ; in quâ* Newtonus *ſe methodum generalem habere dicit ducendi tangentes, quadrandi curvilineas, & ſimilia peragendi ; & methodum exemplo ducendi tangentes exponit : quam methodum D.* Leibnitius *differentialem poſtea vocavit. Hæc collectio ad D.* Leibnitium *miſſa fuit* 26 Junii 1676.

Ex epiſtolâ D. Collins *ad D.* Davidem Gregorium, *prædicti* Jacobi Gregorii N° XLVII. *nuper defuncti fratrem. Data autem eſt anno* 1676, 11 Auguſti, *ejuſque habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

Hiſtoriolam compoſui, quâ in unum congeſſi, quæcunque unquam à fratre tuo, de rebus mathematicis, vel literis, aliaſve ſcripto vel colloquio, acceperim : eo fine, ut eandem ſcriniis Regiæ Societatis (cujus erat ſodalis) commiſſam & aſſervatam, amici ejus inſpicere poſſint ; vel ſi libuerit, ſoluto pretio, tranſcriptam habere. Conſtat autem duodecim circiter ſchedis. Me verò nihil omiſiſſe, quod alicujus momenti eſſe poterit, ſi nonnulla cum Hugenio aliiſve controverſa excipias, aras ſacras juraturus contingere auſim. Mathematicis Gallis quouſque profecerat, quæque reliquerat frater tuus, ſcire aventibus, me operam dediſſe ut iis ſatisfacerem, ex ſequentibus comperies. *Sub finem autem exemplaris hujus epiſtolæ hæc ſubjunxerat D.* Collins.

Eruditi ex Academiâ Regiâ Pariſienſi, auditâ D. Gregorii morte, cupidè ſciſcitabantur ea, quæ moriens reliquerat ; ſimulque narrationem eorum, quæ attinent doctrinam ſerierum infinitarum, apud nos repertam petebant : ſequentem ideo ad eos tranſmittendam curavi, ac deinde ad Davidem Gregorium, fratrem Jacobi ſuperſtitem.

† Opuſculum prædictum de Quadratura Arithmetica D. Leibnitius polire perrexit.

Quod attinet doctrinam ſerierum infinitarum, Mercator, in Logarithmotechniâ ſuâ, primum ſpecimen ejus orbi exhibuit; applicando eam ad hyperbolæ quadraturam tantùm, & ad logarithmorum conſtructionem, abſque radicum extractione. Hanc ipſam ejus doctrinam à D. Wallisio, in Tranſ. Philoſoph. illuſtratam habemus; eamque poſtea adauxit & promovit D. Gregorius in Exercitationibus ejus Geometricis, eodem anno editis.

Paucos poſt menſes quàm editi ſunt hi libri, miſſi ſunt ad D. Barrovium Cantabrigiæ. Ille autem reſponſum dedit, hanc infinitarum ſerierum doctrinam jam ante biennium à D. Iſaaco Newtono inventam fuiſſe; & quibuſvis figuris generaliter applicatam: ſimulque tranſmiſit D. Newtoni opus manuſcriptum, à D. Collins deinde cum D. Vicecomite Brounker, Regiæ Societatis tum Præſide, communicatum. Barrovio autem cathedram mathematicam abdicante, Newtonus, ab eodem commendatus, in ſucceſſorem ejus electus eſt; & de hâc doctrinâ publicè prælegit: lectioneſque ejus in bibliothecâ publicâ Cantabrigienſi aſſervantur.

Collins deinde, mediante D. Barrovio D. Newtono familiaris factus, literarum commercium cum eo habuit; & ab eo epiſtolam obtinuit 10 *Decembris*, anno 1672 datam, quâ docet modum ducendi tangentes ad Curvas geometricas, ope æquationis, quâ relatio inter ordinatim applicatas & abſciſſas exprimitur. Vide epiſtolam hanc, N° XXVI.

Collins etiam in diverſis literis, anno 1669 ad D. Gregorium datis, eidem ſignificavit Newtoni in hâc materiâ ſucceſſus. Gregorius autem contrà, ſe quoque plures habere pro circulo ſeries; ſimulque petiit nonnullas è Newtonianis, quas cum propriis conferre voluit, ad ſe mitti. Miſit igitur aliquas D. Collins; quas Gregorius à ſuis prorſus diverſas, & faciliores calculoque aptiores inveniens, haud levi ſtudio in eandem ipſam Newtoni methodum incidit, circa annum exeuntem 1670: ſicut ipſe apertè in epiſtolâ 19 *Decemb.* teſtatur. N° XVIII.

Cùm D. Leibnitius *methodum perveniendi ad ſeries, anno ſuperiori ſibi miſſas deſideraret, & ut* Gregoriana *omnia* Lutetiam Pariſiorum *mitterentur:* Oldenburgus & Collins, Newtonum *enixè rogârunt, ut ipſe methodum ſuam deſcriberet cum D.* Leibnitio *communicandam.*

N° XLVIII. *Epiſtola prior D.* Iſaaci Newtoni, *Matheſeos Profeſſoris in celeberrimâ Academiâ* Cantabrigienſi, *ad D.* Henricum Oldenburg, *Regalis Societatis* Londini *Secretarium*, 13 Junii 1676; *cum illuſtriſſimo viro D.* Godfredo Gulielmo Leibnitio *(eo mediante) communicanda. Literis* Oldenburgi (26 Junii) *ad* Leibnitium *miſſa.*

NEWTONI AD OLDEN- QUAMQUAM D. Leibnitii modeſtia, in excerptis quæ ex epiſtolâ ejus ad me nuper miſiſti, noſtratibus multum tribuat circa ſpeculationem quandam Infinitarum Serierum, de quâ jam cœpit eſſe rumor: nullus dubito tamen quin ille, non tantùm, quod aſſerit, methodum reducendi quantitates quaſcunque

cunque in ejuſmodi ſeries, ſed & varia compendia, fortè noſtris ſimilia, ſi non & meliora, adinvenerit. BURGUM PRIOR.

Quoniam tamen ea ſcire pervelit, quæ ab Anglis hâc in re inventa ſunt; & ipſe ante annos aliquot in hanc ſpeculationem inciderim: ut votis ejus aliquâ ſaltem ex parte ſatisfacerem, nonnulla eorum, quæ mihi occurrerunt, ad te tranſmiſi.

Fractiones in infinitas ſeries reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales, per extractionem radicum; perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus, ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum.

Sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc * Theorema.

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \tfrac{m}{n}AQ + \tfrac{m-n}{2n}BQ + \tfrac{m-2n}{3n}CQ + \tfrac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ ſignificat quantitatem, cujus radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt; P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: ſive dimenſio illa integra ſit; ſive, ut ita loquar, fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut analyſtæ, pro *aa*, *aaa*, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^3}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{c.a^3+bbx}}$, ſcribo $aa\times\overline{a^3+bbx}\Big|^{-\frac{1}{2}}$; & pro $\frac{aab}{\sqrt{c:a^3+bbx\times a^3+bbx}}$: ſcribo $aab\times\overline{a^3+bbx}\Big|^{-\frac{3}{2}}$. In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+bbx}\Big|^{-\frac{3}{2}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}}$ in regulâ: erit $P=a^3$; $Q=\frac{bbx}{a^3}$; $m=-2$; $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, uſurpo A, B, C, D, &c. Nempe A, pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$; B, pro ſecundo $\frac{m}{n}AQ$; & ſic deinceps. Cæterùm uſus regulæ patebit exemplis.

Exemplum 1. Eſt $\sqrt{cc+xx}$ (ſeu $\overline{cc+xx}\Big|^{\frac{1}{2}}$) $= c+\frac{xx}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}$ — &c. Nam, in hoc caſu, eſt $P=cc$; $Q=\frac{xx}{cc}$; $m=1$; $n=2$; A $(=P^{\frac{m}{n}}=cc^{\frac{1}{2}})=c$. B $(=\frac{m}{n}AQ)=\frac{xx}{2c}$. C $(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{x^4}{8c^3}$. Et ſic deinceps.

Exemplum 2. Eſt $\sqrt{5}:c^5+c^4x-x$: (id eſt, $\overline{c^5+c^4x-x^5}\Big|^{\frac{1}{5}}$) $= c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}-\frac{2c^8xx+4c^4x^5-2x^{10}}{25c^9}+$ &c. Ut patebit ſubſtituendo in allatam regulam, 1 pro *m*, 5 pro *n*, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Poteſt etiam $-x^5$ ſubſtitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q. Et tunc evadet $\sqrt{5}:c+c^4x-x^5:=-x+$

* Reſolutionem binomii in hujuſmodi ſeriem anno 1669 Newtono innotuiſſe patet, ex analyſi ſuprà impreſſâ. Vid. ſuprà, N° XII.

NEWTONI AD OLDEN.

$\frac{c^4x+c^5}{5x^4}+\frac{2c^8xx+4c^9x+2c^{10}}{25x^9}$ + &c. Prior modus eligendus est, si x valdè parvum sit; posterior, si valdè magnum.

Exem. 3. Est $\frac{N}{\sqrt{c:y^3-a^2y}}$ (hoc est, $N\times\overline{y^3-a^2y}\vert^{-\frac{1}{2}}$) æqualis $N\times\frac{1}{y}+\frac{aa}{3y^3}+\frac{2a^4}{9y^5}+\frac{14a^6}{81y^7}$ &c. Nam $P=y^3$. $Q=-\frac{aa}{yy}$. $m=-1$, $n=3$. A $(P^{\frac{m}{n}}=y^{3\times-\frac{1}{3}})=y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$. B $(=\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{y}\times-\frac{aa}{yy})=\frac{aa}{3y^3}$ &c.

Exem. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d+e$, hoc est $\overline{d+e}\vert^{\frac{4}{3}}$, est $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{3}{3}}}+$ &c. Nam $P=d$. $Q=\frac{e}{d}$. $m=4$. $n=3$. A $(=P^{\frac{m}{n}})=d^{\frac{4}{3}}$, &c.

Exem. 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut, si quadrato-cubus ipsius $d+e$, (hoc est, $\overline{d+e}^6$, seu $\overline{d+e}\vert^3$) desideretur. Erit juxta regulam, $P=d$. $Q=\frac{e}{d}$. $m=5$. & $n=1$. Adeoque A $(=P^{\frac{m}{n}})=d^5$. B $(=\frac{m}{n}AQ)=5d^4e$. & sic $C=10d^3ee$. D $=10dde^3$. E $=5de^4$. F $=e^5$. & G $(=\frac{m-5n}{6n}FQ)=0$. Hoc est, $\overline{d+e}\vert^5=d^5+5d^4e+10d^3ee+10dde^3+5de^4+e^5$.

Exem. 6. Quinetiam divisio, sive simplex sit, sive repetita, per eandem regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{d+e}$, hoc est, $\overline{d+e}\vert^{-1}$, sive $\overline{d+e}\vert^{-\frac{1}{2}}$, in seriem simplicium terminorum resolvendum sit: erit, juxta regulam, $P=d$. $Q=\frac{e}{d}$. $m=-1$. $n=1$. & A $(=P^{\frac{m}{n}}=d^{-1})=d^{-1}$, seu $\frac{1}{d}$. B $(=\frac{m}{n}AQ=-1\times\frac{1}{d}\times\frac{e}{d})=-\frac{e}{dd}$. Et sic $C=\frac{ee}{d^3}$. $D=-\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc est, $\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{dd}+\frac{ee}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}$, &c.

Exem. 7. Sic & $\overline{d+e}\vert^{-3}$, hoc est unitas ter divisa per $d+e$, vel semel per cubum ejus, evadit $\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6ee}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+$ &c.

Exem. 8. Et $N\times\overline{d+e}\vert^{-\frac{1}{3}}$, hoc est N divisum per radicem cubicam ipsius $d+e$, evadit $N\times\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}}-\frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}}+\frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}}-\frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}}+$ &c.

Exem. 9. Et $N\times\overline{d+e}\vert^{-\frac{4}{3}}$, hoc est N divisum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipsius $d+e$, sive $\frac{N}{\sqrt{5:d^3+3dde+3dee+e^3}}$, evadit $N\times\frac{1}{d^{\frac{4}{3}}}-\frac{\frac{4}{3}e}{5d^{\frac{7}{3}}}+\frac{12ee}{25d^{\frac{10}{3}}}-\frac{52e^3}{125d^{\frac{13}{3}}}+$ &c.

Per eandem regulam, geneses potestatum, divisiones per potestates aut per quantitates radicales, & extractiones radicum altiorum in numeris, etiam commodè instituuntur.

Extractiones

Extractiones radicum æquationum affectarum in speciebus imitantur earum extractionem in numeris. Sed methodus Vietæ & Oughtredi nostri huic negotio minùs idonea est. Quapropter aliam excogitare adactus sum, *cujus specimina, ne repetantur, vide in Tractatu de Analysi*, pag. &c. &c. SUPERIOR.

Dicam tantùm in genere, quòd radix cujusvis æquationis semel extracta, pro regulâ resolvendi consimiles æquationes asservari possit; quódque ex pluribus ejusmodi regulis, regulam generaliorem plerumque efformare liceat; & quòd radices omnes, sive simplices sint, sive affectæ, modis infinitis extrahi possint; de quorum simplicioribus itaque semper consulendum est.

Quomodo ex æquationibus, sic ad infinitas series reductis, areæ & longitudines Curvarum, contenta & Superficies solidorum, vel quorumque segmentorum figurarum quarumvis, eorumlibet centra gravitatis determinentur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejusmodi æquationes infinitarum serierum reduci possint; indeque problemata circa illas resolvi, perinde ac si Geometricæ essent; nimis longum foret describere. Sufficiat specimina quædam talium problematum recensuisse: inque iis, brevitatis gratiâ, literas A, B, C, D, &c. pro terminis seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo. N° XLIX.

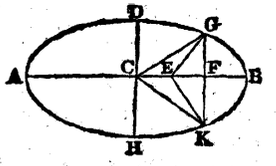
1. Si ex dato sinu recto, vel sinu verso, arcus desideretur: sit radius r, & sinus rectus x. Eritque arcus $=x+\frac{x^3}{6rr}+\frac{3x^5}{40r^4}+\frac{5x^7}{112r^6}+$ &c. Hoc est, $=x+\frac{1\times1\times xx}{2\times3\times rr}A+\frac{3\times3xx}{4\times5rr}B+\frac{5\times5xx}{6\times7rr}C+\frac{7\times7xx}{8\times9rr}D+$ &c. Vel sit d diameter, ac x sinus versus; & erit arcus $=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}+\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ &c. Hoc est, $=\sqrt{dx}$ in $1+\frac{x}{6d}+\frac{3xx}{40dd}+\frac{5x^3}{112d^3}+$ &c.

2. Si viciſſim ex dato arcu desideretur sinus: sit radius r, & arcus z. Eritque sinus rectus $=z-\frac{z^3}{6rr}+\frac{z^5}{120r^4}-\frac{z^7}{5040r^6}+\frac{z^9}{362880r^8}-$ &c. Hoc est, $=z-\frac{zz}{2\times3rr}A-\frac{zz}{4\times5rr}B-\frac{zz}{6\times7rr}C-$ &c. Et sinus versus $=\frac{zz}{2r}-\frac{z^4}{24r^3}+\frac{z^6}{720r^5}-\frac{z^8}{40320r^7}+$ &c. Hoc est, $\frac{zz}{1\times2r}-\frac{zz}{3\times4rr}A-\frac{zz}{5\times6rr}B-\frac{zz}{7\times8rr}C-$ &c.

3. Si arcus capiendus sit in ratione datâ ad alium arcum: esto diameter $=d$; chorda arcûs dati $=x$; & arcus quæsitus ad arcum illum datum ut n ad 1. Eritque arcûs quæsiti chorda $=nx+\frac{1-nn}{2\times3dd}xxA+\frac{9-nn}{4\times5dd}xxB+\frac{25-nn}{6\times7dd}xxC+\frac{49-nn}{8\times9dd}xxD+\frac{81-nn}{10\times11dd}xxE+$ &c.

Ubi nota, quòd cùm n est numerus impar, series desinet esse infinita; & evadet eadem, quæ prodit per vulgarem Algebram, ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n.

NEWTONI AD OLDEN-



4. Si in axe alterutro, AB, ellipſeos AED, cujus centrum C, & axis alter DH, detur punctum aliquod, E; circà quod recta, EG, occurrens ellipſi in G, motu angulari feratur; & ex datâ areâ ſectoris elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ à puncto G ad axem normaliter demittitur: eſto $BC = q$; $DC = r$; $EB = t$; ac duplum areæ $BEG = z$.

Et erit $GF = \frac{z}{t} - \frac{q}{6rrt^4}z^3 + \frac{10qq-9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3+504qq-225qtt}{5040r^6t^{10}}z^7 + \&c.$ Sic itaque aſtronomicum illud Kepleri problema reſolvi poteſt.

5. In eâdem ellipſi, ſi ſtatuatur $CD = r$, $\frac{CB^2}{DC} = c$, & $CF = x$: erit [arcus] ellipticus $DG = x + \frac{1}{6cc}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14rrc^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11} + \&c.$

$$- \frac{1}{40c^4} - \frac{1}{28rc^5} - \frac{1}{24rrc^6} - \frac{1}{22r^3c^7}$$
$$+ \frac{1}{112c^6} + \frac{3}{48rc^7} + \frac{3}{88rrc^8}$$
$$- \frac{5}{1152c^8} - \frac{5}{352rc^9}$$
$$+ \frac{7}{2816c^{10}}$$

Hîc numerales coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in muſicâ progreſſione: et numerales coefficientes omnium inferiorum, in unâquâque columnâ, prodeunt multiplicando continuò numeralem coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis, $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}n-3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}n-5}{6}$, $\frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$, $\frac{\frac{1}{2}n-9}{10}$, &c. Ubi n ſignificat numerum dimenſionum ipſius c, in denominatore iſtius ſupremi termini. *E. g.* Ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ numerales coefficientes inveniantur; pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{2+2}$, numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$, in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc eſt in 1; & prodit $\frac{1}{2+2}$, numeralis coefficiens termini proximè inferioris. Dein duco hunc $\frac{1}{2+2}$ in $\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$, ſive in $\frac{n-3}{4}$, hoc eſt, in $\frac{1}{4}$: & prodit $\frac{3}{8+8}$, numeralis coefficiens tertii termini in iſtâ columnâ. Atque iſta $\frac{3}{8+8} \times \frac{\frac{1}{2}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{3+3+2}$, numeralem coefficientem quarti termini. Et $\frac{5}{3+3+2} \times \frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{3+3+2+2}$, numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis, ad infinitum uſque, columnis præſtari poteſt: adeoque valor ipſius DG, per hanc regulam, pro lubitu produci.

Adhæc, ſi BF dicatur x, ſitque r latus rectum ellipſeos, & $e = \frac{r}{AB}$; erit arcus ellipticus $BG =$

$\sqrt{rx}$ in $\overline{1+2}\{x - 2 + 4 - 10\}$
$-\frac{3}{2}e + 3e - 9e + 30e$
$3r - \frac{5}{8}ee + \frac{23}{4}e^2 - \frac{115}{4}e^3$
$5rr - \frac{7}{16}e^3 + \frac{91}{8}e^3$
$7r^3 - \frac{455}{128}e^4$
$9r^4$ $+ \&c.$

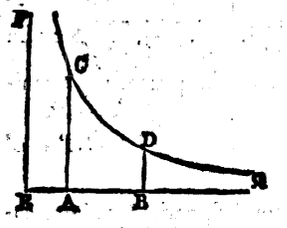
QUARUM PRIOR.

Quare, ſi ambitus totius ellipſeos deſideretur: biſeca CB in F, & quæro arcum DG per prius theorema; & arcum BG, per poſterius.

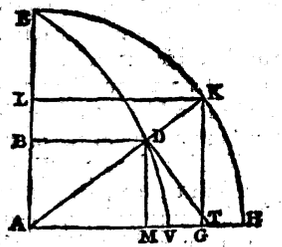
6. Si vice verſâ, ex dato arcu elliptico, DG, quæratur ſinus ejus CF; tum dicto $CD = r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & arcu illo $DG = z$; erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14rrc^4}z^7 - \&c.$$
$$+ \frac{13}{120c^5} + \frac{71}{420rc^6}$$
$$- \frac{493}{5040c^7}$$

Quæ autem de ellipſi dicta ſunt, omnia facilè accommodantur ad hyperbolam; mutatis tantùm ſignis ipſorum c & e, ubi ſunt imparium dimenſionum.



7. Præterea, ſi ſit CD hyperbola, cujus aſymptoti, EB, EF, rectum angulum, BEF, conſtituant; & ad EB erigantur utcunque perpendicula, AC, BD, occurrentia hyperbolæ in C & D: & EA dicatur a; AC, b; & area CADB, z; erit $AB = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \&c.$ Ubi efficientium denominatores prodeunt, multiplicando terminos hujus arithmeticæ progreſſionis 1, 2, 3, 4, 5, &c. in ſe continuò. Et hinc ex logarithmo dato poteſt numerus ei competens inveniri.



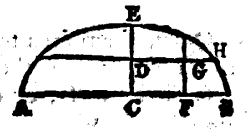
8. Eſto VDE quadratrix, cujus vertex eſt V; exiſtente A centro, & AE ſemidiametro circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: demiſſoque ad AE perpendiculo quovis, DB, & actâ quadratricis tangente, DT, occurrente axi ejus, AV, in T: dic $AV = a$, & $AB = x$; eritque $DB = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \&c.$ Et $VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \&c.$ Et area $AVDB = ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} - \&c.$ Et arcus $VD = x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} + \&c.$ Unde viciſſim, ex dato BD, vel VT, aut areâ AVDB, arcuve VD, per reſolutionem affectarum æquationum, erui poteſt x, ſeu AB.

9. Eſto denique AEB ſphæroides, revolutione ellipſeos, AEB, circa axem AB genita, & ſecta planis quatuor; AB, per axem tranſeunte; DG, parallelo AB;

NEWTONI AD OLDEN.

CDE, perpendiculariter biſecante axem; & FG, parallelo CE: ſitque recta CB = a, CE = c, CF = x, & FG = y: et ſphæroideos ſegmentum CDGF, dictis quatuor planis comprehenſum, erit

$$+2cxy-\frac{x}{3c}y^3-\frac{x}{20c^3}y^5-\frac{x}{56c^5}y^7-\frac{5x}{576c^7}y^9-\&c.$$
$$-\frac{cx^3}{3aa}-\frac{x^3}{18caa}-\frac{x^3}{40c^3aa}-\frac{5x^3}{336c^5aa}-\&c.$$
$$+\frac{cx^5}{20a^4}-\frac{x^5}{40ca^4}-\frac{3x^5}{160c^3a^4}-\&c.$$
$$-\frac{cx^7}{56a^6}-\frac{5x^7}{336ca^6}-\&c.$$
$$-\frac{5cx^9}{576a^8}-\&c.$$
$$-\&c.$$



Ubi numerales coefficientes ſupremorum terminorum $(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur, multiplicando primum coefficientem, 2, continuò per terminos hujus progreſſionis; $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum, in unâquâque columnâ deſcendentium in infinitum, producuntur multiplicando continuò coefficientem ſupremi termini, in primâ columnâ, per eandem progreſſionem; in ſecundâ autem, per terminos hujus, $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times5}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c.; in tertiâ, per terminos hujus, $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$, &c.; in quartâ, per terminos hujus, $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{9\times5}{6\times7}$, &c.; in quintâ, per terminos hujus, $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{6\times7}$, &c. Et ſic in infinitum.

Et eodem modo ſegmenta aliorum Solidorum deſignari, & valores eorum aliquando commodè, per ſeries quaſdam numerales, in infinitum produci poſſunt.

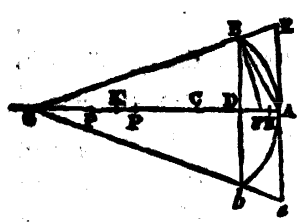
Ex his videre eſt, quantum fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes ampliantur: quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pene dixerim problemata, ſi numeralia Diophanti & ſimilia excipias, ſeſe extendit.

Non tamen omnino univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam methodos eliciendi ſeries infinitas. Sunt enim quædam problemata, in quibus non liceat ad ſeries infinitas per diviſionem vel extractionem radicum, ſimplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa reductionem infinitarum ſerierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parciùs ſcribo, quòd hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cœperunt; adeo ut ab iiſdem jam per quinque fere annos abſtinuerim.

Unum tamen addam: quòd poſtquam problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, poſſint inde variæ approximationes, in uſum Mechanicæ, nullo ferè negotio formari; quæ, per alias methodos quæſitæ, multo labore temporiſque diſpendio conſtare ſolent.

Cujus rei exemplo eſſe poſſunt tractatus Hugenii aliorumque de quadraturâ

turâ circuli. Nam, ut ex datâ arcûs chordâ, A, & dimidii arcûs chordâ, B, arcum illum proximè aſſequaris: finge arcum illum eſſe z, & circuli radium r; juxtaque ſuperiora erit A (nempe duplum ſinûs dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4\times6rr}+\frac{z^5}{4\times4\times120r^4}-\&c.$ Et $B=\frac{1}{2}z-\frac{z^3}{2\times16\times6rr}+\frac{z^5}{2\times16\times16\times120r^4}-\&c.$ Duc jam B in numerum fictitium n, & à producto auſer A, & reſidui ſecundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2\times16\times6r}+\frac{z^3}{4\times6rr}$), eo ut evaneſcat, pone $=0$; indeque emerget $n=8$: & erit $8B-A=3z\bullet-\frac{3z^5}{64\times120r^4}+\&c.$ hoc eſt, $\frac{8B-A}{3}=z$; errore tantùm exiſtente $\frac{z^5}{7680r^4}-\&c.$ in exceſſu (*). Quod eſt theorema Hugenianum.



Inſuper, ſi in arcûs, Bb, ſagittâ AD, indefinitè productâ, quæratur punctum G, à quo actæ rectæ, GB, Gb, abſcindant tangentem, Ee, quàm proximè æqualem arcui iſti: eſto circuli centrum C, diameter AK = d, & ſagitta AD = x. Et erit DB $(=\sqrt{dx-xx})=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}}-\&c.$ Et $AE=AB=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}+\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}+\&c.$ Et AE − DB : AD : : AE : AG. Quare $AG=\frac{1}{4}d-\frac{1}{4}x-\frac{12xx}{175d}-$ vel $+\&c.$ Finge ergo $AG=\frac{1}{4}d-\frac{1}{5}x$: & viciſſim erit DG $(\frac{1}{4}d-\frac{4}{5}x)$ AG : DB : : DA : AE − DB. Quare $AE-DB=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}+\frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}+\&c.$ Adde DB; & prodit $AE=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}-\frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}+\&c.$ Hoc auſer de valore ipſius AE ſuprà habito, & reſtabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}+$ vel $-\&c.$ Quare in AG cape AH quintam partem DA, & KG = HC, & actæ GBE, Gbe abſcindent tangentem, Ee, quàm proximè æqualem arcui BAb; errore tantùm exiſtente $\frac{2\times16x^3}{525d^2}\sqrt{dx}+$ vel $-\&c.$ multo minore ſcilicet quàm in theoremate Hugenii. Quòd ſi fiat 7AK : 3AK : : DH : n; & capiatur KG = CH − n, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, ſi circuli ſegmentum aliquod, BAb, per Mechanicam deſignandum eſſet: primò reducerem aream iſtam in infinitam ſeriem; puta hanc; $BbA=\frac{4}{7}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}-\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{11}{2}}}{14d^{\frac{5}{2}}}-\frac{x^9}{36d^{\frac{7}{2}}}-\&c.$ Dein quærerem conſtructiones mechanicas, quibus hanc ſeriem proximè aſſequerer; cujuſmodi ſunt hæ: age rectam AB, & erit ſegmentum $BbA=\frac{4}{7}AB+BD\times\frac{4}{5}AD$ proximè: exiſtente ſcilicet errore tantùm $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx}+\&c.$ in defectu (*): vel proximiùs, erit ſegmentum illud (biſecto AD in F, & actâ rectâ BF) $=\frac{4BF+AB}{15}\times4AD$; ex-

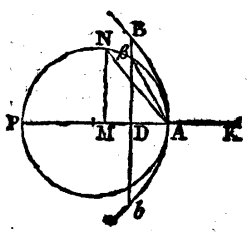
(*) Vide Tom. I. p. 323, not. *.

(*) Vide Tom. I. p. 324, not. *.

 iſtente

istente errore solummodo $\frac{x^3}{560d^2}\sqrt{dx}$ + &c (*); qui semper minor erit quàm $\frac{1}{1500}$ totius segmenti, etiamsi segmentum illud ad usque semicirculum augeatur.

Sic & in ellipsi BA*b* [vid. fig. precedent.] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape PG $= \frac{1}{2}$ AP $+ \frac{19AK - 21AP}{10AK} \times$ AD. In hyperbolâ vero, cape PG $= \frac{1}{2}$ AP $+ \frac{19AK + 21AP}{10AK} \times$ AD. Et acta recta GBE abscindet tangentem AE, quàm proximè æqualem arcui elliptico vel hyperbolico AB; dummodo arcus ille non fit nimis magnus.



Et pro areâ segmenti hyperbolici B*b*A; in DP cape MD $= \frac{3AD^2}{4AK}$; & ad D & M erige perpendicula, Dβ, MN, occurrentia semicirculo super diametro AP descripto; eritque $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD =$ B*b*A proximè: vel proximiùs, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD =$ B*b*A; si modò capiatur DM $= \frac{5AD^2}{7AK}$.

N° LI. *Epistola D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 27 Augusti 1676 *data, cum D.* Newtono *communicanda.*

Clarissimo Viro, D. Henrico Oldenburgio, Godefredus Guilielmus Leibnitius.

Literæ tuæ, die 26 *Julii* datæ, plura ac memorabiliora circa rem analyticam continent, quàm multa volumina spissa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac Clarissimis Viris Newtono ac Collinio gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Inventa Newtoni ejus ingenio digna sunt; quod ex opticis experimentis & tubo catadioptrico abunde eluxit.

Ejusque methodus inveniendi radices æquationum & areas figurarum, per series infinitas, prorsus differt à meâ: ut mirari libeat diversitatem itinerum, per quæ eodem pertingere licet.

Mercator figuras rationales, seu in quibus ordinatarum valor ex datis abscissis rationaliter exprimi potest (ut scilicet indeterminata quantitas in vinculum non ingrediatur) quadravit; & ad infinitas series reducere docuit, per divisiones: Newtonus autem, per radicum extractiones. Mea methodus corollarium est tantùm doctrinæ generalis de Transformationibus; cujus ope figura proposita quælibet, quâcunque æquatione explicabilis, transmutatur in aliam analyticam æquipollentem; talem ut, in ejus æquatione, ordinatæ dimensio non ascendat ultra cubum aut quadratum, aut etiam simplicem dignitatem, seu infimum gradum. Ita fiet ut quælibet

(*) Vide Tom. I. p. 325, not. ff.

* Hic modus transmutandi figuras curvilineas in alias ipsis æquales, ejusdem est generis cum transmutationibus Barrowianis & Gregorianis. Et conicæ sectiones hâc methodo semper ad series infinitas reduci possunt, per divisiones. Generalis tamen non est. Nam si Curva sit secundi generis,

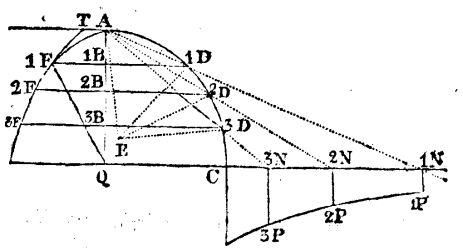
bet figura, vel per extractionem radicis cubicæ vel quadraticæ, Newtoni more; vel etiam, methodo Mercatoris, per simplicem divisionem; ad series infinitas reduci queat.

Ego verò ex his transmutationibus simplicissimam ad rem præsentem delegi. Per quam scilicet * unaquæque figura transformatur in aliam æquipollentem rationalem; in cujus æquatione, ordinata in nullam prorsus ascendit potestatem: ac proinde solâ Mercatoris divisione per infinitam seriem exprimi potest.

Ipsa porro * generalis transmutationum methodus mihi inter potissima analyseos censenda videtur. Neque enim tantùm ad series infinitas, & ad approximationes; sed & ad solutiones geometricas, aliaque innumera vix alioqui tractabilia, inservit. Ejus verò fundamentum vobis candidè libereque scribo; persuasus quæ apud vos habentur præclara, mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc est: ut figura proposita rectis innumeris utcunque, modo secundum aliquam regulam sive legem ductis, resolvatur in partes; quæ partes, aut aliæ ipsis æquales, alio situ aliâve formâ reconjunctæ, aliam componant figuram priori æquipollentem, seu ejusdem areæ, etsi aliâ longè figurâ constantem. Unde ad quadraturas absolutas, vel hypotheticas, Geometricas, vel serie infinitâ expressas, Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri potest.

Ut intelligatur; sit figura AQCDA. Ea, ductis rectis BD parallelis, resolvi potest in trapezia 1B2D, 2B3D, &c. Sed, ductis rectis convergentibus ED, resolvi potest in triangula E1D2D, E2D3D, &c.



Si jam alia sit Curva A1F2F3F; cujus trapezia, 1B2F, 2B3F, sint triangulis E1D2D, E2D3D, ordine respondentibus æqualia; tota figura AE3D2D1DA, toti figuræ A1F2F3F3BA erit æqualis.

Quinetiam trapezia trapeziis conferendo, fieri potest ut 1N2P, vel quod eodem redit, rectangulum 1N2P, sit æquale trapezio respondenti 1B2D, sive rectangulo 1B2D, tametsi recta 1N1P non sit æqualis rectæ 1B1D; modò sit 1N2N ad 1B2B ut 1B1D ad 1N1P; quod infinitis modis fieri potest.

Quæ omnia talia sunt, ut cuivis statim ordine progredienti ipsâ naturâ duce, in mentem veniant; contineantque indivisibilium methodum generalissimè conceptam, nec, quod sciam, hactenus satis universaliter explica-

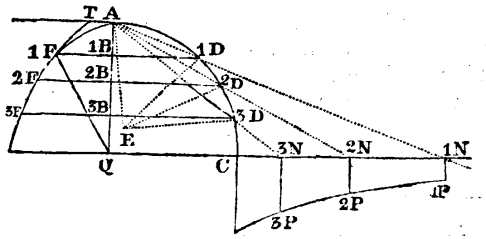
ris, incidetur in æquationem quadraticam; si tertii generis, in cubicam; si quarti, in quadrato-quadraticam; si quinti, in quadrato-cubicam, &c. præterquam in casibus quibusdam valde particularibus. Per extractiones verò radicum problemata faciliùs solvuntur, absque transmutationibus.

tam.

tam. Non tantùm enim parallelæ & convergentes, ſed & aliæ quæcunque certâ lege ductæ, rectæ vel curvæ, adhiberi poſſunt ad reſolutionem. Quanta autem, & quàm abſtruſa, hinc duci poſſint, judicabit, qui methodi univerſalitatem animo erit complexus. Certum enim eſt omnes quadraturas, hactenus notas, abſolutas vel hypotheticas, nonniſi exigua ejus ſpecimina eſſe.

Sed nunc quidem ſuffecerit applicationem oſtendere ad id, de quo agitur; ſeries ſcilicet infinitas, & modum transformandi figuram datam in aliam æquipollentem rationalem, Mercatoris methodo tractandam.

AQCA ſit quadrans circuli: radius AQ $= r$: abſciſſa AIB $= x$: ordinata IBID $= y$; æquatio pro circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta AID; producaturque, donec ipſi QC etiam productæ occurrat in IN: et QIN vocetur z. Et * erit AIB, ſeu x, $= \frac{2r^3}{r^2+z^2}$: et IBID, ſive y, $= \frac{2rz^2}{r^2+z^2}$. Eodem modo, ductâ A2D2N; ſi Q2N $= z - \beta$, poſita ſcilicet I2N2N $= \beta$: erit A2B $= \frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2}$; & A2B $-$ AIB, ſive recta IB2B, erit $\frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2} - \frac{2r^3}{r^2+z^2}$. Sive, poſitâ β infinitè parvâ, poſt deſtructiones & diviſiones, erit IB2B $=$



$\frac{4r^3z\beta}{r^4+z^4}$. Habitâ ergo rectâ IBID, & rectâ IB2B, habebitur valor rectanguli ID2B, multiplicatis eorum valoribus in ſe invicem; habebitur inquam $\frac{8r^3z^3\beta}{r^4+z^4}$, pro valore rectanguli ID2B.

Sit jam Curvæ IP2P3P, &c. natura pro arbitrio aſſumpta talis, ut ordinata ejus INIP, ex datâ abſciſſâ QIN ſive z, ſit $\frac{8r^3z^3}{r^4+z^4}$. Ideo quoniam I2N2N $= \beta$, erit rectangulum IP2N, etiam $\frac{8r^3z^2\beta}{r^4+z^4}$; ac proinde æquale rectangulo ID2B: & ſpatium IPIN3N3P2P1P æquale ſpatio circulari reſpondenti IDIB3B3D2DID. Eſt autem quælibet ordinata NP rationalis, ex datâ abſciſſâ QN; quia, poſitâ QN $= z$, ordinata NP eſt $\frac{8r^3z^2}{r^4+z^4}$, ſive $\frac{8r^3z^2}{r^4+3r^2z^2+z^4}$. Ergo ipſa per infinitam ſeriem integrorum exprimi poteſt, dividendo. Et ſpatium talibus ordinatis comprehenſum, æquipollens circulari, infinitâ ſerie numerorum rationalium, methodo Mercatoris qua-

* N. B. Leibnitius hanc methodum vulgari more prolixiùs hic exponit, quam analyſis ejus nova paucis exhibere potuiſſet; ideoque analyſin illam novam nondum invenerat.

drari poteſt. Quod cum facillimum ſit facere, hîc omitto. Neque enim elegantiæ ſuæ, ſed methodi generalis explicandæ cauſâ, hoc exemplum aſſumpſi.

Ita ſiquis loco circuli mihi dediſſet Curvam, in quâ ordinata aſcendiſſet ad gradum cubicum; potuiſſem eam reducere ad Curvam, in quâ ordinata non aſſurrexiſſet ultra quadratum, vel etiam ne quidem ad quadratum.

Itaque ſemper, ſive extractionibus radicum Newtonianis, gradûs cujuſlibet dati, vel diviſionibus Mercatoris, poterit cujuſlibet figuræ ſpatium inveniri, interventu alterius æquipollentis. Multum autem ad ſimplicitatem intereſt, quid eligas.

Omnium verò poſſibilium circuli, & ſectoris conici centrum habentis cujuſlibet, per ſeries infinitas quadraturarum, ſimpliciſſimam hanc eſſe dicere auſim, quam nunc ſubjicio.

Sit QAIF, [vid. fig. præcedent.] ſector, duabus rectis in centro Q concurrentibus, & curvâ conicâ AIF, ad verticem A ſive axis extremum perveniente, comprehenſus. Tangenti verticis, AT, occurrat tangens IFT. Ipſum AT vocemus t; & rectangulum ſub ſemi-latere recto in ſemi-latus tranſverſum ſit unitas. Erit * ſector hyperbolæ, circuli vel ellipſeos, per ſemi-latus tranſverſum diviſus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ &c. Signo ambiguo $\pm$ valente $+$ in hyperbolâ, $-$ in circulo vel ellipſi. Unde, poſito quadrato circumſcripto 1, erit circulus $\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7}$ &c. Quæ expreſſio, jam triennio abhinc, & ultrà, à me communicata amicis, haud dubiè omnium poſſibilium ſimpliciſſima eſt, maximeque afficiens mentem. N° LII.

Unde duco Harmoniam ſequentem *;

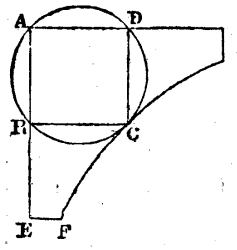
$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{99} + \frac{1}{120}$ &c. $= \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{63} \quad \frac{1}{99}$ &c. $= \frac{2}{4}$

$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{80} \quad \frac{1}{120}$ &c. $= \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{99}$ &c.

$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{120}$ &c.



Ubi $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. exprimit aream circuli ABCD; & $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. aream hyperbolæ æquilateræ BCEF, cùm ſit BC dupla ipſius EF, & quadratum inſcriptum $= \frac{1}{4}$. Numeri 3, 8, 15, 24, &c. ſunt quadrati unitate minuti.

Viciſſim, † ex ſeriebus regreſſuum, pro hyperbolâ hanc inveni. Si ſit numerus aliquis unitate minor $1 - m$, ejuſque logarithmus hyperbolicus l: erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} - \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Si numerus ſit major unitate, ut $1 + n$; tunc pro eo inveniendo mihi etiam ‡ prodiit regula, quæ in Newtoni epiſtolâ expreſſa eſt; ſcilicet erit $n = \frac{l}{1} +$

* Vid. pag. 506, lin. 20, & pag. 519, lin. 3.
† Vide Acta Lipſica *Feb.* 1682.
‡ Vid. not. pag. 528.

$\frac{p^2}{1\times2}+\frac{p^3}{1\times2\times3}+\frac{p^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Prior tamen celeriùs appropinquat. Ideoque effecio, ut eâ pôssim uti, etiam cùm major est unitate numerus $1+n$. Nam idem est logarithmus pro $1+n$ & pro $\frac{1}{1+n}$. Unde, si $1+n$ sit major unitate, erit $\frac{1}{1+n}$ minor unitate. Fiat ergo $1+m=\frac{1}{1+n}$, ac inventâ m, habebitur & $1+n$ numerus quæsitus.

Quod regressum ex arcubus attinet *, incideram ego directè in regulam, quæ ex dato arcu sinum complementi exhibet. Nempe, sinus complementi $=1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Sed postea quoque deprehendi, ex eâ illam nobis communicatam, pro inveniendo sinu recto, qui est $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. posse demonstrari.

Quod tribus verbis sic fit. Summa sinuum complementi ad arcum, seu omnium $1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. est $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Porro, summa sinuum complementi ad arcum, seu arcui in locis debitis insistentium, æquatur sinui recto ducto in radium, ut notum est geometris; id est, æquatur ipsi sinui recto; quia radius hic est unitas. Ergo sinus rectus $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$, &c. Hinc etiam, ex dato arcu & radio, sine ullâ prorsus aliorum notitiâ, haberi potest area segmenti circularis duplicati: quæ est $\frac{a^3}{1\times2\times3}-\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. Unde optimè segmentorum tabula ad gradus & minuta, &c. calculabitur.

Pro trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur hæc expressio: ut sinus complementi, c, ponatur $=1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$; quoniam solâ, memoriâ retenta, omnibus casibus & operationibus, directis scilicet simul & reciprocis, sufficit; quod ideo fit, quoniam æquatio $c=1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$ est plana. Unde si viciſſim quæras arcum ex sinu complementi, radix extrahi potest; adeoque fiet arcus $a=\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$ exactè satis ad usum eorum, qui in itineribus tabularum commoditate carent; quia error æquationis non est $\frac{a^6}{720}$.

Innumera alia possent dici, quæ his fortasse elegantiâ & exactitudine non cederent. Sed ego ita sum comparatus, ut plerumque, methodis generalibus detectis, rem in potestate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim ista omnia magnopere æstimanda sunt, nisi quòd artem inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quæ obscuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: et illud quoque explicabo, quomodo hâc methodo

* N. B. Methodum perveniendi ad has series Leibnitius à Newtono jam modo acceperat, idque ex ipsius rogatu. Imo series ipsas à Newtono, unà cum methodo perveniendi ad easdem, jam modo

methodo æquationum quoque utcunque affectarum radices per infinitam seriem dari possint, sine ullâ extractione; quod mirum fortasse videbitur.

Sed desideraverim, ut Clarissimus Newtonus nonnulla quoque ampliùs explicet; ut originem theorematis, quod initio ponit: item, modum quo quantitates p, q, r, in suis operationibus invenit: ac denique, quomodo in methodo regressuum se gerat; ut cùm ex logarithmo quærit numerum. Neque enim explicat, quomodo id ex methodo suâ derivetur.

Nondum mihi licuit, ejus literas, quâ merentur diligentiâ, legere: quoniam tibi è vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum quæ suppressit, ex solâ earum lectione consequi possum. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potius supplere Newtonum: quia credibile est, non posse eum scribere, quin aliquid semper præclari nos doceat, ut apparet, egregiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio; quæ doctissimus Collinius communi- N° LIII.
care gravatus non est. Vellem adjecisset appropinquationis Gregorianæ linearis demonstrationem. Credo tamen aliam haberi simpliciorem, etiam in infinitum euntem; quæ fiat sine ullâ bisectione anguli; imo sine suppositâ circuli constructione; solo rectarum ductu.

Vellem Gregoriana omnia conservari. Fuit enim his certè studiis promovendis aptissimus: cæterum ejus demonstrationi editæ, de impossibilitate quadraturæ absolutæ circuli & hyperbolæ, multa haud dubiè desunt.

De æquationum radicibus surdis generalibus inveniendis; sive, quod idem est, tollendis æquationum potestatibus intermediis, multa & ego meditatus sum; & jam vere anni superioris, specimina Hugenio communicaveram regularum Cardanicis similium. Seriem enim habebam ejusmodi regularum in infinitum euntem; in quibus & Cardanica continebatur. Sed ultra gradum cubicum non erant generales. Perspexi tamen inde veram methodum progrediendi longiùs. Quamquam multis adhuc opus sit artibus, quas excutiendas libenter ingeniosissimo Tschurnhausio relinquo; qui hîc ad eadem quæ ego habebam specimina, imo & alia præterea, etiam de suo pervenit.

Ex iis quæ Collinius ait de Gregorianâ methodo, difficile non fuit nobis certo divinare, in quo consistat ejus substantia.

Imaginariarum quantitatum, in realium radicum expressiones ingredientium, sublationem frustra putem sperari, imo quæri. Neque enim illæ ullo modo vel calculis vel constructionibus obsunt: et veræ realesque sunt quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus exemplis, & argumentis, deprehendi.

Exempli gratiâ, $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ radix extrahetur; nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$: supponenda tamen est destructa esse virtualiter; quod actu appareret, si fieri posset extractio. Aliâ tamen viâ hæc summa reperitur esse $\sqrt{6}$. Unde in cubicis binomiis, ubi realitas ejusmodi formularum, tunc cùm extractio ex singulis binomiis fieri

modo acceperat, & pro hyperbolâ signum tantùm mutavit; pro circulo, sinum versum à Newtono acceptum subduxit à radio, ut haberet sinum complementi.

nequit, ad oculum oſtendi non poteſt, mente tamen intelligitur. Quare fruſtra Carteſius aliique expreſſiones Cardanicas pro particularibus habuere. Siquis poſſet invenire quadraturam circuli & ejus partium, ex datâ hyperbolæ & ejus partium quadraturâ, is poſſet eas tollere; modò in ipſam quadraturam imaginariæ illæ rurſus ingrediantur.

Cæterum ex illis, quas habeo, meditationibus circa radices æquationum irrationales, neceſſario ſequitur res ſatis paradoxa: ſcilicet omnes æquationes gradûs octavi, noni, decimi, poſſe ad gradum ſeptimum reduci. Itaque & omnia problemata, ad decimum gradum uſque occurrentia, poſſunt ad ſeptimum deprimi.

Horribiles calculi ſubeundi erunt illi, qui in hoc argumentum velut per vim irrumpet; ſed facilimi, ipſi qui antè meditabitur: cùm, ut prævideo, ipſa natura rei ducat ad compendia quædam, per quæ ſpes eſt calculi magnam partem abſcindi; remque elegantibus artificiis, ingenii potius vi quàm calculi labore, tranſigi poſſe.

Sed ſiquis laborem non ſubterfugeret, eum docere poſſum methodum analyticam generalem infallibilem, per quam omnium æquationum radices generales invenire liceret.

Verùm meliora illis proponerem agenda, qui calculo delectarentur. Conſilium enim habeo tabularum analyticarum, quæ non minoris futuræ eſſent uſûs in Analyſi, quàm tabulæ ſinuum in Geometriâ Practicâ; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis verſatus ſit, eum progreſſiones reperturum in infinitum, quarum ope magna tabulæ pars ſine labore continuari poſſit. Nihil eſt, quod nôrim, in totâ analyſi momenti majoris. Nam in his tabulis pleraque problemata ſtatim ſoluta haberentur, aut levi operâ poſſint inde deduci.

Pendet negotium ex re longè majore; arte ſcilicet combinatoriâ generali ac verâ. Cujus vim ac poteſtatem neſcio, an quiſquam hactenus ſit conſequutus. Ea verò nihil differt ab analyſi illâ ſupremâ, ad cujus intima, quantum judicare poſſum, Carteſius non pervenit. Eſt enim, ad eam conſtituendam, opus alphabeto cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus alphabeti, opus eſt analyſi axiomatum. Sed non miror iſta nemini ſatis conſiderata: quia plerumque facilia negligimus; & multa, quæ clara videntur, aſſumimus. Quam quamdiu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus ſummum; nec genus calculi, etiam non-mathematicis accommodati, obtinebimus.

Optârim Cl. Pellium generalia ſua meditata, & illud ſpeciatim, quod memoras, Cribrum Eratoſthenis non ſupprimere. Nam etſi omnia fortè, quæ deſtinârat, non abſolverit; meditata tamen ipſa, & conſilia, egregiorum virorum non perire, publici intereſt. Utilia quoque futura ſunt, quæ de ſinuum tabulâ ad æquationes accommodandâ habet. Item de limitibus, & radicibus.

Quod dicere videmini, pleraſque difficultates, exceptis problematibus Diophantæis, ad ſeries infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeo mira & implexa, ut neque ab æquationibus pendeant, neque

neque ex quadraturis. Qualia ſunt, ex multis aliis, problemata * methodi tangentium inverſæ; quæ etiam Carteſius in poteſtate non eſſe fatſus eſt.

In Tomo III Epiſtolarum, una habetur ad Beaunium; in quâ, ad propoſitas à Beaunio, Curvas quaſdam invenire conatur; quarum una eſt ludus naturæ: ut intervallum inter tangentem, ad [axem] directricem uſque productam, & ordinatim-applicatam ex Curvâ ad directricem, ſit ſemper idem; recta ſcilicet conſtans. Hanc Curvam nec Carteſius, nec Beaunius, nec quiſquam alius, quod ſciam, invenit. Ego verò quâ primum die, imo horâ, cæpi quærere, ſtatim certâ analyſi ſolvi. Fateor tamen nondum me, quicquid in hoc genere deſiderari poteſt conſecutum: quamquam maximi momenti eſſe ſciam. Ac de his quidem nunc ſatis.

Ego id agere conſtitui, ubi primùm otium nactus ero, ut rem omnem mechanicam reducam ad puram geometriam; problemataque circa elateria, & aquas, & pendula, & projecta, & Solidorum reſiſtentiam, & fractiones, &c. definiam. Quæ hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc eſſe in poteſtate; ex quo circa regulas motuum mihi penitus perfectis demonſtrationibus ſatisfeci; neque quicquam amplius in eo genere deſidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex axiomate metaphyſico pulcherrimo; quod non minoris eſt momenti circa motum, quam hoc, *totum eſſe majus parte*, circa magnitudinem.

De centro-baricis quoque, ſingularem quendam aditum reperi ad novas ac plane à prioribus diverſas contemplationes, in Geometriâ pariter ac Mechanicâ magno uſui futuras. Hæc ubi (Deo volente) abſolvero, reliquum temporis, quod ſcilicet philoſophicis meditationibus deſtinare fas erit, naturæ indagationi debeo.

Tſchurnhauſius proximo tabellione ſcribet.

Excerpta ex epiſtolâ D. Ehrenfried de Tſchurnhauſe *ad D.* Oldenburgum, Pariſiis 1° Septemb. 1676 *datâ*; *cujus extat exemplar manu D.* Collinii *deſcriptum.* N° LIV.

Expectabam cum deſiderio reſponſum, cùm aliquot abhinc menſibus ad te literas meas tranſmiſeram; ſed nec ex modò datis colligere licet, has receptas fuiſſe. Interim admodum oblectatus fui, hiſce conſpectis quæ ad D. Leibnitium exarâſti; maximéque me tibi devinxiſti, quòd me participem volueris facere tam ingenioſarum inventionum, & promotionis geometriæ tam pulchræ quâm utilis. Statim curſim eas pervolvi, ut viderem, num forte inter haſce ſeries infinitas exiſteret † ea, quâ ingenioſiſſimus D. Leibnitius circulum, imo quamvis ſectionem conicam (centro in finitâ diſtantiâ gaudentem) quadravit; tali ratione, ut mihi perſuadeam ſimpliciorem viam, nec quoad linearum conſtructionem, nec numeralem expreſſio-

* Si æquationes differentiales D. Leibnitio jam innotuiſſent, haud dixiſſet, problemata methodi tangentium inverſæ ab æquationibus non pendere.

† Annon D. Tſchurnhauſe viderat excerpta ex Gregorii epiſtolis, cum D. Leibnitio communicata; ubi habetur ſeries Gregorii, quam Leibnitio hic tribuit? Vide pag 521.

nem, nunquam visum iri; quique hisce porro insistens, generalem adinvenit methodum figuram quamvis datam in talem rationalem transmutandi, quæ per solum inventum (admodum præstans meo judicio) D. Mercatoris, ad seriem infinitam posset reduci. Sed hâc de materiâ, cùm ipse non ita pridem mentem suam declaravit, non opus est ut prolixior sim. Verùm ut ad specimina perquam ingeniosa D. Newtoni revertar; hæc non potuere non mihi placere; tam ob utilitatem, quâ se tam latè ad quarumvis quantitatum dimensiones, ac alia difficilia enodanda in mathematicis extendunt, quàm ob deductionem harum, à fundamentis non minus generalibus, quàm ingeniosis, derivatam: non obstante quod existimem, ad quantitatem quamvis ad infinitam seriem æquipollentem reducendam, fundamenta adhuc dari & simpliciora & universaliora, quàm sunt fractionum & irrationalium reductio ad tales series, ope divisionis aut extractionis; quæ mihi tale quid non nisi per accidens præstare videntur: cùm hæc successum quoque habeant, licet non adsint fractiones aut irrationales quantitates. Similia porro, quæ in hâc re præstitit eximius ille geometra Gregorius, memoranda certè sunt; & quidem optimè famæ ipsius consulturi, qui ipsius relicta manuscripta luci publicæ ut exponantur operam navabunt.

N° LV. *Epistola D.* Newtoni *posterior, ad D.* Oldenburgum, Octob. 24, 1676 *data, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

Vir Dignissime,

NEWTONI AD OLDEN- QUANTA cum voluptate legi epistolas clarissimorum virorum D. Leibnitii & D. Tschurnhausii, vix dixerim.

Perelegans sane est Leibnitii methodus perveniendi ad series convergentes: & satis ostendisset ingenium authoris, etsi nihil aliud scripsisset. Sed quæ alibi per epistolam sparsit, suo nomine dignissima, efficiunt etiam, ut ab eo speremus maxima. Diversitas modorum, quibus eodem tenditur, eo magis placuit, quòd mihi tres methodi perveniendi ad ejusmodi series innotuerant; adeo ut novam nobiscum communicandam vix expectarem.

Unam è meis prius descripsi: jam addo aliam; illam scilicet quâ primùm incidi in has series. Nam incidi in eas, antequam scirem divisiones & extractiones radicum, quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum est fundamentum theorematis, sub initio epistolæ prioris positi, quod D. Leibnitius à me desiderat.

Sub initio studiorum meorum mathematicorum, ubi incideram in * Opera celeberrimi Wallisii nostri: considerando series, quarum intercalatione ipse exhibet aream circuli & hyperbolæ; utpote quòd in serie Curvarum, quarum basis seu axis communis sit x, & ordinatim applicatæ $\overline{1-xx}^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{3}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{5}{2}}$, &c. si areæ alternarum, quæ sunt x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. interpolari possent; ha-

* Vide D. Wallisii arithmeticam infinitorum, Prop. CXVIII, CXXI, ejusque algebram, Cap. XXXII.

beremus

beremus areas intermediarum, quarum prima, $\overline{1-xx}^{\frac{1}{2}}$, est circulus: ad has interpolandas notabam, quòd in omnibus, primus terminus esset x; quodque secundi termini, $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, &c. essent in arithmeticâ progressione; & proinde quòd duo primi termini serierum intercalandarum deberent esse $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{2}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, &c. POSTERIOR.

Ad reliquas intercalandas considerabam, quòd denominatores, 1, 3, 5, 7, &c. erant in arithmeticâ progressione; adeoque solæ numeratorum coefficientes numerales essent investigandæ. Hæ autem in alternis datis areis erant figuræ potestatum numeri undenarii; nempe 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4. Hoc est, primo 1; deinde 1, 1; tertio 1, 2, 1; quarto 1, 3, 3, 1; quinto 1, 4, 6, 4, 1, &c.

Quærebam itaque, quomodo in his seriebus, ex datis duabus primis figuris, reliquæ derivari possent. Et inveni, quòd positâ secundâ figurâ m, reliquæ producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus seriei, $\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}$ &c.

Exempli gratiâ. Sit terminus secundus $m=4$; & erit $4\times\frac{m-1}{2}$, hoc est 6, tertius terminus; & $6\times\frac{m-2}{3}$, hoc est 4, quartus; & $4\times\frac{m-3}{4}$, hoc est 1, quintus; & $1\times\frac{m-4}{5}$, hoc est 0, sextus; quo series in hoc casu terminatur.

Hanc regulam itaque applicui ad series interserendas. Et cùm pro circulo secundus terminus esset $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, posui $m=\frac{1}{2}$: & prodierunt termini $\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, sive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ sive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$, sive $-\frac{5}{128}$; & sic in infinitum. Unde cognovi, desideratam aream segmenti circularis esse $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ &c.

Et eâdem ratione prodierunt etiam interserendæ areæ reliquarum Curvarum: ut & area hyperbolæ, & cæterarum alternarum in hâc serie; $\overline{1+xx}^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1+xx}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1+xx}^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1+xx}^{\frac{3}{2}}$, &c.

Et eadem est ratio intercalandi alias series; idque per intervalla duorum pluriumve terminorum simul deficientium.

Hic fuit primus meus ingressus in has meditationes: qui è memoriâ sane exciderat, nisi oculos in adversaria quædam, ante paucas septimanas, retulissem.

Ubi verò hæc didiceram; mox considerabam terminos $\overline{1-xx}^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}^{\frac{3}{2}}$, &c. hoc est, 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$, &c. eodem modo interpolari posse, ac areas ab ipsis generatas: & ad hoc nihil aliud requiri, quàm omissionem denominatorum 1, 3, 5, 7, &c. in terminis exprimentibus areas; hoc est, coefficientes terminorum quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}^{\frac{3}{2}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}^{m}$, prodire per continuam

NEWTONI AD OLDEN. continuam multiplicationem terminorum hujus ſeriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

Adeoque (exempli gratiâ) $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c.

Sic itaque innotuit mihi generalis reductio radicalium in infinitas ſeries, per regulam quam poſui initio epiſtolæ prioris, antequam ſcirem extractiones radicum.

Sed hâc cognitâ, non potuit altera me diu latere. Nam ut probarem has operationes, multiplicavi $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ &c. in ſe; & factum eſt $1-xx$, terminis reliquis in infinitum evaneſcentibus per continuationem ſeriei. Atque ita $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c. bis in ſe ductum produxit $1-xx$. Quod, ut certa fuerit harum concluſionum demonſtratio, ſic me manuduxit ad tentandum è converſo, num hæ ſeries, quas ſic conſtitit eſſe radices quantitatis $1-xx$, non poſſent inde extrahi more arithmetico. Et res bene ſucceſſit. Operationis forma in quadraticis radicibus hæc erat.

$$
\begin{array}{l}
1-xx\ (1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6 \text{ \&c.} \\
\underline{1} \\
0-xx \\
\underline{-xx+\frac{1}{4}x^4} \\
-\frac{1}{4}x^4 \\
\underline{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8} \\
-\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8
\end{array}
$$

His perſpectis, neglexi penitus interpolationem ſerierum; & has operationes, tanquam fundamenta magis genuina, ſolummodo adhibui. Nec latuit reductio per diviſionem; res utique facilior.

Sed & reſolutionem affectarum æquationum mox aggreſſus ſum; eamque obtinui. Unde ſimul ordinatim applicatæ, ſegmenta axium, aliæque quælibet rectæ, ex areis Curvarum, vel arcubus, datis innotuere. Nam regreſſio ad hæc nihil indigebat præter reſolutionem æquationum, quibus areæ, vel arcus, ex datis rectis dabantur.

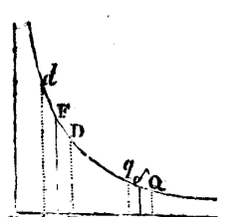
N° LVI. Eo tempore peſtis ingruens [*quæ contigit annis* 1665, 1666] coegit me hinc fugere, & alia cogitare. Addidi tamen ſubinde condituram quandam logarithmorum, ex areâ hyperbolæ, quam hîc ſubjungo.

Sit

* Mathematici priores invenerunt hoc theorema, quòd *ſumma terminorum progreſſionis geometricæ, in infinitum pergentis, eſt ad terminorum primum & maximum, ut hic terminus ad differentiam duorum terminorum primorum* (a). Idem demonſtratur arithmeticè, multiplicando extrema & media. Demonſtravit Walliſius, dividendo rectangulum ſub mediis per extremum ultimum. Vide Walliſii opus arithmeticum anno 1657 editum Cap. XXXIII. § 36. Per Walliſii diviſionem Mercator demonſtravit, & auxit quadraturam hyperbolæ, à D. Brounker priùs inventam. Et Gregorius

(a) Vide Tom. I. p. 261, not.

idem



Sit *d*FD hyperbola, cujus centrum C, vertex F, BROUNK POSTERIOR. & quadratum interjectum CAFE = 1. In AC cape AB, A*b* hinc inde $= \frac{1}{10}$ ſeu 0.1: et, erectis perpendiculis, BD, *bd*, ad hyperbolam terminatis, erit ſemi-ſumma ſpatiorum AD & $Ad = 0.1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ &c. & ſemi-differentia $= \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ &c. Quæ reductæ ſic ſe habent,

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	25000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

Horum ſumma 0.1053605156577 eſt Ad; & differentia 0.0953101798043 eſt AD. Et eâdem ratione poſitis AB, A*b* hinc inde = 0.2, obtinebitur $Ad = 0.223143551314\overline{2}$; & AD = 0.182321556793 9. Habitis ſic logarithmis hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, & 1.2; cum ſit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$; & 0.8 & 0.2, ſint minores unitate: adde logarithmos eorum ad duplum logarithmi 1.2, & habebis 0.693147180559 7 logarithmum hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde log. 0.8 (ſiquidem ſit $\frac{2 \times 1 \times 2}{0.8} = 10$), & habebis 2.302585092993 3 logarithmum numeri 10: indeque per additionem ſimul prodeunt logarithmi numerorum 9 & 11: adeoque omnium primorum horum, 2, 3, 5, 11, logarithmi in promptu ſunt. Inſuper, ex ſolâ depreſſione numerorum ſuperioris computi per loca decimalia, & additione; obtinentur logarithmi decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; ut & horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002. Et inde, per additionem & ſubductionem, prodeunt logarithmi primorum, 7, 13, 17, 37, &c. Qui unà cum ſuperioribus, per logarithmum numeri 10 diviſi, evadunt veri logarithmi in tabulam inſerendi. Sed hos poſtea propiùs obtinui (*).

Pudet dicere, ad quot figurarum loca has computationes, otioſas eo tempore, produxi. Nam tunc ſane nimis delectabar inventis hiſce. Sed ubi prodiit ingenioſa illa * Nicolai Mercatoris Logarithmotechnia (quem ſuppono ſua primum inveniſſe) cœpi ea minus curare; ſuſpicatus, vel eum nôſſe extractionem radicum, æquè ac diviſionem fractionum; vel alios ſaltem, diviſione patefactâ, inventuros reliqua, prius quàm ego ætatis eſſem maturæ ad ſcribendum.

idem demonſtravit geometricè. Sed horum nemo methodum generalem quadrandi Curvas per diviſionem invenit. Mercator hoc nunquam profeſſus eſt. Gregorius ejuſmodi methodum, licet vir acutiſſimus & literis Collinii admonitus, vix tandem invenit. Newtonus invenit per interpolationem ſerierum, & poſtea diviſionibus & extractionibus radicum, ut notioribus, uſus eſt.

(*) Vide Geometriam Analyticam, Cap. IX § 36—48.

NEWTONI AD OLDEN-

Eo ipso tamen tempore quo liber iste prodiit, communicatum est per amicum D. Barrow, tunc Matheseos professorem Cantabrigiæ, cum D. Collinio *, compendium quoddam methodi harum serierum; in quo significaveram areas & longitudines Curvarum omnium, & Solidorum superficies & contenta, ex datis rectis, & vice versâ, ex his datis rectas determinari posse: & methodum ibi indicatam illustraveram diversis seriebus.

Subortâ deinde inter nos epistolari consuetudine; D. Collinius, vir in rem mathematicam promovendam natus, non destitit suggerere, ut hæc publici juris facerem. Et ante annos quinque [1671], cùm suadentibus amicis consilium ceperam edendi tractatum de refractione lucis, & coloribus, quem tunc in promptu habebam; cœpi de his seriebus iterum cogitare: & tractatum † de iis etiam conscripsi, ut utrumque simul ederem.

Sed, ex occasione telescopii catadioptrici, epistolâ ad te missâ, quâ breviter explicui conceptus meos de naturâ lucis; inopinatum quiddam effecit, ut mei interesse sentirem, ad te festinanter scribere de impressione istius epistolæ. Et subortæ statim, per diversorum epistolas objectionibus aliisque refertas, crebræ interpellationes me prorsus à consilio deterruerunt; & effecerunt, ut me arguerem imprudentiæ, quòd umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.

Sub eo tempore Jacobus Gregorius, ex unicâ quâdam serie è meis, quam D. Collinius ad eum transmiserat, post multam considerationem, ut ad Collinium rescripsit, pervenit ad eandem methodum; & tractatum de eâ reliquit, quem speramus ab amicis ejus editum iri. Siquidem, pro ingenio quo pollebat, non potuit non adjicere de suo nova multa; quæ rei mathematicæ interest, ut non pereant.

Ipse autem tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti à proposito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea, quâ decreveram explicare modum solvendi problemata, quæ ad quadraturas reduci nequeunt; licet aliquid de fundamentis ejus posuissem. Cæterùm in tractatu isto, series infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congessi; inter quæ erat methodus ducendi tangentes, quam solertissimus Slusius ante annos duos tresve tecum communicavit; de quâ tu, suggerente Collinio, rescripsisti, eandem ‡ mihi etiam innotuisse. Diversâ ratione in eam incidimus. Nam res non eget demonstratione, prout ego operor. Habito meo fundamento, nemo potuit tangentes aliter ducere, nisi volens de rectâ viâ deviaret.

Quinetiam non hîc hæretur ad æquationes radicalibus, unam vèl utramque indefinitam quantitatem involventibus, utcunque affectas; sed absque aliquâ

* Analysin intelligit per æquationes infinitas suprà impressam, de quâ vid. pag. 502, 503.

† Hujus tractatûs meminit D. Collins in epistolis duabus suprà impressis, pag. 508. Et Newtonus in epist. supra impressa, pag. 510.

‡ Vide epistolam Newtoni suprà impressam, pag. 510.

§ Hoc est, *datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; & vice versâ.* Prior pars problematis solvitur per regulam binomii, initio epistolæ superioris Newtonianæ traditam, & initio hujus demonstratam. Nam si terminus secundus binomii sit momentum termini

aliquâ talium æquationum reductione, quæ opus plerumque redderet immensum, tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quæstionibus de Maximis & Minimis; aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor. SUPRUM POSTER. OR.

Fundamentum harum operationum, satis obvium quidem, quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi, sic potius celavi § 6*accdæ*13-*eff*7*i*3*l*9*n*4*o*4*qrr*4*s*9*t*12*vx*.

Hoc fundamento conatus sum etiam reddere || speculationes de quadraturâ Curvarum simpliciores; pervenique ad theoremata quædam generaliora. Et, ut candidè agam, ecce primum theorema.

Ad Curvam aliquam sit $dz^{\theta} = \overline{e+fz^{\eta}}^{\lambda}$ ordinatim applicata, termino abscissæ, seu basis, z normaliter insistens: ubi literæ d, e, f denotant quaslibet quantitates datas; & θ, η, λ indices potestatum, sive dignitatum, quantitatum quibus affixæ sunt. Fac $\frac{\theta+1}{\eta} = r$; $\lambda + r = s$; $\frac{d}{\eta} \times \overline{e+fz^{\eta}}^{\lambda+1} = q$; & $r\eta - \eta = \varpi$. Et area Curvæ erit q in $\frac{z^{\varpi}}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{fB}{fz^{2\eta}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{3\eta}} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{fD}{fz^{4\eta}}$ &c. literis A, B, C, D, &c. denotantibus terminos proximè antecedentes; nempe A terminum $\frac{z^{\varpi}}{s}$, B terminum $-\frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}}$ &c. Hæc series, ubi r fractio est vel numerus negativus, continuatur in infinitum; ubi verò r integer est & affirmativus, continuatur ad tot terminos tantùm, quot sunt unitates in eodem r; & sic exhibet geometricam quadraturam Curvæ. Rem exemplis illustro. N° LVIII.

Exemplum 1. Proponatur Parabola, cujus ordinatim applicata sit $\sqrt{ax}$. Hæc, in formam regulæ reducta, fit $z^{0} \times \overline{0+az^{1}}^{\frac{1}{2}}$. Quare $d=1$; $\theta=0$; $e=0$; $f=a$; $\eta=1$; $\lambda=\frac{1}{2}$. Adeoque $r=1$; $s=1\frac{1}{2}$; $q=\frac{1}{a} \times az^{\frac{1}{2}}$; $\varpi=0$. Et erit area quæsita $\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; hoc est, $\frac{2}{3}z\sqrt{az}$. Et sic in genere si cz^{n} ponatur ordinatim applicata, prodibit area $\frac{c}{n+1}z^{n+1}$.

Exem. 2. Sit ordinatim applicata $\frac{a^4 z}{c^4 - 2ccxx + x^4}$. Hæc per reductionem fit $a^4 z \times \overline{cc-xx}^{-2}$; vel etiam $a^4 z^{-3} \times \overline{-1+ccx^{-2}}^{-2}$. In priori casu est $d=a^4$; $\theta=1$; $e=cc$; $f=-1$; $\eta=2$; $\lambda=-2$. Adeoque $r=1$; $s=-1$; $q=-\frac{a^4}{2} \times \overline{cc-zz}^{-1}$, hoc est $-\frac{a^4}{2cc-2zz}$; $\varpi=0$. Et area curvæ q in

mini primi; terminus secundus seriei, in quam dignitas Binomii per regulam illam resolvitur, erit momentum dignitatis Binomii. Posterior pars problematis solvitur regrediendo à momentis ad fluentes: quod ubi hæretur, fieri solet quadrando figuras; & ubi ad quadraturas hæretur, extrahendo fluentes per regulas quatuor; quarum duas Newtonus in epistolâ priore explicuit; duas illas, sub finem hujus epistolæ, literis transpositis occultavit; ut mox dicetur.

|| Hujusmodi theoremata Newtono ante annum 1669 innotuisse patet, per analysin suprà impressam pag. 503, lin. 2, & per epistolam Collinii ad Thomam Strode 26 *Julii* 1672 datâ, pag. 509, lin. 24, 25, 26, ut & per hanc epistolam.

NEWTONI AD OLDEN. $-\frac{z^0}{1}$, id eſt $=\frac{a^4}{2cc-2zz}$. In ſecundo autem caſu, eſt $d=a^4$; $\theta=-3$; $e=-1$; $f=cc$; $\eta=-2$; $\lambda=-2$; $r=1$; $s=-1$; $q=-\frac{a^4}{2cc}\times\overline{-1+ccz^{-2}}^{-1}$, id eſt $-\frac{a^4zz}{2c^4-2cczz}$; $\pi=0$. Et area $=q$ in $-\frac{z^0}{1}$, hoc eſt $\frac{a^4zz}{2c^4-2cczz}$. Area his caſibus diverſimodè exhibetur, quatenus computatur à diverſis finibus; quorum aſſignatio, per hos inventos valores arearum, facilis eſt.

Exem. 3. Sit ordinatim applicata $\frac{a^3}{z^3}\sqrt{bz+zz}$: hoc eſt, per reductionem ad debitam formam; vel $a^3z^{-\frac{3}{2}}\times\overline{b+z}^{\frac{1}{2}}$; vel $a^3z^{-3}\times\overline{1+bz^{-1}}^{\frac{1}{2}}$. Et erit, in priori caſu, $d=a^3$; $\theta=-\frac{3}{2}$; $e=b$; $f=1$; $\eta=1$; $\lambda=\frac{1}{2}$. Adeoque $r=-\frac{7}{2}$, &c. Quare, cùm r non ſit numerus affirmativus, procedo ad alterum caſum. Hic eſt $d=a^3$; $\theta=-4$; $e=1$; $f=b$; $\eta=-1$; $\lambda=\frac{1}{2}$. Adeoque $r=3$; $s=3\frac{1}{2}$; $q=-\frac{a^3}{b}\times\overline{1+bz^{-1}}^{\frac{1}{2}}$, ſeu $-\frac{a^3z+a^3b}{bzz}\sqrt{zz+bz}$; $\pi=-2$. Et area, q in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}}-\frac{2}{2\frac{1}{2}}\times\frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b}+\frac{1}{1\frac{1}{2}}\times\frac{2}{2\frac{1}{2}}\times\frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$; hoc eſt $\frac{-30bb+24bz-16zz}{105bbzz}$ in $\frac{a^3z+a^3b}{bzz}\sqrt{zz+bz}$.

Exem. 4. Sit denique ordinatim applicata $\frac{bz^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5:c^3-3acczz+3aazz-a^3zz}}$. Hæc, ad formam regulæ reducta, fit $bz^{\frac{3}{2}}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}}^{-\frac{1}{2}}$. Indeque eſt $d=b$; $\theta=\frac{1}{2}$; $e=c$; $f=-a$; $\eta=\frac{2}{3}$; $\lambda=-\frac{1}{3}$; $r=2\frac{1}{3}$; $s=\frac{7}{3}$; $q=-\frac{3b}{2a}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}}^{\frac{1}{2}}$; $\pi=\frac{2}{3}$. Et area $q\times\frac{5z^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{5}{4}\times-\frac{5c}{7a}$, id eſt $-\frac{30abz^{\frac{7}{3}}+75bcz}{28aa}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}}^{\frac{1}{2}}$.

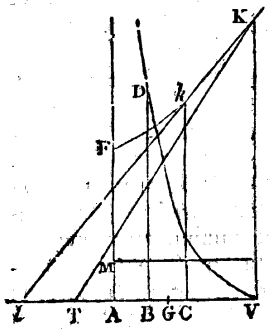
Quòd ſi res non ſucceſſiſſet in hoc caſu, exiſtente r vel fractione vel numero negativo: tunc tentâſſem alterum caſum, purgando terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in ordinatim applicatâ à coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$; hoc eſt reducendo ordinatim applicatam ad hanc formam; $bz^{-\frac{1}{15}}\times\overline{a+cz^{-\frac{2}{3}}}^{-\frac{1}{2}}$. Et ſi r in neutro caſu fuiſſet numerus integer & affirmativus; concluſiſſem Curvam ex earum numero eſſe, quæ non poſſunt geometricè quadrari. Nam, quantum animadverto, hæc regula exhibet in finitis æquationibus areas omnium geometricam quadraturam admittentium, Curvarum; quarum ordinatim applicatæ conſtant ex poteſtatibus, radicibus, vel quibuſlibet dignitatibus binomii cujuſcunque, licet non directè, ubi index dignitatis eſt numerus integer.

At quando hujuſmodi Curva aliqua non poteſt geometricè quadrari; ſunt ad manus alia theoremata pro comparatione ejus cum conicis ſectionibus, vel ſaltem cum aliis figuris ſimpliciſſimis, quibuſcum poteſt comparari: ad quod ſufficit etiam hoc ipſum unicum jam deſcriptum theorema, ſi debitè concinnetur.

Pro

Pro trinomiis etiam, & aliis quibuſdam *, regulas quaſdam concinnavi. BURCUM POSTERIOR.

Sed in ſimplicioribus vulgoque celebratis figuris, vix aliquid relatu dignum reperi, quod evaſit aliorum conatus; niſi fortè Longitudo Ciſſoidis ejuſmodi cenſeatur. Ea ſic conſtruitur.



Sit VD ciſſois; AV, diameter circuli ad quem aptatur; V, vertex; AF, aſymptotos ejus; ac DB, perpendiculare quodvis ad AV demiſſum. Cum ſemi-axe AF = AV, & ſemi-parametro AG = ¼ AV, deſcribatur hyperbola FkK; & inter AB & AV ſumptâ AC mediâ proportionali, erigantur, ad C & V, perpendicula Ck, VK, hyperbolæ occurrentia in k & K; et agantur rectæ, KT, kt, tangentes hyperbolam in eiſdem K & k, & occurrentes AV in T & t; & ad AV conſtituatur rectangulum VM æquale ſpacio TKkt. Et ciſſoidis VD longitudo erit ſextupla altitudinis AM. Demonſtratio perbrevis eſt (·). Sed ad infinitas ſeries redeo.

Quamvis multa reſtent inveſtiganda, circa modos approximandi, & circa diverſa ſerierum genera, quæ poſſunt ad id conducere: tamen vix cum D. Tſchurnhauſio ſperaverim, dari poſſe aut ſimpliciora, aut magis generalia fundamenda reducendi quantitates ad hoc genus ſerierum, de quo agimus, quàm ſunt diviſiones, & extractiones radicum; quibus Leibnitius & ego utimur; ſaltem non generaliora: quia pro quadraturâ & Εὐθύνσει Curvarum ac ſimilibus, nullæ poſſunt dari ſeries ex hiſce ſimplicibus terminis algebraicis (unicam tantùm indefinitam quantitatem involventibus) conſtantes, quas non licet hâc methodo colligere.

Nam non poſſunt eſſe plures convergentes ſeries ad idem determinandum, quàm ſunt indefinitæ quantitates, ex quarum poteſtatibus ſeries conflentur: & ego quidem, ex adhibitâ quâcunque indefinitâ quantitate, ſeriem novi colligere; & idem credo Leibnitio in poteſtate eſſe.

Nam quamvis meâ methodo liberum ſit eligere, pro conflandâ ſerie, quantitatem quamlibet indefinitam, à quâ quæſitum dependeat; & methodus, quam ipſe nobiſcum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum, quibus opus commodè deduci poteſt ad fractiones, quæ per ſolam diviſionem evadant ſeries infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ quantitates pro ſeriebus conflandis adhiberi poſſunt; per methodum iſtam, quâ affectæ æquationes reſolvuntur; dummodo reſolvantur in propriis terminis; hoc eſt, conficiendo ſeriem ex ſolis terminis, quos æquatio involvit.

Præterea non video, cur dicatur his diviſionibus & extractionibus problemata reſolvi per accidens: ſiquidem hæ operationes eodem modo ſe habeant ad hoc genus algebræ, ac vulgares operationes arithmeticæ ad algebram vulgo notam.

* Hæ omnes regulæ propoſitionem quintam ſextam ſeptimam & octavam Libri de Quadraturis conſtituunt.

(·) Conſule Geometriam Analyticam, Cap. XII, § 43, 44.

NEWTONI AD OLDEN-

Quod autem ad ſimplicitatem methodi attinet; nolim fractiones & radicales, abſque prævia reductione, ſemper reſolvi in ſeries infinitas: ſed, ubi perplexæ quantitates occurrunt, tentandæ ſunt omnimodæ reductiones; ſive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas; ſive per methodum tranſmutatoriam Leibnitii; aut alio quocunque modo, qui occurrat. Et tunc reſolutio in ſeries, per diviſionem & extractionem, opportunè adhibebitur.

Hîc autem præcipue nitendum eſt, ut denominatores fractionum, & quantitates in vinculo radicum, reducantur ad quàm pauciſſimas & minimè compoſitas; & ad tales etiam, quæ in ſeriem abeunt citiſſimè convergentem, etſi radices neque convertantur in fractiones, neque deprimantur. Nam, per regulam initio alterius epiſtolæ, extractio altiſſimarum radicum æquè ſimplex & facilis eſt, ac extractio radicis quadraticæ, vel diviſio: & ſeries, quæ per diviſionem eliciuntur, ſolent minimè omnium convergere.

Nº LIX. Hactenus de ſeriebus unicam indefinitam quantitatem involventibus locutus ſum. Sed poſſunt etiam, perſpectâ methodo, ſeries ex duabus, vel pluribus, aſſignatis indefinitis quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejuſdem methodi poſſunt ſeries ad omnes figuras efformari, Gregorianis, ad circulum & hyperbolam editis, affines; hoc eſt, quarum ultimus terminus exhibebit quæſitam aream. Sed calculum hîc oneroſiorem nolim lubens ſubire.

Poſſunt denique ſeries ex terminis compoſitis eâdem methodo conſtitui. Quemadmodum, ſi ſit $\sqrt{aa-ax+\frac{x^3}{a}}$ ordinatim applicata Curvæ alicujus; pono $aa-ax=zz$; & ex binomio $zz+\frac{x^3}{a}$ extracta radice, prodibit $z+\frac{x^3}{2az}-\frac{x^6}{8aaz^3}$ &c. Cujus ſeriei omnes termini quadrari poſſunt per theorema jam antè deſcriptum. Sed hæc minoris facio; quòd ubi ſeries ſimplices non ſunt ſatis tractabiles, aliam, nondum communicatam methodum habeo, quâ pro lubitu acceditur ad quæſitum.

Ejus fundamentum eſt commoda, expedita, generalis ſolutio hujus problematis: *Curvam geometricam deſcribere, quæ per data quotcunque puncta tranſibit* (*).

Docuit Euclides deſcriptionem circuli per tria data puncta. Poteſt etiam conica ſectio deſcribi per quinque data puncta; & Curva trium dimenſionum per ſeptem data puncta: adeo ut in poteſtate habeam deſcriptionem omnium Curvarum iſtius ordinis, quæ per ſeptem tantum puncta determinantur. Hæc ſtatim geometricè fiunt, nullo calculo interpoſito. Sed ſuperius problema eſt alterius generis: & quàmvis primâ fronte intractabile videatur, tamen res aliter ſe habet. Eſt enim ferè ex pulcherrimis, quæ ſolvere deſiderem.

Seriei à D. Leibnitio pro quadraturâ conicarum ſectionum propoſitæ, affinia ſunt theoremata quædam, quæ, pro comparatione Curvarum cum conicis ſectionibus, in catalogum * dudum retuli.

(*) Vide Methodum Differentialem, Tom. I. p. 521—528.

* Ex his patet propoſitiones Newtoni de Quadraturâ Curvarum diu ante annum 1676 inventas fuiſſe.

Poſſum

Poſſum utique cum ſectionibus conicis geometricè comparare Curvas omnes (numero infinities infinitas) quarum ordinatim applicatæ ſunt

POSTERIOR.

$$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} \text{ &c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} \text{ &c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} \text{ &c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} \text{ &c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^n}}{g+bz^n} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}\times\sqrt{e+fz^n}}{g+bz^n} \text{ &c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{g+bz^n\times\sqrt{e+fz^n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{g+bz^n\times\sqrt{e+fz^n}} \text{ &c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}} \quad \text{vel } dz^{n-1}\times\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}} \text{ &c.}$$

Hîc d, e, f, g ſignificant quaſvis datas quantitates, cum ſuis ſignis + & − affectas; z, axem vel baſem Curvæ; & n, $2n$, $\frac{1}{2}n-1$, $\frac{1}{2}n-1$, $n-1$, $2n-1$, indices poteſtatum vel dignitatum z, ſive ſint affirmativi vel negativi, ſive integri vel fracti: & ſingula bina theoremata ſunt duo primi termini ſerici in infinitum progredientis. In tertio & quarto, $4g$ debet eſſe non majus quàm ff, niſi e & g ſint contrarii ſigni. In cæteris nulla eſt limitatio. Horum aliqua (nempe, ſecundum, tertium, quartum, quintum, & decimum tertium) ex areis duarum conicarum ſectionum conjunctis conſtant. Alia quædam (ut nonum, decimum, & duodecimum) ſunt aliter ſatis compoſita. Et omnia quidem, in continuatione progreſſionum, citò evadunt compoſitiſſima; adeo ut vix per tranſmutationem figurarum, quibus Jacobus Gregorius & alii uſi ſunt, abſque ulteriori fundamento inveniri poſſe putem.

Ego quidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequam abſtraherem à contemplatione figurarum, & rem totam ad ſimplicem conſiderationem ſolarum ordinatim applicatarum reducerem. Sed, cùm hæc, & hiſce generaliora, ſint in poteſtate; non dubitabitur, credo, de binomialibus longè facilioribus, quæ in his continentur; & prodeunt, ponendo literam aliquam, e vel f vel g, $=0$; & $\eta=1$ vel 2; etſi ſeries, in quas iſta reſolvantur, non poſuerim in epiſtolâ priori, nedum fortè computaverim; intentus, non in omnia particularia enumeranda, ſed in illuſtrandam methodum per unam & alteram, in ſingulis rerum generibus, inſtantiam; quæ ad oſtendendam ejus generalitatem ſufficere videbatur.

CÆTERUM hæc theoremata dant ſeries pluſquam uno modo. Nam primum, ſi ponatur $f=0$, & $\eta=1$, evadit $\frac{d}{e+gzz}$; unde prodit ſeries nobis communicata. Sed ſi ponatur $2eg=ff$, & $\eta=1$, inde tandem obtinemus Nº LX.

hanc

NEWTONI AD OLDEN.

hanc seriem * $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$ &c. pro longitudine quadrantalis arcûs, cujus chorda est unitas: vel, quod perinde est, hanc $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}-\frac{1}{63}+\frac{1}{143}-\frac{1}{255}$ &c. pro longitudine dimidii ejus. Et has fortè, quia æquè simplices sunt ac alteræ, & magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æstimo. Illud enim melius quod utilius est, & problema minori labore solvit. Sic, quamvis hæc æquatio $x^3-x=1$ appareat simplicior hâcce, $yy-2y\sqrt{\frac{81}{25}}-\sqrt{20}=\sqrt{20}$; tamen in confesso est posteriorem reverâ simpliciorem esse; propterea quòd radicem ejus, y, geometra faciliùs eruit.

Et ob hanc rationem series pro obtinendis arcubus circuli, vel, quod eodem recidit, pro obtinendis sectoribus conicarum sectionum, pro optimis habeo, quæ componuntur ex potestatibus sinuum.

Nam siquis vellet per simplex computum hujus seriei $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ &c. colligere longitudinem quadrantis ad viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5 000 000 000 terminis seriei circiter; ad quorum calculum milleni anni requirerentur. Et res tardiùs obtineretur per tangentem 45 graduum. Sed, adhibito sinu recto 45 graduum, quinquaginta quinque vel sexaginta termini hujus seriei, $\sqrt{\frac{1}{2}}\times 1+\frac{1}{12}+\frac{3}{160}+\frac{5}{896}$ &c. sufficerent: quorum computatio tribus, ut opinor, vel quatuor diebus absolvi posset.

Et tamen hic non est optimus modus computandi totam peripheriam. Nam series ex sinu recto 30 graduum, vel sinu verso 60 graduum conflata, multo citiùs dabit arcum suum; cujus sextuplum, vel duodecuplum, est tota peripheria. Neque majori labore eruitur area totius circuli, ex segmento, cujus sagitta est quadrans diametri. Ejus computi specimen, siquidem ad manus est, visum fuit apponere; & unà adjungere aream hyperbolæ, quæ eodem calculo prodit.

Posito axe transverso $=1$, & sinu verso, seu segmenti sagittâ, $=x$; erit semi-segmentum $\left.\begin{matrix}\text{hyperbolæ}\\ \text{circuli}\end{matrix}\right\}=x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x+\frac{xx}{-5}-\frac{x^3}{28}+\frac{x^4}{-72}$ &c. Hæc autem series sic in infinitum producitur, sit $2x^{\frac{1}{2}}=a$; $\frac{ax}{2}=b$; $\frac{bx}{4}=c$; $\frac{3cx}{6}=d$; $\frac{5dx}{8}=e$; $\frac{7ex}{10}=f$; &c. Et erit semi-segmentum $\left.\begin{matrix}\text{hyperbolæ}\\ \text{circuli}\end{matrix}\right\}=\frac{a}{3}+\frac{b}{-5}+\frac{c}{7}+\frac{d}{-9}+\frac{e}{-11}+\frac{f}{-13}$ &c. Eorumque semi-summa $\frac{a}{3}-\frac{c}{7}-\frac{e}{11}-$ &c. & semi-differentia $\frac{b}{5}+\frac{d}{9}+\frac{f}{13}+$ &c. His ita præparatis; suppono $x=\frac{1}{4}$, quadrantem nempe axis; & prodit $a\left(=\frac{1}{2}\right)=0.25$; $b\left(=\frac{ax}{2}=\frac{0.25}{1\times 8}\right)=0.03125$; $c\left(=\frac{bx}{4}=\frac{0.03125}{4\times 8}\right)=0.001953125$; $d\left(=\frac{3cx}{6}=\frac{0.001953125}{8}\right)=0.000244140625$. Et sic procedo, usque dum venero ad terminum depressissimum, qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11, &c.

* D. Vicecomes Brounker hyperbolam per hanc seriem $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{7\times 8}+$ &c. id est

&c. respectivè divisos, dispono in duas tabulas: ambiguos cum primo in unam; & negativos in aliam; & addo, ut hîc vides,

BURGUM POSTERIOR.

0.083333333333333	0.000279017857142 9
625000000000	34679066051
27126736111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	
1	
0.089610988564661 8	0.000282571938957 5

Tunc à priori summâ aufero posteriorem; & restat 0.089328416624 57043 area semi-segmenti hyperbolici. Addo etiam eas summas, & aggregatum aufero à primo termino duplicato, 0.166666666666666; & restat 0.076773106163 0473 area semi-segmenti circularis. Huic addo triangulum istud, quo completur in sectorem, hoc est $\frac{1}{12}\sqrt{3}$, seu 0.054126587736527 4; & habeo sectorem 60 graduum, 0.130899693899574 7; cujus sextuplum, 0.785398103397448 2, est area totius circuli: quæ divisa per $\frac{1}{4}$, sive quadrantem diametri, dat totam peripheriam 3.141592653589792 8. Si alias artes adhibuissem; potui, per eundem numerum terminorum seriei, pervenisse ad multo plura loca figurarum, puta viginti quinque, aut amplius: sed animus fuit hîc ostendere, quid, per simplex seriei computum, præstari posset. Quod sane haud difficile est; cùm in omni opere multiplicatores ac divisores, magnâ ex parte, non majores quàm 11, & nunquam majores quàm 41, adhibere opus sit.

Per seriem Leibnitii etiam, si ultimo loco dimidium termini adjiciatur, & alia quædam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras. Ut & ponendo summam terminorum $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{27}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}+\frac{1}{33}$ &c. esse ad totam seriem $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+$ &c. ut $1+\sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus usus videtur esse, quando vel conjungitur eum duabus aliis persimilibus, & citissimè convergentibus, seriebus; vel sola adhibetur ad computandum arcum 30 graduum, posità tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim series illa evadit $1-\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{5\times 9}-\frac{1}{7\times 27}+\frac{1}{9\times 81}$ &c. quæ cito convergit. Vel, si conjunges cum aliis seriebus, pone circuli diametrum $=1$, & $x=\frac{1}{4}$; & area totius circuli erit summa harum trium serierum $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\frac{a^9}{9}-\frac{a^{11}}{11}+$ &c. $\frac{aa}{1}+\frac{a^5}{3}-\frac{a^9}{5}-\frac{a^{11}}{7}+\frac{a^{15}}{9}+\frac{a^{17}}{11}$ &c. $\frac{a^4}{1}-\frac{a^{10}}{3}+\frac{a^{16}}{5}-\frac{a^{22}}{7}+\frac{a^{28}}{9}$ &c.

est per hanc $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+$ &c. (conjunctis binis terminis) primus omnium quadravit. Mercator hanc quadraturam aliter demonstravit. Gregorius communicavit hanc seriem pro circulo $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ &c. & Newtonus hanc $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+$ &c.

Hîc

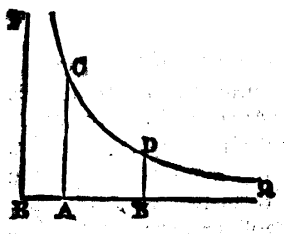
NEWTONI AD OLDEN-

Hîc conſideravimus ſeries, quatenus adhibentur ad computandum totum circulum. Sed quando computandæ ſunt partes ejus, tunc quælibet ſeries habet proprium uſum, & in ſuo genere optima eſt. Si datur tangens ſatis parva, vel ſatis magna; non recurrendum erit ad ſinum aliquem ut inde computetur arcus, neque vice verſâ. Series, dato congruens, eſt æquatio pro ſolvendo proprio problemate.

N° LXI.

Credo Cl. Leibnitium, dum poſuit ſeriem pro determinatione coſinûs ex arcu dato, vix animadvertiſſe ſeriem meam pro determinatione ſinûs verſi ex eodem arcu; ſiquidem hæc idem ſunt.

Neque obſervâſſe videtur morem meum generaliter uſurpandi literas, pro quantitatibus cum ſignis ſuis, + & −, affectis, dum dividit hanc ſeriem $\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+$ &c. Nam cùm area hyperbolica AD, hîc ſignificata per z, ſit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex unâ vel alterâ parte ordinatim applicatæ AC; ſi area illa in numeris data ſit l, & l ſubſtituatur in ſerie pro z, orietur vel $\frac{l}{b}+\frac{ll}{2abb}+\frac{l^3}{6aab^3}+\frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c. vel $-\frac{l}{b}+\frac{ll}{2abb}-\frac{l^3}{6aab^3}+\frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c; prout l ſit affirmativa vel negativa.



Hoc eſt poſito $a=1=b$, & l logarithmo hyperbolico; numerus, ei correſpondens, erit $1+\frac{l}{1}+\frac{ll}{2}+\frac{l^3}{6}+\frac{l^4}{24}$ &c. ſi l ſit affirmativus; & $1-\frac{l}{1}+\frac{ll}{2}-\frac{l^3}{6}+\frac{l^4}{24}$ &c. ſi l ſit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem theorematum, quæ aliâs in nimiam molem creſcerent. Nam v. g. illud unicum theorema, quod ſuprà poſui pro quadraturâ Curvarum, reſolvendum eſſet in 32 theoremata, ſi pro ſignorum varietate multiplicaretur.

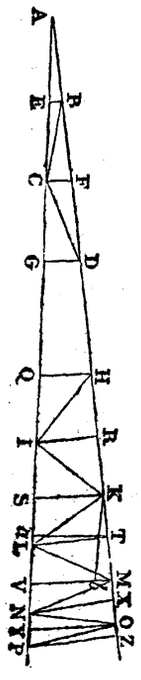
Præterea, quæ habet Vir Clariſſimus de inventione numeri, unitate majoris, per datum logarithmum hyperbolicum, ope ſeriei $\frac{l}{1}-\frac{ll}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}-\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}+$ &c. potius quàm ope ſeriei $\frac{l}{1}+\frac{ll}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. nondum percipio. Nam ſi unus terminus adjiciatur amplius ad ſeriem poſteriorem, quàm ad priorem, poſterior magis appropinquabit. Et certè minor eſt labor, computare unam, vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quàm dividere unitatem per numerum prodeuntem ex logarithmo hyperbolico, ad multa figurarum loca extenſum, ut inde habeatur numerus quæſitus unitate major. Utraque igitur ſeries, ſi duas dicere fas ſit, officio ſuo fungatur. Poteſt tamen $\frac{l}{1}+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\frac{l^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. ſeries, ex dimidiâ parte terminorum conſtans, optimè adhiberi; ſiquidem hæc dabit ſemi-differentiam duorum numerorum, ex quâ, & rectangulo dato, uterque datur. Sic & ex ſerie $1+\frac{ll}{1\times2}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. datur ſemi-ſumma numerorum,

rum, indeque etiam numeri. Unde prodit relatio ſerierum inter ſe, quâ, ex unâ datâ, dabitur altera. BURCHII POSTERIOR.

Theorema de inventione arcûs ex dato coſinu, ponendo radium 1, coſinum c, & arcum $\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$, minus appropinquat, quàm primâ fronte videtur. Poſito quidem ſinu verſo v, error erit $\frac{v^3}{90}+\frac{v^4}{194}+$ &c. Poteſt fieri ut $120-27v$ ad $120-17v$, ita chorda $(\sqrt{2v})$ ad arcum; & error erit tantùm $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$ circiter; qui ſemper minor eſt quàm $5\frac{1}{4}$ minuta ſecunda, dum arcus non ſit major quàm 45 grad. Et ſingulis etiam biſectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1\times2\times3}-\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. applicari poſſet ad computationem tabulæ ſegmentorum, ut obſervat Vir Clariſſimus. Sed res optimè abſolvitur per canonem ſinuum. Utpote, cognitâ quadrantis areâ, per continuam additionem nonæ partis ejus, habebis ſectores ad ſingulos decem gradus in ſemicirculo: deinde, per continuam additionem decimæ partis hujus, habebis ſectores ad gradus; & ſic ad decimas partes graduum, & ultrà, procedi poteſt. Tunc, radio exiſtente 1, ab unoquoque ſectore, & ejus complemento ad 180 gradus, aufer dimidium communis ſinûs recti, & relinquentur ſegmenta in tabulam referenda. Cæterùm quamvis ſeries hîc non proſint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum uſum ſpectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Conſtructionem logarithmorum non aliunde peti debere, credetis fortè ex hoc ſimplici proceſſu, qui ab iſtis pendet. Per methodum ſuprà traditam quærantur logarithmi hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02: id quod fit ſpatio unius & alterius horæ. Dein, diviſis logarithmis quatuor poſteriorum per logarithmum numeri 10, & addito indice 2, prodibunt veri logarithmi numerorum 89, 99, 100, 101, 102, in tabulam referendi. Hi per dena intervalla interpolandi ſunt; & exibunt logarithmi omnium numerorum inter 980 & 10.0: & omnibus inter 980 & 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur tabula eatenus conſtructa. Tunc ex his colligendi erunt logarithmi omnium primorum numerorum, & eorum multiplicium, minorum quàm 100: ad quod nihil requiritur, præter additionem & ſubtractionem. Siquidem fit $\sqrt[10]{\frac{9984\times1020}{9945}}=2$. $\sqrt[4]{\frac{8\times9963}{984}}=3$. $\frac{10}{2}=5$. $\sqrt{\frac{98}{2}}=7$. $\frac{99}{9}=11$. $\frac{1001}{7\times11}=13$. $\frac{102}{6}=17$. $\frac{988}{4\times13}=19$. $\frac{9936}{16\times27}=23$. $\frac{986}{2\times17}=29$. $\frac{992}{32}=31$. $\frac{999}{27}=37$. $\frac{984}{24}=41$. $\frac{989}{23}=43$. $\frac{987}{21}=47$. $\frac{9911}{11\times17}=53$. $\frac{9971}{13\times13}=59$. $\frac{9882}{2\times81}=61$. $\frac{9949}{3\times49}=67$. $\frac{994}{14}=71$. $\frac{9928}{8\times17}=73$. $\frac{9954}{7\times18}=79$. $\frac{996}{12}=83$. $\frac{9968}{7\times16}=98$. $\frac{9894}{6\times17}=97$. Et habitis ſic logarithmis omnium numerorum minorum quàm 100; reſtat tantùm hos etiam, ſemel atque iterum, per dena intervalla interpolare. N° LXII.



Conſtructionis tabulæ ſinuum, à quâ pendet tota res trigonometrica, fundamentum optimum eſt continua additio dati anguli ad ſeipſum, vel ad alium datum. Utpote in angulo addendo BAE; inſcribantur HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, &c. æquales radio AB: & ad oppoſita latera demittantur perpendiculares, BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. Et angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, &c. differentiæ erunt angulus A; ſinus HQ, IR, KS, &c; & coſinus IQ, KR, LS, &c. Detur jam aliquis eorum LMK, & cæteri ſic eruentur. Ad SV & MV demitte perpendicula, Ta & Kb; & (propter ſimilia triangula ABE, TLa, KMb, ALT, AMV, &c.) erit AB.BE :: TL.La $(=\frac{SL-LV}{2})$ :: KT $(=\frac{1}{2}KM)$.$\frac{1}{2}Mb$ $(=\frac{MV-KS}{2})$. Et AB.AE :: KT.Sa $(=\frac{SL+LV}{2})$ :: TL.Ta $(=\frac{KS+MV}{2})$. Unde dantur ſinus & coſinus KS, MV, SL, LV. Et ſimul patet ratio continuandi progreſſiones. Nempe AB.2AE :: LV.TM + MX :: MX.VN + NY &c. :: MV.TL + XN :: XN.MV + OY &c. Vel AB.2BE :: LV.XN − TL :: MV.TM − MX :: MX.OY − MV :: XN.VN − NY &c. Et retro, AB.2AE :: LS.KT + RK &c. Pone ergo AB = 1; & fac BE × TL = La; AE × KT = Sa; $Sa - La$ = LV; $\overline{2AE \times LV} - TM = MX$ &c. Sed nodus eſt inventio ſinûs & coſinûs anguli A. Et hîc ſubveniunt ſeries noſtræ. Utpote cognitâ, ex ſuperioribus, quadrantalis arcûs longitudine 1.57079 &c; & ſimul quadrato ejus, 2.4694 &c; divide quadratum hoc per quadratum numeri exprimentis rationem 90 graduum ad angulum A: &, quoto dicto z, tres vel quatuor termini hujus ſeriei, $1 - \frac{z}{2} + \frac{zz}{24} - \frac{z^3}{720} + \frac{z^4}{40320}$ &c. dabunt coſinum iſtius anguli A. Sic primò quæri poteſt angulus 5 graduum, & inde tabula computari ad quinos gradus; ac deinde interpolari ad gradus, vel dimidios gradus, per eandem methodum. Nam non convenit progredi per nimios ſaltus. Duæ tertiæ partes tabulæ, ſic computatæ, dant reliquam tertiam partem per additionem vel ſubtractionem, more noto. Siquidem poſito KT coſinu 60 graduum; fit AE = SV, & BE = Mb. Tunc ad decimas & centeſimas partes graduum pergendum eſt per aliam methodum; ſubſtitutis tamen prius logarithmis ſinuum inventorum, ſi ejus generis tabula deſideretur.

Ad computum tabularum aſtronomicarum Kepleri; poſui fundamentum aliquod in alterâ epiſtolâ. Ejus ſeriei tres primi termini, & aliquando duo, ſufficiunt. Sed ad diverſas partes ellipſeos diverſæ ejuſmodi ſeries aptari debent. Vel potius tales ſeries computandæ ſunt, quæ ex datâ areâ ſectoris elliptici BGE, immediatè exhibeant aream ſectoris circuli, cujus angulus eſt BEG, radius CB. Et habitis hiſce, computum earum ad duos, tres, aut fortè quatuor terminos, beneficio logarithmorum, haud gravius erit, quàm ſolita reſolutio tot triangulorum in aliis hypotheſibus: imo fortè minus grave, ſi ſeries prius debitè concinnentur; ſiquidem unus logarithmus, è tabulâ

tabulâ petitus, determinet omnes iſtos terminos, addendo ipſum, & ejus multiplices, ad logarithmos datarum coefficientium in promptu habitos. BURGUM POSTERIOR.

Quæ de hoc genere tabularum dicuntur, ad alias transferri poſſunt, ubi ratiocinia geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has ſeries computare triginta, vel viginti, aut fortè pauciores terminos tabulæ in debitis diſtantiis; ſiquidem termini intermedii facilè interſeruntur per methodum quandam, quam in uſum calculatorum ferè hîc deſcripſiſſem. Sed pergo ad alia.

Quæ Cl. Leibnitius à me deſiderat explicanda, ex parte ſuprà deſcripſi. Nº LXIII. Quod verò attinet ad inventionem terminorum p, q, r, in extractione radicis affectæ: primum, p, ſic eruo. Deſcripto angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo, diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia parallelogramma vel quadrata; quæ concipio de-



Fig. 1.

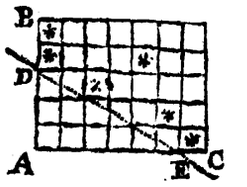


Fig. 2.

nominata eſſe à dimenſionibus duarum indefinitarum ſpecierum, puta x & y, regulariter aſcendentium à termino A; prout vides in fig. 1. inſcriptas. Ubi y denotat radicem extrahendam; & x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus poteſtatibus ſeries conficienda eſt. Deinde, cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma, ſingulis ejus terminis correſpondentia, inſignio notâ aliquâ: & regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis parallelogrammis applicatâ (quorum unum ſit humillimum in columna ſiniſtrâ juxtâ AB, & alia ad regulam dextrorſum ſita, cæteraque omnia non contingentia regulam ſuprà eam jaceant) ſeligo terminos æquationis per parallelogramma, contingentia regulam, deſignatos; & inde quæro quantitatem quotienti addendam.

Sic ad extrahendam radicem y, ex $y^6 - 5xy^4 + \frac{x^2}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma, hujus terminis reſpondentia, ſigno notâ aliquâ *; ut vides fig 2. Dein applico regulam, DE, ad inferiorem è locis ſignatis in ſiniſtrâ columnâ; eamque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio, donec alium ſimiliter, vel fortè plura, è reliquis ſignatis locis cœperit attingere. Videoque loca ſic attacta eſſe x^3, $xxyy$ & y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxyy + 6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& inſuper ſi placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$: quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout è radicibus quampiam extrahere decretum eſt.

NEWTONI AD OLDEN-

Sic * æquatio $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, quam reſolvebam in priori epiſtolâ, dat $-2a^3+aay+y^3=0$; & inde $y=a$ proximè. Cùm itaque a ſit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & ſubſtituo $a+p=y$. (Obvenient hîc aliquando difficultates nonnullæ; ſed ex iis, credo, D. Leibnitius ſe proprio marte extricabit.) Subſequentes verò termini, q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus ſecundis, tertiis, cæteriſque eruuntur, quo primus p è primâ; ſed curâ leviori; quia cæteri valores y ſolent prodire, dividendo terminum involventem infimam poteſtatem indefinitæ quantitatis, x, per coefficientem radicis p, q, r aut s.

N° LXIV.

Intellexti credo, ex ſuperioribus, regreſſionem, ab areis Curvarum ad lineas rectas, fieri per hanc extractionem radicis affectæ. Sed duo alii ſunt modo, quibus idem perficio.

Eorum unus affinis eſt computationibus, quibus colligebam approximationes ſub finem alterius epiſtolæ, & intelligi poteſt per hoc exemplum. Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ $z=x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c. Et partibus ejus multiplicatis in ſe, emerget $z^2=x^2+x^3+\frac{11}{12}x^4+\frac{5}{6}x^5$ &c. $z^3=x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5$ &c. $z^4=x^4+2x^5$ &c. $z^5=x^5$ &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}z^2$, & reſtat $z-\frac{1}{2}z^2=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{24}x^4-\frac{13}{60}x^5$ &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3=x+\frac{1}{24}x^4+\frac{3}{40}x^5$ &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & reſtat $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4=x-\frac{1}{120}x^5$ &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5=x$ quamproximè; ſive $x=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$ &c.

Eodem modo ſeries de unâ indefinitâ quantitate in aliam transferri poſſunt. Quemadmodum ſi poſito r radio circuli, x ſinu recto arcûs z, & $x+\frac{x^3}{6rr}+\frac{3x^5}{40r^4}$ &c. longitudine arcûs iſtius; hanc ſeriem à ſinu recto ad tangentem vellem transferre: quæro longitudinem tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam ſeriem $x+\frac{x^3}{2rr}+\frac{3x^5}{8\times 4}$ &c. Vocetur hæc quantitas t. Colligo poteſtates ejus; $t^3=x^3+\frac{3x^5}{2rr}$ &c; $t^5=x^5+$ &c. Aufero autem t de z; &, ponendo 1 pro r, reſtat $z-t=-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{10}$ &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z-t+\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{5}x^5+$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z-t+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5=0$ quamproximè. Quare eſt $z=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-$ &c. Sed ſiquis in uſus trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem arcûs per tangentem; eam, non hoc circuitu, ſed directâ methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus computi colliguntur etiam ſeries, ex duabus, vel pluribus, indefinitis quantitatibus conſtantes; & radices affectarum æquationum magnâ ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potius methodum in alterâ epiſtolâ deſcriptam, tanquam generaliorem, &, regulis

* Hanc Reſolutionem, vid. N° VII.

† Id eſt, *Una methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in aſſumptione ſerici, pro quantitate quâlibet incognitâ, ex quâ cætera commodè derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis, ad eruendos terminos aſſumptæ ſeriei.* Analyſin inverſam, per fluentes & earum momenta, in æquationibus tam infinitis quàm finitis, Newtonus in his epiſtolis ad regulas quatuor reduxit. Per primam extrahitur fluens ex binomiis,

gulis pro eliſione ſuperfluorum terminorum habitis, paulo magis expeditam. BURGUM POSTERIOR.

Pro regreſſione verò ab areis ad lineas rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi theoremata adhiberi.

Theorema 1. Sit $z=ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5$ &c. Et vicim erit $y=\frac{z}{a}-\frac{b}{a^3}z^2+\frac{2bb-ac}{a^5}z^3+\frac{5abc-5b^3-aad}{a^7}z^4+\frac{3aacc-21abbc+6aabd+14b^4-a^3e}{a^9}z^5$ &c.

Exempli gratiâ. Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ, $z=y-\frac{yy}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}$ &c. Et ſubſtitutis in regulâ 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+$ &c.

Theor. 2. Sit $z=ay+by^2+cy^5+dy^7+ey^9+$ &c. Et viciſſim erit $y=\frac{z}{a}-\frac{b}{a^4}z^3+\frac{3bb-ac}{a^7}z^5+\frac{8abc-aad-12b^3}{a^{10}}z^7+\frac{55b^4-55abbc+10aabd+5aacc-a^3e}{a^{13}}z^9$ &c.

Exempli gratiâ. Proponatur æquatio ad arcum circuli, $z=y+\frac{y^3}{6rr}+\frac{3y^5}{40r^4}+\frac{5y^7}{112r^6}$ &c. Et ſubſtitutis in regulâ 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d, &c; orietur $y=z-\frac{z^3}{6rr}+\frac{z^5}{120r^4}-\frac{z^7}{5040r^6}+$ &c.

Alterum modum regrediendi ab areis ad lineas rectas celare ſtatui.

Ubi dixi, omnia pene problemata ſolubilia exiſtere; volui de iis præſertim intelligi, circa quæ Mathematici ſe hactenus occupârunt, vel ſaltem in quibus ratiocinia mathematica locum aliquem obtinere poſſunt. Nam alia ſane, adeo perplexis conditionibus implicata, excogitare liceat, ut non ſatis comprehendere valeamus; & multo minus tantarum computationum onus ſuſtinere, quod iſta requirerent.

Attamen, ne nimium dixiſſe videar, inverſa de tangentibus problemata ſunt in poteſtate; aliaque illis difficiliora. Ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici methodo; unâ concinniori, alterâ generaliori. Utramque viſum eſt impræſentia literis tranſpoſitis conſignare; ne, propter alios idem obtinentes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer. † *5accdæ10effh12i4l3m10n6oqqr7s11t10v3x: 11ab3cdd10eæg10ill4m7n6o3p3q6r5s11t7vx, 3acæ4egh6i4l4m5n8oq4r3s6t4v, aaddæeeeeeiiimmnnooprrrsssstuu.*

Inverſum hoc problema de tangentibus, quando tangens inter punctum contactûs & axem figuræ eſt datæ longitudinis, non indiget his methodis. Eſt tamen Curva illa mechanica, cujus determinatio pendet ab areâ hyperbolæ.

Ejuſdem generis eſt etiam problema, quando pars axis, inter tangentem & ordinatim applicatam, datur longitudine.

nomiis, adeoque ex æquationibus quibuſcunque non affectis, in ſerie infinitâ; & momentum fluentis ſimul prodit, quo evaneſcente, ſeries in æquationem finitam redit. Per ſecundam, extrahitur fluens ex æquationibus affectis fluxionem non involventibus. Per tertiam, extrahitur fluens ex æquationibus affectis fluxionem ſimul involventibus. Per quartam, eruitur fluens ex conditionibus problematis. Regulæ duæ primæ in principio epiſtolæ ſuperioris, duæ ultimæ in fine hujus ponuntur. Harum regularum Newtonum eſſe inventorem primum, nemo dubitat.

Sed

Sed hos casus vix numeraverim inter ludos naturæ. Nam quando in triangulo rectangulo, quod ab illâ axis parte, & tangente, ac ordinatim applicatâ constituitur, relatio duorum quorumlibet laterum, per æquationem quamlibet, definitur; problema solvi potest absque meâ methodo generali: sed ubi pars axis, ad punctum aliquod positione datum terminata, ingreditur vinculum; tunc res aliter se habere solet.

Communicatio resolutionis affectarum æquationum, per methodum Leibnitii, pergrata erit; juxta & explicatio quomodo se gerat, ubi indices potestatum sunt fractiones; ut in hâc æquatione: $2o + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{2}} = 0$, aut surdæ * quantitates; ut in hâc, $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}|^{\sqrt{\frac{1}{3}}} = y$: ubi $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$ non designant coefficientes ipsius x, sed indices potestatum, seu dignitatum ejus; & $\sqrt{\frac{1}{3}}$ indicem dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, meâ methodo patet; aliter descripsissem.

Sed meta tandem prolixæ huic epistolæ ponenda est. Literæ sane excellentissimi Leibnitii valdè dignæ erant, quibus fusius hoc responsum darem. Et volui hâc vice copiosior esse, quia credidi amœniora tua negotia, severiori hoc scribendi genere, non debere à me crebro interpellari.

N° LXV. *Excerpta ex epistolâ D.* Collins *ad D.* Newtonum, Londini, 5 Martii 1677 *datâ. Integra autem extat impressa in tomo tertio Operum D.* Wallisii *pag.* 646, *&c.*

Clarissime Vir,

Aderat hîc D. Leibnitius per unam septimanam, in mense Octobris; in reditu suo ad ducem Hanoveræ; cujus literis revocatus erat, in ordine ad quandam promotionem.

Dixit Leibnitius, se posse & velle consilia impertire, pro obtinendis seriebus, absque speciosâ extractione radicum æquationum affectarum; modò quis velit laborem illum obire.

Et consequenter ad hoc, postquam ego D. Bakerum ipsi nominaveram, literis ejus ad D. Oldenburgium, datis Amstelodami, $\frac{13}{23}$ Novemb. 1676, hæc scribit.

'D. Collinio hæc quæso communica. Dixit ille mihi D. Bakerum, 'doctum admodum & industrium apud vos analyticum, utilibus consiliis 'exequendis parem esse. Elegi ego unum præ reliquis utile & facile. 'Nimirum, methodus tangentium, à Slusio publicata, nondum rei fastigium tenet. Potest aliquid amplius præstari in eo genere; quod maximi 'foret usûs ad omnis generis problemata: etiam ad meam (sine extractionibus) æquationum ad series reductionem. Nimirum, posset brevis quædam calculari circa tangentes tabula, eousque continuanda, donec progressio tabulæ apparet; ut eam scilicet quisque, quousque libuerit, sine 'calculo continuare possit.

* Surdos indices D. Leibnitius in epistolâ sequente mutavit in fluentes; & inde natus est calculus exponentialis.

'Amstelodami

'Amstelodami cum Huddenio locutus sum; cui negotia civilia tempus 'omne eripiunt. Est enim ex numero duodecem urbis Consulum, qui 'subinde imperium obtinent: nuper Consul regens erat; nunc Thesaurarii 'munus exercet. Præclara admodum in ejus schedis supereſſe, certum est. 'Methodus tangentium, à Slusio publicata, dudum illi fuit nota. Amplior 'ejus methodus est, quàm quæ à Slusio fuit publicata. Sed & quadratura 'hyperbolæ Mercatoris ipsi, jam anno 1662, innotuit. Hactenus Leibnitius.'

P. S. Exemplar epistolæ tuæ, quatuor schedarum, nondum est ad D. Leibnitium missum: sed, intra septimanam, est quidam hinc profecturus Hanoveram, qui tum illud, tum libros quosdam laturus est.

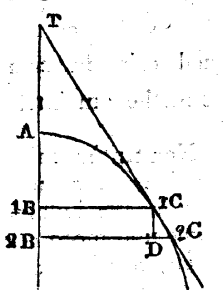
Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 21 Junii 1677, *data cum D.* Newtono *communicanda. Cujus extat & autographum, & exemplar manu D.* Collins *descriptum.* N° LXVI.

Amplissime Domine,

Accepi literas tuas diu expectatas, cum inclusis Newtonianis sane pulcherrimis; quas plus semel legam cum curâ & meditatione; quibus certè non minus dignæ sunt, quàm indigent. Nunc pauca, quæ festinante oculo obeunti incidere, è vestigio annotabo.

Egregiè placet, quòd descripsit, quâ viâ in nonnulla sua elegantia sane theoremata inciderit. Et quæ de Wallisianis interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hâc ratione obtinetur harum interpolationum demonstratio; cùm res ea antea (quod sciam) solâ inductione niteretur; tametsi pars eorum per tangentes sit demonstrata.

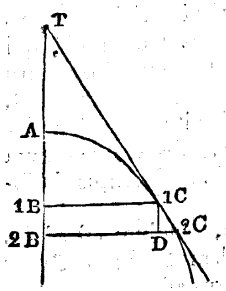
Clarissimi Slusii methodum tangentium nondum esse absolutam, celeberrimo Newtono assentior. Et jam à multo tempore † rem tangentium longè generaliùs tractavi; scilicet per differentias ordinatarum. Nempe TIB intervallum tangentis ab ordinatâ in axe sumptum, est ad IBIC ordinatam; ut ICD, differentia duarum abscissarum AIB, A2B, ad D2C, differentiam duarum ordinatarum IBIC, 2B2C. Nec refert, quem angulum faciunt ordinatæ ad axem. Unde patet, nihil aliud esse invenire tangentes, quàm invenire differentias ordinatarum, positis differentiis abscissarum (seu IB2B = ICD) si placet æqualibus. Hinc nominando ‡ in posterum dy differentiam duarum proximarum y (nempe AIB & A2B); & dx, seu D2C, differentiam duarum proximarum x (prioris IBIC, posterioris 2B2C); patet dy^2 esse $2ydy$; & dy^3 esse $3y^2dy$, &c. & ita porro. Nam sint duæ proximæ



† Idem fecit D. Barrow in ejus Lect. 10, anno 1669 impressâ, idque calculo consimili.

‡ Cœpit igitur D. Leibnitius, hoc ipso tempore, methodum differentialem cum amicis scripto communicare; lectis priùs, quæ Newtonus de hâc methodo in duabus epistolis scripserat; lectis fortean & aliis Newtonianis, sub finem anni 1676, ubi domum per Londinum rediit; quo tempore prælectiones Barrovii secum tulit.

sibi



ſibi (id eſt, differentiam habentes infinitè parvam) ſcilicet AIB $= y$; & A2B $= y + dy$. Quoniam ponimus dy^2 eſſe differentiam quadratorum ab his duabus rectis, æquatio erit $dy^2 = y^2 + 2ydy + dydy - y^2$. Seu omiſſis $y^2 - y^2$, quæ ſe deſtruunt; item omiſſo quadrato quantitatis infinitè parvæ, ob rationes ex methodo de Maximis & Minimis notas; erit $dy^2 = 2ydy$. * Idemque eſt de cæteris potentiis. Hinc etiam haberi poſſunt differentiæ quantitatum, ex diverſis indefinitis in ſe invicem ductis factarum: ut dyx erit $= ydx + xdy$; & $dy^2x = 2xydy + y\,dx$. Hinc ſi æquatio $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2$ &c. $= 0$; ſtatim habetur tangens Curvæ, ad quam eſt iſta æquatio. Nam ponendo AB $= y$, & A2B $= y + dy$ (ſcilicet, quia 1B2B ſeu 1CD $= dy$) itemque ponendo 1B1C $= x$, & 2B2C $= x + dx$ (ſcilicet quia 2CD $= dx$): et, quia eadem æquatio exprimit quoque relationem inter A2B & 2B2C, quæ eam exprimebat inter AIB & 1B1C; † tunc in æquatione illâ pro y & x ſubſtituendo $y + dy$, & $x + dx$, fiet

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrr} a+by & +cx & +dyx & +ey^2 & +fx^2 & +gy^2x & +hyx^2 & \text{&c.} \\ \hline bdy+cdx & +dydx & +2eydy & +2fxdx & +2gxydy & +2hxydx & \text{&c.} \\ & +dxdy & & & +gy^2dx & +hx^2dy & \text{&c.} \\ \hline & & +ddxdy & +edydy & +fdxdx & +gxdydy & +bydxdx & \\ & & & & & +2gydydx & +2hxdxdy & \text{&c.} \\ & & & & & +gdxdydy & +hdydxdx & \text{&c.} \end{array}\right\} = 0.$$

d eſt quantitas communi more.
d eſt nota differentiæ.

Ubi, abjectis illis quæ ſunt ſupra primam lineam, quippe nihilo æqualibus per æquationem præcedentem; & abjectis illis quæ ſunt infra ſecundam, quia in illis duæ infinitè parvæ in ſe invicem ducuntur; hinc reſtabit tantùm æquatio hæc, $bdy + cdx + dydx + dxdy = 0$; quicquid ſcilicet reperitur inter lineam primam & ſecundam. Et, mutatâ æquatione in rationem ſeu analogiam, fiet $-\frac{dy}{dx} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ &c.}}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 \text{ &c.}}$. Id eſt (quia $-\frac{dy}{dx}$ ſeu $\frac{-1B2B, \text{ ſeu } -1CD}{D2C} = -\frac{T1B}{1B2C}$) erit $\frac{c+dy \text{ &c.}}{b+dx \text{ &c.}} = -\frac{T1B}{1B1C}$. Quod coincidit cum regulâ Sluſianâ; oſtenditque eam ſtatim occurrere hanc methodum intelligenti.

Sed methodus ipſa (priore) noſtrâ longe eſt amplior. Non tantùm enim exhiberi poteſt, cùm plures ſunt literæ indeterminatæ quàm y & x (quod ſæpe fit maximo cum fructu); ſed & tunc utilis eſt, cùm interveniunt irrationales; quippe quæ eam nullo morantur modo: neque ullo modo neceſſe eſt irrationales tolli, quod in methodo Sluſii neceſſe eſt, & calculi difficultatem in immenſum auget.

* Id eſt, ſi ſecundus terminus binomii ſit differentia primi termini; ſecundus terminus potentiæ binomii erit differentia potentiæ. Hoc eſt fundamentum methodi differentialis à Leibnitio jam poſitum. Et hoc idem fundamentum methodi ſuæ Newtonus anno 1669 poſuerat in analyſi ſuprà impreſſâ, N° XII. Perſimilibus calculis, Newtonus momenta, & Leibnitius differentias collegerunt; & diſcrepant ſolùm in retum nominibus.

Quod

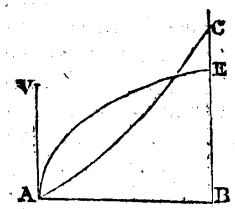
Quod ut appareat, tantùm utile erit in irrationalitatibus ſimplicioribus rem explanare. Et primum ſit in ſimpliciſſimis generaliter. Si ſit aliqua potentia aut radix x^z; erit $dx^z = zx^{z-1}dx$.

Si z ſit $\frac{1}{2}$, ſeu ſi x^z ſit $\sqrt{x}$, erit dx^z, ſeu hoc loco $d\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ ſeu $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; ut notum, aut facilè demonſtrabile.

Sit jam binomium; ut $\sqrt{}^3 : \overline{a + by + cy^2}$ &c.: quæritur $d\sqrt{}^1 : \overline{a + by + cy^2}$ &c. ſeu dx^z, poſito $\frac{1}{3} = z$, & $a + by + cy^2$ &c. $= x$. Eſt autem $dx = bdy + 2cydy$ &c. Ergo dx^z, ſeu $\frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{bdy + 2cydy \text{ &c.}}{3 \times \overline{a + by + cy^2 \text{ &c.}}^{\frac{2}{3}}}$. Eadem methodus adhiberi poteſt, etſi radices in radicibus implicentur. Hinc ſi detur æquatio valdè intricata, ut $a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt{}^3 : 1 + y} + hx^2y\sqrt{y^2 + y\sqrt{1 - y}} = 0$, ad aliquam Curvam cujus abſciſſa ſit y (AB) ordinata x (BC); tunc æquatio proveniens utilis ad inveniendam tangentem TC, ſtatim ſine calculo ſcribi poterit; & erit hæc $bdx\sqrt{y^2 + b\sqrt{}^3 : 1 + y} + \frac{bx}{2\sqrt{y^2 + b\sqrt{1+y}}} \times 2ydy + \frac{bdy}{3 \times \overline{1+y}^{\frac{2}{3}}} + hx^2dy + 2hxydx \times \sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} + \frac{hyx^2}{2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}}} \times 2ydy + dy\sqrt{1-y} - \frac{ydy}{2\sqrt{1-y}} = 0$. Seu, mutando quotientem hanc inventam in analogiam, erit $-dy$ ad dx, ſeu T1B ad 1B1C, ut omnes provenientis æquationis termini, per dx multiplicati, ad omnes ejuſdem terminos per dy multiplicatos.

Ubi ſane mirum & maximè commodum evenit, quòd dy & dx ſemper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem Sluſianâ omnes ordine irrationales tollendas eſſe, nemo non videt.

Arbitror, quæ celare voluit Newtonus de tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento ‡ quadraturas quoque reddi faciliores, me in ſententiâ hâc confirmat. Nimirum ſemper figuræ illæ ſunt quadrabiles, quæ ſunt ad æquationem differentialem. Æquationem differentialem voco talem, quâ valor ipſius dx exprimitur, quæque ex aliâ derivata eſt, quâ valor ipſius x exprimebatur. Exempli gratiâ: ſit AB $= y$. EB $= x$ ponatur $\frac{b + cy + dy^2 + ey^3 \text{ &c.}}{2\sqrt{1 + by + \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{3}dy^3 + \frac{1}{4}ey^4 \text{ &c.}}}$. Quæritur quadratura figuræ ABEA; quanquam fortè ſæpe tale trilineum non ſit proditurum, quale hoc ſchemate depinximus. Deſcribatur alia Curva AC, talis ut BC [quæ] ſit $\sqrt{1 + by + \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{3}dy^3 + \frac{1}{4}ey^4}$ &c. [ipſius ordinatam] ſignificet; & rectangulum ſub rectâ AV, repræſentante unitatem conſtructionis, & ſub ordinatâ novâ BC, æquabitur figuræ ABEA. Ejuſmodi theoremata condi poſſunt infinita: imo pleraque ſub ge-



† Calculus etiam, in his exemplis allatus, à calculo Newtoniano in ſolis notarum formulis differt; ſed notis minùs aptis obſcurior redditur.

‡ Characteres methodi Newtoni Leibnitius hîc enumerat; & gaudet, ſe in methodum incidiſſe, cui characteres hi omnes competunt. Fatetur etiam Newtonum, intellexiſſe facilem quadraturam figurarum, quæ ſunt ad æquationem differentialem. Vel doceat, methodum aliam in rerum naturâ extare, cui characteres hi omnes competunt, vel deſinat negare, ſe in methodum Newtoni incidiſſe.

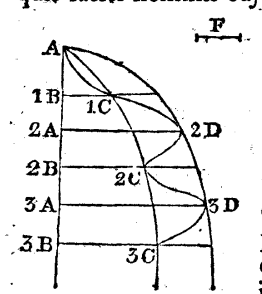
 neraliſſimis

neraliſſimis quibuſdam complecti. Licet nihil refert, ſive ſeries hæ producantur, ſive ubilibet finiantur. Unde patet hanc unicam regulam pro infinitis figuris quadrandis inſervire, diverſæ plane naturæ ab iis, quæ hactenus quadrari ſolebant.

Pulcherrimæ ſunt illæ ſeries Newtonianæ, quæ ex infinitis in finitas degenerant; qualis illa eſt, quam exhibet pro extractione radicum binomii, aut ejus quadraturâ. Quòd ſi in ipſius generali illâ æquationis affectæ indefinitæ extractione, cùm ſit $x = ay + by^2 + cy^3$ &c. & y fit $\frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3}$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3}$ &c: idem præſtari poſſet; ut ſcilicet, inter extrahendum radices ex æquationibus aut binomiis, invenire liceret radices rationales finitas, quando eæ inſunt, vel etiam irrationales: tunc dicerem, methodum ſerierum infinitarum ad ſummam perfectionem eſſe perductam.

Opus eſſet tamen præterea, diſcerni poſſe varias æquationis ejuſmodi radices: item neceſſe eſſet, ope ſerierum, diſcerni æquationes poſſibiles ab impoſſibilibus. Quòd ſi hæc nobis obtinuerit vir in his ſtudiis maximus, atque effecerit ſcilicet, ut poſſimus ſeriem infinitam convertere in finitam, quando id fieri poteſt, aut ſaltem agnoſcere ex quânam finitâ ſit deducta: tunc in methodo ſerierum infinitarum, quæ diviſione & extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum reſtabit. Hæc, ſi quiſquam mortalium, certè Newtonus præſtare poterit. Eâdem credo operâ efficietur, ut, ex multis ſeriebus infinitis, poſſimus deligere maximè naturales; quales haud dubiè illæ erunt, quæ ita erunt comparatæ, ut, cùm fieri poteſt, atque opus eſt, degenerent in finitas. Atque ita egregiè apparebit, methodum extractionum per ſeries infinitas minimè indirectam, ſed maximè naturalem eſſe.

Problema eſt perelegans, cujus meminit, Curvam deſcribere, quæ per data quæcunque tranſeat puncta. Huddenius mihi Amſtelodami dixit, poſſe ſe Curvam deſcribere analyticam, ſeu certâ æquatione uniformi conſtantem, quæ facìei hominis cujuſdam noti lineamenta deſignet.



Cæterùm quærendum eſt, an hoc Newtonus intelligat de punctis infinitis; ut ſi ſit axis A1B2A2B3A &c. in infinitum productus; & duæ Curvæ datæ infinitæ analyticæ, una A1C2C3C &c. altera A2D3D &c; ſi ponamus A1B, 1B2A, 2A2B, 2B3A, &c. inter ſe & datæ cuidam quantitati F æquales: quæritur, an dari poſſit Curva analytica, ſeu æquationis capax, quæ, in infinitum producta, tranſeat (alternis) per puncta 1C, 2D, 2C, 3D, 3C, &c. Fermatius alicubi ſcribit, ſe methodum habere, per quam Curva inveniri poſſit, cujus proprietas ſpecifica data non pertineat

* Vid pag. 519, lin. 36, & pag. 522, lin. 14 & ſeq.

† Dixerat Newtonus, analyſin, beneficio æquationum infinitarum, ad omnia pene problemata ſese extendere (pag. 530, lin. 24.) Reſpondit Leibnitius, multa eſſe problemata uſque adeo ſcira & implexa, ut neque ab æquationibus pendeant, neque à quadraturis; qualia ſunt problemata methodi tangentium inverſæ, &c. pag. 538, 539. Reſcripſit Newtonus, *inverſa de tangentibus problemata eſſe in poteſtate, aliaque illis difficiliora; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe duplici methodo, &c.* pag.

pertineat ad unum punctum, ut vulgo fit; cùm ordinatæ referuntur ad partes axis; ſed ad duo quælibet ſimul, vel etiam ad tria quælibet ſimul, &c.

* Quæ de variis ſeriebus ſuis & noſtris examinandis, atque inter ſe comparandis, dicit Clariſſimus Newtonus; in ea me immergere non audeo, antequam in gratiam cum analyſi rediero: nam harum rerum veſtigia in animo meo prope non obliterata ſunt. Agnoſco interim, pulcherrima & utiliſſima ab eo annotari. Elegantiſſima & minimè expectata eſt via, quâ ſeriem meam $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ &c. deduxit ex ſuâ.

Quod ait, problemata methodi tangentium inverſæ, eſſe in poteſtate; hoc arbitror ab eo intelligi per ſeries ſcilicet infinitas. † Sed à me ita deſiderantur, ut Curvæ exhibeantur geometricè quatenus id fieri poteſt, ſuppoſitis (minimum) quadraturis. Exempli cauſâ. Cycloidem deprehendit Hugenius ſui ipſius evolutione deſcribi: difficile autem fuiſſet, credo, ſolvere hoc problema, invenire Curvam, quæ ſui ipſius evolutione deſcribitur. Neque refert, quòd curvæ deſcriptio quadraturam circuli ſupponit: et hoc problema etiam ex eorum eſt numero, quæ voco methodi tangentium inverſæ. Ita inter methodos tangentium inverſas generales eſt, invenire Curvam analyticam, cujus longitudines ſint areis datæ figuræ, curvâ analytica comprehenſæ, proportionales. Contrarium enim dudum poſſumus. Quod problema arbitror non eſſe inſolubile, & videtur non contemnendum: facilius enim eſt lineam, quàm ſpatium, organicè metiri. Et, reductâ ſpatiorum dimenſione ad dimenſionem linearum, ſolis filis in rectum extenſis mechanica fieri poterit conſtructio; & ſpatia poterunt in datâ ratione ſecari, inſtar linearum rectarum.

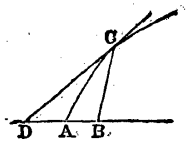
Cùm ait Newtonus, inveſtigationem Curvæ, quando tangens, vel inter- N° LXVIII.
vallum tangentis & ordinatæ in axe ſumptum, eſt recta conſtans, non indigere his methodis: innuit credo, ſe intelligere methodum tangentium inverſam generalem in poteſtate eſſe, per methodos ſerierum appropinquativas; in hoc vero caſu ſpeciali ‡ non opus eſſe ſeriebus. Ego vero methodum quærebam, quæ accuratè Curvam quæſitam exhibeat, ſaltem ex ſuppoſitis quadraturis; & cujus ope ejus æquationem, ſi quam habet, aut aliam primariam proprietatem poſſumus invenire.

Quod ait, problemata, in quibus datur relatio inter duo latera trianguli DBC, ſemper poſſe ſolvi: id verum eſt; at ex § meis quoque artibus fluit; ac

557. Leibnitius vero, ne quid à Newtono jam didiciſſe videretur, regerit ſolutionem à Newtono *intelligi per ſeries infinitas; ſed à ſe ita deſiderari, ut Curvæ exhibeantur geometricæ, quatenus id fieri poteſt.* In priore epiſtolâ negaverat analyſin Newtonianam, per æquationes infinitas, ad hæc problemata extendi. Jam negat ſe negâſſe; & verbis prioribus nubem obducit, quaſi inverſum illud problema ſuo ſenſu non ſolveretur, niſi Curvæ exhibeantur geometricè quatenus id fieri poteſt, & Curva, quæ ſui ipſius evolutione deſcribitur, inveniri poſſit per eandem ſolutionem.

‡ Hoc non dixit Newtonus, ſed perſpicuè dixit problema in hoc caſu non indigere methodis duabus generalibus, quas literis tranſpoſitis celaverat. Vide pag. 557.

§ Per artes ſuas intelligit methodum differentialem; ut patet ex calculis, quos ſubjungit. Ubi epiſtolam priorem ſcribebat, problema de Curvâ inveniendâ, in quâ intervallum tangentis & ordi-



ac ſæpe, ne quadraturis quidem accitis, ſimplici analyticâ æquatione præſtari poteſt. Ut, ſi BC poſitâ x, ſit DB $= bx + cx^2 + dx^3$; quæritur, qualiſnam ſit hæc Curva, quæ hanc tangentium habeat proprietatem: id eſt, quænam ſit æquatio relationem exprimens inter AB ſeu y, & BC ſeu x. Aio eam fore $y = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$. Si fuiſſet DB $= a + bx + cx^2$, opus fuiſſet quadraturâ hyperbolæ ad inveniendam Curvam quæſitam. Generaliter autem quomodocunque datur relatio inter duo ex lateribus trianguli (quod ego *Characteriſticum*, ob crebros uſus, vocare ſoleo) ſemper, ſuppoſitis quadraturis figurarum analyticarum, haberi poteſt Curva quæſita. Quod tamen neſcio, an præter Newtonum præſtiturus ſit quiſquam.

Meâ methodo, res unius lineolæ calculo peragitur, ac demonſtratur. Sed & rem infinitis caſibus præſtare poſſum, tametſi ipſa y, ſeu AB, ingrediatur in ipſius DB expreſſionem. Ut, ſi ſit DB $= bx + cx^2 + dx^3 + y$, fiet æquatio Curvæ $yx = bx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{3}dx^2$. [*Forte legendum*, DB $= b + cx + dx^2 - y$, *fiet æquatio Curvæ*, $yx = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$.] Itaque ſi habeatur valor ipſius DA, ex BC haberi poterit Curva.

Quod verò ait Cl. Newtonus *, non æquè rem procedere, ſi detur relatio ipſius DB ad partem axis, ſeu ad AB vel y, ad hoc reſpondeo; mihi æquè facile eſſe, invenire Curvæ naturam vel æquationem, ſi detur relatio ipſius DB ad AB, quàm ſi, ut ipſe requirit, detur relatio ad BC. Generalem verò methodum tangentium inverſam nondum, quod ſciam, habemus.

N° LXIX. Sunt & alia problematum genera, quæ hactenus in poteſtate non habeo; quorum ecce exempla. Sint duæ æquationes $x^y + y^x = xy$, & $x^x - y^y = x + y$. Duæ ſunt incognitæ x, y, duæque ad eas inveniendas æquationes; quæritur valor tam unius quàm alterius literæ. Talia problemata vel in numeris vel in lineis ſolvere, difficillimum arbitror; ſi tamen de appropinquationibus agatur, puto poſſe iis ſatisfieri. Si quam huic difficultati lucem afferre poteſt Newtonus, pro eâ quâ pollet ingenii vi, multum analyſim promovebit.

Analyſis quoque Diophantæa, ſeu ſolutio problematum in numeris rationalibus, nondum perfectionem nacta eſt.

Hæc annotavi feſtinans, atque inter legendum; ad reliqua majore otio opus eſt: interea celeberrimum Newtonum quæſo officioſiſſimè à me ſaluta, &, poſt actas maximas gratias, eum roga, ut communicet continuationem harum ſerierum; nempe poſita $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. ait fore $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5$ &c. Et ſi qua alia in

natæ, in axe ſumptum, ſit recta conſtans, vocabat ludum naturæ; & ejuſmodi problemata, mira & implexa, ab æquationibus pendere noluit. Reſpondebat Newtonus, hoc problema non eſſe ludum naturæ; ſed ubi datur relatio quævis inter ordinatam, & tangentem, & intervallum utriuſque, in axe ſumptum, ſemper poſſe ſolvi, idque abſque ſuâ methodo generali; nempe per fluxionum methodum ſimplicem, & quadraturam Curvarum. Jam reſcribit Leibnitius, *id verum eſſe, at ex ejus quoque artibus fluere* (id eſt ejuſmodi problemata ab æquationibus ſuis pendere) & triangulum DBC, *ob crebros uſus, characteriſticum vocat*, quaſi hæc ipſi dudum innotuiſſent. Hujuſmodi problemata ab æquationibus non pendere, anno ſuperiore ſcripſit: jam fluunt horum ſolutiones ex ejus artibus,

in promptu habet theoremata * nonnihil generalia; quoniam ad calculum contrahendum plurimum ſerviunt: quòd ſi eorum originem, ſive demonſtrationem, addet, tanto magis obligabit. Velim etiam noſſe, an per extractiones in ſeriebus diſcernere poſſit æquationes poſſibiles ab impoſſibilibus. Nam ſi generalis ejuſmodi extractio procederet, ſequeretur nullam æquationem fore impoſſibilem: item quomodo inveniat diverſas ejuſmodi æquationis radices, ita ut ex pluribus radicibus eam poſſit invenire, quam quærimus: item an tales habeat ſeries, quarum ope, extrahendo, æquationis inveniuntur valores finiti, quando tales inſunt æquationi: denique quid ſentiat de reſolutione æquationum, quales paulo ante poſui; ut $x^y + y^x = xy$, & $x^x + y^y = x + y$; ubi ſcilicet incognita ingreditur in exponentem.

Oblitus eram dicere, pulchram mihi videri Ciſſoidis extenſionem in rectam, quam Newtonus invenit, ex ſuppoſitâ quadraturâ hyperbolæ. Ego mihi videor, eodem modo etiam metiri poſſe Curvam hyperbolæ æquilateræ, ſed nondum omnis; neque Curvam ellipſeos, quantum memini.

Antequam finiam, adjiciam uſum pulcherrimum ſerierum, qui imprimis Collinio noſtro non erit ingratus. Scis magnam eſſe difficultatem circa extrahendas radices ex binomiis cubicis, quando eas ingreditur quantitas imaginaria, orta ex radice quadraticâ negativæ quantitatis; ut $\sqrt[3]{a + \sqrt{-bb}} = M + \sqrt[3]{a - \sqrt{-bb}} = N$: ubi utraque quantitas, M & N, eſt ſingulatim impoſſibilis; ſumma autem, ut alibi oſtendi, † eſt quantitas poſſibilis & realis, æqualis cuidam quæſitæ z. Ut vero ea eximatur, & ut extrahatur radix, nempe ut inveniatur $\frac{1}{2}z + e\sqrt{-bb} = \sqrt[3]{a + \sqrt{-bb}}$; & $\frac{1}{2}z - e\sqrt{-bb} = \sqrt[3]{a - \sqrt{-bb}}$ (unde fit $\sqrt[3]{a + \sqrt{-bb}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{-bb}} = z$) non poteſt adhiberi methodus Schotenii, geometriæ Carteſianæ ſubjecta; quia opus eſt ad eam, ut valor ipſius $\sqrt[3]{a + \sqrt{-bb}}$ exhibeatur ſaltem approximando, quod notis methodis impoſſibile eſt. Quis enim valorem ipſius $\sqrt{-bb}$ prope verum dabit? neceſſe eſt enim invenire $b\sqrt{-1}$; quis autem exprimat $\sqrt{-1}$ appropinquando? Scripſi olim Collinio, me remedium inveniſſe; quod etiam ad omnes gradus ſuperiores valeat: id ecce hîc uno verbo. Ex binomio $\sqrt[3]{a + \sqrt{-bb}}$ extraho radicem per ſeriem infinitam, ſive per theorema Newtonianum, ſive etiam more meo priore, inſtituendo calculum ſecundum naturam cujuſque gradûs, cùm ſcilicet nondum theorema generale abſtraxiſſem: quæ radix ponatur eſſe $l + m\sqrt{-bb} + n + p\sqrt{-bb}$ &c. Extrahatur jam & radix ex binomio altero, $\sqrt[3]{a - \sqrt{-bb}}$: fiet illa $+l - m\sqrt{-bb} + n - p\sqrt{-bb}$ &c. ut facilè demonſtrari poteſt ex calculo: ergo ‡ addendo hæc duo extracta, deſtruentur imaginariæ quantitates, &

bus, ac ſæpe ne quadraturis quidem accitis; ſimplici analyticâ æquatione (differentiali ſcilicet) peraguntur.

* Dixerat Newtonus, quòd ubi *relatio duorum quorumlibet laterum trianguli definiretur per æquationem, problema ſolvi poteſt abſque generali ejus methodo, quam literis tranſpoſitis celaverat; ſed ubi pars axis, vel abſciſſæ, ingreditur vinculum, res aliter ſe habere ſolet*; id eſt, indiget ejus methodo generali, præterquam in particularibus quibuſdam. Leibnitius, ad particularia illa alludens, *ſibi æquè facile eſſe aiat invenire Curvæ naturam, vel æquationem, in utroque caſu*; quibus verbis manifeſtum, eſt ſolutionem generalem ei nondum innotuiſſe.

† Summa eſt quantitas triplex poſſibilis, ideoque non niſi tripliciter exhiberi poteſt.

‡ Examinanda eſt hæc methodus.

fiet.

fiet $z = 2l + 2n$ &c. quæ ſunt eæ ſeriei portiones, in quibus nulla reperitur imaginaria. Invento ergo valore ipſius z, quantum ſatis eſt propinquo, quemadmodum Schotenius poſtulat, reliqua methodo Schoteniană, perinde ac in illis binomiorum extrahendorum generibus, tranſigentur.

Junii 21, 1677.

N° LXX. *Epiſtola D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 12 Julii 1677 *datâ, cum D.* Newtono *communicanda. Hujus extat exemplar manu D.* Collins *deſcriptum, & impreſſa eſt à D.* Walliſio *pag.* 652.

Ampliſſime Dómine,

Nuperas meas credo acceperis; nunc iſtas maturè ſummitto, ne facilitate D. Newtoni abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quædam ſuæ epiſtolæ loca explicaret; nempe quomodo inveniſſet theoremata, quòd poſito $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. ſit $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ &c. Nunc verò, relectis ejus literis, video id facile non tantùm ex ejus extractionibus derivari, ſed & alterâ illâ methodo, ſub finem literarum ejus expoſitâ inveniri; quâ me quoque * aliquando uſum in veteribus meis ſchedis reperio; ſed cùm in exemplo, quod fortè in manus meas ſumſeram, nihil prodiiſſet elegans, ſolitâ impatentiâ eam porro adhibere neglexiſſe.

Difficultatem moveram, in præcedentibus literis, circa æquationes impoſſibiles; quarum radices poſſibiles videntur inveniri per ſeries infinitas; nec-dum verò illa ſublata eſt, & meretur res excuti diligentius. Illud tamen video, ſi in æquatione datâ, $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. literæ z & y ſint indeterminatæ, tunc æquationem ſemper eſſe poſſibilem; ſed ſi z eſſet determinata, rurſuſque in ipſis a vel b &c. lateret æquatio, poſſet eſſe impoſſibilis, & tamen per ſeriem generalem aliqua prodire videretur radix poſſibilis; cujus difficultatis ſolutionem, re diligenter expenſâ, reperiri poſſe arbitror: ſed nunc in iſta accuratiùs inquirere non licet. Meretur autem explicari, tum quomodo ex ſeriebus agnoſci poſſit æquationes eſſe impoſſibiles (quanquam id aliâs ſatis facilè inveniatur) tum quomodo dignoſcantur diverſæ radices.

Præter ea quæ in ſuperiore epiſtolâ notavi, ſcilicet methodum tangentium inverſam & geometricam (ſaltem ſuppoſitis Curvarum analyticarum quadraturis)

* D. Leibnitius ſeries plures reciprocas ante biennium ab Oldenburgo acceperat: methodum ſerierum reciprocarum anno ſuperiore Newtonum rogaverat: hoc anno acceptam ægrè intellexerat: & intellectam ſe olim inveniſſe, ex chartis ſuis antiquis mox didicit: et quamvis ſeries pro hyperbolâ & circulo ante annos plures haberet, & hæc methodus ex arcu daret ſinum, ex logarithmo daret numerum, & ſerierum omnium exhiberet reciprocas; eandem tamen olim inventam neglexiſſe, ut inutilem. Sic methodum, quam diu deſideraverat, rogaverat, acceperat, & ægrè intellexerat, vel primus, vel ſaltem proprio marte ſcilicet invenit.

† Quod hic deſideratur, Newtonus, in epiſtolâ ſuâ noviſſimâ, ſignificavit ſe aliquâ ex parte inveniſſe;

quadraturis) & alia id genus, † deeſt nobis circa quadraturas, ut ſcire certo poſſimus, an non quadratura figuræ alicujus propoſitæ reducatur ad quadraturam circuli aut hyperbolæ: nam pleræque figuræ, hactenus tractatæ, ope alterutrius quadrari potuerunt. Quòd ſi demonſtrari poteſt (ut arbitror) quaſdam figuras non eſſe quadrabiles nec per circulum nec hyperbolam; reſtat, ut alias quaſdam figuras primarias altiores conſtituamus, ad quarum quadraturam reducantur cæteræ omnes, quando id fieri poteſt. Hoc quamdiu non fit, hæremus; & ſæpe per ſeriem infinitam particularem quærimus, quod ad circuli aut hyperbolæ, aut aliam notioris figuræ quadraturam reduci poterat. Crediderat Gregorius, dimenſionem Curvarum hyperbolæ & ellipſeos non pendere à quadraturâ circuli aut hyperbolæ; ego verò reperi aliquam ſpeciem Curvæ hyperbolicæ, quam, ex datâ ipſius hyperbolæ quadraturâ, metiri poſſum: de cæteris nondum mihi liquet.

Hannoveræ 12 *Julii* 1677.

N° LXXI. *Brevi poſtea, autumno ſcilicet anni* 1677, *mors Oldenburgi huic literarum commercio finem impoſuit. Deinde anno* 1682 *Collins mortuus eſt, & Acta eruditorum Lipſiæ primùm edita ſunt: ejuſque anni menſe Februario prodiit D. Leibnitii Quadratura Arithmetica, circuli ſcilicet & hyperbolæ; quarum prior non differt à Gregoriană toties dictâ, neque poſterior ab eâ Vicecomitis Brounkeri, ante quatuordecim annos, in Philoſophicis Tranſactionibus N° XXXIV. pro menſe Aprilis* 1668, *publicatâ. Non multo poſt, anno ſcilicet* 1684, *in iiſdem actis Lipſicis pro menſe Octobri, Calculi Differentialis elementa primùm edidit D. Leibnitius literis G. G. L. deſignatus. Anno autem* 1683 *ad finem vergente, D. Newtonus propoſitiones principales earum, quæ in Philoſophiæ Principiis Mathematicis habentur, Londinum miſit, eædemque cum Societate Regiâ mox communicatæ ſunt; annoque* 1686 *liber ille ad Societatem miſſus eſt ut imprimeretur, proximoque anno menſe Martio lucem vidit: & exemplar ejus D. Nicolao Fatio datum eſt ut ad Leibnitium mitteretur. Deinde anno* 1688 *epitome ejus. in Actis Lipſicis impreſſa eſt: quâ lectâ D. Leibnitius epiſtolam de lineis Opticis, ſchediaſma de reſiſtentia Medii, & motu Projectilium gravium in Medio reſiſtente, & tentamen de Motuum Cœleſtium cauſis compoſuit, & in Actis Lipſicis, ineunte anno* 1689, *imprimi curavit; quaſi* ‡ *ipſe quoque præcipuas Newtoni de his rebus propoſitiones inveniſſet, idque diverſâ methodo, quâ vias novas geometricas aperuiſſet; & librum Newtoni tamen nondum vidiſſet.*

miſſe; & quod invenerat, poſtea publicavit in libro de Quadraturâ Curvarum.

‡ Hâc licentiâ conceſſâ authores quilibet inventis ſuis facilè privari poſſunt. Viderat Leibnitius epitomen libri in Actis Lipſicis. Per commercium epiſtolicum, quod cum viris doctis paſſim habebat, cognoſcere potuit propoſitiones in libro illo contentas. Si librum non vidiſſet, videre tamen debuiſſet, antequam ſuas, de iiſdem rebus, in itinere ſcriptas compoſitiones publicaret. Dicunt aliqui, falſas eſſe Tentaminis Propoſitiones XI, XII & XV; & D. Leibnitium ab his, per calculum ſuum, deduxiſſe Propoſitiones XIX & XX ejuſdem tentaminis. Talis autem calculus ad propoſitiones priùs inventas aptari quidem potuit, non autem inventorem conſtituere.

Anno

N° LXXII. Anno autem 1695 Opera Mathematica celeberrimi Wallisii duobus tomis Oxonii prodiere: & in Actis Eruditorum anni insequentis mense Junio, habetur libri Epitome; in quâ sequentia leguntur, pag. 257 & seq.

Newtonianis etiam seriebus jam in Anglicanâ editione expositis, adjicit quædam quæ David Gregorius Scotus Professor Oxonienſis, & Archibaldus Pitcarnius Medicinæ Lugduni Batavorum Professor, non abludentia attulerunt. Addit Cap. 95. Algebræ, pag. 389, apud exteros (ut verba ejus sonant) etiam Leibnitium & Tschurnhausium nonnihil ejusmodi præstitisse, & apud Britannos Jacobum Gregorium, & Nicolaum Mercatorem; sed quæ sunt, ut plurimum, nomisi casus particulares intra ambitum generalem regularum Newtoni. Calculo quoque differentiali Leibnitii affinem esse methodum fluxionum Newtoni, in Principiis Naturæ Mathematicis primùm editam, tum utráque esse antiquiorem Barrovii; & omnes Wallisianæ Arithmeticæ Infinitorum superstrui, quæ Cavallerii geometriam promovit, ut hic Archimedæam. Exhibet etiam methodum quandam Josephi Raphson pro infinitis seriebus, libello Londini *1690 edito, sub titulo Analyseos Æquationum Universalis, comprehensam. Cæterùm ipse Newtonus, non minus candore quàm præclaris in rem mathematicam meritis insignis, * publicè & privatim agnovit, Leibnitium tum cùm, interveniente celeberrimo viro Henrico Oldenburgo Bremensi, Societatis Regiæ Anglicanæ tunc Secretario, inter ipsos, ejusdem jam tum Societatis Socios, commercium intercederet; id est jam fere ante annos viginti & amplius; calculum suum differentialem, seriesque infinitas, & pro iis quoque methodos generales habuisse; quod Wallisius, in præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit; quoniam de eo fortasse non satis ipsi constabat. Cæterùm differentiarum consideratio Leibnitiana, cujus mentionem facit Wallisius, ne quis scilicet, ut ipse ait, causaretur de calculo differentiali nihil ab ipso dictum fuisse, meditationes aperuit, quæ aliunde non æquè nascebantur. Est enim differentia analyticum quiddam, & calculi capax; & quod rei caput est, summæ reciprocum; eáque demum ratione factum est, ut calculus analyticus non minus in Geometriâ altiore, quam Cartesius à suo calculo excluserat, quàm in ordinariâ, ab ipso tractatâ, procedat. Et quemadmodum Apollonius, & alii veteres, habebant quidem proprietates ordinatarum pro lineis conicis & aliis, ex quibus formatæ sunt postea æquationes à Cartesio; ita similiter lineæ, quas ipse Cartesius, quippe calculo suo intractabiles, à Geometriâ excluserat, Leibnitianâ primùm methodo æquationibus finitis sunt expressæ, & sub leges analyseos redactæ; quâ ratione, omnes earum proprietates analytico jam calculo investigari possunt, prorsus ut in ordinariis. Et cùm antea per viam figurarum, & imaginationibus, etiam præstantissimi geometræ faciliora tantùm assequi in his potuerint, nunc, ope hujus calculi, non tantùm priora illa primo velut obtutu patent, quæ tunc*

* Methodum differentialem Moutoni & Leibnitius habuit anno 1673, & suam esse voluit: methodum aliam differentialem nondum habuit: series postea habuit, sed quas anno 1675 ab Oldenburgo accepit, ab aliis priùs accipere potuisset. Methodum generalem perveniendi ad ejusmodi series anno proximo ab Oldenburgo petiit, à Newtono accepit, antea non habuit. Methodum extrahendi radices in speciebus à Newtono simul accepit, quâ methodus ejus per transmutationem figurarum nondum generalis, in methodum quandam generalem evasit, sed inutilem: per extractiones solas res citius peragitur. Anno 1677 methodum novam differentialem habuit, ac tantam methodi hujus antiquitatem editores jactant, majores non asserunt. Methodum generalem, vel serierum vel differentialem, Leibnitium, vel primum vel priori marte, invenisse Newtonus nondum agnovit publicè.

† Ignoravit Wallisius Gregorium hanc seriem anno 1671 cum Collinio, Oldenburgum anno 1675

tunc merito admirationi erant, sed & multo magis abstrusa deteguntur, ad quæ imaginatio non pertingit, in quo consistit potissimus calculi analytici usus. Cæterùm ipsum celeberrimum Wallisium, quo est candore, non dubitamus etiam nostratium meditationibus. si sufficientem earum habuisset notitiam, locum ampliorem in suo opere daturum fuisse. Sed ipse queritur, ultimâ Algebræ suæ paginâ, hæc nostra Eruditorum Acta, in quibus bona earum pars continetur, minùs sibi fuisse visa: unde neque illa satis sibi cognita ait, quæ de Geometriâ Incomparabilium, vel Analysi Infinitorum, à Leibnitio data fuere, quæ libenter alioqui in suo quoque opere exhibiturus fuerit. Cæterùm hâc occasione & de Nicolao Mercatore, quem Wallisius velut inter suos recensere videtur, notare voluimus, Germanum fuisse, & ex Holsatiâ oriundum, etsi in Angliam habitatum concesserit; eumque primum fuisse, quantum constet, qui quadraturam publicè dederit per seriem infinitam, tametsi tunc quoque Newtonus in eadem, ipso inscio, incidisset, eaque multo longiùs produxisset.

Excerpta ex epistolâ D. J. Wallisii ad D. Leibnitium, Oxonii 1° Decemb. N° LXXIII. *1696 datâ; quâ respondetur ad ea, quæ ex Actis Eruditorum modò descripsimus.*

Dum hæc scripturus eram; ostendit mihi nonnemo, hesterno die, Acta Lipsica, pro mense Junii præsentis anni 1696. Quorum eruditus editor dignatus est inibi amplam meorum Operum Mathematicorum, Oxonii editorum, mentionem facere. Quo nomine me ipsi obstrictum sentio, & gratias habeo.

Sed conqueri videtur, saltem subinsinuare, quòd, quum Newtoni methodos fusiùs exposuerim; de Leibnitianis parciùs dixerim. At nolim ego te, quem magni æstimo, à me quoquo modo læsum iri. Sed gratulor potius, te, in tantâ nobilitate positum, ad res nostras mathematicas descendere voluisse. Et tantum abest, ut velim ego tibi quocunque modo iniquus esse, ut siqua ferat occasio, demerere malim.

Dum addit eruditus editor, illas me fortè præteriisse, quòd de illis mihi non satis constiterit; id omnino verum est.

Dicam utique quod res est, neque enim fateri pudet: tuarum ego rerum nihil, quod memini, vidi quicquam, præter hæc duo. Quorum alterum, illud est, quod inter Londinensium Collectiones Philosophicas habetur sed absque demonstratione, ex Actis Lipsicis descriptum, de quadrato diametri ad aream Circuli ut 1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum; quod ego meis inserui, ut † à te factum, ad Algebræ meæ Prop. XCV.

Alterum

Alterum eſt illud de Teſtudine Quadrabili; cujus ego, ut de tuo, mentionem facio in Algebræ meæ poſtremo folio. Præter hæc duo ſi plura noverim, non reticuiſſem.

Tuam Geometriam Incomparabilium, vel Analyſin Infinitorum, quam ibidem à te memoratam dixi, ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de nomine ante inaudiveram, quàm prout ibidem ad calcem Algebræ dictum eſt.

Neque Calculi Differentialis vel nomen audiviſſe me memini, niſi poſtquam utrumque volumen abſolverant operæ, eratque præfationis præfigendæ poſtremum folium ſub prelo, ejuſque typos jam poſuerant typothetæ. Quippe tum me monuit amicus quidam harum rerum gnarus, qui peregrè fuerat, tum talem methodum in Belgio prædicari, tum illam cum Newtoni methodo fluxionum quaſi coincidere. Quod fecit, ut, tranſmotis typis jam poſitis, id monitum interſeruerim.

Sed antè monueram, Algebræ, Prop. XCV. pag. 389, quòd ſolùm potui, Leibnitium & Tſchurnhauſium talia meditatos; ſed quæ ego non videram, necdum vidi. Et ſicubi fortè videram literas G. G. L; neſciebam, quem illæ virum indicabant.

Extant, credo, plura in Actis Lipſicis; ſed quæ ego non vidi: ut nec tu, credo, vidiſti Brounkeri Quadraturam Hyperbolæ, quæ extat in Tranſactionibus Londinenſibus. Mihique condonari poteſt, hâc ætate, qui annum octogeſimum ſuperavi, ſi non omnia ſciſcitarer.

Noveram quidem jamdudum, & indicavi, de rebus hujuſmodi nonnulla te meditatum eſſe; tibique cum Newtono, mediante Oldenburgo, interceſſiſſe literas quaſdam tuas: ſed, quas ego non vidi, nec ſcio quales fuerint: eratque Oldenburgus diu mortuus, ut non potuerim ab illo ſciſcitari. Rogabam quidem per literas Newtonum noſtrum, ut ſi eas penes ſe haberet, earum mihi copiam faceret literarum; ſed retulit ille, ſe non habere. Et quidem periiſſe credo flammis inopinato correptas, cum pluribus Newtoni ſcriptis meliori luce dignis: & niſi per me ſtetiſſet, perjiſſent etiam Newtoni literæ. Eoque animo rogabam, ut tuas illas cum Newtoni literis junctim ederem. Idque etiamnum, ſi ferat occaſio, facturus fortè ſum, modo mihi dignaberis earum copiam facere *.

Quòd Henricus Oldenburgus fuerit Bremenſis; & Nicolaus Mercator Holſatus, quod ſuggerit eruditus editor, omnino verum eſſe credo; ſaltem Anglos non fuiſſe ſatis novi; eoſque propterea Germaniæ veſtræ non invideo, adeoque non Noſtrates dixi, ſed "Apud Nos;" nec tamen ideo minùs eos aut amavi, aut æſtimavi. Nam mihi perinde eſt, quâ quis gente ſit; *Tros Tyriuſve fuerit, nullo diſcrimine*——modo ſit vir bonus & bene meritus. Sed apud nos diù vixerant; & quicquid hâc in re fecerint, apud nos factum eſt.

Quæ fuſiùs expoſui, ut ſentias quàm tibi non iniquus fuerim, aut parum candidus.

1675 cum Leibnitio communicâſſe; & præterea Leibnitium in Angliâ fuiſſe anno 1673. Collinius enim, ab anno 1670 ſeries, à Newtono & Gregorio acceptas, rogatus non rogatus liberrimè nec ſine jactantiâ communicavit, ut ex ſuperioribus patet. Et Pellius, cui hæ ſeries ignotæ non erant, cum Leibnitio de ſeriebus verba habuit.

Ex

Ex epiſtolâ D. Leibnitii *ad* Walliſium *ſcriptâ,* $\frac{10}{20}$ Martii, *ineuntis anni* 1697. N° LXXIV.

——Quoniam videris nonnulla, in Actis dicta, ita accepiſſe, quaſi animi parum erga Germanos æqui accuſeris, & quaſi viciſſim tua recenſcendo extenuentur: putavi non ingratum tibi fore, ſi epiſtolam dominis editoribus Actorum ſcriberem, cujus hîc exemplum addo; quâ, ſi ipſis videretur, Actis iiſdem inſertâ, ſatisfieri tibi, ſcrupulis illis ſublatis, poſſit. [Habetur in Actis Lipſicis pro menſe Junio 1697.]

Ego qui te magni facio, & publicè profeſſus ſum, quantum meo judicio tibi debeat altior Geometriâ, æquiſſimum puto viris præclarè, non de ſuo tantùm ſeculo, ſed & poſteritate meritis debitas gratias rependi. Ut autem animi mei certior eſſe poſſis, ecce verbo tenus tranſcripta, quæ ipſe de tuis meritis geometricis dixi, Actorum Lipſienſium menſe Junio 1686, pag. 298.

" Paucis dicam, quid potiſſimum inſignibus noſtri ſeculi Mathematicis " in hoc Geometriæ genere, meâ ſententiâ, debeatur.

" Primum Galilæus & Cavallerius involutiſſimas Cononis & Archime- " dis artes detegere cœperunt.

" Sed Geometria Indiviſibilium Cavallerii ſcientiæ renaſcentis non niſi " infantia fuit. Majora ſubſidia attulerunt triumviri celebres; Fermatius, " inventâ methodo de Maximis & Minimis; Carteſius, oſtenſâ ratione li- " neas geometriæ communis (tranſcendentes enim excluſit) exprimendi " per æquationes: et P. Gregorius à S. Vincentio, multis præclaris in- " ventis. Quibus egregiam Guldini regulam de Motu Centri Gravitatis " addo.

" Sed & hi intra certos limites conſtitere; quos tranſgreſſi ſunt Huge- " nius & Walliſius, geometriâ inclyti. Satis enim probabile eſt, Huge- " niana Heuratio, &. Walliſiana Nelio & Wrennio, qui primi Curvis æ- " quales rectas demonſtravere, pulcherrimorum inventorum occaſionem " dediſſe. Quod tamen meritiſſimæ laudi inventionum nihil detrahit.

" Secuti ſunt hos Jacobus Gregorius Scotus, & Iſaacus Barrovius An- " glus: qui præclaris in hoc genere theorematibus ſcientiam mirificè lo- " cupletârunt.

" Interea Nicolaus Mercator Holſatus, Mathematicus & ipſe præſtan- " tiſſimus, † primus (quod ſciam) quadraturam aliquam dedit per Seriem " Infinitam.

" At idem inventum non ſuo tantùm marte aſſecutus eſt, ſed & uni- " verſali quâdam ratione abſolvit, profundiſſimi ingenii Geometra Iſaacus " Newtonus. Qui, ſi ſua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere in- " telligo, haud dubiè nobis novos aditus ad magna ſcientiæ incrementa " compendiaque aperiret."

* Eas tandem obtinuit D. Walliſius è ſchediaſmatis Collinii; alteras Newtoni olim acceperat ab Oldenburgo.

† Mercator quadraturam D. Brounkeri pe diviſionem Walliſianam tantum demonſtravit, ut ſuprà.

Quibus deinde nonnihil de iis addo, * quæ meâ operâ acceſſere; præſertim dum novo calculi genere effeci, ut etiam Algebram tranſcendentia analyſi ſubjiciantur; & Curvas, quas Carteſius à geometriâ malè excluſerat, ſuis quibuſdam † æquationibus explicare docui; unde omnes earum proprietates certo calculi filo deduci poſſunt: exemplo Cycloidis, cui æquationem ibidem affigno, $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dz}{\sqrt{2x - xx}}$. Ubi $\int$ ſignificat ſummationem; & d, differentiationem; x, abſciſſam ex axe inde à vertice; & y, ordinatam normalem.

De te autem queri, nunquam mihi in mentem venit; quem facilè apparet noſtra, in Actis Lipſienſibus prodita, non ſatis vidiſſe.

Quæ inter Oldenburgum & me commutatæ ſunt literæ, quibus aliqua acceſſerint à D. Newtono excellentis ingenii viro, variis itineribus & negotiis, ab hoc ſtudiorum genere planè diverſis, vel periere, ut alia multa; vel jacent in mole chartarum aliquando excutienda digerendaque, ubi à neceſſariis occupationibus vacatio erit; quam mihi tam ſubito quàm vellem promittere non poſſum.

N° LXXV. *Ex epiſtolâ* Walliſii *ad D.* Leibnitium, Apr. 6, 1697.

Vir Nobiliſſime Celeberrimeque,

Literas tuas humaniſſimas, Martii $\frac{19}{29}$ Hannoveræ datas, accepi, & exoſculatus ſum, Martii 13 ſtilo noſtro 1697; hoc eſt, Apr. 10, ſtilo novo. Mihique gratulor, quòd nobiliſſimo viro ego meaque non diſplicuerint. Veniam interim exorare debeo, ſi locorum diſtantia fecerit, ut eruditiſſima tua ſcripta, & inventa, minus ego ſciverim aut intellexerim, quàm vellem; & quidem, quis ſit ille tuus Calculus Differentialis, non ſatis mihi compertum ſit; niſi quòd mihi nuper nunciatum eſt, eum cum Newtoni Doctrinâ Fluxionum quaſi coincidere.

Nec pudet me meam hâc in parte ignorantiam fateri; qui jam ab aliquot annis contentus fuerim, hâc ætate, lampadem tradere; aliiſque permittere, ut promoveant ea quæ, ſiqua, ego non infeliciter detexerim.

Quòd literas ſcripſeris, in mei gratiam, ad editores Actorum Lipſicorum, favori tuo debeo, & grates habeo.

Quis eorum ille ſit, qui mea ſcripta recenſuit in Actis Lipſicis pro menſe Junii 1696, ego quidem non ſcio; ſed ei gratias habeo. Neque enim eſt, cur ego ei ſuccenſere debeam, ſi non primo intuitu ſtatim perſpexerit omnia

* Leibnitius, recitando inventa nova mathematica, prætermittit methodum fluxionum; quaſi analyſis tota infinitefimalis ſolâ ſuâ operâ acceſſerat.

† Annon Newtonus hujuſmodi æquationes priùs invenit; qui docuit fluentem ex æquatione fluxionem involvente extrahere, & Curvas Mechanicas ad æquationes numero terminorum infinitas reduxit, pergendo ab hujuſmodi æquationibus finitis? Annon tota Fluxionum methodus inverſa, ubi de Curvis agitur, pendeat ab hujuſmodi æquationibus ad Curvas applicatis?

‡ Quaſi Leibnitius hoc non advertiſſet anno 1677, ubi primum incidit in methodum Newtoni. Vide litteras ejus ſuprà impreſſas, p. 561. Certè methodum Newtoni, ante annum 1671 inventam fuiſſe, Leibnitius ex litteris ejus intellexerat, ſed in Actis Lipſicis hoc nunquam agnovit. Vide ſuprà p. 481, 544, 545. Sic & ſe ab Oldenburgo ſeries Newtonianas & Gregorianas, ineunte anno

omnia; quæ penitus rimanti occurriſſent, aut etiam ſint occurſura. Sufficit enim inſtituto ſuo, ut ſumma quæque carpat, & magis obvia; lectoribus permittendo, ſi penitiora deſiderent, apud authores indicatos quærere. Nolim autem exiſtimes, quòd in gentem veſtram minus æquo ſim animo; nam ſecus eſt, &c.

Ubi dicitur, *Nicolaum Mercatorem primum eſſe qui quadraturam aliquam dedit per ſeriem infinitam*: vide annon mea talis ſit, Ar. Infin. Pr. 191. $\square = \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\ \&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\ \&c.}$. *Et Brounkeri* $\square =$

$$1\frac{1}{\frac{2}{\frac{9}{\frac{2}{\frac{25}{\frac{2}{\frac{49}{\frac{2}{\frac{21}{2}}}}}}}}}\ \&c.$$

Sed & omnes mearum tabellarum ſeries, in Arithmeticâ infinitorum, ſunt Series Infinitæ; & earum plurimæ, quales quæ vobis dicuntur, novo nomine, ſeries Tranſcendentales.

Nolim utique ut Clariſſimo viro fraudi ſit nova compellatio. Nam quas ego vocaveram Continuas Approximationes, vocat Jacobus Gregorius Series Convergentes; & Newtonus, Series Infinitas; ſed res eadem eſt. Sic quod ego vocaveram Centrum Percuſſionis, vocat Hugenius, novo nomine, Centrum Oſcillationis; ſed eadem res eſt. Et Fermatii Hyperbolæ Infinitæ eædem ſunt cum meis Seriebus Reciprocis. Et Galilæi Cycloides, Merſenni Trochoides, mea Cyclois, & Cuſani Curva, quocunque nomine dicatur, ſunt res eadem. Sic rectificata Curva Nelii, & Curva Heuratii, & Curva demum Fermatii, eadem eſt cum meâ Paraboloide Semi-cubicali. Et Gallorum Socia Cycloidis eſt ea Curva, quæ mihi terminat figuram Sinuum rectorum. Et, ni fallor, ſic ſaltem mihi nunciatum eſt, Newtoni Doctrina Fluxionum res eadem eſt, vel quàm ſimillima, quæ vobis dicitur Calculus Differentialis: quod tamen neutri præjudicio eſſe debet.

Ex epiſtolâ D. Leibnitii *ad* Walliſium *ſcriptâ*, 28 Maii 1697. N° LXXVI.

Methodum Fluxionum profundiſſimi Newtoni, cognatam eſſe methodo meæ Differentiali, non tantùm animadverti ‡, poſtquam opus ejus & tuum prodiit; ſed etiam profeſſus ſum in Actis Eruditorum, & aliâs quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quàm ipſius merito. Itaque communi nomine deſignare ſoleo § Analyſeos Infinitefimalis; quæ latiùs quàm methodus Tetragoniſtica patet.

anno 1675, accepiſſe, ſtatim oblitus eſt; p. 517—520, 522. Et methodum ſerierum ſe ab Oldenburgo poſtulaſſe, & à Newtono accepiſſe, ſtatim oblitus eſt; p. 522, 535, 536, 567. Et problemata tangentium inverſa ab æquationibus & quadraturis pendere, ſe primum negâſſe, & ſubinde à Newtono didiciſſe, ſtatim oblitus eſt; p. 544, 557, 558.

§ Methodum fluxionum & methodum differentialem eſſe unam & eandem methodum, Leibnitius hic agnoſcit; ideoque ſe communi nomine analyſeos infinitefimalis deſignare ſolere, licet in nonnullis differre poſſint: ut analyſis ſpecioſa Vietæ & ea Carteſii in nonnullis differunt. Quæritur, quis ſit analyſeos hujus infinitefimalis inventor primus; & ecquid alter alterius inventis addiderit.

Interim,

Interim, quemadmodum & Vietæ & Carteſiana methodus Analyſeos Specioſæ nomine venit; diſcrimina tamen nonnulla ſuperſunt: ita fortaſſe & Newtoniana & Mea differunt in nonnullis.

Mihi conſideratio differentiarum & ſummarum, in ſeriebus numerorum, * primam lucem affuderat, cùm animadverterem differentias tangentibus, & ſummas quadraturis reſpondere. Vidi + mox differentias differentiarum in Geometriâ *Oſculis* exprimi. Et notavi mirabilem analogiam relationis inter differentias & ſummas, cum relatione inter potentias & radices. Itaque judicavi, præter affectiones quantitatis hactenus receptas $y, y^2, y^3, y^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{3}}$, &c. vel generaliter y^r, ſive $[p^r]\,y$, vel potentiæ ipſius y ſecundum exponentem e; poſſe adhiberi novas differentiarum vel fluxionum affectiones, dy, d^2y (ſeu ddy) d^3y (ſeu $dddy$) imo utiliter etiam occurrit $d^{\frac{1}{2}}y$, & ſimiliter generaliterque d^ry.

Hâc jam affectione admiſſâ, ‡ vidi commodè per æquationes exprimi poſſe quantitates, quas à ſuâ Analyſi & Geometriâ excluſerat Carteſius; & Curvas, quas ille non rectè vocat Mechanicas, hâc ratione calculo non minùs ſubjici, quàm ab ipſo in Geometriam receptas. Et, quemadmodum Veteres jam æquationes Curvarum Locales obſervaverant, ſed Carteſius tamen utilem operam nobis navavit, dum eas calculo ſuo expreſſit: ita putavi, me non inutiliter facturum, ſi oſtenderem methodum Curvas, ab ipſo excluſas, ſimiliter per æquationes exprimendi; quarum ope, omnia de iis certo calculi filo haberi poſſint.

Et licet fatear, quemadmodum rem ipſam, in æquationibus Curvarum localibus facilioribus, calculo Carteſii expreſſam, jam tenebant Veteres; ita rem ipſam, meis æquationibus differentialibus facilioribus expreſſam, non potuiſſe tibi, aliiſque egregiis viris, eſſe ignotam: non ideo minùs tamen puto, & Carteſium & me aliquod utile præſtitiſſe. Nam antequam talia ad conſtantes quoſdam characteres calculi analytici reducuntur, tantúmque omnia vi mentis & imaginationis ſunt peragenda, non licet in magis compoſita abditaque penetrare; quæ tamen, calculo ſemel conſtituto, luſus quidem jocuſque videantur.

Unde jam mirum non eſt, § problemata quædam, poſt receptum calculum meum, ſoluta haberi, quæ antea vix ſperabantur: ea præſertim quæ ad tranſitum pertinent à Geometriâ ad Naturam. Quoniam ſcilicet vulgaris geometria minùs ſufficit, quoties Infiniti involvitur conſideratio; quam pleriſque Naturæ operationibus ineſſe, conſentaneum eſt, quo meliùs referat autorem ſuum.

* Fatetur hîc Leibnitius, methodum tangentium per differentias primam lucem ipſi affudiſſe; id eſt, methodum, quam Fermatius, Gregorius, Barrovius coluere, Newtonus N° X. ad quantitatum augmenta momentanea generaliter applicuit. Hancce tangentium methodum Leibnitius, lectis Newtonianis, meditatur, p. 523, 544, 558, 559: generalem reddit, p. 503: & Newtonianæ ſimilem eſſe ſtatim videt, p. 561, 564.

† Fermatius & Schootenus hoc antè viderunt, determinando punctum flexûs contrarii in Conchoide.

‡ Leibnitius hoc non vidit ante annum 1677. Scripſit enim anno 1676, inverſa tangentium problemata, & alia multa, ab æquationibus non pendere. Reſcripſit Newtonus, hujuſmodi problemata in poteſtate eſſe, nempe per æquationes ſuas. Et tum demum Leibnitius, à Newtono admonitus, hæc vidit. Vide p. 538, lin. penult.

Hugenius

Hugenius certe, || qui hæc ſtudia haud dubiè profundiſſimè inſpexerat, multiſque modis auxerat, initio parvi faciebat calculum meum, nondum perſpectâ ejus utilitate. Putabat enim, dudum nota ſic tantùm novè exprimi: prorſus quemadmodum Robervallius, & alii initio, Carteſii Curvarum calculos parvi faciebant. Sed mutavit poſtea Hugenius ſententiam ſuam; cùm videret quàm commodâ eſſet hæc exprimendi ratio, & quàm facile per eam res involutiſſimæ evolverentur. Itaque maximi eam à ſe fieri, aliquot ante obitum annis, non tantùm in privatis ad me alioſque literis, ſed publicè quoque eſt profeſſus.

Cæterùm Tranſcendentium appellationem, nequid à me præter rationem in phraſi geometricâ novari putes, ſic accipio, ut tranſcendentes quantitates opponam ordinariis & algebraicis: et Algebraicas quidem, vel ordinarias, voco quantitates, quarum relatio ad datas exprimi poteſt algebraicè; id eſt, per æquationes certi gradûs; primi, ſecundi, & tertii, &c; quales quantitates Carteſius ſolas in ſuam Geometriam recipiebat: ſed Tranſcendentes voco, quæ omnem gradum algebraicum tranſcendunt. Has autem exprimimus, vel per valores infinitos, & in ſpecie per ſeries (neque enim ipſas ſeries Tranſcendentales voco, ſed quantitates ipſis exprimendas) vel per æquationes finitas; eaſque vel differentiales; ut cùm ordinata cycloidis methodo meâ exprimitur per æquationem ** $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ay - yq}}$; vel exponentiales; ut cum incognita quædam x exprimitur per hanc æquationem $x^x + x = 1$. Et quidem tranſcendentium exponentialem pro perfectiſſimâ habeo; quippe quâ obtentâ, nihil ultrà quærendum reſtare arbitror; quod ſecus eſt in cæteris.

Primus autem, ni fallor, etiam Exponentiales æquationes introduxi, cùm ignota ingreditur exponentem. Et jam anno primo †† Actorum Lipſienſium, ſpecimen dedi in exemplo quantitatis ordinariæ Tranſcendentaliter expreſſæ, ut res fieret intelligibilior; nempe, ſi quæratur $x^x + x = 30$, patet $x = 3$ ſatisfacere; cum ſit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

Ex epiſtolâ Walliſii *ad* Leibnitium, Julii 30, 1697. N°. LXXVII.

Optaverim ita, ut tibi vacet tuum Calculum Differentialem, & Newtono ſuam Fluxionum Methodum, juſto ordine exponere; ut quid ſit utrique

§ Mirum eſt, hæc à D. Leibnitio dici; qui ex literis & Principiis Newtoni intellexerat, methodum ſolvendi hujuſmodi problemata Newtono, ante annum 1671, innotuiſſe; & ipſum primum, per hanc methodum, problemata tractâſſe, quæ ad tranſitum pertinent à geometriâ ad naturam.

|| Hugenius literas, quæ inter Newtonum & Leibnitium mediante Oldenburgo interceſſerant, nunquam vidit.

** Legendum $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax - xx}}$. Idem ſic deſignari poteſt $y = \frac{\dot{x}x}{\sqrt{ax - xx}}$; vel ſic, $\dot{y} = \frac{\dot{x}x}{\sqrt{ax - xx}}$. Et nota, quòd ubi differentiæ referuntur ad ſummas, rectiùs dicerentur partes. Sunt enim non differentiæ ſummarum, ſed partes; & nullam relationem habent ad ſummas, niſi quatenus ſunt earum partes.

†† Imo anno 1677. Vide pag. 560, 564.

commune,

commune, & quid interſit diſcriminis, & utramque diſtinctius intelligamus *.

N°LXXVIII. *In diſſertatione D.* Nicolai Fatii Duillierii, *R. S. S. de inveſtigatione geometricâ lineæ breviſſimi deſcenſûs, &c.* Londini, *anno* 1699 *editâ, pag.* 18, *hæc habentur.*

" Newtonum primum, ac pluribus annis vetuſtiſſimum, hujus calculi " inventorem, ipſâ rerum evidentiâ coactus, agnoſco: à quo utrum quic- " quam mutuatus ſit Leibnitius, ſecundus ejus inventor, malo eorum, " quàm meum, ſit judicium, quibus viſæ fuerint Newtoni literæ, aliique " ejuſdem manuſcripti codices."

Et reſpondit D. Leibnitius *in Actis Lipſienſibus menſe* Maii 1700.

" Certè cùm elementa calculi mea edidi anno 1684, † ne conſtabat " quidem mihi aliud de inventis ejus in hoc genere, quàm quod ipſe olim " ſignificaverat in literis; poſſe ſe tangentes invenire, non ſublatis irratio- " nalibus: quod Hugenius quoque ſe poſſe mihi ſignificavit poſtea, etſi " cæterorum iſtius calculi adhuc expers: ſed majora multo conſecutum " Newtonum, viſo demum libro Principiorum ejus, ſatis intellexi. Cal- " culum tamen differentiali tam ſimilem ab eo exerceri, non antè didici- " mus, quàm cùm non ita pridem magni geometræ Johannis Walliſii Ope- " rum volumina primum & ſecundum prodiere, Hugeniuſque, curioſitati " meæ favens, locum inde deſcriptum, ad Newtonum pertinentem, mihi " maturè tranſmiſit."

Et poſt aliqua, de methodi hujus parte ſublimiore verba faciens, addit:

" Quam [methodum] ante dominum Newtonum & me nullus quod ſciam " geometra habuit; uti ante hunc maximi nominis geometram, NEMO, " ſpecimine publicè dato, ſe habere probavit: ante dominos Bernoullios & " me nullus communicavit."

D. Fatio *autem replicationem ſuam ad editores* Lipſienſes, *ut publicaretur, mittente, hi, quaſi lites averſati, eandem Actis ſuis inſerere recuſârunt. Vide* Act. Lipſ. Martii 1701, *pag.* 134.

* Ut Leibnitius differentiam methodorum exponat, iterum rogat Walliſius; ſed fruſtra.

† Conſtabat certè D. Leibnitio, jam ab anno 1677, Curvarum quadraturas faciliores reddi; & problemata tangentium inverſa D. Newtoni methodis ſolvi; idque nonnunquam per quadraturas ſolas, nonnunquam per methodos generaliores. Confer literas ejus pag. 561, & ſeq. cum pag. 544, 545, 557, 558, ut & cum pag. 510, lin. 25, 26, & pag. 523, lin. 4, 7, 17.

‡ Compilatores Actorum, in ſcribendis librorum Breviariis, à cenſuris temerariis abſtinere debent. Ex hâc cenſurâ patet animus ſcriptoris in D. Newtonum.

§ Literis D. T. Tſchurnhauſius deſignatur.

|| Hæc Iſagoge, & ſcholium propoſitionis ultimæ, ſcripta ſunt ubi liber prodiit; reliqua ex MS antiquo, manibus amicorum trito, impreſſa ſunt.

Tandem ubi prodiere Newtoni Libri de Numero Curvarum ſecundi generis, de- N° LXXIX. *que quadraturâ figurarum, editores Actorum Lipſienſium, ſtylo Leibnitiano, ſynopſin libri prioris his verbis concluſerunt. Vide Act. Lipſ. Januarii* 1705.

Cæterùm autor non attigit focos, vel umbilicos, Curvarum ſecundi generis; & multo minùs generum altiorum. Cùm ‡ ergo ea res abſtruſioris ſit indaginis, & maximi tamen in hoc genere uſûs, tum ad deſcriptiones, tum ad alias proprietates Curvarum, & doctrinæ hæc focorum ab illuſtriſſimo D. § D. T. profundiùs ſit verſata; ſupplementum ejus pro his Curvis ab ipſius ingenio expectamus.

Dein libri alterius ſynopſin ſequentem, ſi ſynopſis dici mereatur, eodem ſtylo ſubjunxerunt.

Ingenioſiſſimus deinde autor, antequam ad quadraturas Curvarum, vel potius figurarum curvilinearum, || *veniat, præmittit brevem Iſagogen. Quæ* ** *ut meliùs intelligatur, ſciendum eſt, cùm magnitudo aliqua continuè creſcit, veluti linea, exempli gratiâ, creſcit fluxu puncti quod eam deſcribit, †† incrementa illa momentanea appellari differentias; nempe inter magnitudinem quæ antea erat, & quæ per mutationem momentaneam eſt producta; atque hinc natum eſſe calculum differentialem, eique reciprocum ſummatorium; cujus elementa ab inventore D. Godefrido Guilielmo Leibnitio in his Actis ſunt tradita; variique uſus tum ab ipſo, tum à D D. Fratribus Bernoulliis, tum & D. Marchione Hoſpitalio (cujus nuper extincti immaturam mortem omnes magnopere dolere debent, qui profundioris doctrinæ profectum amant) ſunt oſtenſi. Pro differentiis igitur Leibnitianis D. Newtonus ‡‡ adhibet, ſemperque adhibuit, fluxiones; quæ ſunt quàm proximè ut fluentium argumenta, æqualibus temporis particulis quàm minimis genita; iiſque, tum in ſuis Principiis Naturæ Mathematicis, tum in aliis poſtea editis, eleganter eſt uſus; quemadmodum & Honoratus Fabrius in ſuâ Synopſi Geometricâ, motuum progreſſus Cavallerianæ methodo ſubſtituit.*

Subinde editores vice ſymbolorum Newtoni deſcribunt ſymbola Leibnitii, & poſtea librum Newtoni ſic breviter attingunt.

Cùm regreſſus à differentiis ad quantitates, vel à quantitatibus ad ſummas, vel denique à fluxionibus ad fluentes non ſemper algebraicè fieri poſſit; ideo quærendum eſt, tum quibus caſibus quadratura algebraicè ſuccedat, tum quomodo, algebraico ſucceſſu deficiente, aliquid ſubſidiarium adhiberi queat. In utroque enim à D. Newtono eſt utiliſſimè laboratum, tum aliàs, tum in hoc tractatu de quadraturis; ubi

** Ut Iſagoge meliùs intelligatur, Leibnitius deſcribit calculum ſuum differentialem, & omittit calculum Newtonianum, quem ſolum deſcribere debuiſſet. Hoc fecit, non ut calculus Newtonianus, in Iſagoge traditus meliùs intelligatur, ſed ut rejiciatur.

†† Incrementa illa momentanea Newtonus momenta, Leibnitius poſtea differentias vocavit. Et inde natum eſt nomen calculi differentialis.

‡‡ Senſus verborum eſt, quòd Newtonus fluxiones differentiis Leibnitianis ſubſtituit, quemadmodum Honoratus Fabrius motuum progreſſus Cavallerianæ methodo ſubſtituerat; id eſt, quod Leibnitius author primus fuit hujus methodi, & Newtonus eandem à Leibnitio habuit, ſubſtituendo fluxiones pro differentiis.

*ſeries adhibet infinitas; quæ, eo caſu quo abrumpuntur, ſeu finiuntur, quæſitum algebraicè exhibent. De * quo etiam dictum eſt nuper in recenſione tractatus D. Cheynæi, Medici Scoti Londini degentis. Conferri etiam poteſt tractatus D. Craigii Scoti de Quadraturis, & ejuſdem theorema ad quadraturas pertinens, nuper in his Actis exhibitum; quæ faciunt etiam, ut ipſis theorematis Newtonianis recenſendis ſupersedeamus, quia paucis exponi non poſſunt: quemadmodum nec ejuſdem theoremata quædam reductionis ad quadraturas faciliores.*

His permotus D. Joannes Keill, in epiſtolâ in Philoſophicis Tranſactionibus A. C. 1708, menſibus Septemb. & Octob. impreſſâ, ſcripſit in contrarium, quòd Fluxionum Arithmeticam, ſine omni dubio, primus invenit Dominus Newtonus, ut cuilibet ejus epiſtolas, à Walliſio editas, legenti facilè conſtabit. Eadem tamen arithmetica poſtea, mutatis nomine & notationis modo, à Domino Leibnitio in Actis Eruditorum edita eſt.

N°LXXX. *Epiſtola D.* Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *Regiæ Societatis Secretarium,* 4 Martii *S. N.* 1711 *data.*

Gratias ago, quòd noviſſimum volumen præclari operis Tranſactionum Philoſophicarum ad me miſiſti; quamvis nunc demum mihi, Berolinum excurrenti, redditum ſit. Itaque excuſabis, quòd pro munere ſuperioris anni nunc demum gratiæ, dudum debitæ, redduntur.

Vellem inſpectio operis me non cogeret, nunc ſecundâ vice, ad vos querelam deferre. Olim Nicolaus Fatius Duillierius me pupugerat, in publico ſcripto, tanquam alienum inventum mihi attribuiſſem. Ego eum in Actis Eruditorum Lipſienſibus meliora docui; & vos ipſi, ut ex literis à Secretario Societatis veſtræ inclytæ (id eſt, quantum memini, à teipſo) ſcriptis didici, hoc improbâſtis. Improbavit Newtonus ipſe vir excellentiſſimus, quantum intellexi, præpoſterum quorundam hâc in re erga veſtram gentem & ſe ſtudium. Et tandem D. Keillius in hoc ipſo volumine, menſe *Sept. Octob.* 1708, pag. 185, renovare ineptiſſimam accuſationem viſus eſt; cùm ſcripſit, *Fluxionum Arithmeticam à Newtono inventam, mutato nomine & notationis modo, à me editam fuiſſe.* Quæ qui legit, & credit, non poteſt non ſuſpicari, alterius inventum à me, larvatum ſubdititiis nominibus characteribuſque, fuiſſe protruſum. Id quidem quàm falſum ſit, nemo melius ipſo D. Newtono novit. Certè ego nec nomen calculi fluxionum fando audivi; nec characteres, quos adhibuit D. Newtonus, his oculis vidi, antequam in Walliſianis operibus prodiere. Rem etiam me habuiſſe, multis antè annis quàm edidi, ipſæ literæ apud Walliſium editæ demonſtrant. Quomodo ergo aliena mutata edidi, quæ ignorabam.

Etſi autem D. Keillium, à quo magis præcipiti judicio quàm malo animo peccatum puto, pro calumniatore non habeam; non poſſum tamen non ipſam accuſationem in me injuriam pro calumniâ habere. Et quia verendum eſt,

* Senſus eſt, quòd quæ Newtonus habet in hoc tractatu de quadraturis, & ſpeciatim de quadraturis illis ubi ſeries abrumpuntur, vel finiuntur, à Cheynæo & Craigio priùs dicta ſunt, & in his Actis nuper exhibita; quæ, quia multa ſunt, faciunt, ut à Newtonianis recenſendis editores Actorum

eſt, ne ſæpe vel ab improbis, vel ab imprudentibus repetatur; cogor remedium ab inclytâ veſtrâ Societate Regiâ petere. Nempe æquum eſſe vos ipſi, credo, judicabitis, ut D. Keillius teſtetur publicè, non fuiſſe ſibi animum imputandi mihi, quod verba inſinuare videntur, quaſi ab alio hoc quicquid eſt inventi didicerim, & mihi attribuerim. Ita ille & mihi læſo ſatisfaciet, & calumniandi animum à ſe alienum eſſe oſtendet; & aliis, aliâs ſimilia aliquando jactaturi, frænum injiciętur. Quod ſupereſt vale & fave.

Dabam Berolini 4 *Martii* 1711.

Epiſtola D Johannis Keill, *A. M. ex Æde Chriſti* Oxon. *R. S. Socii, & jam Aſtronomiæ Profeſſoris* Saviliani, *ad D.* Hans Sloane, *M. D. Regiæ Societatis Secretarium, cum D.* Leibnitio *communicanda.* N°LXXXI.

Cùm D. Leibnitii epiſtolam mecum Vir Cl. communicare dignatus ſis; ea etiam, quæ mihi viſum fuerit reſcribere, ne graveris accipere. Sentio virum egregium acerrimè de me queri, quaſi ei injuriam fecerim, & rerum à ſe inventarum gloriam aliò tranſtulerim. Fateor querelam hanc ideo mihi moleſtam eſſe; quòd nolim, ea ſit de me hominum opinio, quaſi ego calumniandi ſtudio, cuiquam in rebus mathematicis verſanti, nedum viro in iiſdem verſatiſſimo, obtrectarem; certè nihil ab ingenio meo magis alienum eſt, quàm alterius laboribus quicquam detrahere.

Agnoſco me dixiſſe fluxionum Arithmeticam à D. Newtono inventam fuiſſe, quæ mutato nomine & notationis modo, à Leibnitio edita fuit. Sed nollem hæc verba ita accipi; quaſi aut nomen, quod methodo ſuæ impoſuit Newtonus, aut notationis formam, quam adhibuit, D. Leibnitio innotuiſſe contenderem: ſed hoc ſolum innuebam, D. Newtonum fuiſſe primum inventorem Arithmeticæ fluxionum, ſeu calculi differentialis; eum autem in duabus ad Oldenburgum ſcriptis epiſtolis, & ab illo ad Leibnitium tranſmiſſis, indicia dediſſe, perſpicaciſſimi ingenii viro ſatis obvia, unde Leibnitius principia iſtius calculi hauſit, vel ſaltem haurire potuit: at cùm loquendi & notandi formulas, quibus uſus eſt Newtonus, ratiocinando aſſequi nequiret vir illuſtris, ſuas impoſuit.

Hæc ut ſcriberem, impulerunt Actorum Lipſienſium Editores; qui in eâ quam exhibent, operis Newtoniani de fluxionibus ſeu quadraturis enarratione, diſertè affirmant D. Leibnitium fuiſſe iſtius methodi inventorem; & Newtonum aiunt pro differentiis Leibnitianis fluxiones adhibere, ſemperque adhibuiſſe. Id quidem in iiſdem ſcriptoribus obſervatu dignum; quod loquendi & notandi formam, à Newtono adhibitam, in Leibnitianam paſſim in eâdem enarratione transferunt; de differentiis ſcilicet, & ſummis, & calculo ſummatorio loquuntur, de quibus eſt nullus apud Newtonum ſermo: quaſi inventa Newtoni Leibnitianis poſteriora fuerint, & à calculo Leibnitii, in Actis Lipſienſibus anno 1684 deſcripto, ortum derivârint. Cùm reverâ Newtonus, ut ex ſequentibus patebit, fluxionum methodum invenerit, octodecim ſaltem annos antequam Leibnitius quicquam de calculo differentiali

torum ſuperſedeant. Et eodem ſenſu D. Leibnitius ad Secretarium Societatis Regiæ nuper ſcripſit, ſuum cuique hic redditum eſſe, quaſi ſecundam Newtoni ad Oldenburgum epiſtolam, ad ſe miſſam, & ſuprà impreſſam nunquam legiſſet. Vide pag. 544—547.

ferentiali edidiſſet, tractatumque de eâ re conſcripſerit; cujus cùm ſpecimina quædam Leibnitio oſtenſa ſint, rationi non incongruum eſt, ea aditum illi ad calculum differentialem aperuiſſe.

Unde ſi quid de Leibnitio liberiùs dixiſſe videar, id eo animo feci, non ut ei quicquam eriperem; ſed ut quod Newtoni eſſe arbitrabar, auctori ſuo vindicarem.

Maxima equidem eſſe Leibnitii in rempublicam literariam merita, lubens agnoſco; nec eum in reconditiore matheſi ſcientiſſimum eſſe, diffitebitur, qui ejus in Actis Lipſienſibus ſcripta perlegerit. Cùm autem tantas tamque indubitatas opes de proprio poſſideat; certè non video, cur ſpoliis ab aliis detractis onerandus ſit. Quare cùm intellexerim, populares ſuos ita illi favere, ut eum laudibus non ſuis accumulent; haud præpoſterum in gentem noſtram ſtudium eſſe duxi, ſi Newtono, quod ſuum eſt, tueri & conſervare anniterer: nam ſi Lipſienſibus fas fuerit, aliena Leibnitio affingere, Britannis ſaltem ea, quæ à Newtono erepta ſunt, ſine crimine calumniæ repoſcere licebit. Itaque cùm ad Regiam Societatem appellet vir illuſtris, meque publicè teſtari velit, calumniandi animum à me alienum eſſe; ut calumniandi crimen à me amoveam, mihi oſtendendum incumbit, D. Newtonum verum & primum fuiſſe Arithmeticæ fluxionum, ſeu calculi differentialis, inventorem; deinde ipſum adeo clara & obvia methodi ſuæ indicia Leibnitio dediſſe, ut inde ipſi facile fuerit, in eandem methodum incidere.

Sciendum verò primum eſt, celeberrimos tunc temporis geometras, Dominos Franciſcum Sluſium, Iſaacum Barrovium, & Jacobum Gregorium, methodum habuiſſe, quâ Curvarum tangentes ducebant, quæ à fluxionum methodo non multum abludebat; & iiſdem principiis innixa fuit. Nam ſi pro literâ *o*, quæ in Jacobi Gregorii Parte Matheſeos Univerſali quantitatem infinitè parvam repræſentat; aut pro literis *a* vel *e*, quas ad eandem deſignandam adhibet Barrovius; ponamus $\dot{x}$ vel $\dot{y}$ Newtoni, vel dx ſeu dy Leibnitii; in formulas fluxionum, vel calculi differentialis, incidemus: & regreſſus, quo à datâ tangentium proprietate ad naturam Curvæ perveniebant, quem methodum tangentium inverſam nominabant, eadem plane res erat, ac methodus quâ à fluxionibus ad fluentes revertitur: interim ſuam methodum non ultra fluxiones primas extendebant; neque eandem ad quantitates ſurdis aut fractionibus involutas accommodare potuerunt. At prius quàm quicquam de hoc argumento à ſummis hiſce viris publico datum eſt, D. Newtonus methodum excogitavit, priori quidem non diſſimilem, ſed multo latius patentem; quæ non ſubſtitit ad æquationes eas, in quibus una vel utraque quantitas indefinita radicalibus eſt involuta; ſed, abſque ullo æquationum apparatu, tangentem confeſtim ducere monſtrabat; quæſtiones de maximis & minimis eodem artificio tractabat; & ſpeculationes de quadraturis facilius explicuit. Hæc conſtant ex epiſtolâ Newtoni, ad D. Collinium datâ, Decembris die 10, anno 1672, & inter Collinii chartas repertâ.

Hæc epiſtola habetur impreſſa N° XXVI.

Ex

Ex hâc epiſtolâ clarè conſtat, D. Newtonum methodum fluxionum habuiſſe ante annum 1670, eodem nempe quo Barrovii Lectiones editæ ſunt.

Anno 1669 miſit Newtonus ad D. Collinium tractatum de Analyſi per Æquationes Infinitas; quem etiam, inter ſchedas Collinii repertum, D. Jones nuper edidit. Sub hujus fine habetur demonſtratio regulæ pro Quadraturis Curvarum, nata ex proportione augmentorum naſcentium abſciſſæ & ordinatæ, cùm abſciſſa ſit z, & ordinata $x^{\frac{p}{n}}$; quæ quidem demonſtratio commune fundamentum eſt tam doctrinæ fluxionum, quàm calculi differentialis. Ex eo autem tractatu non pauca, amicis ſuis communicanda, deprompſit Collinius: unde certum eſt, D. Newtono, ante illud tempus, fluxionum Arithmeticam innotuiſſe. Præterea conſtat ex poſteriore Newtoni ad Oldenburgum epiſtolâ, eum, ſuadentibus amicis, circa annum 1671 tractatum de hiſce rebus conſcripſiſſe; quem, unà cum theoriâ lucis & colorum, in publicum dare ſtatuerat: ſcribitque Oldenburgo, ſeries infinitas non magnam ibi obtinuiſſe partem; ſeque alia haud pauca congeſſiſſe, inter quæ erat methodus ducendi tangentes, quam ſolertiſſimus Sluſius, ante annos duos treſve, cum Oldenburgo communicaverat; ſed quæ generalior facta, non ad æquationes, quæ ſurdis aut fractionibus involutæ ſunt, hærebat; &, eodem fundamento uſum, ad theoremata generalia, quadraturas Curvarum ſpectantia, perveniſſe ſe ait Newtonus. Horum unum exempli loco in ipſâ epiſtolâ ponit; ſeriem exhibens, cujus termini dant quadraturam Curvæ, cùm abſciſſa eſt z & ordinatim applicata $dz^9 \times \overline{e + fz}^{\wedge}$. Quæ ſeries abrumpitur, & terminis finitis Curvæ quadraturam comprehendit, quandocunque illa finitâ æquatione exprimi poteſt. Hoc dicit eſſe primum theorematum generaliorum; unde ſequitur, eum alia, ad caſus difficiliores & magis intricatos accommodata, habuiſſe: eſt autem theorema illud Propoſitio v. in tractatu de quadraturis. Eodem etiam ſpectat ejuſdem Prop. vi. ſed ad caſus magis implicatos ſe extendit. Propoſitiones tertia & quarta ſunt lemmata Theor. hiſce demonſtrandis præmiſſa. Secunda autem in quadraturis Propoſitio extat in tractatu de Analyſi per Æquationes Infinitas, & prima propoſitio eſt ea ipſa, quam in dictâ epiſtolâ fundamentum operationum vocat, & tranſpoſitis literis celari tunc voluit. Scribit etiam Newtonus, ſe dudum theoremata quædam, quæ comparationi Curvarum cum ſectionibus conicis inſerviant, in catalogum retuliſſe; & ordinatas Curvarum, quæ ad eam normam comparari poſſunt, in eâdem epiſtolâ deſcribit; quæ profecto eædem planè ſunt cum iis, quas tabula ſecunda ad ſcholium Propoſitionis x. in tractatu de quadraturis, exhibet; unde ſatis liquet tabulam illam & Propoſitiones vii, viii, ix & x, quæ ſunt in tractatu de quadraturis (à quibus tabula pendet) Newtonum dudum inveniſſe ante annum 1676, quo ſcripta eſt epiſtola illa poſterior. Cùm verò, in primâ ad Oldenburgum epiſtolâ, dicit ſe ab ejuſmodi ſtudiis per quinquennium abſtinuiſſe; hinc ſatis clarè colligi poteſt, propoſitiones in tractatu de quadraturis à D. Newtono inventas fuiſſe, quinquennio ſaltem antequam epiſtolæ illæ ad Oldenburgum ſcriptæ. N° LXXXII.

tæ eſſent; totamque illam de fluxionibus doctrinam, ante illud tempus ulterius à Newtono provectam eſſe, quàm ad hunc uſque diem à quoquam alio factum eſt ſub nomine calculi differentialis. Certè neminem novi, qui, in hâc provinciâ peragrandâ, æquis paſſibus cum Newtono progreſſus ſit: & pauci ſunt, iique inſignes geometræ, qui proſpicere queant, quouſque ille in eâdem provinciâ proceſſerit. Præterea, in poſteriore illâ ad Oldenburgum epiſtolâ, modum deſcribit, quo in ſeriem inciderit, cujus termini fluxiones, ſeu differentias, quantitatum in infinitum exhibent; quæ poſtquam inventa eſſet, dicit, peſtem ingruentem ipſum coegiſſe hæc ſtudia deſerere, & alia cogitare. At peſtis illa contigit annis 1665 & 1666; unde patet, etiam ante illud tempus fluxionum calculum D. Newtono innotuiſſe; hoc eſt duodecim ſaltem annos antequam calculum ſuum Oldenburgo communicavit Leibnitius; & novemdecim annos antequam Vir Illuſtris eandem in Actis Lipſienſibus edidit: & certè ante vitas haſce duas Newtoni epiſtolas, Leibnitium calculum ſuum differentialem habuiſſe, nulla apparent veſtigia. His omnibus ritè perpenſis, certiſſimè cuivis conſtabit, D Newtonum pro vero inventore Arithmeticæ fluxionum habendum eſſe.

N°LXXXIII. Reſtat jam ut inquiramus, quænam fuere indicia Leibnitio à Newtono derivata, unde ei facile foret calculum differentialem elicere. Et primo, ut dixi, nullibi oſtendit Leibnitius ſibi notum fuiſſe calculum differentialem, ante viſas has duas Newtoni epiſtolas; imo ante illud tempus longiore uſus eſt circuitu, cùm res faciliùs multo & ſuccinctiùs ex calculo fluerent differentiali. Hujus rei teſtis ſit epiſtola, ad Oldenburgum data $\frac{13}{23}$ Novembris 1676, quæ in Operum Walliſianorum tomo tertio etiam extat, in quâ modum tradit exprimendi rationem ſubtangentis ad ordinatam, in terminis quos non ingreditur ordinata; ubi ſi loco *y* & *dy* ipſarum valores vinculo incluſos poſuiſſet, ſtatim ſcopum attigiſſet.

In primâ epiſtolâ, quæ per Oldenburgum ad Leibnitium tranſmiſſa eſt, docuit Newtonus methodum, quâ quantitates in ſeries infinitas reducendæ ſint, i. e. quâ quantitatum fluentium incrementa exhiberi poſſunt. In ipſo enim initio ſeriem oſtendit, cujus termini hæc incrementa repræſentant. Sed illa D. Leibnitium prorſus latebat, ante viſam Newtoni epiſtolam, quâ exponitur.

Sit o incrementum momentaneum quantitatis fluentis x, & $\frac{m}{n}$ index dignitatis ejuſdem, & ſi pro x ſcribatur $x+o$, $x+2o$, $x+3o$, $x+4o$, &c. & quantitates $\overline{x+o}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+2o}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+3o}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+4o}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$, &c. in ſeries infinitas expandantur; habebimus totidem ſeries, quarum prima hæc eſt, quæ ſequitur: $x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m^2-mn}{2n^2}oox^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$ &c. In omnibus ſeriebus primus terminus erit ipſa quantitas fluens $x^{\frac{m}{n}}$; & ſi prior quælibet ſeries à poſteriore auferatur, habebimus harum ſerierum differentias primas; in quibus omnibus primus terminus eſt ſeriei primæ terminus primus,

primus, quem ingreditur quantitas o; ſcilicet $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$: &, evaneſcente o, fit ille terminus differentiis hiſce primis æqualis; vel quod idem eſt, erit quantitas $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$ fluentis incrementum primum.

Præterea ſi differentia quælibet prior à poſteriore auferatur, deveniemus ad differentias ſecundas; quarum omnium terminus primus per 2 diviſus, idem eſt cum termino ſecundo ſeriei primæ, quem ingreditur quantitas o; &, evaneſcente o, fiunt differentiæ illæ per binarium diviſæ ſingulæ æquales termino illi primo ſeriei, qui eſt $\frac{m^2-mn}{2n^2}ooz^{\frac{m-2n}{n}}$. Et eodem modo inveniemus ſuprà deſcriptæ ſeriei terminum $\frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$, æqualem eſſe ſingulis differentiis tertiis, per ſex diviſis. Et quilibet terminus ejuſdem ſeriei ad differentias reſpectivas ſemper habebit datam rationem; ſcilicet terminus primus, quem ingreditur o, æqualis eſt differentiis primis; ſecundus eſt differentiarum ſecundarum pars media; tertius, pars ſexta differentiarum tertiarum, &c. Haſce ſeries, quarum termini differentias omnes in infinitum repræſentant, invenit Newtonus, uti dixi, ante annum 1665; ſed illæ ante viſam Newtoni epiſtolam, in quâ exponitur, D. Leibnitium * latebant: nam ante illud tempus agnoſcit Leibnitius, ſemper ipſi neceſſe fuiſſe tranſmutare quantitatem irrationalem in fractionem rationalem, & deinde, dividendo Mercatoris methodo, fractionem in ſeriem reducere. Exinde etiam patet ſeriem hanc, differentias continentem, non habuiſſe D. Leibnitium, quòd poſtquam ipſi per Oldenburgum oſtenſa eſt, * rogat, ut D. Newtonus ipſius originem ſibi pandat.

Sit jam quantitas quælibet, ex conſtanti & indeterminatis utcunque compoſita, & vinculo incluſa; ſcilicet $\overline{a+bx^c}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$; cujus differentia habenda eſt. Conſtat, per regulam priùs traditam, quantitatis $a+bx^c$ differentiam eſſe $cbx^{c-1}o$, poſito quòd o ſit incrementum momentaneum fluentis x. Quare ſi pro $a+bx^c$ ſcribatur z, & pro $cbx^{c-1}o$ ſcribatur ω, erit $\overline{a+bx^c+cbx^{c-1}o}\overline{|}^{\frac{m}{n}} = \overline{z+\omega}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$; quæ ſi per regulam Newtoni in ſeriem expandatur, fit $z^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}}$ + &c. cujus ſeriei terminus $\frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}}$ eſt differentia prima quantitatis $z^{\frac{m}{n}}$, ſeu $\overline{a+bx^c}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$. Unde ſi loco z & ω reſtituantur ipſorum valores, $a+bx^c$ & $cbx^{c-1}o$, habebimus differentiam quantitatis $\overline{a+bx^c}\overline{|}^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}cbx^{c-1}o \times \overline{a+bx^c}\overline{|}^{\frac{m-n}{n}}$: vel ſi more Leibnitiano pro o ponatur dx, erit quantitatis $\overline{a+bx}\overline{|}^{\frac{m}{n}}$ differentia $\frac{m}{n}cbx^{c-1}dx \times \overline{a+bx^c}\overline{|}^{\frac{m-n}{n}}$; ubi videmus quantitatem differentialem,

* Vide epiſtolam Leibnitii ad Oldenburgum 27 Auguſti 1676, pag. 537.

ferentialem, $\frac{m}{n} cbx^{-1}dx$, extra vinculum ſemper manere. Atque hinc facile fuit D. Leibnitio, ope regulæ Newtonianæ, differentias quantitatum omnium exhibere, utcunque quantitates fluentes ſurdis aut fractionibus ſint implicatæ: id quod ante epiſtolicum illud, per Oldenburgum, cum Newtono commercium ipſi minimè notum fuit.

Quamvis hæc per ſe ſatis manifeſta ſunt calculi differentialis indicia; in ſecundâ tamen epiſtolâ, quæ per Oldenburgum ad Leibnitium miſſa eſt, alias adhuc clariores deſcribit Newtonus methodi ſuæ notas. Dicit enim, ſe habuiſſe methodum ducendi tangentes, quam ſolertiſſimus Sluſius ante annos duos treſve Oldenburgo impertitus eſt, ita ut habito ſuo fundamento nemo poſſet tangentes aliter ducere, niſi de induſtriâ à recto tramite erraret. Quinetiam ibi quoque oſtendit "Methodum hanc non hærere ad "æquationes, quibus una vel utraque quantitas indefinita radicalibus involuta eſt; ſed abſque ullâ æquationum reductione, quæ opus plerumque "redderet immenſum, tangentem confeſtim duci; & eodem modo in quæſtionibus de Maximis & Minimis, aliiſque quibuſdam, rem ſic ſe habere. "Fundamentum harum operationum dicit eſſe ſatis obvium, quod tamen "tranſpoſitis literis in illâ epiſtolâ celare voluit. Hoc etiam adjicit; hoc "fundamento ſpeculationes de quadraturis Curvarum ſimpliciores ſe reddidiſſe; & ad theoremata quædam generalia ſe perveniſſe ſcribit."

Cùm verò methodus Sluſiana tunc temporis Leibnitium minimè latere potuit, utpote in Actis Philoſophicis Londini publicata: cúmque Newtonus dicit, eandem & ſibi innotuiſſe, ex fundamento, quo habito non hærebat ad æquationes radicalibus utcunque involutas; in quâ quidem tota rei difficultas poſita eſt: cúmque in priore epiſtolâ ſeriem deſcripſit, cujus ope differentiæ haberi poſſunt, ubi fluentes ſurdis aut fractionibus utcunque implicatæ ſunt: cùm denique idem fundamentum ad quadraturas Curvarum ſe applicuiſſe dicit: minimè dubitandum eſt, hæc omnia facem Leibnitio prætuliſſe, quo faciliùs methodum Newtoni perſpiceret.

N°LXXXIV. Quod ſi hæc non ſuffeciſſe videantur indicia; etiam ulterius proceſſit Newtonus, & exempla methodi ſuæ dedit, & regulam oſtendit, quâ ex datis quarundam Curvarum ordinatis, earundem areæ exhibentur in terminis finitis, cùm hoc fieri poteſt; hoc eſt, in ſtylo Leibnitiano, ipſi exempla tradidit, quibus à differentiis ad ſummas pervenitur. Et à ſimplicioribus orſus, * proponit primo parabolam, cujus abſciſſa eſt z, & ordinatim applicata $\sqrt{az} = a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$; & Curvæ area erit $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; hoc eſt, quando differentia areæ eſt $dz \times \sqrt{az}$, ſeu $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} \times dz$, oſtendit fore aream $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; unde viciſſim concluditur, ſi quantitas differentianda ſit $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$, fore ejus differentiam $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}dz$ ſeu $\frac{1}{2}dz\sqrt{az}$. Exemplum ejus ſecundum eſt Curva, cujus abſciſſa eſt z, & ordinatim applicata $\frac{a^4z}{c-z^2}$: ubi oſtendit Newtonus Curvæ aream fore $\frac{a^4}{2c^4-2z^2}$: hoc eſt, ſi differentia areæ ſit $\frac{a^4zdz}{\overline{c^4-z^2}^2}$, oſtendit aream

* Vide pag. 545.

fore $\frac{a^4}{2c^4-2z}$. Unde viciſſim ſi quantitas differentianda ſit $\frac{a^4}{2c^4-2z^2}$, concludi poteſt differentiam fore $\frac{a^4z \times dz}{\overline{c^4-z^2}^2}$. Vel ſi ejuſdem Curvæ ordinata ſic enunciatur, $\frac{a^4}{z^2 \times \overline{c^2z^{-1}-1}^2}$; erit area $= \frac{a^4z^2}{2c^4-2c^2z^2}$. Quare & viciſſim, ſi quantitas differentianda ſit $\frac{a^4z^2}{2c^4-2c^2z^2}$, erit differentia $\frac{a^4dz}{z^2 \times \overline{c^2z^{-1}-1}^2}$.

Hinc ad exempla quædam difficiliora progreditur Newtonus; in iiſque oſtendit, quomodo ab ordinatis, hoc eſt à differentiis, ad ſummas perveniendum ſit: ex quibus patebit, Curvam omnem quadrabilem fore, cujus ordinata, in differentiam abſciſſæ ducta, ſit quantitatis alicujus differentia; & hinc innumera Curvarum genera aſſignari poſſunt, etiam geometricè quadrabilia.

His indiciis atque his adjutum exemplis, ingenium vulgare methodum Newtonianum penitus diſcerneret; ita ut ne ſuſpicari fas ſit, eam acerrimum Leibnitii acumen poſſe latuiſſe; quem quidem uſum fuiſſe his ipſis clavibus, ad hæc ſua quæ feruntur inventa, aditum, etiam ex ipſius ore ſatis eluceſcit. Nam in epiſtolâ ad Oldenburgum datâ, poſt explicatum calculum differentialem, exemplum addit, quod coincidere agnoſcit cum regulâ Sluſianâ; & poſtea addit. * "Sed methodus ipſa priore noſtrâ "longè eſt amplior: non tantùm enim exhiberi poteſt, cùm plures ſint literæ indeterminatæ quàm x & y; quod ſæpe fit maximo cum fructu: ſed "& tunc utilis eſt, cùm interveniunt irrationales; quippe quæ eam nullo "morantur modo, neque ullo modo neceſſe eſt irrationales tolli; quod in "regulâ Sluſii neceſſe eſt, & calculi difficultatem in immenſum auget." Hæc omnia à Newtono priùs, in ſecundâ ejus epiſtolâ, dicta ſunt. Inde exempla proponit, quorum quidem quod primum eſt, neſcio quo fato, idem prorſus eſt ac id, quod, in eâ epiſtolâ quam Leibnitio tranſmiſerat Oldenburgus, etiam primum protulerit Newtonus.

Mox addit vir illuſtriſſimus, * "Arbitror, quæ celare voluit Newtonus "de tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc fundamento quadraturas quoque reddi faciliores, me in hâc ſententiâ confirmat. Nimirum ſemper figuræ illæ ſunt quadrabiles, quæ ſunt ad æquationem differentialem. Æquationem differentialem voco talem, quâ "valor ipſius dx exprimitur, quæque ex aliâ derivata eſt, quâ valor ipſius "x exprimebatur." Et paulo pòſt, ſuam de hâc re ſententiam pleniùs aperit; dicitque hanc unicam regulam pro infinitis figuris quadrandis inſervire, diverſæ planè naturæ ab iis quæ hactenus quadrari ſolebant. Quis eſt jam, qui hæc perpendet, & non videbit, indicia & exempla Newtoni ſatis à Leibnitio perſpecta fuiſſe; ſaltem quoad differentias primas? Nam quoad differentias ſecundas, Leibnitium methodum Newtonianam tardiùs intellexiſſe videtur, quod brevi forſan clarius monſtrabo.

Interim facilè illuſtri viro aſſentior, & credo eum nec nomen calculi fluxionum fando audiviſſe; nec characteres, quos adhibuit Newtonus, oculis

* Vide pag. 560, 561.

vidiſſe, ante quàm in Walliſianis operibus prodiere. Obſervo enim, ipſum Newtonum ſæpius mutâſſe nomen & notationem calculi. In tractatu de Analyſi Æquationum per Series Infinitas, incrementum abſciſſæ per literam *o* deſignat: et in Principiis Philoſophiæ fluentem quantitatem genitam vocat, ejuſque incrementum momentum appellat: illam literis majoribus, A vel B, hoc minuſculis, *a* & *b*, deſignat.

Id etiam ultrà agnoſco; inter cætera quæ de re mathematicâ præclarè meritus eſt Leibnitius, hoc itidem illi deberi; quòd primus fuerit, qui calculum hunc typis edidit, & in publicum produxit: itaque eo ſaltem nomine magnam apud matheſeos amantes inibit gratiam, quòd inventum ita nobile, & in multiplices uſus deducendum, diutius eos noluerit latere.

Habes, Vir Cl. quæ de hoc argumento ſcribenda duxi; unde facilè credo percipies, hoc qualecunque fuerit meum in gentem noſtram ſtudium, ita parum præpoſterum fuiſſe, ut nihil omnino niſi quod Newtoni erat, Leibnitio detraxerim; nec dubito, quin æqui rerum æſtimatores uno ore fateantur me, uti nullo calumniandi animo, ita nec præcipiti judicio, ea dixiſſe, quæ tibi tot argumentis luce meridianâ clariùs comprobavi.

Lecta eſt hæc epiſtola coram Regiâ Societate, in conventu die 24 Maii 1711 *habito; & ut exemplar ejus D.* Leibnitio *mitteretur, D.* Sloane *Secretario ſuo mandatum eſt.*

N° LXXXV. *Epiſtola D.* Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *M. D. & R. S. Sec.*

Quæ D. Johannes Keillius nuper ad te ſcripſit, candorem meum apertiùs quàm antè oppugnant: quem ut ego hâc ætate, poſt tot documenta vitæ, apologiâ defendam; & cum homine docto, ſed novo, & parum perito rerum anteactarum cognitore, nec * mandatum habente ab eo cujus intereſt, tanquam pro tribunali litigem; nemo prudens æquuſque probabit.

Quæ ille de meo rem cognoſcendi modo ſuſpicatur, haud ſatis exercitatus artis inveniendi arbiter, ipſius quidem docendi cauſâ non eſt cur refellam: ſed nôrunt † amici, quàm longè alio, & ad alia proficuo, itinere proceſſerim. Fruſtra ad exemplum Actorum Lipſienſium provocat, ut ſua dicta excuſet; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, ſed potius paſſim ‡ ſuum cuique tributum. Ego quoque & amici

* Quaſi methodum Moutoni, & ſeries Brounkeri, Walliſii & Gregorii, aliorumque inventa non liceat propriis authoribus, niſi authoritate ab his acceptâ, aſſerere.

† Si amici illi ſunt Germani, invenit is hanc methodum poſt reditum ſuum in Germaniam.

‡ Scripſerit Keillius in hæc verba. *Hæc ut ſcriberem, impulerunt Actorum Lipſienſium Editores; qui, in eâ quam exhibent operis Newtoniani de fluxionibus ſeu quadraturis enarratione, diſertè affirmant, D Leibnitium fuiſſe iſtius methodi inventorem, & Newtonum aiunt pro differentiis Leibnitianis fluxiones adhibere ſemperque adhibuiſſe.* Leibnitius editores hîc palam defendit contra Keillium, quaſi ſuum cuique reddidiſſent.

§ In epiſtolâ Aug. 27, 1676, properavit ſe coinventorem methodi ſerierum proponere. In epiſtolâ Junii 21, 1677, properavit methodum ut ſuam deſcribere, de quâ Newtonus tractatum ante annos quinque ſcripſerat. In ſchedis tribus anno 1689 impreſſis, properavit propoſitiones principales Principiorum Philoſophiæ ad calculum ſuum revocatas in lucem edere, ut in inventoris jura veniret.

‖ Probandum eſt.

aliquoties

aliquoties oſtendimus, libenter à nobis credi, illuſtrem Fluxionum autorem per ſe ad ſimilia noſtris fundamenta perveniſſe. Neque eo minùs ego in inventoris jura venio; quæ etiam Hugenius, judex intelligentiſſimus incorruptiſſimuſque, publicè agnovit: in quibus tamen mihi vendicandis § non properavi; ſed inventum ‖ pluſquam nonum in annum preſſi, ut nemo me præcucurriſſe queri poſſit.

Itaque veſtræ æquitati committo, annon coercendæ ſint vanæ & injuſtæ vociferationes; quas ** ipſi Newtono, viro inſigni, & geſtorum optimè conſcio, improbari arbitror: ejuſque ſententiæ ſuæ libenter daturum indicia mihi perſuadeo.

VALE. Dabam Hannoveræ 29 Decemb. 1711.

Cùm D. Leibnitius à D. Keill, ut homine novo, ad Societatem Regiam pro- N°LXXXVI.
vocaret; Societas juſſit monumenta antiquiora conſuli; & ſociis aliquot, qui his examinandis aptiores viderentur, in mandatis dedit, ut in hanc rem inquirerent; & quæ in ſcriptis antiquis invenirent, ad ſe referrent, unà cum eorum ſententiâ. Et arbitrorum conſeſſus collectionem ex epiſtolis & aliis MSS. ſuprà impreſſam ad Societatem retulerunt, unà cum eorum ſententiâ ſequente.

We have conſulted the letters and letter-books in the cuſtody of the Royal Society, and thoſe found among the papers of Mr. John Collins, dated between the years 1669 *and* 1677 *incluſive; and ſhewed them to ſuch as knew and avouched the hands of Mr. Barrow, Mr. Collins, Mr. Oldenburg, and Mr. Leibnitz; and compared thoſe of Mr. Gregory with one another, and with copies of ſome of them taken in the hand of Mr. Collins; and have extracted from them what relates to the matter referred to us; all which extracts herewith delivered to you, we believe to be genuine and authentick. And by theſe letters and papers we find,*

1. *That Mr. Leibnitz was in London in the beginning of the year* 1673; *and went thence in or about March to Paris; where he kept a correſpondence with Mr. Collins, by means of Mr. Oldenburg, till about September* 676, *and then returned by London and Amſterdam to Hanover: and that Mr. Collins*

** Newtonus & Leibnitius nec ſunt idonei judices nec teſtes. Ex monumentis antiquis judicium ferendum eſt.

LITERAS & literarum apographa, tam quæ in archivis Regiæ Societatis, quàm quæ inter chartas D. Joannis Collinii aſſervantur, & inter annos 1669 & 1677 datæ ſunt, inſpeximus; & ex his, quæ D. Barrovii, D. Collinii, D. Oldenburgi & D. Leibnitii nomen ferebant, ex fide aliquorum qui eorum autographa probè noverant, ipſorum eſſe certo didicimus. Literas autem, quæ Gregorium præ ſe ferebant auctorem, ipſius eſſe cognovimus fide Collinii; qui nonnullas earum, Gregorio aſſignatas, manu ſuâ exſcripſerat. Ex his omnibus excerpſimus, quæcunque ad rem nobis commiſſam pertinere videbantur; atque illa excerpta, quæ unà cum ipſis literis jam vobis traduntur, fideliter & accuratè facta eſſe comperimus. Ex his autem literis chartiſque nobis conſtat;

I. D. Leibnitium, anno ineunte 1673, Londini fuiſſe; unde menſe Martio, vel circiter, Pariſios adiit; ubi literarum commercium habuit cum D. Collinio, intercedente Oldenburgo, uſque in menſem Septembrem 1676: deinde per Londinum & Amſtelodamum Hannoveram reverſum eſſe: D. autem Collinium matheſeos peritis ea, quæ à D. Newtono & Gregorio acceperat, lubentiſſimè communicâſſe.

was very free in communicating, to able mathematicians, what he had received from Mr. Newton and Mr. Gregory.

II. *That when Mr. Leibnitz was the first time in London, he contended for the invention of another Differential Method properly so called; and notwithstanding that he was shewn by Dr. Pell, that it was Mouton's method, persisted in maintaining it to be his own invention, by reason that he had found it by himself, without knowing what Mouton had done before, and had much improved it. And we find no mention of his having any other Differential Method than Mouton's, before his letter of the 21st of June 1677, which was a year after a copy of Mr. Newton's letter, of the 10th of December 1672, had been sent to Paris to be communicated to him; and above four years after Mr. Collins began to communicate that letter to his correspondents; in which letter, the method of Fluxions was sufficiently described to any intelligent person.*

III. *That by Mr. Newton's letter of the 13th of June 1676 it appears, that he had the method of Fluxions above five years before the writing of that letter. And by his* Analysis per Æquationes numero Terminorum Infinitas, *communicated by Dr. Barrow to Mr. Collins in July 1669, we find that he had invented the method before that time.*

IV. *That the Differential Method is one and the same with the Method of Fluxions, excepting the name and mode of Notation; Mr. Leibnitz calling those quantities Differences, which Mr. Newton calls Moments or Fluxions; and marking them with the letter* d, *a mark not used by Mr. Newton. And therefore we take the proper question to be, not who invented this or that method, but who was the first inventor of the method. And we believe, that those who have reputed Mr. Leibnitz the first inventor, knew little or nothing of his correspondence with Mr. Collins and Mr. Oldenburg long before; nor of Mr. Newton's having that method above fifteen years before Mr. Leibnitz began to publish it in the* Acta Eruditorum *of Leipsick.*

For which reason, we reckon Mr. Newton the first inventor; and are of opinion, that Mr. Keill, in asserting the same, has been no ways injurious to Mr. Leibnitz. And we submit to the judgment of the Society, whether the extract and papers now presented to you, together with what is extant to the same purpose in Dr. Wallis's third volume, may not deserve to be made publick.

His

II. D. Leibnitium, cùm primâ vice Londinum adiit, methodi cujusdam differentialis, propriè sic dictæ, se inventorem perhibuisse: et etiamsi D. Pellius ipsi monstraverat, eandem antea à D. Moutono usurpatam fuisse, haud tamen sibi inventoris jura asserere destitisse; cum quia proprio, ut aiebat, marte sua illa inveniisset, nondum vilis iis quæ Moutonus priùs ediderat, tum quia pluruma adjecisset. Neque usquam mentionem reperimus factam alterius methodi ejus differentialis, præter istam Mouroni, ante literas ejus 21 Junii 1677 datas; hoc est, anno integro postquam D. Newtoni epistola, 10 Decembris 1672 scripta, Parisios, ipsi communicanda, transmissa fuit; & quadriennio postquam D. Collinius eandem epistolam cum amicis communicare cœpit. In hâc autem epistolâ methodus fluxionum, idoneo harum rerum cognitori, evidenter satis describitur.

III. Ex literis D. Newtoni, 13 Junii 1676 datis, manifestum est, fluxionum methodum ipsi innotuisse, quinquennio prius quàm epistolam illam describeret. Et ex Analysi ejus *per Æquationes numero Terminorum Infinitas*, quam D. Barrovius cum D. Collinio mense Julio anni 1669 communicavit, constat illum etiam ante illud tempus eandem excogitâsse.

IV. Methodus Differentialis una eademque est cum Methodo Fluxionum, si nomen & notationis modum excipias. D. Leibnitius enim eas quantitates differentias appellat, quas D. Newtonus

His autem die Aprilis 24, 1712, acceptis, Societas Regia collectionem epistolarum & MSS. & sententiam Confessûs imprimi jussit; ut & quicquid amplius, ad hanc historiam elucidandam idoneum, in *Actis Eruditorum* occurreret.

tonus Momenta vel Fluxiones; easque notâ literæ [d] designat, quam non adhibet D. Newtonus. Rem proinde de quâ agimus hanc autumamus esse; non uter hanc, uter illam methodum invenerit; sed uter methodum ipsam, quæ unica est, prior invenerit. Simul illos, qui D. Leibnitium pro inventore primo habuere, de eo, quod inter illum & D. Collinium olim intercesserat, commercio, parum aut nihil resciviisse opinamur; neque intellexisse, D. Newtonum eâdem methodo usum esse, quindecim prius annos quàm D. Leibnitius eam in *Actis Eruditorum* Lipsiæ evulgare cœpit.

Quibus perpensis, D. Newtonum primum esse hujus methodi inventorem arbitramur; atque ideo D. Keillium, eandem illi asserendo, nullo modo D. Leibnitium calumniâ aut injuriâ affeciisse. Judicio autem Societatis permittimus, utrumne excerpta literarum, reliquæque chartæ his subnexæ, unà cum iis quæ extant in tertio volumine Operum D. Wallisii huc spectantibus, simul imprimi, & in publicum prodire mereantur.

APPENDIX.

APPENDIX.

HIC subjungere visum est Judicium Mathematici 7 Julii 1713 datum; & chartâ volante, sine nomine autoris, per orbem sparsum.

'VIDETUR Newtonus occasionem nactus, serierum opus multum promovisse per extractiones radicum, quas primus in usum adhibuit; & quidem in iis excolendis, ut verisimile est, ab initio omne suum studium posuit; nec credo tunc temporis vel somniavit adhuc de calculo suo fluxionum & fluentium, vel de reductione ejus ad generales operationes analyticas, ad instar algorithmi vel regularum arithmeticarum aut algebraicarum. Ejusque meæ conjecturæ [primum] validissimum indicium est, quod de literis x vel y punctatis, uno, duobus, tribus, &c. punctis superpositis, quas pro $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$; $\dot{y}$, $\ddot{y}$, &c. nunc adhibet, in omnibus istis epistolis (Commercii Epistolici, unde argumenta ducere volunt] nec volam, nec vestigium invenias. Imo ne quidem in Principiis Naturæ Mathematicis Newtoni, ubi calculo suo fluxionum utendi tam frequentem habuisset occasionem, ejus vel verbulo fit mentio, aut notam hujusmodi unicam cernere licet; sed omnia fere per lineas figurarum, sine certâ analysi, ibi peraguntur, more non ipsi tantùm, sed & Hugenio, imo jam antea [in nonnullis] dudum Torricellio, Roburvallio, Cavallerio, aliis, usitato. Primâ vice hæ literæ punctatæ comparuerunt in tertio Volumine operum Wallisii, multis annis postquam calculus differentialis jam ubique locorum invaluisset. Alterum indicium, quo conjicere licet, calculum fluxionum non fuisse natum ante calculum differentialem, hoc est; quòd veram rationem fluxiones fluxionum capiendi, hoc est differentiandi differentialia, Newtonus nondum cognitam habuerit; quod patet ex ipsis Principiis Phil. Math. ubi non tantùm incrementum constans ipsius x, quod nunc notaret per $\dot{x}$ punctatum uno puncto, designat per o [more vulgari, qui calculi differentialis commoda destruit] sed etiam regulam circa gradus ulteriores falsam dedit [quemadmodum ab eminente quodam Mathematico dudum notatum est] ..... Saltem apparet Newtono rectam methodum differentiandi differentialia non innotuisse, longo tempore postquam aliis fuisset familiaris."

Hactenus Judicium.

ANNOTATIO.

ANNOTATIO.

HÆC omnia refutantur supra, pag. 454—458, 467—483, 489, 503, 509, 510, 512, 535, 536, 544, 581, 582, 585, 586.

Methodum fluxionum utique non constitit in formâ symbolorum. Et Keillius hoc notaverat anno 1711 (pag. 477, 585, 586.) Pro fluxionibus ipsarum x, y, z, Newtonus quandoque ponit easdem literas punctis notatas, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$; quandoque easdem formâ majusculâ X, Y, Z; quandoque literas alias, ut p, q, r; quandoque lineas exponentes, ut DE, FG, HI (pag. 478.) Et hoc Newtonus in hunc usque diem facit, ut videre licet in libro de quadraturis; ubi fluxiones in propositione primâ denotantur per literas punctatas; in ultimâ, per ordinatas Curvarum; in introductione, per alia symbola; dum Newtonus ibi methodum fluxionum explicat illustratque per exempla (pag. 478.) Pro fluxionibus D. Leibnitius nulla habet symbola. Is momentorum, sive differentiarum symbola, dx, dy, dz, primo cœpit adhibere anno 1677; Newtonus momenta denotabat per rectangula sub fluxionibus & momento o, cùm analysin suam scriberet; anno scilicet 1669, aut antea. Leibnitius symbolis $\int x$, $\int y$, $\int z$ pro summis ordinatarum usus est jam inde ab anno 1686: Newtonus, in analysi suâ, eandem rem denotavit, inscribendo ordinatam in quadrato vel rectangulo ad hunc modum; $\boxed{\frac{aa}{64x}}$. Omnia Newtoni symbola sunt in suo genere prima; & symbola Leibnitii nondum obtinuerunt in Angliâ (pag. 477, 478.)

In Principiis naturæ Mathematicis Newtonus analytico suo fluxionum calculo utendi non habuit frequentem occasionem. Nam liber ille inventus est quidem per analysin; at scriptus est per synthesin, more Veterum, ut oportuit (pag. 479.) At analysis tamen ita elucet per synthesin illam, ut Leibnitius ipse olim agnoverit, Newtonum non solùm methodo suâ tangentes duxisse, sed majora multo consecutum, viso demum Libro Principiorum, se satis intellexisse (pag. 489.) Et in epistolâ suâ 28 Maii 1697 ad Wallisium scripta: "Methodum, inquit, profundissimi Newtoni "cognatam esse methodo meæ differentiali non tantùm animadverti, postquam opus ejus [Prin-"cipiorum scilicet] & tuum prodiit, sed etiam professus sum in Actis Eruditorum, & aliâs quo-"que monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quàm ipsius merito. Itaque "communi nomine designare soleo Analyseos Infinitesimalis" (pag. 483.) Et alibi de sublimi quâdam parte methodi, quâ Newtonus Solidum minimæ resistentiæ invenerat, hæc habet verba. "Quam methodum, ante D. Newtonum & me, nullus quod sciam geometra habuit; uti ante "hunc, maximi nominis geometram, nemo se habere PROBAVIT" (pag. 745.) Et in epistolâ ad Newtonum Hannoveræ datâ 7 Mart. 1693, ita scripsit: "Mirificè ampliaveras geometriam "tuis seriebus; sed edito Principiorum opere ostendisti, patere tibi, quæ analysi receptæ non "subsunt. Conatus sum ego quoque, notis commodis adhibitis, quæ differentias & summas ex-"hibent, geometriam illam, quam transcendentem appello, analysi quodammodo subjicere; nec "res male successit" (pag. 472.) Atque iterum in responso ad D. Fatium, quod habetur in Actis Eruditorum Maii 1700, pag. 203, lin. 21, id fatius est Leibnitius (pag. 472.) Sed & sectiones duas primas libri secundi Principiorum verbis aliis (absque symbolis differentialibus) composuit, & subjunxit; "se jam fundamenta geometrica jeciffe, & vias quasdam novas, satis antea "impeditas, aperuisse; omnia autem respondere suæ analysi infinitorum, hoc est calculo summa-"rum ac differentiarum" (pag. 481—483.) Et hoc fuit specimen omnium primum methodi differentialis, quod D. Leibnitius, circa problemata sublimiora orbi literario exhibuit.

Literæ punctatæ primâ vice comparuerunt, non (ut hic dicitur) in tertio volumine Operum Wallisii, quod prodiit anno 1699; sed in secundo volumine Operum ejus, quod prodiit anno 1693 (pag. 457, 481.) annis utique duobus antequam fama calculi differentialis ad aures Wallisii pervenerit, & annis tribus antequam Marchio Hospitalius Analysin suam infinitè parvorum ediderit, quâ calculus differentialis ubique locorum invalescere cœpit (pag. 469, 473, 474, 480, 481.)

Newtonus nunquam mutavit literam o in literam $\dot{x}$ punctatam uno puncto, sed literâ illâ o usus est in introductione ad Librum de Quadraturis, & adhuc utitur in eodem sensu ac sub initio; id-

que

que maximo cum fructu. Est enim *o* symbolum unicum, quo Newtonus utitur pro quantitate infinitè parvâ: at symbolum *x* quantitatem finitam designat (pag. 459, 456, 477—479.)

Methodus fluxiones omnes capiendi, seu differentiandi differentialia, habetur in propositione primâ libri de quadraturis: & est verissima, & optima. Eandem, cum exemplis in differentiis primis & secundis, Wallisius edidit in tomo secundo Operum suorum anno 1693, ut suprà; annis scilicet tribus antequam regula Leibnitii differentiandi differentialia lucem viderit (pag. 457, 480, 481.) Eandem regulam Newtonus, anno 1686, demonstravit synthetice in Lem. II. Lib. 2. Princip. (pag. 472) & posuit in epistolâ suâ ad Oldenburgum 24 Octob. 1676, tanquam fundamentum hujus methodi, de quâ tum ante annos quinque scripserat (pag. 455.) Et specimen ejusdem, quoad tangentes ducendas, posuit in epistolâ suâ ad Collinium 10 Decemb. 1672 (pag 510.) Et in eâdem epistolâ addidit problemata de Curvarum curvaturâ, seu geometricarum seu mechanicarum, per eandem methodum solvi (pag. 510.) Ex quo manifestum est, se jam tum suam methodum ad secunda ac tertia momenta extendisse. Cùm enim areæ Curvarum considerantur tanquam fluentes, ut in hâc analysi fieri solet, ordinatæ exprimunt fluxiones primas, tangentes autem datæ sunt per fluxiones secundas, & Curvaturæ per tertias (pag. 456.) Et anno 1669, in analysi suâ per series, Newtonus dixit: "Momentum est superficies, cùm de Solidis; & linea, cùm de superficiebus; & punctum, cùm "de lineis agitur:" quod perinde est, ac si dixisset: cùm Solida considerantur tanquam fluentia, eorum momenta sunt superficies; & horum momentorum momenta, vel secunda Solidorum momenta, sunt lineæ; & horum momenta, sive tertia Solidorum momenta, sunt puncta; adeoque quâ ratione momenta prima derivantur à fluentibus, secunda derivantur à primis, tertia à secundis, & sic deinceps in infinitum. Et quomodo momenta prima derivantur à fluentibus, ostenditur in analysi per series; inveniendo ordinatas curvilinearum ex areis (pag. 454—458, 503.)

In eâdem analysi Newtonus posuit secundam propositionem libri de quadraturis (pag. 581, lin. 30) dixitque "Curvarum areas & longitudines, id modò fiat, beneficio ejusdem methodi analyseos exactè "& geometricè determinari" (p. 503, lin. 2.) Et methodus hæcce Newtono innotuit annis aliquot antea, testibus Barrovio & Collinio (pag. 509, lin. 20, 21, 22, 23, 25) id est anno 1666, aut antea. Hæc methodus aliquatenus explicatur in epistolâ Newtoni ad Oldenburgium 24 Octob. 1676 datâ; ibique ex propositione primâ libri de quadraturis, illic ænigmaticè descriptâ, consequi dicitur (pag. 535, 536) & in propositione quintâ & sextâ libri illius plenius explicatur; & hæ propositiones ex propositionibus quatuor primis libri ejusdem consequuntur: ideoque methodus fluxionum, quatenus in propositionibus quinque vel sex primis libri de quadraturis exponitur, Newtono innotuit anno 1666 aut antea, testibus Barrovio & Collinio; ut & teste etiam Wallisio (pag. 474.) Sed & Marchio Hospitalius pro Newtono testis est; qui utique dixit, librum Principiorum Philosophiæ fere totum esse ex hoc calculo (pag. 472) & Leibnitium in methodum differentialem incidisse, efficiendo, ut methodus tangentium Barrovii non hæreret ad radicales (pag. 469—471) Newtonus enim, per epistolas 10 Decemb. 1672, & 24 Octob. 1676, Leibnitium admonuit, se hoc antea affecutum esse (pag. 510, 544.)

Ex iis etiam, quæ in epistolâ ad Oldenburgum 24 Octob. 1676 datâ, de tabulis figurarum curvilinearum, in scholio propositionis decimæ libri de quadraturis positarum, dicuntur; liquet methodum fluxionum & momentorum, quatenus in decem primis libri illius propositionibus habetur, diu ante annum 1676 Newtono innotuisse (pag. 581.) Id quod etiam colligi potest ex Corol 2. Prop. x. libri de quadraturis; quod utique in epistolâ Newtoni ad Collinium Nov. 8, 1676 datâ, & anno 1711 à Jonesio editâ, descriptum habetur.

FINIS COMMERCII EPISTOLICI.

ADDITAMENTA
COMMERCII EPISTOLICI
EX HISTORIA FLUXIONUM RAPHSONI.

PRÆFATUR RAPHSONUS.

Epiſtolæ ſequentes à D. Leibnitio *cum amicis ſuis in Gallia & alibi communicatæ, ad controverſiam præcedentem ſpectant.*

Prima ac tertia eſt ipſius Leibnitii; *ſecunda* Newtoni; *omnes ad amicum communem.*

Prima, circa menſem Novembrem vel Decembrem anni 1715 *ſcripta, non eſt epiſtola tota, ſed Additamentum.*

" VOILA', Monſieur, la lettre dont vous pourrez faire uſage, ſi vous
" le jugez à propos. Je viens maintenant à ce qui nous regarde.
" Je ſuis ravi que vous eſtes en Angleterre; il y a dequoy profiter; & il
" faut avouer qu'il y a là de trés habiles gens; mais ils voudroient paſſer
" pour être preſque ſeuls inventeurs; & c'eſt in quoy apparemment ils ne
" reuſſiront pas. Il ne paroiſt point que M. Newton ait eu avant moy la
" characteriſtique & l'algorithme infiniteſimal, ſuivant ce que M. Ber-
" noulli a tres bien jugé: quoyqu'il luy auroit eté fort aiſé d'y parvenir, s'il
" s'en fut aviſé. Comme il auroit eté fort aiſé à Apollonius de parvenir à
" l'Analyſe de Des Cartes ſur les courbes, s'il s'en etoit aviſé. Ceux qui
" ont ecrit contre moy n'ayant pas fait difficulté d'attaquer ma candeur,
" par des interpretations forcées & mal fondées; ils n'auront point le
" plaiſir de me voir répondre à de petites raiſons de gens, qui en uſent ſi
" mal, & qui d'ailleurs s'ecartent du fait. Il s'agit du calcul des differen-
" ces, & ils ſe jettent ſur les ſeries, oú M. Newton m'a precedé ſans dif-
" ficulté; mais je trouvay enfin une methode generale pour les ſeries, &
" aprés cela je n'avoit plus beſoin de recourir à ſes extractions. Ils au-
" roient mieux fait de donner les lettres entieres, comme M. Wallis a fait
" avec mon conſentement, & il n'a pas eu la moindre diſpute avec moy,
" comme ces gens la voudroient perſuader au public. Mes adverſaires
" n'ont publié du *Commercium Epiſtolicum* de M. Collins, que ce qu'ils
" ont crû capable de recevoir leur mauvaiſes interpretations. Je fis con-
" noiſſance avec M. Collins dans mon ſecond voyage d'Angleterre; car au
" premier (qui dura tres peu, parceque j'etois venu avec un miniſtre pub-
" lic) je n'avois pas encore la moindre connoiſſance de la geometrie avan-
" cée, & n'avois rien vû, ni entendu, du commerce de M. Collins avec Meſſ.
" Gregory & Newton; comme mes lettres echangées avec M. Oldenbourg
" en ce temps là, & quelque temps apres, feront aſſez voir. Ce n'eſt
" qu'en France que j'y ſuis entré, & M. Hugens m'en donna l'entrée.
" Mais a mon ſecond voiage, M. Collins me fit voir une partie de ſon
" commerce, & j'y remarquay que M. Newton avoua auſſi ſon ignorance
" ſur pluſieurs choſes; & dit entre autres, qu'il n'avoit rien trouvé ſur la

" dimenſion des curvilignes celebres que la dimenſion de la ciſſoide. Mais
" on a ſupprimé tout cela. Je ſuis faché qu'un auſſi habile homme que
" M. Newton s'eſt attiré la cenſure des perſonnes intelligentes, en defe-
" rant trop aux ſuggeſtions de quelque flatteurs, qui l'ont voulu brouiller
" avec moy.

" Sa philoſophie me paroit un peu étrange, & je ne crois pas qu'elle
" puiſſe s'etablir. Si tout corps eſt grave, il faut neceſſairement (quoyque
" diſent ſes deffenſeurs, & quelque emportement qu'ils temoignent) que la
" gravité ſoit une qualité occulte ſcholaſtique, ou l'effect d'un miracle.
" J'ay fait voir autrefois à M. Bayle, que tout ce qui n'eſt pas explicable par
" la nature des creatures eſt miraculeux. Il ne ſuffit pas de dire, Dieu a
" fait une telle loy de nature, donc la choſe eſt naturelle. Il faut que la
" loy ſoit executable par les natures des creatures. Si Dieu donnoit cette
" loy, par exemple à un corps libre, de tourner à l'entour d'un certain
" centre, il faudroit ou qu'il y joignit d'autres corps, qui par leur impul-
" ſion l'obligeaſſent reſter toujours dans ſon orbite circulaire, où qu'il mit
" une ange à ſes trouſſes; ou enfin il faudroit, qu'il y concourut extraor-
" dinairement. Car naturellement il s'ecartera par la tangente. Dieu
" agit continuellement ſur les creatures par la conſervation de leur natu-
" res, & cette conſervation eſt une production continuelle de ce qui eſt
" perfection en elles. Il eſt *intelligentia ſupramundana* parce qu'il n'eſt
" pas l'ame du monde, & n'a pas beſoin de *ſenſorium*.

" Je ne trouve pas le vuide demonſtré par les raiſons de M. Newton, ou
" de ſes ſectateurs; non plus que la pretendue gravité univerſelle, ou que
" les atomes. On ne peut donner dans le vuide & dans les atomes, que
" par des vues trop bornées. M. Clarke diſpute contre le ſentiment des
" Carteſiens, qui croyent que Dieu ne ſauroit déſtruire une partie de la ma-
" tiere, pour faire un vuide; mais je m'etonne qu'il ne voye point, que ſi
" l'eſpace eſt une ſubſtance differente de Dieu, la même difficulté s'y trou-
" ve. Or de dire que Dieu eſt l'eſpace, c'eſt luy donner des parties.
" L'eſpace eſt l'ordre des coexiſtences; & le temps eſt l'ordre des exiſtences
" ſucceſſives. Ce ſont des choſes veritables, mais ideales; comme les
" nombres.

" La matiere même n'eſt pas une ſubſtance, mais ſeulement *ſubſtantia-*
" *tum*, un phenomene bien fondé, & qui ne trompe point, quand on y pro-
" cede en raiſonnant ſuivant les loix ideales de l'arithmetique, de la geome-
" trie, & de la dynamique, &c. Tout ce que j'advance en cela paroiſt dé-
" montré. A propos de la dynamique, ou de la doctrine des forces, je
" m'etonne que M. Newton & ſes ſectateurs croyent que Dieu a ſi mal
" fait ſa machine, que s'il n'y mettoit la main extraordinairement, la
" montre ceſſeroit bien tôt d'aller. C'eſt d'avoir des idées bien étroites de
" la ſageſſe & de la puiſſance de Dieu. J'appelle extraordinaire toute ope-
" ration de Dieu, qui demande autre choſe que la conſervation des natures
" des creatures. Ainſi quoy que je croye la metaphyſique de ces meſſieurs
" là, *a narrow one*, & leur mathematique aſſez *arrivable*; je ne laiſſe pas
" d'eſtimer extremement les meditations phyſico-mathematiques de M.
" Newton;

" Newton; & vous obligeriez infiniment le public, monſieur, ſi vous
" portiez cet habile homme à nous donner juſqu'a ſes conjectures en phy-
" ſique. J'approuve fort ſa methode de tirer des phenomenes, ce qu'on en
" peut tirer ſans rien ſuppoſer, quand même ce ne ſeroit quelquefois que
" tirer des conſequences conjecturales. Cependant quand les *data* ne ſuf-
" fiſent point, il eſt permis (comme on fait quelquefois en déchifrant)
" d'imaginer des hypotheſes; & ſi elles ſont heureuſes, on s'y tient provi-
" ſionellement, en attendant que des nouvelles experiences nous apport-
" tent *nova data*, & ce que Bacon apelle *Experimenta Crucis*, pour choiſir
" entre les hypotheſes. Comme j'apprends que certain Anglois ont mal
" repreſenté ma philoſophie dans leur Tranſactions, je ne doute point qu'-
" avec ce que je vous mande icy, je ne puiſſe etre juſtifié. Je ſuis fort
" pour la philoſophie experimentale, mais M. Newton s'en ecarte fort,
" quand il pretend que toute la matiere eſt peſante, ou que chaque partie
" de la matiere attire chaque autre partie; ce que les experiences ne prou-
" vent nulment, comme M. Hugens à deja fort bien jugé, la matiere
" gravifique ne ſauroit avoir elle même cette peſanteur, dont elle eſt la
" cauſe, & M. Newton n'apporte aucune experience, ni raiſon ſuffiſante, pour
" le vuide & les atomes, ou pour l'attraction mutuelle generale. Et parce
" qu'on ne ſait pas encore parfaitement, & en detail, comment ſe produit
" la gravité, ou la force elaſtique, ou la magnetique, &c; on n'a pas rai-
" ſon pour cela d'en faire des qualitez occultes ſcholaſtiques, ou des mira-
" cles; mais on à encore moins raiſon de donner des bornes à la ſageſſe &
" à la puiſſance de Dieu, & de luy attribuer un *ſenſorium* & choſes ſembla-
" bles. Au reſte, je m'etonne que les ſectateurs de M. Newton ne don-
" nent rien, qui marque que leur maiſtre leur à communiqué une bonne
" methode j'ay eté plus heureux en diſciples."

Leiceſter-Fields,

SIR, *London*; *Feb.* 26, $17\frac{13}{14}$.

YOU know that the *Commercium Epiſtolicum* contains the antient letters and papers preſerved in the Archives and letter-books of the Royal Society, and library of Mr. Collins, relating to the diſpute between Mr. Leibnitz and doctor Keill; and that they were collected and publiſhed by a numerous committee of gentlemen of ſeveral nations, appointed by the Royal Society for that purpoſe. Mr. Leibnitz has hitherto avoided returning an anſwer to the ſame; for the book is matter of fact, and uncapable of an anſwer. To avoid anſwering it, he pretended the firſt year that he had not ſeen this book, nor had leiſure to examine it, but had deſired an eminent mathematician to examine it. And the anſwer of the mathematician (or pretended mathematician) dated June 7, 1713, was inſerted into a defamatory letter dated July 29 following, and publiſhed in Germany without the name of the author or printer, or city where it was printed. And the whole has been ſince tranſlated into French, and inſerted into another

other abuſive letter (of the ſame author, as I ſuppoſe) and anſwered by Dr. Keill in July 1714; and no anſwer is yet given to the doctor.

Hitherto Mr. Leibnitz avoided returning an anſwer to the *Commercium Epiſtolicum*, by pretending that he had not ſeen it. And now he avoids it, by telling you, that the Engliſh ſhall not have the pleaſure to ſee him return an anſwer to their ſlender reaſonings (as he calls them) and by endeavouring to engage me in diſputes about Philoſophy, and about ſolving of Problems; both which are nothing to the queſtion.

As for Philoſophy, he colludes in the ſignifications of words, calling thoſe things miracles, which create no wonder; and thoſe things occult qualities, whoſe cauſes are occult, though the qualities themſelves be manifeſt; and thoſe things the ſouls of men, which do not animate their bodies. His *Harmonia Præſtabilita* is miraculous, and contradicts the daily experience of all mankind; every man finding in himſelf a power of ſeeing with his eyes, and moving his body by his will. He prefers hypotheſes to arguments of induction drawn from experiments; accuſes me of opinions which are not mine; and inſtead of propoſing queſtions to be examined by experiments before they are admitted into Philoſophy, he propoſes hypotheſes to be admitted and believed, before they are examined: but all this is nothing to the *Commercium Epiſtolicum*.

He complains of the committee of the Royal Society, as if they had acted partially in omitting what made againſt me; but he fails in proving the accuſation. For he inſtances in a paragraph concerning my ignorance, pretending that they omitted it, and yet you will find it in the *Commercium Epiſtolicum*, pag. 547, lin. 2, 3, and I am not aſhamed of it. He ſaith, that he ſaw this paragraph in the hands of Mr. Collins when he was in London the ſecond time; that is, in October 1676. It is in my letter of the 24th of Octob. 1676, and therefore he then ſaw that letter. And in that, and ſome other letters writ before that time, I deſcribed my method of fluxions. And in the ſame letter I deſcribed alſo two general methods of ſeries, one of which is now claimed from me by Mr. Leibnitz.

I believe you will think it reaſonable, that Mr. Leibnitz be conſtant to himſelf; and ſtill acknowledge what he acknowledged above 15 years ago; and ſtill forbear to contradict what he forbore to contradict in thoſe days.

In his letter of the 20th of May 1675, he acknowledged the receipt of a letter from Mr. Oldenburg, dated the 15th of April 1675, with ſeveral converging ſeries contained therein. And I expect from him, that he ſtill acknowledge the receipt thereof. Many gentlemen of Italy, France, and Germany (yourſelf being one of them) have ſeen the original letters, and the entries thereof in the old letter-books of the Royal Society; and the Series of Gregory is in the letter of the 15th of April 1675, and in Gregory's original letter, dated the 15th of Feb. 1671.

In a letter dated the 12th of May 1676 (ſeen by the ſame gentlemen) he acknowledged that he then wanted the method for finding a Series for the arc whoſe ſine was given; and, by conſequence, that he wanted it when he

he wrote his letter of the 24th of October 1674; and I expect that he ſtill acknowledge it.

In the *Acta Eruditorum* for May 1700, in anſwer to Mr. Fatio, who had ſaid, that I was the oldeſt inventor by many years, Mr. Leibnitz acknowledged that nobody, ſo far as he knew, had the method of fluxions or differences before me and him; and that nobody before me had proved, by a ſpecimen made publick, that he had it. Here he allowed, that I had the method before it was publiſhed, or communicated by him to any body in Germany; that the *Principia Philoſophiæ* were a proof that I had it, and the firſt ſpecimen made publick of applying it to the different problems: and I expect, that he ſtill continue to make the ſame acknowledgment. At that time he did not deny what Mr. Fatio affirmed, and nothing but want of candour can make him unconſtant to himſelf.

In a letter to me dated the 7th of March 1693, and now in the cuſtody of the Royal Society, he wrote, *Mirificè amplivaveras geometriam tuis ſeriebus; ſed edito Principiorum opere, oſtendiſti patere tibi, quæ analyſi receptæ non ſubſunt. Conatus ſum ego quoque, notis commodis adhibitis, quæ differentias & ſummas exhibent, geometriam illam quam tranſcendentem appello, analyſi quodammodo ſubjicere, nec res malè proceſſit.* And what he then acknowledged, he ought ſtill to acknowledge.

In his letter of the 21ſt of June 1677, writ in anſwer to mine of the 24th of October 1676, wherein I deſcribed my method partly in plain words, and partly in cyphers; he ſaid, that he agreed with me, that the method of tangents of Sluſius was not yet made perfect; and then ſet down a Differential Method of Tangents, publiſhed by Dr. Barrow in the year 1670, and diſguiſed it by a new notation, pretending that it was his own, and ſhewed how it might be improved, ſo as to perform thoſe things which I had aſcribed to my method; and concluded from thence, that mine differed not much from his, eſpecially ſince it facilitated quadratures. And in the *Acta Eruditorum* for Octob. 1684, in publiſhing the Elements of his Method, he added, that it extended to the difficulter problems, which without this method, or another like it, could not be managed ſo eaſily. He underſtood therefore in thoſe days, that in the year 1676, when I wrote my ſaid letter, I had a method which did the ſame things with the method which he calls Differential, and he ought ſtill to acknowledge it; eſpecially now the ſentences in cyphers are decyphered, and other things in that letter, relating to the method, are fully explained, and the Compendium mentioned therein made publick.

In his letter of the 27th of Auguſt 1676, he repreſented, that he did not believe that my methods were ſo general as I deſcribed them in my letter of the 13th of June preceding; and affirmed, that there were many problems ſo difficult, that they did not depend upon equations or quadratures, ſuch as (amongſt many others) were the inverſe problems of tangents. And by theſe words he acknowledged, that he had not yet found the reduction of problems to Differential Equations. And what he then

acknowledged, he acknowledged again in the *Acta Eruditorum* for April 1691, pag. 178, and ought in candour to acknowledge ſtill.

Doctor Wallis, in the preface to the two firſt volumes of his works, publiſhed in April 1695, wrote, that I, in my two letters written in the year 1676, had explained to Mr. Leibnitz the method (called by me, the Method of Fluxions, and by him, the Differential Method) invented by me ten years before, or above (that is, in the year 1666, or before): and in the letters which followed between them, Mr. Leibnitz had notice of this paragraph, and did not then contradict it, nor found any fault with it; and I expect that he ſtill forbear to contradict it.

See Wallis's Vol. III. pag. 654, lin. 12.

But as he has lately attacked me with an accuſation which amounts to plagiary; if he goes on to accuſe me, it lies upon him by the laws of all nations to prove his accuſations, on pain of being accounted guilty of calumny. He hath hitherto written letters to his correſpondents full of affirmations, complaints and reflections, without proving any thing. But he is the aggreſſor, and it lies upon him to prove the charge.

I forbear to deſcend further into particulars; you have them in the *Commercium Epiſtolicum*, and the abſtract thereof, to both which I refer you. I am, Sir, yours, &c.

'MONSIEUR,

'C'EST ſans doute pour l'amour de la verité, que vous vous etes chargé d'une eſpace de cartel de la part de M. Newton. Je n'ay point voulu entrer en lice avec des enfans perdus, qu'il avoit detachés contre moy; ſoit qu'on entende celuy, qui à fait l'accuſateur ſur le fondement du *Commercium Epiſtolicum*; ſoit qu'on regarde la preface pleine d'aigreur, qu'un autre à miſe devant la nouvelle edition de ſes principes. Mais puiqu'il veut bien paroitre luy même, je ſeray bien aiſe de luy donner ſatisfaction.

'Je fus ſurpris au commencement de cette diſpute d'apprendre qu'on m'accuſoit d'etre l'aggreſſeur; car je ne me ſouvenois pas d'avoir parlé de M. N. que d'une maniere fort obligeante. Mais je vis depuis, qu'on abuſoit pour cela d'un paſſage des Actes de Leipzig du Janvier 1705, ou il y à ces mots: *Pro differentiis L...ſianis, D. N....nus adhibet, ſemperque adhibuit fluxiones*; ou l'auteur des remarques ſur le Commercium Epiſtolicum dit, pag. 577, *Senſus verborum eſt, quòd N....nus fluxiones differentiis L.....tianis ſubſtituit.* Mais c'eſt une interpretation maligne d'un homme qui cherchoit noiſe: il ſemble que l'auteur de paroles inſeré dans les Actes de Leipzig à voulu y obvier tout expres, par ces mots, *adhibet ſemperque adhibuit*; pour inſinuer, que ce n'eſt pas apres la veue de mes differences, mais deja auparavant, qu'il s'eſt ſervi de fluxions. Et je defie, qui que ce ſoit, de donner un autre but raiſonnable à ces paroles, *ſemperque adhibuit*. Au lieu qu'on ſe ſert du mot *ſubſtituit*, en parlant de ce que le Pere Fabri avoit fait apres Cavallieri. D'ou il faut conclure on

'que

'que M. N. s'eſt laiſſé tromper, par un homme qui a empoiſonné ces paroles des Actes, qu'on ſuppoſoit n'avoir pas eté publiées ſans ma connoiſſance, & s'eſt imaginé qu'on l'accuſoit d'etré plagiaire; ou bien qu'il a eté bien aiſe de trouver un pretexte, de s'attribuer ou faire attribuer privément l'invention du nouveau calcul (depuis qu'il en remarquoit le ſuccés, & le bruit qu'il faiſoit dans le monde) contre ſes connoiſſances contraires avouées dans ſon livre des Principes, pag. 253, de la premiere edition. Si l'on avoit fait connoitre qu'on trouvoit quelque difficulté, ou ſujet de plainte, dans les paroles des Actes de Leipzig; je ſuis aſſuré, que ces meſſieurs, qui ont part à ces Actes, auroient donné un plein contentement; mais il ſemble qu'on cherchoit un pretexte de rupture.

'Je n'ay pas eu connoiſſance du *numerous committee of gentlemen of ſeveral nations relating to the diſpute*; car on ne m'en a donné aucune part, & je ne ſay pas encore preſentement les noms de tous ces commiſſaires, & particulierement de ceux qui ne ſont pas des iſles Britanniques: je ne crois pas qu'ils approuvent tout ce qui a eté mis dans l'ouvrage publié contre moi.

'Il eſt aiſé à croire que j'ay eté quelque temps à Vienne, avant que d'avoir vû le *Commercium Epiſtolicum* deja publié, quoique j'en euſſe des nouvelles. Ainſi un ami ſachant cela, auſſi zelé pour moi que les ſeconds de M. N. le peuvent être pour luy, a publié une papier, que M. N. appelle diffamatoire *(defamatory letter.)* Mais cette piece n'etant pas plus forte, que ce qu'on a publié contre moi, M. N. n'a pas droit de s'en plaindre. Si l'on n'a pas marqué l'auteur ni le lieu de l'impreſſion du papier; on connoit aſſez le nom & le lieu de l'auteur de la lettre y inſerée d'un excellent mathematicien, que j'avois prié de dire ſon ſentiment ſur le *Commercium*, & cela ſuffit. M. N. (dont les partiſans ont marqué qu'il ne leur etoit pas inconnu) l'appelle un mathematicien, ou pretendu mathematicien; & apres avoir fait inutilement des efforts pour le gagner, il le mépriſe contre l'opinion publique, qui le met entre ceux du premier rang, & contre l'evidence des choſes verifiées par ſes découvertes

'Lors que j'eus enfin le *Commercium Epiſtolicum*, je vîs qu'on s'y écartoit entierement du but; & que les lettres, qu'on publioit, ne contenoient pas un mot, qui peut faire revoquer en doute mon invention du calcul des differences, dont il s'agiſſoit. Au lieu de cela je remarquay qu'on ſe jettoit ſur les ſeries; ou l'on accorde l'avantage à M. N. & que les rematques contenoient de gloſes mal tournées, pour tacher de me decrier par des ſoupçons ſans fondement quelquefois ridicules, & quelquefois forgés, contre la conſcience de quelques uns de ceux qui en étoient les auteurs, ou approbateurs.

'Pour repondre donc de point en point a l'ouvrage publié contre moi, il falloit un autre ouvrage auſſi grand pour le moins que celuy là; il falloit entrer dans un grand detail de quantitaté de minuties paſſées il y a 30 ou 40 ans dont je ne me ſouvenois gueres; il me falloit chercher mes vieilles lettres, dont pluſieurs ſe ſont perdues, outre que le plus ſouvent, je n'ay pas gardé les minutes des miennes; & les autres ſont enſevelies dans un

‘ grand tas de papiers, qui je ne pouvois debrouiller qu'avec du temps &
‘ de la patience. Mais je n'en avois gueres le loiſir, êtant chargé preſente-
‘ ment d'occupations d'une toute autre nature.

‘ De plus je remarquay, que dans la publication du *Commercium Epiſtoli-*
‘ *cum* on a ſupprimé des endroits qui pouvoient être au deſadvantage de
‘ M. N; au lieu qu'on n'y a rien omis, de ce qu'on croyoit pouvoir tourner
‘ contre moi par des gloſes forcées. Comme je n'ay pas daigné lire le
‘ *Commercium Epiſtolicum* avec beaucoup d'attention, je me ſuis trompé
‘ dans l'exemple que j'ay cité, n'ayant pas pris garde, ou ayant oublié
‘ qu'il s'y trouvoit; mais j'en citéray un autre. M. N. avouoit dans un
‘ des ſes lettres à M. Collins, qu'il ne pouvoit point venir à bout des ſec-
‘ tions ſecondes (ou ſegments ſeconds) de ſpheroides, ou corps ſemblables:
‘ mais on n'a point inſeré ce paſſage, ou cette lettre, dans le *Commercium*
‘ *Epiſtolicum*; il auroit êté plus ſincere par rapport à la diſpute, & plus
‘ utile au public, de donner le commerce litteraire de M. Collins tout en-
‘ tier, là ou il contenoit quelque choſe qui meritoit d'être lû; & particu-
‘ lierement de ne pas tronquer les lettres; car il y en a peu parmi mes pa-
‘ piers, ou dont il me reſte des minutes.

‘ Ainſi tout conſideré, voyant tant de marques de malignité & de chi-
‘ cane, je crûs indigne de moi d'entrer en diſcuſſion avec des gens, qui en
‘ uſoient ſi mal. Je voyois qu'en les refutant on auroit de la peine à éviter
‘ des reproches, & des expreſſions fortes, telles que meritoit leur procedé;
‘ & je n'avois point envie de donner ce ſpectacle au public, ayant deſſein
‘ de mieux employer mon temps, qui me doit être precieux, & mepriſant
‘ aſſez le jugement de ceux, qui ſur un tel ouvrage voudroient prononcer
‘ contre moi, d'autant que la Societé Royale même ne la point voulu faire;
‘ comme je l'ay appris par un extrait de ſes regiſtres.

‘ Je ne crois point d'avoir dit (comme M. N. me l'impute) que les An-
‘ glois n'auroient point le plaiſir de me voir repondre à des raiſonnemens
‘ ſi minces; car je ne crois point que tous les Anglois faſſent leur cauſe de
‘ celle de M. N. il y en a de trop habiles & de trop honnêtes pour épouſer
‘ les paſſions de quelquesuns de ſes adherens.

‘ Apres cela, il m'accuſe d'avoir voulu faire diverſion, en combattant ſa
‘ philoſophie, & en voulant l'engager dans des problemes; mais quant à
‘ la philoſophie, j'ay donné publiquement quelque choſe de mes principes
‘ ſans attaquer les ſiens; ſi ce n'eſt que par occaſion j'en ay parlé dans des
‘ lettres particulieres, depuis qu'on m'en a donné ſujet; & pour ce qui eſt
‘ des problemes, je n'ay garde d'en propoſer à M. N. car je ne voudrois pas
‘ m'y engager, quand on m'en propoſeroit à moi: nous pouvons nous en
‘ diſpencer à l'age ou nous ſommes; mais nous avons des amis, qui y peu-
‘ vent ſuppleer à notre defaut.

‘ Je ne veux point entrer icy dans le detail de ce que M. N. dit un peu
‘ aigrement contre ma philoſophie; car pour la ſienne, ce n'en eſt point le
‘ lieu. J'apelle Miracle tous evenement qui ne peut être arrivé que par la
‘ puiſſance de Createur, ſa raiſon n'étant pas dans la nature des creatures;
‘ & quand on veut neanmoins l'attribuer aux qualités ou forces des creatures;
‘ alors

‘ alors j'appelle cette qualité *une qualité occulte à la ſcholaſtique*; c'eſt à dire,
‘ qu'il eſt impoſſibile de rendre manifeſte: telle que ſeroit une peſanteur
‘ primitive; car les qualités occultes qui ne ſont point chimeriques, ſont
‘ celles dont nous ignorons la cauſe, mais que nous n'excluons point; &
‘ j'appelle l'ame de l'homme cette ſubſtance ſimple, qui s'appercoit de ſe
‘ qui ſe paſſe dans le corps humain, & dont les appetits ou volontés ſont
‘ ſuivis par les efforts du corps. Je ne prefére pas les hypotheſes aux ar-
‘ guments tirez de l'induction des experiences, mais quelquefois on fait
‘ paſſer pour inductions generales, ce qui ne conſiſte qu'en obſervations par-
‘ ticulieres, & quelquefois on veut faire paſſer pour une hypotheſe ce qui
‘ eſt demonſtratif. L'idée que M. N. donne icy de mon harmonie préeta-
‘ blie n'eſt pas celle qu'en ont quantitè d'habiles gens hors d'Angleterre,
‘ & quelques uns en Angleterre; & je ne crois pas que vous même Monſ.
‘ en ayez eu une ſemblable, ou l'ayéz maintenant, à moins que d'être bien
‘ changé.

‘ Je n'ay jamais nié, qu'à mon ſecond voyage en Angleterre j'aye vû
‘ quelques lettres de M. N. chez Monſieur Collins; mais je n'en ay jamais
‘ vû, ou M. N. ait expliqué ſa methode des fluxions, & je n'en trouve point
‘ dans le *Commercium Epiſtolicum*.

‘ Je n'ay pas vû non plus qu'il ait expliqué la methode des ſeries que je
‘ m'attribue; je crois qu'il veut parler de celle ou je prends une ſeries ar-
‘ bitraire; je l'ay fait avant mon ſecond retour en Angleterre. Je ne nie
‘ pourtant pas, que M. N. n'eut pû l'avoir auſſi, & ce n'eſt pas même une
‘ invention fort difficile.

‘ M. N. veut que j'avoue, & que j'accorde ce que j'ay avoué ou accordé
‘ il y a 15 ans. Ou autrement on devroit en attendre de luy autant; car il
‘ y a maintenant deux fois quinze ans, que dans la prémiere edition de ſes
‘ Principes, pag. 253, 254, il m'accorde l'invention du calcul des diffe-
‘ rences, indépendement de la ſienne; & depuis il s'eſt aviſé, je ne ſcay
‘ comment, de faire ſoutenir le contraire.

‘ Il eſt bon de ſavoir, qu'à mon premier voyage d'Angleterre en 1673, je
‘ n'avois pas la moindre connoiſſance des ſeries infinies, telles que M. Mer-
‘ cator venoit de donner, ny d'autres matieres de la geometrie avancée par
‘ les dernieres methodes: je n'etois pas même aſſez verſé dans l'analyſe de
‘ Des Cartes; je ne traitois les mathematiques que comme un Parergon;
‘ & je ne ſavois guere que la geometrie practique vulgaire, quoy que j'euſſe
‘ vû par hazard la geometrie des indiviſibiles de Cavalleri, & un livre de
‘ Pere Leotaud, ou il donnoit les quadratures des lunules & figures ſem-
‘ blables, ce qui m'avois donné quelque curioſité; mais je me divertiſſois
‘ pluſtôt aux proprietez des nombres, à quoy le petit traité que j'avois pub-
‘ lié, preſque petit garcon, de l'art des combinaiſons en 1666 m'avoit donné
‘ occaſion; & ayant obſervé des lors l'uſage des differences pour les ſom-
‘ mes, je l'appliquay à des ſuites de nombres. On voit bien par mes pre-
‘ mieres lettres échangées avec M. Oldenbourg, que je n'etois guere allé
‘ plus avant, auſſi n'avois je point alors la connoiſſance de M. Collins, quoy
‘ qu'on ait feint malicieuſement le contraire.

‘ Ce fût peu à peu que M. Hugens me fit entrer en ces matieres, quand ‘ je le pratiquois à Paris, & cela joint au traité de M. Mercator (que j'avois ‘ rapporté avec moi d'Angleterre parce que M. Pell m'en avoit parlé) me ‘ fit trouver environ, vers la fin de l'an 1673, ma quadrature arithmetique ‘ du cercle, qui fût fort approuvé par M. Hugens, & dont je parlay à M. ‘ Oldenbourg dans une lettre de l'an 1674 : alors ny M. Hugens ny moi, ‘ nous ne ſavions rien des ſeries de M. N. ny de M. Gregory. Ainſi je ‘ crus être le premier, qui eut donné la valeur du cercle par une ſuite de ‘ nombres rationaux, & M. Hugens le crut auſſi ; j'en écrivîs ſur ce ton-là ‘ à M. Oldenbourg, qui me repondit qu'on avoit deja de telles ſeries en An- ‘ gleterre ; & l'on voit par ma lettre du 15 Juillet de 1674, & par la re- ‘ ponſe de M. Oldenbourg du 8 Decembre de la même année, que je n'en ‘ devois avoir aucune connoiſſance alors ; autrement M. Oldenbourg n'au- ‘ roit pas manqué de me le faire ſentir, ſi luy ou M. Collins m'en euſſent ‘ communiqué quelque choſe ; mais je ne ſavois pas alors les extractions ‘ des racines des equations par des ſeries, ni les regreſſions ou l'extrac- ‘ tion d'une equation infinie ; j'etois encore un peu neuf en ces matieres ; ‘ mais je trouvai pourtant bientôt ma methode generale par des ſeries ar- ‘ bitraires ; & j'entrai enfin dans mon calcul des differences, ou les ob- ‘ ſervations que j'avois faites, encore fort jeune, ſur les differences des ſuites ‘ des nombres, contribuerent à m'ouvrir les yeux ; car ce n'eſt pas par les ‘ fluxions des lignes, mais par les differences des nombres qve j'y ſuis venu, ‘ en conſiderant enfin que ces differences appliquées aux grandeurs qui cro- ‘ iſſent continuellement, s'evanouiſſent en comparaiſon des grandeurs dif- ‘ ferentes, au lieu qu'elles ſubſiſtent dans les ſuites des nombres. Et je ‘ crois que cette voye eſt la plus analytique ; le calcul geometrique des dif- ‘ ferences qui eſt le même que celuy des fluxions, n'etant qu'un cas ſpe- ‘ cial, devient plus commode par les evanouiſſements.

‘ M. N. allegue par apres les paſſages, ou j'accorde, qu'il y a un calcul ‘ approchant de mon calcul des differences ; mais il pourra bien ſe ſouvenir ‘ qu'il m'en a accordé autant, et s'il luy eſt permis de ſe retracter, pour- ‘ quoy ne me ſera t'il pas permis d'en faire autant, ſur tout apres les ve- ‘ riſimilitudes que M. Bernouilli a remarquées ? J'ay une ſi grande opinion ‘ de la candeur de M. N. que je l'ay crû ſur ſa parole ; mais le voyant con- ‘ niver à des accuſations dont la fauſſeté luy eſt connue, il etoit naturel ‘ que je commençaſſe de douter.

‘ Je ne puis avouer ny deſavouer aujourdhuy d'avoir écrit, ou receu des ‘ lettres écrites, il y a plus de 40 ans telles qu'on les a publiées ; je ſuis ob- ‘ ligé de m'en rapporter à ce qui ſe trouve dans les papiers qu'on cite, mais ‘ je ne remarque rien contre moi dans celles que M. N. allegue du 15 ‘ Avril & 20 May 1675, & du 24 Octobre 1676, ſinon dans les fauſſetez ‘ du Gloſateur. Je crois que c'etoit purement par diſtraction, dans un ſejour ‘ comme celuy de Paris, ou je m'occupois à bien d'autres choſes encore ‘ qu'aux mathematiques, & par l'éloignement que j'avois des calculs, dont ‘ je craignois la longueur, que j'ay demandé quelquefois à M. Oldenbourg ‘ la demonſtration ou la methode d'arriver à certaines choſes, ou j'aurois ‘ bien

‘ bien pû arriver moi même. Par exemple, je crois d'avoir deja eu au ‘ douze de May 1676, ma methode d'une ſeries arbitraire, qui m'auroit ‘ pû mener a des ſeries, dont j'y demande la raiſon. Car ayant conſulté ‘ mon vieux traité de la Quadrature Arithmetique, achevé quelque temps ‘ avant ma ſortie de France, je m'y ſers de la ſeries arbitraire ; cependant les ‘ ſeries marquées dans cette lettre ſont une choſe dont je conſens dêtre re- ‘ devable à d'autres, & je crois de ne les avoir pas même connues en 1674.

‘ N'entendant pas bien ce que M. N. allegue des Actes de Leipzig de ‘ May 1700, j'y ay regardé, & je trouve qu'il n'en a pas bien pris le ſens. ‘ Il n'y eſt point parlé de l'invention du nouveau calcul des differences, ‘ mais d'un artifice particulier des *Maximis & Minimis*, qui en eſt indepen- ‘ dant, & dont je m'etois aviſé bien du temps avant que M. Bernouilli eut ‘ propoſé ſon probleme de la plus courte deſcente, mais dont je jugeois ‘ que M. N. ſe devoit être aviſé auſſi, lors qu'il avoit donné la figure de ‘ ſon vaiſſeau dans ſes principes. Ainſi j'ay voulu dire, qu'il a fait con- ‘ noître publiquement avant moi, qu'il poſſedoit cet artifice ; ce que je ne ‘ pouvois pas dire du calcul des differences & des fluxions, puiſque j'en ‘ avois fait voir l'utilité publiquement avant la publication de ce livre. Cet ‘ artifice particulier de *Maximis & Minimis* n'eſt point neceſſaire, quand ils ‘ s'agit ſimplement d'une grandeur (car alors la methode de M. Fermat per- ‘ fectionée par les nouveaux calculs ſuffit) mais quand il s'agit de toute une ‘ figure qui doit faire le mieux un effect demandé, il faut autre choſe.

‘ M. N. hazarde icy une accuſation mais, qui va tomber ſur luy même. ‘ Il pretend que ce que j'ay écrit pour luy à M. Oldenbourg en 1677, eſt ‘ un deguiſement de la methode de M Barrow. Mais comme M. N. avoue ‘ dans la pag. 253 & 254, de la premier edition de ſes Principes, *Me ipſi ‘ tunc methodum communicâſſe à methodo ipſius vix abludentem præterquam in ‘ verborum & notarum formulis*, il s'enſuivra, que ſa methode auſſi n'eſt qu'un ‘ déguiſement de celle de M. Barrow.

‘ Je croy que luy & moi nous ſerons aiſement quites de cette accuſa- ‘ tion : car une infinité de gens liront de livre de M. Barrow, ſans y trou- ‘ ver nôtre calcul ; il eſt vray que feu M. Tſchirnhaus, qui s'apperçeut un ‘ peu tard de l'avantage de ce calcul, pretendoit qu'on pouvoit arriver à ‘ tout cela par les methodes de M. Barrow. Comme l'Abbé Catelan Fran- ‘ cois pretendit que même l'Analyſe de Des Cartes ſuffiſoit pour toute ces ‘ choſes ; mais il etoit plus aiſé de le dire, que de le montrer.

‘ Cependant ſi quelqu'un a profité de M. Barrow, ce ſera plûs tôt M. ‘ N. qui a étudié ſous luy, que moi qui (autant que je puis m'en ſouvenir,) ‘ n'ay veu les livres de M. Barrow qu'à mon ſecond voyage d'Angleterre, ‘ & ne les ay jamais lûs avec attention ; parce qu'en voyant le livre, je ‘ m'appercus que par la conſideration du triangle characteriſtique (dont les ‘ côtez ſon les elements de l'abſciſſe, de l'ordonnée & de la courbe) ſem- ‘ blable a quelque triangle aſſignable, j'etois venu, comme en me jouant, ‘ aux quadratures, ſurfaces, & ſolides, dont M. Barrow avoit remplis un cha- ‘ pitre des plus conſiderables de ſes leçons ; outre que je ne ſuis venu à mon ‘ calcul des differences dans la geometrie, qu'apres en avoir vû l'uſage (mais

‘ moins

‘ moins conſiderable) dans les nombres, comme mes premieres lettres ‘ dans le *Commercium Epiſtolicum* le peuvent inſineur. Il ſe peut que M. ‘ Barrow en ait plus ſcu, qu'il n'a pas dit dans ſon livre, & qu'il a donné ‘ des lumieres à M. N. que nous ne ſavons pas : & ſi j'etois ſemblable à ‘ certains temeraires, je pourrois aſſeurer ſur de ſimples ſoupçons, ſans autre ‘ fondement, que le calcul des fluxions de M. N. qu'el qu'il puiſſe être, ‘ luy a eté enſeigné par M. Barrow.

‘ On peut bien juger que lors que j'ay parlé en 1676, des problemes qui ‘ ne dependoient, ni des equations, ni des quadratures, j'ay voulu parler ‘ des equations telles qu'on connoiſſoit alors dans le monde ; c'eſt à dire, ‘ des equations de l'analyſe ordinaire. Et on le peut juger, de ce que ‘ j'ajoute les quadratures comme quelque choſe de plus que ces equations. ‘ Mais les equations differentielles vont au dela même des quadratures ; & ‘ l'on voit bien que j'entendois même parler des problemes, qui vont a ces ‘ ſortes d'equations inconnues alors au public ; cette objection ſe trouvoit ‘ deja dans les remarques an *Commercium*, mais je n'avois point crû que M. ‘ N. etoit capable de l'employer.

‘ Je juge par un endroit de ma lettre du 27 d'Aouſt 1676 *(vid. pag.* ‘ *539, hujus Tomi)* que je devois deja avoir alors l'ouverture du cal- ‘ cul des differences ; car j'ay dit d'avoir reſolu d'abord par une certaine ‘ analyſe *(certâ Analyſi ſolvi)* le probleme de M. de Beaune proposé à M. ‘ Des Cartes ; ſi cette analyſe n'etoit que cela, on le peut reſoudre ſans ‘ cela ; & je crois que Monſieur Hugens & Monſieur Barrow l'auroient ‘ donné au beſoin, comme beaucoup d'autres choſes : mais ſelon ma ma- ‘ niere de noter, ce n'eſt qu'un jeu ; je trouve une petite faute dans cette ‘ page, il y a *ludus naturæ* au lieu de *luſus naturæ*, mais cette faute etoit ‘ ancienne, & ſe devoit deja trouver dans la copie de ma lettre du 24 d'Oc- ‘ tobre *(1676, pag. 539, hujus Tomi.) Hos caſus vix numeraverim in-* ‘ *ter luſus naturæ.* Je n'avois point entendu ce qu'il vouloit dire, mais à ‘ preſent je vois l'origine de la mépriſe.

‘ Je ne ſaurois dire aujourdhuy, ſi j'ay remarqué le paſſage de M. Wallis, ‘ ou il dit que M. N. ſervoit deja la methode des fluxions en 1666. Mais ‘ quand je l'aurois remarqué, je l'aurois laiſſé paſſer apparemment, etant ‘ fort porté alors à croire M. N. ſur ſa parole. Mais ſon dernier procedé ‘ m'a forcé d'être plus circomſpect à cet égard.

‘ M. N. dit, que je l'ay accuſé d'être plagiaire : mais ou eſt ce que je l'ay ‘ fait ? Ce ſont ſes adherens, qui ont paru intenter cette accuſation contre ‘ moi, & il y a connivé. Je ne ſay pas s'il adopte entierement ce qu'ils ‘ ont publié ; mais je conviens avec luy, que la malice de celuy qui intente ‘ une telle accuſation ſans la prouver, le rend coupable de calomnie.

‘ Il finit ſa lettre en m'accuſant d'être l'aggreſſeur, & j'ay commencé ‘ celle cy en prouvant le contraire. Il ſera fort aiſé de vuider ce point pre- ‘ liminaire. Il y a eu du meſentendu, mais ce n'eſt pas ma faute ; au ‘ reſte je ſuis avec zele. Monſieur,

‘ Vôtre tres humble & tres obeiſſant ſerviteur,

‘ LEIBNITZ.’

Hannover,
ce 9 d'Avril 1716.

Cùm

Cùm D. Leibnitius adduci non poſſet, ut vel Commercio Epiſtolico reſponderet, vel probaret quæ pro lubitu affirmabat, cùmque præcedentes epiſtolas in Galliam prius mitteret, quàm earum tertia in Angliam veniret, & prætenderet ſe hoc facere, ut teſtes haberet, & alias etiam adhiberet contumelias : Newtonus minimè reſcripſit, ſed obſervationes ſequentes in epiſtolam illam tertiam ſcriptas, cum amicis ſolummodo communicavit.

Obſervations upon the preceding EPISTLE.

MR. LEIBNITZ, by his letter of the 29th of December 1711, juſtified the paſſage in the *Acta Eruditorum* for January 1705, pag. 34 and 35, and thereby made it his own, and now endeavours in vain to excuſe it, pretending that the words *adhibet ſemperque adhibuit* are maliciouſly interpreted by the word *ſubſtituit*. But in the interpretation which he would put upon the place, he omits the words *igitur* and *quemadmodum* ; the firſt of which makes the words, *ſemperque adhibuit*, a conſequence of what went before, and the latter makes them equivalent to *ſubſtituit* ; neither of which can be true, in the ſenſe which Mr. Leibnitz endeavours now to put upon the words. He has therefore accuſed me. In both his letters to Dr. Sloane (that dated the 4th of March, and that dated the 29th of December 1711) he preſſed the Royal Society to condemn Dr. Keill ; and before I meddled in this matter, challenged me to declare my opinion. His words in his ſecond letter are : *Itaque veſtræ æquitati committo, annon coercendæ ſint vanæ & injuſtæ* [Keill] *vociferationes, quas ipſi Newtono viro inſigni, & geſtorum optimè conſcio, improbari arbitror ; ejuſque ſententiæ ſuæ libenter daturum indicia mihi perſuadeo.* The words are civil, but the ſenſe is, That I muſt either condemn Dr. Keill, or enter into a quarrel with Mr. Leibnitz ; as has happened : and therefore he is the aggreſſor. For it is very well known here, that I conſtantly endeavoured to avoid theſe diſputes, till they were preſſed upon the Royal Society and me.

In his letter of the 4th of March ſt. n. 1711, he preſſed the Royal Society to condemn Dr. Keill, without hearing both parties ; and when the Doctor put in his anſwer, Mr. Leibnitz refuſed to give his reaſons againſt the Doctor, and called it injuſtice to expect it from him, and yet perſiſted in preſſing them againſt him, and thereby put them upon a neceſſity of appointing a committee to ſearch out old papers, and give their opinion upon them. If they did it without him, it was his own fault : he was for over-ruling them, and called it injuſtice to expect that he ſhould defend his candor, and plead before them. If they gave him no opportunity to except againſt any of the committee ; it was becauſe he refuſed to be heard : and they had a ſufficient authority to appoint a committee without him, and he had no right to except againſt what they did for their own ſatisfaction. If they have not yet given judgment againſt him ; it is becauſe the committee did not act as a jury, nor the Royal Society as a formal court of juſtice. The committee examined old letters and papers, and gave their

their opinion upon them alone, and left room for Mr. Leibnitz to produce further evidence for himſelf. And it is ſufficient that the Society ordered their report, with the papers upon which it was grounded, to be publiſhed; and that Mr. Leibnitz, in all the three years and four months which are ſince elapſed, has not been able to produce any further proof againſt Dr. Keill, than what was then before them.

Mr. Leibnitz ſaith, That the letter which I call defamatory, being no ſharper than that which has been publiſhed againſt him, I have no reaſon to complain. But the ſharpneſs of the letter lies in accuſations and reflections, without any proof; which way of writing is unlawful and infamous, and never uſed but in a bad cauſe. The ſharpneſs of the *Commercium* lies in facts, which are lawful and fit to be produced. The letter was publiſhed in a clandeſtine, back-biting manner (as defamatory papers uſe to be) without the name of the author, or mathematician, or printer, or city where it was printed; and was diſperſed above two years, before we were told that the mathematician was John Bernouilli; the *Commercium* was printed openly at London by order of the Royal Society.

The mathematician to whom Mr. Leibnitz appealed from the Royal Society, I called a mathematician, or pretended mathematician, not to diſparage the ſkill of Mr. Bernouilli; but becauſe the mathematician, in his letter of the 7th of June 1673, cited Mr. Bernouilli as a perſon diſtinct from himſelf; and Mr. Leibnitz lately cauſed that letter to be reprinted without the citation; and tells us, that the mathematician was Mr. Bernouilli himſelf: and whether the mathematician or Mr. Leibnitz is to be believed, I do not know. Mr. Bernouilli had the Differential Method from Mr. Leibnitz, and was the chief of his diſciples, and gave his opinion for his maſter in the *Acta Lipſica* before he ſaw the *Commercium Epiſtolicum*; at which time he was *homo novus, & rerum anteactarum parum peritus*, as Mr. Leibnitz objected againſt Dr. Keill; and what he wrote after he ſaw the *Commercium* was in his own defence, and his ſkill in mathematicks will not mend the matter.

He complains, that the committee had gone out of the way, in falling upon the Method of Series. But he ſhould conſider, that both methods are but two branches of one general method of Series: I joined them together in my Analyſis; I interwove them in the tract which I wrote in the year 1671, as I ſaid in my letters of the 10th of December 1672, and the 24th of October 1676. In my letter of the 13th of June 1676, I ſaid, that my method of Series extended to almoſt all problems, but became not general without ſome other methods, meaning (as I ſaid in my next letter) the method of Fluxions, and the method of arbitrary Series: and now to take thoſe other methods from me, is to reſtrain and ſtint the method of Series, and make it ceaſe to be general. In my letter of the 24th of October 1676, I called all theſe methods together, my General Method. See pag. 547, lin. 20. And if Mr. Leibnitz has been tearing this general method in pieces, and taking from me firſt one part, and then another part, whereby the reſt is maimed, he has

has given a juſt occaſion to the committee to conſider the whole. It is alſo to be obſerved, that he is perpetually giving teſtimony for himſelf; and it is allowed, in all courts of juſtice, to ſpeak to the credit of the witneſs.

He repreſents, that the committee of the Royal Society have omitted things which made againſt me, and printed every thing which could be turned againſt him by ſtrained gloſſes; and to make this appear, he produces in his laſt letter but one, an inſtance of my ignorance omitted by them; but confeſſes now, that he was miſtaken in ſaying that it was omitted, and ſaith that he will cite another inſtance. He ſaith, that in one of my letters to Mr. Collins, I owned that I could not find the ſecond Segments of Sphæroids, and that the committee have omitted this. If they had omitted ſuch a paſſage, I think they would have done right, it being nothing to the purpoſe. But on the contrary Mr. Collins, in a letter to Mr. James Gregory the 24th of Decem. 1670, and in another to Mr. Bertet the 21ſt of Feb. 1671, both printed in the *Commercium Epiſtolicum*, pag. 505, 507, wrote, that my method extended to ſecond Segments of round Solids. And Mr. Oldenbourg wrote the ſame thing to Mr. Leibnitz himſelf the 8th of Decemb. 1674. See the *Commercium Epiſtolicum*, pag. 517. So you ſee that Mr. Leibnitz hath accuſed the committee of the Royal Society, without knowing the truth of his accuſation, and therefore is guilty of a miſdemeanour. The committee were ſo far from acting corruptly againſt Mr. Leibnitz, that they took no notice of his ignorance of geometry in thoſe days, and omitted ſeveral other things which made ſtrongly againſt him; ſuch as were the two letters in my cuſtody, and the paragraph in the preface to the two firſt volumes of Dr. Wallis's works relating to this matter; and that a copy of Gregory's letter of the 5th of Septemb. 1670, was ſent to Mr. Leibnitz in June 1676, amongſt the extracts of Gregory's letters.

The committee in their report affirmed, that they had extracted from the ancient letters, letter-books and papers, what related to the matter referred to them: all which extracts, delivered by them to the Society, they believed to be genuine and authentick. Mr. Leibnitz accuſes them for not printing the letters entire, including as well what did not relate to the matter referred to them, as what did relate to it: as if it were not lawful to cite a paragraph out of a book, without citing the whole book. Thus he complains, that the *Commercium Epiſtolicum* ſhould have been much bigger. But when he is to anſwer it, he complains that it is too big, and would require an anſwer as big as itſelf. And ſo the ancient letters and papers muſt be laid aſide, and the queſtion muſt be run off into a ſquabble about philoſophy and other matters: and the great mathematician who, in his letter to Mr. Leibnitz, dated the 7th of June 1713, concealed his name, that he might paſs for an impartial judge; muſt now pull off his maſk, and become a party-man in this ſquabble, and ſend a challenge by Mr. Leibnitz to the mathematicians in England: as if a duel, or perhaps a battle with his army of diſciples, were a fitter way to decide the truth, than an appeal to ancient and authentick writings; and mathematicks

muſt henceforward be filled with atchievements in knight-errantry, inſtead of reaſons and demonſtrations.

Mr. Leibnitz acknowledges, that when he was in London the ſecond time, he ſaw ſome of my letters in the hands of Mr. Collins, eſpecially thoſe relating to Series; and he has named two of them which he then ſaw, viz. that dated the 24th of October 1676, and that in which he pretends that I confeſſed my ignorance of ſecond Segments. And no doubt he would principally deſire to ſee the letter which contained the chief of my Series, and particularly that which contained thoſe two for finding the arc by the ſine, and the ſine by the arc, with the demonſtration thereof, which a few months before he had deſired Mr. Oldenbourg to procure from Mr. Collins; that is, the *Analyſis per æquationes numero terminorum infinitas*. But yet he tells us, that he never ſaw where I explained my method of Fluxions, and that he finds nothing of it in the *Commercium Epiſtolicum*, where that Analyſis and my letters of the 10th of Decemb. 1672, 13th of June 1676, and the 24th of Octob. 1676, are publiſhed. I ſuppoſe he means, becauſe he finds no pricked letters there. And by the ſame way of arguing, he and Mr. Bernouilli may pretend, that they find nothing of the method of Fluxions in the introduction to the Book of Quadratures.

He ſaith alſo, that he never ſaw where I explain the method claimed by me, in which he aſſumes an arbitrary Series. If he pleaſes to look into the *Commercium Epiſtolicum*, pag. 530 and 557, he will there ſee that I had that method in the year 1676, and five years before. And Dr. Wallis, in the ſecond volume of his works, pag. 393, lin. 32, has told him, that this method needs no further explication, than what I there gave of it. Mr. Leibnitz might find it himſelf, but not ſo early; and ſecond inventors have no right.

He pretends, that in my book of Principles, pag. 253, 254, I allowed him the invention of the *Calculus Differentialis*, independently of my own; and that to attribute this invention to myſelf, is contrary to my knowledge there avowed. But in the paragraph there referred unto, I do not find one word to this purpoſe. On the contrary, I there repreſent, that I ſent notice of my method to Mr. Leibnitz, before he ſent notice of his method to me; and left him to make it appear, that he had found his method before the date of my letter; that is, eight months at the leaſt before the date of his own. And by referring to the letters, which paſſed between Mr. Leibnitz and me ten years before, I left the reader to conſult thoſe letters, and interpret the paragraph thereby. For by thoſe letters he would ſee, that I wrote a tract on that method, and the method of Series together, five years before the writing of thoſe letters; that is, in the year 1671. And theſe hints were as much as was proper in that ſhort paragraph, it being beſides the deſign of that book to enter into diſputes about theſe matters.

He ſaith, that when he was in London the firſt time, which was in January and February 1673, he knew nothing of Infinite Series, nor of the advanced geometry, nor was then acquainted with Mr. Collins, as ſome have

have maliciouſly feigned. But who hath feigned this, or what need there was of feigning it, I do not know. At that time Dr. Pell gave him notice of Mercator's Series for the Hyperbola, and he carried Mercator's book with him to Paris, though he did not yet underſtand the higher geometry. And any of thoſe to whom Mr. Collins had communicated mine and Gregory's Series, might give him notice of them, without his being acquainted with Mr. Collins.

He ſaith, that after his coming from London to Paris, his firſt letters were of other matters than geometrical, till Mr. Huygens had inſtructed him in theſe things; and that he found the arithmetical quadrature of the circle towards the end of the year 1683, and began to write of it to Mr. Oldenbourg the next year, and found the general method by arbitrary Series a little after, and the *Differential Calculus* in the year 1676, deducing it from the Series of numbers; and that in his letter of the 27th of Auguſt 1676, by the words *certâ Analyſi*, he meant the Differential Analyſis. And am not I as good a witneſs, that I invented the methods of Series and Fluxions in the year 1665, and proved them in the year 1666: and that I ſtill have in my cuſtody ſeveral mathematical papers written in the years 1664, 1665, and 1666, ſome of which happen to be dated: and that in one of them, dated the 13th of Novemb. 1665, the direct method of Fluxions is ſet down in theſe words:

PROB. *An equation being given, expreſſing the relation of two or more lines, x, y, z, &c. deſcribed in the ſame time by two or more moving bodies,* A, B, C, *&c. to find the relation of their velocities, p, q, r, &c.*

RESOLUTION. *Set all the terms on one ſide of the equation, that they become equal to nothing. Multiply each term by ſo many times* $\frac{p}{x}$ *as x hath dimenſions in that term. Secondly, Multiply each term by ſo many times* $\frac{q}{y}$ *as y hath dimenſions in it. Thirdly, Multiply each term by ſo many times* $\frac{r}{z}$ *as z hath dimenſions in it, &c. The ſum of all theſe products ſhall be equal to nothing. Which equation gives the relation of p, q, r, &c.:* and that this reſolution is there illuſtrated with examples, and demonſtrated, and applied to problems about tangents, and the curvature of curves: and that in another paper dated the 16th of May 1666, a general method of reſolving problems by motion is ſet down in ſeven propoſitions, the laſt of which is the ſame with the problem contained in the aforeſaid paper of the 13th of Novemb. 1665: and that in a ſmall tract written in Novemb. 1666, the ſame ſeven propoſitions are ſet down again, and the ſeventh is improved by ſhewing how to proceed without ſticking at fractions or ſurds, or ſuch quantities as are now called Tranſcendent: and that an eighth propoſition is here added, containing the Inverſe Method of Fluxions ſo far as I had then attained it; namely, by quadratures of curvilinear figures, and particularly by the three rules upon which the *Analyſis per Æquationes numero terminorum infinitas* is founded, and by moſt of the theo-

rems ſet down in the Scholium to the tenth propoſition of the book of Quadratures: and that in this tract, when the area ariſing from any of the terms in the valor of the ordinate cannot be expreſſed by vulgar analyſis, I repreſent it by prefixing the ſymbol □ to the term; as if the abſciſſa be x, and the ordinate $ax - b + \frac{bb}{a+x}$, the area will be $\frac{1}{2}axx - bx + \square\ \frac{bb}{a+x}$: and that in the ſame tract I ſometimes uſed a letter with one prick, for quantities involving firſt fluxions; and the ſame letter with two pricks, for quantities involving ſecond fluxions: and that a larger tract, which I wrote in the year 1671, and mentioned in my letter of the 24th of Oct. 1676, was founded upon this ſmaller tract, and began with the reduction of finite quantities to converging Series; and with the ſolution of theſe two problems: 1. *Relatione quantitatum fluentium inter ſe datâ, fluxionum relationem determinare.* 2. *Expoſitâ æquatione fluxiones quantitatum involvente, invenire relationem quantitatum inter ſe*: and that when I wrote this tract, I had made my Analyſis, compoſed of the methods of Series and Fluxions together, ſo univerſal, as to reach to almoſt all ſorts of problems; as I mentioned in my letter of the 13th of June 1676: and that this is the method deſcribed in my letter of the 10th of Decemb. 1672.

In the year 1684 Mr. Leibnitz publiſhed only the elements of the *Calculus Differentialis*, and applied them to queſtions about tangents, and *Maxima & Minima*, as Fermat and Gregory had done before; and ſhewed how to proceed in theſe queſtions without taking away ſurds, but proceeded not to the higher problems. The *Principia Mathematica* gave the firſt inſtances made publick of applying this *Calculus* to the higher problems; and I underſtood Mr. Leibnitz in this ſenſe in what I ſaid concerning the *Acta Eruditorum* for May 1700, pag. 206. But Mr. Leibnitz obſerves, that what was there ſaid by him, relates only to a particular artifice *de Maximis & Minimis*, with which he there allowed that I was acquainted, when I gave the figure of my veſſel in my Principles. But this artifice depending upon the Differential Method as an improvement thereof, and being the artifice by which they ſolved the problems, which they value themſelves moſt upon, thoſe of the *Linea celerrimi Deſcenſûs*, and the *Linea Catenaria* and *Velaria*, and which Mr. Leibnitz there calls a Method of the Higheſt Moment, and greateſt Extent; I content myſelf with his acknowledgment, that I was the firſt who proved, by a ſpecimen made publick, that I had this artifice.

In the year 1689 Mr. Leibnitz publiſhed the principal propoſitions of this book as his own, in three papers, called, *Epiſtola de Lineis Opticis, Schediaſma de reſiſtentiâ Medii, & Motu projectilium gravium in Medio reſiſtente, & Tentamen de Motuum Cœleſtium Cauſis*; pretending that he had found them all, before that book came abroad. And to make the principal propoſition his own, he adapted to it an erroneous demonſtration; and thereby diſcovered, that he did not yet underſtand, how to work in ſecond differences. And this was the ſecond ſpecimen made publick, of applying the

the method to the higher problems. Hitherto this method made no noiſe, but within a year or two began to be celebrated.

Dr. Barrow printed his Differential Method of Tangents in the year 1670. Mr. Gregory from this method, compared with his own, deduced a general method of tangents without calculation; and by his letter of the 5th of September 1670, gave notice thereof to Mr. Collins. Sluſius, in November 1672, gave notice of the like method to Mr. Oldenbourg. In my letter of the 10th of December 1672, I ſent the like method to Mr. Collins; and added, that I mentioned it to Dr. Barrow, when he was printing his lectures; and that I took the methods of Gregory and Sluſius to be the ſame with mine; and that it was but a branch or corollary of a general method, which without any troubleſome calculation extended not only to tangents, but alſo to other abſtruſer ſorts of problems concerning the crookedneſs, areas, lengths, centers of gravity of curves, &c. and did all this, even without freeing equations from ſurds; and I added, that I had interwoven this method with that of infinite Series; meaning, in the tract which I wrote in the year 1671. Copies of theſe two letters were ſent to Mr. Leibnitz by Mr. Oldenbourg, in the extracts of Gregory's letters, in June 1676; and Mr. Leibnitz, in his letter of the 21ſt of June 1677, ſent nothing more back, than what he had notice of by theſe two letters; namely, Dr. Barrow's Differential Method of Tangents, diſguiſed by a new notation, and extended to the Method of Tangents of Gregory and Sluſius, and to equations involving ſurds, and to quadratures. But this is not the caſe between me and Dr. Barrow. He ſaw my tract of Analyſis in the year 1699, and was pleaſed with it. And before his lectures came abroad, I had deduced the method of Tangents of Gregory and Sluſius from my general method. But Mr. Leibnitz in thoſe days knew nothing of the higher Geometry, nor was he acquainted with the vulgar Algebra.

In his letter of the 27th of Auguſt 1676, he wrote thus: *Quod dicere videmini pleraſque difficultates (exceptis problematibus Diophantæis) ad ſeries infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeo mira & implexa, ut neque ab æquationibus pendeant, neque ex quadraturis. Qualia ſunt, ex multis aliis, problemata methodi tangentium inverſæ.* And when I anſwered, that ſuch problems were in my power, he replied, in his letter of the 21ſt of June 1676, that he conceived that I meant by Infinite Series, but he meant by Vulgar Equations. See the anſwer to this in the *Commercium Epiſtolicum*, pag. 562.

He ſaith, that one may judge, that when he wrote his letter of the 27th of Auguſt 1676, he had ſome entrance into the Differential Calculus; becauſe he ſaid there, that he had ſolved the problem of Beaune *certâ Analyſi*, by a certain analyſis. But what if that problem may be ſolved *certâ Analyſi* without the differential method? For no further analyſis is requiſite than this; that the ordinate of the curve deſired increaſes or decreaſes in geometrical progreſſion, when the abſciſſa increaſes in arithmetical; and therefore the abſciſſa and ordinate have the ſame relation to one another,

another, as the logarithm and its number. And to infer from this, that Mr. Leibnitz had entrance into the Differential Method; is as if one ſhould ſay, that Archimedes had entrance into it, becauſe he drew tangents to the ſpiral, ſquared the parabola, and found the proportion between the ſphere and the cylinder; or that Cavallerius, Fermat and Wallis had entrance into it, becauſe they did many more things of this kind.

P. S. When the committee of the Royal Society publiſhed the *Commercium Epiſtolicum*, the letters and papers in my cuſtody were not produced. Among them were the following letter of Mr. Leibnitz, dated $\frac{7}{17}$ of March 1693, and a letter of Dr. Wallis's, dated the 10th of April 1695; both which, upon a freſh occaſion two years ago, were produced, examined, and left in the archives of the Royal Society. The firſt ſhews what opinion Mr. Leibnitz had of this matter, before he knew my ſymbols, or any thing more of the method of Fluxions, than what he learnt from my letters and papers writ in or before the year 1676, or from the *Principia Philoſophiæ Mathematica*, and by conſequence before I could deceive him; and that he then gave me the precedence. The ſecond, compared with the preface to the Doctor's works, ſhews what opinion the Engliſh mathematicians, and ſome others abroad, had of this matter, when they heard that the Differential Method began to be celebrated in Holland, as invented by Mr. Leibnitz. The firſt of theſe two letters, and part of the ſecond, are hereunto ſubjoined.

'Illuſtri Viro ISAACO NEWTONO

'GODEFRIDUS GULIELMUS LEIBNITIUS, S. P. D.

'QUANTUM tibi ſcientiam rerum mathematicarum totiuſque naturæ debere arbitrer, occaſione datâ, etiam publicè ſum profeſſus. Mirificè ampliaveras geometriam tuis ſeriebus: ſed, edito Principiorum opere, oſtendiſti patere tibi, etiam quæ analyſi receptæ non ſubſunt. Conatus ſum ego quoque, notis commodis adhibitis, quæ differentias & ſummas exhibent, geometriam illam, quam tranſcendentem appello, analyſi quodammodo ſubjicere; nec res malè proceſſit. Sed à te adhuc magni aliquod expecto ad ſummam manum imponendam; tum ut problemata, quæ ex datâ tangentium proprietate quærunt lineas, reducantur optimè ad quadraturas; tum ut quadraturæ ipſæ, quod valde vellem, reducantur ad Curvarum rectificationes, ubique ſuperficierum aut corporum dimenſionibus ſimpliciores.

'Sed ſuper omnia optem, ut geometricis abſolutis, naturam, uti cœpiſti, mathematicè tractare pergas; in quo genere certè tu unus cum pauciſſimis ingens operæ pretium feciſti. Mirificum eſt, quod inveniſti, ellipſes Keplerianas prodire, ſi tantummodo attractio, ſive gravitatio, & trajectio in planetâ concipiantur. Tametſi enim eò inclinem, ut credam hæc omnia Fluidi ambientis motu ſive effici, ſive regi, analogiâ gravitatis & magnetiſmi apud nos, nihil tamen ea res dignitati & veritati inventi tui detraxerit.

'Quæ ſummus & ipſe Mathematicus Chriſtianus Huygenius in tua notavit, appendice libelli de cauſâ luminis & gravitatis, expenſa tibi non dubito; & ſententiam viciſſim tuam velim. Veſtrâ enim amicâ collatione potiſſimum, qui in hoc genere eminetis, erui veritas poteſt.

'Cùm verò maximum tu quoque lumen ipſi Dioptricæ intuleris, explicatis colorum phænomenis inexpectatis, velim quid ſentias de Huygenianâ explicatione radiationis, utique ingenioſiſſimâ, cùm feliciter adeo prodeat lex ſinuum. Significavit mihi Huygenius, neſcio quæ nova phænomena colorum ſibi à te communicata. Ego valde optem ut ratio colorum, quos fixos vocant, ex apparentibus deduci poſſit; ſeu ut oſtendatur ratio efficiendi per refractiones, ut tota aliqua ſuperficies certum colorem oſtendat.

'In librorum apud Anglos editorum indicibus occurrêre mihi aliquoties libri mathematici autore Newtono; ſed dubitavi à te eſſent, quod vellem, an ab alio homonymo.

'Heinſius noſter redux teſtis fuit benevolentiæ erga me tuæ. De cultu verò meo erga te, non ille tantùm teſtari poteſt, ſed & Stepneius, tecum ejuſdem olim Collegii habitator, nunc magnæ Britanniæ Regis negotia apud Cæſarem, nuper apud Sereniſſimum Electorem Brandeburgicum, curans.

'Hæc ſcribo, magis ut ſtudia erga te mea intelligas, quæ nihil tot annorum ſilentio amiſere, quàm ut tua ego ſtudia, quibus auges humani generis opes, interrumpere velim vacuis literis & ſupervacuis. Vale. Dabam Hannoveræ $\frac{7}{17}$ Martii 1693.'

Part of a Letter of Dr. WALLIS'S to Mr. NEWTON, dated from Oxford, April 10, 1695.

'I WISH you would print the two large letters of June and October 1676. I had intimation from Holland, as deſired there by your friends, that ſomewhat of that kind were done; becauſe your notions of Fluxions paſs there with great applauſe by the name of Leibnitz's *Calculus Differentialis*. I had this intimation, when all but part of the preface to this volume was printed off; ſo that I could only inſert, while the preſs ſtayed, that ſhort intimation thereof, which you find there. You are not ſo kind to your reputation, and that of the nation, as you might be, when you let things of worth lie by you ſo long, till others carry away the reputation which is due to you. I have endeavoured to do you juſtice in that; and am now ſorry, that I did not print thoſe two letters *verbatim*.'

The intimation above-mentioned publiſhed in April 1695 by Dr. WALLIS in his ſaid Preface.

QUÆ in ſecundo volumine habentur, in præfatione eidem præfixâ dicitur. Ubi inter alia habetur Newtoni methodus de Fluxionibus, ut ille loquitur, conſimilis naturæ cum Leibnitii, ut hic loquitur, *Calculo Differentiali*;

rentiali; quod qui utramque methodum contulerit, ſatis animadvertat, utut ſub loquendi formulis diverſis: quam ego deſcripſi, Algebra, Cap. XCI. &c. præſertim Cap. XCV. ex binis Newtoni literis, aut earum alteris, Junii 13, & Octob. 24, 1676, ad Oldenburgium datis, cum Leibnitio tum communicandis, iiſdem ferè verbis, ſaltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur; ubi methodum hanc Leibnitio exponit, tum ante decem annos, nedum plures, ab ipſo excogitatam. Quod moneo, nequis cauſetur, de hoc Calculo Differentiali nihil à nobis dictum eſſe.

Out of the account given of the works of Dr. WALLIS in the *Acta Eruditorum* for June 1696. Pag. 257, 258.

Cæterum ipſe Newtonus——ſummæ reciprocum. *Vide ſupra*, p. 568, lin. 16—29.

N. B. IN my letters of the 13th of June and the 24th of October 1676, I affirmed, that I had the method of Fluxions ſome years before; but I never allowed that Mr. Leibnitz had the Differential Method before the year 1677; nor in thoſe days did I know more of his pretences to it, than what he repreſented that year in his letter of the 21ſt of June; nor did I allow the Method of Tranſmutations to be a general method of Series; nor then knew, that the Series, which he ſent to me, was ſent to him by Mr. Oldenbourg the year before, and invented by Mr. James Gregory in the year 1671. The Method of Tranſmutations is not a Method of Series, but a particular theorem for tranſmutations of figures into one another, like thoſe of Gregory and Barrow. And as for the ſcholium upon the ſecond lemma of the ſecond book of the *Principia Philoſophiæ Mathematica*, which is ſo much wreſted againſt me; it was written, not to give away that lemma to Mr. Leibnitz, but on the contrary to aſſert it to myſelf. Whether Mr. Leibnitz invented it after me, or had it from me, is a queſtion of no conſequence; for ſecond inventors have no right.

Dr. Wallis, by his letter of Decemb. 1, 1696, printed in the third volume of his works, gave notice to Mr. Leibnitz of the paragraph in his preface to the firſt volume above cited. And Mr. Leibnitz denied not that in the year 1676, I explained to him the method found by me ten years before or above, nor complained of the Doctor for ſaying this: *De te autem queri*, ſaith he in his letter of the 29th of March 1697, *nunquam mihi in mentem venit; quem facilè apparet noſtra, in Actis Lipſienſibus prodita, non ſatis vidiſſe.* He allowed, that the methods were of like nature as the Doctor had affirmed; and ſaid, in his letter of the 28th of May 1697, that he therefore called them both by the common name of the *Infiniteſimal Method*; but added, that as the Analyſis of Vieta and Cartes were both called by the common name of *Analyſis Specioſa*, and yet differed in ſome things, ſo my *Infiniteſimal Analyſis* and his might differ in ſome things; meaning ſome improvements made by him to this method; and excuſed the Doctor for not mentioning theſe improvements, becauſe he had not ſufficiently ſeen them in the *Acta Lipſienſia*; and declared that it never came into his mind to complain of him for any thing elſe.

And

And yet although Cartes never laid claim to the *Analyſis Specioſa* of Vieta, Mr. Leibnitz continued amongſt his friends to call the Infiniteſimal Method his own, and thereby gave occaſion to Mr. Fatio to write what follows:

Out of the tract of Mr. NICHOLAS FATIO DE DUILLIER, intituled, Inveſtigatio Geometrica Solidi rotundi, in quod minima fiat reſiſtentia, publiſhed in the year 1699.

'QUÆRET forſan Cl. Leibnitius, unde mihi cognitus ſit iſte calculus, quo utor. Ejus equidem fundamenta, ac pleraſque regulas, proprio Marte, anno 1687, circa menſem Aprilem & ſequentes, aliiſque deinceps annis, inveni; quo tempore neminem eo calculi genere præter meipſum, uti putabam. Nec mihi minùs cognitus foret, ſi nondum natus eſſet Leibnitius. Aliis igitur glorietur diſcipulis, me certè non poteſt. Quod ſatis patebit, ſi olim literæ, quæ inter clariſſimum Hugenium meque interceſſerunt, publici juris fiant. Newtonum tamen primum ac pluribus annis vetuſtiſſimum hujus calculi inventorem, ipſâ rerum evidentiâ coactus agnoſco: à quo utrum quicquam mutuatus ſit Leibnitius, ſecundus ejus inventor, malo eorum quàm meum ſit judicium, quibus viſæ fuerint Newtoni literæ, aliique ejuſdem manuſcripti codices. Neque modeſtioris Newtoni ſilentium, aut prona Leibnitii ſedulitas inventionem hujus calculi ſibi paſſim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractârint, quæ ipſe evolvi, inſtrumenta.'

N. B. Mr. Fatio wrote this as a witneſs. He related what he had ſeen; and his teſtimony is the ſtronger, becauſe it was againſt himſelf, and he was no Engliſhman. He underſtood the methods of us all, and by what he had ſeen and underſtood, he was able to make a true judgment.

FINIS TOMI QUARTI.

UNIV... S. CUORE
...SCIA
...TECA
numero 100532
dono
cambio
data

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

Pag. 270, lin. penult. pro *adhæreus*, lege *adhærens*.
P. 271, lin. 5, pro *interior*, lege *anterior*.
P. 279, lin. 7, for *CEbc* and *CBbc*, read *Cbac*.
P. — lin. 16, for *AC*, read *Ac*.
P. 280, lin. 23, for *F*, *G*, read *FG*.
P. 507, lin. 23, pro 170°, lege 167°.
P. 530, Ad initium lineæ 23 in orâ libri ſcribatur *N° L.*
P. 544, Ad initium lineæ primæ in orâ libri ſcribatur *N° LVII.*

IN NOTIS.

P. 264, lin. 4, pro *Nonchidarum*, lege *Noachidarum*.



FA 7 A 222-V

OPERUM NEWTONI

TOMUS QUINTUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

TOM. V.

LONDINI:
EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXXV.

CONTENTS OF THE FIFTH VOLUME.

I. *The Chronology of antient Kingdoms amended.*
II. *A ſhort Chronicle from a MS. the property of the Rev. Dr. Ekins, Dean of Carliſle.*
III. *Obſervations upon the Prophecies of Holy Writ; particularly the Prophecies of Daniel and the Apocalypſe of St. John.*
IV. *An Hiſtorical Account of Two Notable Corruptions of Scripture. In a Letter to a Friend.*

THE CHRONOLOGY OF ANTIENT KINGDOMS AMENDED.

CONTENTS OF THIS BOOK.

A short Chronicle from the first memory of things in Europe to the conquest of Persia by Alexander the Great, - pag. 4

CHAP. I. *Chronology of the Greeks,* - - 28

II. *Of the empire of Egypt,* - - 142

III. *Of the Assyrian empire,* - - 193

VI. *Of the two contemporary empires of the Babylonians and Medes,* - - - - 212

V. *A description of the Temple of Solomon,* - 236

VI. *Of the empire of the Persians,* - - 245

ADVERTISEMENT

PREFIXED TO THE

FIRST EDITION.

THOUGH the Chronology of Ancient Kingdoms Amended was writ by the author many years since; yet he lately revised it, and was actually preparing it for the press at the time of his death. But the Short Chronicle was never intended to be made publick, and therefore was not so lately corrected by him. To this the reader must impute it, if he shall find any places, where the Short Chronicle does not accurately agree with the dates assigned in the larger piece. The sixth chapter was not copied out with the other five, which makes it doubtful whether he intended to print it: but being found among his papers, and evidently appearing to be a continuation of the same work, and (as such) abridged in the Short Chronicle; it was thought proper to be added.

Had the great Author himself lived to publish this work, there would have been no occasion for this Advertisement; but as it is, the reader is desired to allow for such imperfections, as are inseparable from posthumous pieces; and, in so great a number of proper names, to excuse some errors of the press that have escaped.

A SHORT

CHRONICLE

FROM THE

FIRST MEMORY OF THINGS IN EUROPE,

TO THE

CONQUEST OF PERSIA BY ALEXANDER THE GREAT.

THE Greek antiquities are full of poetical fictions; becauſe the Greeks wrote nothing in proſe, before the conqueſt of Aſia by Cyrus the Perſian. Then Pherecydes Scyrius and Cadmus Mileſius introduced the writing in proſe. Pherecydes Athenienſis, about the end of the reign of Darius Hyſtaſpis, wrote of antiquities, and digeſted his work by genealogies, and was reckoned one of the beſt genealogers. Epimenides the hiſtorian proceeded alſo by genealogies; and Hellanicus, who was twelve years older than Herodotus, digeſted his hiſtory by the ages or ſucceſſions of the prieſteſſes of Juno Argiva. Others digeſted theirs by the kings of the Lacedæmonians, or Archons of Athens. Hippias the Elean, about thirty years before the fall of the Per-

INTRODUCTION.

sian empire, published a breviary or list of the Olympic victors; and about ten years before the fall thereof, Ephorus, the disciple of Isocrates, formed a chronological history of Greece, beginning with the return of the Heraclidæ into Peloponnesus, and ending with the siege of Perinthus, in the twentieth year of Philip, the father of Alexander the Great: but he digested things by generations, and the reckoning by Olympiads was not yet in use; nor doth it appear, that the reigns of kings were yet set down by numbers of years. The Arundelian marbles were composed sixty years after the death of Alexander the Great (an. 4, olymp. 128.) and yet mention not the olympiads: but in the next olympiad, Timæus Siculus published an history in several books down to his own times, according to the olympiads, comparing the ephori, the kings of Sparta, the archons of Athens, and the priestesses of Argos, with the olympic victors; so as to make the olympiads, and the genealogies and successions of kings, archons, and priestesses, and poetical histories suit with one another, according to the best of his judgment. And where he left off, Polybius began and carried on the history.

So then a little after the death of Alexander the Great, they began to set down the generations, reigns and successions, in numbers of years; and by putting reigns and successions equipollent to generations, and three generations to an hundred or an hundred and twenty years, as appears by their chronology, they have made the antiquities of Greece three or four hundred years older than the truth. And this was the original of the technical chronology of the Greeks. Eratosthenes wrote about an hundred years after the death of Alexander the Great: he was followed by Apollodorus, and these two have been followed ever since by chronologers.

But how uncertain their chronology is, and how doubtful it was reputed by the Greeks of those times, may be understood by these passages of Plutarch. "Some reckon, saith he, [1] Lycur-
[1] In the life of Lycurgus.
"gus contemporary to Iphitus, and to have been his companion in "ordering the olympic festivals: amongst whom was Aristotle the "philosopher, arguing from the olympic disc, which had the "name of Lycurgus upon it. Others supputing the times by the "succession

"succession of the kings of the Lacedæmonians, as Eratosthenes INTRODUCTION.
"and Apollodorus affirm, that he was not a few years older than "the first olympiad." First Aristotle, and some others, made him as old as the first olympiad: then Eratosthenes, Apollodorus, and some others, made him above an hundred years older: and in another place Plutarch [1] tells us: "The congress of Solon with [1] In the life of Solon.
"Crœsus, some think they can confute by chronology. But an "history so illustrious, and verified by so many witnesses, and "(which is more) so agreeable to the manners of Solon, and so "worthy of the greatness of his mind and of his wisdom, I can-"not persuade myself to reject because of some chronological ca-"nons, as they call them, which hundreds of authors correct-"ing, have not yet been able to constitute any thing certain, in "which they could agree among themselves, about repugnancies." It seems the chronologers had made the legislature of Solon too ancient, to consist with that congress.

For reconciling such repugnancies, chronologers have sometimes doubled the persons of men. So when the poets had changed Io, the daughter of Inachus, into the Egyptian Isis, chronologers made her husband Osiris or Bacchus, and his mistress Ariadne, as old as Io; and so feigned that there were two Ariadnes, one the mistress of Bacchus, and the other the mistress of Theseus; and two Minos's their fathers, and a younger Io the daughter of Jasus, writing Jasus corruptly for Inachus. And so they have made two Pandions, and two Erechtheus's, giving the name of Erechthonius to the first; (Homer calls the first, Erechtheus) and by such corruptions they have exceedingly perplexed ancient history.

And as for the chronology of the Latins, that is still more uncertain. Plutarch represents great uncertainties in the originals of Rome: and so doth Servius. The old records of the Latins were burnt by the Gauls, sixty and four years before the death of Alexander the Great; and Quintus Fabius Pictor, the oldest historian of the Latins, lived an hundred years later than that king.

In sacred history, the Assyrian empire began with Pul and Tiglathpilaser, and lasted about 170 years. And accordingly Herodotus

INTRODUCTION. Herodotus hath made Semiramis only five generations, or about 166 years, older than Nitocris, the mother of the laſt king of Babylon. But Cteſias hath made Semiramis 1500 years older than Nitocris, and feigned a long ſeries of kings of Aſſyria, whoſe names are not Aſſyrian, nor have any affinity with the Aſſyrian names in Scripture.

The prieſts of Egypt told Herodotus, that Menes built Memphis and the ſumptuous temple of Vulcan, in that city: and that Rhampſinitus, Mæris, Aſychis and Pſammiticus, added magnificent porticos to that temple. And it is not likely that Memphis could be famous before Homer's days, who doth not mention it, or that a temple could be above two or three hundred years in building. The reign of Pſammiticus began about 655 years before Chriſt, and I place the founding of this temple by Menes about 257 years earlier. But the prieſts of Egypt had ſo magnified their antiquities before the days of Herodotus, as to tell him that from Menes to Mœris (who reigned 200 years before Pſammiticus) there were 330 kings, whoſe reigns took up as many ages, that is eleven thouſand years; and had filled up the interval with feigned kings, who had done nothing. And before the days of Diodorus Siculus, they had raiſed their antiquities ſo much higher, as to place ſix, eight, or ten new reigns of kings between thoſe kings, whom they had repreſented to Herodotus to ſucceed one another immediately.

In the kingdom of Sicyon, chronologers have ſplit Apis, Epaphus, or Epopeus, into two kings, whom they call Apis and Epopeus; and between them have inſerved eleven or twelve feigned names of kings, who did nothing; and thereby they have made its founder Ægialeus three hundred years older than his brother Phoroneus. Some have made the kings of Germany as old as the Flood: and yet, before the uſe of letters, the names and actions of men could ſcarce be remembered above eighty or an hundred years after their deaths: and therefore I admit no chronology of things done in Europe, above eighty years before Cadmus brought letters into Europe; none, of things done in Germany, before the riſe of the Roman empire.

Now

Now ſince Eratoſthenes and Apollodorus computed the times by the reigns of the kings of Sparta; and, as appears by their chronology ſtill followed, have made the ſeventeen reigns of theſe kings in both races, between the return of the Heraclidæ into Peloponneſus and the battle of Thermopylæ, take up 622 years, which is after the rate of $36\frac{1}{2}$ years to a reign; and yet a race of ſeventeen kings of that length is no where to be met with in all true hiſtory; and kings at a moderate reckoning reign but eighteen or twenty years a-piece with one another: I have ſtated the time of the return of the Heraclidæ by the laſt way of reckoning, placing it about 340 years before the battle of Thermopylæ. And making the taking of Troy eighty years older than that return, according to Thucydides; and the Argonautic expedition a generation older than the Trojan war; and the wars of Seſoſtris in Thrace, and death of Ino the daughter of Cadmus, a generation older than that expedition: I have drawn up the following chronological table, ſo as to make chronology ſuit with the courſe of nature, with aſtronomy, with ſacred hiſtory, with Herodotus the father of hiſtory, and with itſelf; without the many repugnancies complained of by Plutarch. I do not pretend to be exact to a year: there may be errors of five or ten years, and ſometimes twenty, and not much above.

INTRODUCTION.

A SHORT

A SHORT

CHRONICLE

FROM THE

FISRT MEMORY OF THINGS IN EUROPE

TO THE

CONQUEST OF PERSIA BY ALEXANDER THE GREAT.

THE TIMES ARE SET DOWN IN YEARS BEFORE CHRIST.

THE Canaanites, who fled from Joſhua, retired in great numbers into Egypt; and there conquered Timaus, Thamus, or Thammuz, king of the lower Egypt, and reigned there under their kings Salatis, Bœon, Apachnas, Apophis, Janias, Aſſis, &c. until the days of Eli and Samuel. They fed on fleſh; and ſacrificed men after the manner of the Phœnicians; and were called ſhepherds by the Egyptians, who lived only on the fruits of the earth, and abominated fleſh-eaters. The upper parts of Egypt were in thoſe days under many kings, reigning at Coptos, Thebes, This, Elephantis, and other places; which by conquering one another grew by degrees into one kingdom: over which Miſphragmuthoſis reigned in the days of Eli.

In the year before Chriſt 1125 Mephres reigned over the upper Egypt from Syene to Heliopolis; and his ſucceſſor, Miſphragmuthoſis, made a laſting war upon the ſhepherds ſoon after, and cauſed many of them to fly into Palæſtine, Idumæa, Syria, and Libya; and under Lelex, Æzeus, Inachus, Pelaſgus, Æolus the Firſt,

Firſt, *Cecrops*, and other captains, into Greece. Before thoſe days Greece and all Europe was peopled by wandering Cimmerians, and Scythians from the backſide of the Euxine Sea; who lived a rambling wild ſort of life, like the Tartars in the northern parts of Aſia. Of their race was Ogyges; in whoſe days theſe Egyptian ſtrangers came into Greece. The reſt of the ſhepherds were ſhut up by Miſphragmuthoſis, in a part of the lower Egypt called Abaris, or Peluſium. CHRONICLE.

In the year 1100 the Philiſtims, ſtrengthened by the acceſs of the ſhepherds, conquer Iſrael, and take the Ark. Samuel judges Iſrael.

1085. Hæmon, the ſon of Pelaſgus, reigns in Theſſaly.

1080. Lycaon, the ſon of Pelaſgus, builds Lycoſura; Phoroneus the ſon of Inachus, Phoronicum, afterwards called Argos; Ægialeus, the brother of Phoroneus and ſon of Inachus, Ægialeum, afterwards called Sicyon: and theſe were the oldeſt towns in Peloponneſus. Till then they built only ſingle houſes, ſcattered up and down in the fields. About the ſame time Cecrops built Cecropia in Attica, afterwards called Athens; and Eleuſine, the ſon of Ogyges, built Eleuſis. And theſe towns gave a beginning to the kingdoms of the Arcadians, Argives, Sicyons, Athenians, Eleuſinians, &c. Deucalion flouriſhes.

1070. Amoſis, or Tethmoſis, the ſucceſſor of Miſphragmuthoſis, aboliſhes the Phœnician cuſtom in Heliopolis of ſacrificing men, and drives the ſhepherds out of Abaris. By their acceſs the Philiſtims become ſo numerous, as to bring into the field againſt Saul 30000 chariots, 6000 horſemen, and people as the ſand on the ſea-ſhore for multitude. Abas, the father of Acriſius and Prœtus, comes from Egypt.

1069. Saul is made king of Iſrael; and, by the hand of Jonathan, gets a great victory over the Philiſtims. Eurotas the ſon of Lelex, and Lacedæmon, who married Sparta the daughter of Eurotas, reign in Laconia, and build Sparta.

1060. Samuel dies.

1059. David made king.

1048. The Edomites are conquered and diſperſed by David, and ſome of them fly into Egypt with their young king Hadad.

CHRONICLE. Others fly to the Perſian Gulph with their commander Oannes; and others from the Red Sea to the coaſt of the Mediterranean, and fortify Azoth againſt David, and take Zidon; and the Zidonians, who fled from them, built Tyre and Aradus, and make Abibalus king of Tyre. Theſe Edomites carry to all places their arts and ſciences; amongſt which were their navigation, aſtronomy, and letters: for in Idumæa they had conſtellations and letters before the days of Job, who mentions them; and there Moſes learnt to write the Law in a book. Theſe Edomites, who fled to the Mediterranean, tranſlating the word *Erythræa* into that of *Phœnicia*, give the name of Phœnicians to themſelves, and that of Phœnicia to all the ſea-coaſts of Palæſtine from Azoth to Zidon. And hence came the tradition of the Perſians, and of the Phœnicians themſelves, mentioned by Herodotus, that the Phœnicians came originally from the Red Sea, and preſently undertook long voyages on the Mediterranean.

1047. Acriſius marries Eurydice, the daughter of Lacedæmon and Sparta. The Phœnician mariners who fled from the Red Sea, being uſed to long voyages for the ſake of traffic, begin the like voyages on the Mediterranean from Zidon; and ſailing as far as Greece, carry away Io the daughter of Inachus: who, with other Grecian women, came to their ſhips to buy their merchandize. The Greek ſeas begin to be infeſted with pirates.

1046. The Syrians of Zobah and Damaſcus are conquered by David. Nyctimus, the ſon of Lycaon, reigns in Arcadia. Deucalion ſtill alive.

1045. Many of the Phœnicians and Syrians, fleeing from Zidon and from David, come under the conduct of Cadmus, Cilix, Phœnix, Membliarius, Nycteus, Thaſus, Atymnus, and other captains, into Aſia Minor, Crete, Greece, and Libya; and introduce letters, muſic, poetry, the Octaeteris, metals and their fabrication, and other arts, ſciences and cuſtoms of the Phœnicians. At this time Cranäus, the ſucceſſor of Cecrops, reigned in Attica; and in his reign, and the beginning of the reign of Nyctimus, the Greeks place the flood of Deucalion. This flood was ſucceeded by four ages or generations of men, in the firſt of which Chiron, the ſon of Saturn and Philyra, was born, and the laſt

laſt of which, according to Heſiod, ended with the Trojan war; CHRONICLE. and ſo places the deſtruction of Troy four generations, or about 140 years later than that flood and the coming of Cadmus; reckoning with the ancients three generations to an hundred years. With theſe Phœnicians came a ſort of men ſkilled in the religious myſteries, arts and ſciences of Phœnicia, and ſettled in ſeveral places, under the names of Curetes, Corybantes, Telchines, and Idæi Dactyli.

1043. Hellen, the ſon of Deucalion, and father of Æolus, Xuthus, and Dorus, flouriſhes.

1035. Erectheus reigns in Attica. Æthlius, the grandſon of Deucalion and father of Endymion, builds Elis. The Idæi Dactyli find out iron in mount Ida in Crete, and work it into armour and iron tools; and thereby give a beginning to the trades of ſmiths and armourers in Europe: and by ſinging and dancing in their armour, and keeping time by ſtriking upon one another's armour with their ſwords, they bring in muſic and poetry; and at the ſame time they nurſe up the Cretan Jupiter in a cave of the ſame mountain, dancing about him in their armour.

1034. Ammon reigns in Egypt. He conquered Libya, and reduced that people from a wandering ſavage life to a civil one, and taught them to lay up the fruits of the earth; and from him Libya, and the deſert above it, were anciently called Ammonia. He was the firſt that built long and tall ſhips with ſails; and had a fleet of ſuch ſhips on the Red Sea, and another on the Mediterranean at Iraſa in Libya. Till then they uſed ſmall and round veſſels of burden, invented on the Red Sea, and kept within ſight of the ſhore. For enabling them to croſs the ſeas without ſeeing the ſhore, the Egyptians began in his days to obſerve the ſtars: and from this beginning aſtronomy and ſailing had their riſe. Hitherto the luniſolar year had been in uſe: but this year being of an uncertain length, and ſo, unfit for aſtronomy, in his days and in the days of his ſons and grandſons, by obſerving the heliacal riſing and ſetting of the ſtars, they found the length of the ſolar year; and made it conſiſt of five days more than the twelve calendar months of the old luniſolar year.

CHRONICLE. Crëusa, the daughter of Erechtheus, marries Xuthus the son of Hellen. Erechtheus, having first celebrated the Panathenæa, joins horses to a chariot. Ægina, the daughter of Asopus, and mother of Æacus, born.

1030. Ceres, a woman of Sicily, in seeking her daughter who was stolen, comes into Attica; and there teaches the Greeks to sow corn: for which benefaction she was deified after death. She first taught the art to Triptolemus, the young son of Celeus king of Eleusis.

1028. Oenotrus, the young son of Lycaon, the Janus of the Latines, led the first colony of Greeks into Italy, and there taught them to build houses. Perseus born.

1020. Arcas, the son of Callisto and grandson of Lycaon, and Eumelus the first king of Achaia, receive bread-corn from Triptolemus.

1019. Solomon reigns, and marries the daughter of Ammon, and by means of this affinity is supplied with horses from Egypt; and his merchants also bring horses from thence for all the kings of the Hittites and Syrians: for horses came originally from Libya; and thence Neptune was called *Equestris*. Tantalus, king of Phrygia, steals Ganimede the son of Tros king of Troas.

1017. Solomon, by the assistance of the Tyrians and Aradians, who had mariners among them acquainted with the Red Sea, sets out a fleet upon that sea. Those assistants build new cities in the Persian Gulph, called Tyre and Aradus.

1015. The Temple of Solomon is founded. Minos reigns in Crete, expelling his father Asterius; who flees into Italy, and becomes the Saturn of the Latines. Ammon takes Gezer from the Canaanites, and gives it to his daughter, Solomon's wife.

1014. Ammon places Cepheus at Joppa.

1010. Sesac, in the reign of his father Ammon, invades Arabia Fœlix, and sets up pillars at the mouth of the Red Sea. Apis, Epaphus or Epopeus, the son of Phroroneus, and Nycteus king of Bœotia slain. Lycus inherits the kingdom of his brother Nycteus. Ætolus, the son of Endymion, flies into the country of the Curetes in Achaia, and calls it Ætolia; and of Pronoë, the daughter of Phorbas, begets Pleuron and Calydon; who built cities

ties in Ætolia called by their own names. Antiopa, the daughter CHRONICLE. of Nycteus, is sent home to Lycus by Lamedon, the successor of Apis, and in the way brings forth Amphion and Zethus.

1008. Sesac, in the reign of his father Ammon, invades Africa and Spain; and sets up pillars in all his conquests, and particularly at the mouth of the Mediterranean; and returns home by the coast of Gaul and Italy.

1007. Ceres being dead, Eumolpus institutes her mysteries in Eleusine. The mysteries of Rhea are instituted in Phrygia, in the city Cybele. About this time temples begin to be built in Greece. Hyagnis the Phrygian invents the pipe. After the example of the common-council of the five lords of the Philistims, the Greeks set up the Amphictyonic council; first at Thermopylæ, by the influence of Amphictyon the son of Deucalion; and a few years after at Delphi, by the influence of Acrisius. Among the cities, whose deputies met at Thermopylæ, I do not find Athens, and therefore doubt whether Amphictyon was king of that city. If he was the son of Deucalion, and brother of Hellen; he and Cranaus might reign together in several parts of Attica. But I meet with a later Amphictyon, who entertained the great Bacchus. This council worshipped Ceres, and therefore was instituted after her death.

1006. Minos prepares a fleet; clears the Greek seas of pirates, and sends colonies to the islands of the Greeks; some of which were not inhabited before. Cecrops II. reigns in Attica. Caucon teaches the mysteries of Ceres in Messene.

1005. Andromeda carried away from Joppa by Perseus. Pandion, the brother of Cecrops II, reigns in Attica. Car, the son of Phoroneus, builds a temple to Ceres.

1002. Sesac reigns in Egypt, and adorns Thebes, dedicating it to his father Ammon, by the name of No-Ammon or Ammon-No; that is the people or city of Ammon: whence the Greeks called it Diospolis, the city of Jupiter. Sesac also erected temples and oracles to his father in Thebes, Ammonia, and Ethiopia; and thereby caused his father to be worshipped as a god in those countries, and I think also in Arabia Fœlix: and this was the original of the worship of Jupiter Ammon, and the first men-

tion

CHRONICLE. tion of oracles that I meet with in prophane hiſtory. War between Pandion and Labdacus the grandſon of Cadmus.

994. Ægeus reigns in Attica.

993. Pelops, the ſon of Tantalus, comes into Peloponneſus; marries Hippodamia the grand-daughter of Acriſius; takes Ætolia from Ætolus the ſon of Endymion; and by his riches grows potent.

990. Amphion and Zethus ſlay Lycus; put Laius the ſon of Labdacus to flight; and reign in Thebes, and wall the city about.

989. Dædalus, and his nephew Talus, invent the ſaw; the turning-lath; the wimble; the chip-ax; and other inſtruments of carpenters and joiners; and thereby give a beginning to thoſe arts in Europe. Dædalus alſo invented the making of ſtatues with their feet aſunder, as if they walked.

988. Minos makes war upon the Athenians, for killing his ſon Androgeus. Æacus flouriſhes.

987. Dædalus kills his nephew Talus, and flies to Minos. A prieſteſs of Jupiter Ammon, being brought by Phœnician merchants into Greece, ſets up the oracle of Jupiter at Dodona. This gives a beginning to oracles in Greece: and by their dictates, the worſhip of the dead is every where introduced.

983. Siſyphus, the ſon of Æolus and grandſon of Hellen, reigns in Corinth, and ſome ſay that he built that city.

980. Laius recovers the kingdom of Thebes. Athamas, the brother of Siſyphus and father of Phrixus and Helle, marries Ino the daughter of Cadmus.

979. Rehoboam reigns. Thoas is ſent from Crete to Lemnos; reigns there in the city Hephœſtia; and works in copper and iron.

978. Alcmena born, of Electryo, the ſon of Perſeus and Andromeda, and of Lyſidice the daughter of Pelops.

974. Seſac ſpoils the Temple, and invades Syria and Perſia, ſetting up pillars in many places. Jeroboam, becoming ſubject to Seſac, ſets up the worſhip of the Egpptian gods in Iſrael.

971. Seſac invades India, and returns with triumph the next year but one: whence *Trieterica Bacchi.* He ſets up pillars on two mountains at the mouth of the river Ganges.

968.

968. Theſeus reigns, having overcome the Minotaur; and ſoon after unites the twelve cities of Attica under one government. CHRONICLE. Seſac, having carried on his victories to Mount Caucaſus, leaves his nephew Prometheus there, and Æetes in Colchis.

967. Seſac, paſſing over the Helleſpont, conquers Thrace; kills Lycurgus king thereof; and gives his kingdom, and one of his ſinging-women, to Oeagrus the father of Orpheus. Seſac had in his army Ethiopians commanded by Pan, and Libyan women commanded by Myrina, or Minerva. It was the cuſtom of the Ethiopians to dance, when they were entering into a battle; and from their ſkipping they were painted with goats feet in the form of ſatyrs.

966. Thoas, being made king of Cyprus by Seſac, goes thither with his wife Calycopis, and leaves his daughter Hypſipyle in Lemnos.

965. Seſac is baffled by the Greeks and Scythians; loſes many of his women with their queen Minerva; compoſes the war; is received by Amphiction at a feaſt; buries Ariadne; goes back through Aſia and Syria into Egypt with innumerable captives, among whom was Tithonus, the ſon of Laomedon king of Troy; and leaves his Libyan Amazons, under Marthefia and Lampeto, the ſucceſſors of Minerva, at the river Thermodon. He left alſo in Colchos geographical tables of all his conqueſts; and thence geography had its riſe. His ſinging-women were celebrated in Thrace by the name of the Muſes. And the daughters of Pierus, a Thracian, imitating them, were celebrated by the ſame name.

964. Minos, making war upon Cocalus king of Sicily, is ſlain by him. He was eminent for his dominion, his laws, and his juſtice: upon his ſepulchre, viſited by Pythagoras, was this inſcription, ΤΟΥ ΔΙΟϹ; the ſepulchre of Jupiter. Danäus with his daughters flying from his brother Egyptus (that is from Seſac) comes into Greece. Seſac, uſing the advice of his ſecretary Thoth, diſtributes Egypt into xxxvi Nomes; and in every Nome erects a temple; and appoints the ſeveral gods, feſtivals and religions of the ſeveral Nomes. The temples were the ſepulchres of his great men; where they were to be buried and worſhipped.

CHRONICLE. worſhipped after death, each in his own temple, with ceremonies and feſtivals appointed by him; while he and his queen, by the names of Oſiris and Iſis, were to be worſhipped in all Egypt. Theſe were the temples ſeen and deſcribed by Lucian eleven hundred years after, to be of one and the ſame age; and this was the original of the ſeveral Nomes of Egypt, and of the ſeveral gods and ſeveral religions of thoſe nomes. Seſac divided alſo the land of Egypt by meaſure amongſt his ſoldiers; and thence geometry had its riſe. Hercules and Euryſtheus born.

963. Amphictyon brings the twelves gods of Egypt into Greece; and theſe are the *Dii magni majorum gentium*, to whom the earth and planets and elements are dedicated.

962. Phryxus and Helle fly from their ſtep-mother Ino, the daughter of Cadmus. Helle is drowned in the Helleſpont, ſo named from her; but Phryxus arrived at Colchos.

960. The war between the Lapithæ and the people of Theſſaly, called Centaurs.

958. Oedipus kills his father Laius. Sthenelus, the ſon of Perſeus, reigns in Mycene.

956. Seſac is ſlain by his brother Japetus; who after death was deified in Afric by the name of Neptune, and called Typhon by the Egyptians. Orus reigns and routs the Libyans; who, under the conduct of Japetus, and his ſon Antæus or Atlas, invaded Egypt. Seſac, from his making the river Nile uſeful, by cutting channels from it to all the cities of Egypt, was called by its names, Sihor or Siris, Nilus and Egyptus. The Greeks hearing the Egyptians lament, *O Siris* and *Bou Siris*, called him Oſiris and Buſiris. The Arabians from his great acts called him Bacchus; that is, the Great. The Phrygians called him Ma-fors, or Mavors, The Valiant; and, by contraction, Mars. Becauſe he ſet up pillars in all his conqueſts, and his army in his father's reign fought againſt the Africans with clubs, he is painted with pillars and a club. And this is that Hercules who, according to Cicero, was born upon the Nile; and, according to Eudoxus, was ſlain by Typhon; and, according to Diodorus, was an Egyptian; and went over a great part of the world, and ſet up the pillars in Afric. He ſeems to be alſo the Belus, who, according to Diodorus, led

a colony of Egyptians to Babylon; and there inſtituted prieſts CHRONICLE. called Chaldeans, who were free from taxes, and obſerved the ſtars, as in Egypt. Hitherto Judah and Iſrael laboured under great vexations; but henceforward Aſa, king of Judah, had peace ten years.

947. The Ethiopians invade Egypt, and drown Orus in the Nile. Thereupon Bubaſte, the ſiſter of Orus, kills herſelf, by falling from the top of an houſe, and their mother Iſis, or Aſtræa, goes mad: and thus ended the reign of the gods of Egypt.

946. Zerah the Ethiopian is overthrown by Aſa. The people of the lower Egypt make Oſarſiphus their king, and call in two hundred thouſand Jews and Phœnicians againſt the Ethiopians. Menes or Amenophis, the young ſon of Zerah and Ciſſia, reigns.

944. The Ethiopians under Amenophis retire from the lower Egypt, and fortify Memphis againſt Oſarſiphus. And by theſe wars and the Argonautic expedition, the great empire of Egypt breaks in pieces. Euryſtheus, the ſon of Sthenelus, reigns in Mycenæ.

943. Evander and his mother Carmenta carry letters into Italy.

942. Orpheus deifies the ſon of Semele, by the name of Bacchus, and appoints his ceremonies.

940. The great men of Greece, hearing of the civil wars and diſtractions of Egypt, reſolve to ſend an embaſſy to the nations upon the Euxine and Mediterranean ſeas, ſubject to that empire; and for that end ordered the building of the ſhip Argo.

939. The ſhip Argo is built, after the pattern of the long ſhip in which Danäus came into Greece: and this was the firſt long ſhip built by the Greeks. Chiron, who was born in the Golden Age, forms the conſtellations for the uſe of the Argonauts; and places the ſolſtitial and equinoctial points in the fifteenth degrees, or middles, of the conſtellations of Cancer, Chelæ, Capricorn, and Aries. Meton, in the year of Nabonaſſar 316, obſerved the ſummer ſolſtice in the eighth degree of Cancer; and therefore the ſolſtice had then gone back ſeven degrees. It goes back one degree in about ſeventy-two years; and ſeven degrees in about 504 years. Count theſe years back from the year of Na-

Chronicle. bonaſſar 316, and they will place the Argonautic expedition about 936 years before Chriſt. Gingris, the ſon of Thoas, ſlain, and deified by the name of Adonis.

938. Theſeus, being fifty years old, ſteals Helena, then ſeven years old. Pirithous, the ſon of Ixion, endeavouring to ſteal Perſephone, the daughter of Orcus king of the Moloſſians, is ſlain by the dog of Orcus; and his companion Theſeus is taken and impriſoned. Helena is ſet at liberty by her brothers.

937. The Argonautic expedition. Prometheus leaves Mount Caucaſus, being ſet at liberty by Hercules. Laomedon, king of Troy, is ſlain by Hercules. Priam ſucceeds him. Talus, a brazen man, of the brazen age, the ſon of Minos, is ſlain by the Argonauts. Æſculapius and Hercules were Argonauts, and Hippocrates was the eighteenth from Æſculapius by the father's ſide, and the nineteenth from Hercules by the mother's ſide; and becauſe theſe generations, being noted in hiſtory, were moſt probably by the chief of the family, and for the moſt part by the eldeſt ſons; we may reckon 28, or at the moſt 30 years, to a generation: and thus the ſeventeen intervals by the father's ſide, and eighteen by the mother's, will, at a middle reckoning, amount unto about 507 years; which being counted backwards from the beginning of the Peloponneſian war, at which time Hippocrates began to flouriſh, will reach up to the time where we have placed the Argonautic expedition.

936. Theſeus is ſet at liberty by Hercules.

934. The hunting of the Calydonian boar, ſlain by Meleager.

930. Amenophis, with an army out of Ethiopia and Thebais, invades the lower Egypt; conquers Oſarſiphus; and drives out the Jews and Canaanites: and this is reckoned the ſecond expulſion of the ſhepherds. Calycopis dies; and is deified by Thoas with temples at Paphos and Amathus in Cyprus, and at Byblus in Syria, and with prieſts and ſacred rites; and becomes the Venus of the ancients, and the *Dea Cypria* and *Dea Syria*. And from theſe and other places, where temples were erected to her, ſhe was alſo called Paphia, Amathuſia, Byblia, Cytherea, Salaminia, Cnidia, Erycina, Idalia, &c. And her three waiting-women became the three graces.

928.

928. The war of the ſeven captains againſt Thebes. Chronicle.

927. Hercules and Æſculapius are deified. Euryſtheus drives the Heraclidæ out of Peloponneſus. He is ſlain by Hyllus, the ſon of Hercules. Atreus, the ſon of Pelops, ſucceeds him in the kingdom of Mycenæ. Meneſtheus, the great grandſon of Erechtheus, reigns at Athens.

925. Theſeus is ſlain, being caſt down from a rock.

924. Hyllus, invading Peloponneſus, is ſlain by Echemus.

919. Atreus dies. Agamemnon reigns. In the abſence of Menelaus, who went to look after what his father Atreus had left to him, Paris ſteals Helena.

918. The ſecond war againſt Thebes.

912. Thoas, king of Cyprus and part of Phœnicia, dies; and for making armour for the kings of Egypt, is deified with a ſumptuous temple at Memphis, by the name of Baal Canaan, Vulcan. This temple was ſaid to be built by Menes, the firſt king of Egypt, who reigned next after the gods; that is, by Menoph or Amenophis, who reigned next after the death of Oſiris, Iſis, Orus, Bubaſte and Thoth. The city Memphis was alſo ſaid to be built by Menes; he began to build it, when he fortified it againſt Oſarſiphus. And from him it was called Menoph, Moph, Noph, &c. and is to this day called Menuf by the Arabians. And therefore Menes, who built the city and temple, was Menoph or Amenophis. The prieſts of Egypt at length made this temple above a thouſand years older than Amenophis, and ſome of them five or ten thouſand years older: but it could not be above two or three hundred years older than the reign of Pſammiticus who finiſhed it, and died 614 years before Chriſt. When Menoph, or Menes, built the city, he built a bridge there over the Nile: a work too great to be older than the monarchy of Egypt.

909. Amenophis, called Memnon by the Greeks, built the Memnonia at Suſa, whilſt Egypt was under the government of Proteus, his viceroy.

904. Troy taken. Amenophis was ſtill at Suſa; the Greeks feigning that he came from thence to the Trojan war.

CHRONICLE. 903. Demophoon, the ſon of Theſeus by Phœdra the daughter of Minos, reigns at Athens.

901. Amenophis builds ſmall pyramids in Cochome.

896. Ulyſſes leaves Calypſo in the iſland Ogygia (perhaps Cadis or Cales). She was the daughter of Atlas, according to Homer. The ancients at length feigned that this iſland, which from Atlas they called Atlantis, had been as big as all Europe, Africa and Aſia, but was ſunk into the ſea.

895. Teucer builds Salamis in Cyprus. Hadad, or Benhadad, king of Syria dies; and is deified at Damaſcus with a temple and ceremonies.

887. Amenophis dies; and is ſucceeded by his ſon Rameſſes, or Rhampſinitus; who builds the weſtern portico of the temple of Vulcan. The Egyptians dedicated to Oſiris, Iſis, Orus ſenior, Typhon, and Nephthe, the ſiſter and wife of Typhon, the five days added by the Egyptians to the twelve calendar months of the old luni-ſolar year; and ſaid, that they were added when theſe five princes were born. They were therefore added in the reign of Ammon, the father of theſe five princes. But this year was ſcarce brought into common uſe, before the reign of Amenophis: for in his temple or ſepulchre at Abydus, they placed a circle of 365 cubits in compaſs, covered on the upper ſide with a plate of gold, and divided into 365 equal parts, to repreſent all the days of the year; every part having the day of the year, and the heliacal riſings and ſettings of the ſtars on that day, noted upon it: and this circle remained there, till Cambyſes ſpoiled the temples of Egypt. And from this monument I collect, that it was Amenophis who eſtabliſhed this year, fixing the beginning thereof to one of the four cardinal points of the heavens. For had not the beginning thereof been now fixed, the heliacal riſings and ſettings of the ſtars could not have been noted upon the days thereof. The prieſts of Egypt, therefore, in the reign of Amenophis, continued to obſerve the heliacal riſings and ſettings of the ſtars upon every day. And when by the ſun's meridional altitudes they had found the ſolſtices and equinoxes, according to the ſun's mean motion, his equation being not yet known; they fixed the beginning of this year to the vernal

vernal equinox; and in memory thereof erected this monument. CHRONICLE. Now this year being carried into Chaldæa, the Chaldæans began their year of Nabonaſſar on the ſame Thoth with the Egyptians, and made it of the ſame length. And the Thoth of the firſt year of Nabonaſſar fell upon the 26th day of February: which was 33 days and five hours before the vernal equinox, according to the ſun's mean motion. And the Thoth of this year moves backwards 33 days and five hours in 137 years; and therefore fell upon the vernal equinox 137 years before the æra of Nabonaſſar began; that is, 884 years before Chriſt. And if it began upon the day next after the vernal equinox, it might begin three or four years earlier; and there we may place the death of this king. The Greeks feigned that he was the ſon of Tithonus; and therefore he was born after the return of Seſac into Egypt with Tithonus and other captives; and ſo might be about 70 or 75 years old at his death.

883. Dido builds Carthage; and the Phœnicians begin preſently after to ſail as far as to the Straights Mouth, and beyond. Æneas was ſtill alive, according to Virgil.

870. Heſiod flouriſhes. He hath told us himſelf, that he lived in the age next after the wars of Thebes and Troy; and that this age ſhould end, when the men then living grew hoary, and dropt into the grave; and therefore it was but of an ordinary length: and Herodotus has told us, that Heſiod and Homer were about 400 years older than himſelf. Whence it follows, that the deſtruction of Troy was not older, than we have repreſented it.

860. Mœris reigns in Egypt. He adorned Memphis, and tranſlated the ſeat of his empire thither from Thebes. There he built the famous labyrinth, and the northern portico of the temple of Vulcan; and dug the great lake called the lake of Mœris; and upon the bottom of it built two great pyramids of brick: and theſe things being not mentioned by Homer or Heſiod, were unknown to them, and done after their days. Mœris wrote alſo a book of geometry.

852. Hazaël, the ſucceſſor of Hadad at Damaſcus, dies; and is deified, as was Hadad before: and theſe gods, together with

CHRONICLE. Arathes the wife of Hadad, were worſhipped in their ſepulchres or temples, till the days of Joſephus the Jew; and the Syrians boaſted their antiquity; not knowing, ſaith Joſephus, that they were novel.

844. The Æolic migration. Boeotia, formerly called Cadmeis, is ſeized by the Boeotians.

838. Cheops reigns in Egypt. He built the greateſt pyramid for his ſepulchre, and forbad the worſhip of the former kings; intending to have been worſhiped himſelf.

825. The Heraclidæ, after three generations, or an hundred years, reckoned from their former expedition, return into Peloponneſus. Henceforward, to the end of the firſt Meſſenian war, reigned ten kings of Sparta by one race, and nine by another; ten of Meſſene, and nine of Arcadia: which, by reckoning (according to the ordinary courſe of nature) about twenty years to a reign, one reign with another, will take up about 190 years. And the ſeven reigns more in one of the two races of the kings of Sparta, and eight in the other, to the battle at Thermopylæ, may take about 150 years more: and ſo place the return of the Heraclidæ about 820 years before Chriſt.

824. Cephren reigns in Egypt, and builds another great pyramid.

808. Mycerinus reigns there, and begins the third great pyramid. He ſhut up the body of his daughter in a hollow ox, and cauſed her to be worſhiped daily with odours.

804. The war between the Athenians and Spartans; in which Codrus, king of the Athenians, is ſlain.

802. Nitocris, the ſiſter of Mycerinus, ſucceeds him; and finiſhes the third great pyramid.

794. The Ionic migration, under the conduct of the ſons of Codrus.

790. Pul founds the Aſſyrian empire.

788. Aſychis reigns in Egypt, and builds the eaſtern portico of the temple of Vulcan very ſplendidly; and a large pyramid of brick, made of mud dug out of the lake of Mœris. Egypt breaks into ſeveral kingdoms. Gnephactus and Bocchoris reign ſucceſſively in the upper Egypt; Stephanatis, Neceſos and Nechus,

chus, at Sais; Anyſis or Amoſis, at Anyſis or Hanes; and Ta- CHRONICLE.
cellotis, at Bubaſte.

776. Iphitus reſtores the Olympiads. And from this æra the olympiads are now reckoned. Gnephactus reigns at Memphis.

772. Neceſos and Peloſiris invent aſtrology in Egypt.

760. Semiramis begins to flouriſh. Sanchoniatho writes.

751. Sabacon, the Ethiopian, invades Egypt, now divided into various kingdoms; burns Bocchoris; ſlays Nechus; and makes Anyſis fly.

747. Pul, king of Aſſyria, dies; and is ſucceeded at Nineveh by Tiglathpilaſſer, and at Babylon by Nabonaſſar. The Egyptians, who fled from Sabacon, carry their aſtrology and aſtronomy to Babylon, and found the æra of Nabonaſſar in Egyptian years.

740. Tiglathpilaſſer, king of Aſſyria, takes Damaſcus, and captivates the Syrians.

729. Tiglathpilaſſer is ſucceeded by Salmanaſſer.

721. Salmanaſſer, king of Aſſyria, carries the ten tribes into captivity.

719. Sennacherib reigns over Aſſyria. Archias, the ſon of Evagetus, of the ſtock of Hercules, leads a colony from Corinth into Sicily, and builds Syracuſe.

717. Tirhakah reigns in Ethiopia.

714. Sennacherib is put to flight by the Ethiopians and Egyptians, with great ſlaughter.

711. The Medes revolt from the Aſſyrians. Sennacherib ſlain. Aſſerhadon ſucceeds him: that is, that Aſſerhadon-Pul, or Sardanapalus, the ſon of Anacyndaraxis, or Sennacherib, who built Tarſus and Anchiale in one day.

710. Lycurgus brings the poems of Homer out of Aſia into Greece.

708. Lycurgus becomes tutor to Charillus, or Charilaus, the young king of Sparta. Ariſtotle makes Lycurgus as old as Iphitus, becauſe his name was upon the olympic diſc. But the diſc was one of the five games called the Quinquertium, and the Quinquertium was firſt inſtituted upon the eighteenth olympiad. Socrates and Thucydides made the inſtitutions of Lycurgus about

300

CHRONICLE. 300 years older than the end of the Peloponneſian war, that is, 705 years before Chriſt.

701. Sabacon, after a reign of 50 years, relinquiſhes Egypt to his ſon Sevechus, or Sethon, who becomes prieſt of Vulcan, and neglects military affairs.

698. Manaſſeh reigns.

697. The Corinthians begin firſt of any men to build ſhips with three orders of oars, called Triremes. Hitherto the Greeks had uſed long veſſels of fifty oars.

687. Tirhakah reigns in Egypt.

681. Aſſerhadon invades Babylon.

673. The Jews conquered by Aſſerhadon, and Manaſſeh carried captive to Babylon.

671. Aſſerhadon invades Egypt. The government of Egypt committed to twelve princes.

668. The weſtern nations of Syria, Phœnicia, and Egypt, revolt from the Aſſyrians. Aſſerhadon dies, and is ſucceeded by Saoſduchinus. Manaſſeh returns from captivity.

658. Phraortes reigns in Media. The Prytanes reign in Corinth, expelling their kings.

657. The Corinthians overcome the Corcyreans at ſea: and this was the oldeſt ſea-fight.

655. Pſammiticus becomes king of all Egypt, by conquering the other eleven kings, with whom he had already reigned fifteen years: he reigned about 39 years more. Henceforward the Ionians had acceſs into Egypt; and thence came the Ionian philoſophy, aſtronomy, and geometry.

652. The firſt Meſſenian war begins: it laſted twenty years.

647. Charops, the firſt decennial archon of the Athenians. Some of theſe archons might die before the end of the ten years, and the remainder of the ten years be ſupplied by a new archon. And hence the ſeven decennial archons might not take up above forty or fifty years. Saoſduchinus king of Aſſyria dies, and is ſucceeded by Chyniladon.

640. Joſiah reigns in Judæa.

636. Phraortes, king of the Medes, is ſlain in a war againſt the Aſſyrians. Aſtyages ſucceds him.

635. The Scythians invade the Medes and Aſſyrians. CHRONICLE.

633. Battus builds Cyrene; where Iraſa, the city of Antæus, had ſtood.

627. Rome is built.

625. Nabopolaſſar revolts from the king of Aſſyria, and reigns over Babylon. Phalantus leads the Parthenians into Italy, and builds Tarentum.

617. Pſammiticus dies. Nechaoh reigns in Egypt.

611. Cyaxeres reigns over the Medes.

610. The princes of the Scythians ſlain in a feaſt by Cyaxeres.

609. Joſiah ſlain. Cyaxeres and Nebuchadnezzar overthrow Nineveh; and, by ſharing the Aſſyrian empire, grow great.

607. Creon the firſt annual archon of the Athenians. The ſecond Meſſenian war begins. Cyaxeres makes the Scythians retire beyond Colchos and Iberia, and ſeizes the Aſſyrian provinces of Armenia, Pontus, and Cappadocia.

606. Nebuchadnezzar invades Syria and Judæa.

604. Nabopolaſſar dies; and is ſucceeded by his ſon Nebuchadnezzar, who had already reigned two years with his father.

600. Darius the Mede, the ſon of Cyaxeres, is born.

599. Cyrus is born of Mandane, the ſiſter of Cyaxeres, and daughter of Aſtyages.

596. Suſiana and Elam conquered by Nebuchadnezzar. Caranus and Perdiccas fly from Phidon, and found the kingdom of Macedon. Phidon introduces weights and meaſures, and the coining of ſilver money.

590. Cyaxeres makes war upon Alyattes king of Lydia.

588. The Temple of Solomon is burnt by Nebuchadnezzar. The Meſſenians being conquered, fly into Sicily, and build Meſſana.

585. In the ſixth year of the Lydian war, a total eclipſe of the ſun, predicted by Thales, May the 28th, puts an end to a battle between the Medes and Lydians: whereupon they make peace; and ratify it by a marriage between Darius Medus the ſon of Cyaxeres, and Ariene the daughter of Alyattes.

584. Phidon preſides in the 49th olympiad.

CHRONICLE. 580. Phidon is overthrown. Two men choſen by lot, out of the city Elis, to preſide in the olympic games.

572. Draco is archon of the Athenians, and makes laws for them.

568. The Amphictions make war upon the Cirrheans, by the advice of Solon, and take Cirrha. Cliſthenes, Alcmæon, and Eurolicus, commanded the forces of the Amphictions, and were contemporary to Phidon. For Leocides, the ſon of Phidon, and Megacles, the ſon of Alcmæon, at one and the ſame time, courted Agariſta the daughter of Cliſthenes.

569. Nebuchadnezzar invades Egypt. Darius the Mede reigns.

562. Solon, being archon of the Athenians, makes laws for them.

557. Periander dies; and Corinth becomes free from taxes.

555. Nabonadius reigns at Babylon. His mother Nitocris adorns and fortifies that city.

550. Piſiſtratus becomes tyrant at Athens. The conference between Crœſus and Solon.

549. Solon dies, Hegeſtratus being archon of Athens.

544. Sardes is taken by Cyrus. Darius the Mede recoins the Lydian money into Darics.

538. Babylon is taken by Cyrus.

536. Cyrus overcomes Darius the Mede, and tranſlates the empire to the Perſians. The Jews return from captivity, and found the ſecond Temple.

529. Cyrus dies. Cambyſes reigns.

521. Darius, the ſon of Hyſtaſpes, reigns. The Magi are ſlain. The various religions of the ſeveral nations of Perſia, which conſiſted in the worſhip of their ancient kings, are aboliſhed; and by the influence of Hyſtaſpes and Zoroaſter, the worſhip of One God at altars, without temples, is ſet up in all Perſia.

520. The ſecond Temple is built at Jeruſalem, by the command of Darius.

515. The ſecond Temple is finiſhed and dedicated.

513. Harmodius and Ariſtogiton ſlay Hipparchus, the ſon of CHRONICLE. Piſiſtratus, tyrant of the Athenians.

508. The kings of the Romans expelled, and conſuls erected.

491. The battle of Marathon.

485. Xerxes reigns.

480. The paſſage of Xerxes over the Helleſpont into Greece, and battles of Thermopylæ and Salamis.

464. Artaxerxes Longimanus reigns.

457. Ezra returns into Judæa. Johanan, the father of Jaddua, was now grown up, having a chamber in the Temple.

444. Nehemiah returns into Judæa. Herodotus writes.

431. The Peloponneſian war begins.

428. Nehemiah drives away Manaſſeh, the brother of Jaddua, becauſe he had married Nicaſo, the daughter of Sanballat.

424. Darius Nothus reigns.

422. Sanballat builds a temple in Mount Gerizim; and makes his ſon-in-law Manaſſeh the firſt high-prieſt thereof.

412. Hitherto the prieſts and Levites were numbered, and written in the chronicles of the Jews, before the death of Nehemiah: at which time either Johanan or Jaddua was high-prieſt. And here ends the ſacred hiſtory of the Jews.

405. Artaxerxes Mnemon reigns. The end of the Peloponneſian war.

359. Artaxerxes Ochus reigns.

338. Arogus reigns.

336. Darius Codomannus reigns.

332. The Perſian empire conquered by Alexander the Great.

331. Darius Codomannus, the laſt king of Perſia, ſlain.

THE

CHRONOLOGY

OF

ANCIENT KINGDOMS

AMENDED.

CHAP. I.

Of the chronology of the firſt ages of the Greeks.

CHAPTER FIRST.

ALL nations, before they began to keep exact accounts of time, have been prone to raiſe their antiquities; and this humour has been promoted, by the contentions between nations about their originals. Herodotus [a] tells us, that the prieſts of Egypt reckoned, from the reign of Menes to that of Sethon, who put Sennacherib to flight, three hundred forty and one generations

[a] Herod. l. 2. c. 142.

(1) This is a miſtake. The Egyptians, according to Herodotus, reckoned 15000 years not from Pan, but from Bacchus to Amoſis. This however does not invalidate Sir Iſaac Newton's reaſoning, when he would infer, from the example of the Egyptians, the proneneſs of nations to raiſe their antiquities, but rather ſtrengthens it: becauſe Bacchus, according to the Egyptians, was younger than Pan. Herod. lib. II. c. 145.

(2) Lib. II. c. 43.

(3) Simplicius relates this in his commentary upon Ariſtotle De Cælo, p. 123, upon the authority of Porphyry.

(4) Diod. Sic. p. 118. Cic. de Div. lib. 1. c. 19, and lib. 2. c. 46. Syncell. Chronogr. p. 17.

nerations of men, and as many prieſts of Vulcan, and as many kings of Egypt: and that three hundred generations make ten thouſand years; for, ſaith he, three generations of men make an hundred years: and the remaining forty and one generations make 1340 years: and ſo the whole time from the reign of Menes to that of Sethon was 11340 years. And by this way of reckoning, and allotting longer reigns to the gods of Egypt than to the kings which followed them, Herodotus tells us from the prieſts of Egypt, that from Pan to Amoſis were 15000 years (1); and from Hercules to Amoſis 17000 years (2). So alſo the Chaldæans boaſted of their antiquity; for Calliſthenes, the diſciple of Ariſtotle, ſent aſtronomical obſervations from Babylon to Greece, ſaid to be of 1903 (3) years ſtanding before the times of Alexander the Great. And the Chaldeans boaſted further, that they had obſerved the ſtars 473000 (4) years; and there were others who made the kingdoms of Aſſyria, Media, and Damaſcus, much older than the truth. GREEKS.

II. Some of the Greeks called the times before the reign of Ogyges, Unknown (1), becauſe they had no hiſtory of them: thoſe between his flood and the beginning of the olympiads, Fabulous; becauſe their hiſtory was much mixed with poetical fables: and thoſe after the beginning of the olympiads, Hiſtorical; becauſe their hiſtory was free from ſuch fables. The fabulous ages wanted a good chronology; and ſo alſo did the hiſtocal, for the firſt 60 or 70 olympiads.

III. The Europeans had no chronology before the times of the Perſian empire: and whatſoever chronology they now have of ancienter times, hath been framed ſince by reaſoning and conjecture. In the beginning of that monarchy, Acuſiläus made Phoroneus as old as Ogyges and his flood; and that flood 1020 (1) years

§ II.

(1) This diviſion of times into the ἄδηλον, μυθικον, and ἱστορικον; (the firſt comprizing all that preceded the Ogygian flood; the ſecond, the interval between that flood and the firſt olympiad; the third beginning with the firſt olympiad) was Varro's. *Vid. Cenſorinum de Die Natali*, c. 21.

§ III.

(1) This Sir John Marſham affirms, upon the authority, as he imagines, of a fragment of Africanus preſerved by Euſebius, Præp. Evang. p. 287. But in this fragment, Acuſiläus is indeed the authority, for making the Ogygian flood happen in Attica, while Phoroneus was reigning at

CHAPTER FIRST.

years older than the first olympiad; which is above 680 years older than the truth: and to make out this reckoning, his followers have encreased the reigns of kings in length and number. Plutarch [a] tells us, that the philosophers anciently delivered their opinions in verse; as Orpheus, Hesiod, Parmenides, Xenophanes, Empedocles, Thales: but afterwards left off the use of verses; and that Aristarchus, Timocharis, Aristillus, Hipparchus, did not make astronomy the more contemptible, by describing it in prose, after Euxodus, Hesiod, and Thales, had wrote of it in verse. Solon wrote [b] in verse; and all the Seven Wise Men were addicted to poetry, as (2) Anaximenes [c] affirmed. Till those days (3) the Greeks wrote only in verse; and while they did so, there could be no chronology, nor any other history, than such as was mixed with poetical fancies. Pliny [d], in reckoning up the inventors of things, tells us, that Pherecydes Syrius taught to compose discourses in prose, in the reign of Cyrus; and Cadmus Milesius, to write history. And in [e] another place he saith, that Cadmus Milesius was the first that wrote in prose. Josephus tells us [f], that Cadmus Milesius and Acusiläus were but a little before the expedition of the Persians against the Greeks:

[a] Plutarch. de Pythiæ Oraculis, tom. II. p. 402.

[b] Plutarch, in Solon. passim.

[c] Apud Diog. Laert. in Thalet. tom. I. p. 24.

[d] Plin. nat. hist. l. 7. c. 56.

[e] Ib. l. 5. c. 29.

[f] Cont. Apion. p. 1130. edit. Hudson.

at Argos; but not for the number of years, between Ogyges and the first olympiad. This Africanus seems to have determined for himself, and he alledges nothing for it but his own calculations.

(2) PROBABLY that Anaximenes of Lampsacus, who is mentioned by Diodorus Siculus, and other antient writers, as the author of a work entitled Ὡραι Ἱστοριαι. It was a history, which began with a Theogony and the first race of men; and was carried down to the battle of Mantinea and the death of Epaminondas. It consisted of 12 books, which comprized, saith Diodorus (p. 504) almost all the affairs both of Greeks and barbarians. *See Meursius in Chalcidium.*

(3) STRABO mentions Cadmus, Pherecydes, and Hecatæus, as the first prose writers. Of these Cadmus was probably contemporary with Halyattes, the father of Crœsus; and therefore somewhat earlier than the beginning of the Persian monarchy. (See Vossius de Hist. Gr. lib. 4. c. 1.) Hecatæus was somewhat later; being contemporary with Darius, the son of Hystaspes. Pherecydes of Scyros flourished in the 59th olympiad, according to Diogenes Laertius; therefore in the time of Cyrus, the founder of the Persian monarchy. This Pherecydes was probably a different person from the preceptor of Pythagoras. See *Salmasius Exercit. Plin. p. 594, edit. Ultra Traject.* tra traject.

(4) THAT Epimenides the genealoger was a different person from the Cretan philosopher, we learn from Diogenes Laertius (Tom. I. p. 74) who ascribes, however, some writings in prose to the philosopher. I know not upon what ground Vossius took up his opinion, that there were two genealogers of this name. Diogenes Laertius, the only author that he cites for it, says no such thing.

(5) Vid. Voss. de Hist. Gr. lib. 1. c. 1.

(6) THUCYDIDES defines the time when the Peloponnesian war commenced by the Athenian archon, the Spartan Ephorus, and the year of the priestess of Juno at Argos. And the scholiast remarks upon the place, that the Argives kept the reckoning of their time by the succession of the priestesses. (Vid. Thucydid. p. 84.) Dionysius Halicarnassensis, in his Roman antiquities, relating the different opinions of authors of note concerning the builder of Rome and the time when Rome was built, speaks of one, whom he describes without naming him as the writer who had collected the Argive priestesses, and the facts which had happened in the time of each (p. 58.) And in another place, where he would define the time of the expulsion of the Siculi from Italy, he says, "In this manner the race of the Siculi left Italy, as Hellanicus "of Lesbos saith, in the third generation before the Trojan war, in the 26th year of the priest-"hood of Alcyone at Argos" (lib. 1. c. 22.) From all these circumstances put together it seems evident, that Hellanicus's history was digested by the years of the Argive priestesses. And it puts the thing out of doubt, that Stephanus Byzantinus frequently refers to Hellanicus in the 1st, 2d, or 3d book of the priestesses of Juno. See Stephanus in the articles Νισαια, Σιτυλη, Φλιαξ, Φρικιον, Χαιρωνεια, Χαλκις, Χαονια. The learned reader, for further information, may consult Meursius *De Archontibus Athenien sium*, and Valesius in *Exc. Polyb.*

Greeks: and Suidas [a] calls Acusiläus a most ancient historian; and saith, that he wrote genealogies out of tables of brass, which his father, as was reported, found in a corner of his house. Who hid them there, may be doubted: for the Greeks [b] had no publick table or inscription older than the laws of Draco. Pherecydes Athenien sis, in the reign of Darius Hystaspis, or soon after, wrote of the antiquities and ancient genealogies of the Athenians, in ten books; and was one of the first European writers of this kind, and one of the best; whence he had the name of *Genealogus*; and by Dionysius [c] Halicarnassensis is said to be second to none of the genealogers. Epimenides, not the philosopher but an historian (4), wrote also of the ancient genealogies: and Hellanicus, who was twelve years older than Herodotus (5), digested his history by the ages or successions of the priestesses of Juno Argiva (6). Others digested theirs by those of the archons of Athens, or kings of the Lacedæmonians. Hippias the Elean published a breviary of the olympiads, supported by no certain arguments, as Plutarch [d] tells us: he lived in the 105th olympiad (7), and was derided by Plato for his ignorance.

GREEKS.

[a] In Ἀκουσίλαος.

[b] Joseph. cont. Ap. l. 1. p. 1331.

[c] Dionys. l. 1. c. 13.

[d] Plutarch. in Numa. p. 60.

This

(7) HE must have lived sooner; if he was, as Newton supposes, the same person with Hippias the sophist, the object of Plato's raillery. This person, in the two dialogues in which he bears so conspicuous a part, is not made to address Socrates in the character of a very young man conversing with an old one. On the contrary, in the first, Περι του Ψευδους, he speaks as if he had for some time been in the practice of displaying his dialectic talents at the olympic festival. And in the other, Περι του Καλου, he talks of important embassies, in which he had been employed. He was therefore in the height of his fame, during the life of Socrates; which ended in the 1st year of the 95th olympiad. Some learned men, in the text of Plutarch, for Ιππιαν εκδεδυκαι τον Ηλειον, would read Ιππιαν εκδεδυκαι τον Δηλιον. The Scholiast on Apollonius Argonaut. lib. 3. lin. 1178, quotes one Hippias of Delus: but the only reason for introducing him here is, that it is imagined, Plutarch would not have said of a writer 500 years older than himself, as Hippias the Elean sophist was, that he had *late* compiled a list, ουδε φασιν Ιππιαν εκδεδυκαι. But this is not a sufficient reason for altering the text, without the authority of any MS. or old edition. For the *lateness* of

CHAPTER FIRST.

This breviary ſeems to have contained nothing more than a ſhort account of the victors in every olympiad. Then [a] Ephorus, the diſciple of Iſocrates, formed a chronological hiſtory of Greece (8); beginning with the return of the Heraclidæ into Peloponneſus, and ending with the ſiege of Perinthus, in the twentieth year of Philip, the father of Alexander the Great, that is, eleven years before the fall of the Perſian empire: but [b] he digeſted things by generations (9); and the reckoning by the olympiads, or by any other æra, was not yet in uſe among the Greeks. The Arundelian marbles were compoſed ſixty years after the death of Alexander the Great (An. 4. Olymp. 128.) and yet mention not the olympiads, nor any other ſtanding æra; but reckon backwards from the time then preſent. But chronology was now reduced to a reckoning by years; and in the next olympiad (10), Timæus Siculus improved it: for he wrote a hiſtory in ſeveral books, down to his own times, according to the olympiads; comparing the Ephori, the kings of Sparta, the archons of Athens, and the prieſteſſes of Argos with the olympic victors, ſo as to make the

[a] Diodor. l. 10. p. 550. edit Steph.

[b] Polyb. p. 379. B.

of the compilation hath reſpect not to Plutarch's age, but to the commencement of the olympiads. It is to be obſerved, that Plutarch ſeems to ſpeak of this work by hear-ſay or tradition, as of one that he had not ſeen; φασιν ιστοριαν γεγραφεναι: which makes it probable either that it was not extant in his time, or that it was in no eſteem.

(8) Not of Greece only, but an univerſal hiſtory; as Diodorus (p. 550), and Polybius (p. 379) both atteſt. Polybius ſays, that Ephorus was the firſt who undertook an univerſal hiſtory.

(9) I know not upon what authority this is ſaid: nor upon what authority Sir John Marſham has aſſerted, that Ephorus had given a liſt of the kings of Sparta, and perhaps of the Ephori.

(10) VARIOUS works of this Timæus are mentioned in antient authors. Three books of Syria, its cities and kings: Affairs of Italy and Sicily in 8 books: Affairs of Greece and Sicily: A Collection of Rhetorical Topics in 68 books: A Chronicle, or Olympic Victors. See Suidas in Τιμαιος. A hiſtory of the wars of the Romans with Pyrrhus of Epire (Dionyſ. Hal. p. 5.) And beſides all theſe, what I ſuppoſe was his principal work, an Univerſal Hiſtory (Κοιναι Ἱστοριαι. Dionyſ. Hal. ibid.) That his hiſtory came down to the 129th olympiad, we have the expreſs teſtimony of Polybius, p. 6. Sir John Marſham ſays, that he could not find where it began. *(Sec. XVI. tit. Prima Olympias vulgaris.)* To me it ſeems probable, that it began with the fabulous ages. For it appears from Dionyſ. Hal. p. 5 and 60) that Timæus, in his Univerſal Hiſtory, had treated of the antiquities of the Roman ſtory; and from Diodorus Siculus (p. 159) that he had written of Hercules's battle with the Giants in the Phlegræan plains.

(11) Polyb. p. 1395. edit. Gronov. (12) Polyb. p. 6.

(13) ERATOSTHENES was called to the care of the Alexandrin library by Ptolemy Euergetes. He continued to flouriſh during the reign of Philopator, and died in the reign of Epiphanes. (Suidas Ερατοσθενης and Απολλωνιος.) Dionyſius Halicarnaſſenſis ſpeaks very highly of the chronographic canons of Eratoſthenes; and mentions a work of his own, in which, he ſays, he had proved them to be ſound (Dionyſ. Hal. p. 60.) It will not be improper to preſent the reader with a ſuccinct view of the general principles of the chronology of Eratoſthenes from the Stromata of Clemens Alexandrinus (p. 145.)

the olympiads, and the genealogies and ſucceſſions of kings and prieſteſſes, and the poetical hiſtories ſuit with one another, according to the beſt of his judgement (11): and where he left off, Polybius began, and carried on the hiſtory (12). Eratoſthenes wrote above an hundred years after the death of Alexander the Great (13): he was followed by Apollodorus (14); and theſe two have been followed ever ſince by chronologers. GREEKS.

IV. But how uncertain their chronology is, and how doubtful it was reputed by the Greeks of thoſe times, may be underſtood by theſe paſſages of Plutarch. "Some reckon Lycurgus, ſaith "he, [a] contemporary to Iphitus, and to have been his compa- "nion in ordering the olympic feſtivals, amongſt whom was "Ariſtotle the philoſpher; arguing from the Olympic Diſc, "which had the name of Lycurgus upon it. Others ſupputing "the times by the kings of Lacedæmon, as Eratoſthenes and "Apollodorus, affirm that he was not a few years older than the "firſt olympiad." He began to flouriſh in the 17th or 18th olympiad (1), and at length Ariſtotle made him as old as the firſt olympiad; and ſo did Epaminondas, as he is cited by Ælian (2) and

[a] In Vita Lycurgi ſub initio.

	Years.
From the taking of Troy to the return of the Heraclidæ,	80
From the return of the Heraclidæ to the ſettlement of Ionia,	60
From the ſettlement of Ionia to the guardianſhip of Lycurgus,	159
From the guardianſhip of Lycurgus to the year next preceding the firſt olympiad,	108
From that year to the invaſion of Xerxes,	297
From the invaſion of Xerxes to the beginning of the Peloponneſian war,	48
From the beginning to the end of that war,	27
From the end of the Peloponneſian war to the battle of Leuctra,	34
From the battle of Leuctra to the death of Philip,	35
From the death of Philip to the death of Alexander,	12

The numbers, as they ſtand in Clemens, are happily confirmed by a paſſage of Dionyſius Halicarnaſſenſis (p. 60); from which we learn, that the 432d year from the taking of Troy was, according to the canons of Eratoſthenes, the 1ſt of the 7th olympiad: which agrees with the Clementine numbers.

(14) THIS Apollodorus was the diſciple of Panætius, the Stoic philoſopher; and flouriſhed in the time of Ptolemy Phyſcon. (Voſſius *de Hiſt. Gr. lib. 1. c. 21.* and Gale *in Diſſert. de Scriptoribus Mythologicis.*) That he followed Eratoſthenes in his ſyſtem of chronology, may be probably collected from theſe circumſtances. They agreed concerning the interval between the taking of Troy and the return of the Heraclidæ; both making it 80 years. (See the laſt note, and compare Diod. Sic. p. 4.) They agreed concerning the age of Homer. (See Clem. Alex. p. 141.) They agreed concerning the age of Lycurgus (Clemens, ibid.) and they took the ſame method to determine it. (Plutarch in Lycurg.) Apollodorus adopted Eratoſthenes's liſt of the kings of Thebais. (Syncellus, p 91.)

§ IV.

(1) Vid. infra, § XI.

(2) EPAMINONDAS, as he is cited by Ælian and Plutarch, agrees with thoſe chronologers, who made

CHAPTER FIRST.

and Plutarch: and then Eratoſthenes, Apollodorus, and their followers, made him above an hundred years older. And in another place Plutarch [a] tells us: "The congreſs of Solon with "Crœſus, ſome think they can confute by chronology. But a "hiſtory ſo illuſtrious, and verified by ſo many witneſſes, and, "which is more, ſo agreeable to the manners of Solon, and wor-"thy of the greatneſs of his mind, and of his wiſdom, I can-"not perſuade myſelf to reject, becauſe of ſome chronological "canons, as they call them, which hundreds of authors cor-"recting have not yet been able to conſtitute any thing certain, "in which they could agree amongſt themſelves about repug-"nancies."

[a] In Solone, tom. I. p. 93.

V. And as for the chronology of the Latines, that is ſtill more uncertain. Plutarch [b] repreſents great uncertainties in the originals of Rome; and ſo doth Servius [c]. The old records of the Latines were burnt [d] by the Gauls an hundred and twenty years after

[b] Plutarch. in Romulo & Numa.
[c] In Æneid. 7. v. 678.
[d] Diodor. l. 1.

made Lycurgus above 100 years older than the firſt olympiad. They make him ſay (Ælian. Var. Hiſt. lib. 13. c. 42, and Plutarch. in Apophthegm.) that the territory of the Lacedæmonians had been free from the devaſtations of an enemy for 500 years before his incurſions. Now from the battle of Leuctra to the beginning of the olympiads, the interval was only 406 years: but to the guardianſhip of Lycurgus, according to Eratoſthenes, 514. See § III. Note 13.) Epaminondas therefore, if he took the age of Lycurgus for the commencement of that long period of tranquillity which Laconia enjoyed, muſt have been in that opinion, which Eratoſthenes afterwards maintained. But little ſtreſs is to be laid on the evidence, which Epaminondas is to made to give upon this queſtion. The ſpirit of his Apophthegm will be juſt the ſame, though the interval between him and Lycurgus be contracted from five to three hundred years It is therefore not improbable, that whoever firſt committed this Apophthegm to writing, might fit it with the date which liked him beſt: and we can have no aſſurance, that the genuine opinion of Epaminondas hath been faithfully tranſmitted to us.

§ V.

([1]) THAT Rome was taken by the Gauls twenty years after the regifuge, we learn from the expreſs teſtimony of Dionyſius Halicarn. Antiq. lib. 1. c. 74. p. 60. From him alſo we learn, that this event was 64 years before the death of Alexander the Great. For he places it in the firſt year of the 98th olympiad: and Alexander died in the firſt of the 114th. That many ancient records, both public and private, periſhed in the conflagration which the city then underwent, is generally believed upon the authority of Livy, lib. 6. c. 1. It is to be remembered, however, that Livy does not ſay that all the public records periſhed in that fire; and the greater probability may be, that all that were in being were preſerved. They would be but few, from the rudeneſs of the Roman people in thoſe early ages: and Livy, becauſe few were to be found, might from that circumſtance infer, without any poſitive evidence, that many had been deſtroyed. The reaſons which incline me to this opinion are theſe:—The Gauls never were in poſſeſſion of the Capitol, where the Romans kept their records, nor did they burn it. When the reſolution was taken of defending the Capitol, and abandoning the reſt of the city to the enemy, it was given in charge to the Flamens and Veſtal virgins, to take the beſt care they could of whatever was moſt ſacred in the temples. Many things they packed in caſks, and buried under a chapel adjoining to the houſe of the Flamen Quirinalis; and the reſt they carried away in

carts

after the regifuge, and ſixty-four years before the death of Alexander the Great ([1]): and Quintus Fabius Pictor, [c] the oldeſt hiſtorian of the Latines ([2]), lived an hundred years later than that king ([3]), and took almoſt all things from Diocles Peparethius ([4]), a Greek. And the chronologers of Gallia, Spain, Germany, Scythia, Swedeland, Britain, and Ireland, are of a date ſtill later; for Scythia, beyond the Danube, had no letters, till Ulphilas ([5]) their biſhop formed them; which was about ſix hundred years ([6]) after the death of Alexander the Great: and Germany had none till it received them from the weſtern empire of the Latines, above ſeven hundred years after the death of that king. The Hunns had none in the days of Procopius; who flouriſhed 850 years after the death of that king: and Sweden and Norway received them ſtill later. And things ſaid to be done above one or two hundred years before the uſe of letters, are of little credit.

GREEKS.

[c] Plutarch. in Romulo.

carts to Cære. Livy, lib. 5. c. 40. Florus, lib. 1. c. 13. Amongſt the treaſure thus preſerved, were ſome of the ſacred books. At leaſt it appears, that ſome of theſe books ſurvived the conflagration. For the firſt buſineſs, after the Gauls were gone, was to repair and purify the temples, which had been occupied and defiled by the enemy; and the *ſacred books were ſearched*, for the rites of purification. Livy, lib. 5. c. 50. And ſince the ſacred books were preſerved, why not the pontifical annals? Dionyſius Halicarnaſſenſis mentions records of a ſort, which ſhould ſeem more likely to periſh; becauſe, though they related to public affairs, they were in private cuſtody. The records I mean were the Cenſorian commentaries; which were handed down from father to ſon, and religiouſly preſerved in the families of thoſe who had born the office of Cenſor. Dionyſius ſpeaks, as if he had ſeen ſome of theſe not leſs antient than the Gallic conflagration; by which he had been enabled to ſettle the diſtance of time between the regifuge and that calamity. Antiq. Rom. lib. 1. c. 74. p. 60. The uncertainty therefore of the Latin chronology (which is but too manifeſt) is not to be derived from a total deſtruction of the Roman Archives by the Gauls; nor is it greater than what muſt neceſſarily ariſe from that original imperfection, which there will always be in the records of rude ages.

([2]) Livy, lib. 2. c. 40.
([3]) For he lived in the time of the 2d Punic war. Livy, lib. 22. c. 7.
([4]) Plutarch in Romulo, tom. I. p. 19.
([5]) Sozomen. Hiſt. Eccates, lib. 6. c. 37. Socr. lib. 4. c. 33. Philoſtorg. lib. 2.

([6]) PHILOSTORGIUS is, as I believe, the only author who makes Ulphilas, or, as he calls him, Urphilas, contemporary with Conſtantine the Great. If with all the reſt of the Eccleſiaſtical hiſtorians we place him under Conſtantius, and the ſucceeding emperor Valens; he was little leſs than 700 years later than Alexander the Great. Whatever might be Sir Iſaac Newton's reaſon for giving credit to Philoſtorgius, I cannot but incline to the opinion of the learned Gothofred; that Philoſtorgius makes Ulphilas older than he was, for the ſake of doing credit to the Arian doctrine, by repreſenting it as the oldeſt chriſtianity with which the Goths were acquainted. For the ſame purpoſe he ſpeaks of Ulphilas as their firſt biſhop. Whereas if he was their firſt biſhop, he muſt have been ſtill older than Philoſtorgius makes him: becauſe he muſt have been their biſhop before Theophilus, who aſſiſted at the Nicene council, and was therefore contemporary with Conſtantine the Great. See Gothofred *Diſſert. in. lib. 2. Philoſtorgii.*

CHAPTER FIRST.

VI. Diodorus, [a] in the beginning of his hiſtory, tells us, that he did not define, by any certain ſpace, the times preceding the Trojan war, becauſe he had no certain foundation to rely upon: but from the Trojan war, according to the reckoning of Apollodorus, whom he followed, there were eighty years to the return of the Heraclidæ into Peloponneſus; and that from that period to the firſt olympiad, there were three hundred and twenty-eight years, computing the times from the kings of the Lacedæmonians. Apollodorus followed Eratoſthenes, and both of them followed Thucydides (1), in reckoning eighty years from the Trojan war to the return of the Heraclidæ: but in reckoning 328 years

[a] Lib. 1. in Proœm. p. 4.

§ VI.

(1) Lib. 1. c. 12. p. 18.

(2) PLUTARCH tells us, that Eratoſthenes and Apollodorus, to ſettle the age of Lycurgus, reckoned the time by the ſucceſſions of the kings of Sparta. But it does not appear from Plutarch, nor, as far as I know, from any poſitive teſtimony, that they took the ſame method for the whole interval between the return of the Heraclidæ and the firſt olympiad. It is probable, however, that they did. For that Diodorus Siculus took this method, is certain from his own evidence. And the length, that he aſſigns to this interval, is preciſely the ſame that Eratoſthenes aſſigned to it; namely, 328 years. (Vid. Diod. Sic. p. 4. and § III. note 13.) Hence it is highly probable, that Eratoſthenes and Diodorus uſed the ſame method of computation.

§ VII.

(3) WHEN the antients endeavoured to eſtimate intervals of time by the reigns of princes, it was by adding into one ſum the number of years, which hiſtory or tradition had aſſigned to each in a long ſucceſſion. It does not appear, that they ever thought of a definite proportion, whether of equality or any other, neceſſarily ſubſiſting in the nature of things, between the mean length of the reigns of kings and generations: from which, when once it ſhould be aſcertained, the length of any conſiderable interval of time might be found from the number of ſucceſſive reigns contained in it, though the length of each reign ſhould be unknown. Newton himſelf was, I believe, the firſt chronologer, who thought of correcting the accounts of time by this principle. And therefore what he ſays, "that the Egyptians reckoned the reigns of kings equipollent to generations of men," can be admitted only in this ſenſe; that they had never attended to that important circumſtance, that the reigns of kings muſt, upon an average, be ſhorter than generations in ſome certain proportion: not that they formally held the proportion between reigns and generations at an average to be that of equality, and had formed a ſyſtem of chronology upon that aſſumption. That the Egyptians tacitly held the equality of reigns and generations, appears from Herodotus: who ſays, that from their firſt king to Sethon, they reckoned juſt as many kings, and as many high prieſts, as generations. (Lib. 2. c. 142.) In the ſame place he tells us, that three generations make 100 years. And this eſtimation of a generation ſeems to be his own, not borrowed from the Egyptian prieſts. The Greeks gave this definition of a generation: that it is the time from a man's birth to his becoming a father (See Plutarch *De Oraculorum Defectu*, tom. II. p. 415. and Porphyry, as he is quoted by Grævius in his *Lectiones Heſiodeæ*, c. 4.) They ſeem to have aſſigned very different lengths to this time in different ages. Some, ſays Heſychius, reckon a generation at 20 years, ſome at 25, ſome at 30. And Porphyry ſays, that the higher you go in antiquity, the longer you will find the generations. With Timæus Siculus the length of the generation ſeems to have been forty years. For Dionyſius Halicarnaſſenſis, in the ſecond book of his Roman Antiquities, when he ſets himſelf to refute the received tradition, that Numa Pompilius had been a diſciple of Pythagoras, ſays, that Pythagoras was later than Numa by four whole generations, ὡς ἐκ τῶν κοινῶν παρειλημμένων ἱστοριῶν. (By

years from that return to the firſt olympiad, Diodorus tells us, that the times were computed from the kings of the Lacedæmonians (2); and Plutarch [a] tells us, that Apollodorus, Eratoſthenes, and others, followed that computation: and ſince this reckoning is ſtill received by chronologers, and was gathered by computing the times from the kings of the Lacedæmonians, that is from their number; let us re-examine that computation.

[a] Plutarch. in Lycurgo, ſub initio.

GREEKS.

VII. The Egyptians reckoned the reigns of kings equipollent to generations of men, and three generations to an hundred years, as above; and ſo did the Greeks and Latines (3): and accordingly they have made their kings reign, one with another, thirty and

(By the κοιναὶ ἱστορίαι, I imagine the great work of Timæus is intended, which bore that title. Vide § III. not. 10.) For, ſays he, Numa became king of Rome in the middle of the 16th olympiad. And it was certainly after the 50th that Pythagoras lived in Italy. (Dion. Hal. Ant. Rom. lib. 2.) Here then, taking the text of Dionyſius as it ſtands, 33 olympiads and a half, that is 134 years, are made equivalent to four generations: which is at the rate of three generations to a century. But it is certain, from the unanimous teſtimony of the beſt authors, that Pythagoras did not ſettle in Italy earlier than the time of Tarquinius Superbus; that is, not till after the 60th olympiad. Hence the learned Valeſius with good reaſon contends, that the text of Dionyſius is corrupt; and that τεσσαράκοντα ἔτεσιν ἄνευ ὑπερβολῆς ſhould be ἑξήκοντα. This emendation being admitted, we ſhall find 43 and a half olympiads, or 174 years equivalent to four entire generations, in the eſtimation of the writer of the κοιναὶ ἱστορίαι; which is at the rate of more than 43 years to a generation. But as the expreſſion τεσσαράκοντα ἔτεσιν ἄνευ ὑπερβολῆς does not imply, that the interval was preciſely four generations, but that it rather exceeded ſo many, than fell ſhort of them; I think the round number 40 may reaſonably be taken for the number of years in Timæus's valuation of a generation.

Dionyſius Halicarnaſſenſis himſelf ſeems uniformly to value a generation at 27 years. Rome, he ſays, was built by Romulus 16 generations after the Trojan war. (Antiq. lib. 1. c. 9. p. 8.) In another paſſage, which I have already had occaſion to produce (§ III. note 13) he ſays, Rome was built 432 years after the taking of Troy. Therefore 432 years with Dionyſius are equivalent to 16 generations; which is at the rate of 27 years to a generation. In another place, ſpeaking of the long duration of the Roman greatneſs, he ſays, "From the time that Rome became miſtreſs of Italy, and conceived the high deſign of graſping at univerſal dominion, having driven the Carthaginians, who had the chief naval force from the ſeas, and having received the ſubmiſſion of Macedonia, which then ſeemed to be the ſtrongeſt of all nations by land, having no longer any power to contend with either among Greeks or barbarians, ſhe continues to this day, in the ſeventh generation, ſovereign of the whole world." (Ant. Rom. lib. 1. c. 3. p. 3.) Here, by this day, is to be underſtood, as the ſentence next preceding ſhews, the 193d olympiad. In the 193d olympiad, it ſeems, the ſeventh generation was ſetting in from that time, when Rome firſt began to conſider herſelf as the nation which was to give laws to the world: and this ſhe began to do, when ſhe found there was no where, among Greeks or barbarians, a power that might contend with her either by ſea or land: that is, when, beſides that ſhe had ſubdued the whole of Italy, ſhe had in the firſt place ruined the naval power of the Carthaginians, which was done in the firſt Punic war; and had likewiſe extinguiſhed the kingdom of Macedonia, and made the ſtrength of that great nation her own. When ſhe had done all this, then, and not before, commenced the period of Rome's ambition and grandeur. And the ſeventh generation of that period commenced in the 193d olympiad. Now the kingdom of Macedonia was extinguiſhed, when Perſeus was conquered and made priſoner by Paulus Æmilius. With his captivity, therefore, Dionyſius dates the commencement of Rome's greatneſs. And the interval between the captivity of that monarch and the 193d olympiad, according to him, contained ſix compleat generations, and the beginning of a ſeventh. For that is the force of the

CHAPTER FIRST.

and three years a-piece, and above. For they make the ſeven kings of Rome, who preceded the conſuls, to have reigned 244 years (2), which is 35 years a-piece: and the firſt twelve kings of Sicyon, Ægialeus, Europs, &c. to have reigned 529 years (3), which is 44 years a-piece: and the firſt eight kings of Argos, Inachus, Phoroneus, &c. to have reigned 371 years (4), which is above 46 years a-piece: and between the return of the Heraclidæ into Peloponneſus, and the end of the firſt Meſſenian war, the ten kings of Sparta in one race; Euryſthenes, Agis, Echeſtratus, Labotas, Doryagus, Ageſiläus, Archeläus, Teleclus, Alcamenes, and Polydorus: the nine in the other race; Procles, Söus, Eurypon, Prytanis, Eunomus, Polydectes, Chariläus, Nicander, Theopompus: the ten kings of Meſſene; Creſphontes, Epytus, Glaucus, Iſthmius, Dotadas, Sibotas, Phintas, Antiochus, Euphäes, Ariſtodemus: and the nine of Arcadia; Cypſelus, Olæas, Buchalion, Phialus, Simus, Pompus, Ægineta, Polymneſtor, Æchmis (5), according to chronologers, took up 379 years: which is 38 years a-piece to the ten kings, and 42 years a-piece to the nine.

the Greek expreſſions γενεαι ἑβδομην την απ' εμε διαμενει πασιν αρχουσα. Not that ſeven generations were compleated; but ſix were compleated, and the ſeventh was juſt ſetting in. The defeat and captivity of Perſeus happened in the firſt year of the 153d olympiad. From the beginning of the 153d to the middle of the 193d olympiad is 40 and a half olympiads, or 162 years. So 162 years are here ſtated as equal to ſix generations; which is at the rate of 27 years to a generation. The learned Dodwell, conceiving that the hiſtorian ſpeaks of the period of the Roman greatneſs, from the commencement of it to his own time, as containing ſeven compleat generations; and perſuading himſelf that the commencement was to be placed at the end of the third Punic war; concludes, in his Diſſertation on the age of Dionyſ. Halicarn. that this accurate writer uſed the word γενεα vaguely, for no definite number of years. Whereas it ſeems to me, that Dionyſius uniformly values the generation at 27 years. As for the Latins, I do not know that they had any word which anſwered to the Greek γενεα, or generation. Their *ætas* rather ſignified the natural period of human life: and what they meant by their *ſæculum*, they ſeem not to have known themſelves.

(2) Dionyſ. Hal. Antiq. Rom. lib. 1. c. 75. p. 61. Livy, lib. 1. c. 60.

(3) Euſeb. Chron. Petavius in Paralipom. Doct. Temp. (4) Euſeb. in Chron. Petavius.

(5) THE ſucceſſions and ſynchroniſms of theſe kings of Sparta, Meſſene and Arcadia, are eaſily to be collected from Pauſanias. The time to be allotted, according to chronologers, to the entire ſucceſſions, may be compendiouſly eſtimated in this manner.

The firſt Meſſenian war ended with the ſurrender of Ithome in the firſt year of the 14th olympiad, according to Pauſanias, lib. 4. c. 13. And this was probably the laſt year of Polydorus, king of Sparta. (Pauſan. lib. 3. c. 3) From the beginning of the olympiads, therefore, to the laſt year of Polydorus, king of Sparta, the interval was thirteen complete olympiads, or 52 years. Add 328 years, the interval from the return of the Heraclidæ to the beginning of the olympiads, according to Eratoſthenes; and the ſum gives the whole interval, from the return of the Heraclidæ to the end of Polydorus king of Sparta, 380 years complete.

Again: The firſt Meſſenian war came to an end, when Hippomenes, the ſucceſſor of Ariſtodemus, had reigned four years complete. (Pauſan. lib. 4. c. 13.) Therefore Ariſtodemus died in the 1ſt year of the 13th olympiad: and from the beginning of the olympiads to his death, the interval

nine. And the five kings of the race of Euryſthenes, between the end of the firſt Meſſenian war, and the beginning of the reign of Darius Hyſtaſpis (6); Eurycrates, Anaxander, Eurycrates II. Leon, Anaxandrides, reigned 202 years; which is above 40 years a-piece. GREEKS.

VIII. Thus the Greek chronologers, who follow Timæus and Eratoſthenes, have made the kings of their ſeveral cities, who lived before the times of the Perſian empire, to reign about 35 or 40 years a-piece, one with another; which is a length ſo much beyond the courſe of nature, as is not to be credited. For by the ordinary courſe of nature, kings reign, one with another, about eighteen or twenty years a-piece: and if in ſome inſtances they reign, one with another, five or ſix years longer, in others they reign as much ſhorter: eighteen or twenty years is a medium. So the eighteen kings of Judah, who ſucceeded Solomon, reigned 390 years, which is, one with another, 22 years a-piece. The fifteen kings of Iſrael, after Solomon, reigned 259 years, which is $17\frac{1}{4}$ years a-piece (7). The eighteen kings of Babylon,

interval was 12 complete olympiads, or 48 years. Add 328 years as before. The ſum gives the interval from the return of the Heraclidæ to the death of Ariſtodemus, 376 years.

(6) DARIUS, the ſon of Hyſtaſpes, became king of Perſia in the 4th year of the 64th olympiad. (Petavius Doct. Temp. lib. 10. c. 19.) And the firſt Meſſenian war having ended in the 1ſt year of the 14th, the interval is 50 entire olympiads and 2 years; that is, 202 years, throwing away the year in which Darius's reign began. But what certain evidence Sir Iſaac Newton might have, that the end of Anaxandrides coincided with the beginning of Darius, I know not. The beſt light I can give in this matter, is this; Anaxandrides was reigning at Sparta in the time of Crœſus. (Herodot. lib. 1. c. 67.) From the end of Crœſus to the beginning of Darius, the interval was 22 years complete: for Crœſus was conquered by Cyrus in the 1ſt year of the 59th olympiad. Therefore we may reaſonably look for the end of Anaxandrides about the beginning of Darius. The ſucceſſor of Anaxandrides was the mad Cleomenes; whoſe firſt exploit was his incurſion of the Argive territory; when the women of Argos armed, at the inſtigation of the poeteſs Teleſilla, and ſaved their country. (Pauſan. lib. 3. c. 4. Plutarch de *de Virtut. Mul.* tom. II. p. 245.) Of the year of this memorable event, which was probably the firſt year of Cleomenes, I can find no certain character. But the next remarkable tranſaction of his reign ſeems to have been the expulſion of the Piſiſtratidæ from Athens. (Pauſan. lib. 3. c. 4.) Now Hippias, the ſon of Piſiſtratus, after that event, took refuge at the Perſian court; and in the twentieth year after his flight he fought, on the Perſian ſide, at Marathon. (Thucydid. lib. 6. c. 59. p. 383.) The year of the battle of Marathon, therefore, was the twentieth of Hippias's exile: and it was the 32d of Darius's reign. (Petav. Doct. Temp. lib. 10. c. 23.) Therefore the expulſion of Hippias muſt have happened in the 12th or 11th of Darius. At this time Cleomenes reigned in Sparta: and perhaps had been reigning two or three years before. His father Anaxandrides, therefore, might hardly ſurvive the 9th or 10th of Darius; and I find no evidence that he died ſooner. Sir Iſaac Newton therefore, in placing the death of Anaxandrides ſo early as in the beginning of Darius's reign, puts the whole time of the five reigns in queſtion at the ſhorteſt, and gives the utmoſt advantage to the opinion which he combats.

§ VIII.

(7) I know not for what reaſon Sir Iſaac Newton makes the ſucceſſors of Solomon only 18 in the kingdom

CHAPTER FIRST.

lon, Nabonaſſar, &c. reigned 209 years, which is $11\frac{2}{3}$ years a-piece. The ten kings of Perſia; Cyrus, Cambyſes, &c. reigned 208 years, which is almoſt 21 years a-piece. The ſixteen ſucceſſors of Alexander the Great, and of his brother and ſon in Syria; Seleucus, Antiochus Soter, &c. reigned 244 (*) years, after the breaking of that monarchy into various kingdoms, which is $15\frac{1}{4}$ years a-piece. The eleven kings of Egypt; Ptolomæus Lagi, &c. reigned 277 years, counted from the ſame period, which is 25 years a-piece (*). The eight in Macedonia; Caſſander, &c. reigned 138 years, which is $17\frac{1}{4}$ years a-piece (*). The thirty kings of England; William the Conqueror, William Rufus, &c. reigned 648 years, which is $21\frac{1}{2}$ years a-piece. The firſt twenty-four kings of France; Pharamundus, &c. reigned 458 years, which is 19 years a-piece: the next twenty-four kings of France; Ludovicus Balbus, &c. 451 years, which is $18\frac{3}{4}$ years a-piece. The next fifteen, Philip Valeſius, &c. 315 years, which is 21 years a-piece. And all the ſixty-three kings of France, 1224 years, which is $19\frac{1}{2}$ years a-piece. Generations from father to ſon, may be reckoned one with another at about 33 or 34 years a-piece, or about three generations to an hundred years: but if the reckoning proceed by the eldeſt ſons, they are ſhorter, ſo that three of them may be reckoned at about 75 or 80 years: and the reigns of kings are ſtill ſhorter; becauſe kings are ſucceeded not only by their eldeſt ſons, but ſometimes

kingdom of Judah, and only 15 in that of Iſrael. They were 20 in the kingdom of Judah, and 19 in Iſrael, reckoning the uſurper Zimri; whom Euſebius, indeed, on account of the ſhortneſs of his reign of ſeven days omits: but in the preſent enquiry, account is to be taken of the ſhorteſt, as well as of the longeſt reigns. The 20 kings of Judah, after Solomon, reigned juſt 400 years. The 19 of Iſrael only 268. Hence the mean length of the reign, for the kings of Judah, was 20 years: for the kings of Iſrael only 14 years.

(*) FROM the beginning of Seleucus Nicanor to the extinction of the Syrian kingdom by Pompey, the interval was 246 years; and the number of princes in ſucceſſion was 22; or rather 23, counting Tigranes for one. (See Petavius Doct. Temp. lib. 10. c. 47.) The laſt of theſe, Antiochus Aſiaticus, had a very ſhort reign; of not more than three years, or perhaps not three years complete. Sir Iſaac Newton ſeems to throw this laſt prince out of the liſt, and to conſider the kingdom of Syria as coming to an end, at the time of the conqueſt of Tigranes by Lucullus. For this reaſon he might ſhorten the whole interval by two years: and finding this Antiochus Aſiaticus called by Appian, the 17th prince of the Seleucid race, he might imagine there had been but 16 kings before him; not conſidering that Appian, ſpeaking of the deſcendants of Seleucus, does not reckon three princes who were not of that deſcent: and ſeems to have omitted Antiochus and Philip, the ſons of Grypus, the two immediate ſucceſſors of Antiochus Euſebes: for he ſpeaks of Antiochus Euſebes as himſelf ſpoiled of his kingdom by Tigranes. So that five princes,

times by their brothers, and ſometimes they are ſlain or de- GREEKS.
poſed; and ſucceeded by others of an equal or greater age, eſpecially in elective or turbulent kingdoms. In the later ages, ſince chronology hath been exact, there is ſcarce an inſtance to be found of ten kings reigning any where in continual ſucceſſion above 260 years: but Timæus and his followers, and I think alſo ſome of his predeceſſors, after the example of the Egyptians, have taken the reigns of kings for generations, and reckoned three generations to an hundred, and ſometimes to an hundred and twenty years; and founded the technical chronology of the Greeks upon this way of reckoning. Let the reckoning be reduced to the courſe of nature, by putting the reigns of kings, one with another, at about eighteen or twenty years a-piece: and the ten kings of Sparta by one race, the nine by another race, the ten kings of Meſſene, and the nine of Arcadia abovementioned, between the return of the Heraclidæ into Peloponneſus and the end of the firſt Meſſenian war, will ſcarce take up above 180 or 190 years: whereas according to chronologers they took up 379 years.

IX. For confirming this reckoning, I may add another argument. Euryleon the ſon of Ægeus, [a] commanded the main body of the Meſſenians (†) in the fifth year of the firſt Meſſenian war; and was in the fifth generation from Oiolycus the ſon

[a] Pauſan. l. 4. c. 3. p. 285. & c. 7. p. 295 & 296. & l. 3. c. 15. p. 245.

princes, or ſix with Tigranes, muſt be added to Appians 17, to make up the whole ſucceſſion, from the beginning of this kingdom, under Seleucus Nicanor, to the extinction of it, in the perſon of Antiochus Aſiaticus, by Pompey.

(*) FROM the beginning of Lagus to the end of Dionyſius, the laſt of the Lagidæ except Cleopatra, the interval was 275 years according to Euſebius, or 277 according to Petavius. (Doct. Temp. lib. 10. c. 48.) And in this interval Euſebius mentions only 11 kings, but Petavius reckons up 13.

(*) THE interval intended muſt be from the beginning of Caſſander to the conqueſt of Perſeus by the Romans; which was about 150 years according to Euſebius, or according to Petavius 149 (Vid. *Paralipomena Librorum de Doctrinâ Temporum.*) Perhaps Sir Iſaac Newton reckoned only to the beginning of Perſeus; which being ten years earlier, the whole interval, from the beginning of Caſſander to that epoch, will be within a year or two what Newton makes it. But the ſucceſſions from Caſſander were not fewer than 16 with Perſeus, or fifteen without him. For Caſſander was the twenty-fifth king of Macedonia, and Perſeus the fortieth. It is true Euſebius calls Caſſander the twenty-ſixth, and Perſeus the thirty-ninth. But the reaſon of this is, that among the princes before Caſſander, he has counted one twice over; and after Caſſander, he omits two reigns; namely, the ſhort one of Philip, Caſſander's ſon, and that of Arſinoë, the widow of Lyſimachus.

§ IX.

(†) —— Meſſenians] read Lacedæmonians.

CHAPTER FIRST.

of Theras (2), the brother-in-law of Ariſtodemus, and tutor to his ſons Euryſthenes and Procles, as Pauſanias [a] relates: and by conſequence, from the return of the Heraclidæ, which was in the days of Theras, to the battle, which was in the fifth year of this war, there were ſix (3) generations; which, as I conceive, being for the moſt part by the eldeſt ſons, will ſcarce exceed thirty years to a generation; and ſo may amount unto 170 or 180 years. That war laſted 19 or 20 years: add the laſt 15 years; and there will be about 190 years to the end of that war: whereas the followers of Timæus make it about 379 years; which is above ſixty years to a generation.

[a] Pauſan. l. 3. c. 3. p. 285.

X. By theſe arguments, chronologers have lengthened the time, between the return of the Heraclidæ into Peloponneſus and the firſt Meſſenian war; adding to it about 190 years: and they have alſo lengthened the time between that war and the riſe of the Perſian empire. For in the race of the Spartan kings, deſcended from Euryſthenes, after Polydorus, reigned [b] theſe kings; Eurycrates, Anaxander, Eurycratides, Leon, Anaxandrides, Cleomenes, Leonidas, &c (1). And in the other race deſcended from Procles, after Theopompus reigned [c] theſe; Anaxandrides, Archidamus, Anaxilaus, Leutychides, Hippocratides, Ariſton, Demaratus, Leutychides II. &c. (2) according to Herodotus. Theſe kings reigned till the ſixth year of Xerxes, in which Leonidas was ſlain by the Perſians at Thermopylæ; and Leutychides II. ſoon

[b] Herod. l. 7. c. 204.

[c] Herod. l. 8. c. 131.

(2) THE words of Pauſanias are theſe: ἡ τρ μισση δε ηχιι Ευρυλεων, τα μεν παροιθε Λακεδαιμονιω, τα δε αρχης δε απο Καδμε και εκ Θηβων· Αιγεως τε Οιολυκε τε Θηρα τε Αυτεσιωνος απογονω τιμαρω. Lib. 4. c. 7. Pauſanias therefore ſays, that this Euryleon was the fifth in deſcent, not from Oiolycus the ſon, but from Ægeus, the grandſon of Theras. Sir Iſaac Newton has been miſled by the Latin tranſlation.

(3) Seven at leaſt. But Sir Iſaac Newton's concluſion will be little affected by this miſtake.

§ X.

(1) Pauſan. lib. 3. c. 3 & 4.

(2) This liſt of the Proclidæ, taken from a corrupt paſſage of Herodotus, is erroneous. The ſucceſſors of Theopompus were theſe: Zeuxidamus, Anaxidamus, Archidamus, Agaſicles, Ariſto, Demaratus, Leotychides. Pauſan. lib. 3. c. 7. and Meurſius *De Regno Lacedæmoniorum*, cap. 17.

(3) Herodot. lib. 6. c. 72.

(4) According to the true liſt, only ſeven.

(5) THE battle of Thermopylæ was in the firſt year of the 75th olympiad, at the very beginning of the year. (Diod. Sic. lib. 11. c. 1. Herodot. lib. 7. c. 206.) The interval, therefore, from the beginning of the olympiads to this battle was 74 complete olympiads; that is, 296 years. But from the return of the Heraclidæ to this battle, our author reckons 342. The difference is 46 years; the interval by which the return of the Heraclidæ, by this reckoning, preceded the beginning of the olympiads. But the olympiads began Ann. Per. Jul. 3938.

GREEKS.

ſoon after, flying from Sparta to Tegëa, died there (1). The ſeven reigns of the kings of Sparta, which follow Polydorus, being added to the ten reigns above-mentioned, which began with that of Euryſthenes, make up ſeventeen reigns of kings, between the return of the Heraclidæ into Peloponneſus and the ſixth year of Xerxes: and the eight (4) reigns following Theopompus, being added to the nine reigns above-mentioned, which began with that of Procles, make up alſo ſeventeen reigns: and theſe ſeventeen reigns, at twenty years a-piece one with another, amount unto 340 years. Count theſe 340 years upwards from the ſixth year of Xerxes, and one or two years more for the war of the Heraclidæ, and reign of Ariſtodemus, the father of Euryſthenes and Procles; and they will place the return of the Heraclidæ into Peloponneſus, 159 years after the death of Solomon, and 46 (5) years before the firſt olympiad, in which Coræbus was victor. But the followers of Timæus have placed this return 280 years earlier. Now this being the computation upon which the Greeks, as you have heard from Diodorus and Plutarch, have founded the chronology of their kingdoms, which were ancienter than the Perſian empire; that chronology is to be rectified, by ſhortening the times which preceded the death of Cyrus, in the proportion of almoſt two to one; for the times which follow the death of Cyrus are not much amiſs.

Solomon died (according to Petavius, Doct. Temp.) Ann. Per. Jul. 3739.	Years.
Solomon's death, therefore, was earlier than the beginning of the olympiads by	199
Subtract the time by which the return of the Heraclidæ preceded the olympiads,	46
The interval by which Solomon's death preceded the return of the Heraclidæ, will be	153

But theſe concluſions ſeem irreconcileable with the date aſſigned to the return of the Heraclidæ in § VIII and IX. In § VIII. our author, eſtimating the time between the return of the Heraclidæ and the end of the firſt Meſſenian war, by the number of ſucceſſive reigns which he found in that interval in the kingdoms of Sparta, Meſſene, and Arcadia, fixes it at 190, or not leſs than 180 years. In § IX. he values the ſame interval by a computation founded on the number of generations which it contained: which he endeavours to aſcertain by the pedigree of a Lacedæmonian general: and he finds his former reckoning confirmed by the reſult of this new calculation. But if the interval between the return of the Heraclidæ and the end of the firſt Meſſenian war was 190 or 180 years; then, ſince the end of this war was only 52 years later than the commencement of the olympiads, the interval between the return of the Heraclidæ and the commencement of the olympiads, could not be leſs than 138 or 128 years. In this ſection our author would eſtimate the whole interval, between the return of the Heraclidæ and the battle of Thermopylæ, by the number of ſucceſſive reigns in the kingdoms of Sparta. And by this reckoning, that whole interval turns out ſo ſhort, that when the known time between the commencement of the olympiads and the battle of Thermopylæ is thrown away, what remains for the interval between the return of the Heraclidæ and the commencement of the olympiads, is not above a third part of the length which the former computations, from the very ſame principle, had aſſigned to it. A ſtriking inſtance of the fallacy of the principle upon which theſe computations proceed.

CHAPTER FIRST.

XI. The artificial chronologers have made Lycurgus, the legiſlator, as old as Iphitus, the reſtorer of the olympiads; and Iphitus, 112 years older than the firſt olympiad: and, to help out the hypotheſis, they have feigned twenty-eight olympiads older than the firſt olympiad, wherein Coræbus was victor (1). But theſe things were feigned, after the days of Thucydides and Plato: for Socrates died three years after the end of the Peloponneſian war, and Plato [a] introduceth him ſaying, that "the "inſtitutions of Lycurgus were but of three hundred years "ſtanding, or not much more." And [b] Thucydides, in the reading followed by Stephanus, ſaith, that "the Lacedæmonians had, "from ancient times, uſed good laws, and been free from ty-"ranny; and that from the time that they had uſed one and the "ſame adminiſtration of their commonwealth, to the end of the "Peloponneſian war, there were three hundred years (2) and a "few more." Count 300 years back from the end of the Peloponneſian war, and they will place the legiſlature of Lycurgus upon the 19th olympiad. And, according to Socrates, it might be upon the 22d or 23d. Athenæus [c] tells us out of ancient authors (Hellanicus, Soſimus, and Hieronymus) that Lycurgus the legiſlator was contemporary to Terpander the muſician; and that Terpander was the firſt man who got the victory in the Carnea, in a ſolemnity of muſic inſtituted in thoſe feſtivals in the 26th olympiad (3). He overcame four times in thoſe Pythic games (4), and therefore lived at leaſt till the 29th olympiad: and beginning to flouriſh in the days of Lycurgus, it is not likely that Lycurgus began to flouriſh much before the 18th olympiad. The name of Lycurgus being on the olympic diſc, Ariſtotle concluded thence, that Lycurgus was the companion of Iphitus, in reſtoring the olympic games (5): and this argument might be the ground of the opinion of chronologers, that Ly-

[a] Plato in Minoe, p. 567. Ficin.

[b] Thucyd. l. 2. p. 13.

[c] Athen. l. 14. p. 635. edit. Casaub.

§ XI.

(1) See Sir John Marſham, *Sec. XV. Tit. Olympia.*

(2) The old Baſil edition of Hervagius has 400. So has Henry Stevens's own edition, in the Greek text. So have the modern editions of Hudſon and Duker. And it does not appear by their collections of various readings, that any other number was to be found in any of the MSS. Stevens has taken no notice of the paſſage in his notes. Therefore it ſeems probable, that it is by ſome accidental miſtake, that the number 300 appears in his Latin tranſlation.

(3) Athenæus tells us, from Hellanicus, that Terpander was the firſt victor in the Carnea; and, from Hieronymus, that he was contemporary with Lycurgus. But he mentions theſe as two different opinions, both aſſigning a great antiquity, but not the ſame time, to Terpander.

(4) Plutarch de Muſ. tom. II. p. 1132.

curgus

curgus and Iphitus were contemporary (6). But Iphitus did not reſtore all the olympic games. He [a] reſtored indeed the racing in the firſt olympiad, Coræbus being victor. In the 14th olympiad, the double ſtadium was added, Hypænus being victor: and in the 18th olympiad, the quinquertium and wreſtling were added, Lampus and Eurybatus, two Spartans, being victors: and the diſc was one of the games of the quinquertium. [b] Pauſanias tells us, that there were three diſcs kept in the olympic treaſury at Altis: theſe therefore having the name of Lycurgus upon them, ſhew that they were given by him, at the inſtitution of the Quinquertium, in the 18th olympiad (7). Now Polydectes king of Sparta, being ſlain before the birth of his ſon Charillus, or Charilaus, left the kingdom to Lycurgus his brother; and Lycurgus, upon the birth of Charillus, became tutor to the child; and after about eight months travelled into Crete and Aſia, till the child grew up; and brought back with him the poems of Homer; and ſoon after publiſhed his laws (8), ſuppoſe upon the 22d or 23d olympiad; for he was then growing old: and Terpander was a lyric poet, and began to flouriſh about this time; for [c] he imitated Orpheus and Homer, and ſung Homer's verſes and his own, and wrote the laws of Lycurgus in verſe, and was victor in the Pythic games in the 26th olympiad, as above. He was the firſt who diſtinguiſhed the modes of lyric muſic by ſeveral names. Ardalus and Clonas ſoon after did the like for wind-muſic: and from henceforward, by the encouragement of the Pythic games, now inſtituted, ſeveral eminent muſicians and poets flouriſhed in Greece: as Archilochus, Eumelus Corinthius, Polymneſtus, Thaletas, Xenodemus, Xenocritus, Sacadas, Tyrtæus, Teſilla, Rhianus, Alcman, Arion, Steſichorus, Mimnermnus, Alcæus, Sappho, Theognis, Anacreon, Ibycus, Simonides, Æſchylus, Pindar, by whom the muſic and poetry of the Greeks were brought to perfection.

GREEKS.

[a] Pauſan. l. 5. c. 8.

[b] Pauſan. l. 6. c. 19.

[c] Plutarch. de Muſica. Tom. II. p. 1132. Clemens Strom. l. 1. c. 15. p. 308.

(6) Which Athenæus mentions as a thing univerſally agreed, lib. 14. p. 635.

(7) I apprehend, that it was not on any of the three diſcs at Altis, but on the famous diſc of Iphitus, preſerved in the temple of Juno at Elis, that the name of Lycurgus was inſcribed. This diſc had no reference to the inſtitution of the game of the Quoit; but contained the original articles of the armiſtice preſcribed by Iphitus, when he reſtored the olympic games, to be obſerved ever afterwards during the celebrity. Sec. Pauſan. lib. 5. c. 20. and Phlegon. Trall. in the fragment of his work *De Olympionicis*, and Jackſon's Chronology, vol. III.

(8) Plutarch in Lycurgo.

XII.

CHAPTER FIRST.

XII. Lycurgus publiſhed his laws in the reign of Ageſilaus (1), the ſon and ſucceſſor of Doryagus, in the race of the kings of Sparta deſcended from Euryſthenes. From the return of the Heraclidæ into Peloponneſus, to the end of the reign of Ageſiläus, there were ſix reigns: and from the ſame return to the end of the reign of Polydectes, in the race of the Spartan kings deſcended from Procles, there were alſo ſix reigns: and theſe reigns, at twenty years a-piece one with another, amount unto 120 years; beſides the ſhort reign of Ariſtodemus, the father of Euryſthenes and Procles, which might amount to a year or two: for Ariſtodemus came to the crown, as [a] Herodotus and the Lacedæmonians themſelves affirmed. The times of the deaths of Ageſiläus and Polydectes are not certainly known: but it may be preſumed, that Lycurgus did not meddle with the olympic games before he came to the kingdom; and therefore Polydectes died in the beginning of the 18th olympiad, or but a very little before. If it may be ſuppoſed that the 20th olympiad was in, or very near to, the middle time between the deaths of the two kings Polydectes and Ageſiläus, and from thence be counted upwards the aforeſaid 120 years, and one year more for the reign of Ariſtodemus; the reckoning will place the return of the Heraclidæ about 45 years before the beginning of the olympiads.

[a] Herod. l. 6. c. 52.

XIII. Iphitus, who reſtored the olympic games, [b] was deſcended from Oxylus, the ſon of Hæmon, the ſon of Thoas, the ſon

[b] Pauſan. l. 5. c. 4.

§ XII.

(1) In this Sir Iſaac Newton follows Pauſanias, lib. 3. c. 2. Plutarch places the legiſlation of Lycurgus in the reign of Archelaus, the ſucceſſor of Ageſiläus; and this the learned Meurſius confirms by many authorities. See his *Miſcellanea Laconica*, lib. 2. c. 5.

§ XIII.

(2) Pauſan. lib. 5. c. 3.
(3) —— Lib. 5. c. 3.
(4) —— Lib. 5. c. 1.
(5) —— Strabo, lib. 8. p. 357, edit. Cauſab.
(6) Strabo, lib. 8. p. 357.
(7) Pauſan. lib. 5. c. 8.
(8) —— lib. 5. c. 4.

§ XIV.

(1) The paſſage, in which Pauſanias is ſuppoſed to repreſent this, is, I fear, ſo corrupt, that no concluſion can be ſafely drawn from it. It is near the end of the 18th chapter of the 5th book, and ſtands thus: Κυψελῳ και τοις προγονοις ιδιον τι γενος ἐξαρχης Γοννουσα της Σικυωνος, και προγονος ὀφιοσιν ἡν Μηλας ὁ Αἰολιδης. By theſe words, it ſeems, Sir Iſaac Newton underſtood, that Cypſelus and his anceſtors were originally deſcended from Gonuſſa, a daughter of Sicyon: that Melas was the head of the family in the male line; and that Cypſelus was the ſixth in deſcent from

ſon of Andræmon (1): Hercules and Andræmon married two ſiſters (1): Thoas warred at Troy (1): Oxylus returned into Peloponneſus with the Heraclidæ (1). In this return he commanded the body of the Ætolians, and recovered Elea (2); [a] from whence his anceſtor Ætolus (3), the ſon of Endymion, the ſon of Aethlius (4), had been driven [b] by Salmoneus, the grandſon of Hellen (5). By the friendſhip of the Heraclidæ, Oxylus had the care of the olympic temple committed to him: and the Heraclidæ, for his ſervice done them, granted further upon oath, that the country of the Eleans ſhould be free from invaſions, and be defended by them from all armed force (6): and when the Eleans were thus conſecrated, Oxylus reſtored the olympic games (7): and after they had been again intermitted, Iphitus their king [c] reſtored them, and made them quadrennial. Iphitus is by ſome reckoned the king of Hæmon, by others the ſon of Praxonidas, the ſon of Hæmon (8): but Hæmon being the father of Oxylus, I would reckon Iphitus the ſon of Praxonidas, the ſon of Oxylus, the ſon of Hæmon. And by this reckoning the return of the Heraclidæ into Peloponneſus will be two generations by the eldeſt ſons, or about 52 years, before the olympiads.

GREEKS.

[a] Pauſan. l. 5. c. 1, 3, 8. Strabo, l. 8. p. 357.
[b] Pauſan. l. 5. c. 4.
[c] Pauſan. l. 5. c. 19.

XIV. Pauſanias [d] repreſents, that Melas the ſon of Antaſſus, of the poſterity of Gonuſſa the daughter of Sicyon, was not above ſix generations older than Cypſelus king of Corinth (1); and

[d] Pauſan. l. 5. c. 18.

from him. But it appears from Pauſanias's account of the early times of Corinth, that Cypſelus was at leaſt eleven generations later than Aletes, with whom this Melas was contemporary. Pauſanias ſays (lib. 2. c. 4.) that Aletes and his deſcendants reigned in Corinth for five generations, until Bacchis the ſon of Prumnis. From Bacchis the Bacchiadæ reigned for five generations more, unto Teleſtes the ſon of Ariſtodemus. This Teleſtes was ſlain, and after his death there was no king for ſome time; but annual magiſtrates of the Bacchiadæ; until Cypſelus the ſon of Eetion drove out that family. From Aletes therefore, and his contemporary Melas, to Cypſelus, there were not leſs than eleven generations; allowing only the ſpace of one generation to the reign of Teleſtes, and the whole duration of the annual magiſtracy; which however took up four at leaſt, according to the old chronology. (See Euſeb. in Chron.) The poſition therefore, that Cypſelus was in the ſixth generation after Melas, ſeems clearly refuted. The paſſage alleged in proof of it, ſeems rather indeed to imply, that Cypſelus was the ſixth from a daughter of Sicyon. But this will ſet Pauſanias ſtill more at variance with himſelf. For if Cypſelus was not earlier than in the eleventh generation from the return of the Heraclidæ, he could not be within ſeven of Sicyon, who lived long before the Trojan war. Fortunately, however, the manifeſt depravity of the paſſage acquits the writer of the charge of inconſiſtency. When the Greek writers number generations, the word they uſe is, not γενος, but γενεα; and I believe no inſtance is to be found, in which theſe two words are confounded. Nor do they expreſs themſelves

CHAPTER FIRST.

and that he was contemporary to Aletes, who returned with the Heraclidæ into Peloponneſus. The reign of Cypſelus began an. 2, olymp. 31, according to chronologers (2); and ſix generations, at about 30 years to a generation, amount unto 180 years. Count thoſe years backwards from an. 2, olymp. 31, and they will place the return of the Heraclidæ into Peloponneſus 58 years before the firſt olympiad. But it might not be ſo early, if the reign of Cypſelus began three or four olympiads later; for he reigned before the Perſian empire began.

XV. Hercules the Argonaut was the father of Hyllus; the father of Cleodæus; the father of Ariſtomachus; the father of Temenus, Creſphontes, and Ariſtodemus (1), who led the Heraclidæ into Peloponneſus: and Euryſtheus, who was of the ſame age with Hercules, was ſlain in the firſt attempt of the Heraclidæ to return (2): Hyllus was ſlain in the ſecond attempt (3), Cleodæus in the third attempt, Ariſtomachus in the fourth attempt (4), and Ariſtodemus died as ſoon as they were returned, and left the kingdom of Sparta to his ſons Euryſthenes and Procles. Whence their return was four generations later than

ſelves by the genitive of the name of the perſon, from whom generations are counted, without a prepoſition; as is done here, if ἑκτον γενεᾳ ἐξαρχης Γονουσης mean the fixth generation from Gonuſa: for ἐξαρχης is no prepoſition, but an adverb. Neither would the Greek writers, or any writer, I think, of common ſenſe in any language ſay, that a man and his anceſtors collectively were the fixth generation from any one perſon. Add, that we no-where read of this Gonuſa the daughter of Sicyon. Sicyon had a daughter Cthonophyle (Pauſan. lib. 2. c. 6.) and it appears not from hiſtory, that he had any other child. But if there was no Gonuſa, a daughter of Sicyon, there was a town Gonoeſſa not far from the city Sicyon, to the north of it.

——— αιπεινην Γονοεσσαν. Il. B. l. 573.

Or as ſome write it Δονοεσσαν (Euſtath. ad locum & Palmer. Exercitat. p. 415.) and of this town was Melas. Μελανα δε εκ Γονουσης της υπερ Σικυωνος. (Pauſan. lib. 2. c. 4.) Hence I doubt not but that the true reading of this paſſage of the Eliaca, from whence Cypſelus has been placed in the fixth generation after Melas is this: Κυψελῳ και τοις προγονοις αυτου ην γενος εξαρχης εκ Γονοεσσης της υπερ Σικυωνος, και προγονος σφισιν ην Μελας ὁ Αἰλασσου. "Cypſelus and his anceſtors were originally from the town of Gonoeſſa to the north of Sicyon; and Melas the ſon of Antaſſus was among their anceſtors." Thus Pauſanias ſays juſt what is to his purpoſe, and nothing more. For if the learned reader will take the trouble to conſider the paſſage in the original, as connected with the author's ſubject, he will perceive that it was much to the purpoſe to mention, that Melas was among the anceſtors of Cypſelus; but not at all, to ſtate the diſtance of time between them.

(2) Euſebius places the beginning of the reign of Cypſelus in the firſt, Petavius in the third year, of the 30th olympiad.

§ XV.

(1) Herodot. lib. 7. c. 204. Lib. 8. c. 131. Lib. 6. c. 52. Pauſan. lib. 2. c. 18. p. 151.

(2) EURYSTHEUS was ſlain before any attempt of the Heraclidæ to return, in an expedition of his own againſt them ſettled in the Athenian territory. Diod. Sic. lib. 4. c. 57 and 58. p. 181. and Apollodor. lib. 2. c. 8. § 1.

(3) HYLLUS, having been unſucceſsful in his firſt attempt, renewed it after an interval of three years; and in this ſecond attempt he was ſlain. Diod. Sic. lib. 4. c. 58. Herodot. lib. 9. c. 26.

(4) I KNOW not where Sir Iſaac Newton finds mention of the death of Cleodæus in a third attempt, and of Ariſtomachus in a fourth. The learned Meurſius, who has taken much pains to bring together whatever is to be found in antient writers on this ſubject (ſee his *Regnum Lacedæmonium*, c. 7 & 8.) ſpeaks only of three attempts; the two of Hyllus, and that under the ſons of Ariſtomachus, which, proving ſucceſsful, was of courſe the laſt. Of the death of Ariſtomachus I find no mention, except in Apollodorus: who ſays, that Ariſtomachus died in the ſecond attempt of Hyllus. Lib. 3. c. 8. § II. But ſince it is intimated in the very next ſentence, that the ſons of Cleodæus were not grown up at the time of this expedition; ſince Ariſtomachus was a ſon, if not the only ſon of Cleodæus; and ſince the laſt ſucceſsful attempt is ſaid to have been made, when the perſons intended in this paſſage, whoever they might be, were grown up; for theſe reaſons I ſuſpect, that the names of Ariſtomachus and Cleodæus have changed places in the text of Apollodorus, and that Cleodæus fell in the ſecond expedition of his father Hyllus.

(5) OUR author here ſeems to ſuppoſe, that the return of the Heraclidæ was 43 years earlier than the beginning of the olympiads. This being ſuppoſed, the taking of Troy, which was 80 years earlier than that return, muſt have been 123 years earlier than the beginning of the olympiads. Solomon's death was 199 years before the olympiads (§ X. note 4.) Therefore the taking of Troy, by this reckoning, will have been 76 years later than the death of Solomon.

(6) Pauſan. lib. 2. c. 18. p. 151.

§ XVI.

(1) HYGINUS reckons Æſculapius among the Argonauts, though he is not to be found in the Orphic liſt, nor in that of Apollonius, or of Apollodorus. He muſt have been contemporary with the Argonauts, if, according to the fable, he was inſtructed in medicine by the Centaur Chiron. Apollodor. lib. 3. c. 10. § III.

(2) Orph. Argonaut. v. 116. Apoll. Rhod. lib. 1. v. 122.

than the Argonautic expedition: and theſe generations were ſhort ones, being by the chief of the family, and ſuit with the reckoning of Thucydides and the ancients, that the taking of Troy was about 75 or 80 years before the return of the Heraclidæ into Peloponneſus; and the Argonautic expedition one generation earlier than the taking of Troy. Count therefore 80 years backward from the return of the Heraclidæ into Peloponneſus to the Trojan war: and the taking of Troy will be about 76 years after the death of Solomon: and the Argonautic expedition, which was one generation earlier, will be about 43 years after it (5). From the taking of Troy to the return of the Heraclidæ, could ſcarce be more than eighty years; becauſe Oreſtes, the ſon of Agamemnon, was a youth at the taking of Troy, and his ſons Penthilus and Tiſamenus lived till the return of the Heraclidæ (6).

CHRONICLE.

XVI. Æſculapius (1) and Hercules (2) were Argonauts: and Hippocrates was the eighteenth incluſively by the father's ſide

CHAPTER FIRST.

from Æſculapius, and the nineteenth from Hercules by the mother's ſide (3): and becauſe theſe generations, being taken notice of by writers, were moſt probably by the principal of the family, and ſo for the moſt part by the eldeſt ſons; we may reckon about 28 or at the moſt about 30 years to a generation. And thus the ſeventeen intervals by the father's ſide, and eighteen by the mother's, will, at a middle reckoning, amount unto about 507 years: which counted backwards from the beginning of the Peloponneſian war, at which time Hippocrates began to flouriſh, will reach up to the 43d year after the death of Solomon, and there place the Argonautic expedition (4).

XVII. When the Romans conquered the Carthaginians, the archives of Carthage came into their hands: and thence Appian, in his hiſtory of the Punic wars (1), tells in round numbers that [a] Carthage ſtood ſeven hundred years: and [a] Solinus adds the odd number of years in theſe words: "*Adrymeto atque Carthagini* "*author eſt à Tyro populus. Urbem iſtam, ut Cato in Oratione* "*Senatoriâ autumat, cùm rex Hiarbas rerum in Libyâ potiretur,* "*Eliſſa mulier extruxit, domo Phœnix, & Carthadam dixit; quod* "*Phœnicum ore exprimit civitatem novam: mox ſermone verſo* "*Carthago dicta eſt; quæ poſt annos ſeptingentos triginta ſeptem* "*exciditur quàm fuerat extructa.*" Eliſſa was Dido; and Carthage was deſtroyed in the conſulſhip of Lentulus and Mummius, in the year of the Julian Period 4568 (2); from whence count backwards 737 years, and the Encænia or dedication of the city, will fall upon the 16th year of Pygmalion, the brother of

[a] Solin. c. 30.

(3) Ιπποκρατης γενει μεν ην Κως, ὁς Ηρακλειδῶν και Φαιναρετης, ης Ηρακλεα και Ασκληπιον το γενος αναφερουσι· αφ' ὁ μεν εικοστος· αφ' ὁ δε ενναικαιδεκατος. Soranus in *Vit. Hippoc.* Where Sir Iſaac Newton ſays the 18th and 19th inclusively, I imagine his meaning is, including Hippocrates, but excluding Æſculapius and Hercules.

(4) The Peloponneſian war began Ann. 2. Olymp. 87. or in the 3486th olympic year. Count back 507 years, and you come to the 162d before the olympiads; which is about the 33th after Solomon's death. (See § X. note 4.)

§ XVII.

(1) P. 82. edit. H. Steph. (2) Euſeb. in Chron. ad Ann. 3. Olymp. 158.
(3) Joſeph. contr. Ap. lib. 1. c. 18. p. 1341. edit. Hudſon. (4) Æn. I. lin. 623—626.

(5) THE ejection of Cinyras is not expreſsly mentioned either by Virgil or Servius. But Virgil makes Dido ſay, that her father held Cyprus by right of conqueſt: and Servius adds, that he granted the iſland to Teucer: and the prince, that Dido's father conquered, according to that chronology which makes Dido and her father contemporary with the Trojan war, could be no other than Cinyras, ſince Cinyras was king of Cyprus when that war commenced; as appears from the breaſt-plate of Agamemnon:

Τον πριν δι Κινυρης δωκε, ξεινιον εσσθαι.
Πευθετο γαρ Κυπρονδε μεγα κλεος—— Il. A. lin. 20.

(6) Lib. 3. c. 13. § III.

(7) For Joſephus reckons 143 years from the building of Solomon's Temple to the building of Carthage (contr. Ap. lib. 1. c. 18.) which laſt epoch he ſeems not to diſtinguiſh from the flight of Dido in the 7th of Pygmalion. Solomon ſurvived the building of the Temple thirty years, 1 Kings vi. 38. and xi. 43. Therefore from Solomon's death to the flight of Dido, the interval will be 113 years. Subtract ſeven years. There remains 106 for the interval between Solomon's death and the beginning of Pygmalion's reign. Therefore if the war of Troy was in the generation next before Pygmalion, it muſt have happened about 76 years after the death of Solomon.

§ XVIII.

(1) Lib. 1. c. 63—71. p. 51—57.

of Dido, and king of Tyre. She fled in the ſeventh year of Pygmalion (3); but the æra of the city began with its Encænia. Now Virgil and his ſcholiaſt Servius, who might have ſome things from the archives of Tyre and Cyprus as well as from thoſe of Carthage, relate that Teucer came from the war of Troy to Cyprus in the days of Dido, a little before the reign of her brother Pygmalion; and, in conjunction with her father, ſeized Cyprus (4), and ejected Cinyras (5): and the marbles ſay, that Teucer came to Cyprus ſeven years after the deſtruction of Troy, and built Salamis; and Apollodorus, that Cinyras married Metharme the daughter of Pygmalion, and built Paphos (6). Therefore if the Romans, in the days of Auguſtus, followed not altogether the artificial chronology of Eratoſthenes, but had theſe things from the records of Carthage, Cyprus, or Tyre; the arrival of Teucer at Cyprus will be in the reign of the predeceſſor of Pygmalion: and by conſequence the deſtruction of Troy, about 76 years later than the death of Solomon (7).

GREEKS.

XVIII. Dionyſius Halicarnaſſenſis [a] tells us, that in the time of the Trojan war, Latinus was king of the Aborigines in Italy; and that in the ſixteenth age after that war, Romulus built Rome. By ages, he means reigns of kings: for after Latinus, he names ſixteen kings of the Latines, the laſt of which was Numitor (1), in whoſe days Romulus built Rome; for Romulus was contemporary to Numitor: and after him Dionyſius and others reckon ſix kings more over Rome, to the beginning of the conſuls. Now theſe twenty and two reigns, at about 18 years to a reign one with another, for many of theſe kings were ſlain, took up 396 years; which counted back from the conſulſhip of

[a] Dionyſ. l. 1. c. 9. p. 8.

CHAPTER FIRST.

Junius Brutus and Valerius Publicola (2), the two firſt conſuls, place the Trojan war about 78 (3) years after the death of Solomon.

XIX. The expedition of Seſoſtris was one generation earlier than the Argonautic expedition: for in his return back into Egypt he left Æetes in Colchis, and Æetes reigned there till the Argonautic expedition (1); and Prometheus was left by Seſoſtris with a body of men at Mount Caucaſus to guard that paſs, and after thirty years was releaſed by Hercules the Argonaut: and Phlias and Eumedon (2), the ſons of the great Bacchus, ſo the poets call Seſoſtris, and of Ariadne the daughter of Minos, were Argonauts. At the return of Seſoſtris into Egypt, his brother Danäus fled from him into Greece with his fifty daughters in a long ſhip (3); after the pattern of which the ſhip Argo was built: and Argus, the ſon of Danäus (4), was the maſter-builder thereof. Nauplius the Argonaut was born in Greece of Amymone, one of the daughters of Danäus, and of Neptune (5), the brother and admiral of Seſoſtris: and two others of the daughters of Danäus married Archander and Architeles (6), the ſons of Achæus (7), the ſon of Creüſa, the daughter of Erechtheus king of Athens (8): and therefore the daughters of Danäus were three

(2) i. e. from the 1ſt year of the 68th olymp. Dionyſ. Hal. lib. 2. c. 1. p. 277.
(3) 70, if the death of Solomon was 199 years earlier than the olympiads.

§ XIX.

(1) It is much to be regretted, that our author hath not produced his authority, for a matter of ſo much importance to his ſyſtem. That the Colchians were an Egyptian colony, ſettled in thoſe parts by Seſoſtris, ſeems to be the uniform tradition of antiquity. (Herodot. lib. 2. c. 104—106. Diod. Sic. lib. 1. c. 55. p. 35. Apoll. Rhod. lib. 4. lin. 272. &c.) But that Æetes, the prince who reigned at Colchis when the Argonauts arrived there, was himſelf left there by Seſoſtris, ſeems to be a ſuppoſition that Sir Iſaac Newton has adopted, becauſe it ſuits its ſyſtem. Stephanus Byzantinus may ſeem to give ſome countenance to it, when he ſays that Æetes was the builder of Æa. But his authority, if it were more expreſs than it is, might hardly be allowed to outweigh the teſtimony of more antient writers. Apollonius Rhodius makes Argus ſpeak of the expedition of Seſoſtris as a thing of ſuch remote antiquity, that many of the cities, which that conqueror had founded in Aſia, might be ſuppoſed to be gone to ruin in the time of the Argonautic expedition:

——πυλυς γαρ εδη κατιηρυθεν αιπυ· Lib. 4. lin. 276.

Æa, however, was in being

—— ἡμιν τε
Των δ' αιδεω, ὁς ὁγε καθιστατο ναιεμεν Αιαν. Lin. 277.

Upon which paſſage the Scholiaſt obſerves, that the word ἡμιν is uſed catachreſtically, to ſignify remoter deſcendants than grand-children; as Ηρακλειδαι is uſed for remoter deſcendants of Hercules than his ſons. And he ſays, that Dicæarchus reckoned no leſs than 2936 years between Seſoſtris,

three generations younger than Erechtheus; and by conſequence contemporary to Theſeus the ſon of Ægeus, the adopted ſon of Pandion, the ſon of Erechtheus (9). Theſeus, in the time of the Argonautic expedition, was of about 50 years of age, and ſo was born about the 33d year of Solomon: for he ſtole Helena [a] juſt before that expedition, being then 50 years old (10), and ſhe but ſeven (11), or as ſome ſay ten (12). Pirithöus the ſon of Ixion helped Theſeus to ſteal Helena; and then [b] Theſeus went with Pirithöus to ſteal Perſephone, the daughter of Aidoneus, or Orcus, king of the Moloſſians, and was taken in the action (13): and whilſt he lay in priſon, Caſtor and Pollux returning from the Argonautic expedition, releaſed their ſiſter Helena, and captivated Æthra, the mother of Theſeus (13). Now the daughters of Danäus being contemporary to Theſeus, and ſome of their ſons being Argonauts; Danäus with his daughters fled from his brother Seſoſtris into Greece, about one generation before the Argonautic expedition; and therefore Seſoſtris returned into Egypt in the reign of Rehoboam. He came out of Egypt in the fifth year of Rehoboam, [c] and ſpent nine years in that expedition againſt the eaſtern nations and Greece; and therefore returned back into Egypt, in the fourteenth year of Rehoboam.

[a] Apollon. Argonaut. l. 1. v. 101.
[b] Plutarch. in Theſeo.
[c] Diodor. l. 1. c. 55. p. 35.

Seſoſtris, or Seſonchoſis, and the firſt olympiad.

(2) Apollonius mentions Phlias as the ſon of Bacchus. Lib. 2. lin. 115. The Scholiaſt ſeems to ſay, that his mother was Cthonophyle. Hyginus mentions Phliaſius and Eumedon as ſons of Bacchus by Ariadne, and as Argonauts. Fab. 14.
(3) Manetho apud Joſeph. contr. Ap. lib. 1. c. 15, 16. p. 1339.

(4) Apollodorus makes Argus the ſon of Phrixus the builder of the ſhip. Lib. 1. c. 9. § XVI. And this was probably the opinion of Pherecydes, who ſaid that the ſhip was named after Argos the ſon of Phrixus. Scholiaſt. in Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 4. But Apollonius Rhodius makes the builder a different perſon from the ſon of Phrixus, but not the ſon of Danäus. He calls him Argus Areſtorides, or Heſtôrides, or Aceſtorides (Lib. 1. lin. 112): for the reading ſeems uncertain. Hyginus ſays that Argus, the builder of the ſhip, was the ſon of Polybus and Argia, or *according to others of Danäus*. Fab. 14.
(5) See Orph. Argonaut. lin. 200. Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 136. Apollodor. lib. 2. c. 1. § V.
(6) Pauſan. lib. 7. c. 1. p. 522.
(7) — *the ſons of Achæus*] according to Pauſanias. But Herodotus makes Archander the grandſon of Achæus. Αρχανδρα τε Φθιω, τε Αχαιω. Lib. 2. c. 98. As Pauſanias ſays that Archander and Architeles were ſettled in the Pthiotis, before they went to Argos and married the daughters of Danäus, it might ſeem probable that Φθιω, in the text of Herodotus, is a corruption for Φθιωτιδι. But Stephanus Byzantinus, under the word Ελλας, mentions a Phthius a ſon of Achæus.
(8) Apollodor. lib. 1. c. 7. § II.
(9) Vid. Apollodor. lib. 3. c. 14. § V.
(10) Plutarch in Theſeo. tom. I. p. 14.
(11) If. Tzetzes ad Lycophron.
(12) Diod. Sic. lib. 4. c. 63. p. 185.
(13) Plutarch in Theſeo. tom. I. p. 15.

CHAPTER FIRST.

Sesac and Sesostris were therefore kings of all Egypt, at one and the same time: and they agree not only in the time, but also in their actions and conquests. God gave Sesac ממלכות הארצות the kingdoms of the lands, 2 Chron. xii. Where Herodotus describes the expedition of Sesostris; Josephus [a] tells us that he described the expedition of Sesac, and attributed his actions to Sesostris, erring only in the name of the king (14). Corruptions of names are frequent in history; Sesostris was otherwise called Sesochris, Sesochis, Sesoosis, Sethosis, Sesonchis, Sesonchosis. Take away the Greek termination, and the names become Sesost, Sesoch, Sesoos, Sethos, Sesonch: which names differ very little from Sesach. Sesonchis and Sesach differ no more than Memphis and Moph, two names of the same city. Josephus [b] tells us also, from Manetho, that Sethosis was the brother of Armais, and that these brothers were otherwise called Ægyptus and Danäus; and that upon the return of Sethosis or Ægyptus, from his great conquests into Egypt, Armais or Danäus fled from him into Greece.

[a] Joseph. Antiq. l. 8. c. 10. § 11. p. 508.

[b] Contra Apion. l. 1.

XX. Egypt was at first divided into many small kingdoms, like other nations; and grew into one monarchy by degrees: and the father of Solomon's queen was the first king of Egypt, who came into Phœnicia with an army: but he only took Gezir, and gave it to his daughter (1). Sesac, the next king, came out of Egypt with an army of Libyans, Troglodites, and Ethiopians, 2 Chron. xii. 3. and therefore was then king of all those countries; and we do not read in Scripture, that any former king of Egypt, who reigned over all those nations, came out of Egypt with a great army to conquer other countries. The sacred history of the Israelites, from the days of Abraham to the days of Solomon, admits of no such conqueror. Sesostris reigned over all the same nations of the Libyans, Troglodites and Ethiopians, and came out of Egypt with a great army to conquer other kingdoms.

(14) ——— Συσακον περι ὁ πλειοσθος Ηροδοτος τας πραξεις αυτου Σεσωστρεως προσαπτει. And a little after, μεμνηται δε ταυτης της στρατειας [Susaci in Judæos] και ὁ Αλικαρνασσευς Ηροδοτος, περι μονου τε του βασιλεως πλειοσθος ονομα. These are the passages of Josephus, from which Conringius and Torniellus, and after them Sir J. Marsham and Sir Isaac Newton, would make out, that Sesac and Sesostris are only different names of the same person. Which however may be more than Josephus meant. The opinion is largely examined by Perizonius in the 8th and 9th chapters of his Origines Ægyptiacæ.

doms. The shepherds reigned long in the lower part of Egypt, and were expelled thence just before the building of Jerusalem and the Temple, according to Manetho; and whilst they reigned in the lower part of Egypt, the upper part thereof was under other kings: and while Egypt was divided into several kingdoms, there was no room for any such king of all Egypt as Sesostris; and no historian makes him later than Sesac: and therefore he was one and the same king of Egypt with Sesac. This is no new opinion: Josephus discovered it, when he affirmed that Herodotus erred, in ascribing the actions of Sesac to Sesostris, and that the error was only in the name of the king: for this is as much as to say, that the true name of him who did those things described by Herodotus, was Sesac; and that Herodotus erred only in calling him Sesostris; or that he was called Sesostris by a corruption of his name. Our great chronologer, Sir John Marsham, was also of opinion that Sesostris was Sesac: and if this be granted, it is then most certain, that Sesostris came out of Egypt in the fifth year of Rehobbam to invade the nations, and returned back into Egypt in the 14th year of that king; and that Danäus then flying from his brother, came into Greece within a year or two after: and the Argonautic expedition, being one generation later than that invasion, and than the coming of Danäus into Greece, was certainly about 40 or 45 years later than the death of Solomon. Prometheus stayed on Mount Caucasus [a] thirty years, and then was released by Hercules: and therefore the Argonautic expedition was thirty years after Prometheus had been left on Mount Caucasus by Sesostris; that is, about 44 years after the death of Solomon.

[a] Hygin. Fab. 144. & 54.

XXI. All nations, before the just length of the solar year was known, reckoned months by the course of the moon; and years by the [b] returns of winter and summer, spring and autumn: and in making calendars for their festivals, they reckoned thirty days to a lunar month, and twelve lunar months to a year; tak-

[b] Gen. i. 14. & viii. 22. Censorinus c. 19 & 20. Cicero in Verrem. Geminus c. 6.

§ XX.

(1) 1 Kings ix. 16. Marsham. *Sec. XIV. Tit. Ophir.*

ing

CHAPTER FIRST.

ing the neareſt round numbers: whence came the diviſion of the ecliptic into 360 degrees. So in the time of Noah's flood, when the moon could not be ſeen, Noah reckoned thirty days to a month (1): but if the moon appeared a day or two before the end of the month, [a] they began the next month with the firſt day of her appearing: and this was done generally, till the Egyptians of Thebäis found the length of the ſolar year. So [b] Diodorus tells us, that "the Egyptians of Thebäis uſe no intercalary months, nor ſubduct any days [from the month] as is done by moſt of the Greeks." And [c] Cicero, "*eſt conſuetudo Siculorum cæterorumque Græcorum, quòd ſuos dies menſeſque congruere volunt cum Solis Lunæque ratione, ut nonnunquam ſiquid diſcrepet, eximant unum aliquem diem aut ſummum biduum ex menſe* [*civili dierum triginta*] *quos illi ἐξαιρεσίμους dies nominant.*" And Proclus, upon Heſiod's τριακὰς, mentions the ſame thing. And [d] Geminus: "Πρόθεσις γὰρ ἦν τοῖς ἀρχαίοις, "τὸς μὲν μῆνας ἄγειν καὶ σελήνην, τὸς δὲ ἐνιαυτὸς καθ' ἥλιον. Τὸ "γὰρ ὑπὸ τῶν νόμων, καὶ τῶν χρησμῶν παραγγελλόμενον, τὸ θύειν καὶ "γ', ἤγων τὰ πάτρια, μῆνας, ἡμέρας, ἐνιαυτὸς· τοῦτο διέλαθον ἅπανλες "οἱ Ἕλληνες τῷ τὸς μὲν ἐνιαυτὸς συμφώνως ἄγειν τῷ ἡλίῳ, τὰς δὲ ἡμέ"ρας καὶ τὸς μῆνας τῇ σελήνῃ. ἔσι δὲ τὸ μὲν καθ' ἥλιον ἄγειν τὸς ἐνιαυτὸς, "τὸ περὶ τὰς αὐτὰς ὥρας τῶν ἐνιαυτῶν τὰς αὐτὰς θυσίας τοῖς θεοῖς ἐπιτε"λεῖσθαι, καὶ τὴν μὲν ἐαρινὴν θυσίαν διὰ παντὸς καλὰ τὸ ἔαρ συνελεῖσθαι· "τὴν δὲ θερινὴν, καλὰ τὸ θέρος· ὁμοίως δὲ καὶ καλὰ τὸς λοιπὸς καιρὸς τῶν "ἐτῶν τὰς αὐτὰς θυσίας πίπλειν. Τοῦτο γὰρ ὑπέλαβον προσηνὲς καὶ κεχα"ρισμένον εἶναι τοῖς θεοῖς. Τοῦτο δ' ἄλλως ἐκ ἂν δύναιλο γενέσθαι, εἰ μὴ "αἱ τροπαὶ, καὶ αἱ ἰσημερίαι περὶ τὸς αὐτὸς τόπος γίγνοιλο. Τὸ δὲ καλὰ "σελήνην ἄγειν τὰς ἡμέρας, τοιοῦτόν ἐσι· τὸ ἀκολούθως τοῖς τῆς σελήνης "φωτισμοῖς τὰς προσηγορίας τῶν ἡμερῶν γίνεσθαι· ἀπὸ γὰρ τῶν τῆς σε"λήνης φωτισμῶν αἱ προσηγορίαι τῶν ἡμερῶν κατωνομάσθησαν. Ἐν μὲν "γὰρ ἡμέρᾳ νέᾳ ἡ σελήνη φαίνελαι, καλὰ συναλοιφὴν νεομηνία προση"γορεύθη· ἐν δὲ ἡμέρᾳ τὴν δευτέραν φάσιν ποιεῖται, δευτέραν προση"γόρευσαν· τὴν δὲ καλὰ μέσον τοῦ μηνὸς γινομένην φάσιν τῆς σελήνης, ἀπὸ "αὐτοῦ τοῦ συμβαίνοντος δίχομηνίαν ἐκάλεσαν. καὶ καθόλου δὲ πάσας τὰς "ἡμέρας ἀπὸ τῶν τῆς σελήνης φωτισμῶν προσαγόμασαν. ὅθεν καὶ τὴν τρια-

[a] Cicero in Verrem.

[b] Diodor l. 1. c. 50. p. 32.

[c] Cicero in Verrem. lib. 2. c. 53.

[d] Gem. c. 6.

§ XXI.

(1) For 150 days are made exactly equal to five months. Compare Geneſis viii. 3, 4. with Gen. vii. 11.

"κοσὴν

"κοσὴν τοῦ μηνὸς ἡμέραν ἐσχάτην ὖσαν ἀπὸ αὐτοῦ τοῦ συμβαίνονλος τρια- GREEKS.
"κάδα ἐκάλεσαν. *Propoſitum enim fuit veteribus, menſes quidem*
"*agere ſecundum lunam, annos verò ſecundam ſolem. Quod enim à*
"*legibus & oraculis præcipiebatur, ut ſacrificarent ſecundum tria,*
"*videlicet patria, menſes, dies, annos; hoc ita diſtinctè faciebant*
"*univerſi Græci, ut annos agerent congruenter cum ſole, dies verò*
"*& menſes cum lunâ. Porro ſecundum ſolem annos agere, eſt circa*
"*eaſdem tempeſtates anni eadem ſacrificia diis perfici, & vernum*
"*ſacrificium ſemper in vere conſummari, æſtivum autem in æſtate:*
"*ſimiliter & in reliquis anni temporibus eadem ſacrificia cadere.*
"*Hoc enim putabant acceptum & gratum eſſe diis. Hoc autem*
"*aliter fieri non poſſet, niſi converſiones ſolſtitiales & æquinoctia in*
"*iiſdem Zodiaci locis fierent. Secundum lunam verò dies agere, eſt*
"*tale, ut congruant cum lunæ illuminationibus appellationes dierum.*
"*Nam à lunæ illuminationibus appellationes dierum ſunt denomi-*
"*natæ. In quâ enim die luna apparet nova, ea per Synalœphen,*
"*ſeu compoſitionem νεομηνία, id eſt, novilunium appellatur. In*
"*quâ verò die ſecundam facit apparitionem, eam ſecundam lunam*
"*vocârunt. Apparitionem lunæ, quæ circa medium menſis fit, ab*
"*ipſo eventu* διχομηνίαν, *id eſt medietatem menſis nominârunt. Ac*
"*ſummatim, omnes dies à lunæ illuminationibus denominârunt.*
"*Unde etiam triceſimam menſis diem, cùm ultima ſit, ab ipſo eventu*
"τριακάδα *vocarunt.*"

XXII. The ancient Calendar-year of the Greeks conſiſted therefore of twelve lunar months, and every month of thirty days: and theſe years and months they corrected from time to time, by the courſes of the ſun and moon, omitting a day or two in the month, as often as they found the month too long for the courſe of the moon; and adding a month to the year, as often as they found the twelve lunar months too ſhort for the return of the four ſeaſons. Cleobulus, [a] one of the Seven Wiſe Men of Greece, alluded to this year of the Greeks, in his parable of one father who had twelve ſons, each of which had thirty daughters, half white and half black: and Thales [b] called the laſt day of the month τριακάδα (1), the thirtieth: and Solon counted

[a] Apud Laertium, in Cleobulo.

[b] Apud Laertium, in Thalete.

§ XXII.

(1) So ſays Diogenes Laertius: but it can not be true. For the word occurs at the very beginning

CHAPTER FIRST.

ed the ten laſt days of the month backward from the thirtieth, calling that day ἑνὴν καὶ νέαν, the old and the new, or the laſt day of the old month and the firſt day of the new: for he introduced months of 29 and 30 days alternately, making the thirtieth day of every other month to be the firſt day of the next month (1).

[a] Cenſorinus c. 18. Herod. l. 2. c. 4.

XXIII. To the twelve lunar months [a] the ancient Greeks added a thirteenth, every other year, which made their *Dieteris*; and becauſe this reckoning made their year too long by a month in eight years, they omitted an intercalary month once in eight years, which made their *Octäeteris*, one half of which was their *Teträeteris:* and theſe periods ſeem to have been almoſt as old as the religions of Greece, being uſed in divers of their *Sacra*.

[b] Apollodor. l. 3. c. 4. § 11. p. 169. Strabo, l. 10. p. 476. Homer. Odyſſ. T. v. 179.

The [b] *Octäeteris* was the *annus magnus* of Cadmus and Minos (1), and ſeems to have been brought into Greece and Crete by the Phœnicians, who came thither with Cadmus and Europa, and to have continued till after the days of Herodotus: for in counting the length of ſeventy years, [c] he reckons thirty days to a lunar month, and twelve ſuch months, or 360 days, to the ordinary year, without the intercalary months, and 25 ſuch months to the *Dieteris* (2): and according to the number of days in the calendar year of the Greeks, Demetrius Phalereus had 360 ſtatues erected to him by the Athenians. But the Greeks, Cleoſtratus, Harpalus, and others, to make their months agree better with the courſe of the moon, in the times of the Perſian empire, varied the manner of intercalating the three months in the *Octäeteris*;

[c] Herod. l. 1. c. 30.

ginning of Heſiod's ἱστίην: and by the particular mention which is made of the true *triacas* in the 4th line, it appears, that there was in Heſiod's time a true and a falſe *triacas*; i. e. a natural and a civil one: or that the word was uſed both to denote the laſt day of the artificial month, which was really the thirtieth, and the day of the true conjunction, although that ſhould not be the laſt of the month. See Proclus on the place. This name, therefore, was given to the laſt day of the month before Thales.

(2) See Plutarch. in Solon. tom. I. p. 92. Diog. Laert. lib. 1. § LVIII & LX. Ariſtoph. Nub. lin. 1129 & 1180—1196, with the Scholia.

§ XXIII.

(1) Beſides the places to which our author refers, ſee Plato in Minos. p. 598.

(2) The paſſage of Herodotus ſeems rather to be an argument, that the Dieteris was in uſe in his time. "I fix the term of human life, ſays Solon, at 70 years. Theſe 70 years, taking no "account

"account of the embolimæan months, give 25200 days. But if *every other year* is to be length-"ened by a month, in order that the ſeaſons may come round at the proper time, the emboli-"mæan months in the 70 years will be 35. The days ariſing from theſe months will be 1050. "Now all theſe days in the 70 years being 26250, &c."

(3) Cenſorinus de Die Natali, c. 18.

GREEKS.

Octäeteris; and Meton found out the cycle of intercalating ſeven months in nineteen years (1).

XXIV. The ancient year of the Latines was alſo luni-ſolar; for Plutarch [a] tells us, that the year of Numa conſiſted of twelve lunar months, with intercalary months to make up what the twelve lunar months wanted of the ſolar year. The ancient year of the Egyptians was alſo luni-ſolar, and continued to be ſo till the days of Hyperion, or Oſiris, a king of Egypt, the father of Helius and Selene, or Orus and Bubaſte: for the Iſraelites brought this year out of Egypt; and Diodorus [b] tells us that Ouranus, the father of Hyperion, uſed this year (1); and [c] that in the temple of Oſiris the prieſts appointed thereunto filled 360 milk-bowls every day; I think he means one bowl every day, in all 360, to count the number of days in the calendar year, and thereby to find out the difference between this and the true ſolar year: for the year of 360 days was the year, to the end of which they added five days.

[a] Plutarch. in Numa. Tom. I. p. 71, 72.

[b] Diodor. l. 3. c. 56. p. 133.

[c] Diodor. l. 1. c. 22. p. 13.

XXV. That the Iſraelites uſed the luni-ſolar year is beyond queſtion (1). Their months began with their new moons. Their firſt month was called Abib, from the earing of corn in that month. Their Paſſover was kept upon the fourteenth day of the firſt month, the moon being then in the full: and if the corn was not then ripe enough for offering the Firſt Fruits, the feſtival was put off, by adding an intercalary month to the end of the year; and the harveſt was got in before the Pentecoſt, and the other fruits gathered before the feaſt of the ſeventh month.

§ XXIV.

(1) This Diodorus affirms of the Uranus of the Altantei. And Sir Iſaac Newton ſuppoſes the Hyperion of the Altantei, who was the ſon of this Uranus, and the Egyptian Oſiris to be the ſame.

§ XXV.

(1) But whether this was their antient year, or adopted only after the death of Alexander the Great, was a queſtion warmly agitated between Scaliger and Petavius.

CHAPTER FIRST.

XXVI. Simplicius, in his commentary [a] on the firſt of Ariſtotle's Phyſical *Acroaſis*, tells us, that "ſome begin the year up-"on the ſummer Solſtice, as the people of Attica; or upon the "autumnal equinox, as the people of Aſia; or in the winter, "as the Romans; or about the vernal equinox, as the Arabians "and people of Damaſcus: and the month began, according to "ſome, upon the full moon, or upon the new." The years of all theſe nations were therefore luni-ſolar, and kept to the four ſeaſons: and the Roman year began at firſt in ſpring, as I ſeem to gather from the names of their months, *Quintilis*, *Sextilis*, *September*, *October*, *November*, *December*: and the beginning was afterwards removed to winter. The ancient civil year of the Aſſyrians and Babylonians was alſo luni-ſolar: for this year was alſo uſed by the Samaritans, who came from ſeveral parts of the Aſſyrian empire; and the Jews who came from Babylon called the months of their luni-ſolar year after the names of the months of the Babylonian year; and Beroſus [b] tells us, that the Babylonians celebrated the feaſt *Sacæa* upon the 16th day of the month *Lous*, which was a lunar month of the Macedonians, and kept to one and the ſame ſeaſon of the year: and the Arabians, a nation who peopled Babylon, uſe lunar months to this day. Suidas [c] tells us, that the *Sarus* of the Chaldeans contains 222 lunar months, which are eighteen years, conſiſting each of twelve lunar months, beſides ſix intercalary months: and when [d] Cyrus cut the river Gindus into 360 channels, he ſeems to have alluded unto the number of days in the calendar year of the Medes and Perſians: and the emperor Julian [e] writes, "For when "all other people, that I may ſay it in one word, accommodate "their months to the courſe of the moon; we alone, with the "Egyptians, meaſure the days of the year by the courſe of "the ſun."

[a] Apud Theodorum Gazam de menſibus.

[b] Apud Athenæum, l. 14. p. 639.

[c] Suidas in Σαρος.

[d] Herod. l. 1. c. 189. 190.

[e] Julian. Or: 4.

XXVII. At length the Egyptians, for the ſake of navigation, applied themſelves to obſerve the ſtars; and by their heliacal riſings and ſettings, found the true ſolar year to be five days longer than

§ XXVII.

(1) Herodot. lib. 2. c. 4

(2) Diodorus ſays, that the Egyptians of Thebais to the 12 months of 30 days, added five days and a quarter. And Strabo in effect ſays the ſame thing. Vide Strab. p. 806 & 816.

than the calendar year, and therefore added five days to the twelve calendar months; making the ſolar year to conſiſt of twelve months and five days (1). Strabo [a] and [b] Diodorus aſcribe this invention to the Egyptians of Thebes (2). "The Theban "prieſts, ſaith Strabo, are above others ſaid to be aſtronomers "and philoſophers. They invented the reckoning of days not "by the courſe of the moon, but by the courſe of the ſun. To "twelve months, each of thirty days, they add yearly five "days (3)." In memory of this emendation of the year they dedicated the [c] five additional days to Oſiris, Iſis, Orus ſenior, Typhon, and Nephthe the wife of Typhon; feigning that thoſe days were added to the year when theſe five princes were born; that is, in the reign of Ouranus, or Ammon, the father of Seſac: and in [d] the ſepulchre of Amenophis (4), who reigned ſoon after, they placed a golden circle of 365 cubits in compaſs, and divided it into 365 equal parts, to repreſent all the days in the year, and noted upon each part the heliacal riſings and ſettings of the ſtars on that day; which circle remained there till the invaſion of Egypt by Cambyſes king of Perſia. Till the reign of Ouranus, the father of Hyperion, and grandfather of Helius and Selene, the Egyptians uſed the old luni-ſolar year: but in his reign, that is, in the reign of Ammon, the father of Oſiris or Seſac, and grandfather of Orus and Bubaſte, the Thebans began to apply themſelves to navigation and aſtronomy, and by the heliacal riſings and ſettings of the ſtars determined the length of the ſolar year; and to the old calendar year added five days, and dedicated them to his five children above mentioned, as their birth-days: and in the reign of Amenophis, when by further obſervations they had ſufficiently determined the time of the ſolſtices, they might place the beginning of this new year upon the vernal equinox. This year being at length propagated into Chaldæa, gave occaſion to the year of Nabonaſſar; for the years of Nabonaſſar and thoſe of Egypt began on one and the ſame

GREEKS.

[a] Strabo, l. 17. p. 816. Diodor. l. 1. c. 50. p. 32.

[c] Plutarch. de Oſiride & Iſide. Tom. II. p. 355. Diodor. l. 1. c. 13. p. 9.

[d] Hecatæus apud Diodor. l. 1. c. 49. p. 32.

(1) But he adds, that they took account of the fraction of a day, by which the year exceeds 365 days, by means of a Cycle. Vid. Strab. p. 816.

(4) or Oſymanduas, as Diodorus calls him, in our author's opinion at leaſt, who ſuppoſes the Oſymanduas of Diodorus and Amenophis to have been the ſame perſon.

day,

CHAPTER FIRST.

day, called by them Thoth (5), and were equal and in all reſpects the ſame: and the firſt year of Nabonaſſar began on the 26th day of February of the old Roman year, ſeven hundred forty and ſeven years before the vulgar æra of Chriſt (6), and thirty and three days and five hours before the vernal equinox, according to the ſun's mean motion; for it is not likely that the equation of the ſun's motion ſhould be known in the infancy of aſtronomy. Now reckoning that the year of 365 days wants five hours and 49 minutes of the equinoctial year; the beginning of this year will move backwards thirty and three days and five hours in 137 years: and by conſequence this year began at firſt in Egypt upon the vernal equinox, according to the ſun's mean motion, 137 years before the æra of Nabonaſſar began; that is, in the year of the Julian period 3830, or 96 (7) years after the death of Solomon: and if it began upon the next day after the vernal equinox, it might begin four years earlier; and about that time ended the reign of Amenophis: for he came not from Suſa to the Trojan war, but died afterwards in Egypt. This year was received by the Perſian empire from the Babylonian; and the Greeks alſo uſed it in the *Æra Philippæa*, dated from the death of Alexander the Great; and Julius Cæſar corrected it, by adding a day in every four years, and made it the year of the Romans.

XXVIII. Syncellus tells us, that the five days were added to the old year by the laſt king of the ſhepherds: and the difference in time between the reign of this king, and that of Ammon, is but ſmall; for the reign of the ſhepherds ended but one generation, or two, before Ammon began to add thoſe days. But the ſhepherds minded not arts and ſciences.

XXIX. The firſt month of the luni-ſolar year, by reaſon of the intercalary month, began ſometimes a week or a fortnight before the equinox or ſolſtice, and ſometimes as much after it. And this year gave occaſion to the firſt aſtronomers, who formed the Aſteriſms, to place the equinoxes and ſolſtices in the middles

(5) Cenſorin. de Die Nat. c. 21. (6) See Petav. Doct. Temp. lib. 9. c. 57, 58.
(7) Or 91; if the death of Solomon be rightly placed by Petavius on the year of the Julian period 3739.

of

of the conſtellations of Aries, Cancer, Chelæ, and Capricorn. Achilles Tatius [a] tells us, that "ſome antiently placed the ſolſtice in the beginning of Cancer; others, in the eighth degree of Cancer; others, about the twelfth degree; and others about the fifteenth degree thereof." This variety of opinions proceeded from the preceſſion of the equinox, then not known to the Greeks. When the ſphere was firſt formed, the ſolſtice was in the fifteenth degree, or middle of the conſtellation of Cancer (1): then it came into the twelfth, eighth, fourth, and firſt degree ſucceſſively. Eudoxus, who flouriſhed about ſixty years after Meton, and an hundred years before Aratus, in deſcribing the ſphere of the ancients, placed the ſolſtices and equinoxes in the middles of the conſtellations of Aries, Cancer, Chelæ, and Capricorn, as is affirmed by [b] Hipparchus Bithynus; and appears alſo by the deſcription of the equinoctial and tropical circles in Aratus (2), [c] who copied after Eudoxus; and by the poſitions of the Colures of the equinoxes and ſolſtices; which, in the ſphere of Eudoxus, deſcribed by Hipparchus, went through the middles of thoſe conſtellations. For Hipparchus tells us, that Eudoxus drew the Colure of the ſolſtices, through the middle of the Great Bear; and the middle of Cancer; and the neck of Hydrus; and the ſtar between the poop and maſt of Argo; and the tail of the South Fiſh; and through the middle of Capricorn, and of Sagitta; and through the neck and right-wing of the Swan; and the left-hand of Cepheus: and that he drew the equinoctial Colure through the left-hand of Arctophylax; and along the middle of his body; and croſs the middle of Chelæ; and through the right-hand and fore-knee of the Centaur; and through the flexure of Eridanus and head of Cetus; and the back of Aries acroſs, and through the head and right-hand of Perſeus (3).

[a] Iſagoge, ſect. 12 a Petavio edit. Uranolog. p. 146.
[b] Hipparch. ad Phænom. l. 2. ſect. 3 a Petavio edit. Uranolog. P. 213.
[c] Hipparch. ad Phænom. l. 1. ſect. 2. Uranolog. P. 173.

XXX. Now Chiron delineated *σχήματα ὀλύμπου*, the Aſteriſms, as the ancient author of Gigantomachia (1), cited by [d] Clemens

[d] Strom. 1. p. 132, 357.

§ XXIX.

(1) For ſince there is no record, that it was ever placed to the eaſt of the middle of Cancer, it is probable that this was its place when the ſphere was firſt formed.
(2) lin. 477—525. (3) Uranolog. p. 207, 208.

§ XXX.

(1) Read *Titanomachia*.

Alex-

CHAPTER FIRST.

Alexandrinus, informs us (2): for Chiron was a practical aſtronomer, as may be there underſtood alſo of his daughter Hippo: and Muſæus, the ſon of Eumolpus and maſter of Orpheus, and one of the Argonauts, [a] made a ſphere, and is reputed the firſt among the Greeks who made one (3): and the ſphere itſelf ſhews that it was delineated in the time of the Argonautic expedition; for that expedition is delineated in the Aſteriſms, together with ſeveral other ancienter hiſtories of the Greeks, and without any thing later. There is the golden RAM, the enſign of the veſſel in which Phryxus fled to Colchis; the BULL with brazen hoofs tamed by Jaſon; and the TWINS, CASTOR and POLLUX, two of the Argonauts, with the SWAN of Leda their mother. There is the ſhip ARGO, and HYDRUS the watchful dragon; with Medea's CUP, and a RAVEN upon its carcaſs, the ſymbol of death. There is CHIRON the maſter of Jaſon, with his ALTAR and SACRIFICE. There is the Argonaut HERCULES (4) with his DART and VULTURE falling down; and the DRAGON, CRAB, and LYON, whom he ſlew; and the HARP of the Argonaut Orpheus. All theſe relate to the Argonauts. There is ORION the ſon of Neptune, or, as ſome ſay, the grandſon of Minos, with his DOGS, and HARE, and RIVER, and SCORPION. There is the ſtory of Perſeus in the conſtellations of PERSEUS, ANDROMEDA, CEPHEUS, CASSIEPEA and CETUS: that of Calliſto, and her ſon Arcas, in URSA MAJOR and ARCTOPHYLAX: that of

[a] Laertius Proem. l. 1.

(2) ——————— ὁτ⊙
Εἰς τε δικαιοσύνην θνητῶν γενε⊙ ἡγαγε, δοὺς
Ὅρκους, καὶ θυσίας ἱλαρὰς, καὶ σχήματ' ὀλυμπα.

As theſe σχήματ' ὀλυμπα ſtand connected here with oaths and propitiatory ſacrifices, and the knowledge of them is made a part of the diſcipline, by which mankind was brought to a juſt and civilized life; I much doubt whether the Aſteriſms be intended. Indeed both Chiron and his daughter Hippo ſeem to have been ſkilled in phyſics. But the lady's particular excellence was in judicial aſtrology.

Ἡ πρώτα μὲν τὰ θεῖα πρωμαντεύσατο
Χρησμοῖσιν, ἡ δ' ἀστέρων ἐπαοίδαις.

Were not theſe σχήματ' ὀλυμπα the configurations of the heavenly bodies, on which aſtrologers were uſed to form their predictions? Prediction is connected with popular ſuperſtition. And thus theſe σχήματ' ὀλυμπα might have a connection with oaths, and ſacrifices, and the diſcipline of civil life.

(3) ——— ποιησας δε θεογονιαν και σφαιραν πρωτος. Diog. Laert. Proem. ſect. III. That is, he was the firſt who *wrote in verſe* of the theogony and the ſphere. This ſeems much more to the purpoſe than Chiron's σχήματ' ὀλυμπα. And it is ſtill more ſo, that Orpheus himſelf was an aſtronomer. Vid. Suidas in Ὀρφεύς.

Icareus and his daughter Erigone in BOOTES, PLAUSTRUM, and VIRGO. URSA MINOR relates to one of the nurſes of Jupiter; AURIGA to Erechthonius; OPHIUCHUS to Phorbas; SAGITTARIUS to Crolus the ſon of the nurſe of the Muſes; CAPRICORN to Pan, and AQUARIUS to Ganimede. There is Ariadne's CROWN; Bellerophon's HORSE; Neptune's DOLPHIN; Ganimede's EAGLE; Jupiters GOAT with her KIDS; Bacchus's ASSES; and the FISHES of Venus and Cupid, and their parent the SOUTH FISH. Theſe with DELTOTON are the old conſtellations mentioned by Aratus: and they all relate to the Argonauts and their contemporaries, and to perſons one or two generations older: and nothing later than that expedition was delineated there originally. ANTINOUS and COMA BERENICES are novel. The ſphere ſeems therefore to have been formed by Chiron and Muſæus, for the uſe of the Argonauts: for the ſhip Argo was the firſt long ſhip built by the Greeks. Hitherto they had uſed round veſſels of burden, and kept within ſight of the ſhore; and now, upon an embaſſy to ſeveral princes upon the coaſts of the Euxine and Mediterranean Seas, [a] by the dictates of the oracle, and conſent of the princes of Greece, the flower of Greece were to ſail with expedition through the deep, in a long ſhip with ſails, and guide their ſhip by the ſtars (5). The people of the iſland Corcyra [b] attributed the invention of the ſphere to Nauſicaa, the daughter of Alcinöus, king of the Pheaces in that iſland (6): and it is moſt pro-

[a] Apollodor. l. 1. c. 9. ſect. 16.

[b] Suidas in Ἀναγαλλίς.

(4) THIS was not the antient name of the conſtellation. In the time of Aratus, the Greeks had no name for it, but one taken from the poſture, in which the figure was drawn, ὁ τι γονασι, and profeſſed to be ignorant who or what was meant by it. See Aratus, lin. 613—616.

(5) See Diod. Sic. lib. 4. c. 41. p. 171. That the Argo carried maſts and ſails, ſee Orph. Argonaut. lin. 274, and Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 563—566.

(6) Ἀναγαλλις, ἡ Κερκυραια γραμματικη, ἥτις την της σφαιρας ἑυρεσιν Ναυσικαᾳ τῃ Ἀλκινου θυγατρι ἀνατιθησιν. Thus the Lexicographer; who probably thought as little, as the Corcyræan Grammarianeſs, of decorating the princeſs Nauſicaa with the fame of aſtronomical inventions. What ſphere Nauſicaa invented, and to what purpoſe it was applied, Athenæus tells us more diſtinctly. Ὀρχησεις δ' εἰσι παρ' Ὁμηρῳ, αἱ μεν των ἐκ παιδιστρων· αἱ δε δια της σφαιρας· ἡς την ἑυρεσιν Ἀγαλλις, ἡ Κερκυραια γραμματικη, Ναυσικαᾳ ἀνατιθησι, ὡς πολιτιδι χαριζομενη. (Δικαιαρχος δε Σικυωνιοις, Ἱππασος δε Λακεδαιμονιοις, ταυτην τε και τα γυμνασια πρωτοις.) Ταυτην δε μονην των ἡρωιδων Ὁμηρος παραγει σφαιριζουσαν. Athen. lib. 1. c. 11. p. 14. That is, "The Dances, that are mentioned by Homer, are ſome "thoſe of tumblers; others, with a ball; the invention of which kind of dance, Agallis, the "Corcyræan grammarianeſs, aſcribes to Nauſicaa, in compliment to her country-woman. (But "Dicæarchus gives this invention to the Sicyonians; Hippaſus to the Lacedæmonians, the firſt "in this, as well as in manly exerciſes.) Nauſicaa is the only heroine that Homer introduces "dancing the ball-dance." It appears from Athenæus that theſe dances, in which the ball was uſed, were particularly graceful and elegant, and practiſed by perſons of the beſt condition.

CHAPTER FIRST.

[a] Apollodor. l. 1. c. 9. sect. 25.

table that she had it from the Argonauts, who [a] in their return home sailed to that island, and made some stay there with her father. So then in the time of the Argonautic expedition, the cardinal points of the equinoxes and solstices were in the middles of the constellations of Aries, Cancer, Chelæ, and Capricorn.

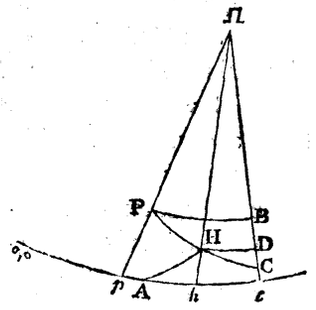
XXXI. In the end of the year of our Lord 1689 the star called Prima Arietis was in ♈. 28°. 51′. 00″. with north latitude 7°. 8′. 58″. And the star called *ultima caudæ Arietis* was in ♉. 19°. 3′. 42″. with north latitude 2°. 34′. 5″. And the *Colurus Æquinoctiorum* passing through the point in the middle between those two stars did then cut the ecliptic in ♉ 6°. 44′ (1): and by this reckoning

§ XXXI.

(1) By my calculations in ♉. 6°. 50′. 20″.

The principles, upon which the calculation is founded, are these:

LET ♈*pc* be an arc of the ecliptic, ♈ being the equinoctial point at the end of the year of our Lord 1689.



Let the point P be the place of the first star in Aries (γ of Bayer), and C the place of the last in the tail (ε of Bayer). Imagine a great circle of the sphere drawn through P and ε; and bisect the arc PC in H. Then is H the middle point between P and C, through which the equinoctial colure of the primitive sphere passed. Therefore through H draw a great circle, HA, which may make an angle of 66°. 30′. with the ecliptic, the acute angle looking eastward. Then HA will be the equinoctial colure of the primitive sphere, and A the equinoctial point of that sphere.

To find the distance of A from ♈, the equinoctial point of the sphere of 1690; find Π the pole of the ecliptic: and through P, C, and H, draw circles of latitude, ΠP, ΠC, ΠH, meeting the ecliptic in the points *p*, *c*, and *b*. And from P and H draw arcs of great circles, PB and HD, perpendicular to Π*cc*. Now the arcs ♈*p*, ♈*c*, are given; being the given longitudes of the stars P and C, at the end of the year 1689. Therefore *pc*, the difference of these arcs is given, and the angle *p*Π*c*, which is measured by that given arc *pc*. But the arc ΠP is given, being the complement of the given latitude *pp*. Therefore in the right-angled spherical triangle, PBΠ, the hypotenuse PΠ is given, and the angle PΠB. Therefore both the legs, PB, ΠB, will be given by trigonometry. But ΠB being given; since Π*c* is also given, being the complement of the given latitude *cc*; their difference, BC, is given. Therefore in the right-angled spherical triangle, PBC, the two legs, PB and BC, are given. Therefore the hypotenuse PC, and the angle PCB will be given by trigonometry. But PC being given, its half, HC, will be given. Therefore in the right-angled spherical triangle, HDC, the hypotenuse CH being given with the angle HCD; the legs, HD, DC, will be given by trigonometry. But DC being given, since Π*c* is also given, their difference, ΠD, is given. And in the right-angled spherical triangle, ΠDH, the two sides, ΠD, DH, being given; the angle DΠH and the hypotenuse ΠH will be given by trigonometry. But ΠH being given, its complement, *hb*, which is the latitude of the point H is given. And in the right angled spherical triangle H*b*A, the side H*b* being given with the angle H*A*b; the side *b*A will be given by trigonometry. But the arc *bc* is given, being the measure of the given angle DΠH. Therefore the arc *c*A, the sum of *cb* and *b*A, is given. But ♈*c* is given. Therefore ♈A is given. Q. E. I.

reckoning the equinox, in the end of the year 1689, was gone back 36°. 44′ (2). since the Argonautic expedition: supposing that the said Colure passed through the middle of the constellation of Aries, according to the delineation of the ancients. The equinox goes back fifty seconds in one year, and one degree in seventy and two years; and by consequence 36°. 44′. in 2645 years; which counted back from the end of the year of our Lord

GREEKS.

COMPUTATION.

Given	♈*p* = 28° 51′ 00″	Therefore	*pc* = 20° 12′ 42″
	♈*c* = 49 03 42	Therefore	Π*p* = 82 51 02
	pp = 7 8 58	Therefore	Π*c* = 87 25 55
	cc = 2 34 5		

Hence in the right-angled triangle ΠBP	Π*p* =	82°	51′	02″
	PΠB =	20	12	42
Therefore the legs	PB =	20	2	52
	ΠB =	82	23	12
But	Π*c* =	87	25	55
Therefore	B*c* =	5	02	43

Hence in the right-angled triangle PBC	PB =	20°	2′	52″
	B*c* =	5	2	43
Therefore	PC B =	76	27	00
And	PC =	20	38	51
Therefore	HC = ½PC =	10	19	25½

Hence in the right-angled triangle HDC	HC =	10°	19′	25″
And	HCD =	76	27	00
Therefore	HD =	10	1	59
And	CD =	2	26	37
But	Π*c* =	87	25	55
Therefore	ΠD =	84	59	18

Hence in the right-angled triangle ΠDH	ΠD =	84°	59′	18″
And	HD =	10	1	59
Therefore	DΠH =	10	4	15 = *bc*
And	ΠH =	85	3	55
Therefore	H*b* =	4	56	5

Hence in the right-angled triangle H*b*A	H*b* =	4°	56′	5″
And	H*A*b =	66	30	00
Therefore	*b*A =	2	9	7
But	*cb* =	10	4	15
Therefore	*c*A =	12	13	22
But	♈*c* =	49	3	42
Therefore	♈A =	36	50	20

(2) 36°. 50′. 20″. by my reckoning.

CHAPTER FIRST.

1689, or beginning of the year 1690, will place the Argonautic expedition about 25 years after the death of Solomon (3). But it is not neceſſary that the middle of the conſtellation of Aries ſhould be exactly in the middle between the two ſtars called *prima Arietis* and *ultima caudæ*: and it may be better to fix the cardinal points by the ſtars, through which the Colures paſſed in the primitive ſphere, according to the deſcription of Eudoxus above recited. By the Colure of the equinoxes, I mean a great circle paſſing through the poles of the equator, and cutting the ecliptic in the equinoxes in an angle of $66\frac{1}{2}$ degrees, the complement of the ſun's greateſt declination; and by the Colure of the ſolſtices I mean a great circle paſſing through the ſame poles, and cutting the ecliptic at right angles in the ſolſtices: and by the primitive ſphere, that which was in uſe before the motions of the equinoxes and ſolſtices were known: now the Colures paſſed through the following ſtars, according to Eudoxus.

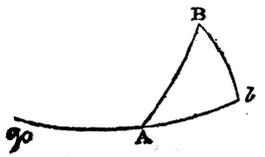
XXXII. In the back of Aries is a ſtar of the ſixth magnitude, marked γ by Bayer: in the end of the year 1689, and beginning of the year 1690, its longitude was ♉. 9°. 38′. 45″ (1), and north latitude 6°. 7′. 56″: and the *Colurus Æquinoctiorum* drawn

(3) THE equinoctial points go back 36°. 50′. in 2642 years. From the end of the year of our Lord 1689, i. e. of the year of the Julian period 6402, count back 2642, and you come to the year of the Julian period 3760, the 22d from Solomon's death, according to Petavius.

§ XXXII.

(1) Read ♉. 9°. 48′. 35″. See Flamſted's Cat. Brit.

(2) ACCORDING to my calculations in ♉. 7°. 7′. 56″.



Let Υb be an arc of the ecliptic; Υ being the place of the equinoctial point at the end of the year 1689. Let the point B be the place of γ of Aries. Draw the circle of latitude Bb, and BA the equinoctial colure of the primitive ſphere. Then in the right-angled ſpherical triangle BbA, Bb being the latitude of γ of Aries, is 6°. 7′. 56″. And the angle BAb is 66°. 30′. 00″. Hence I find the arc $Ab = 2°.\ 40′.\ 39″$.

But $\Upsilon b = 39°.\ 48′.\ 35″$. being the longitude of γ of Aries in the ſphere of 1690.

Therefore $\Upsilon A = 37°.\ 07′.\ 56″$.

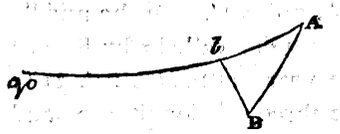
In a copy of the chronology which formerly belonged to my late dear and learned friend MATTHEW RAPER, Eſq. F. R. S. for ♉. 6°. 58′. 57″. I find ♉. 7°. 7′. 55′. written in his hand in the margin.

(3) BY my calculations ♉. 6°. 53′. 29″.

Theſe two ſtars are ſo near together, both in longitude and latitude; that the mean longitude and mean latitude may be ſafely aſſumed for the longitude and latitude of the middle point between the two.

Let

drawn through it, according to Eudoxus, cuts the ecliptic in ♉. 6°. 58′. 57″ (1). In the head of Cetus are two ſtars of the fourth magnitude, called ν and ξ by Bayer: in the end of the year 1689 their longitudes were ♉. 4°. 3′. 9″. and ♉. 3°. 7′. 35″. and their ſouth latitudes 9°. 12′. 26″. and 5°. 53′. 7″: and the *Colurus Æquinoctiorum* paſſing in the mid-way between them, cuts the ecliptic in ♉. 6°. 58′. 51″ (2). In the extreme flexure of Eridanus, rightly delineated, is a ſtar of the fourth magnitude, of late referred to the breaſt of Cetus, and called ϱ by Bayer (4); it is the only ſtar in Eridanus through which this Colure can paſs; its longitude, in the end of the year 1689, was ♈. 25°. 22′. 10″. and ſouth latitude 25°. 15′. 50″. and the *Colurus Æquinoctiorum* paſſing through it, cuts the ecliptic in ♉. 7°. 12′. 40″ (5). In the head of Perſeus, rightly delineated, is a ſtar of the fourth magnitude, called τ by Bayer; the longitude of this ſtar, in the end of the year 1689, was ♉. 23°. 25′. 30″ (6), and north latitude 34°. 20′. 12″: and the *Colurus Æquinoctiorum* paſſing through it, cuts the ecliptic in ♉. 6°. 18′. 57″ (7). In the right-hand of Perſeus, rightly delineated, is a ſtar



Let B therefore be that middle point, and Bb the circle of latitude paſſing through it, and meeting the ecliptic Υb in b. Draw a great circle, BA, to make an angle with the ecliptic of 66°. 30′. the acute angle looking weſtward, becauſe the point B is to the ſouth of the ecliptic. Then BA will be the equinoctial colure of the primitive ſphere, and A the equinoctial point of that ſphere.

Now in the right-angled triangle BbA, $Bb = 7°.\ 32′.\ 46″$; being the latitude of B: and $BAb = 66°.\ 30′.\ 00″$.

		°	′	″
Hence I find	$bA =$	3	18	7
But	$\Upsilon b =$	33	35	22
Therefore	$\Upsilon A =$	36	53	29

Raper's copy has ♉. 6 53 42 written in his hand in the margin.

(4) This is the ϱ *Ceti, in quadrilatero pectoris præcedentis lateris boreæ*, of the Britannic Catalogue.

(5) IN ♉. 7°. 12′. 38″. by my calculations.
Let B in the laſt figure repreſent the place of ϱ Ceti.

		°	′	″
Then	$Bb =$	25	15	50
and	$BAb =$	66	30	00
Hence I find	$bA =$	11	50	28
But	$\Upsilon b =$	25	22	10
Therefore	$\Upsilon A =$	37	12	38

(6) Read ♉. 23°. 35′. 30″. See Flamſted. Cat. Brit.

(7) IN ♉. 6°. 18′. 48″.

Let

CHAPTER FIRST.

ſtar of the fourth magnitude, called η by Bayer; its longitude in the end of the year 1689 was $\aleph$. 24°. 25′. 27″ (⁹), and north latitude 37°. 26′. 30″: and the *Colurus Æquinoctiorum* paſſing through it cuts the ecliptic in $\aleph$. 4°. 56′. 40″ (¹⁰): and the fifth part of the ſum of the places in which theſe five Colures cut the ecliptic, is $\aleph$. 6°. 29′. 15″ (¹¹): and therefore the great circle which in the primitive ſphere, according to Eudoxus, and by conſequence in the time of the Argonautic expedition, was the *Colurus Æquinoctiorum* paſſing through the ſtars above-deſcribed; did, in the end of the year 1689, cut the ecliptic in $\aleph$. 6°. 29′ 15″ (¹¹): as nearly as we have been able to determine by the obſervations of the ancients, which were but coarſe.

XXXIII. In the middle of Cancer is the South Aſellus, a ſtar of the fourth magnitude, called by Bayer δ; its longitude in the end of the year 1689 was Ω. 4°. 23′. 40″. In the neck of Hydrus, rightly delineated, is a ſtar of the fourth magnitude, called δ by Bayer; its longitude in the end of the year 1689 was Ω. 5°. 59′. 3″. Between the poop and maſt of the ſhip Argo is a ſtar of the third magnitude, called ι by Bayer; its longitude in the end of that year was Ω. 7°. 5′. 31″. In Sagitta is a ſtar of the ſixth magnitude, called θ by Bayer; its longitude in the end of the ſame year 1689 was $\approx$. 6°. 29′. 53″. In the middle of Capricorn is a ſtar of the fifth magnitude, called η by Bayer; its longitude in the end of the ſame year was $\approx$. 8°. 25′. 55″: and the fifth part of the ſum of the three firſt longitudes, and

Let B, in fig. note 2, repreſent the place of τ Perſei.

		°	′	″
Then	$B\delta$ =	34	20	12
And	$BA\delta$ =	66	30	00
Therefore	δA =	17	16	42
But	$\Upsilon\delta$ =	53	35	30
Therefore	$\Upsilon\aleph$ =	36	18	48

Raper's copy has $\aleph$. 6 18 48 written in his own hand in the margin.

(⁹) THIS ſtar does not appear in the Britannic Catalogue: but in that of Hevelius its longitude, at the end of the year 1660, is put down $\aleph$. 24°. 0′. 29″. Therefore at the end of the year 1689 its longitude muſt have been $\aleph$. 24°. 24′. 29. In fig. note 2, let B denote the place of this ſtar.

		°	′	″
Then	$B\delta$ =	37	26	50
And	$BA\delta$ =	66	30	00
Hence I find	BA =	19	27	06
But	$\Upsilon\delta$ =	54	24	39
Therefore	ΥA =	34	57	33

of the complements of the two laſt to 180 degrees (¹); is Ω. 6°. 28′. 46″ (²). This is the new longitude of the old *Colurus Solſtitiorum* paſſing through theſe ſtars. The ſame Colurus paſſes alſo in the middle between the ſtars η and χ, of the fourth and fifth magnitudes, in the neck of the Swan; being diſtant from each about a degree: it paſſeth alſo by the ſtar κ, of the fourth magnitude, in the right wing of the Swan; and by the ſtar o, of the fifth magnitude, in the left-hand of Cepheus, rightly delineated; and by the ſtars in the tail of the South-Fiſh; and is at right angles with the *Colurus Æquinoctiorum* found above: and ſo it hath all the characters of the *Colurus Solſtitiorum* rightly drawn.

XXXIV. The two colures therefore, which in the time of the Argonautic expedition cut the ecliptic in the cardinal points, did in the end of the year 1689 cut it in $\aleph$. 6°. 29′; Ω. 6°. 29′; $\mathfrak{M}$. 6°. 29′; and $\approx$. 6°. 29′; that is, at the diſtance of 1 ſign, 6 degrees and 29 minutes from the cardinal points of Chiron; as nearly as we have been able to determine from the coarſe obſervations of the ancients: and therefore the cardinal points, in the time between that expedition and the end of the year 1689, have gone back from thoſe colures 1 ſign, 6 degrees and 29 minutes; which, after the rate of 72 years to a degree, anſwers to 2627 years. Count thoſe years backwards from the end of the year 1689, or beginning of the year 1690, and the reckoning will place the Argonautic expedition about 43 years after the death of Solomon (¹).

XXXV.

(⁹) According to my calculations $\aleph$. 4°. 57′. 33″. See the preceding note. Raper's copy has $\aleph$. 4°. 58′. 22″. in his hand-writing in the margin. I imagine he took the longitude of the ſtar in 1689, as he found it ſtated by Sir Iſaac Newton.

(¹⁰) $\aleph$. 6°. 30′. 05″. according to my calculations.

(¹¹) $\aleph$. 6°. 30′. 05″. See the preceding note. Raper's copy has $\aleph$. 6°. 30′. 17″. in his hand-writing in the margin.

§ XXXIII.

(¹) —— *and of the complements of the two laſt to* 180 *degrees*] read, *and of the two laſt increaſed by ſix ſigns.* RAPER. This emendation is neceſſary. HORSLEY.

(²) Ω. 6°. 28′. 48″.

§ XXXIV.

(¹) About 37 years after Solomon's death, as placed by Petavius.

It

CHAPTER FIRST.

XXXV. And by the ſame method the place of any ſtar in the primitive ſphere may readily be found, counting backwards one ſign, 6°. 29′. from the longitude which it had in the end of the year of our Lord 1689. So the longitude of the firſt ſtar of Aries in the end of the year 1689 was ♈. 28°. 51′. as above: count backward 1 ſign, 6°. 29′. and its longitude, counted from the equinox in the middle of the conſtellation of Aries, in the time of the Argonautic expedition, will be ♓. 22°. 22′: and by the ſame way of arguing, the longitude of the *Lucida Pleiadum* in the time of the Argonautic expedition will be ♈. 19°. 26′. 8″. and the longitude of *Arcturus* ♍. 13°. 24′. 52″: and ſo of any other ſtars.

XXXVI. After the Argonautic expedition we hear no more of aſtronomy till the days of Thales: he [a] revived aſtronomy, and wrote a book of the tropics and equinoxes, and predicted eclipſes; and Pliny [b] tells us, that he determined the *Occaſus Matutinus* of the Pleiades to be upon the 25th day after the autumnal equinox(1): and thence [c] Petavius computes the longitude of the Pleiades

[a] Laert. in Thalete. Plin. l. 2. c. 12.
[b] Plin. l. 18. c. 25.
[c] Petav. Var. Diſſ. l. 1. c. 5.

It is to be obſerved, that in ſeeking the place of the equinoctial Colure of the primitive ſphere on the ſphere of 1690; the obliquity of the ecliptic on the primitive ſphere has been ſuppoſed to be juſt 23°. 30′. and the complement of the obliquity 66°. 30′: and computing from theſe elements, we have found reaſon to conclude, that the primitive ſphere of the Greeks was 2627 years older than the ſphere of 1690. But at that diſtance of time, before the commencement of the year of our Lord 1690; I find, by Mayer's tables, that the obliquity of the ecliptic was 23°. 48′. 54″. I aſſume therefore 23°. 48′. 30″. for the obliquity on the primitive ſphere; and repeating my calculations, I find theſe five places of the primitive equinox on the ſphere of 1690.

	°	′	″
The primitive equinoctial Colure being drawn through ϒ of Aries	♉. 7	05	34
through the middle point between ϒ and ξ Ceti	♉. 6	56	25
through ϱ of Cetus	♉. 7	23	16
through τ of Perſeus	♉. 6	03	00
through η of Perſeus	♉. 4	39	39

The mean place of theſe five is ♉. 6°. 25′. 23″. And if this be the place of the primitive equinoctial point on the ſphere of 1690; the place of the ſummer ſolſtice ſhould be ♌. 6°. 25′. 23″. But by the deſcription of the ſolſtitial Colure it ſhould be ♌. 6°. 28′. 46″. It may be reaſonable therefore to take ♉. 6°. 27′. and ♌. 6°. 27′. for the places of the primitive equinox and ſolſtice on the ſphere of 1690. By which reckoning theſe points will be leſs advanced by 2′. than Sir Iſaac Newton has ſuppoſed. But theſe 2′. will not make a difference of three years in the age of the primitive ſphere.

§ XXXVI.

(1) *OCCASUM matutinum Vergiliarum Heſiodus (nam hujus quoque nomine extat Aſtrologia) tradidit fieri cùm æquinoctium Autumni conficeretur: Thales, 25°. die ab æquinoctio.* Plin. lib. 18. c. 25. I think it proper to bring forth the whole paſſage, to ſhew an objection that may be drawn from it. It may be ſaid, that Pliny's authority is juſt as good to prove, that Heſiod

Pleiades in ♈. 23°. 53′: and by conſequence the *Lucida Pleiadum* had, ſince the Argonautic expedition, moved from the equinox 4°. 26′. 52″: and this motion, after the rate of 72 years to a degree, anſwers to 320 years. Count theſe years back from the time in which Thales was a young man fit to apply himſelf to aſtronomical ſtudies, that is from about the 41ſt olympiad (2), and the reckoning will place the Argonautic expedition about 44 years after the death of Solomon, as above: and in the days of Thales, the ſolſtices and equinoxes, by this reckoning, will have been in the middle of the eleventh degrees of the ſigns. But Thales, in publiſhing his book about the tropics and equinoxes, might lean a little to the opinion of former aſtronomers, ſo as to place them in the twelfth degrees of the ſigns.

GREEKS.

XXXVII. Meton and Euctemon, [a] in order to publiſh the lunar cycle of nineteen years, obſerved the ſummer ſolſtice in the year of Nabonaſſar 316, the year before the Peloponneſian war began; and Columella [b] tells us, that they placed it in the eighth degree of Cancer, which is at leaſt ſeven degrees backwarder

[a] Petav. Doct. Temp. l. 4. c. 26.
[b] Columel. l. 9. c. 14. Plin. l. 18. c. 25 § 59. Harduin.

ſiod placed the morning-ſetting of the Pleiades on the very day of the equinox, as that Thales placed it 25 days later. And if it be true, that *Lucida Pleiadum* did really ſet at ſun-riſe on the day of the autumnal equinox, in the age of Heſiod; this will much more refute Sir Iſaac Newton's date of the Argonautic expedition, than the aſſumption, that the morning-ſetting of the ſame ſtar was 25 days later, in the age of Thales, confirms it. For that Heſiod was ſome time later than the Argonautic expedition, is agreed: we have his own teſtimony, that he lived after the war of Troy. The Argonautic expedition happened, according to Sir Iſaac Newton, in that age when the longitude of *Lucida Pleiadum* was in the 20th degree of the ſign of Aries. But when this ſtar ſet at ſun-riſe, on the day of the autumnal equinox, its longitude muſt have been rather behind the vernal equinox: as any aſtronomer, who will take the trouble to make the neceſſary calculations, may eaſily perceive. So that between the age of Heſiod, as thus defined by the morning-ſetting of *Lucida Pleiadum*, and that time which Sir Iſaac Newton aſſigns to the Argonautic expedition, the ſtars muſt have advanced more than 20 degrees in longitude: and a change of 20 degrees, at the rate of 1 degree in 72 years, requires 1440 years. Therefore Sir Iſaac Newton's date of the Argonautic expedition cannot be leſs than 1500 years too late.

To this ſpecious objection our author would probably have replied; that Pliny reports the ſeaſon of the morning-ſetting of this ſtar, in the age of Heſiod, from a book of aſtronomy, of which he ſays only, that it was extant *under the name* of Heſiod: and that this book could not be Heſiod's. For Heſiod ſpeaks of Arcturus as riſing at ſun-ſet ſixty days after the winter ſolſtice. And it is impoſſible that any ſtar of the Pleiades could ſet at ſun-riſe, on the day of the autumnal equinox, in the ſame age when Arcturus roſe at ſun-riſe 60 days after the winter ſolſtice: or that theſe two circumſtances of the ſphere ſhould be removed from each other by a leſs interval of time, than the ſpace of 1440 years. This book of aſtronomy, therefore, that was extant in Pliny's time under the name of Heſiod, our author might have reaſonably contended was certainly a ſuppoſitious work. And probably the performance of ſome petty retailer of ſcience in the decline of the Grecian learning. The extravagant antiquity it would give to the Greek aſtronomy, entirely deſtroys its credit.

(2) Diog. Laert. lib. 1. ſegm 37, 38.

CHAPTER FIRST.

than at first. Now the equinox, after the rate of a degree in seventy and two years, goes backwards seven degrees in 504 years. Count backwards those years from the 316th year of Nabonassar; and the Argonautic expedition will fall upon the 44th year after the death of Solomon, or thereabout, as above. And thus you see the truth of what we cited above out of Achilles Tatius, viz. that some anciently placed the solstice in the eighth degree of Cancer, others about the twelfth degree, and others about the fifteenth degree thereof.

XXXVIII. Hipparchus, the great astronomer, comparing his own observations with those of former astronomers, concluded first of any man, that the equinoxes had a motion backwards in respect of the fixed stars (1): and his opinion was, that they went backwards one degree in about an hundred years (2). He made his observations of the equinoxes between the years of Nabonassar 586 and 618 (3): the middle year is 602, which is 286 years after the aforesaid observation of Meton and Euctemon; and in these years the equinox must have gone backwards four degrees, and so have been in the fourth degree of Aries in the days of Hipparchus, and by consequence have then gone back eleven degrees since the Argonautic expedition; that is, in 1090 years, according to the chronology of the ancient Greeks then in use (4): and this is after the rate of about 99 years, or, in the next round number, an hundred years to a degree, as was then

§ XXXVIII.

(1) Ptolemy, lib. 7. c. 2.

(2) From Hipparchus's words, preserved by Ptolemy (Synt. lib. 7. c. 2.) it should seem that his opinion was, that the cardinal points went back not less than a degree in a hundred years. But he did not affirm, that they might not recede faster: which has turned out to be the truth.

(3) 586 and 621, according to Petavius. Doct. Temp. lib. 4. c. 26.

(4) See § III. note 13.

§ XXXIX.

(1) Τεγ. lin. 564.

(2) I cannot deduce this consequence from the premises. When Arcturus rose at sun-set sixty days after the winter solstice; I find the longitude of that star must have been ♍. 13°. 28'. 38''; which exceeds its longitude on the primitive sphere, by no more than 1'. 46''.

Again, taking the longitude and latitude of Arcturus, each such as it was on the primitive sphere; namely, the longitude ♍. 13°. 26'. 52''. the latitude 30°. 52'. 18''; I find, that when the star rose at sun-set, the sun's true place must have been ♐. 00°. 59'. And according to the situation of the Aphelion of the earth's orbit, which obtained in that age of the world, when the equinoxes were in ♉. 6'. 27''. and ♎. 6'. 27''. of the sphere of 1690; the sun was in this place

then stated by Hipparchus. But it really went back a degree in seventy and two years, and eleven degrees in 792 years. Count these 792 years backward from the year of Nabonassar 602, the year from which we counted the 286 years, and the reckoning will place the Argonautic expedition about 43 years after the death of Solomon. The Greeks have therefore made the Argonautic expedition about 300 years ancienter than the truth, and thereby given occasion to the opinion of the great Hipparchus, that the equinox went backward after the rate of only a degree in an hundred years. GREEKS.

XXXIX. Hesiod tells us, that sixty days after the winter solstice the star Arcturus rose just at sun-set (1): and thence it follows, that Hesiod flourished about an hundred years after the death of Solomon, or in the generation or age next after the Trojan war (2), as Hesiod himself declares (3).

XL. From all these circumstances, grounded upon the coarse observations of the ancient astronomers, we may reckon it certain, that the Argonautic expedition was not earlier than the reign of Solomon. And if these astronomical arguments be added to the former arguments taken from the mean length of the reigns of kings, according to the course of nature; from them all we may safely conclude, that the Argonautic expedition was after the death of Solomon: and most probably that it was about 43 years after it.

place sixty-days after the winter solstice. So that the conclusion from this passage of Hesiod should rather be, that he flourished in that very age when the Greeks first formed their sphere; that is, according to Sir Isaac Newton, in the age of the Argonautic expedition.

I take the truth to be, that before the retrograde motion of the equinoctial points was discovered, all writers speak of the risings and settings of the stars, as they were stated by the astronomers who first formed the sphere. This is probable of Hesiod in particular, if he lived so near the age of the Argonautic expedition, and the beginning of the Greek sphere, as Sir Isaac Newton supposes. No conclusion therefore is to be drawn, concerning the particular age of any writer, much older than Hipparchus, from what he may say of the phænomena of the sphere; unless it be certain, that he was a practical astronomer, and lived at such a distance of time from the beginning of the Greek astronomy, as might produce sensible changes in the seasons of the risings and settings of the stars. Such writers might, indeed, without any knowledge of the motion of the equinoxes, describe the phænomena according to their own observations, and impute the difference, between what they saw and what their masters had delivered, to the coarseness of the first observations.

When I speak of the appearances of the primitive sphere, I mean the appearances in the latitude of 40 degrees north, at that time when the vernal equinox was in ♉. 6°. 27'. on the sphere of 1690.

(3) Εργ. lin. 164—175.

CHAPTER FIRST.

XLI. The Trojan war was one generation later than that expedition, as was ſaid above, ſeveral captains of the Greeks in that war being ſons of the Argonauts: and the ancient Greeks reckoned Memnon or Amenophis, king of Egypt, to have reigned in the times of that war, feigning him to be the ſon of Tithonus, the eldeſt brother of Priam, and in the end of that war to have come from Suſa to the aſſiſtance of Priam (1). Amenophis was therefore of the ſame age with the elder children of Priam, and was with his army at Suſa in the laſt year of that war. And after he had there finiſhed the Memnonia; he might return into Egypt, and adorn it with buildings, and obeliſks, and ſtatues, and die there about 90 or 95 years after the death of Solomon; when he had determined and ſettled the beginning of the new Egyptian year of 365 days upon the vernal equinox, ſo as to deſerve the monument above-mentioned in memory thereof.

XLII. Rehoboam was born in the laſt year of king David, being 41 years old at the death of Solomon, 1 Kings xiv. 21 (1), and therefore his father Solomon was probably born in the 18th year of king David's reign, or before: and two or three years before his birth, David beſieged Rabbah, the metropolis of the Ammonites; and committed adultery with Bathſheba (2): and the year before this ſiege began, David vanquiſhed the Ammonites (3), and their confederates the Syrians of Zobah, and Rehob, and Iſhtob, and Maacah (4), and Damaſcus, and extended his dominion over all theſe nations as far as to the entering in of Hamath and the river Euphrates (5): and before this war began he ſmote Moab, and Ammon, and Edom (5); and made the Edomites fly, ſome of them into Egypt with their king Hadad, then a little child (6); and others to the Philiſtims, where they fortified Azoth againſt Iſrael; and others, I think, to the Perſian Gulph, and other places whither they could eſcape: and before this he had ſeveral battles with the Philiſtims: and all this was after the eighth year of his reign, in which he came from Hebron to Je-

§ XLI.

(1) Pauſan. p. 875.

§ XLII.

(1) 1 Kings xiv. 21. and xi. 42. (2) 2 Sam. xi. (3) 2 Sam. xi. 1.

ruſalem.

ruſalem. We cannot err therefore above two or three years, if we place this victory over Edom in the eleventh or twelfth year of his reign; and that over Ammon and the Syrians in the fourteenth. After the flight of Edom, the king of Edom grew up, and married Tahaphenes or Daphnis, the ſiſter of Pharaoh's queen (7), and before the death of David had by her a ſon called Genubah, and this ſon was brought up among the children of Pharaoh (8): and among theſe children was the chief or firſt-born of her mother's children, whom Solomon married in the beginning of his reign; and her little ſiſter who at that time had no breaſts; and her brother who then ſucked the breaſts of his mother, Cant. vi. 9. and viii. 1, 8: and of about the ſame age with theſe children was Seſac or Seſoſtris; for he became king of Egypt in the reign of Solomon, 1 Kings xi. 40; and before he began to reign he warred under his father; and whilſt he was very young conquered Arabia, Troglodytica, and Libya, and then invaded Ethiopia; and ſucceeding his father, reigned till the fifth year of Aſa: and therefore he was of about the ſame age with the children of Pharaoh above-mentioned; and might be one of them, and be born near the end of David's reign, and be about 46 years old when he came out of Egypt with a great army to invade the eaſt: and by reaſon of his great conqueſts, he was celebrated in ſeveral nations by ſeveral names. The Chaldæans called him Belus; which in their language ſignified the Lord: the Arabians called him Bacchus; which in their language ſignified the great: the Phrygians and Thracians called him Ma-fors, Ma-vors, Mars; which ſignified the valiant: and thence the Amazons, whom he carried from Thrace and left at Thermodon, called themſelves the daughters of Mars. The Egyptians before his reign called him their Hero or Hercules; and after his death, by reaſon of his great works done to the river Nile, dedicated that river to him, and deified him by its names *Sihor*, *Nilus*, and *Ægyptus*; and the Greeks hearing them lament O *Sihor*, *Bou Sihor*, called him Oſiris and Buſiris. Ar-

(4) 2 Sam. x. (5) 2 Sam. viii. 1. 1 Chron. xviii.
(6) 1 Kings xi. 15—18.
(7) Read, *and married the ſiſter of Tahaphenes, or Daphnis, Pharaoh's queen.* 1 Kings xi. 19.
(8) 1 Kings xi. 20.

rian

CHAPTER FIRST.

rian [a] tells us, that the Arabians worſhipped only two gods, Cœlus and Dionyſus; and that they worſhipped Dionyſus for the glory of leading his army into India. The Dionyſus of the Arabians was Bacchus; and all agree that Bacchus was the ſame king of Egypt with Oſiris: and the Cœlus, or Uranus, or Jupiter Uranius of the Arabians, I take to be the ſame king of Egypt with his father Ammon, according to the poet:

[a] Arrian. l. 5.

Quamvis Æthiopum populis, Arabumque beatis
Gentibus, atque Indis unus ſit Jupiter Ammon.

I place the end of the reign of Seſac upon the fifth year of Aſa; becauſe in that year Aſa became free from the dominion of Egypt, ſo as to be able to fortify Judæa, and raiſe that great army with which he met Zerah, and routed him (°). Oſiris was therefore ſlain in the fifth year of Aſa by his brother Japetus, whom the Egyptians called Typhon, Python, and Neptune: and then the Lybians, under Japetus and his ſon Atlas, invaded Egypt, and raiſed that famous war between the gods and giants, from whence the Nile had the name of Eridanus: but Orus the ſon of Oſiris, by the aſſiſtance of the Ethiopians, prevailed, and reigned till the 15th year of Aſa: and then the Ethiopians under Zerah invaded Egypt, drowned Orus in Eridanus, and were routed by Aſa, ſo that Zerah could not recover himſelf. Zerah was ſucceeded by Amenophis, a youth of the royal family of the Ethiopians, and I think the ſon of Zerah: but the people of the lower Egypt revolted from him, and ſet up Oſarſiphus over them, and called to their aſſiſtance a great body of men from Phœnicia, I think a part of the army of Aſa; and thereupon Amenophis, with the remains of his father's army of Ethiopians, retired from the lower Egypt to Memphis, and there turned the river Nile into a new channel, under a new bridge which he built between two mountains; and at the ſame time he built and fortified that city againſt Oſarſiphus, calling it by his own

(°) In the days of Aſa the land was quiet ten years, 2 Chron. xiv. 1, 6. Theſe ten years of reſt Sir Iſaac Newton counts from the death of Seſac to Zerah's invaſion. Zerah's invaſion was in the fifteenth year of Aſa, 2 Chron. xv. 10, 11. Therefore the ten years of reſt, if they ended with this invaſion, began with the fifth of Aſa. And this, according to our author's aſſumptions, muſt

own name, Amenoph or Memphis: and then he retired into Ethiopia, and ſtayed there thirteen years; and then came back with a great army, and ſubdued the lower Egypt, expelling the people which had been called in from Phœnicia: and this I take to be the ſecond expulſion of the ſhepherds. Dr. Caſſel [a] tells us, that in Coptic this city is called Manphtha; whence by contraction came its names Moph, Noph.

[a] In Moph.

XLIII. While Amenophis ſtaid in Ethiopia, Egypt was in its greateſt diſtraction: and then it was, as I conceive, that the Greeks, hearing thereof, contrived the Argonautic expedition, and ſent the flower of Greece in the ſhip Argo to perſuade the nations upon the ſea-coaſts of the Euxine and Mediterranean Seas to revolt from Egypt, and ſet up for themſelves, as the Libyans, Ethiopians, and Jews, had done before. And this is a further argument for placing that expedition about 43 years after the death of Solomon; this period being in the middle of the diſtraction of Egypt. Amenophis might return from Ethiopia, and conquer the lower Egypt about eight years after that expedition; and having ſettled his government over it, he might, for putting a ſtop to the revolting of the eaſtern nations, lead his army into Perſia; and leave Proteus at Memphis to govern Egypt in his abſence; and ſtay ſome time at Suſa, and build the Memnonia, fortifying that city, as the metropolis of his dominion in thoſe parts.

XLIV. Androgeus the ſon of Minos, upon his overcoming in the Athenæa, or quadrennial games at Athens in his youth, was perfidiouſly ſlain out of envy (′): and Minos thereupon made war upon the Athenians, and compelled them to ſend every eighth year to Crete ſeven beardleſs youths, and as many young virgins, to be given as a reward to him that ſhould get the victory in the like games inſtituted in Crete in honour of Androgeus (″). Theſe games ſeem to have been celebrated in the beginning of the Octaëteris, and the Athenæa in the beginning of the Tetraëteris,

muſt have been the year of Seſac's death.

§ XLIV.

(′) Apollodor. lib. 3. c. 14. § VII. Compare Diod. Sic. p. 183.
(″) Plutarch in Theſeo. Tom. I. p. 6.

then

CHAPTER FIRST.

then brought into Crete and Greece by the Phœnicians: and upon the third payment of the tribute of children (3), that is, about ſeventeen years after the ſaid war was at an end, and about nineteen or twenty years after the death of Androgeus, Theſeus became victor, and returned from Crete with Ariadne the daughter of Minos; and coming to the iſland Naxus or Dia, [a] Ariadne was there relinquiſhed by him, and taken up by Glaucus, an Egyptian commander at ſea, and became the miſtreſs of the great Bacchus, who at that time returned from India in triumph (4); and [b] by him ſhe had two ſons, Phlyas and Eumedon, who were Argonauts (5). This Bacchus (6) was caught in bed in Phrygia with Venus the mother of Æneas, according [c] to Homer, juſt before he came over the Helleſpont, and invaded Thrace; and he married Ariadne the daughter of Minos, according to Heſiod [d]: and therefore by the teſtimony of both Homer and Heſiod, who wrote before the Greeks and Egyptians corrupted their antiquities, this Bacchus was one generation older than the Argonauts; and ſo being king of Egypt at the ſame time with Seſoſtris, they muſt be one and the ſame king. For they agree alſo in their actions: Bacchus invaded India and Greece; and after he was routed by the army of Perſeus, and the war was compoſed, the Greeks did him great honours, and built a temple to him at Argos, and called it the temple of the Creſian Bacchus, becauſe Ariadne was buried in it, as Pauſanias [e] relates. Ariadne therefore died in the end of the war, juſt before the return of Seſoſtris into Egypt; that is, in the 14th year of Rehoboam. She was taken from Naxus upon the return of Bacchus from India, and then became the miſtreſs of Bacchus, and accompanied him in his triumphs. And therefore the expedition of Theſeus to Crete, and the death of his father Ægeus, was about nine or ten years after the death of Solomon. Theſeus was then a beardleſs young man, ſuppoſe about 19 or 20 years old; and Androgeus was ſlain about twenty years before, being then about 20 or 22 years old; and his father Minos might be about 25 years older, and ſo be born about the middle of David's reign,

[a] Euanthes apud Athenæum, l. 67. p. 296.

[b] Hyginus Fab. 14.

[c] Homer. Odyſſ. l. 8. v. 292.

[d] Heſiod. Theogon. v. 947.

[e] Pauſan. l. 2, c. 23.

(3) Plutarch. in Theſeo. p. 6. (4) Diod. Sic. p. 183. (5) See § XIX. note 2.
(6) That is, if Bacchus and Mars were the ſame perſon, as our author ſuppoſes.

and

and be about 70 years old when he purſued Dædalus into Sicily: and Europa and her brother Cadmus might come into Europe two or three years before the birth of Minos. GREEKS.

XLV. Juſtin, in his 18th book (1), tells us: "*A rege Aſcalo-*"*niorum expugnati Sidonii navibus appulſi Tyron urbem ante an-*"*num ** Trojanæ cladis condiderunt.*" And Strabo, [a] that "Ara-"dus was built by the men who fled from Zidon. Hence [b] Iſaiah calls Tyre "the daughter of Zidon, the inhabitants of the iſle whom the merchants of Zidon have repleniſhed." And [c] Solomon, in the beginning of his reign, calls the people of Tyre Zidonians: "My ſervants," ſaith he, in a meſſage to Hiram king of Tyre, "ſhall be with thy ſervants, and unto thee will I give "hire for thy ſervants according to all that thou deſireſt: for "thou knoweſt that there is not among us any that can ſkill to "hew timber like the Zidonians." The new inhabitants of Tyre had not yet loſt the name of Zidonians; nor had the old inhabitants, if there were any conſiderable number of them, gained the reputation of the new ones for ſkill in hewing of timber, as they would have done, had navigation been long in uſe at Tyre. The artificers who came from Zidon were not dead; and the flight of the Zidonians was in the reign of David; and by conſequence in the beginning of the reign of Abibalus the father of Hiram, and the firſt king of Tyre mentioned in hiſtory. David, in the twelfth year of his reign, conquered Edom, as above, and made ſome of the Edomites, and chiefly the merchants and ſeamen, fly from the Red Sea to the Philiſtims upon the Mediterranean, where they fortified Azoth. For [d] Stephanus tells us: "Ταυτην εκλισεν εις των επανελθοντων απ' Ερυθρας "θαλασσης φευγαδων: one of the fugitives from the Red Sea "built Azoth:" that is, a prince of Edom, who fled from David, fortified Azoth for the Philiſtims againſt him. The Philiſtims were now grown very ſtrong, by the acceſs of the Edomites and ſhepherds; and by their aſſiſtance invaded and took Zidon, that being a town very convenient for the merchants who fled from the Red Sea: and then did the Zidonians fly by ſea to Tyre

[a] Strabo, l. 16. p. 753. edit. Caſaub.

[b] Iſa. xxiii. 2, 12.

[c] 1 Kings v. 6.

[d] Steph. in Aζωτος.

§ XLV.

(1) C. 3.

CHAPTER FIRST.

and Aradus, and to other havens in Asia Minor, Greece, and Libya, with which, by means of their trade, they had been acquainted before; the great wars and victories of David their enemy, prompting them to fly by sea. For [a] they went with a great multitude, not to seek Europa as was pretended, but to seek new seats; and therefore fled from their enemies (2): and when some of them fled under Cadmus and his brothers to Cilicia, Asia Minor, and Greece; others fled under other commanders to seek new seats in Libya, and there built many walled towns, as Nonnus [b] affirms: and their leader was also there called Cadmus, which word signifies an eastern man, and his wife was called Sithonis, a Zidonian. Many from those cities went afterwards with the great Bacchus in his armies: and by these things, the taking of Zidon, and the flight of the Zidonians under Abibalus, Cadmus, Cilix, Thasus, Membliarius, Alymnus, and other captains, to Tyre, Aradus, Cilicia, Rhodes, Caria, Bithynia, Phrygia, Calliste, Thasus, Samothrace, Crete, Greece, and Libya, and the building of Tyre and Thebes, and beginning of the reigns of Abibalus and Cadmus over those cities, are fixed upon the fifteenth or sixteenth year of David's reign, or thereabout. By means of these colonies of Phœnicians, the people of Caria learnt sea-affairs, in such small vessels with oars as were then in use; and began to frequent the Greek Seas, and people some of the islands therein, before the reign of Minos. For Cadmus, in coming to Greece, arrived first at Rhodes, an island upon the borders of Caria; and left there a colony of Phœnicians (3), who sacrificed men to Saturn (4); and the Telchines being repulsed by Phoroneus, retired from Argos to Rhodes (5) with

[a] Conon. Narrat. 37.

[b] Nonnus Dionysiac. l. 13. v. 333. & sequ.

(2) This consequence but ill agrees with Canon's narrative; he says, that the Phœnicians, at the time of Cadmus's expedition, were a great people: had subdued a great part of Asia, and that the seat of their empire was at Thebes in Egypt: that Cadmus was a great man among them, and that the object of his expedition was to establish a kingdom of his own.

(3) Diod. Sic. lib. 5. c. 58. p. 227.

(4) Porphyry ap. Euseb. Præp. Evang. lib. 4. p. 92. R. Steph. Porphyry however does not assert, that this custom was peculiar to the Phœnician colony settled in Rhodes by Cadmus; but simply, that it obtained in Rhodes. And our author must be understood to point at this practice, as an argument that Phœnicians, among whom it had prevailed from very ancient times, had settled in this island.

(5) Euseb. in Chron. Orosius. lib. 1. c. 7. The Telchines, according to Diodorus Siculus (lib.

with Phorbas (6), who purged the island from serpents (7); and Triopas, the son of Phorbas, carried a colony from Rhodes to Caria, and there possessed himself of a promontory, thence called Triopium (8): and by this and such like colonies Caria was furnished with shipping and seamen, and called [a] Phœnice. Strabo and Herodotus [b] tell us, that the Cares were called Leleges, and became subject to Minos; and lived first in the islands of the Greek Seas, and went thence into Caria, a country possessed before by some of the Leleges and Pelasgi: whence it is probable, that when Lelex and Pelasgus came first into Greece to seek new seats, they left part of their colonies in Caria and the neighbouring islands. GREEKS.

[a] Athen. l. 4. c. 23.

[b] Strabo. l. 14. p. 661. Herod. l. 1. c. 171.

XLVI. The Zidonians being still possessed of the trade of the Mediterranean, as far westward as Greece and Libya, and the trade of the Red Sea being richer; the Tyrians traded on the Red Sea in conjunction with Solomon and the kings of Judah (1), till after the Trojan war; and so also did the merchants of Aradus, Arvad, or Arpad. For in the Persian Gulph [c] were two islands called Tyre and Aradus, which had temples like the Phœnician (2); and therefore the Tyrians and Aradians sailed thither, and beyond, to the coasts of India, while the Zidonians frequented the Mediterranean: and hence it is that Homer celebrates Zidon, and makes no mention of Tyre. But at length, [d] in the reign of Jehoram king of Judah, Edom revolted from the dominion of Judah, and made themselves a king; and the trade of Judah and Tyre upon the Red Sea being thereby interrupted, the Tyrians built ships for merchandise upon the Mediterranean, and began there to make long voyages to places not yet frequented by the Zidonians; some of them going to the coasts of Afric

[c] Strabo, l. 16. p. 766.

[d] 2 Chron. xxi. 8, 10. & 2 Kings viii. 20, 22.

(lib. 5. c. 55. p. 226) were the original inhabitants of Rhodes. According to Strabo (p. 654) they were originally Cretans, and removed from Crete first into Cyprus, and thence into Rhodes.

(6) According to Eusebius (in Chron.) Phorbas took possession of Rhodes more than 200 years after the Telchines. According to Diodorus (lib. 5. c. 58. p. 228) this Phorbas was no Argive, but a Thessalian.

(7) Diod. Sic. lib 5. c. 58. p. 228.

(8) Diod. Sic. lib. 5. c. 7. p. 227. But Diodorus makes this Triopas one of the reputed Heliadæ.

§ XLVI.

(1) 1 Kings ix. 26—28.

(2) See more about these islands in Bochart. Chanaan. lib. 1. c. 45.

CHAPTER FIRST.

beyond the Syrtes, and building Adrymetum, Carthage, Leptis, Utica, and Capſa (3); and others going to the coaſts of Spain, and building Carteia, Gades, and Tarteſſus (4); and others going further to the Fortunate Iſlands, and to Britain and Thule (5). Jehoram reigned eight years; and the two laſt years was ſick in his bowels (6); and before that ſickneſs Edom revolted (7), becauſe of Jehoram's wicked reign. If we place that revolt about the middle of the firſt ſix years, it will fall upon the fifth year of Pygmalion king of Tyre (8); and ſo was about twelve or fifteen years after the taking of Troy: and then, by reaſon of this revolt, the Tyrians retired from the Red Sea, and began long voyages upon the Mediterranean; for in the ſeventh year of Pygmalion, his ſiſter Dido ſailed to the coaſt of Afric beyond the Syrtes, and there built Carthage. This retiring of the Tyrians from the Red Sea to make long voyages on the Mediterranean, together with the flight of the Edomites from David to the Philiſtims, gave occaſion to the tradition both of the ancient Perſians, and of the Phœnicians themſelves, that the Phœnicians came originally from the Red Sea to the coaſts of the Mediterranean, and preſently undertook long voyages, as Herodotus [a] relates. For Herodotus, in the beginning of his firſt book, relates, that the Phœnicians coming from the Red Sea to the Mediterranean, and beginning to make long voyages with Egyptian and Aſſyrian wares, among other places came to Argos; and having ſold their wares, ſeized and carried away into Egypt ſome of the Grecian women who came to buy them; and amongſt thoſe women was Io the daughter of Inachus. The Phœnicians therefore came from the Red Sea, in the days of Io and her brother Phoroneus king of Argos; and by conſequence, at that time when David conquered the Edomites, and made them fly every way from the Red Sea; ſome into Egypt with their young king, and others to the

[a] Herod. l. 1. c. 1. initio, & l. 7. circa medium, c. 89.

(3) Bochart. Chanaan. lib. 1. c. 24.
(4) ——— lib. 1. c. 34.
(5) ——— lib. 1. c. 39 and 40.
(6) 2 Chron. xxi. 5 and 19.
(7) 2 Chron. xxi. 8 and 18.
(8) The ſeventh of Pygmalion was the 143d from the building of Solomon's Temple. See § XVII. note 7. The 3d of Jehoram was the 119th from the building of the Temple: conſequently, not the 5th of Pygmalion's reign, but the 18th or 19th before the beginning of his reign; and therefore either the twelfth or fifteenth after the taking of Troy, according as a generation

GREEKS.

the Philiſtims, their next neighbours and the enemies of David. And this flight gave occaſion to the Philiſtims to call many places Erythra, in memory of their being Erythreans or Edomites, and of their coming from the Erythrean Sea; for Erythra was the name of a city in Ionia; of another in Libya; of another in Locris; of another in Bœotia; of another in Cyprus; of another in Ætolia; of another in Aſia near Chius; and Erythia Acra was a promontory in Libya; and Erythræum a promontory in Crete; and Erythros a place near Tybur; and Erythini a city or country in Paphlagonia: and the name Erythea or Erythræ was given to the Iſland Gades, peopled by Phœnicians. So Solinus, "[a] *In capite Bæticæ inſula à continenti ſeptingentis paſſibus memo-* "*ratur, quam Tyrii, à rubro mari profecti Erytheam, Pœni ſuâ lin-* "*guâ Gadir, id eſt ſepem, nominárunt.*" And Pliny, [b] concerning a little iſland near it; "*Erythia dicta eſt, quoniam Tyrii, Aborigines* "*eorum, orti ab Erythræo mari ferebantur.*" Among the Phœnicians who came with Cadmus into Greece, there were [c] Arabians, and [d] Erythreans, or inhabitants of the Red Sea, that is Edomites: and in Thrace there ſettled a people who were circumciſed, and called Odomantes; that is, as ſome think, Edomites. Edom, Erythra and Phœnicia, are names of the ſame ſignification, the words denoting a red colour: which makes it probable, that the Erythreans who fled from David ſettled in great numbers in Phœnicia; that is, in all the ſea-coaſts of Syria from Egypt to Zidon; and by calling themſelves Phœnicians in the language of Syria, inſtead of Erythreans, gave the name of Phœnicia to all that ſea-coaſt, and to that only. So Strabo: "[e] Οἱ μεν γαρ και τους Φοινικας, και τους Σιδονιους τους καθ' ἡμας, αποικους "ειναι των εν τῳ Ωκεανῳ φασι, προστιθεντες και δια τι Φοινικες εκαλουντο, "ὁτι και ἡ Θαλαττα ἐρυθρα. *Alii referunt Phœnices & Sidonios noſ-* "*tros, eſſe colonos eorum qui ſunt in Oceano, addentes illos ideo vo-* "*cari Phœnices* [*puniceos*] *quòd mare rubrum ſit.*"

[a] Solin, c. 23. edit. Salm.
[b] Plin. l. 4. c. 22.
[c] Strabo, l. 9. p. 401. & l. 10. p. 447.
[d] Herod. l. 5. c. 57*.
[e] Strabo, l. 1. p. 42.

neration ſhall be reckoned either at 30 or 33 years. For the taking of Troy was in the generation before Pygmalion, according to our author's ſyſtem. See § XVII. and note 7. on that ſection.

* Strabo (p. 401.) ſpeaks of Arabians who paſſed over with Cadmus, but no where of Erythreans, unleſs they be included in the general name of Phœnicians: which is the very thing in queſtion. Sir Iſaac Newton ſeems to have imagined, that Eretria in Eubœa took its name from Erythræans planted there by Cadmus: for without this ſuppoſition, the paſſages to which he refers, in Herodotus and Strabo, are nothing to his purpoſe.

CHAPTER FIRST.

XLVII. Strabo [a], mentioning the first men who left the sea-coasts and ventured out into the deep and undertook long voyages, names Bacchus, Hercules, Jason, Ulysses, and Menelaus: and saith, that the dominion of Minos over the sea was celebrated, and the navigation of the Phœnicians, who went beyond the pillars of Hercules and built cities there and in the middle of the sea-coasts of Afric, presently after the war of Troy. These Phœnicians [b] were the Tyrians, who at that time built Carthage in Afric, and Carteia in Spain, and Gades in the island of that name without the Straights; and gave the name of Hercules to their chief leader, because of his labours and success; and that of Heraclea to the City Carteia which he built. So Strabo: [c] "Εκπλευσιν ων, εκ της ημετερας θαλατ]ης εις την εξω, δεξιον εςι τετο· "και προς αυ]ο Καλπη [Καρτηια] πολις εν τετ]αρακον]α σαδιοις, αξιολογος "και παλαια, ναυσαθμον ποτε γενομενη των Ιβηρων· ενιοι δε και Ηρακλε- "ες κ]ισμα λεγουσιν αυτην, ων εςι και Τιμοσθενης· ος φησι και Ηρακλεια "ονομαζεσθαι το πτλαιον· δεικνυσθαι τε μεγαν περι]ολον, και νεωσοικους. "*Mons Calpe ad dextram est è nostro mari foras navigantibus*; & "*ad quadraginta inde stadia urbs Carteia, vetusta ac memorabilis,* "*olim statio navibus Hispanorum. Hanc ab Hercule quidam con-* "*ditam aiunt*; *inter quos est Timosthenes, qui eam antiquitus Her-* "*racleam fuisse appellatam refert, ostendique adhuc magnum mu-* "*rorum circuitum & navalia.*" This Hercules, in memory of his building and reigning over the city Carteia, they called also Melcartus; the king of Carteia. Bochart [d] writes, that Carteia was at first called Melcarteia, from its founder Melcartus, and by an aphæresis, Carteia; and that Melcartus signifies Melec Kartha, the king of the city; that is, saith he, of the city Tyre: but considering that no ancient author tells us, that Carteia was ever called Melcarteia, or that Melcartus was king of Tyre; I had rather say that Melcartus, or Meleccartus, had his name from being the founder and governor, or prince, of the city Carteia. Under Melcartus the Tyrians sailed as far as Tarteſſus, or Tarshish, a place in the western part of Spain, between the two mouths of the river Bœtis; and there they [e] met with much silver, which they purchased for trifles: they sailed also as far as Britain before the death of Melcartus; for [f] Pliny tells us, "*Plumbum*

[a] Strabo, l. 1. p. 48.
[b] Bochart. Canaan. l. 1. c. 34.
[c] Strabo, l. 3. p. 140. Vid. Phil. Transact. N° 359.
[d] Canaan. l. 1. c. 34. p. 682.
[e] Aristot. de Mirab. p. 1165. edit. Paris.
[f] Plin. l. 7. c. 56.

"*Plumbum ex Cassiteride insulâ primus apportavit Midacritus.*" and Bochart [a] observes, that Midacritus is a Greek name corruptly written for Melcartus; Britain being unknown to the Greeks long after it was discovered by the Phœnicians. After the death of Melcartus, they built [b] a temple to him in the island Gades; and adorned it with the sculptures of the labours of Hercules, and of his Hydra, and the horses to whom he threw Diomedes, king of the Bistones in Thrace, to be devoured. In this temple was the golden Belt of Teucer, and the golden Olive of Pygmalion bearing Smaragdine fruit: and by these consecrated gifts of Teucer and Pygmalion, you may know that it was built in their days. Pomponius derives it from the times of the Trojan war (1). For Teucer, seven years after that war, according to the marbles, arrived at Cyprus, being banished from home by his father Telamon, and there built Salamis: and he and his posterity reigned there (2) till Evagoras, the last of them, was conquered by the Persians, in the twelfth year of Artaxerxes Mnemon. Certainly this Tyrian Hercules could be no older than the Trojan war; because the Tyrians did not begin to navigate the Mediterranean till after that war. For Homer and Hesiod knew nothing of this navigation; and the Tyrian Hercules went to the coasts of Spain, and was buried in Gades. So Arnobius [c]; "*Tyrius Hercules sepultus in finibus Hispaniæ.*" and Mela, speaking of the Temple of Hercules in Gades, saith, "*Cur sanctum sit, ossa ejus ibi sepulta efficiunt.*" Carthage [d] paid tenths to this Hercules, and sent their payments yearly to Tyre: and thence it is probable, that this Hercules went to the coast of Afric, as well as to that of Spain, and by his discoveries prepared the way to Dido: Orosius [e] ond others tell us, that he built Capsa there. Josephus (3) tells of an earlier Hercules, to whom Hiram built a temple at Tyre: and perhaps there might be also an earlier Hercules of Tyre, who set on foot their trade on the Red Sea in the days of David or Solomon.

XLVIII. Tatian, in his book against the Greeks, relates, that amongst the Phœnicians flourished three ancient historians,

[a] Canaan. l. 1. c. 39.
[b] Philostratus in vitâ Apollonii, l. 5. c. 5.
[c] Arnob. l. 1.
[d] Bochart. in Canaan. l. 1. c. 24.
[e] Oros. l. 5. c. 15. Florus, l. 3. c. 1. Sallust. in Jugurtha.

§ XLVII.

(1) Lib. 3. c. 6. (2) Diod. Sic. lib. 15. c. 9. p. 462. (3) Contr. Ap. lib. 1. c 18.

CHAPTER FIRST.

"Theodotus, Hyſicrates and Moclius: who all of them delivered "in their hiſtories, tranſlated into Greek by Lætus, under "which of the kings happened the rapture of Europa; the "voyage of Menelaus into Phœnicia; and the league and friend-"ſhip between Solomon and Hiram, when Hiram gave his "daughter to Solomon, and furniſhed him with timber for build-"ing the temple: and that the ſame is affirmed by Menander of "Pergamus." Joſephus [a] lets us know, that the annals of the Tyrians, from the days of Abibalus and Hiram, kings of Tyre, were extant in his days; and that Menander of Pergamus (1) tranſlated them into Greek; and that Hiram's friendſhip to Solomon, and aſſiſtance in building the temple, was mentioned in them; and that the temple was founded in the eleventh year of Hiram (2): and by the teſtimony of Menander and the ancient Phœnician hiſtorians, the rapture of Europa, and by conſequence the coming of her brother Cadmus into Greece, happened within the time of the reigns of the kings of Tyre delivered in theſe hiſtories; and therefore not before the reign of Abibalus, the firſt of them, nor before the reign of king David his contemporary. The voyage of Menelaus might be after the deſtruction of Troy. Solomon therefore reigned in the times between the raptures of Europa and Helena; and Europa and her brother Cadmus flouriſhed in the days of David. Minos, the ſon of Europa (3), flouriſhed in the reign of Solomon, and part of the reign of Rehoboam (4): and the children of Minos, namely, Androgeus his eldeſt ſon, Deucalion his youngeſt ſon (5) and one of the Argonauts (6), Ariadne the miſtreſs of Theſeus and Bacchus, and Phædra the wife of Theſeus; flouriſhed in the latter end of Solomon, and in the reigns of Rehoboam, Abijah and Aſa: and Idomeneus the grandſon of Minos (5), was at the war of Troy: and Hiram ſucceeded his father Abibalus, in the three and

[a] Antiq. l. 8. c. 2, 5. & l. 9. c. 14.

§ XLVIII.

(1) Of Epheſus. Contr. Ap. lib. 1. c. 18.
(2) In the 12th year of Hiram. Contr. Ap. lib. 1. c. 18.
(3) Apollodor. lib. 3. c. 1. § 1. (4) Vide § XLIV.
(5) Homer. Od. T. 178. (6) Hyginus. Fab. 14.

(7) HIRAM ſeems to have been reigning at Tyre, when David took Jeruſalem from the Jebuſites, or very ſoon after. See 2 Sam. v. 11, and 1 Chron. xiv. 1, and Joſeph. lib. 7. c. 3. § II. It

and twentieth year of David (7): and Abibalus might found the kingdom of Tyre about ſixteen or eighteen years before, when Zidon was taken by the Philiſtims; and the Zidonians fled from thence, under the conduct of Cadmus and other commanders, to ſeek new ſeats. Thus by the annals of Tyre, and the ancient Phœnician hiſtorians who followed them, Abibalus, Alymnus, Cadmus, and Europa, fled from Zidon about the ſixteenth year of David's reign: and the Argonautic expedition being later by about three generations, will be about three hundred years later than where the Greeks have placed it. GREEKS.

XLIX. After navigation in long ſhips with ſails, and one order of oars, had been propagated from Egypt to Phœnicia and Greece, and thereby the Zidonians had extended their trade to Greece, and carried it on about an hundred and fifty years; and then the Tyrians being driven from the Red Sea by the Edomites, had begun a new trade on the Mediterranean with Spain, Afric, Britain, and other remote nations; they carried it on about an hundred and ſixty years; and then the Corinthians began to improve navigation, by building bigger ſhips with three orders of oars, called Triremes. For [a] Thucydides tells us, that the Corinthians were the firſt of the Greeks who built ſuch ſhips, and that a ſhip-carpenter of Corinth went thence to Samos, about 300 years before the end of the Peloponneſian war, and built alſo four ſhips for the Samians; and that 260 years before the end of that war, that is, about the 29th olympiad, there was a fight at ſea between the Corinthians and the Corcyreans, which was the oldeſt ſea-fight mentioned in hiſtory. Thucydides tells us further, that the firſt colony which the Greeks ſent into Sicily came from Chalcis in Eubœa, under the conduct of Thucles, and built Naxus (1); and the next year Archias came from Corinth with a colony, and built Syracuſe (1); and that Lamis

[a] Thucyd. l. 1. c. 13.

It is difficult to reconcile with this what Joſephus affirms, that the Temple was built in the 12th of Hiram. The Temple was begun in the 4th, and finiſhed in the 11th year of Solomon, 1 Kings vi. 1, and 37, 38. Go back eleven years from the earlieſt of theſe two dates; you will get no higher than the 32d of David.

§ XLIX.

(1) Thucydid. lib. 6. c. 3.

CHAPTER FIRST.

came about the ſame time into Sicily, with a colony from Megara and Achaia, and lived firſt at Trotilum, and then at Leontini, and died at Thapſus near Syracuſe; and that after his death this colony was invited by Hyblo to Megara in Sicily, and lived there 245 years, and was then expelled by Gelo king of Sicily (2). Now Gelo flouriſhed about 78 years before the end of the Peloponneſian war (3): count backwards the 78 and the 245 years, and about 12 years more for the reign of Lamis in Sicily, and the reckoning will place the building of Syracuſe about 335 years before the end of the Peloponneſian war, or in the tenth olympiad; and about that time Euſebius and others place it: but it might be twenty or thirty years later, the antiquities of thoſe days having been raiſed more or leſs by the Greeks. From the colonies henceforward ſent into Italy and Sicily came the name of *Græcia magna.*

L. Thucydides tells us further, that the Greeks began to come into Sicily almoſt 300 years after the Siculi had invaded that iſland with an army out of Italy (1): ſuppoſe it 280 years after, and the building of Syracuſe 310 years before the end of the Peloponneſian war; and that invaſion of Sicily by the Siculi will be 590 years before the end of that war, that is, in the 27th (2) year of Solomon's reign, or thereabout. Hellanicus [a] tells us, that it was in the third generation before the Trojan war; and in the 26th year of the prieſthood of Alcinoe, prieſteſs of Juno Argiva: and Philiſtius of Syracuſe, that it was 80 years before the Trojan war (3). Whence it follows, that the Trojan war and Argonautic expedition were later than the days of Solomon and Rehoboam, and could not be much earlier than where we have placed them.

[a] Apud Dionyſ. l. 1. c. 22. p. 18.

LI.

(1) Thucyd. l. 6. c. 4.

(2) For it is certain, that Gelo was reigning at Syracuſe at the time of Xerxes's invaſion of Greece. Herodot. lib. 7. c. 153—157. Pauſanias, lib. 8. c. 42.

§ L.

(1) Thucydid. lib. 6. c. 2.

(2) The 21ſt, if the death of Solomon be rightly placed by Petavius in the year of the Julian period 3739.

(3) Dionyſius Halicarnaſſenſis ſays, that Thucydides makes the ſettlement of the Siculi in Sicily many years later than the Trojan war. But Thucydides gives no ſuch opinion, otherwiſe than

LI. The kingdom of Macedon [a] was founded by Caranus and Perdiccas, who being of the race of Temenus king of Argos, fled from Argos in the reign of Phidon the brother of Caranus (1). Temenus was one of the three brothers who led the Heraclides into Peloponneſus, and ſhared the conqueſt among themſelves: he obtained Argos; and after him, and his ſon Ciſus, the kingdom of Argos became divided among the poſterity of Temenus (2), until Phidon reunited it (3), expelling his kindred. Phidon grew potent, appointing weights and meaſures in Peloponneſus, and coined ſilver money (3); and removing the Piſæans and Eleans, preſided in the olympic games (3); but was ſoon after ſubdued by the Eleans and Spartans (3). Herodotus [b] reckons that Perdiccas was the firſt king of Macedon; later writers, as Livy (4), Pauſanias, and Suidas, make Caranus the firſt king: Juſtin calls Perdiccas the ſucceſſor of Caranus (5); and Solinus ſaith that Perdiccas ſucceeded Caranus; and was the firſt that obtained the name of king. It is probable that Caranus and Perdiccas were contemporaries (6), and fled about the ſame time from Phidon, and at firſt erected ſmall principalities in Macedonia, which, after the death of Caranus, became one under Perdiccas. Herodotus [c] tells us, that after Perdiccas reigned Araeus, or Argæus, Philip, Æropus, Alcetas, Amyntas, and Alexander, ſucceſſively. Alexander was contemporary to Xerxes king of Perſia, and died an. 4. olymp. 79 (7), and was ſucceeded by Perdiccas (7), and he by his ſon Archelaus (7): and Thucydides [d] tells us, that there were eight kings of Macedon before this Archelaus: now by reckoning above forty years a-piece to theſe kings, chronologers have made Phidon (8) and Caranus older

GREEKS.

[a] Herod. l. 8. c. 137.

[b] Herod. l. 8. c. 137.

[c] Herod. l. 8. c. 139.

[d] Thucyd. l. 2. c. 100.

than as it may ſeem to be implied, in his ſpeaking of the ſettlement of the Elymi, fugitives from Troy, before he mentions that of the Siculi: and, as Dionyſius would imagine, in his making this ſettlement only 300 years older than the firſt ſettlement of Greeks in Sicily; which, according to the old chronology, was above 400 years after the Trojan war. See Thucydid. lib. 6. c. 2.

§ LI.

(1) Euſeb. Exc. Gr. p. 45. (2) Pauſan. lib. 2. c. 19 and 26.

(3) Ephorus apud Strabonem, lib. 8. p. 358. (4) Lib. 45. c. 9. (5) Lib. 7. c. 2.

(6) Euſebius (in Chron.) makes Perdiccas the fourth in ſucceſſion from Caranus, and aſſigns long reigns to the preceding princes.

(7) Euſebius in Chron.

(8) Euſebius indeed makes Phidon, the inventor of weights and meaſures, older than the

CHAPTER FIRST.

older than the olympiads; whereas if we ſhould reckon their reigns at about 18 or 20 years a-piece one with another, the firſt ſeven reigns counted backwards from the death of this Alexander, will place the dominion of Phidon, and the beginning of the kingdom of Macedon under Perdiccas and Caranus, upon the 46th or 47th olympiad, or thereabout. It could ſcarce be earlier, becauſe Leocedes the ſon of Phidon, and Megacles the ſon of Alcmæon, at one and the ſame time courted Agariſta, the daughter of Cliſthenes king of Sicyon, as Herodotus [a] tells us; and the Amphictyons, by the advice of Solon, made Alcmæon (9), and Cliſthenes (10), and Eurolycus king of Theſſaly, commanders of their army, in their war againſt Cirrha; and the Cirrheans were conquered an. 2. olymp. 47. according to the marbles. Phidon therefore and his brother Caranus were contemporary to Solon, Alcmæon, Cliſthenes, and Eurolycus, and flouriſhed about the 48th and 49th olympiads. They were alſo contemporary in their later days to Crœſus; for Solon converſed with Crœſus, and Alcmæon entertained and conducted the meſſengers whom Crœſus ſent to conſult the oracle at Delphi (11), an. 1. olymp. 56. according to the marbles, and was ſent for by Crœſus, and rewarded with much riches.

[a] Herod. l. 6. c. 127.

LII. But the times ſet down in the marbles before the Perſian empire began, being collected by reckoning the reigns of kings equipollent to generations, and three generations to an hundred years or above; and the reigns of kings, one with another, being ſhorter in the proportion of about four to ſeven; the chronology ſet down in the marbles, until the conqueſt of Media by Cyrus, an. 4. olymp. 60. will approach the truth much nearer, by ſhortening the times before that conqueſt in the proportion of four to ſeven. So the Cirrheans were conquered an. 2. olymp.

olympiads: but this was not the opinion of Ephorus and Herodotus, who make this Phidon the ſame with him who uſurped the management of the Olympic Games. Strabo, p. 358. Herodot. lib. 6. c. 127.

(9) Plutarch in Solone. Tom. I. p. 84. (10) Pauſanias, lib. 10. c. 37.

(11) Herodot. lib. 6. c. 125.

§ LIII.

(1) I know not what authority there is for this Tripod. The wild olive-crown was firſt uſed in

olymp. 47. according to the marbles, that is 54 years before the conqueſt of Media; and theſe years being ſhortened in the proportion of four to ſeven, become 31 years; which ſubducted from an. 4. olymp. 60. place the conqueſt of Cirrha upon an. 1. olymp. 53: and, by the like correction of the marbles, Alcmæon entertained and conducted the meſſengers whom Crœſus ſent to conſult the oracle at Delphi, an. 1. olymp. 58; that is, four years before the conqueſt of Sardes by Cyrus: and the tyranny of Piſiſtratus, which by the marbles began at Athens, an. 4. olymp. 54. by the like correction began an. 3. olymp. 57; and by conſequence Solon died an. 4. olymp. 57. This method may be uſed alone, where other arguments are wanting; but where they are not wanting, the beſt arguments are to be preferred.

LIII. Iphitus [a] preſided both in the temple of Jupiter Olympus, and in the olympic games, and ſo did his ſucceſſors till the 26th olympiad; and ſo long the victors were rewarded with a Tripos (1): but then the Piſæans getting above the Eleans, began to preſide, and rewarded the victors with a crown, and inſtituted the Cornea to Apollo (2); and continued to preſide till Phidon interrupted them, that is, till about the time of the 49th olympiad: for [b] in the 48th olympiad the Eleans entered the country of the Piſæans, ſuſpecting their deſigns, but were prevailed upon to return home quietly; afterwards the Piſæans confederated with ſeveral other Greek nations, and made war upon the Eleans, and in the end were beaten: in this war I conceive it was that Phidon preſided, ſuppoſe in the 49th olympiad; for [c] in the 50th olympiad, for putting an end to the contentions between the kings about preſiding, two men were choſen by lot out of the city Elis to preſide, and their number in the 65th olympiad was increaſed to nine, and afterwards to ten; and

[a] Strabo, l. 8. p. 355.

[b] Pauſan. l. 6. c. 22.

[c] Pauſan. l. 5. c. 9.

in the 7th olympiad by the injunction of the Delphic oracle, if the authority of Phlegon Trallianus may be relied on. Mr. Weſt imagines that the prize before this was a lamb. (See his Diſſertation on the Olympic Games, § XVI.) From the third olympic ode of Pindar it ſhould ſeem, that the wild olive-crown was one of the original inſtitutions of Hercules. And this is confirmed by Pauſanias, lib. 5. c. 7.

(2) The Carnea was a Spartan feſtival inſtituted in the 26th olympiad. Vide Meurſii Græc. Feriat.

CHAPTER FIRST.

theſe judges were called Hellenodicæ, judges for or in the name of Greece (3). Pauſanias tells us, that the Eleans called in Phidon and together with him celebrated the 8th olympiad (4); he ſhould have ſaid the 49th olympiad: but Herodotus tells us, that Phidon removed the Eleans (5); and both might be true: the Eleans might call in Phidon againſt the Piſæans, and upon overcoming be refuſed preſiding in the olympic games by Phidon, and confederate with the Spartans, and by their aſſiſtance overthrow the kingdom of Phidon, and recover their ancient right of preſiding in the games.

[a] Strabo, l. 8. p. 358.

LIV. Strabo [a] tells us, that Phidon was the tenth from Temenus; not the tenth king, for between Ciſus and Phidon they reigned not, but the tenth from father to ſon, including Temenus. If 27 years be reckoned to a generation by the eldeſt ſons, the nine intervals will amount unto 243 years, which counted back from the 48th olympiad, in which Phidon flouriſhed, will place the return of the Heraclides about fifty years before the beginning of the olympiads, as above. But chronologers reckon about 515 years from the return of the Heraclides to the 48th olympiad, and account Phidon the ſeventh from Temenus (1); which is after the rate of 85 years to a generation, and therefore not to be admitted.

LV. Cyrus took Babylon, according to Ptolemy's canon, nine years before his death, an. Nabonaſſ. 206, an. 2. olymp. 60: and he took Sardes a little after, namely, an. 1. olymp. 59. as Scaliger collects from Soſicrates (1): Crœſus was then king of

(3) Πιλικοση δε ολυμπιαδι ανδρασι δυο, εξ απαντων λαχεσιν Ηλειων, επιβαπη ποιησαι τα ολυμπια· και ετι πλειον απ' εκεινου διηγουν των αγωνοθετων ο αριθμος των β. Πεμπτη δε Ολυμπιαδι και εικοση επικα Ελλανοδικας καθισταν. Pauſan. lib. 5. c. 6. Either by this 25th olympiad muſt be underſtood the 25th from the firſt inſtitution of the two Hellanodics; in which ſenſe Mr. Weſt ſeems to have taken the expreſſion; for he ſays, that in the 75th olympiad the number was increaſed to nine; or the paſſage muſt be corrupt, and for εικοση we ſhould read εξηκοστη; which ſeems to have been Sir Iſaac Newton's opinion.

(4) Lib. 6. c. 22. (5) Lib. 6. c. 127.

§ LIV.

(1) Euſeb. Exc. Gr. p. 45.

§ LV.

[a] As cited by Diogenes Laertius in Periander. Lib. I. ſegm. 95. See Scaliger animadv. in Euſebii Chron. ad annum MCCCCLXIX.

Sardes.

Sardes, and reigned fourteen years (2), and therefore began to reign an. 3. olymp. 55. After Solon had made laws for the Athenians, he obliged them upon oath to obſerve thoſe laws till he returned from his travels (3); and then travelled ten years, going to Egypt and Cyprus (4), and viſiting Thales of Miletus: and upon his return to Athens, Piſiſtratus began to affect the tyranny of that city, which made Solon travel a ſecond time (5); and now (6) he was invited (7) by Crœſus to Sardes; and Crœſus, before Solon viſited him, had ſubdued all Aſia Minor, as far as to the river Halys (8); and therefore he received that viſit towards the latter part of his reign; and we may place it upon the ninth year thereof, an. 3. olymp. 57: and the legiſlature of Solon twelve years earlier, an. 3. olymp. 54: and that of Draco ſtill ten years earlier (9), an. 1. olymp. 52. After Solon had viſited Crœſus, he went into Cilicia and ſome other places (10), and died [a] in his travels (11): and this was in the ſecond year of the tyranny of Piſiſtratus. Comias was archon when Solon returned from his firſt travels to Athens; and the next year Hegeſtratus was archon (12), and Solon died before the end of the year, an. 3. olymp. 57. as above: and by this reckoning the objection of Plutarch above-mentioned is removed.

[a] Phanias Eph. ap. Plut. in vita Solonis.

LVI. We have now ſhewed that the Phœnicians of Zidon, under the conduct of Cadmus and other captains, flying from their enemies, came into Greece, with letters and other arts, about the ſixteenth year of king David's reign; that Europa the ſiſter of Cadmus fled ſome days before him from Zidon and came to Crete, and there became the mother of Minos about the 18th

(2) Euſeb. in Chron. (3) Plutarch in Solone, Tom. I. p. 92. Herodot. lib. 1. c. 29.
(4) Plutarch, ibid. Herodot. ibid. et lib. 5. c. 113.
(5) Diog. Laert. lib. 1. ſegm. 50. Meurſius. Solon, c. 28.
(6) Meurſius, ibid. (7) Plutarch. in Solone, Tom. I. p. 93.
(8) Herodot. lib. 1. c. 28.
(9) Clemens Alexandrinus (Strom. lib. 1. c. 16.) and Euſebius (in Chron.) place the legiſlation of Draco in the 39th olympiad. And Ulpian, in his commentary upon Demoſthenes's oration againſt Timocrates, aſſerts, upon the authority of Diodorus, that Draco was earlier than Solon by 47 years. Vid. Demoſt. edit. Wolf. p. 828. Tzetzes (Chil. 5. 5.) reckons only ſeven years between Draco and Solon.
(10) Diog. Laert. lib. 1. ſegm. 51. Vid. Meurſium in Solon. c. 26.
(11) Diogenes Laertius (lib. 1. ſegm. 62.) ſays that he died in Cyprus. Plutarch (in Solone) and Ælian (Var. Hiſt. lib. 8. c. 16.) ſay that he died at Athens.
(12) Plutarch in Solon. towards the end.

or

CHAPTER FIRST.

or 20th year of David's reign; that Seſoſtris and the great Bacchus, and by conſequence alſo Oſiris, were one and the ſame king of Egypt with Seſac, and came out of Egypt in the fifth year of Rehoboam to invade the nations, and died 25 years after Solomon; that the Argonautic expedition was about 43 years after the death of Solomon; that Troy was taken about 76 or 78 years after the death of Solomon; that the Phœnicians of Tyre were driven from the Red Sea by the Edomites, about 87 years after the death of Solomon, and within two or three years began to make long voyages upon the Mediterranean, ſailing to Spain, and beyond, under a commander whom, for his induſtry, conduct, and diſcoveries, they honoured with the names of Melcartus and Hercules; that the return of the Heraclides into Peloponneſus was about 158 years after the death of Solomon; that Lycurgus the legiſlator reigned at Sparta, and gave the three diſcs to the olympic treaſury, an. 1. olymp. 18. or 273 years after the death of Solomon, the *Quinquertium* being at that time added to the olympic games; that the Greeks began ſoon after to build Triremes, and to ſend colonies into Sicily and Italy, which gave the name of *Græcia magna* to thoſe countries; that the firſt Meſſenian war ended about 350 years after the death of Solomon, an. 1. olymp. 37; that Phidon was contemporary to Solon, and preſided in the olympic games in the 49th olympiad, that is, 397 years after the death of Solomon; that Draco was archon, and made his laws, an. 1. olymp. 52; and Solon, an. 3. olymp. 54; and that Solon viſited Crœſus an. 3. olymp. 57. or 433 years after the death of Solomon; and Sardes was taken by Cyrus 438 years, and Babylon by Cyrus 443 years, and Ecbatane by Cyrus 445 years after the death of Solomon: and theſe periods being ſettled, they become a foundation for building the chronology of the antient times upon them; and nothing more remains for ſettling ſuch a chronology, than to make theſe periods a little exacter, if it can be, and to ſhew how

§ LVII.

(1) See § XLIV. (2) Euſeb. in Chron.

(3) The archons for life were 13, of whom Medon was the firſt, and Alcmæon the laſt. See Euſeb. Exc. Gr. p. 134 and 151, and Meurſius de Archont. Athenienſi, lib. 1. c. 1.

how the reſt of the antiquities of Greece, Egypt, Aſſyria, Chaldæa, and Media, may ſuit therewith. GREEKS.

LVII. Whilſt Bacchus made his expedition into India, Theſeus left Ariadne in the iſland Naxus or Dia, as above, and ſucceeded his father Ægeus at Athens; and upon the return of Bacchus from India, Ariadne became his miſtreſs, and accompanied him in his triumphs (1); and this was about ten years after the death of Solomon: and from that time reigned eight kings in Athens, viz. Theſeus, Meneſtheus, Demophoon, Oxyntes, Aphidas, Thymætes, Melanthus, and Codrus (2); theſe kings, at 19 years a-piece one with another, might take up about 152 years, and end about 44 years before the olympiads. Then reigned twelve archons for life (3), which at 14 or 15 years a-piece, the ſtate being unſtable, might take up about 174 years, and end an. 2. olymp. 33. Then reigned ſeven (4) decennial archons, which are uſually reckoned at ſeventy years; but ſome of them dying in their regency, they might not take up above forty years, and ſo end about an. 2. olymp. 43. about which time began the ſecond Meſſenian war: theſe decennial archons were followed by the annual archons (5), amongſt whom were the legiſlators Draco and Solon. Soon after the death of Codrus, his ſecond ſon Neleus, not bearing the reign of his lame brother Medon at Athens, retired into Aſia, and was followed by his younger brothers Androcles and Cyaretus, and many others (6). Theſe had the name of Ionians, from Ion the ſon of Xuthus, who commanded the army of the Athenians at the death of Erechtheus (7), and gave the name of Ionia to the country which they invaded: and about 20 or 25 years after the death of Codrus, theſe new colonies, being now lords of Ionia, ſet up over themſelves a common-council called Panionium, and compoſed of counſellors ſent from twelve of their cities; Miletus, Myus, Priene, Epheſus, Colophon, Lebedus, Teos, Clazomenæ, Phocæa, Samos, Chios, and Erythræa (8): and this was the Ionic migration.

(4) Euſeb. Exc. Gr. p. 151. (5) ——— p. 155.

(6) Pauſanias, lib. 7. c. 2.

(7) Herodot. lib. 7. c. 94. and lib. 8. c. 44. and Pauſanias, lib. 2. c. 14.

(8) Herodot. lib. 1. c. 143—149.

CHAPTER FIRST.

Vid. Dionyſ. Halicarnaſſ. L. 1. p. 44, 45.

LVIII. When the Greeks and Latines were forming their technical chronology, there were great diſputes about the antiquity of Rome: the Greeks made it much older than the olympiads: ſome of them ſaid it was built by Æneas; others by Romus, the ſon or grandſon of Æneas; others by Romus, the ſon or grandſon of Latinus king of the Aborigines; others, by Romus the ſon of Ulyſſes, or of Aſcanius, or of Italus: and ſome of the Latines at firſt fell in with the opinion of the Greeks, ſaying that it was built by Romulus, the ſon or grandſon of Æneas. Timæus Siculus repreſented it built by Romulus, the grandſon of Æneas, above an hundred years before the olympiads (1); and ſo did Nævius the poet, who was twenty years older than Ennius, and ſerved in the firſt Punic war, and wrote the hiſtory of that war. Hitherto nothing certain was agreed upon; but about 140 or 150 years after the death of Alexander the Great, they began to ſay that Rome was built a ſecond time by Romulus, in the fifteenth age after the deſtruction of Troy: by ages they meant reigns of the kings of the Latines at Alba, and reckoned the firſt fourteen reigns at about 432 years (2), and the following reigns of the ſeven kings of Rome at 244 years (3); both which numbers made up the time of about 676 years from the taking of Troy, according to theſe chronologers; but are much too long for the courſe of nature: and by this reckoning they placed the building of Rome upon the ſixth or ſeventh olympiad. Varro placed it on the firſt year of the ſeventh olympiad, and was therein generally followed by the Romans. But this can ſcarce be reconciled to the courſe of nature: for I do not meet with any inſtance in all hiſtory, ſince chronology was certain, wherein ſeven kings, moſt of whom were ſlain, reigned 244 years in continual ſucceſſion. The fourteen reigns of the

§ LVIII.

(1) In the 38th year before the olympiads. Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 74, p. 60.

(2) Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 71, p. 57. (3) Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 75, p. 61.

(4) The return of the Heraclidæ preceded the olympiads, according to our author's ſyſtem, 46 years (ſee § X.) And upon this ſuppoſition the taking of Troy, which was ſtill 80 years earlier than the return of the Heraclidæ, preceded the olympiads 126 years. Therefore 280 years counted from the taking of Troy, end in the 39th olympiad, upon our author's principles.

(5) For the Regifuge was in the 1ſt year of the 68th olymp. Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 74. p. 61.

§ LIX.

(1) See § XIX. note 1. (2) Apollodor. lib. 1. c. 1. § I.

kings

kings of the Latines, at twenty years a-piece one with another, GREEK. amount unto 280 years; and theſe years, counted from the taking of Troy, end in the 38th olympiad (4). And the ſeven reigns of the kings of Rome, four or five of them being ſlain and one depoſed, may at a moderate reckoning amount to fifteen or ſixteen years apiece one with another: let them be reckoned at ſeventeen years a-piece, and they will amount unto 119 years; which being counted backwards from the Regifuge, end alſo in the 38th olympiad (5): and by theſe two reckonings Rome was built in the 38th olympiad, or thereabout. The 280 years and the 119 years together make up 399 years; and the ſame number of years ariſes by counting the twenty and one reigns at nineteen years a-piece: and this being the whole time between the taking of Troy and the Regifuge, let theſe years be counted backward from the Regifuge, an. 1. olymp. 68. and they will place the taking of Troy about 74 years after the death of Solomon.

LIX. When Seſoſtris returned from Thrace into Egypt, he left Æetes with part of his army in Colchis, to guard that paſs (1); and Phryxus and his ſiſter Helle fled from Ino (2), the daughter of Cadmus (3), to Æetes ſoon after, in a ſhip whoſe enſign was a golden ram (4). Ino was therefore alive in the fourteenth year of Rehoboam, the year in which Seſoſtris returned into Egypt (5); and by conſequence her father Cadmus flouriſhed in the reign of David, and not before. Cadmus was the father of Polydorus (6), the father of Labdacus (7), the father of Laius (7), the father of Oedipus (8), the father of Eteocles and Polynices (9) who ſlew one another in their youth, in the war of the ſeven captains at Thebes (10), about ten or twelve years after the Argonautic expedition (11): and Therſander, the ſon of Polynices, warred at Troy (12). Theſe generations being by the

(3) Apollodor. lib. 3. c. 4. § II. (4) Diod. Sic. lib. 4. 3. 47. p. 174.

(5) See § XIX. (6) Apollodor. lib. 3. c. 4. § II. (7) —— c. 5. § V.

(8) Apollodor. lib. 3. c. 5. § VII. (9) —— § IX. (10) Apollodor. lib. 3. c. 6.

(11) That the interval of time, between the Argonautic expedition and this war, could not be long is evident. For Talaüs and Oileus were Argonauts. (Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 118 and 74.) And their ſons, Adraſtus and Amphiaräus, were two of the ſeven captains. (Apollodor. lib. 3. c. 6. § VI.) And according to Apollodorus, Amphiaräus himſelf was an Argonaut.

(12) Virgil. Æn. 2. 261. Servius upon that place. Hygin. Fab. 108. Dictys Cretenſis, lib. 1. He is not in Homer's Catalogue.

CHAPTER FIRST.

eldeſt ſons who married young, if they be reckoned at about twenty and four years to a generation, will place the birth of Polydorus upon the 18th year of David's reign, or thereabout (13). And thus Cadmus might be a young man, not yet married, when he came firſt into Greece. At his firſt coming he ſailed to Rhodes; and thence to Samothrace, an iſland near Thrace on the north ſide of Lemnos; and there married Harmonia, the ſiſter of Jaſion and Dardanus (14), which gave occaſion to the Samothracian myſteries: and Polydorus might be their ſon (15), born a year or two after their coming; and his ſiſter Europa might be then a young woman, in the flower of her age. Theſe generations cannot well be ſhorter; and therefore Cadmus, and his ſon Polydorus, were not younger than we have reckoned them: nor can they be much longer, without making Polydorus too old to be born in Europe, and to be the ſon of Harmonia the ſiſter of Jaſion. Labdacus was therefore born in the end of David's reign; Laius in the 24th year of Solomon's; and Oedipus in the ſeventh of Rehoboam's, or thereabout: unleſs you had rather ſay, that Polydorus was born at Zidon, before his father came into Europe; but his name Polydorus is in the language of Greece.

LX. Polydorus married Nyctëis, the daughter of Nycteus a native of Greece; and dying young, left his kingdom and young ſon Labdacus under the adminiſtration of Nycteus. Then Epopeus king of Ægialus, afterwards called Sicyon, ſtole Antiope the daughter of Nycteus; [a] and Nycteus thereupon made war upon

[a] Pauſan. l. 2. c. 6.

(13) At 24 years to a generation, the birth of Polydorus muſt have been 144 years earlier than the taking of Troy; therefore 270 years before the olympiads, according to our author's ſyſtem. (§ LVIII. note 4.) The olympiads began in the year of the Julian period 3938. Therefore Polydorus was born in the year of the Julian period 3668; which, according to Petavius, was the 9th of David's reign the year in which he took Jeruſalem.

(14) Diod. Sic. lib. 5. c. 48. p. 223. (15) Apollodor. lib. 3. c. 4. § II.

§ LX.

(1) Apollodor. lib. 3. c. 5. § V.
(2) Apollodor. lib. 3. c. 5. § VI.
(3) Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 156, with the Scholiaſt on the place.
(4) Pindar. Olymp. 1. lin. 144, with the Scholiaſt on the place.

(5) EUSTATHIUS, upon Il. A. lin. 7, affirms, that Heſiod among others made Agamemnon the ſon of Pleiſthenes. This Pleiſthenes the ſcholiaſt on the Oreſtes of Euripides makes the ſon of Atreus; and ſays, that Pleiſthenes dying young left his three children, Agamemnon, Menelaus,

upon him, and in a battle wherein Nycteus overcame, both were wounded, and died ſoon after. Nycteus left the tuition of Labdacus, and adminiſtration of the kingdom, to his brother Lycus; and Epopeus, or, as Hyginus [a] calls him, Epaphus the Sicyonian, left his kingdom to Lamedon, who preſently ended the war, by ſending home Antiope: and ſhe, in returning home, brought forth Amphion and Zethus. Labdacus being grown up, received the kingdom from Lycus; and ſoon after dying, left it again to his adminiſtration, for his young ſon Laius (1). When Amphion and Zethus were about ſeventy years old, at the inſtigation of their mother Antiope, they killed Lycus (1), and made Laius flee to Pelops (1), and ſeized the city Thebes, and compaſſed it with a wall (1); and Amphion married Niobe the ſiſter of Pelops (2), and by her had ſeveral children; amongſt whom was Chloris (2), the mother of Periclymenus the Argonaut (3). Pelops was the father of Pliſthenes, Atreus, and Thyeſtes (4); and Agamemnon and Menelaus, the adopted ſons of Atreus (5), warred at Troy. Ægiſthus, the ſon of Thyeſtes (6), ſlew Agamemnon the year after the taking of Troy; and Atreus died juſt before Paris ſtole Helena; which, according [b] to Homer, was twenty years before the taking of Troy. Deucalion the ſon of Minos, [c] was an Argonaut; and Talus, another ſon of Minos (7), was ſlain by the Argonauts; and Idomeneus and Meriones, the grandſons of Minos, were at the Trojan war. All theſe things confirm the ages of Cadmus and Europa, and their poſterity, above aſſigned, and place the death of Epopeus or Epaphus king of Sicyon, and birth of Amphion and Zethus, upon the tenth year of Solomon; and the taking of Thebes by Amphion and

[a] Hygin. Fab. 7 & 8.

[b] Homer. Iliad. Ω. lin. 765.

[c] Hygin. Fab. 14.

GREEKS.

laus, and Anaxibia, to his father. Apollodorus (lib. 3. c. 2. § II.) makes Agamemnon and Menelaus the ſons of Pleiſthenes by Æerope. And the ſcholiaſt on Sophocles Ajax, lin. 1314, agrees with Apollodorus in making Pleiſthenes the huſband of Agamemnon's mother. If the learned reader is inclined to enter more deeply into this dark queſtion, he may conſult Meziriac on the 8th of Ovid's Epiſtles.

(6) Θυεστιάδης Αιγισθος. Homer. Od. Δ. 518.

(7) TALUS was a brazen man, according to Apollonius (lib. 4. lin. 1638) one that remained of the brazen age: according to Apollodorus (lib. 1. c. 9. § XXVI.) a preſent from Vulcan to Minos. But Lucian calls him the ſon of Minos (Philopſeud. § XIX.) And Plato ſays, that Talus bore the ſame office under Minos in the reſt of Crete, that Rhadamanthus bore in the Capitol. He was Minos's judge of Aſſize, and went a circuit through the towns of Crete three times in the year, carrying about with him the laws engraven on tables of braſs. Hence the fable that he was a brazen man. Plato in Min. p. 568.

Zethus,

CHAPTER FIRST.

Zethus, and the flight of Laius to Pelops upon the thirtieth year of that king, or thereabout. Amphion might marry the ſiſter of Pelops the ſame year, and Pelops come into Greece three or four years before that flight, or about the 26th year of Solomon.

LXI. In the days of Erechtheus king of Athens (1), and Celus king of Eleuſis (2), Ceres came into Attica; and educated Tripolemus the ſon of Celeus, and taught him to ſow corn. She [a] lay with Jaſion, or Jaſius, the brother of Harmonia the wife of Cadmus; and preſently after her death Erechtheus was ſlain, in a war between the Athenians and Eleuſinians; and, for the benefaction of bringing tillage into Greece, the Eleuſian Sacra were inſtituted to her [b] with Egyptian ceremonies, by Celeus and Eumolpus (3); and a ſepulchre or temple was erected to her in Eleuſine, and in this temple the families of Celeus and Eumolpus became her prieſts: and this temple, and that which Eurydice erected to her daughter Danaë, by the name of Juno Argiva, are the firſt inſtances that I meet with in Greece of deifying the dead, with temples, and ſacred rites, and ſacrifices, and initiations, and a ſucceſſion of prieſts to perform them. Now by this hiſtory it is manifeſt that Erechtheus, Celeus, Eumolpus, Ceres, Jaſius, Cadmus, Harmonia, Aſterius (4), and Dardanus the brother of Jaſius, and one of the founders of the kingdom of Troy, were all contemporary to one another, and flouriſhed in their youth, when Cadmus came firſt into Europe. Erechtheus could not be much older, becauſe his daughter Procris converſed with Minos king of Crete (5); and his grandſon Theſpis (6) had fifty daughters, who lay with Hercules; and his daughter

[a] Homer. Odyſ. E. lin. 125. Diodor. l. 5. p. 223 & 237 *.

[b] Diodor. l. 1. p. 17.

§ LXI.

(1) Diod. Sic. lib. 1. c. 29. p. 17. (2) Apollodor. lib. 1. c. 5. § I & II.
(3) Homer. Hymn. in Cerer. apud Pauſan. lib. 2. c. 14.
(4) The huſband of Europa. Apollodor. lib. 3. c. 1. § II.
(5) Apollodor. lib. 3. c. 14. § I.
(6) Read Theſpius, or Theſtius. Diodorus calls him the ſon of Erectheus. He was king of Theſpia, Diod. Sic. lib. 4. c. 29. p. 163. Apollodor. lib. 2. c. 4. § X. Pauſan. lib. 9. c. 26 & 28.
(7) Apollodor. lib. 3. c. 14. § I and II. Orph. Argonaut. lin. 216—220. Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 211—215.
(8) PANDION is called by Euſebius the ſon of Erectheus: but he was the grandſon of Erectheus and the ſon of Cecrops. Upon what authority Sir Iſaac Newton affirms that he depoſed Cecrops, I know

daughter Orithyia was the mother of Calais and Zetes (7), two of the Argonauts in their youth; and his ſon Orneus [a] was the father of Peteos, the father of Meneſtheus, who warred at Troy: nor much younger, becauſe his ſecond ſon (8) Pandion, who with the Metionidæ depoſed his elder brother Cecrops, was the father of Ægeus, the father of Theſeus; and Metion, another of his ſons (9), was the father of Eupalamus, the father of Dædalus (10), who was older than Theſeus; and his daughter Creüſa married Xuthus, the ſon of Hellen, and by him had two ſons, Achæus and Ion (11); and Ion commanded the army of the Athenians againſt the Eleuſians, in the battle in which his grandfather Erechtheus was ſlain: and this was juſt before the inſtitution of the Eleuſinia Sacra, and before the reign of Pandion the father of Ægeus. Erechtheus being an Egyptian, procured corn from Egypt, and for that benefaction was made king of Athens (12); and near the beginning of his reign Ceres came into Attica from Sicily, in queſt of her daughter Proſerpina (12). We cannot err much, if we make Hellen contemporary to the reign of Saul, and to that of David at Hebron; and place the beginning of the reign of Erechtheus in the 25th year, the coming of Ceres into Attica in the 30th year, and the diſperſion of corn by Triptolemus about the 40th year of David's reign; and the death of Ceres and Erechtheneus, and inſtitution of the Eleuſinia Sacra, between the tenth and fifteenth year of Solomon.

[a] Pauſan. l. 2. c. 25.

LXII. Teucer, Dardanus, Erichthonius, Tros, Ilus, Laomedon, and Priamus, reigned ſucceſſively at Troy (1); and their reigns, at about twenty years a-piece with one another, amount unto an hundred and forty years: which counted back from the taking of Troy, place the beginning of the reign of Teucer about the fifteenth year of the reign of king David; and that of Darda-

I know not. He was himſelf depoſed by the Metionidæ, and fled to Megara, Apollodor. lib. 3. c. 14. § V. Pauſan. lib. 1. c. 5. For fuller information, the learned reader may conſult Meurſius *De Regibus Athenienſium*, lib. 2. c. 14 and 15.
(9) Apollodor. lib. 3. c. 14. § 1. (10) ——— § VIII. Diod. Sic. lib. 4. c. 76. p. 192.
(11) Apollodor. lib. 1. c. 7. § II. and lib. 3. c. 14. § I.
(12) Diod. Sic. lib. 1. c. 29. p. 17.
* Add Heſiod Theogon. lin. 969.

§ LXII.

(1) Diod. Sic. lib. 4. c. 75. p. 192.

nus,

CHAPTER FIRST.

nus, in the days of Ceres; who lay with Jaſius the brother of Dardanus: whereas chronologers reckon that the laſt ſix of theſe kings reigned 296 years, which is after the rate of $49\frac{1}{3}$ years a-piece with one another; and that they began their reign in the days of Moſes. Dardanus married the daughter of Teucer, the ſon of Scamander, and ſucceeded him (1): whence Teucer was of about the ſame age with David.

LXIII. Upon the return of Seſoſtris into Egypt, his brother Danäus not only attempted his life, as above, but alſo commanded his daughters, who were fifty in number, and had married the ſons of Seſoſtris, to ſlay their huſbands (1); and then fled with his daughters from Egypt in a long ſhip of fifty oars (1). This flight was in the fourteenth year of Rehoboam (2). Danaus came firſt to Lindus, a town in Rhodes, and there built a temple, and erected a ſtatue to Minerva (1), and loſt three of his daughters by a plague which raged there (3); and then ſailed thence with the reſt of his daughters to Argos. He came to Argos therefore in the fifteenth or ſixteenth year of Rehoboam: and at length contending there with Gelanor (4) the brother of Euryſtheus for the crown of Argos, was choſen by the people, and reigned at Argos, while Euryſtheus reigned at Mycenæ; and Euryſtheus was born[a] the ſame year with Hercules. Gelanor and Euryſtheus were the ſons of Sthenelus, by Nicippe the daughter of Pelops (5); and Sthenelus was the ſon of Perſeus, and reigned at Argos; and Danaus, who ſucceeded him at Argos, was ſucceeded

[a] Apollodor. l. 2. ſect. 5.

§ LXIII.

(1) Apollodor. lib. 2. c. 1. § IV and V. Diod. Sic. lib. 5. c. 58. p. 227.

(1) § XIX. (3) Diod. Sic. lib. 5. c. 58. p. 227.

(4) Apollodor. lib. 2. c. 1. § IV and V. Pauſan. lib. 2. c. 19. p. 152. Euſeb. in Chron. lib. 1. p. 13. and lib. 2. p. 79. According to Caſtor (Euſeb Exc. Gr. p. 29) Sthenelus was the prince who was depoſed by Danäus. That Gelanor was the brother of Euryſtheus, and that the depoſition of Gelanor happened during the reign of Euryſtheus at Mycenæ, I take to be an error. See the next note.

(5) EURYSTHEUS, king of Mycenæ, was indeed the ſon of Sthenelus, the ſon of Perſeus by Nicippe the daughter of Pelops. Apollodor. lib. 2. c. 4. § V, Gelanor too was the ſon of a Sthenelus, Pauſan. lib. 2. c. 16 and 19. p. 145 and 152. But this Sthenelus, the father of Gelanor, was quite a different perſon from the father of Euryſtheus, being the ſon of Crotopus, the ſon of Agenor, the great-grandſon of Argos. Pauſan. p. 145. Euſeb. Exc. Gr. p. 29. and Chron. lib. 2. If Sir Iſaac Newton had any authority, which might outweigh that of Pauſanias in this matter, and prove Gelanor of Argos and Euryſtheus of Mycenæ to have been brothers, it is much to be regretted that he did not produce it. For this ſingular poſition, if it be a miſtake, as I think it muſt be, makes great confuſion in the chronology of the two antient kingdoms of Argos and Mycenæ.

ſucceeded there by his ſon-in-law Lynceus (6), and he by his ſon Abas (7); that Abas who is commonly, but erroneouſly, reputed the father of Acriſius and Prætus (8). In the time of the Argonautic expedition Caſtor and Pollux were beardleſs young men, and their ſiſters Helena and Clytemneſtra were children, and their wives Phœbe and Ilaira (9) were alſo very young. All theſe (10), with the Argonauts Lynceus and Idas, were the grand-children of Gorgophone, the daughter of Perſeus, the ſon of Danäe, the daughter of Acriſius and Eurydice (11); and Perieres and Oebalus, the huſbands of Gorgophone, were the ſons of Cynortes, the ſon of Amyclas, the brother of Eurydice (12). Meſtor or Maſtor, the brother of Sthenelus, married Lyſidice, another of the daughters of Pelops (13): and Pelops married Hippodamia, the daughter of Evarete, the daughter of Acriſius (14). Alcmena, the mother of Hercules, was the daughter of Electryo (15); and Sthenelus, Meſtor and Electryo, were brothers of Gorgophone, and ſons of Perſeus and Andromeda (16): and the Argonaut Æſculapius was the grandſon of Leucippus and Phlegia (17); and Leucippus was the ſon of Perieres, the grandſon of Amyclas the brother of Eurydice; and Amyclas and Eurydice were the children of Lacedæmon and Sparta (18): and Capaneus, one of the ſeven captains againſt Thebes, was the huſband of Euadne the daughter of Iphis (19), the ſon of Alector, the ſon of Anaxagoras, the ſon of Megapenthes, the ſon of Prætus the brother of Acriſius (20). Now from theſe

GREEKS.

(6) Apollodor. lib. 2. c. 2. Pauſan. lib. 2. c. 16. p. 145. (7) Euſeb. in Chron.

(8) An error however, if it be an error, countenanced by the great authorities of Pauſanias and Apollodorus. See Pauſan. p. 145. Apollodor. p. 77.

(9) Apollodor. lib. 3. c. 10. § III. (10) ——— c. 10. § III, VI, VII.

(11) Apollodor. p. 78 and 82.

(12) The deſcent of Perieres is confirmed by Apollodorus, p. 179 and 39. Pauſanias ſays, that Oebalus was a ſon of Cynortus, and the father of Tyndareus by Gorgophone (p. 204) and that Gorgophone bore children both to Perieres and Oebalus (p. 283.)

(13) Apollodor. p. 89. (14) Hygin. Fab. 84.

(15) Apollodor. p. 90. (16) Apollodor. p. 89.

(17) Read, *of Leucippus or Phlegyas*. For Æſculapius was the ſon of Coronis the daughter of Phlegyas, according to ſome; according to others of Arſinöe the daughter of Leucippus. Pauſan. p. 170, 171. Apollodor. p. 179.

(18) Apollodor. p. 196, 197. (19) ——— p. 181.

(20) Pauſan. p. 146 and 150. But between Anaxagoras and Megapenthes inſert Argeus.

CHAPTER FIRST.

generations it may be gathered that Perſeus, Perieres and Anaxagoras, were of about the ſame age with Minos, Peleus, Ægeus and Sefac; and that Acriſius, Prætus, Eurydice and Amyclas, being two little generations older, were of about the ſame age with king David and Erechtheus; and that the temple of Juno Argiva was built about the ſame time with the temple of Solomon; the ſame being built by Eurydice to her daughter Danäe, as above; or, as ſome ſay, by Piraſus or Piranthus, the ſon or ſucceſſor of Argus, and great grandſon of Phoroneus. For the firſt prieſteſs of that goddeſs was Callithyia the daughter of Piranthus (21). Callithyia was ſucceeded by Alcyone, about three generations before the taking of Troy, that is about the middle of Solomon's reign: in her prieſthood the Siculi paſſed out of Italy into Sicily (22). Afterwards Hypermneſtra, the daughter of Danäus, became prieſteſs of this goddeſs; and ſhe flouriſhed in the times next before the Argonautic expedition (23): and Admeta (24), the daughter of Euryſtheus, was prieſteſs of this Juno about the times of the Trojan war. Andromeda the wife of Perſeus, was the daughter of Cepheus an Egyptian, the ſon of Belus, according to [a] Herodotus; and the Egyptian Belus was Ammon. Perſeus took her from Joppa (25), where Cepheus, I think a kinſman of Solomon's queen, reſided in the days of Solomon. Acriſius and Prætus were the ſons of Abas (26): but this Abas was not the ſame man with Abas the grandſon of Danäus, but a much older prince, who built Abæa in Phocis, and might be the prince from whom the iſland Eubœa [b] was anciently

[a] Herod. l. 7. c. 61 & 150.

[b] Bochart. Canaan. part 2. c. 13.

(21) Euſeb. Chron. (22) Dionyſ. Hal. p. 18. (23) Euſeb. Chron.
(24) Or Adamanta. Syncell. p. 172. (25) Conon. Narrat. 40. (26) Apollodor. p. 77.
(27) Diod. Sic. lib. 5. c. 58. p. 228.

(28) PAUSANIAS however ſays, that the tomb of Crotopus was in the Argive territory. Nor does he ſpeak of this flight of Crotopus, though he mentions the ſtory of his daughter Pſamathe, which, it is pretended, was the occaſion of it. See Pauſanias, p. 164 and 105.

§ LXIV.

(1) § LX.

(2) PAUSANIAS, in the place to which our author refers (lib. 5. c. 1.) ſeems to fix the arrival of Pelops rather to the time of Epeus the ſon of Endymion, than to that of Endymion. And in another place (lib. 5. c. 8. p. 393) he expreſsly makes Pelops a generation later than Endymion. Apollodorus has nothing, that I know, to mark the time of the arrival of Pelops. In the firſt book of Euſebius's Chronicle (p. 16) it is ſaid, that the kingdom of the Argives ended in

ently called Abantis, and the people thereof Abantes: for Apollonius Rhodius [a] tells us, that the Argonaut Canthus was the ſon of Canethus, and that Canethus was of the poſterity of Abas; and the commentator upon Apollonius tells us further, that from this Abas the inhabitants of Eubœa were anciently called Abantes. This Abas therefore flouriſhed three or four generations before the Argonautic expedition; and ſo might be the father of Acriſius. The anceſtors of Acriſius were accounted Egyptians by the Greeks; and they might come from Egypt under Abas into Eubœa, and from thence into Peloponneſus. I do not reckon Phorbas and his ſon Triopas among the kings of Argos; becauſe they fled from that kingdom to the iſland Rhodes (27): nor do I reckon Crotopus among them; becauſe he went from Argos, and built a new city for himſelf in Megaris, as [b] Conon relates (28).

GREEKS.

[a] Apollon. Argonaut. l. 1. v. 77.

[b] Conon. Narrat. 19.

LXIV. We ſaid that Pelops came into Greece about the 26th year of Solomon (1). He [c] came thither in the days of Acriſius, and in thoſe of Endymion (2), and of his ſons, and took Ætolia from Ætolus. Endymion was the ſon of Aëthlius, the ſon of Protogenia, the ſiſter of Hellen, the daughter of Deucalion (3): Phrixus and Helle, the children of Athamas (4), the brother of Siſyphus, and ſon of Æolus, the ſon of Hellen (5), fled from their ſtepmother Ino, the daughter of Cadmus, to Æetes in Colchis, preſently after the return of Seſoſtris into Egypt: and Jaſon the Argonaut was the ſon of Æſon, the ſon of Cretheus, the ſon of Æolus, the ſon of Hellen (6): and Calyce was the wife of Aëthlius, and mother of Endymion (7), and daughter of Æolus (8), and ſiſter of Cretheus, Siſyphus and Athamas:

[c] Pauſan. l. 5. c. 1. Apollodor. l. 1. c. 7.

in Acriſius, having ſtood 544 years until Pelops, who reigned 58. This might induce our author to place the arrival of Pelops in the time of Acriſius. But in the correſponding paſſage in the Greek fragments, Sthenelus and Euryſtheus intervene, as they certainly ought to do, between Acriſius and Pelops. The Argive kingdom was ſaid to ceaſe in Acriſius, becauſe his ſon and ſucceſſor Perſeus fixed his reſidence at Mycenæ; which from that time became the royal ſeat. However, ſince we find the ſons of Perſeus marrying with the daughters of Pelops, it is evident that Perſeus and Pelops muſt have been contemporaries; and there can be no great error, if any, in placing the coming of Pelops into Greece in the days of Acriſius.

(3) Apollodor. lib. 1. c. 7. § II and V. Pauſan. lib. 5. c. 1.
(4) ——— 9. § I.
(5) ——— Ibid. & c. 7. § II.
(6) Scholiaſt. in Pindar. Pyth. 4. l. 190. Apollodor. lib. 1. c. 9. § XVI. & c. 7. § II.
(7) Apollodor. lib. 1. c. 7. § V. (8) ——— § II.

CHAPTER FIRST.

and by theſe circumſtances Cretheus, Siſyphus and Athamas, flouriſhed (9) in the latter part of the reign of Solomon, and in the reign of Rehoboam: Aëthlius, Æolus, Xuthus, Dorus, Tantalus, and Danäe, were contemporary to Erechtheus (10), Jaſius and Cadmus; and Hellen was about one, and Deucalion about two generations older than Erechtheus. They could not be much older; becauſe Xuthus, the youngeſt ſon of Hellen [a], married Creüſa the daughter of Erechtheus: nor could they be much younger; becauſe Cephalus the ſon of Deioneus (11), the ſon of Æolus (12), the eldeſt ſon of Hellen, [b] married Procris the daughter of Erechtheus (13); and Procris fled from her huſband to Minos (13). Upon the death of Hellen, his youngeſt ſon Xuthus [c] was expelled Theſſaly by his brothers Æolus and Dorus, and fled to Erechtheus, and married Creüſa the daughter of Erechtheus (14); by whom he had two ſons, Achæus and Ion, the youngeſt of which grew up before the death of Erechtheus, and commanded the army of the Athenians, in the war in which Erechtheus was ſlain: and therefore Hellen died about one generation before Erechtheus.

[a] Pauſan. l. 7. 3. 1.

[b] Pauſan. l. 1. c. 37. & l. 10. c. 29.

[c] Pauſan. l. 7. c. 1.

LXV. Siſyphus therefore built Corinth about the latter end of the reign of Solomon, or the beginning of the reign of Rehoboam. Upon the flight of Phrixus and Helle, their father Athamas, a little king in Bœotia, went diſtracted and ſlew his ſon Learchus; and his wife Ino threw herſelf into the ſea, together with her other ſon Melicertus (1); and thereupon Siſyphus inſtituted

(9) THIS concluſion ſeems erroneous, even upon our author's own principles. If Pelops came into Greece in the days of Endymion, and came thither in the 26th of Solomon; the 26th of Solomon muſt have fallen upon the days of Endymion, and Aethlius, the father of Endymion, cannot be put later than the beginning of Solomon. Therefore Calyce, the wife of Aethlius, her brothers Siſyphus, Athamas, and Cretheus, muſt have flouriſhed in the beginning of Solomon. If the arrival of Pelops in Greece was, as Pauſanias intimates, in the reign of Epeus the ſon of Endymion; then Endymion muſt have flouriſhed in the beginning of Solomon's reign, and his father Aethlius and his mother Calyce, with her brothers, in the middle of David's.

(10) See note 14. (11) Apollodor. lib. 1. c. 9. § IV.

(12) Apollodor. lib. 1. c. 7. § II. (13) See § LXI. note 5.

(14) HENCE Æolus, Xuthus, and Dorus, the children of Hellen, were nearly contemporary with Erechtheus. But theſe children of Hellen were grand-children of Deucalion: therefore contemporary with Aethlius, who alſo was a grandſon of Deucalion. Therefore Aethlius was alſo contemporary with Erechtheus.

Again, Pelops and Perſeus were contemporaries (note 2). And Pelops, according to Sir Iſaac Newton, was contemporary with Endymion. Therefore upon this ſuppoſition, Tantalus the father of Pelops (Pind. Olymp. 1. v. 58) and Danäe the mother of Perſeus will have been contemporary

inſtituted the Iſthmia at Corinth to his nephew Melicertus (2). This was preſently after Seſoſtris had left Æetes in Colchis, I think in the fifteenth or ſixteenth year of Rehoboam: ſo that Athamas, the ſon of Æolus and grandſon of Hellen, and Ino the daughter of Cadmus, flouriſhed till about the ſixteenth year of Rehoboam. Siſyphus and his ſucceſſors Ornytion, Thoas, Demophon, Propodas, Doridas, and Hyanthidas, reigned ſucceſſively at Corinth, till the return of the Heraclidæ into Peloponneſus (3): then reigned the Heraclidæ, Aletes, Ixion, Agelas, Prumnis, Bacchis, Agelas II. Eudemus, Ariſtodemus (4), and Teleſtes, ſucceſſively about 170 years (5), and then Corinth was governed by *Prytanes*, or annual archons, about 42 years, and after them by Cypſelus and Periander about 48 years more (6).

GREEKS.

LXVI. Celeus king of Eleuſis, who was contemporary to Erechtheus, [a] was the ſon of Rharus (1), the ſon of Cranäus, the ſucceſſor of Cecrops; and in the reign of Cranäus, Deucalion fled with his ſons Hellen and Amphictyon from the flood which then overflowed Theſſaly, and was called Deucalion's flood: they fled into Attica; and there Deucalion died ſoon after; and Pauſanias tells us, that his ſepulchre was to be ſeen near Athens (2). His eldeſt ſon Hellen ſucceeded him in Theſſaly; and his other ſon Amphictyon married the daughter of Cranäus (3), and reigning at Thermopylæ, erected there the Amphictyonic

[a] Heſych. in Κραναος.

temporary with Aethlius the father of Endymion. But the truth rather ſeems to be, that Tantalus and Danäe were contemporary with Endymion himſelf.

§ LXV.

(1) Apollodor. lib. c. 9. § I & II. Pauſan. lib. 1. c. 44. p. 108.

(2) Pauſan. lib. 2 c. 1. p. 111. (3) ——— c. 4.

(4) Between Ariſtodemus and Teleſtes were two uſurpers, Agemon and Alexander. Euſeb. in Chron.

(5) DIODORUS Siculus, as quoted by Euſebius (in Chron. lib. 1) reckons 447 years from the return of the Heraclidæ to the beginning of the reign of Cypſelus; 90 of which he aſſigns to the annual archons. Euſeb. Exc. Gr. p. 35. Concerning the integrity of theſe numbers, conſult Petavius Doct. Temp. lib. 9. c. 33, and the notes of Weſſelingius upon this fragment, in his edition of Diodorus Siculus.

(6) By Cypſelus 30 years, according to Herodotus (lib. 5. c. 92. § 6.) By Periander 40 years, according to Euſebius (in Chron.) who gives but 28 years to the reign of Cypſelus.

§ LXVI.

(1) Suidas under the word Ραριας. Others made Rharus the father of Triptolemus. Pauſan. lib. 1. c. 14. p. 34.

(2) Pauſan. lib. 1. c. 18. p. 43. (3) ——— c. 2. p. 7.

CHAPTER FIRST.

phictyonic council; and Acriſius ſoon after erected the like council at Delphi (4). This I conceive was done when Amphictyon and Acriſius were aged, and fit to be counſellors; ſuppoſe in the latter half of the reign of David, and beginning of the reign of Solomon; and ſoon after, ſuppoſe about the middle of the reign of Solomon, did Phemonoë (5) become the firſt prieſteſs of Apollo at Delphi, and gave oracles in hexameter verſe: and then was Acriſius ſlain accidentally by his grandſon Perſeus (6). The council of Thermopylæ included twelve nations of the Greeks, without Attica, and therefore Amphictyon did not then reign at Athens: he might endeavour to ſucceed Cranäus, his wife's father (7), and be prevented by Erechtheus.

LXVII. Between the reigns of Cranäus and Erechtheus, chronologers place alſo Erichthonius, and his ſon Pandion; but I take this Erichthonius and this his ſon Pandion, to be the ſame with Erechtheus and his ſon and ſucceſſor Pandion, the names being only repeated with a little variation in the liſt of the kings of Attica. For Erichthonius, he that was the ſon of the Earth, nurſed up by Minerva, is by Homer (1) called Erechtheus; and Themiſtius [a] tells us, that it was Erechtheus that firſt joined a chariot to horſes; and Plato, [b] alluding to the ſtory of Erichthonius in a baſket (2), ſaith, "The people of magnanimous Erechtheus is beautiful, but it behoves us to behold him taken out (3):" Erechtheus therefore immediately ſucceeded Cranäus, while Amphictyon reigned at Thermopylæ. In the reign of Cranäus

[a] Themiſt. Orat. 19.
[b] Plato in Alcib. I. p. 418.

(4) See Sir J. Marſham, § IX. Tit. *Concilia Amphictyonica.*
(5) Pauſan. lib. 10. c. 5. p. 809. Clemens Alex. Strom. lib. 1. c. 21. p. 139.
(6) Apollodor. lib. 2. c. 4. § IV.
(7) That he depoſed Cranäus is aſſerted by Pauſanias and Apollodorus, and was the opinion of Meurſius.

§ LXVII.

(1) Il. B. lin. 547. (2) Apoll. lib. 3. c. 13. § VI.
(3) Ευπροσωπος γαρ ὁ του μεγαλησιου δημου Ερεχθευς· αλλ' ἀποδυσις χρη αυτου θεασασθαι. *The people of the magnanimous Erectheus carry a fair outſide; but it is neceſſary to examine them ſtript.* Αυτου relates to δημος, not to Ερεχθευς. Here is no ſort of alluſion to the ſtory of Erichthonius in the baſket.
(4) Varro placed it in the reign of Cranaus. (Auguſtin. de Civ. Dei, lib. 18. c. 10.) Euſebius in that of Cecrops.

§ LXVIII.

(1) ARCAS had three ſons; Azan, Apheidas, Elatus: among whom he ſhared his kingdom: and

Cranäus the poets place the flood of Deucalion (4); and therefore the death of Deucalion, and the reign of his ſons Hellen and Amphictyon, in Theſſaly and Thermopylæ, was but a few years, ſuppoſe eight or ten, before the reign of Erechtheus. GREEKS.

LXVIII. The firſt kings of Arcadia were ſucceſſively [a] Pelaſgus, Lycaon, Nyctimus, Arcas (1), Clitor, Æpytus, Aleus, Lycurgus, Echemus, Agapenor, Hippothous, Æpytus II. Cypſelus, Olæas, &c. Under Cypſelus the Heraclidæ returned into Peloponneſus, as above. Agapenor was one of thoſe who courted Helena; he courted her before he reigned, and afterwards he went to the war at Troy, and thence to Cyprus, and there built Paphos (2). Echemus ſlew Hyllus the ſon of Hercules. Lycurgus, Cepheus, and Auge, were [b] the children of Aleus, the ſon of Aphidas, the ſon of Arcas (3), the ſon of Calliſto, the daughter of Lycaon (4): Auge lay with Hercules (5), and Ancæus the ſon of Lycurgus was an Argonaut (5), and his uncle Cepheus was his governour in that expedition; and Lycurgus ſtaid at home to look after his aged father Aleus, who might be born about 75 years before that expedition (6); and his grandfather Areas might be born about the end of the reign of Saul, and Lycaon the grandfather of Arcas might be then alive, and die before the middle of David's reign; and his youngeſt ſon Oenotrus (7), the Janus of the Latines, might grow up, and lead a colony into Italy (8) before the reign of Solomon. Arcas received [c] bread-corn from Triptolemus, and taught his people to make bread of it; and ſo did Eumelus (9), the firſt king of a

[a] Pauſan. l. 8. c. 1, 2, 3, 4, 5.
[b] Pauſan. l. 8. c. 4. Apollon. Argonaut. l. 1. v. 161.
[c] Pauſan. l. 8. c. 4. p. 604.

and the ſhare of each of theſe princes went to their children after them. That of Azas to his ſon Clitor; that of Apheidas to his ſon Aleus; that of Elatus among his five ſons. Clitor in his life-time was the moſt conſiderable of theſe grand-children of Arcas. But after his death the kingdom ſeems to have been re-united under his couſin Æpytus, one of the ſons of Elatus, from whom again it paſſed to Aleus the ſon of Apheidas. Pauſan. lib. 8. c 4. p. 604—606. Between Arcas and Clitor therefore one ſucceſſion is to be inſerted; and the three reigns of Clitor, Æpytus, and Aleus, are not to be reckoned ſucceſſive, but contemporary with ſurvivorſhip to Aleus.

(2) Pauſan. lib. 8. c. 5 p. 607. Apollodor. lib. 3. c. 9. § VIII.
(3) Apollodor. lib. 3. c 9. § I. Pauſan. lib. 8. c. 4. p. 606.
(4) Apollodor. lib. 3. c. 4. § II. Pauſan. lib 8. c. 3. p. 603, & c. 4. p. 604.
(5) Pauſan. lib. 8. c. 4. p. 606. (6) Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 161—166.
(7) Pauſan. lib. 8. c. 3. p. 603. (8) Pauſan. ibid. Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 10. p. 9.
(9) Pauſan. lib. 7. c. 18. p. 568.

region

CHAPTER FIRST.

region afterwards called Achaia (10): and therefore Arcas and Eumeles were contemporary to Triptolemus, and to his old father Celeus, and to Erechtheus king of Athens; and Callisto to Rharus, and her father Lycaon to Cranaus (11): but Lycaon died before Cranaus, so as to leave room for Deucalion's flood between their deaths (12). The eleven (13) kings of Arcadia, between this flood and the return of the Heraclidæ into Peloponnesus, that is, between the reigns of Lycaon and Cypselus, after the rate of about twenty years to a reign one with another, took up about 220 years; and these years counted back from the return of the Heraclides, place the flood of Deucalion upon the fourteenth year of David's reign (14), or thereabout.

[a] Herod. l. 5. c. 58.

LXIX. Herodotus [a] tells us, that the Phœnicians who came with Cadmus brought many doctrines into Greece: for amongst those Phœnicians were a sort of men called *Curetes*, who were skilled in the arts and sciences of Phœnicia, above other men; and [b] settled some in Phrygia, where they were called *Corybantes* (1); some in Crete, where they were called *Idæi Dactyli* (2); some in Rhodes, where they were called *Telchines* (3); some in Samothrace, where they were called *Cabiri*; some in Eubœa, where, before the invention of iron, they wrought in copper, in a city thence called Chalcis; some in Lemnos, where they assisted Vulcan; and some in Imbrus, and other places: and a considerable number of them settled in Ætolia, which was thence called the country of the Curetes; until Ætolus the son of Endymion, having slain Apis king of Sicyon, fled thither, and by the assistance of his father invaded it, and from his own name called it Ætolia (4): and by the assistance of these artificers, Cadmus

[b] Strabo, l. 10. p. 462—474.

(10) Read, "*king of a small district in Achaia, and founder of the city afterwards called Patræ.*" Pausan. ibid.

(11) Pausanias differs little, if at all, from our author in the age of Lycaon; making him contemporary with Cecrops the predecessor of Cranaus, lib. 8. c. 2. p. 600.

(12) For Deucalion's flood was in the reign of Nyctimus the successor of Lycaon. Apollodor. lib. 3. c. 8. § II.

(13) They should be reckoned but nine. See note 1.

(14) But reckoning only nine successive reigns of Arcadian kings, between Lycaon and Cypselus; these nine reigns, at 20 years each, will amount to 180 years. And Deucalion's flood will fall 180 years before the return of the Heraclidæ: therefore 226 before the first olympiad: that is, about the year of the Julian period 3712, which, according to Petavius, was the fourteenth of Solomon.

mus found out gold in the mountain Pangæus in Thrace (5), and copper at Thebes (6); whence copper ore is still called Cadmia. Where they settled they wrought first in copper, till iron was invented; and then in iron: and when they had made themselves armour, they danced in it at the sacrifices with tumult and clamour, and bells, and pipes, and drums, and swords, with which they struck upon one another's armour, in musical times, appearing seized with a divine fury; and this is reckoned the original of music in Greece. So Solinus, [a] "*Studium musicum inde* "*cœptum, cùm Idæi Dactyli modulos, crepitu & tinnitu æris depre-* "*hensos, in versificum ordinem transtulissent:*" and Isidorus, [b] "*Stu-* "*dium musicum ab Idæis Dactylis cœptum*" Apollo and the Muses were two generations later. Clemens [c] calls the *Idæi Dactyli* barbarous, that is strangers; and saith, that they were reputed the first wise men, to whom both the letters which they call Ephesian, and the invention of musical rhythmes are referred. It seems that when the Phœnician letters, ascribed to Cadmus, were brought into Greece, they were at the same time brought into Phrygia and Crete by the Curetes; who settled in those countries, and called them Ephesian, from the city Ephesus (7), where they were first taught. The Curetes, by their manufacturing copper and iron, and making swords, and armour, and edged tools for hewing and carving of wood, brought into Europe a new way of fighting; and gave Minos an opportunity of building a fleet, and gaining the dominion of the seas; and set on foot the trades of smiths and carpenters in Greece, which are the foundation of manual trades. The [d] fleet of Minos was without sails; and Dædalus fled from him by adding sails to his vessel: and therefore ships with sails were not used by the Greeks before the flight of

GREEKS.

[a] Solin. Polyhist. c. 11.

[b] Isidor. originum. lib. xi. c. 6.

[c] Clem. Strom. l. 1. c. 15. p. 132.

[d] Pausan. l. 9. c. 11.

§ LXIX.

(1) Diod. Sic. lib. 5. c. 49. p. 222. (2) —— c. 64. p. 230. Pausan. lib. 5. c. 7. p. 391.
(3) Diod. Sic. lib. 5. c. 55. p. 226.
(4) Apollodor. lib. 1. c. 7. § VI. Conon. Narrat. 14. Pausan. lib. 5. c. 1. p. 375, 376.
(5) Plin. lib. 7. c. 57. (6) Hygin. Fab. 274.

(7) The Εφεσια γραμματα, mentioned by Clemens, were not letters of the alphabet, as our author imagines, but certain magical words written on the feet, crown, and girdle of the Ephesian Diana. Eustath. In Hom. p. 1864, lin. 10—20. edit. Rom. These words, with the interpretation of them, are to be found in Hesychius and Clemens Alexandrinus, Strom. lib. 5. c. 8. p. 242. Wonderful virtues were ascribed to them; but whether they operated by being uttered, or by being worn about the person, seems not agreed among the antient writers.

CHAPTER FIRST.

Dædalus, and death of Minos, who was ſlain in purſuing him to Sicily (8), in the reign of Rehoboam. Dædalus and his nephew Talus, in the latter part of the reign of Solomon, invented the (9) chip-ax, and ſaw, and wimble, and perpendicular, and compaſs, and turning-lath, and glew, and the potter's wheel; and his father Eupalamus invented the anchor (9): and theſe things gave a beginning to manual arts and trades in Europe.

[a] Strabo, l. 10. p. 472, 473. Diodor. l. 5. c. 64. p. 231.

LXX. The [a] Curetes, who thus introduced letters, and muſic, and poetry, and dancing, and arts, and attended on the ſacrifices, were no leſs active about religious inſtitutions; and for their ſkill and knowledge and myſtical practices, were accounted wiſe men and conjurers by the vulgar. In Phrygia their myſteries were about Rhea, called *Magna Mater*, and from the places where ſhe was worſhipped, Cybele, Berecynthia, Peſſinuntia, Dindymene, Mygdonia, and Idæa Phrygia: and in Crete, and the *Terra Curetum*, they were about Jupiter Olympius, the ſon of the Cretan Rhea. They repreſented, [b] that when Jupiter was born in Crete, his mother Rhea cauſed him to be educated in a cave in mount Ida, under their care and tuition; and [c] that they danced about him in armour with great noiſe, that his father Saturn might not hear him cry; and when he was grown up, aſſiſted him in conquering his father, and his father's friends; and in memory of theſe things inſtituted their myſteries. Bochart [d] brings them from Paleſtine, and thinks that they had the name of Curetes from the people among the Philiſtims called Crethim, or Cerethites: Ezek. xxv. 16. Zeph. ii. 5. 1 Sam. xxx. 14. for the Philiſtims conquered Zidon, and mixed with the Zidonians.

[b] Strabo, l. 10. p. 468. 472. Diodor. l. 5. c. 64. p. 231.
[c] Lucian de ſacrificiis. Apollod. l. 1. c. 1. ſect. 3. & c. 2. ſect. 1.
[d] Boch. in Canaan. l. 1. c. 15.

LXXI. The two firſt kings of Crete, who reigned after the coming of the Curetes, were Aſterius and Minos; and Europa was

(8) Diod. Sic. lib. 4. c. 79. p. 194, and lib. 5. c. 78. p. 238, and Herodot. lib. 7. c. 170.
(9) Plin. lib. 7. c. 57. Diod. Sic. lib. 4. c. 76. p. 192.

§ LXXI.

(1) Apollodor. lib. 3. c. 1. § II. (2) —— § I. Diod. Sic. lib. 5. c. 78. p. 238.
(3) Euſtath in Il. p. 1205. lin. 10—20. edit. Rom.
(4) Read, *Minos and Sarpedon*. See Herodotus, lib. 1. c. 173,

§ LXXII.

(1) LUCIAN, in his diſcourſe about the Syrian goddeſs, ſays, that there was a temple in Phrygia dedicated,

was the queen of Aſterius (1), and mother of Minos (2); and the Idæan Curetes were her countrymen, and came with her and her brother Alymnus into Crete, and dwelt in the Idæan cave in her reign, and there educated Jupiter, and found out iron, and made armour: and therefore theſe three, Aſterius, Europa, and Minos, muſt be the Saturn, Rhea and Jupiter of the Cretans. Minos is uſually called the ſon of Jupiter; but this is in relation to the fable, that Jupiter in the ſhape of a bull, the enſign of the ſhip, carried away Europa from Zidon: for the Phœnicians, upon their firſt coming into Greece, gave the name of Jao-pater, Jupiter, to every king: and thus both Minos and his father were Jupiters. Echemenes, an ancient author cited by Athenæus [a], ſaid that Minos was that Jupiter who committed the rape upon Ganimede; though others ſaid more truly that it was Tantalus (3). Minos alone was that Jupiter who was moſt famous among the Greeks for dominion and juſtice, being the greateſt king in all Greece in thoſe days, and the only legiſlator. Plutarch [b] tells us, that the people of Naxus, contrary to what others write, pretended that there were two Minos's, and two Ariadnes; and that the firſt Ariadne married Bacchus, and the laſt was carried away by Theſeus. But [c] Homer, Heſiod, Thucydides, Herodotus, and Strabo, knew but of one Minos; and Homer deſcribes him to be the ſon of Jupiter and Europa; and the brother of Rhadamanthus and Sarpedon; and the father of Deucalion the Argonaut; and grandfather of Idomeneus who warred at Troy; and that he was the legiſlator of Hell. Herodotus [d] makes Minos and Rhadamanthus (4) the ſons of Europa, contemporary to Ægeus: and [e] Apollodorus and Hyginus ſay, that Minos, the father of Androgeus, Ariadne and Phædra, was the ſon of Jupiter and Europa, and brother of Rhadamanthus and Sarpedon.

GREEKS.

[a] Athen. l. 13. p. 601.
[b] Plutarch. in Theſeo, p. 9.
[c] Homer. Il. N. 450. & z. 321. & Odyſ. A. 567. & T. 178.
[d] Herod. l. 1. c. 173.
[e] Apollod. l. 3. c. 1. Hygin. Fab. 40, 41, 42, 43, 178.

LXXII. Lucian [f] lets us know, that Europa the mother of Minos was worſhipped by the name of Rhea (1), in the form of a woman

[f] Lucian. de Dea Syria.

dedicated, as ſome imagined, to Europa. And in another part of the ſame tract, he ſays of the famous temple at Hierapolis, that, among many different opinions concerning the founder of it, and the divinity to which it was conſecrated, one was, that Attis had been the founder, and that the goddeſs was Rhea. And in confirmation of this, he alledges, that the idol of this temple had ſome of the peculiar attributes of Rhea: namely, the Car drawn by lions, the drum,

CHAPTER FIRST.

woman ſitting in a chariot drawn by lions, with a drum in her hand, and a *Corona turrita* on her head, like Aſtarte and Iſis. And the Cretans [a] anciently ſhewed the houſe where this Rhea lived: and [b] Apollonius Rhodius tells us, that Saturn, while he reigned over the Titans in Olympus, a mountain in Crete, and Jupiter was educated by the Curetes in the Cretan cave, deceived Rhea, and of Philyra begot Chiron. And therefore the Cretan Saturn and Rhea, were but one generation older than Chiron, and by conſequence not older than Aſterius and Europa, the parents of Minos. For Chiron lived till after the Argonautic expedition, and had two grandſons in that expedition (2); and Europa came into Crete above an hundred years before that expedition. Lucian [c] tells us, that the Cretans did not only relate, that Jupiter was born and buried among them, but alſo ſhewed his ſepulchre: and Porphyry [d] tells us, that Pythagoras went down into the Idæan cave to ſee his ſepulchre: and Cicero, [e] in numbering three Jupiters, ſaith, that the third was the Cretan Jupiter, Saturn's ſon, whoſe ſepulchre was ſhewed in Crete: and the ſcholiaſt upon Callimachus [f] lets us know, that this was the ſepulchre of Minos: his words are, "Εν Κρητη επι τῳ ταφῳ τϐ "Μινω επεγεγραπτο, ΜΙΝΩΟΣ ΤΟΥ ΔΙΟΣ ΤΑΦΟΣ. τῳ χρονῳ δε "τϐ Μινω απηλειφθη, ὡςε περιλειφθηναι, ΔΙΟΣ ΤΑΦΟΣ. εκ τϐτϐ "ϐν εχειν λεγϐσι Κρητες τον ταφον τϐ Διος. In Crete upon the ſe- "pulchre of Minos was written, *Minois Jovis ſepulchrum:* but "in time *Minois* wore out, ſo that there remained only *Jovis ſe-* "*pulchrum*, and thence the Cretans called it the ſepulchre of Ju- "piter." By Saturn, Cicero, who was a Latine, underſtood the Saturn ſo called by the Latines: for when Saturn was expelled his kingdom, he fled from Crete by ſea to Italy (3); and this the poets expreſſed by ſaying, that Jupiter caſt him down to Tartarus, that is, into the ſea: and becauſe he lay hid in Italy, the Latines (4) called him Saturn; and Italy, Saturnia and Latium; and themſelves Latines. So [g] Cyprian; "*Antrum Jovis in Cre-* "*tâ*

[a] Diodor. l. 5. c. 4. p. 231.
[b] Argonaut. l. 2. v. 1236.
[c] Lucian. de ſacrificiis, § 10.
[d] Porphyr. in vita Pythag.
[e] Cicero de Nat. Deor. l. 3. c. 21.
[f] Callimac. Hymn. 1. v. 8.
[g] Cypr. de Idolorum vanitate.

and the towerd head. But I cannot find that he ſays Europa was Rhea. For this temple at Hierapolis, which ſome ſuppoſed to be Rhea's, was quite different from the Phrygian temple, which ſome ſuppoſed to be Europa's. See Lucian de Dea Syria, § IV, XI, XV.

(2) Æacus and Telamon. (Apollodor. lib. 1. c. 9. § XVI. Apoll. Rhod. lib. 1. 90—94.) They were

"*tâ viſitur, & ſepulchrum ejus oſtenditur: & ab eo Saturnum* GREEKS.
"*fugatum eſſe manifeſtum eſt: unde Latium de latebrâ ejus nomen*
"*accepit: hic literas imprimere, hic ſignare nummos in Italiâ pri-*
"*mus inſtituit, unde ærarium Saturni vocatur; & ruſticitatis hic*
"*cultor fuit, inde falcem ferens ſenex pingitur.*" and Minutius Felix; "*Saturnus Cretâ profugus, Italiam metu filii ſævientis acceſ-*
"*ſerat, & Jani ſuſceptus hoſpitio, rudes illos homines & agreſtes*
"*multa docuit, ut Græculus & politus; literas imprimere, num-*
"*mos ſignare, inſtrumenta conficere: itaque latebram ſuam, quòd*
"*tutò latuiſſet, vocari maluit Latium, & urbem Saturniam de*
"*ſuo nomine. * * Ejus filius Jupiter Cretæ excluſo parente regna-*
"*vit; illic obiit; illic filios habuit; adhuc antrum Jovis viſitur, &*
"*ſepulchrum ejus oſtenditur, & ipſis ſacris ſuis humanitatis argui-*
"*tur.*" And Tertullian: "[a] *Quantum rerum argumenta docent,* [a] Tert. Apo-
"*nuſquam invenio fideliora quàm apud ipſam Italiam; in quâ Sa-* loget. c. 10.
"*turnus poſt multas expeditiones, poſtque Attica hoſpitia conſedit,*
"*exceptus ab Jano, vel Jane, ut Salii volunt. Mons, quem inco-*
"*luerat, Saturnius dictus: civitas, quam depalaverat, Saturnia uſque*
"*nunc eſt. Tota denique Italia poſt Oenotriam Saturnia cognomi-*
"*nabatur. Ab ipſo primùm tabulæ, & imagine ſignatus nummus,*
"*& inde ærario præſidet.*" By Saturn's carrying letters into Italy, and coining money, and teaching agriculture, and making inſtruments, and building a town, you may know that he fled from Crete, after letters, and the coining of money, and manual arts were brought into Europe by the Phœnicians; and from Attica, after agriculture was brought into Greece by Ceres; and ſo could not be older than Aſterius, and Europa, and her brother Cadmus: and by Italy's being called Oenotria, before it was called Saturnia, you may know that he came into Italy after Oenotrus, and ſo was not older than the ſons of Lycaon. Oenotrus carried the firſt colony of the Greeks into Italy (5), Saturn the ſecond, and Evander the third; and the Latines knew nothing older in Italy than Janus and Saturn: and therefore Oenotrus was the Ja-

were the ſons of Æacus by Eudeides the daughter of Chiron. Apollodor. lib. 3. c 11 § VI. In the Orphic Argonautics they are made the ſons of Æacus by Ægina. V. 128, and 182—184.

(3) Virgil. Æn. 8. lin. 319—323. Servius upon the place. Ovid. Faſt. lib. 1. lin. 235.

(4) Read, *the Latines called Italy Saturnia, and Latinus and themſelves Latins.*

(5) Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 10. p. 9.

CHAPTER FIRST.

nus of the Latines, and Saturn was contemporary to the ſons of Lycaon, and by conſequence alſo to Celeus, Erechtheus, Ceres, and Aſterius. For Ceres educated Triptolemus the ſon of Celeus, in the reign of Erechtheus, and then taught him to plow and ſow corn. Arcas the ſon of Calliſto, and grandſon of Lycaon, received corn from Triptolemus, and taught his people to make bread of it; and Procris, the daughter of Erechtheus, fled to Minos the ſon of Aſterius. In memory of Saturn's coming into Italy by ſea, the Latines coined their firſt money with his head on one ſide, and a ſhip on the other (6). Macrobius [a] tells us, that when Saturn was dead, Janus erected an altar to him, with ſacred rites as to a God, and inſtituted the Saturnalia, and that human ſacrifices were offered to him; till Hercules, driving the cattle of Geryon through Italy, aboliſhed that cuſtom. By the human ſacrifices, you may know that Janus was of the race of Lycaon (7); which character agrees to Oenotrus. Dionyſius Halicarnaſſenſis tells us further, that Oenotrus having found in the weſtern parts of Italy a large region fit for paſturage and tillage, but yet for the moſt part uninhabited, and where it was inhabited, peopled but thinly; in a certain part of it, purged from the Barbarians, he built towns little and numerous, in the mountains; which manner of building was familiar to the ancients (8): and this was the original of towns in Italy.

[a] Macrob. Saturnal. lib. 1. c. 7.

LXXIII. Pauſanias [b] tells us, that "the people of Elis, who "were beſt ſkilled in antiquities, related this to have been the "original of the Olympic Games: that Saturn reigned firſt, and "had a temple built to him in Olympia by the men of the Gol- "den Age; and that when Jupiter was newly born, his mother "Rhea recommended him to the care of the Idæi Dactyli, who "were alſo called Curetes: that afterwards five of them, called "Hercules, Pœonius, Epimedes, Jaſius, and Ida, came from Ida, "a mountain in Crete, into Elis; and Hercules, called alſo Her-

[b] Pauſan. l. 5. c. 7. p. 391, 392. vid. et. c. 13, 14. & l. 8. c. 2.

(6) Macrob. Saturn. lib. 1. c. 7.
(7) Pauſan. lib. 8. c. 2. p. 600. Apollodor. lib. 3. c. 8. § 1.
(8) Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 12. p. 10.

§ LXXIII.

(1) With Æolians and Pelaſgians, ſaith Diodorus.

"cules

"cules Idæus, being the oldeſt of them in memory of the war between Saturn and Jupiter inſtituted the game of racing, and "that the victor ſhould be rewarded with a crown of olive;" and there erected an altar to Jupiter Olympius, and called theſe games Olympic: and that ſome of the Eleans ſaid, "that Jupiter con- "tended here with Saturn for the kingdom; others that Her- "cules Idæus inſtituted theſe games in memory of their victory "over the Titans." For the people of Arcadia [a] had a tradition, that the giants fought with the gods in the valley of Bathos, near the river Alpheus and the fountain Olympias. [b] Before the reign of Aſterius, his father Teutamus came into Crete with a colony from Olympia (1); and upon the flight of Aſterius, ſome of his friends might retire with him into their own country, and be purſued and beaten there by the Idæan Hercules. The Eleans ſaid alſo that Clymenus the grandſon (2) of the Idæan Hercules, about fifty years after Deucalion's flood, coming from Crete, celebrated theſe games again in Olympia (3), and erected there an altar to Juno Olympia (4), that is, to Europa, and another to this Hercules and the reſt of the Curetes (5); and reigned in Elis till he was expelled by Endymion, [c] who thereupon celebrated theſe games again (3): and ſo did Pelops (3), who expelled Ætolus the ſon of Endymion (5); and ſo alſo did Hercules the ſon of Alcmena (3), and Atreus the ſon of Pelops (6), and Oxylus (3). They might be celebrated originally in triumph for victories, firſt by Hercules Idæus, upon the conqueſt of Saturn and the Titans; and then by Clymenus, upon his coming to reign in the *Terra Curetum*; then by Endymion, upon his conquering Clymenus; and afterwards by Pelops, upon his conquering Ætolus; and by Hercules, upon his killing Augeus; and by Atreus, upon his repelling the Heraclidæ (7); and by Oxylus, upon the return of the Heraclidæ into Peloponneſus. This Jupiter, to whom they were inſtituted, had a tem-

GREEKS.

[a] Pauſan. l. 8. c. 29. p. 660.

[b] Diodor. l. 5. p. 183.

[c] Pauſan. l. 5. c. 8. 14.

(2) A deſcendant. (3) Pauſan. lib. 5. c. 8. p. 393. (4) —— c. 14. p. 412.
(5) According to Pauſanias, Ætolus fled for having killed Apis, the ſon of Jaſon of Pallantium in Arcadia, lib. 5. c. 1. p. 376.
(6) Velleius Paterculus, lib. 1. c. 8.
(7) Paterculus ſays, that they were celebrated by Atreus as funeral games, in honour of his father Pelops.

ple

CHAPTER FIRST.

ple and altar erected to him in Olympia, where the games were celebrated, and from the place was called Jupiter Olympius. Olympia was a place upon the confines of Piſa, near the river Alpheus.

[a] Herod. l. 2. c. 44.

LXXIV. In the [b] iſland Thaſus, where Cadmus left his brother Thaſus (1), the Phœnicians built a temple to Hercules Olympius (2); that Hercules, whom Cicero [b] calls *ex Idæis Dactylis, cui inferias afferunt* (3). When the myſteries of Ceres were inſtituted in Eleuſis, there were other myſteries inſtituted to her and her daughter and daughter's huſband, in the iſland Samothrace, by the Phœnician names of *Dii Cabiri Axieros, Axiokerſa,* and *Axiokerſes* (4), that is, the great gods Ceres, Proſerpina and Pluto: for [c] Jaſius a Samothracian, whoſe ſiſter married Cadmus, was familiar with Ceres; and Cadmus and Jaſius were both of them inſtituted in theſe myſteries. Jaſius was the brother of Dardanus, and married Cybele the daughter of Meones king of Phrygia, and by her had Corybas; and after his death, Dardanus, Cybele, and Corybas, went into Phrygia, and carried thither the myſteries of the mother of the gods, and Cybele called the goddeſs after her own name, and Corybas called her prieſts Corybantes. Thus Diodorus; but Dionyſius ſaith, [d] that Dardanus inſtituted the Samothracian myſteries; and that his wife Chryſes learned them in Arcadia; and that Idæus the ſon of Dardanus inſtituted afterwards the myſteries of the mother of the gods in Phrygia. This Phrygian goddeſs was drawn in a chariot by lions, and had a *corona turrita* on her head, and a drum in her hand, like the Phœnician goddeſs Aſtarte, and the Corybantes danced in armour at her ſacrifices in a furious manner, like the Idæi Dactyli (5); and Lucian [e] tells us, that ſhe was the Cretan Rhea (6), that is, Europa the mother of Minos. And thus the Phœnicians introduced the practice of deifying dead men and women among the Greeks and Phrygians; for I meet with

[b] Cic. de natura Deorum, lib. 3.

[c] Diodor. lib. 5. c. 48, 49. p. 223.

[d] Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 61. p. 49, 50. & c. 68. p. 55.

[e] Lucian. de ſaltatione.

§ LXXIV.

(1) Conon. Narrat. 37. Apollodorus calls Thaſus a ſon of Neptune, lib. 3. c. 1. § 1.

(2) To Hercules Thaſius, who was the Hercules Olympius of the Greeks. For Hercules the ſon of Alcmena lived in a later age: Herodotus ſays five generations later: according to our author's ſyſtem, three.

(3) Ex Idæis Digitis, cui inferias afferunt. De Nat. Deor. lib. 3. c. 16.

no

no inſtance of deifying dead men and women in Greece, before the coming of Cadmus and Europa from Zidon. GREEKS.

LXXV. From theſe originals it came into faſhion among the Greeks, ἐναγίζειν, *parentare*, to celebrate the funerals of dead parents with feſtivals and invocations and ſacrifices offered to their ghoſts, and to erect magnificent ſepulchres in the form of temples, with altars and ſtatues, to perſons of renown; and there to honour them publickly with ſacrifices and invocations. Every man might do it to his anceſtors; and the cities of Greece did it to all the eminent Greeks: as to Europa the ſiſter, to Alymnus the brother, and to Minos and Rhadamanthus the nephews of Cadmus; to his daughter Ino, and her ſon Melicertus; to Bacchus, the ſon of his daughter Semele; Ariſtarchus, the huſband of his daughter Autonoë; and Jaſius, the brother of his wife Harmonia; to Hercules a Theban, and his mother Alcmena; to Danäe, the daughter of Acriſius; to Æſculapius and Polemocrates the ſon of Machaon; to Pandion and Theſeus kings of Athens; Hippolytus, the ſon of Theſeus; Pan, the ſon of Penelope; Proſerpina, Triptolemus, Celeus, Trophonius, Caſtor, Pollux, Helena, Menelaus, Agamemnon, Amphiaräus, and his ſon Amphilochus, Hector and Alexandra the ſon and daughter of Priam, Phoroneus, Orpheus, Proteſiläus, Achilles and his mother Thetis, Ajax, Arcas, Idomeneus, Meriones, Æacus, Melampus, Britomartis, Adraſtus, Ioläus, and divers others. They deified their dead in divers manners, according to their abilities and circumſtances, and the merits of the perſon; ſome only in private families, as houſhold Gods or *Dii Penates*; others by erecting grave-ſtones to them in publick, to be uſed as altars for annual ſacrifices; others, by building alſo to them ſepulchres in the form of houſes or temples; and ſome by appointing myſteries, and ceremonies, and ſet ſacrifices, and feſtivals, and initiations, and a ſucceſſion

(4) Scholiaſt. in Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 917. Bochart Phaleg. lib. 1. c. 12.

(5) Lucretius, lib. 2. 598—623.

(6) Lucian tells us, that Rhea firſt inſtituted the dances of the Corybantes in Phrygia, and of the Curetes in Crete. (De Salt. § VIII.) Hence perhaps it may be probably concluded, that Rhea and the Phrygian goddeſs were the ſame. But I cannot find that this is any where expreſsly ſaid by Lucian.

CHAPTER FIRST.

of prieſts for performing thoſe inſtitutions in the temples, and handing them down to poſterity. Altars might begin to be erected in Europe a little before the days of Cadmus, for ſacrificing to the old god or gods of the colonies; but temples began in the days of Solomon. For [a] Æacus the ſon of Ægina, who was two generations older than the Trojan war (1), is by ſome reputed one of the firſt who built a temple in Greece. Oracles came firſt from Egypt into Greece about the ſame time; as alſo did the cuſtom of forming the images of the gods with their legs bound up in the ſhape of the Egyptian mummies (2): for idolatry began in Chaldæa and Egypt, and ſpread thence into Phœnicia and the neighbouring countries, long before it came into Europe; and the Pelaſgians propagated it in Greece, by the dictates of the oracles (3). The countries upon the Tigris and the Nile being exceeding fertile, were firſt frequented by mankind, and grew firſt into kingdoms; and therefore began firſt to adore their dead kings and queens. Hence came the gods of Laban, the gods and goddeſſes called Baalim and Aſhtaroth by the Canaanites, the dæmons or ghoſts to whom they ſacrificed, and the Moloch to whom they offered their children in the days of Moſes (4) and the judges. Every city ſet up the worſhip of its own founder and kings, and by alliances and conqueſts they ſpread this worſhip, and at length the Phœnicians and Egyptians brought into Europe the practice of deifying the dead. The kingdom of the lower Egypt began to worſhip their kings before the days of Moſes; and to this worſhip the ſecond commandment is oppoſed. When the ſhepherds invaded the lower Egypt, they checked this worſhip of the old Egyptians, and ſpread that of their own

[a] Arnob. adv. gent. l. 6. p. 191.

§ LXXV.

(1) Being the father of Peleus, who was the father of Achilles. Apollodor. lib. 3. c. 11. § VI. c. 12. § V & VI.

(2) Heliodor. Æthiop. lib. 3. c. 8. Philoſtrat. Vit. Apollon. lib. 6. c. 4. Diod. Sic. lib. 4. c. 76. p. 192. There is a paſſage at the latter end of the firſt book of Diodorus, where the very reverſe ſeems to be affirmed of the antient ſtatues of the Egyptians; that they were made with a ſeparation of the legs. But the contrary is ſo evident from Heliodorus; who, to apologize for this awkward practice, alledges, that it was not owing to the imperfection of the art among them, but was intended to expreſs the peculiar *gait* of the gods [*—ſmooth gliding without ſtep*] that I have no doubt but the text of Diodorus in that paſſage is corrupt; and that for διαζεύγνυσθαι we ſhould read συνεζευγνυσθαι; which better agrees with what he ſays of the hands of the ſame ſtatue, that they hung ſtrait down.

kings:

kings: and at length the Egyptians of Coptos and Thebais, under Miſphragmuthoſis and Amoſis, expelling the ſhepherds, checked the worſhip of the gods of the ſhepherds, and deifying their own kings and princes, propagated the worſhip of twelve of them into their conqueſts; and made them more univerſal than the falſe gods of any other nation had been before, ſo as to be called *Dii magni majorum gentium*. Seſoſtris conquered Thrace (5), and Amphictyon the ſon of Prometheus (6) brought the twelve gods from Thrace into Greece: Herodotus [a] tells us, that they came from Egypt; and by the names of the cities of Egypt dedicated to many of theſe gods, you may know that they were of an Egyptian original: and the Egyptians, according to Diodorus [b], uſually repreſented, that after their Saturn and Rhea, reigned Jupiter and Juno, the parents of Oſiris and Iſis, the parents of Orus and Bubaſte.

[a] Herod. l. 2. initio.

[b] Diodor. l. 1. p. 8.

LXXVI. By all this it may be underſtood, that as the Egyptians, who deified their kings, began their monarchy with the reign of the gods and heroes, reckoning Menes the firſt man who reigned after their gods; ſo the Cretans had the ages of their gods and heroes, calling the firſt four ages of their deified kings and princes, the Golden, Silver, Brazen, and Iron Ages. Heſiod [c], deſcribing theſe four ages of the gods and demi-gods of Greece, repreſents them to be four generations of men; each of which ended, when the men then living grew old and dropt into the grave; and tells us, that the fourth ended with the wars of Thebes and Troy: and ſo many generations there were, from the coming of the Phœnicians and Curetes with Cadmus and Europa into Greece, unto the deſtruction of Troy. Apollonius Rhodius ſaith, that when the Argonauts came to Crete, they ſlew

[c] Heſiod. Opera, v. 108.

(3) Of the progreſs of idolatry from Egypt, by the Phœnicians into Greece, ſee Herodot. lib. 2. c. 43—64, and Diodorus in his firſt book.

(4) Leviticus xviii. 21. xx. 2.

(5) Herodot. lib. 2. c. 103.

(6) Read, *the grandſon of Prometheus*. For he was the ſon of Deucalion, who was the ſon of Prometheus. Apollodor. lib. 3. c. 13. § VI. & lib. 1. c. 7. § II. Pliny ſays, that Amphictyon invented the interpretation of prodigies and dreams, lib. 7. c. 57. Pauſanias ſpeaks of a chapel near the temple of Bacchus at Athens, where were ſeveral images of earthen ware, repreſenting Amphictyon giving a banquet to Bacchus and the other gods. What expreſs authority there may be, that he brought the twelve gods from Thrace, I know not.

CHAPTER FIRST.

Talus, a brazen man, who remained of thoſe that were of the Brazen Age, and guarded that paſs [a]. Talus was reputed the ſon of Minos (1); and therefore the ſons of Minos lived in the Brazen Age, and Minos reigned in the Silver Age. It was the Silver Age of the Greeks in which they began to plow and ſow corn; and Ceres, that taught them to do it, flouriſhed in the reign of Celeus and Erechtheus and Minos. Mythologiſts tell us, that the laſt woman with whom Jupiter lay was Alcmena (2); and thereby they ſeem to put an end to the reign of Jupiter among mortals, that is to the Silver Age, when Alcmena was with child of Hercules; who therefore was born about the eighth or tenth year of Rehoboam's reign, and was about 34 years old at the time of the Argonautic expedition. Chiron was begot by Saturn of Philyra in the Golden Age, when Jupiter was a child in the Cretan cave (3), as above; and this was in the reign of Aſterius king of Crete: and therefore Aſterius reigned in Crete in the Golden Age; and the Silver Age began when Chiron was a child. If Chiron was born about the 35th year of David's reign, he will be born in the reign of Aſterius, when Jupiter was a child in the Cretan cave, and be about 88 years old in the time of the Argonautic expedition, when he invented the aſteriſms; and this is within the reach of nature. The Golden Age therefore falls in with the reign of Aſterius, and the Silver Age with that of Minos; and to make theſe ages much longer than ordinary generations, is to make Chiron live much longer than according to the courſe of nature. This fable of the four ages ſeems to have been made by the Curetes in the fourth age, in memory of the firſt four ages of their coming into Europe, as into a new world; and in honour of their country-woman Europa, and her huſband Aſterius, the Saturn of the Latines; and of her ſon Minos, the Cretan Jupiter; and grandſon Deucalion, who reigned till the Argonautic expedition, and is ſometimes reckoned among the Argonauts; and of their great grandſon Idomeneus, who warred

[a] Apollon. Argonaut. l. 4. v. 1643.

§ LXXVI.

(1) See § LX. note 7. (3) Diod. Sic. lib. 4. c. 14. p. 155.
(2) Apoll. Rhod. lib. 2. lin. 1235—1245.
(4) &c. lin. 174.

at

at Troy. Heſiod tells us, that he himſelf lived in the fifth age (4), the age next after the taking of Troy; and therefore he flouriſhed within 30 or 35 years after it. And Homer was of about the ſame age; for he [a] lived ſome time with Mentor in Ithaca, and there learnt of him many things concerning Ulyſſes, with whom Mentor had been perſonally acquainted. Now Herodotus, the oldeſt hiſtorian of the Greeks now extant, [b] tells us, that Heſiod and Homer were not above 400 years older than himſelf; and therefore they flouriſhed within 110 or 120 years after the death of Solomon: and according to my reckoning the taking of Troy was but one generation earlier.

GREEKS.

[a] Vita Homeri Herodoto adſcr.

[b] Herod. l. 2. c. 53.

LXXVII. Mythologiſts tell us, that Niobe, the daughter of Phoroneus, was the firſt woman with whom Jupiter lay (1); and that of her he begat Argus, who ſucceeded Phoroneus in the kingdom of Argos, and gave his name to that city; and therefore Argus was born in the beginning of the Silver Age. Unleſs you had rather ſay, that by Jupiter they might here mean Aſterius; for the Phœnicians gave the name of Jupiter to every king, from the time of their firſt coming into Greece with Cadmus and Europa, until the invaſion of Greece by Seſoſtris, and the birth of Hercules; and particularly to the fathers of Minos, Pelops, Lacedæmon, Æacus, and Perſeus.

LXXVIII. The four firſt ages ſucceeded the flood of Deucalion; and ſome tell us, that Deucalion was the ſon of Prometheus, the ſon of Japetus (1), and brother of Atlas. But this was another Deucalion; for Japetus, the father of Prometheus Epimetheus and Atlas, was an Egyptian, the brother of Oſiris, and flouriſhed two generations after the flood of Deucalion.

LXXIX. I have now carried up the chronology of the Greeks as high as to the firſt uſe of letters; the firſt plowing and ſowing of corn; the firſt manufacturing of copper and iron; the beginning of the trades of ſmiths, carpenters, joiners, turners, brick-makers, ſtone-cutters, and potters, in Europe; the firſt

§ LXXVII.

(1) Diod. Sic. lib. 4. c. 14 p. 155. Apollodor. lib. 2. c. 1. § 1.

§ LXXVIII.

(1) Apollodor. lib. 1. c. 7. § II. & c. 2. § III.

walling

CHAPTER FIRST.

walling of cities about; the first building of temples; and the original of oracles in Greece; the beginning of navigation by the stars in long ships with sails; the erecting of the Amphictyonic council; the first ages of Greece, called the Golden, Silver, Brazen, and Iron Ages, and the flood of Deucalion, which immediately preceded them. Those ages could not be earlier than the invention and use of the four metals in Greece, from whence they had their names; and the flood of Ogyges could not be much above two or three ages earlier than that of Deucalion. For among such wandering people as were then in Europe, there could be no memory of things done above three or four ages before the first use of letters. And the expulsion of the shepherds out of Egypt, which gave the first occasion to the coming of people from Egypt into Greece, and to the building of houses and villages in Greece, was scarce earlier than the days of Eli and Samuel: for Manetho (1) tells us, that when they were forced to quit Abaris and retire out of Egypt, they went through the wilderness into Judæa, and built Jerusalem. I do not think, with Manetho, that they were the Israelites under Moses, but rather believe that they were Canaanites; and upon leaving Abaris mingled with the Philistims, their next neighbours: though some of them might assist David and Solomon in building Jerusalem and the temple.

[a] 1 Sam. ix. 16. & xiii. 5, 19, 20.

LXXX. Saul was made king [a], that he might rescue Israel out of the hand of the Philistims, who oppressed them; and in the second year of his reign the Philistims brought into the field against him 'thirty thousand chariots, and six thousand horsemen, and people as the sand which is on the sea shore for multitude.' The Canaanites had their horses from Egypt; and yet in the days of Moses all the chariots of Egypt, with which Pharaoh pursued Israel, were but six hundred (1), Exod. xiv. 7. From the great army of the Philistims against Saul, and the great number

§ LXXIX.

(1) Apud Joseph. contr. Ap. lib. 1. c. 14. p. 1338.

§ LXXX.

(1) The chosen chariots, the king's guard, were but 600. Besides these, an indefinite number went on the pursuit. See Warburton Divine Leg. book IV. § V.

ber of their horses, I seem to gather, that the shepherds had newly relinquished Egypt, and joined them. The shepherds might be beaten and driven out of the greatest part of Egypt, and shut up in Abaris by Misphragmuthosis in the latter end of the days of Eli; and some of them fly to the Philistims, and strengthen them against Israel, in the last year of Eli; and from the Philistims some of the shepherds might go to Zidon; and from Zidon by sea to Asia Minor and Greece: and afterwards, in the beginning of the reign of Saul, the shepherds who still remained in Egypt might be forced by Tethmosis or Amosis, the son of Misphragmuthosis, to leave Abaris, and retire in very great numbers to the Philistims; and upon these occasions several of them, as Pelasgus, Inachus, Lelex, Cecrops, and Abas, might come with their people by sea from Egypt to Zidon and Cyprus, and thence to Asia Minor and Greece, in the days of Eli, Samuel, and Saul; and thereby begin to open a commerce by sea between Zidon and Greece, before the revolt of Edom from Judæa, and the final coming of the Phœnicians from the Red Sea. GREEKS.

LXXXI. Pelasgus reigned in Arcadia, and was the father of Lycaon, according to Pherecydes Athenienſis; and Lycaon died just before the flood of Deucalion (1); and therefore his father Pelasgus might come into Greece about two generations before Cadmus, or in the latter end of the days of Eli. Lycaon sacrificed children (2); and therefore his father might come with his people from the shepherds in Egypt, and perhaps from the regions of Heliopolis, where they sacrificed men, till Amosis abolished that custom (3). Misphragmuthosis, the father of Amosis, drove the shepherds out of a great part of Egypt, and shut the remainder up in Abaris (4): and then great numbers might escape to Greece; some from the regions of Heliopolis under Pelasgus; and others from Memphis and other places, under other captains. And hence it might come to pass, that the Pelasgians were at the first very numerous in Greece, and spake a different language.

§ LXXXI.

(1) See § LXVIII.
(2) Pausan. lib. 8. c. 2.
(3) Manetho apud Porphyrium. Euseb. Præp. lib. 4. p. 93.
(4) Manetho apud Joseph. contr. Ap. lib. 1. c. 14. p. 1338.

from

CHAPTER FIRST.

from the Greek, and were the ringleaders in bringing into Greece the worſhip of the dead.

LXXXII. Inachus is called the ſon of Oceanus (1), perhaps becauſe he came to Greece by ſea. He might come with his people to Argos from Egypt in the days of Eli, and ſeat himſelf upon the river Inachus, ſo named from him (1), and leave his territories to his ſons Phoroneus (1), Ægialeus (1), and Phegeus (2), in the days of Samuel. For Car, the ſon of Phoroneus, built a temple to Ceres in Megara (3), and therefore was contemporary to Erechtheus. Phoroneus reigned at Argos (4), and Ægialeus at Sicyon (5), and founded thoſe kingdoms; and yet Ægialeus is made above five hundred years older than Phoroneus by ſome chronologers. But [a] Acuſilaus, [b] Anticlides, and [c] Plato, accounted Phoroneus the oldeſt king in Greece; and [d] Apollodorus tells us, Ægialeus was the brother of Phoroneus (6). Ægialeus died without iſſue, and after him reigned Europs, Telchin, Apis, Lamedon, Sicyon, Polybus, Adraſtus, and Agamemnon, &c. and Sicyon gave his name to the kingdom. Herodotus [e] ſaith, that Apis in the Greek tongue is Epaphus; and Hyginus, [f] that Epaphus the Sicyonian got Antiopa with child. But the later Greeks have made two men of the two names Apis and Epaphus, or Epopeus, and between them inſerted twelve feigned kings of Sicyon, who made no wars, nor did any thing memorable; and yet reigned five hundred and twenty years, which is, one with another, above forty and three years a-piece (7). If theſe feigned kings be rejected, and the two kings Apis and Epopeus be reunited, Ægialeus will become contemporary to his brother Phoroneus, as he ought to be. For Apis or Epopeus, and Nycteus the guardian

[a] Clem. Al. Strom. lib. 1. c. 21. p. 138.
[b] Plin. l. 7. c. 57.
[c] Plato in Timæo, 1043.
[d] Apollodor. l. 2. c. 1.
[e] Herod. l. 2. c. 153. & lib. 3. c. 27, 28.
[f] Hygin. Fab. 7 & 8.

§ LXXXII.

(1) Apollodor. lib. 2. c. 1. § 1.
(2) Stephanus Byzantinus, under the word φηγοια, produces a paſſage from Charax, in which Phegeus is called the brother of Phoroneus.
(3) Pauſan. lib. 1. c. 40. p. 97. compare c. 39. p. 95. (4) —— Lib. 2. c. 15. p. 144, 145.
(5) —— Lib. 2. c. 5. p. 123. The old chronologers did not take Ægialeus, the firſt king of Sicyon, for the ſame perſon with the brother of Phoroneus. For they made the firſt king of Sicyon much older than Inachus, the father of Phoroneus. See Euſeb. in Chron.
(6) And Clemens ſays expreſsly, that the kingdom of Sicyon, where Ægialeus was the firſt king, in the time of Phoroneus the ſucceſſor of Inachus, p. 138.
(7) Euſeb. in Chron.

of Labdacus, were ſlain in battle about the tenth year of Solomon, as above; and the firſt four kings of Sicyon, Ægialeus, Europs, Telchin, Apis, after the rate of about twenty years to a reign, take up about eighty years; and theſe years counted upwards from the tenth year of Solomon, place the beginning of the reign of Ægialeus upon the twelfth year of Samuel, or thereabout: and about that time began the reign of Phoroneus at Argos. Apollodorus [a] calls Adraſtus king of Argos; but Homer [b] tells us, that he reigned firſt at Sicyon: he was in the firſt war againſt Thebes. Some place Janiſcus and Phæſtus between Polybus and Adraſtus, but without any certainty. 572.

[a] Apollodor. l. 3. c. 6. § 1.
[b] Homer. Il. B. verſ.

GREEKS.

LXXXIII. Lelex might come with his people into Laconia in the days of Eli, and leave his territories to his ſons Myles (1), Eurotas (2), Cleſon (3), and Polycaon (1), in the days of Samuel. Myles ſet up a quern (4), or hand-mill to grind corn, and is reputed the firſt among the Greeks who did ſo: but he flouriſhed before Triptolemus, and ſeems to have had his corn and artificers from Egypt. Eurotas the brother, or as ſome ſay the ſon of Myles, built Sparta, and called it after the name of his daughter Sparta, the wife of Lacedæmon, and mother of Eurydice. Cleſon was the father of Pylas, the father of Sciron, who married the daughter of Pandion the ſon of Erechtheus, and contended with Niſus the ſon of Pandion and brother of Ægeus, for the kingdom; and Æacus adjudged it to Niſus (5). Polycaon invaded Meſſene, then peopled only by villages, called it Meſſene after the name of his wife, and built cities therein (6).

LXXXIV. Cecrops (1) came from Sais in Egypt to Cyprus, and thence into Attica: and he might do this in the days of Samuel,

§ LXXXIII.

(1) Pauſan. lib. 3. c. 1. p. 204.
(2) Eurotas was the ſon of Myles, and the grandſon of Lelex, Pauſan. ibid. Scholiaſt. in Oreſt. Euripid.
(3) Pauſan. lib. 1. c. 39. p. 95 (4) —— Lib. 3. c. 20. p. 260.
(5) According to Pauſanias, Lacedæmon was the builder of Sparta, p. 204.
(6) Pauſan. lib. 4. c. 1. p. 280.

§ LXXXIV.

(1) Vid. Sir John Marſham, Chron. ſect. VIII. *Tit. Cecrops.* That he was an Ægyptian, is affirmed by the Scholiaſt on Ariſtoph. Plut. lin. 773: A Saite, by John Tzetzes in Chil. 5. Hiſt. 18.

CHAPTER FIRST.

and marry Agraule the daughter of Actæus, and ſucceed him in Attica ſoon after; and leave his kingdom to Cranäus in the reign of Saul, or in the beginning of the reign of David: for the flood of Deucalion happened in the reign of Cranäus (2).

LXXXV. Of about the ſame age with Pelaſgus, Inachus, Lelex, and Actæus, was Ogyges (1). He reigned in Bœotia, and ſome of his people were Leleges: and either he or his ſon Eleuſis built the city Eleuſis in Attica; that is, they built a few houſes of clay, which in time grew into a city. Acuſiläus wrote, that Phoroneus was older than Ogyges; and that Ogyges flouriſhed 1020 years before the firſt olympiad (2), as above. But Acuſiläus was an Argive, and feigned theſe things in honour of his country. To call things Ogygian has been a phraſe among the ancient Greeks, to ſignify that they are as old as the firſt memory of things; and ſo high we have now carried up the chronology of the Greeks. Inachus might be as old as Ogyges; but Acuſiläus and his followers made them 700 years older than the truth; and chronologers, to make out this reckoning, have lengthened the races of the kings of Argos and Sicyon, and changed ſeveral contemporary princes of Argos into ſucceſſive kings, and inſerted many feigned kings into the race of the kings of Sicyon.

LXXXVI. Inachus had ſeveral ſons, who reigned in ſeveral parts of Peloponneſus, and there built towns; as Phoroneus, who built Phoronicum, afterwards called Argos, from Argus his grandſon (1); Ægialeus, who built Ægialea, afterwards called Sicyon (2), from Sicyon the grandſon of Erechtheus; Phegeus, who built Phegea, afterwards called Pſophis (3), from Pſophis the daughter of Lycaon: and theſe were the oldeſt towns in Peloponneſus. Then Siſyphus, the ſon of Æolus and grandſon of Hellen, built Ephyra, afterwards called Corinth (4); and Aëthlius,

(2) See § LXVII. note 4.

§ LXXXV.

(1) Euſeb. Exc. Gr. p. 27. (2) Apud African. Euſeb. Præp. Evang. lib. 10. p. 287.

§ LXXXVI.

(1) Pauſan. lib. 2. c. 15. p. 145. (2) —— Lib. 2. c. 5. p. 123. and c. 6. p. 125.
(3) Stephanus in the word Φηγια. Compare Pauſan. lib. 8. c. 24.

lius, the ſon of Æolus, built Elis (5): and before them Cecrops built Cecropia, the citadel of Athens; and Lycaon built Lycoſura (6), reckoned by ſome the oldeſt town in Arcadia (7); and his ſons, who were at leaſt four and twenty in number (8), built each of them a town (9); except the youngeſt, called Oenotrus, who grew up after his father's death, and ſailed into Italy with his people, and there ſet on foot the building of towns, and became the Janus of the Latines. Phoroneus had alſo ſeveral children and grand-children, who reigned in ſeveral places, and built new towns, as Car, Apis, &c. And Hæmon, the ſon of Pelaſgus, reigned in Hæmonia (10), afterwards called Theſſaly, and built towns there. This diviſion and ſubdiviſion has made great confuſion in the hiſtory of the firſt kingdoms of Peloponneſus, and thereby give occaſion to the vain-glorious Greeks to make thoſe kingdoms much older than they really were. But by all the reckonings above-mentioned, the firſt civilizing of the Greeks, and teaching them to dwell in houſes and towns, and the oldeſt towns in Europe, could ſcarce be above two or three generations older than the coming of Cadmus from Zidon into Greece; and might moſt probably be occaſioned by the expulſion of the ſhepherds out of Egypt in the days of Eli and Samuel, and their flying into Greece in conſiderable numbers. But it is difficult to ſet right the genealogies and chronology of the fabulous ages of the Greeks; and I leave theſe things to be further examined.

GREEKS.

LXXXVII. Before the Phœnicians introduced the deifying of dead men, the Greeks had a council of elders in every town for the government thereof, and a place where the elders and people worſhipped their god with ſacrifices. And when many of thoſe towns, for their common ſafety, united under a common council, they erected a Prytaneum, or court, in one of the towns, where the council and people met at certain times to conſult their

(4) Apollodor. lib. 1. c. 9. § III.
(5) Pauſan. lib. 5. c. 1. p. 375. Aethlius was commonly ſaid to be the ſon of Protogenia by Jupiter. But the Eleans themſelves affirmed, that this Jupiter, the father of Aethlius, was Æolus Pauſan. lib. 5. c. 8. p. 393.
(6) Pauſan. lib. 8. c. 2. p. 600. (7) ———— c. 38. p. 678.
(8) Apollodorus ſays fifty, lib. 3. c. 8. § I. (9) Pauſan. lib. 8. c. 3.
(10) See the Scholiaſt on Apoll. Rhod. lib. 3. l. 1089. Stephanus calls Æmon the grandſon of Pelaſgus.

CHAPTER FIRST.

common ſafety, and worſhip their common god with ſacrifices, and to buy and ſell. The towns where theſe councils met, the Greeks called δημοι, people or communities, or corporation towns: and at length, when many of theſe δημοι for their common ſafety united by conſent under one common council; they erected a Prytaneum in one of the δημοι for the common council and people to meet in, and to conſult and worſhip in, and feaſt, and buy, and ſell; and this δημος they walled about for its ſafety, and called την πολιν the city. And this I take to have been the original of villages, market-towns, cities, common-councils, veſtal temples, feaſts, and fairs, in Europe. The Prytaneum, πυρος ταμειον, was a court with a place of worſhip, and a perpetual fire kept therein upon an altar for ſacrificing. From the word Εστια, fire, came the name Veſta; which at length the people turned into a goddeſs, and ſo became fire-worſhippers like the ancient Perſians. And when theſe councils made war upon their neighbours, they had a general commander to lead their armies, and he became their king.

LXXXVIII. So Thucydides [a] tells us, that "under Cecrops "and the ancient kings, until Theſeus, Attica was always inha- "bited city by city, each having magiſtrates and Prytanea: nei- "ther did they conſult the king when there was no fear of dan- "ger; but each apart adminiſtred their own common-wealth, and "had their own council, and even ſometimes made war, as the "Eleuſinians with Eumolpus did againſt Erechtheus. But when "Theſeus, a prudent and potent man, obtained the kingdom, he "took away the courts and magiſtrates of the other cities, and "made them all meet in one council and Prytaneum at Athens." Polemon, as he is cited by [b] Strabo, tells us, that "in this body "of Attica, there were 170 * δημοι, one of which was Eleuſis." And Philochorus [c] relates, that "when Attica was infeſted by ſea "and land by the Cares and Bœoti; Cecrops, the firſt of any "man, reduced the multitude," that is the 170 towns, "into "twelve cities, whoſe names were Cecropia, Tetrapolis, Epacria, "Decelia, Eleuſis, Aphydna, Thoricus, Brauron, Cytherus, Sphet- "tus, Cephiſſia, and Phalerus; and that Theſeus contracted thoſe "twelve cities into one, which was Athens."

[a] Thucyd. l. 2. c. 15. p. 93. & Plutarch in Theſeo, p. 10.

[b] Strabo, l. 9. p. 396.

[c] Apud Strabonem, l. 9. p. 397.

LXXXIX.

GREEKS.

LXXXIX. The original of the kingdom of the Argives was much after the ſame manner: for Pauſanias [a] tells us, "that "Phoroneus, the ſon of Inachus, was the firſt who gathered into "one community the Argives, who till then were ſcattered, and "lived every where apart; and the place where they were firſt "aſſembled was called Phoronicum, the city of Phoroneus." And Strabo [b] obſerves, that "Homer calls all the places which "he reckons up in Peloponneſus, a few excepted, not cities, but "regions; becauſe each of them conſiſted of a convention of "many δημοι, free towns, out of which afterward noble cities "were built and frequented: ſo the Argives compoſed Mantinæa "in Arcadia out of five towns, and Tegea out of nine; and out "of ſo many was Heræa built by Cleombrotus, or by Cleony- "mus: ſo alſo Ægium was built out of ſeven or eight towns, "Patræ out of ſeven, and Dyme out of eight; and ſo Elis was "erected by the conflux of many towns into one city."

[a] Pauſan. l. 2. c. 15. p. 145.

[b] Strabo, l. 8. p. 337.

XC. Pauſanias [c] tells us, that the Arcadians accounted Pelaſgus the firſt man, and that he was their firſt king; and "taught "the ignorant people to built houſes, for defending themſelves "from heat, and cold, and rain; and to make them garments of "ſkins; and inſtead of herbs and roots, which were ſometimes "noxious, to eat the acorns of the beech tree;" and that his ſon Lycaon built the oldeſt city in all Greece. He tells us alſo, that in the days of Lelex the Spartans lived in villages apart. The Greeks therefore began to build houſes and villages in the days of Pelaſgus the father of Lycaon, and in the days of Lelex the father of Myles; and by conſequence about two or three generations before the flood of Deucalion, and the coming of Cadmus. Till then [d] they lived in woods and caves of the earth. The firſt houſes were of clay; till the brothers Euryalus and Hyperbius taught them to harden the clay into bricks, and to build therewith. In the days of Ogyges, Pelaſgus, Æzeus, Inachus, and Lelex, they began to build houſes and villages of clay, Doxius the ſon of Cœlus teaching them to do it (†); and in the days of Lycaon, Phoroneus, Ægialeus, Phegeus, Eurotas, Myles, Po-

[c] Pauſan. l. 8. c. 1, 2. p. 598, 599.

[d] Plin. l. 7. c. 56.

§ XC.

(†) Plin. lib. 7. c. 57.

Iycaon,

CHAPTER FIRST.

lycaon, and Cecrops, and their ſons, to aſſemble the villages into δημοι, and the δημοι into cities.

XCI. When Oenotrus the ſon of Lycaon carried a colony into Italy, "he [a] found that country for the moſt part uninhabited; "and where it was inhabited, peopled but thinly: and ſeizing a "part of it, he built towns in the mountains, little and nume- "rous," as above. Theſe towns were without walls; but after this colony grew numerous, and began to want room, "they "expelled the Siculi, compaſſed many cities with walls, and be- "came poſſeſſed of all the territory between the two rivers Liris "and Tibre (1)." And it is to be underſtood, that thoſe cities had their councils and Prytanea after the manner of the Greeks. For Dionyſius [b] tells us, that the new kingdom of Rome, as Romulus left it, conſiſted of thirty courts or councils (2), in thirty towns, each with the ſacred fire kept in the Prytaneum of the court, for the ſenators who met there to perform ſacred rites, after the manner of the Greeks (3). "But when Numa the ſuc- "ceſſor of Romulus reigned, he leaving the ſeveral fires in their "own courts, inſtituted one common to them all at Rome (4):" whence Rome was not a compleat city before the days of Numa.

[a] Dionyſ. l. 1. c. 12. p. 10.

[b] Dionyſ. l. 2. p. 126.

XCII. When navigation was ſo far improved that the Phœnicians began to leave the ſea-ſhore, and ſail through the Mediterranean by the help of the ſtars, it may be preſumed, that they began to diſcover the iſlands of the Mediterranean, and for the ſake of traffic to ſail as far as Greece: and this was not long before they carried away Io, the daughter of Inachus, from Argos. The Cares (1) firſt infeſted the Greek ſeas with piracy; and then Minos the ſon of Europa got up a potent fleet, and ſent out colonies. For Diodorus [c] tells us, that the Cyclades iſlands, thoſe near Crete, were at firſt deſolate and uninhabited; but Minos, having a potent fleet, ſent many colonies out of Crete, and peopled many of them; and particularly, that the iſland Carpa-

[c] Diodor. l. 5. p. 240.

§ XCI.

(1) Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 9. p. 8. (2) ——— lib. 2. c. 7. p. 82.
(3) ——— c. 13. p. 93. (4) ——— c. 66. p. 126.

XCII.

(1) Thucydid. lib. 1. c. 8. p. 5. Herodotus ſays, that the Carians manned the fleets of Minos, lib. 1. c. 171.

thus

thus [a] was firſt ſeized by the ſoldiers of Minos. Syme lay waſte and deſolate till Triops came thither with a colony under Chthonius [b]. Strongyle, or Naxus, was firſt inhabited by the Thracians in the days of Boreas [c], a little before the Argonautic expedition. Samos was at firſt deſert, and inhabited only by a great multitude of terrible wild beaſts, till Macareus peopled it, as he did alſo the iſlands Chius and Cos (2). Leſbos lay waſte and deſolate till Xanthus ſailed thither with a colony (2). Tenedos lay deſolate till Tennes, a little before the Trojan war, ſailed thither from Troas (3). Ariſtæus, who married Autonöe the daughter of Cadmus, carried a colony from Thebes into Cæa, an iſland not inhabited before (4). The iſland Rhodes was at firſt called Ophiuſa (5), being full of ſerpents before Phorbas, a prince of Argos, went thither, and made it habitable by deſtroying the ſerpents (6), which was about the end of Solomon's reign; in memory of which he is delineated in the heavens in the conſtellation of Ophiuchus (7). The diſcovery of this and ſome other iſlands made a report, that they roſe out of the ſea. "*In Aſiâ* "*Delos emerſit, & Hiera, & Anaphe, & Rhodus,*" ſaith [d] Ammianus. And [e] Pliny; "*Claræ jampridem inſulæ, Delos & Rho-* "*dos memoriæ produntur enatæ; poſtea minores; ultra Melon, Ana-* "*phe; inter Lemnum & Helleſpontum, Nea; inter Lebedum &* "*Teon, Halone, &c.*"

[a] Diodor. l. 5. c. 54. p. 225.

[b] Diodor. l. 5. c. 53. p. 225.

[c] Diodor. l. 5. c. 50. p. 224.

[d] Ammian. l. 17. c. 7.

[e] Plin. l. 2. c. 87.

XCIII. Diodorus [f] tells us alſo, that the ſeven iſlands called Æolides, between Italy and Sicily, were deſert and uninhabited till Lipparus and Æolus, a little before the Trojan war, went thither from Italy, and peopled them. And that [g] Malta and Gaulus, or Gaudus, on the other ſide of Sicily, were firſt peopled by Phœnicians. And ſo was Madera without the Straits. And Homer writes, that Ulyſſes found the iſland Ogygia covered with wood, and uninhabited, except by Calypſo and her maids (1), who lived in a cave without houſes (2). And it is not likely that

[f] Diodor. l. 5. c. 7. p. 202, 204.

[g] Diodor. l. 5. c. 12. p. 204.

(2) Diod. Sic. lib. 5. c. 81. p. 239. (3) ——— c. 83. p. 240.
(4) ——— lib. 4. c. 81, 82. p. 195. (5) Strabo, lib. 14 p. 653.
(6) Diod. Sic. lib. 5. c. 58. p. 228. Compare Euſeb. Chron.
(7) Polyzelus Rhodius apud Hygin. Poet. Aſtr. lib. 2. c. 14.

§ XCIII.

(1) Od. H. 245—248. E. 63—69 & 199. (2) Od. E. 57 & 194.

Great

CHAPTER FIRST.

Great Britain and Ireland could be peopled before navigation was propagated beyond the Straits.

XCIV. The Sicaneans were reputed the firſt inhabitants of Sicily. They built little villages or towns upon hills, and every town had its own king; and by this means they ſpread over the country, before they formed themſelves into larger governments with a common king. Philiſtus [a] ſaith, that "they were tranſ-"planted into Sicily from the river Sicanus in Spain;" and Dionyſius, [b] that "they were a Spaniſh people who fled from the "Ligures in Italy." He means the Ligures [c] who oppoſed Hercules when he returned from his expedition againſt Geryon in Spain, and endeavoured to paſs the Alps out of Gaul into Italy. Hercules that year got into Italy, and made ſome conqueſts there, and founded the city Croton (1); and [d] after winter, upon the arrival of the fleet from Erythra in Spain, ſailed to Sicily, and there left the Sicani: for "it was his cuſtom to recruit his army "with conquered people, and after they had aſſiſted him in mak-"ing new conqueſts, to reward them with new feats [2]." This was the Egyptian Hercules, who had a potent fleet, and in the days of Solomon ſailed to the Straits, and according to his cuſtom ſet up pillars there, and conquered Geryon, and returned back by Italy and Sicily to Egypt, and was by the ancient Gauls called *Ogmius* (3), and by the Egyptians [e] *Nilus:* for Erythra and the country of Geryon were without the Straits. Dionyſius [f] repreſents this Hercules contemporary to Evander.

[a] Apud Diodor. l. 5. c. 6. p. 201.
[b] Dionyſ. l. 1. c. 22. p. 17.
[c] Dionyſ. l. 1. c. 41. p. 33, 34.
[d] Dionyſ. l. 1. c. 44. p. 35.
[e] Ptol. Hephæſt. l. 2.
[f] Dionyſ. l. 2. p. 34.

XCV. The firſt inhabitants of Crete, according to Diodorus, were called Eteocretans [g]; but whence they were, and how they came thither, is not ſaid in hiſtory. Then ſailed thither a colony of Pelaſgians from Greece; and ſoon after Teutamus, the grandfather of Minos, carried thither a colony of Dorians from Laconia, and from the territory of Olympia in Peloponneſus (1). And theſe ſeveral colonies ſpake ſeveral languages (2), and fed on the ſpontaneous fruits of the earth, and lived quietly in caves

[g] Diodor. l. 5. c. 64. p. 230.

§ XCIV.

(1) That Hercules founded Croton, ſeems to be a conjecture of our author's taken from the fable of Myſcelus's dream. See Ovid Metamorph. lib. 15. lin. 1—59. Dionyſius Halicarnaſſenſis (lib. 2. c. 59 p. 121) and Strabo (p. 262) mention Myſcelus as the founder of Croton.

(2) Dionyſ. Hal. lib. 1. c. 42. p. 34. (3) Bochart. Chanaan. lib. 1. c. 42.

and

GREEKS.

and huts, till the invention of iron tools in the days of Aſterius the ſon of Teutamus; and at length were reduced into one kingdom, and one people, by Minos (3), who was their firſt lawgiver, and built many towns and ſhips, and introduced plowing and ſowing, and in whoſe days the Curetes conquered his father's friends in Crete and Peloponneſus. The Curetes [a] ſacrificed children to Saturn; and, according to Bochart [b], were Philiſtims. And Euſebius ſaith (4) that Crete had its name from Cres, one of the Curetes who nurſed up Jupiter. But whatever was the original of the iſland, it ſeems to have been peopled by colonies which ſpake different languages, till the days of Aſterius and Minos, and might come thither two or three generations before, and not above, for want of navigation in thoſe ſeas.

[a] Iſter apud Porphyr. abſt. l. 2. ſ. 56. Euſeb. Præp: lib. 4. p. 95.
[b] Bochart. Canaan. l. 1. c. 15.

XCVI. The iſland Cyprus was diſcovered by the Phœnicians not long before: for Eratoſthenes [c] tells us, "that Cyprus was at "firſt ſo overgrown with wood, that it could not be tilled; and "that they firſt cut down the wood for the melting of copper and "ſilver; and afterwards, when they began to ſail ſafely upon the "Mediterranean," that is, preſently after the Trojan war, "they "built ſhips and even navies of it: and when they could not thus "deſtroy the wood, they gave every man leave to cut down what "wood he pleaſed, and to poſſeſs all the ground which he cleared "of wood." So alſo Europe at firſt abounded very much with woods; one of which, called the Hercinian, took up a great part of Germany, being full nine days journey broad, and above forty long, in Julius Cæſar's days: and yet the Europeans had been cutting down their woods, to make room for mankind, ever ſince the invention of iron tools in the days of Aſterius and Minos.

[c] Apud Strabonem. lib. 14. p. 684.

XCVII. All theſe footſteps there are of the firſt peopling of Europe, and its iſlands, by ſea. Before thoſe days it ſeems to have been thinly peopled, from the northern coaſt of the Euxine Sea, by Scythians deſcended from Japhet; who wandered without

§ XCV.

(1) Dionyſ. Sic. lib. 5. c. 80. p 238. And all theſe nations, with the Eteocretans and ſome Achæans, who are likewiſe mentioned by Diodorus, inhabited Crete in the days of Ulyſſes. Homer. Od. T. lin. 172—178.

(2) Homer. ibid. (3) Diod. Sic. lib. 5. c. 80. p. 238. (4) In Chron.

CHAPTER FIRST.

houſes, and ſheltered themſelves from rain and wild beaſts in thickets and caves of the earth; ſuch as were the caves in mount Ida in Crete, in which Minos was educated and buried; the cave of Cacus, and the Catacombs in Italy, near Rome and Naples, afterwards turned into burying-places; the Syringes, and many other caves in the ſides of the mountains of Egypt; the caves of the Troglodytes between Egypt and the Red Sea; and thoſe of the Phauruſii in Africa, mentioned by [a] Strabo; and the caves, and thickets, and rocks, and high places, and pits, in which the Iſraelites hid themſelves from the Philiſtims in the days of Saul, 1 Sam. xiii. 6. But of the ſtate of mankind in Europe in thoſe days, there is now no hiſtory remaining.

[a] Strabo, l. 17. p. 828.

XCVIII. The antiquities of Libya were not much older than thoſe of Europe. For Diodorus [b] tells us, that Uranus the father of Hyperion, and grandfather of Helius and Selene, that is, Ammon the father of Seſac, "was their firſt common king, and "cauſed the people, who till then wandered up and down, to "dwell in towns." And Herodotus [c] tells us, that all Media was peopled by δημοι, towns without walls, till they revolted from the Aſſyrians; which was about 267 years after the death of Solomon. And that after that revolt they ſet up a king over them, and built Ecbatane with walls for his ſeat; the firſt town which they walled about. And about 72 years after the death of Solomon, Benhadad king of Syria [d] had two and thirty kings in his army againſt Ahab. And when Joſhuah conquered the land of Canaan, every city of the Canaanites had its own king, like the cities of Europe, before they conquered one another; and one of thoſe kings, Adonibezek, the king of Bezek, had conquered ſeventy other kings a little before, Judg. i. 7. And therefore towns began to be built in that land not many ages before the days of Joſhuah. For the patriarchs wandered there in tents, and fed their flocks wherever they pleaſed; the fields of Phœnicia not being yet fully appropriated for want of people. The countries firſt inhabited by mankind were in thoſe days ſo thinly peopled, that [e] four kings from the coaſts of Shinar and Elam

[b] Diodor. l. 3. c. 56, 57. p. 133.

[c] Herod. l. 1. c. 96—98.

[d] 1 Kings xx. 16.

[e] Geneſ. xiv. Deut. ii. 9. 12. 19—22.

§ XCVIII.

(1) This ſeems to be a miſtake. The 318 men were Abraham's own ſervants and dependants.

invaded and ſpoiled the Rephaims, and the inhabitants of the countries of Moab, Ammon, Edom, and the kingdoms of Sodom, Gomorrah, Admah, and Zeboim; and yet were purſued and beaten by Abraham with an armed force of only 318 men, the whole force which Abraham and the princes with him (1) could raiſe. And Egypt was ſo thinly peopled before the birth of Moſes, that Pharaoh ſaid of the Iſraelites; "[a] Behold the people of "the children of Iſrael are more and mightier than we." And to prevent their multiplying and growing too ſtrong, he cauſed their male children to be drowned.

GREEKS.

[a] Exod. i. 9. 22.

XCIX. Theſe footſteps there are of the firſt peopling of the earth by mankind, not long before the days of Abraham; and of the overſpreading it with villages, towns, and cities, and their growing into kingdoms, firſt ſmaller and then greater, until the riſe of the monarchies of Egypt, Aſſyria, Babylon, Media, Perſia, Greece, and Rome, the firſt great empires on this ſide India. Abraham was the fifth from Peleg (1); and all mankind (2) lived together in Chaldea under the government of Noah and his ſons, until the days of Peleg. So long they were of one language, one ſociety, and one religion. And then they divided the earth, being perhaps diſturbed by the rebellion of Nimrod, and forced to leave off building the Tower of Babel. And from thence they ſpread themſelves into the ſeveral countries, which fell to their ſhares; carrying along with them the laws, cuſtoms, and religion, under which they had till thoſe days been educated and governed by Noah, and his ſons and grand-ſons. And theſe laws were handed down to Abraham, Melchizedek, and Job, and their contemporaries; and for ſome time were obſerved by the judges of the eaſtern countries. So Job [b] tells us, that adultery was "an heinous crime, yea an iniquity to be puniſhed by the "judges." And of idolatry [c] he ſaith, "If I beheld the ſun "when it ſhined, or the moon walking in brightneſs, and my "heart hath been ſecretly inticed, or my mouth hath kiſſed my "hand, this alſo were an iniquity to be puniſhed by the judge:

[b] Job xxxi. 11.

[c] Job xxxi. 26—28.

§ XCIX.

(1) Geneſis xi. 18—26. Luke iii. 34, 35. (2) Geneſis x. 25. xi. 1, 2.

CHAPTER FIRST.

" for I ſhould have denied the God that is above." And there being no diſpute between Job and his friends about theſe matters, it may be preſumed, that they alſo with their countrymen were of the ſame religion. Melchizedek was a prieſt of the moſt high God, and Abraham voluntarily paid tythes to him (3); which he would ſcarce have done, had they not been of one and the ſame religion. The firſt inhabitants of the land of Canaan ſeem alſo to have been originally of the ſame religion; and to have continued in it till the death of Noah, and the days of Abraham. For Jeruſalem was anciently [a] called Jebus, and its people Jebuſites, and Melchizedek was their prieſt and king. Theſe nations revolted therefore after the days of Melchizedek to the worſhip of falſe gods; as did alſo the poſterity of Iſmael, Eſau, Moab, Ammon, and that of Abraham by Keturah: and the Iſraelites themſelves were very apt to revolt. And one reaſon why Terah went from Ur of the Chaldees, to Haran in his way to the land of Canaan; and why Abraham afterward left Haran, and went into the land of Canaan; might be to avoid the worſhip of falſe gods, which in their days began in Chaldea, and ſpread every way from thence; but did not yet reach into the land of Canaan. Several of the laws and precepts in which this primitive religion conſiſted, are mentioned in the book of Job, chap. i. ver. 5, and chap. xxxi. viz. "Not to blaſpheme God; nor " to worſhip the ſun or moon; nor to kill; nor ſteal; nor to com- " mit adultery; nor truſt in riches; nor oppreſs the poor or fa- " therleſs; nor curſe your enemies; nor rejoice at their misfor- " tunes: but to be friendly, and hoſpitable, and merciful; and to " relieve the poor and needy; and to ſet up judges." This was the morality and religion of the firſt ages, ſtill called by the Jews, " The precepts of the ſons of Noah." This was the religion of Moſes and the prophets, comprehended in the two great commandments, of " loving the Lord our God with all our heart " and ſoul and mind, and our neighbour as ourſelves." This was the religion enjoined by Moſes to the uncircumciſed ſtranger within the gates of Iſrael, as well as to the Iſraelites: and this is the primitive religion of both Jews and Chriſtians, and ought to

[a] 1 Chron. xi. 4, 5. Judg. i. 21. 2 Sam. v. 6.

(3) Geneſis xiv. 18—20

be

GREEKS.

be the ſtanding religion of all nations, it being for the honour of God, and good of mankind. And Moſes adds the precept of " being merciful even to brute beaſts, ſo as not to ſuck out their " blood; nor to cut off their fleſh alive with the blood in it; nor " to kill them for the ſake of their blood, nor to ſtrangle them; " but in killing them for food, to let out their blood, and ſpill it " upon the ground," Gen. ix. 4, and Levit. xvii. 12, 13. This law was ancienter than the days of Moſes, being given to Noah and his ſons long before the days of Abraham: and therefore when the apoſtles and elders in the council at Jeruſalem declared, that the Gentiles were not obliged to be circumciſed and keep the law of Moſes, they excepted this law of " abſtaining from blood, " and things ſtrangled," as being an earlier law of God, impoſed not on the ſons of Abraham only, but on all nations, while they lived together in Shinar under the dominion of Noah; and of the ſame kind is the law of " abſtaining from meats offered to " idols or falſe gods, and from fornication." So then, " the be- " lieving that the world was framed by one ſupreme God, and is " governed by him; and the loving and worſhipping him, and " honouring our parents; and loving our neighbour as ourſelves; " and being merciful even to brute beaſts;" is the eldeſt of all religions. And the original of letters, agriculture, navigation, muſic, arts and ſciences, metals, ſmiths, and carpenters, towns and houſes, was not older in Europe than the days of Eli, Samuel, and David; and before thoſe days the earth was ſo thinly peopled, and ſo overgrown with woods, that mankind could not be much older than is repreſented in Scripture.

CHAP.

CHAP. II.

OF THE EMPIRE OF EGYPT.

CHAPTER SECOND.

THE Egyptians anciently boasted of a very great and lasting empire under their kings Ammon, Osiris, Bacchus, Sesostris, Hercules, Memnon, &c. reaching eastward to the Indies, and westward to the Atlantic Ocean; and out of vanity have made this monarchy some thousands of years older than the world. Let us now try to rectify the chronology of Egypt, by comparing the affairs of Egypt with the synchronizing affairs of the Greeks and Hebrews (1).

II. Bacchus the conqueror loved two women, Venus (1) and Ariadne (2). Venus was the mistress of Anchises (3) and Cinyras (4), and mother of Æneas, who all lived till the destruction of Troy; and the sons of Bacchus and Ariadne were Argonauts; as above: and therefore the great Bacchus flourished but one generation before the Argonautic expedition. This Bacchus [a] was potent at sea; conquered eastward as far as India (5); returned in triumph (5); brought his army over the Hellespont (6); conquered Thrace (6); left music, dancing and poetry there; killed Lycurgus

[a] Vide Hermippum apud Athenæum, l. 1. c. 21. p. 27.

CHAP. II. § I.

(1) The conclusions from the supposed synchronisms of the Greek and the Egyptian story, are in many instances unsound, and perhaps in all precarious. For this reason: that our author takes these synchronisms from Greek chronologers; who have probably for the most part misrepresented them, magnifying the antiquity of their own country, and under-rating that of the Egyptians: and then he applies to every Egyptian personage that date, which his own system assigns to the contemporaneous Greeks.

§ II.

(1) Alexand. Aphrodis. apud Anonym. de Incredib. c. 16. Scholiast. in Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 932. Pausan. lib. 9. c. 31. p. 771. Diod. Sic. lib. 4. c. 6. p. 149.
(2) Hesiod. Theogon. lin. 947. (3) Ibid. lin. 1008.

curgus king of Thrace, and Pentheus the grandson of Cadmus (7); gave the kingdom of Lycurgus to Tharops (8); and one of his minstrells, called by the Greeks Calliope, to Oeagrus the son of Tharops; and of Oeagrus and Calliope was born Orpheus, who sailed with the Argonauts. This Bacchus was therefore contemporary to Sesostris (9); and both being kings of Egypt, and potent at sea, and great conquerors, and carrying on their conquests into India and Thrace, they must be one and the same man. EGYPT.

III. The ancient Greeks, who made the fables of the gods, related that Io, the daughter of Inachus, was carried into Egypt, and there became the Egyptian Isis (1); and that Apis, the son of Phoroneus, after death became the god Serapis (2); and some said that Epaphus was the son of Io (3). Serapis and Epaphus are Osiris (3); and therefore Isis and Osiris, in the opinion of the ancient Greeks who made the fables of the gods, were not above two or three generations older than the Argonautic expedition. Dicæarchus, as he is cited by the Scholiast upon Apollonius, [a] represents them two generations older than Sesostris; saying, that after Orus the son of Osiris and Isis, reigned Sesonchosis. He seems to have followed the opinion of the people of Naxus, who made Bacchus two generations older than Theseus, and for that end feigned two Minos's and two Ariadnes: for by the consent of all antiquity, Osiris and Bacchus were one and the same king of Egypt. This is affirmed by the Egyptians, as well as by the Greeks; and some of the antient mythologists, as Eumolpus and Orpheus, [b] called Osiris by the names of Dionysus and Sirius: Osiris was king of all Egypt, and a great conqueror, and came over

[a] Argonaut. l. 4. v. 272.

[b] Diodor. l. 1. c. 11. p. 7. c. 13. p. 9. c. 15. p. 9. c. 17. p. 10. c. 20. p. 12. Add Plutarch de Is. et Osir. passim.

(4) Julius Firmicus de Err. prof relig. Clemens Alex. Protrept. c. 5. p. 12 & 13.
(5) Diod Sic. lib. 2. c. 38. p. 87. lib. 4. c. 3. p. 147. Apollodor. lib. 3. c. 5. § I.
(6) Diod. Sic. lib. 3. c. 64. p. 139. (7) Ibid. Apollodor. lib. 3. c. 5. § I.
(8) Diod. Sic. lib. 3. c. 64. p. 139.
(9) Admitting, what has not yet been proved, that Sesostris lived but one generation before the Argonautic expedition. All the proof that we have of this, in the preceding chapter, rests on the ill-founded supposition, that Sesostris was the same person with the Sesac of holy writ.

§ III.

(1) Apollodor. lib. 2. c. 1. § III. Euseb. Exc. Gr. p. 27.
(2) ——— § I.
(3) See Plutarch de Is. et Os. T. II. p. 362. Diod. Sic. lib. 1. c. 25. p. 15.

CHAPTER SECOND.

over the Helleſpont in the days of Triptolemus, and ſubdued Thrace, and there killed Lycurgus (4); and therefore his expedition falls in with that of the great Bacchus. Oſiris, Bacchus, and Seſoſtris lived about the ſame time; and by the relation of hiſtorians, were all of them kings of Egypt; and reigned at Thebes (5), and adorned that city; and were very potent by land and ſea. All three were great conquerors; and carried on their conqueſts by land through Aſia, as far as India. All three came over the Helleſpont (6); and were there in danger of loſing their army. All three conquered Thrace (6); and there put a ſtop to their victories, and returned back from thence into Egypt. All three left pillars with inſcriptions in their conqueſts (6). And therefore all three muſt be one and the ſame king of Egypt (7); and this king can be no other than Seſac. All Egypt, including Thebais, Ethiopia, and Libya, had no common king before the expulſion of the ſhepherds who reigned in the lower Egypt: no conqueror of Syria, India, Aſia Minor, and Thrace, before Seſac (8): and the ſacred hiſtory admits of no Egyptian conqueror of Paleſtine before this king (9).

[a] Apud Diodorum, l. 3. p. 140.

IV. Thymætes [a], who was contemporary to Orpheus, and wrote a poeſy, called Phrygia, of the actions of Bacchus in very old language and character, ſaid, that Bacchus had Libyan women in his army (1); amongſt whom was Minerva, a woman born in Libya, near the river Triton (2); and that Bacchus commanded the men, and Minerva the women (1). Diodorus [b] calls her Myrina; and ſaith, that ſhe was queen of the Amazons in Libya; and there conquered the Atlantides and Gorgons; and then made a league with Orus the ſon of Iſis, ſent to her by his father

[b] Diodor. l. 3. p. 131, 132.

(4) Diod. Sic. lib. 1. c. 20. p. 12. (5) ——— c. 15. p. 91.
(6) ——— c. 20. p. 12. c. 55. p. 35. Herodot. lib. 2. c. 103.
(7) Provided the aſſumption be true, that all three lived at one and the ſame time.

(8) FROM what hiſtory does it appear that Seſac conquered India, Aſia Minor, and Thrace? Not from Joſephus. For admitting that he ſpeaks upon good information, when he ſays, that Herodotus aſcribes to Seſoſtris the actions of Seſac; he is not neceſſarily to be underſtood of any other of the actions aſcribed to Seſoſtris by Herodotus, but the exploits in Syria-paleſtine.
(9) The Chaſms in the ſacred hiſtory, in the period of the judges, admit of any thing.

§ IV.

(1) Diod. Sic. lib 3. c. 70. p. 142. Diodorus, however, does not relate this after Thymœtes; but after one Dionyſius, a compiler of mythology, who from the works of the antients, both

father Oſiris or Bacchus for that purpoſe, and paſſing through Egypt. Egypt ſubdued the Arabians, and Syria, and Cilicia, and came through Phrygia, viz. in the army of Bacchus, to the Mediterranean; but paſſing over into Europe, was ſlain with many of her women by the Thracians and Scythians, under the conduct of Sipylus, a Scythian, and Mopſus, a Thracian, whom Lycurgus king of Thrace had baniſhed. This was that Lycurgus who oppoſed the paſſage of Bacchus over the Helleſpont; and was ſoon after conquered by him, and ſlain. But afterwards Bacchus met with a repulſe from the Greeks, under the conduct of Perſeus; who ſlew many of his women, as Pauſanias [a] relates, and was aſſiſted by the Scythians and Thracians under the conduct of Sipylus and Mopſus. Which repulſes, together with a revolt of his brother Danäus in Egypt, put a ſtop to his victories. And in returning home he left part of his men in Colchis and at Mount Caucaſus, under Æetes and Prometheus; and his women upon the river Thermodon near Colchis, under their new queens Marthefia and Lampeto. For Diodorus [b], ſpeaking of the Amazons who were ſeated at Thermodon, ſaith, that they dwelt originally in Libya, and there reigned over the Atlantides, and invading their neighbours, conquered as far as Europe: and Ammianus [c], that the ancient Amazons, breaking through many nations, attacked the Athenians, and there receiving a great ſlaughter (3), retired to Thermodon: and Juſtin [d], that theſe Amazons had at firſt, he means at their firſt coming to Thermodon, two queens who called themſelves daughters of Mars; and that they conquered part of Europe, and ſome cities of Aſia, viz. in the reign of Minerva; and then ſent back part of their

[a] Pauſan. l. 2. c. 20. p. 155.

[b] Diodor. l. 3. p. 130. & Schol. Apollonii. l. 2. v. 967.

[c] Ammian. l. 22. c. 8.

[d] Juſtin. l. 2. c. 4.

both mythologers and poets, had collected a hiſtory of Bacchus and the Amazons, the Argonauts, the Trojan war, and various other things, Diod. lib. 3. c. 65. p. 140. The learned Weſſeling takes this Dionyſius to be the Mileſian, who is mentioned in Suidas as the author of a Cyclus Hiſtoricus, and other works in hiſtory and mythology. It is from this Dionyſius that Diodorus takes the account, which he gives, of Thymœtes and his writings. It does not appear, that Diodorus had himſelf ever ſeen the poems of Thymœtes, or that they were extant in his time.
(2) Diod. Sic. lib. 3. c. 69. p. 142.

(3) THE unſucceſsful expedition of the Amazons, in times before the Trojan war, was famous in antiquity, and it was a favourite topic with the orators. It is mentioned by Plato in the Menexenus; by Iſocrates, in his Panegyric; and more circumſtantially deſcribed by Lyſias, in his Epitaphian. Lyſias agrees with Iſocrates, that not one of this female army returned home. And he repreſents the unproſperous event of the expedition as the ruin of the nation.

CHAPTER SECOND.

army, with a great booty, under their ſaid new queens; and that Marpeſia being afterwards ſlain, was ſucceeded by her daughter Orithyia, and ſhe by Penthesilëa; and that Theſeus captivated and married Hippolyte the ſiſter of Antiopa. Hercules made war upon the Amazons; and in the reign of Orithyia and Penthesilëa they came to the Trojan war. Whence the firſt wars of the Amazons in Europe and Aſia, and their ſettling at Thermodon, were but one generation before thoſe actions of Hercules and Theſeus; and but two, before the Trojan war; and ſo fell in with the expedition of Seſoſtris. And ſince they warred in the days of Iſis and her ſon Orus, and were a part of the army of Bacchus or Oſiris; we have here a further argument for making Oſiris and Bacchus contemporary to Seſoſtris, and all three one and the ſame king with Seſac.

V. The Greeks reckon Oſiris and Bacchus to be ſons of Jupiter; and the Egyptian name of Jupiter is Ammon. Manetho, in his 11th and 12th Dynaſties, as he is cited by Africanus and Euſebius (1), names theſe four kings of Egypt as reigning in order; Ammenemes; Geſongeſes or Seſonchoris, the ſon of Ammenemes; Ammenemes, who was ſlain by his eunuchs; and Seſoſtris, who ſubdued all Aſia and part of Europe. Geſongeſes and Seſonchoris are corruptly written for Seſonchoſis; and the two firſt of theſe four kings, Ammenemes and Seſonchoſis, are the ſame with the two laſt, Ammenemes and Seſoſtris; that is, with Ammon and Seſac. For Diodorus ſaith [a], that Oſiris built in Thebes a magnificent temple to his parents Jupiter and Juno; and two other temples (2) to Jupiter, a larger to Jupiter Uranius, and a leſs to his father Jupiter Ammon, who reigned in that city: and [b] Thymætes above-mentioned, who was contemporary to Orpheus,

[a] Diodor. l. 1 p. 9.

[b] Apud Diodor. l. 3. p. 141.

§ V.

(1) Euſeb. Exc. Gr. p. 15. (2) Not two other temples, but two ſhrines. (3) See § IV. not. 1. (4) That is, if Seſoſtris be the ſame with Oſiris. For Oſiris was the founder of Thebes. (Diod. Sic. lib. 1. c. 15. p. 9.) No antient writer mentions Seſoſtris as the founder of this city. (5) Amnon.

§ VI.

(1) THE worſhip of the calf in Egypt was certainly as old as the departure of the Iſraelites. And Egypt was a great corn country in the time of Jacob. The king therefore who taught the Egyptians agriculture, and, for that benefaction, was worſhipped by them in the ox or calf; was older than Jacob, and was ſo worſhipped before the departure of the Iſraelites. This argument, againſt our author's notion of the identity of Oſiris and Seſac, is unanſwerable. It is urged with great force by biſhop Warburton in his Divine Legation, book IV. ſect. V.

(2) IT ſtood at a very ſmall diſtance to the ſouth of the head of the Delta. The ſtreams, which form the delta, branch off from the main river at different places: of which, that where the Agathodæmon ſeparated, was the ſouthernmoſt, and was called the great Delta. This Ptolemy places in 30° of north latitude, and Memphis in 29° 50'.

Orpheus, wrote expreſsly, that the father of Bacchus was Ammon, a king reigning over part of Libya (3); that is, a king of Egypt reigning over all that part of Libya anciently called Ammonia. Stephanus [a] ſaith, "Πασα ἡ Λιβυη ἐτως ἐκαλειτο ἀπο "Αμμωνος" "All Libya was anciently called Ammonia from "Ammon." This is that king of Egypt from whom Thebes was called No-Ammon, and Ammon-No, the city of Ammon, and by the Greeks *Dioſpolis*, the city of Jupiter Ammon. Seſoſtris built it ſumptuouſly, and called it by his father's name (4); and from the ſame king the [b] river called Ammon (5), the people called *Ammonii*, and the [c] promontory *Ammonium* in *Arabia Fœlix* had their names.

[a] Steph. in Ἀμμωνια.

[b] Plin. l. 6. c. 28.

[c] Ptol. l. 6. c. 7.

EGYPT.

VI. The lower part of Egypt being yearly overflowed by the Nile, was ſcarce inhabited before the invention of corn, which made it uſeful: and the king, who by this invention firſt peopled it and reigned over it, perhaps the king of the city Meſir, where Memphis was afterwards built, ſeems to have been worſhipped by his ſubjects after death in the ox or calf (1), for this benefaction. For this city ſtood in the moſt convenient place to people the lower Egypt (2); and from its being compoſed of two parts, ſeated on each ſide of the river Nile, might give the name of Mizraim to its founder and people: unleſs you had rather refer the word to the double people, thoſe above the Delta, and thoſe within it. And this I take to be the ſtate of the lower Egypt, till the ſhepherds or Phœnicians, who fled from Joſhuah, conquered it, and being afterwards conquered by the Ethiopians, fled into Afric and other places. For there was a tradition, that ſome of them fled into Afric; and St. Auſtin [d] confirms this, by telling us, that the common people of Afric being aſked who they were, replied *Chanani*; that is, Canaanites. "*Interrogati* "*ruſtici noſtri*," ſaith he, "*quid ſint, Punicè reſpondentes Chana-* "*ni, corruptâ ſcilicet voce ſicut in talibus ſolet, quid aliud reſpon-*

[d] D. Auguſtin. in expoſit. epiſt. ad Rom. ſub initio. R. Steph.

CHAPTER SECOND.

" *dent quàm Chanaanæi?*" Procopius alſo [a] tells us of two pillars in the weſt of Afric, with inſcriptions ſignifying, that the people were Canaanites who fled from Joſhuah: and Euſebius [b] tells us, that theſe Canaanites, flying from the ſons of Iſrael, built Tripolis in Afric; and the Jeruſalem Gemara, [c] that the Gergeſites fled from Joſhua, going into Afric. And Procopius relates their flight in this manner. " Επει δε ἡμας ὁ της ἱστοριας " λογος ενθαυθ' ηγαγεν· επαναδικες ειπειν ανωθεν, ὅθεν τε τα Μαυρουσιων " εθνη ες Λιβυην ηλθε, και ὁπως ᾠκησαντο. Επειδη Ἑβραιοι εξ Αιγυπτου " ανεχωρησαν, και αδικι των Παλαιστινης ὁριων εγενοντο· Μωσης μεν σο- " φος ανηρ, ὃς αυτος της ὁδου ἡγησατο, θνησκει· διαδεχεται δε την ἡγε- " μονιαν Ιησους ὁ του Ναυη παις· ὃς ες τε την Παλαιστινην τον λεων του- " τον εισηγαγε· και αρετην εν τῳ πολεμῳ κρεισσω η κατα ανθρωπου φυσιν " επιδειξαμενος, την χωραν εσχε· και τα εθνη απαντα καταστρεψαμενος, " τας πολεις ευπετως παρεσκαδο· ανικητος τε πανταπασιν εδοξεν ειναι. " τοτε δε ἡ επιθαλασσια χωρα, εκ Σιδωνος μεχρι των Αιγυπτου ὁριων, " Φοινικη ξυμπασα νομαζετο. βασιλευς δε εἷς τα παλαιον εφεστηκει· " ὡσπερ ἁπασιν ὁμολογηται, οἱ Φοινικων τα αρχαιοτατα ανεγραψαντο. " ενταυθ' ᾠκηντο εθνη πολυανθρωποτατα, Γεργεσαιοι τε και Ιεβουσαιοι, και " αλλα ατινα ονομαται εχοντα, οἷς δη αυτα ἡ των Ἑβραιων ἱστορια καλει. " Ὅτος ὁ λαος επει αμαχον τι χρημα των επηλυτην στρατηγον ειδον· εξ " ηθων των πατριων εξανασταντες, επ' Αιγυπτον ὁμορου ισης εχωρησαν. " ενθα χωρον ὑδενα σφισιν ἱκανον ενοικησασθαι ευροντες, επει εν Αιγυπτῳ " πολυανθρωπια εκ παλαιου ην· ες Λιβυην μεχρι στηλων των Ἡρακλεους " εσχον· ενταυθα τε και ες εμε τη Φοινικων φωνη χρωμενοι ᾠκηνται." " *Quando ad Mauros nos hiſtoria deduxit; congruens nos exponere,* " *unde orta gens in Africâ ſedes fixerit. Quo tempore egreſſi Ægyp-* " *to Hebræi jam prope Paleſtinæ fines venerant, mortuus ibi Moſes,* " *vir ſapiens, dux itineris. Succeſſor imperii factus Jeſus Navæ* " *filius intra Palæſtinam duxit popularium agmen; & virtute uſus* " *ſupra humanum modum, terram occupavit; gentibuſque exciſis,* " *urbes ditionis ſuæ fecit, & invicti famam tulit. Maritima ora,* " *quæ à Sidone ad Ægypti limitem extenditur, nomen habet Phœni-* " *ces. Rex unus* [Hebræis] *imperabat, ut omnes qui res Phœnicias* " *ſcripſere conſentiunt. In eo tractatu numeroſæ gentes erant,*

[a] Procop. de bello Vandal. l. 2. c. 10.
[b] Chron. l. 1. p. 11.
[c] Gemar. ad tit. Shebijih. cap. 6.

(') Of which Memphis was the capitol.

" *Ger-*

" *Gergeſæi, Jebuſæi, quoſque aliis nominibus Hebræorum annales* EGYPT.
" *memorant. Hi homines, ut impares ſe venienti imperatori videre,*
" *derelicto patriæ ſolo ad finitimam primùm venere Ægyptum; ſed*
" *ibi capacem tantæ multitudinis locum non reperientes, erat enim*
" *Ægyptus ab antiquo fœcunda populis, in Africam profecti, multis*
" *conditis urbibus, omnem eam Herculis columnas uſque, obtinu-*
" *erunt: ubi ad meam ætatem ſermone Phœnicio utentes habitant.*"

By the language and extreme poverty of the Moors, deſcribed alſo by Procopius, and by their being acquainted with merchandiſe and ſea affairs, you may know that they were Canaanites originally, and peopled Afric before the Tyrian merchants came thither. Theſe Canaanites coming from the eaſt, pitched their tents in great numbers in the lower Egypt, in the reign of Timaus, [a] as Manetho writes; and eaſily ſeized the country, and fortifying Peluſium, then called Abaris, they erected a kingdom there (3), and reigned long under their own kings, Salatis, Bæon, Apachnas, Apophis, Janias, Aſſis, and others ſucceſſively. And in the mean time the upper part of Egypt, called Thebais, and according to [b] Herodotus, Ægyptus, and in Scripture the land of Pathros, was under other kings; reigning perhaps at Coptos, and Thebes, and This, and Syene, and [c] Pathros, and Elephantis, and Heracleopolis, and Meſir, and other great cities, till they conquered one another, or were conquered by the Ethiopians. For cities grew great in thoſe days, by being the ſeats of kingdoms. But at length one of theſe kingdoms conquered the reſt, and made a laſting war upon the ſhepherds; and in the reign of its king Miſphragmuthoſis, and his ſon Amoſis, called alſo Tethmoſis, Tuthmoſis, and Thomoſis (4), drove them out of Egypt, and made them fly into Afric and Syria, and other places, and united all Egypt into one monarchy; and under their next kings, Ammon and Seſac, enlarged it into a great empire. This conquering people worſhipped not the kings of the ſhepherds whom they conquered and expelled, but [d] aboliſhed their religion of ſacrificing men; and after the manner of thoſe days deified their own kings, who founded their new dominion, beginning the hiſtory of their empire with the reign and great acts of their

[a] Manetho Apud Joſephum contr. Appion. l. 1. c. 14. p. 1337.
[b] Herod. l. 2. c. 15.
[c] Jerem. xliv. 1. Ezek. xxix. 14.
[d] Manetho apud Porphyrium περι αποχης, l. 1. sect. 55. & Euſeb. Prep. l. 4. c. 10. p. 155.

(4) Manetho apud Joſeph. contr. Ap. lib. 1. c. 14. p. 1338.

gods

CHAPTER SECOND.

gods and heroes. Whence their gods Ammon and Rhea, or Uranus and Titæa; Oſiris and Iſis; Orus and Bubaſte; and their ſecretary Thoth: and generals, Hercules and Pan; and admiral Japetus, Neptune, or Typhon; were all of them Thebans, and flouriſhed after the expulſion of the ſhepherds. Homer places Thebes in Ethiopia; and the Ethiopians reported, that [a] the Egyptians were a colony drawn out of them by Oſiris, and that thence it came to paſs that moſt of the laws of Egypt were the ſame with thoſe of Ethiopia; and that the Egyptians learnt from the Ethiopians the cuſtom of deifying their kings.

[a] Diodor. l. 3. c. 3. p. 101.

VII. When Joſeph entertained his brethren in Egypt, they did eat at a table by themſelves, and he did eat at another table by himſelf; and the Egyptians who did eat with him were at another table, "becauſe the Egyptians might not eat bread with "the Hebrews; for that was an abomination to the Egyptians," Gen. xliii. 32. Theſe Egyptians, who did eat with Joſeph, were of the court of Pharaoh; and therefore Pharaoh and his court were at this time not ſhepherds but genuine Egyptians; and theſe Egyptians abominated eating bread with the Hebrews at one and the ſame table: and of theſe Egyptians and their fellow-ſubjects, it is ſaid a little after, that "every ſhepherd is an abomination to "the Egyptians (1)." Egypt at this time was therefore under the government of the genuine Egyptians, and not under that of the ſhepherds.

VIII. After the deſcent of Jacob and his ſons into Egypt, Joſeph lived 70 (1) years, and ſo long continued in favour with the kings of Egypt: and 64 years (2) after his death Moſes was born: and between the death of Joſeph and the birth of Moſes, "there "aroſe

§ VII.

(1) Gen. xlvi. 34.

§ VIII.

(1) JOSEPH was thirty years of age, when he ſtood before Pharaoh, and interpreted his dream, Gen. xli. 46. Then followed ſeven fruitful years; and Jacob ſettled in Egypt in the third year of the famine, which enſued, Gen. xlv. 6. Joſeph therefore was 40 years of age when his father came into Egypt; and he lived to be 110, Gen. l. 26. Therefore he ſurvived his father's coming into Egypt 70 years.

(2) *Or* 66; according to the reckoning which our author follows, which is founded upon Exodus xii. 40, 41. as it ſtands in the Samaritan copy, and the Greek of the Septuagint. "*For the* "*ſojourning of the children of Iſrael, which they ſojourned in the land of Egypt and in the land of* "*Canaan, they and their fathers, was* 430 *years. And after the* 430 *years, the whole hoſt of the Lord* "*went out of the land of Egypt in the night.*" Theſe 430 years Newton counts from the promiſe given

"aroſe up a new king over Egypt, which knew not Joſeph," EGYPT. Exod. i. 8. But this king of Egypt was not one of the ſhepherds; for he is called Pharaoh, Exod. i. 11, 22. And Moſes told his ſucceſſor, that if the people of Iſrael ſhould ſacrifice in the land of Egypt, "they ſhould ſacrifice the abomination of "the Egyptians before their eyes, and the Egyptians would ſtone "them," Exod. viii. 26: that is, they ſhould ſacrifice ſheep or oxen, contrary to the religion of Egypt. The ſhepherds therefore did not reign over Egypt, while Iſrael was there; but either were driven out of Egypt, before Iſrael went down thither; or did not enter into Egypt, till after Moſes had brought Iſrael from thence: and the latter muſt be true, if they were driven out of Egypt a little before the building of the Temple of Solomon, as Manetho affirms.

IX. Diodorus [a] ſaith in his 40th book, "that in Egypt there "were formerly multitudes of ſtrangers of ſeveral nations, who "uſed foreign rites and ceremonies in worſhipping the Gods, for "which they were expelled Egypt; and under Danäus, Cadmus, "and other ſkilful commanders, after great hardſhips, came in- "to Greece, and other places; but the greateſt part of them "came into Judæa, not far from Egypt, a country then uninha- "bited and deſert, being conducted thither by one Moſes, a "wiſe and valiant man, who, after he had poſſeſt himſelf of "the country, among other things built Jeruſalem, and the "Temple." Diodorus here miſtakes the original of the Iſraelites, as Manetho had done before; confounding their flight into the wilderneſs under the conduct of Moſes, with the flight of the ſhepherds from Miſphragmuthoſis, and his ſon Amoſis, into Phœ-

[a] Diodor. apud Photium in Biblioth.

given to Abraham, that in him ſhould all the families of the earth be bleſſed. Which way of reckoning ſome think juſtified by St. Paul, Gal. iii. 8 and 17. Abraham was 75 years old when he received this promiſe, and ſettled in Canaan in conſequence of it, Gen. xii. 4. Therefore from the promiſe to the birth of Iſaac, when Abraham was 100 yearsof age, the interval was - - - 24 years.

From the birth of Iſaac to the birth of Jacob, Gen. xx. 26.	60
From the birth of Jacob to his ſettlement in Egypt, Gen. xlvii. 9.	130
From that time to Joſeph's death,	70
Whole interval from the promiſe to Joſeph's death,	284

There remains, of the 430 years of ſojournment, 146, for the whole interval between Joſeph's death and the Exodus. Eighty of theſe 146 intervened between the birth of Moſes and the Exodus: for Moſes died at the age of 120, Deut. xxxiv. 7: and the Iſraelites had wandered in the wilderneſs 40 years before his death. Therefore there will remain 66 years for the interval between the death of Joſeph and the birth of Moſes.

nicia

CHAPTER SECOND.

nicia and Afric; and not knowing that Judæa was inhabited by Canaanites, before the Iſraelites under Moſes came thither. But however he lets us know, that the ſhepherds were expelled Egypt by Amoſis a little before the building of Jeruſalem and the Temple; and that after ſeveral hardſhips ſeveral of them came into Greece, and other places, under the conduct of Cadmus, and other captains, but the moſt of them ſettled in Phœnicia next Egypt. We may reckon therefore that the expulſion of the ſhepherds, by the kings of Thebais, was the occaſion that the Philiſtims were ſo numerous in the days of Saul; and that ſo many men came in thoſe times with colonies out of Egypt and Phœnicia into Greece; as Lelex, Inachus, Pelaſgus, Æzeus, Cecrops, Ægialeus, Cadmus, Phœnix, Membliarius, Alymnus, Abas, Erechtheus, Peteos, Phorbas, in the days of Eli, Samuel, Saul, and David. Some of them fled in the days of Eli from Miſphragmuthoſis, who conquered part of the lower Egypt. Others retired from his ſucceſſor Amoſis into Phœnicia, and Arabia Petræa, and there mixed with the old inhabitants. Who not long after being conquered by David, fled from him and the Philiſtims by ſea, under the conduct of Cadmus, and other captains, into Aſia Minor, Greece, and Libya, to ſeek new ſeats; and there built towns, erected kingdoms, and ſet on foot the worſhip of the dead: and ſome of thoſe who remained in Judæa might aſſiſt David and Solomon in building Jeruſalem and the Temple. Among the foreign rites uſed by the ſtrangers in Egypt, in worſhipping the Gods, was the ſacrificing of men; for Amoſis aboliſhed that cuſtom at Heliopolis (1). And therefore thoſe ſtrangers were Canaanites, ſuch as fled from Joſhua; for the Canaanites gave their ſeed, that is, their children to Moloch, "and burnt "their ſons and their daughters in the fire to their gods," Deut. xii. 31 (2). Manetho calls them Phœnician ſtrangers.

X. After Amoſis had expelled the ſhepherds, and extended his dominion over all Egypt, his ſon and ſucceſſor Ammenemes, or Ammon, by much greater conqueſts laid the foundation of the Egyptian empire. For by the aſſiſtance of his young ſon Seſoſtris,

§ IX.

(1) Vid. § VI.

(2) And Levit. xviii. 21.

tris, whom he brought up to hunting and other laborious exerciſes, he conquered Arabia, Troglodytica, and Libya (1): and from him all Libya was anciently called Ammonia: and after his death, in the temples erected to him at Thebes, and in Ammonia, and at Meroe (2) in Ethiopia, they ſet up oracles to him, and made the people worſhip him as the god that acted in them: and theſe are the oldeſt oracles mentioned in hiſtory; the Greeks therein imitating the Egyptians: for the [a] oracle at Dodona was the oldeſt in Greece, and was ſet up by an Egyptian woman, after the example of the oracle of Jupiter Ammon at Thebes. EGYPT.

[a] Herod. l. 2.

XI. In the days of Ammon a body of the Edomites fled from David into Egypt, with their young king Hadad, as above (1); and carried thither their ſkill in navigation: and this ſeems to have given occaſion to the Egyptians to build a fleet on the Red Sea near Coptos, and might ingratiate Hadad with Pharaoh. For the Midianites and Iſhmaelites, who bordered upon the Red Sea, near Mount Horeb on the ſouth ſide of Edom, were merchants from the days of Jacob the Patriarch, Gen. xxxvii. 28, 36; and by their merchandiſe the Midianites abounded with gold in the days of Moſes, Numb. xxxi. 50, 51, 52; and in the days of the judges of Iſrael, "becauſe they were Iſhmaelites," Judg. viii. 24. The Iſhmaelites therefore in thoſe days grew rich by merchandiſe. They carried their merchandiſe on camels through Petra to Rhinocolura, and thence to Egypt. And this traffic at length came into the hands of David, by his conquering the Edomites, and gaining the ports of the Rea Sea called Eloth and Ezion-Geber; as may be underſtood by the 3000 talents of gold of Ophir, which David gave to the temple, 1 Chron. xxix. 4. The Egyptians having the art of making linen-cloth (2); they began about this time to build long ſhips with ſails, in their port on thoſe ſeas near Coptos: and having learnt the ſkill of the Edomites; they began now to obſerve the poſitions of the ſtars, and the length of the ſolar year, for enabling them to know the poſition of the

§ X.

(1) Diod. Sic. lib. 1. c. 53. p. 34.

(2) See Strabo, lib. 17. p. 822.

§ XI.

(1) Chap. i. § XLII.

(1) Herodot. lib. 2. c. 37.

CHAPTER SECOND.

ſtars at any time, and to ſail by them at all times, without ſight of the ſhore: and this gave a beginning to aſtronomy and navigation. For hitherto they had gone only by the ſhore with oars, in round veſſels of burden, firſt invented on that ſhallow ſea by the poſterity of Abraham; and in paſſing from iſland to iſland guided themſelves by the ſight of the iſlands in the day-time, or by the ſight of ſome of the ſtars in the night. Their old year was the luniſolar year, derived from Noah to all his poſterity, till thoſe days; and conſiſted of twelve months, each of thirty days, according to their calendar: and to the end of this calendar-year they now added five days, and thereby made up the ſolar year of twelve months and five days, or 365 days.

[a] Plutarch. de Iſide. p. 355. Diodor. l. 1. p. 9.

XII. The ancient Egyptians feigned [a], that Rhea lay ſecretly with Saturn; and Sol prayed that ſhe might bring forth neither in any month, nor in the year; and that Mercury played at dice with Luna, overcame, and took from the lunar year the 72d part of every day, and thereof compoſed five days, and added them to the year of 360 days, that ſhe might bring forth in them; and that the Egyptians celebrated thoſe days as the birth-days of Rhea's five children, Oſiris, Orus ſenior, Typhon, Iſis, and Nephthe, the wife of Typhon. And therefore, according to the opinion of the ancient Egyptians, the five days were added to the luniſolar calendar-year, in the reign of Saturn and Rhea, the parents of Oſiris, Iſis, and Typhon; that is, in the reign of Ammon and Titæa, the parents of the Titans; or in the latter half

§ XIII.

(') See Plato in the Phædrus (p. 1240), and in the Philebus (p. 374). Plato, the moſt antient, and perhaps the beſt informed, of the Greek writers now extant who mention this Thoth, or as he calls him Theuth, ſays, that he flouriſhed when Thamoun, the ſame whom the Greeks call Ammon, was king of all Egypt reſiding at Thebes. Philo Byblius, as he is quoted by Euſebius (Præp. Evang. p. 231) ſays, that Thoth was he whom the Greeks called Hermes; and Diodorus makes Hermes the ſecretary of Oſiris, lib. 1. c. 15, 16. p. 10. Plato's aſſertion however is confirmed by the authority of Sanchoniathon; who, as he is quoted by Euſebius (Præp. Evang. lib. p. 24) makes Hermes the ſecretary of Saturn; that is, of Ammon, the father of Oſiris. And the title which Hermes bore among the Eleans, of *Paramnon* (Pauſan. lib. 5. c. 15. p. 416) ſeems alſo to make for this tradition. Manetho, according to Syncellus, ſpeaks of two Hermes; the elder he calls Thoth; the ſecond the ſon of Agathodæmon and the father of Tat (Syncell. p. 40). Tully (De Nat. Deor. lib. 3. c. 21) ſays, that the Thoth of the Egyptians, who taught them letters, was that Mercury who killed Argus; and that he fled into Egypt for that murder. This may ſeem ſomewhat in favour of our author's ſyſtem; ſince it appears, that it was Tully's opinion as well as his, that the Thoth, who taught the Egyptians the uſe of letters, was no native Egyptian;

half of the reign of David, when thoſe Titans were born; and by conſequence ſoon after the flight of the Edomites from David into Egypt. But the ſolſtices not being yet ſettled, the beginning of this new year might not be fixed to the vernal equinox before the reign of Amenophis, the ſucceſſor of Orus junior, the ſon of Oſiris and Iſis. EGYPT.

XIII. When the Edomites fled from David with their young king Hadad into Egypt, it is probable that they carried thither alſo the uſe of letters. For letters were then in uſe among the poſterity of Abraham in Arabia Petræa, and upon the borders of the Red Sea; the Law being written there by Moſes in a book, and in tables of ſtone, long before. For Moſes marrying the daughter of the prince of Midian, and dwelling with him forty years, learnt them among the Midianites. And Job, who lived [a] among their neighbours the Edomites, mentions the writing down of words, as there in uſe in his days, Job xix. 23, 24; and there is no inſtance of letters for writing down ſounds, being in uſe before the days of David, in any other nation beſides the poſterity of Abraham. The Egyptians aſcribed this invention to Thoth ('), the ſecretary of Oſiris; and therefore letters began to be in uſe in Egypt in the days of Thoth; that is, a little after the flight of the Edomites from David, or about the time that Cadmus brought them into Europe.

[a] Auguſtin. de Civ. Dei, l. 18. c. 47.

XIV. Helladius [b] tells us, that a man called Oes, who appeared in the Red Sea with the tail of a fiſh, ſo they painted a ſeaman, taught aſtronomy and letters: and Hyginus, [c] that Euhad-

[b] Apud Photium, c. 279.

[c] Fab. 274.

Egyptian; and that Tully reckoned him little older than our author does. Porphyry alſo ſpeaks of Thoth as a Phœnician (Euſeb. Præp. p. 26). If this Hermes was the Triſmegiſtus, he was the younger, not the firſt, Hermes. For Triſmegiſtus was the father of Tat; and Tat, according to Euſebius (in Chron.) was about the time of Cadmus. Triſmegiſtus therefore himſelf ſhould be of the generation before Cadmus; i. e. in our author's ſyſtem, one generation younger than Inachus the father of Io: which agrees well with Tully's opinion, that Thoth was the Argiphontes, and may ſeem to be a further confirmation of our author's opinion. Which however is too improbable in itſelf to be eſtabliſhed by this ſpecious collection of authorities. Tully and Euſebius unqueſtionably follow the old Greek chronologers, in what they deliver of the Egyptian Thoth. The Greek chronologers, it ſeems, have made their Inachus as old as the Egyptian Thoth. It is but a lame concluſion, that the Egyptian Thoth was therefore as young as Newton's ſyſtem makes the Greek Inachus. Plato, Sanchoniathon, Manetho, and Porphyry, had they ſaid any thing explicit on the queſtion, might deſerve a hearing. But all we learn from them is, that there were two, if not three, great men among the Egyptians, whom the Greeks were apt to confound, when they ſpoke of Thoth or Hermes: that one of theſe taught the Egyptians letters, and lived in the unknown age of Ammon.

CHAPTER SECOND.

nes, who came out of the ſea in Chaldæa, taught the Chaldæans aſtrology the firſt of any man; he means aſtronomy. And Alexander Polyhiſtor [a] tells us from Beroſus, that Oannes (') taught the Chaldæans letters, mathematicks, arts, agriculture, cohabitation in cities, and the conſtruction of temples; and that ſeveral ſuch men came thither ſucceſſively. Oes, Euhadnes, and Oannes, ſeem to be the ſame name a little varied by corruption; and this name ſeems to have been given in common to ſeveral ſeamen, who came thither from time to time, and by conſequence were merchants, and frequented thoſe ſeas with their merchandiſe, or elſe fled from their enemies. So that letters, aſtronomy, architecture and agriculture, came into Chaldæa by ſea; and were carried thither by ſeamen, who frequented the Perſian Gulph, and came thither from time to time, after all thoſe things were practiſed in other countries whence they came; and by conſequence in the days of Ammon and Seſac, David and Solomon, and their ſucceſſors, or not long before. The Chaldæans indeed made Oannes older than the flood of Xiſuthrus; but the Egyptians made Oſiris as old; and I make them contemporary.

[a] Apud Euſeb. Chron.

XV. The Red Sea had its name not from its colour, but from Edom and Erythra, the names of Eſau, which ſignify that colour. And ſome [b] tell us, that king Erythra, meaning Eſau, invented the veſſels, *rates*, in which they navigated that ſea, and was buried in an iſland thereof near the Perſian Gulph. Whence it follows, that the Edomites navigated that ſea from the days of Eſau; and there is no need that the oldeſt Oannes ſhould be older. There were boats upon rivers before; ſuch as were the boats which carried the patriarchs over Euphrates and Jordan, and the firſt nations over many other rivers, for peopling the earth, ſeeking new ſeas, and invading one another's territories. And after the example of ſuch veſſels, Iſhmael and Midian, the ſons of Abraham, and Eſau his grandſon, might build larger veſſels to go to the iſlands upon the Red Sea, in ſearching for new ſeats; and by degrees learn to navigate that ſea as far as to the Perſian Gulph: for ſhips were as old, even upon the Mediterranean,

[b] Plin. l. 6. c. 23, 28. & l. 7. c. 56.

§ XIV.

(') A monſter compounded of man and fiſh, which roſe out of the Red Sea.

terranean, as the days of Jacob, Gen. xlix. 13. Judg. v. 17. But it is probable, that the merchants of that ſea were not forward to diſcover their arts and ſciences, upon which their trade depended. It ſeems therefore that letters and aſtronomy, and the trade of carpenters, were invented by the merchants of the Red Sea for writing down their merchandiſe, and keeping their accounts, and guiding their ſhips in the night by the ſtars, and building ſhips; and that they were propagated from Arabia Petræa into Egypt, Chaldæa, Syria, Aſia Minor, and Europe, much about one and the ſame time; the time in which David conquered and diſperſed thoſe merchants. For we hear nothing of letters before the days of David, except among the poſterity of Abraham; nothing of aſtronomy, before the Egyptians under Ammon and Seſac applied themſelves to that ſtudy, except the conſtellations mentioned by Job, who lived in Arabia Petræa among the merchants; nothing of the trade of carpenters, or good architecture, before Solomon ſent to Hiram king of Tyre, to ſupply him with ſuch artificers, ſaying, that "there were not "in Iſrael, who could ſkill to hew timber like the Zidonians."

EGYPT.

XVI. Diodorus [a] tells us, "that the Egyptians ſent many co- "lonies out of Egypt into other countries; and that Belus, the "ſon of Neptune and Libya, carried colonies thence into Baby- "lonia; and ſeating himſelf on Euphrates, inſtituted prieſts free "from taxes and publick expences, after the manner of Egypt, "who were called Chaldæans, and who after the manner of "Egypt might obſerve the ſtars." And Pauſanias [b] tells us, "that "the Belus of the Babylonians had his name from Belus an "Egyptian, the ſon of Libya." And Apollodorus; "[c] that "Belus, the ſon of Neptune and Libya, and king of Egypt, "was the father of Ægyptus and Danäus, that is, Ammon." He tells us alſo, "that Buſiris, the ſon of Neptune and Liſia- "naſſa [Libyanaſſa] the daughter of Epaphus, was king of "Egypt (')": and Euſebius calls this king, "Buſiris the ſon of "Neptune, and of Libya the daughter of Epaphus (')." By

[a] Diodor. l. 1. c. 28. p. 17.

[b] Pauſan. l. 4. c. 23. p. 337.

[c] Apollodor. l. 2. c. 1. § 4.

§ XVI.

(') Lib. 2. c. 4. § 11.

(') In Chron. Iſocrates alſo ſays, that the father of Buſiris was Neptune; his mother, Libya the daughter of Epaphus the ſon of Jupiter. Encom. Buſirid.

theſe

CHAPTER SECOND.

theſe things the later Egyptians ſeem to have made two Belus's; the one the father of Oſiris, Iſis, and Neptune; the other, the ſon of Neptune, and father of Ægyptus and Danäus: and hence came the opinion of the people of Naxus, that there were two Minos's and two Ariadnes, the one two generations older than the other; which we have confuted. The father of Ægyptus and Danäus was the father of Oſiris, Iſis, and Typhon; and Typhon was not the grandfather of Neptune, but Neptune himſelf.

XVII. Seſoſtris being brought up to hard labour by his father Ammon (1), warred firſt under his father, being the hero or Hercules of the Egyptians (2) during his father's reign, and afterward their king. Under his father, whilſt he was very young, he invaded and conquered Troglodytica (3), and thereby ſecured the harbour of the Red Sea, near Coptos in Egypt. And then he invaded Ethiopia; and carried on his conqueſt ſouthward, as far as to the region bearing cinnamon (4): and his father, by the aſſiſtance of the Edomites, having built a fleet on the Red Sea, he put to ſea, and coaſted Arabia Fœlix; going to the Perſian Gulph and beyond, and in thoſe countries ſet up columns with inſcriptions denoting his conqueſts (5); and particularly he ſet up a pillar at Dira (6), a promontory in the ſtraits of the Red Sea, next Ethiopia; and two pillars in India, on the mountains near the mouth of the river Ganges; ſo [a] Dionyſius:

[a] Dionyſ. in Perie. v. 623.

"Ενθα τε και σηλαι Θηβαιγενεος Διονυσου
"Εσασιν, σηματοιο παρα ῥοον Ωκεανοιο,
Ινδων ἐσχατιοισιν εν ὑρεσιν· ενθα τε Γαγγης
Λευκον ὑδωρ Νυσσαιον επι πλαταμωνα κυλινδει."

"*Ubi etiamnum columnæ Thebis geniti Bacchi*
"*Stant, extremi juxta fluxum Oceani,*
"*Indorum ultimis in montibus: ubi & Ganges*
"*Claram aquam Nyſſæam ad planitiem devolvit.*"

§ XVII.

(1) Diod Sic. lib 1. c. 53. p. 34. by *hard labour*, underſtand *manly exerciſes*.

(2) I can find no authority for this. It appears indeed that, in the Orphic Theology, Bacchus and Hercules were not different perſonages, but different titles only of the ſun. (ſee Macrob. Saturn lib. 1. c. 18—21.) And, with our author, Bacchus and Seſoſtris are the ſame.

(3) Diod. Sic. lib. 1. c. 53. p. 34. Strabo, lib. 16. p. 769.

After

After theſe things he invaded Libya (7), and fought the Afri- EGYPT. cans with clubs; and thence is painted with a club in his hand. So [a] Hyginus; "*Afri & Egyptii primum fuſtibus dimicaverunt;* [a] Fab. 274. "*poſtea Belus Neptuni filius gladio belligeratus eſt; unde bellum dic-*" *tum eſt.*" And after the conqueſt of Libya, by which Egypt was furniſhed with horſes (8), and furniſhed Solomon and his friends; he prepared a fleet on the Mediterranean, and went on weſtward upon the coaſt of Afric, to ſearch thoſe countries, as far as to the ocean and iſland Erythra or Gades in Spain; as Macrobius [b] informs us from Panyaſis and Pherecydes (9): and there he conquered Geryon, and at the mouth of the Straits ſet up the famous pillars.

[b] Saturnal. l. 5. c. 21.

"[c] *Venit ad occaſum mundique extrema Seſoſtris.*" [c] Lucan. l. 10.

Then he returned through Spain and the ſouthern coaſts of France and Italy, with the cattle of Geryon, his fleet attending him by ſea; and left in Sicily the Sicani, a people which he had brought from Spain: and after his father's death he built temples to him in his conqueſts; whence it came to paſs, that Jupiter Ammon was worſhipped in Ammonia, and Ethiopia, and Arabia, and as far as India, according to the [d] poet:

[d] Lucan. l. 9.

"*Quamvis Æthiopum populis, Arabumque beatis*
"*Gentibus, atque Indis unus ſit Jupiter Ammon.*"

The Arabians worſhipped only two gods; Cœlus, otherwiſe called Ouranus, or Jupiter Uranius; and Bacchus (10); and theſe were Jupiter Ammon and Seſac, as above: and ſo alſo the people of Meroë above Egypt [e] worſhipped no other gods but Jupiter and Bacchus, and had an oracle of Jupiter; and theſe two gods were Jupiter Ammon and Oſiris, according to the language of Egypt.

[e] Herod. l. 2. c. 29.

(4) Strabo, lib. 17. p. 79. The conqueſt of Ethiopia, according to Diodorus, was after his father's death. Strabo ſpeaks only of the extent, not of the time of it.

(5) Herodot. lib. 2. c. 102. Diod. Sic. lib. 1. c. 55. p. 35.

(6) Strabo, lib. 16. p. 769. (7) Diod. Sic. lib. 1. c. 53. p. 34.

(8) Of the great antiquity of the Egyptian cavalry, ſee biſhop Warburton's Divine Legation, book IV. ſect. V.

(9) That is to ſay, Maorobius relates this of Hercules, whom our author takes to be Seſoſtris.

(10) According to Herodotus, Bacchus and Urania under the names of Urotal and Alilat, ib. 3. c. 8.

CHAPTER SECOND.

XVIII. At length Seſoſtris, in the fifth year of Rehoboam, came out of Egypt with a great army of Libyans, Troglodytes, and Ethiopians, and ſpoiled the temple, and reduced Judæa into ſervitude; and went on conquering, firſt eaſtward toward India, which he invaded; and then weſtward, as far as Thrace: for "God had given him the kingdoms of the countries," 2 Chron. xii. 2, 3, 8. In [a] this expedition he ſpent nine years, ſetting up pillars with inſcriptions in all his conqueſts, ſome of which remained in Syria till the days of Herodotus. He was accompanied with his ſon Orus, or Apollo (1); and with ſome ſinging women, called "the Muſes (2)"; one of which, called Calliope, was the mother of Orpheus, an Argonaut: and the two tops of the mountain Parnaſſus, which were very high, were dedicated [b] the one to this Bacchus, and the other to his ſon Apollo: whence Lucan [c];

[a] Diodor. l. 1. c. 54, 55. p. 35. Herod. l. 2. c. 102, 103, 106.

[b] Pauſan. l. 10. c. 32. p. 878. Suidas in Παρνασσος.

[c] Lucan. l. 5. v. 72 *.

"*Parnaſſus gemino petit æthera colle,*
Mons Phœbo, Bromioque ſacer."

In the fourteenth year of Rehoboam he returned back into Egypt, leaving Æetes in Colchis (3), and his nephew Prometheus at mount Caucaſus, with part of his army, to defend his conqueſts from the Scythians. Apollonius [d] Rhodius and his ſcholiaſt tell us, that Seſonchoſis, king of all Egypt, that is Seſac, invading all Aſia, and a great part of Europe, peopled many cities which he took; and that Æa, the metropolis of Colchis, "remained ſtable ever ſince his days with the poſterity of thoſe "Egyptians which he placed there; and that they preſerved pillars or tables in which all the journies and the bounds of ſea "and land were deſcribed, for the uſe of them that were to go "any whither." Theſe tables therefore gave a beginning to geography.

[d] Argonaut. l. 4. v. 272.

XIX. Seſoſtris, upon his returning home, [e] divided Egypt by meaſure amongſt the Egyptians; and this gave a beginning to ſurveying and geometry: and [f] Jamblichus derives this diviſion of

[e] Herod. l. 2. c. 109.

[f] In vitâ Pythag. c. 29.

§ XVIII.

(1) Diodorus calls Apollo the brother of Oſiris, lib. 1. c. 17. Apollo was the Horus of the Egyptians (Macrob. Saturn. lib. 1. c. 21) and accompanied Oſiris, that is, according to our author, Seſoſtris or Seſac, in his great expedition, Diod. Sic. lib. 1. c. 17. p. 10.

(2) Diod. Sic. lib. 1. c. 18. p. 11. (3) See chap. i. § XIX. note 1.

* See the Scholiaſt on Lucan, lib. 3. lin. 173.

of Egypt, and beginning of geometry, from the age of the gods of Egypt. Seſoſtris alſo [a] divided Egypt into 36 *Nomes* or counties; and dug a canal from the Nile to the head city of every Nome; and with the earth dug out of it he cauſed the ground of the city to be raiſed higher; and built a temple in every city for the worſhip of the Nome, and in the temples ſet up oracles, ſome of which remained till the days of Herodotus. And by this means the Egyptians of every Nome were induced to worſhip the great men of the kingdom, to whom the Nome, the city, and the temple or ſepulchre of the god, was dedicated: for every temple had its proper god, and modes of worſhip, and annual feſtivals; at which the council and people of the Nome met at certain times to ſacrifice, and regulate the affairs of the Nome, and adminiſter juſtice, and buy and ſell. But Seſac and his queen, by the names of Oſiris and Iſis, were worſhipped in all Egypt: and becauſe Seſac, to render the Nile more uſeful, dug channels from it to all the capital cities of Egypt; that river was conſecrated to him, and he was called by its names Ægyptus, Siris, Nilus. Dionyſius [b] tells us, that the Nile was called Siris by the Ethiopians, and Nilus by the people of Syene. From the word Nahal, which ſignifies a torrent, that river was called Nilus; and Diodorus [c] tells us, that Nilus was that king, who cut Egypt into canals, to make the river uſeful. In Scripture the river is called Schichor, or Sihor; and thence the Greeks formed the words Siris, Sirius, Ser-Apis, O-Siris; but Plutarch [d] tells us, that the ſyllable O, put before the word Siris by the Greeks, made it ſcarce intelligible to the Egyptians.

[a] Diodor. l. 1. c. 54. p. 35. EGYPT.

[b] Dionyſ. de ſitu Orbis, lin. 223, 224.

[c] Diodor. l. 1. c. 63. p. 39.

[d] Plutarch. de Iſide & Oſiride, Tom. II. p. 372.

XX. I have now told you the original of the Nomes of Egypt; and of the religions and temples of the Nomes; and of the cities built there by the gods, and called by their names: whence Diodorus [e] tells us, that "of all the provinces of the world, there "were in Egypt only many cities built by the ancient gods; as by "Jupiter, Sol, Hermes, Apollo, Pan, Eilithyia, and many others." And Lucian [f], an Aſſyrian, who had travelled into Phœnicia and

[e] Diodor. l. 1. c. 12. p. 8.

[f] Lucian. de Dea Syria.

CHAPTER SECOND.

Egypt, tells us, that "the temples of Egypt were very old; thoſe "in Phœnicia built by Cinyras as old; and thoſe in Aſſyria al- "moſt as old as the former, but not altogether ſo old." Which ſhews that the monarchy of Aſſyria roſe up after the monarchy of Egypt, as is repreſented in Scripture; and that the temples of Egypt, then ſtanding, were thoſe built by Seſoſtris about the ſame time that the temples of Phœnicia and Cyprus were built by Cinyras, Benhadad, and Hiram. This was not the firſt original of idolatry, but only the erecting of much more ſumptuous temples than formerly to the founders of new kingdoms. For temples at firſt were very ſmall:

Jupiter anguſtâ vix totus ſtabat in æde.

Ovid. Faſt. l. 1.

Altars were at firſt erected without temples; and this cuſtom continued in Perſia till after the days of Herodotus (1). In Phœnicia they had altars with little houſes for eating the ſacrifices much earlier, and theſe they called High Places. Such was the High Place where Samuel entertained Saul (2); ſuch was the houſe of Dagon at Aſhdod (3), into which the Philiſtims brought the ark; and the houſe of Baal, in which Jehu ſlew the prophets of Baal (4); and ſuch were the High Places of the Canaanites, which Moſes commanded Iſrael to deſtroy. He [a] commanded Iſrael to deſtroy the altars, images, high places and groves of the Canaanites; but made no mention of their temples; as he would have done, had there been any in thoſe days. I meet with no mention of ſumptuous temples before the days of Solomon. New

[a] Exod. xxxiv. 13. Num. xxxiii. 52. Deut. vii. 5. & xii. 3.

§ XX.

(1) The Perſians, in the days of Herodotus, had neither ſtatues, temples, nor altars. Herodot. lib. 1. c. 131.

(2) 1 Sam. ix. 11—14, and 25. (3) 1 Sam. v. 1, 2. (4) 2 Kings x. 18—28.

§ XXI.

(1) 1 Kings xv. 18. (2) 2 Kings viii. 7. (3) 2 Kings viii. 28. x. 32. xii. 17. (4) 2 Kings xiii. 3 and 24. (5) 2 Kings xv. 37. and xvi. 5—9. (6) Iſ. vii. 6.

(7) BENHADAD, the ſon of Tabrimon, was contemporary with Aſa the grandſon of Rehoboam, 1 Kings xv. The reign of Abijam, the father of Aſa, was very ſhort: not four years. Therefore Tabrimon muſt have lived in the reign of Rehoboam; therefore in that of Seſac. Therefore if Seſac was Seſoſtris; Syria, which was one of the countries conquered by Seſoſtris, muſt have become ſubject to the Egyptian in the reign of Tabrimon.

(8) By the event of Seſac's death, and the conqueſt of Egypt by the Ethiopians. See chap. i. § XLII.

kingdoms

kingdoms begun then to build ſepulchres to their founders in the form of ſumptuous temples; and ſuch temples Hiram built in Tyre; Seſac in all Egypt; and Benhadad in Damaſcus. EGYPT.

XXI. For when David [a] ſmote Hadad-Ezer king of Zobah, and ſlew the Syrians of Damaſcus, who came to aſſiſt him; "Re- "zon, the ſon of Eliadah, fled from his lord Hadad-Ezer, and "gathered men unto him; and became captain over a band, and "reigned in Damaſcus over Syria." He is called Hezion, 1 King. xv. 18. and his ſucceſſors mentioned in hiſtory were Tabrimon (1), Hadad or Benhadad (1), Benhadad II (2), Hazael (3), Benhadad III (4), ** and Rezin (5) the ſon of Tabeah (6). Syria became ſubject to Egypt in the days of Tabrimon (7), and recovered her liberty (8) under Benhadad I; and in the days of Benhadad III (9), until the reign of the laſt Rezin (10), they became ſubject to Iſrael: and in the ninth year of Hoſhea king of Judah, Tiglath-pileſer king of Aſſyria captivated the Syrians (11), and put an end to their kingdom. Now Joſephus [b] tells us, that "the "Syrians till his days worſhipped both Adar, that is Hadad or "Benhadad, and his ſucceſſor Hazael, as gods, for their bene- "factions, and for building temples by which they adorned the "city of Damaſcus: for, ſaith he, they daily celebrate ſolem- "nities in honour of theſe kings, and boaſt their antiquity, not "knowing that they are novel, and lived not above eleven hun- "dred years ago." It ſeems theſe kings built ſumptuous ſepulchres for themſelves, and were worſhipped thercin. Juſtin [c] calls the firſt of theſe two kings Damaſcus; ſaying, that "the "city had its name from him, and that the Syrians in honour of "him worſhipped his wife Arathes as a goddeſs, uſing her ſe- "pulchre for a temple."

[a] 2 Sam. viii. 3—5. & 1 King. xi. 23.

[b] Antiq. l. 9. c. 4. p. 404.

[c] Juſtin. l. 36. c. 2.

(9) 2 Kings xiii. 25 xiv. 21—28. In 2 Kings xiii. 2. it is ſaid, "that the Lord delivered Iſrael "into the hand of Hazael king of Syria, and into the hand of Benhadad the ſon of Hazael *all* "*days*." Our tranſlation has *all their days*; as if it were meant, that the Iſraelites were oppreſſed by the Syrians, during the whole reigns of Hazael and Benhadad. But from the 22d verſe of the ſame chapter, and from the ſequel of the Jewiſh ſtory, it appears that *all days* are to be underſtood of all the days of the wicked king Jehoahaz. In his time God delivered Iſrael into the hand of Hazael king of Syria, and into the hand of Hazael's ſon Benhadad, probably as the general of his father's forces. In the reign of Joaſh, the ſon of Jehoahaz, and his ſucceſſor in the kingdom of Iſrael, probably therefore in the reign of Benhadad, the ſon of Hazael, and his ſucceſſor in the kingdom of Syria, the deliverance of Iſrael and the ſubjection of the Syrians began. 2 Kings xiii. 25.

(10) 2 Kings xvi. 6. (11) 2 Kings xvi. 9. Compare xvii. 6.

CHAPTER SECOND.

XXII. Another instance we have in the kingdom of Byblus. In the [a] reign of Minos king of Crete, when Rhadamanthus, the brother of Minos, carried colonies from Crete to the Greek islands, and gave the islands to his captains; he gave Lemnos to Thoas, or Theias, or Thoantes, the father of Hypsipyle (1), a Cretan worker in metals (2), and by consequence a disciple of the *Idæi Dactyli*, and perhaps a Phœnician: for the *Idæi Dactyli*, and Telchines, and Corybantes, brought their arts and sciences from Phœnicia. And [b] Suidas saith, that he was descended from Pharnaces king of Cyprus (3). Apollodorus [c], that he was the son of Sandochus, a Syrian (4). And Apollonius Rhodius [d], that "Hypsipyle gave Jason the purple cloak which the Graces made "for Bacchus; who gave it to his son Thoas, the father of Hyp-"sipyle, and king of Lemnos." Thoas married [e] Calycopis, the mother of Æneas, and daughter of Otreus king of Phrygia; and for his skill on the harp was called Cinyras; and was said to be exceedingly beloved by Apollo or Orus (5). The great Bacchus loved his wife; and being caught in bed with her in Phrygia appeased him with wine, and composed the matter, by making him king of Byblus and Cyprus; and then came over the Hellespont with

[a] Diodor. l. 5. c. 79. p. 238.

[b] Suidas in Σαρδανα παλω.

[c] Apollod. l. 3. c. 13. § III.

[d] Argonaut. l. 4. v. 424. & l. 1. v. 621.

[e] Homer. Odyss. Θ. v. 268, 292. & Hymn. 1, 2. in Venerem. & Hesiod. Theogon. v. 192.

§ XXII.

(1) Apollodor. lib. 1. c. 9. § XVII. (2) Plin. lib. 7. c. 57.

(3) SUIDAS, in the place to which our author refers, says this of Cinyras, whom our author supposes to be Thoas. In the article Κινυρας. he says that Cinyras was the son of Theias; and the same thing is said by Eustatius in Il. Α. 20.

(4) This Apollodorus says of Cinyras, not of Thoas.

(5) THAT Calycopis, a daughter of Otreus king of Phrygia, was the mother of Æneas, may with some colour of probability be conjectured from the first of the Homeric hymns to Venus; in which Venus introduces herself to Anchises, as the daughter of this Otreus: and when she takes her leave; she charges him to give it out, when the son, who was to be the fruit of their amour, should appear at Troy, that his mother was Calycopis, a nymph of Ida. That Cinyras took his name from the musical instrument Cinyra, is likewise asserted by Eustathius in Il. Α. 20. That Thoas, the father of Hipsipyle, was the same person as Cinyras, our author might perhaps infer from this circumstance. Apollodorus (lib. 3. c. 13. § III.) makes Cinyras the father of Adonis. Ovid (Metamorph. 10.) makes Cinyras the father of Adonis by his own daughter Myrrha. And in the same story Hyginus (fab. 58.) Servius (in Virg. Ecl. 10. lin. 18,) and the scholiast on Theocritus (Id. 1. lin. 109) agree. But Apollodorus relates, that Panyasis made Adonis the son of Thoas, a king of the Assyrians, by his own daughter Myrrha. (Apollodor. lib. 3. c. 13. § IV.) And with Panyasis, Antoninus Liberalis seems to agree (c. 34. § IV.) Cinyras therefore had a son by his own daughter Myrrha. Thoas had a son by his own daughter Myrrha. Therefore Thoas and Cinyras were the same. Allowing the conclusion so far to be good; still it does not at all appear, that this Thoas was the Cretan Thoas, the father of Hypsipyle. The great age indeed, which authors ascribe to Cinyras, obviates the objection that would otherwise arise, from making the same man reign in Lemnos in the generation before the Argonautic expedition; and in Cyprus during the Trojan war. Apollo's friendship for Cinyras is

with his army and conquered Thrace (6). And to these things the poets allude, in feigning that Vulcan fell from heaven into Lemnos, and that Bacchus [a] appeased him with wine, and reduced him back into heaven. He fell from the heaven of the Cretan gods, when he went from Crete to Lemnos to work in metals (7); and was reduced back into heaven, when Bacchus made him king of Cyprus and Byblus. He reigned there till a very great age, living to the times of the Trojan war, and becoming exceeding rich (8): and after the death of his wife Calycopis [b], he built temples to her at Paphos, and Amathus, in Cyprus; and at Byblus in Syria; and instituted priests to her with sacred rites and lustful *Orgia*; whence she became the *Dea Cypria*, and the *Dea Syria*. And from temples erected to her in these and other places, she was also called Paphia, Amathusia, Byblia, Cytherea, Salaminia, Cnidia, Erycina, Idalia. "*Fama* "*tradit à Cinyra sacratum vetustissimum Paphiæ Veneris templum,* "*Deamque ipsam conceptam mari huc appulsam.*" Tacit. Hist. l. 2. c. 3. From her sailing from Phrygia to the island Cytherea, and from thence to be queen of Cyprus; she was said by the Cyprians to be born of the froth of the sea, and was painted sailing upon a shell (9). Cinyras deified also his son Gingris by the name

EGYPT.

[a] Pausan. l. 1. c. 20. p. 46.

[b] Clem. Al. Admon. ad Gent. p. 10. Apollodor. l. 3. c. 13. Pindar. Pyth. Ode 2. Hesych. in Κινυραδαι. Steph. in Αμαθους. Strabo, l. 16. p. 755.

is mentioned by Pindar, Pyth. 2. 27—30. Some accounted him the son of Apollo. Scholiast ad locum, & Hesych. in voce Κινυρας.

(6) SIR Isaac Newton (chap. 1. § XLIV.) refers to Homer's story of the amours of Mars and Venus, as if he took it for granted, that the Mars of that story was Bacchus. It is upon the same principle, as I suspect, that he here affirms, that Bacchus's conquest of Thrace was immediately after his affair with Cinyras's wife. For in Homer, as soon as Mars and Venus are released, Mars goes to Thrace, Venus to Cyprus:

Ὁ μεν Θρηικηδε δεδηκει,
Ἠδ' αὐτε Κυπρον ἱκανε φιλομμειδης Αφροδιτη. Homer. Od. Θ. l. 361.

(7) Vide infra.

(8) THE great age of Cinyras is mentioned by Pliny, lib. 7. c. 48. His wealth by Pindar, Nem. 8. Stroph 2. and by Eustath. in Il. Α. 20.

(9) IT is probable that Cinyras introduced the worship of Venus in Cyprus, when he settled there. But there is reason to believe, that she was worshipped in Syria before his time; and that she could not be his mistress or his wife. Cinyras, according to Apollodorus, lib. 3. c. 13. § III. was the great-grandson of Phaéthon: and this Phaéthon, according to Hesiod, was a priest of Venus. Whence it should seem, that the priesthood of Venus devolved to Cinyras by inheritance:

Αυλαξ τοι Κεφαλῳ φιλησασ' Φαεθοντα γον
Ἰφθιμον Φαιθοντα, θεοις επιεικελον ανδρα.
Τον δη νεον, τεξεν αιθυσσων ἐγχεϊ ερικυδεος πολεμος,
Παιδ' ἀταλα φρονεοντα φιλομμειδους Αφροδιτης,
Ωξ' ανερεψαμενη, και μιν ζαθεοις εν νηοις
Ναιετεσκον ψυχον παισασ', δαιμονα διον. Theogon. 986—991.

There

CHAPTER SECOND.

name of Adonis (10); and for aſſiſting the Egyptians with armour, it is probable, that he himſelf was deified by his friends the Egyptians by the name of Baal-Canaan, or Vulcan. For Vulcan was celebrated principally by the Egyptians, and was a king, according to Homer, and reigned in Lemnos (11); and Cinyras was an inventor of arts, [a] and found out copper in Cyprus, and the ſmiths hammer, and anvil, and tongs, and laver; and employed workmen in making armour, and other things of braſs and iron; and was the only king celebrated in hiſtory for working in metals, and was king of Lemnos (12), and the huſband of Venus; all which are the characters of Vulcan. And the Egyptians about the time of the death of Cinyras, viz. in the reign of their king Amenophis, built a very ſumptuous temple at Memphis to Vulcan (13), and near it a ſmaller temple to Venus Hoſpita (14); not an Egyptian woman but a foreigner; not Helena but Vulcan's Venus: for [b] Herodotus tells us, that the region round about this temple was inhabited by Tyrian Phœnicians, and that [c] Cambyſes going into this temple at Memphis, very much derided the ſtatue of Vulcan for its littleneſs: "for," ſaith he, "this ſtatue is moſt like thoſe gods which the Phœnicians call Pataeci, and carry about in the fore part of their "ſhips in the form of Pygmies." And [d] Bochart ſaith of this Venus Hoſpita, "*Phœniciam Venerem in Ægypto pro peregrinâ "habitam.*"

[a] Clem. Al. Admon. ad Gent. p. 21. Plin. l. 7. c. 56.

[b] Herod. l. 2. c. 112.

[c] Herod. l. 3. c. 37.

[d] Bochart. Canaan. l. 1. c. 4.

XXIII. As the Egyptians, Phœnicians, and Syrians, in thoſe days deified their kings and princes; ſo upon their coming into Aſia Minor and Greece, they taught thoſe nations to do the like; as hath been ſhewed above. In thoſe days the writing of the Thebans and Ethiopians was in hieroglypicks; and this way of

There is no room to doubt, that the Phaëton of Heſiod and Apollodorus are the ſame. For both derive him from Cephalus; of whom Heſiod makes him the ſon, Apollodorus the grandſon. The opinion that Venus was the wife or miſtreſs of Cinyras, and was deified by him after her death, reſts, if I miſtake not, on the ſingle authority of Clemens Alexandrinus; for I imagine that Arnobius and Julius Firmicus, who ſay the ſame thing, take it from him. The authority of Clemens, great as it is in points of antiquity, cannot be allowed to outweigh the teſtimony of Heſiod: which is in ſome meaſure confirmed by what Herodotus ſays of the antiquity of the Syrian Venus, lib. 1. c. 105. It is remarkable, that the hiſtory of this Cinyras was become uncertain and obſcure, ſo early as in the age of Pindar. See Pindar's 8th Nemean, Strοph. 2.

(10) THAT Adonis was the ſon of Cinyras; ſee Apollodorus, lib. 3. c. 13. § III. That his Phœnician name was Gingris, ſee Bochart. Chanaan. lib. 2. c. 7. Lycophron calls him Ganas, lin. 833. Tzetzes ſays this was his Cyprian name.

writing ſeems to have ſpread into the lower Egypt before the days of Moſes: for thence came the worſhip of their gods in the various ſhapes of birds, beaſts, and fiſhes, forbidden in the ſecond commandment. Now this emblematical way of writing gave occaſion to the Thebans and Ethiopians, who in the days of Samuel, David, Solomon, and Rehoboam, conquered Egypt, and the nations round about, and erected a great empire, to repreſent and ſignify their conquering kings and princes, not by writing down their names, but by making various hieroglyphical figures; as by painting Ammon with ram's horns; to ſignify the king who conquered Libya, a country abounding with ſheep: his father Amoſis with a ſcithe; to ſignify that king who conquered the lower Egypt, a country abounding with corn: his ſon Oſiris by an ox; becauſe he taught the conquered nations to plow with oxen: Bacchus with bull's horns, for the ſame reaſon; and with grapes, becauſe he taught the nations to plant vines; and upon a tyger, becauſe he ſubdued India: Orus, the ſon of Oſiris, with a harp; to ſignify the prince who was eminently ſkilled on that inſtrument: Jupiter upon an eagle, to ſignify the ſublimity of his dominion; and with a thunderbolt, to repreſent him a warrior: Venus in a chariot drawn with two doves; to repreſent her amorous and luſtful: Neptune with a trident; to ſignify the commander of a fleet compoſed of three ſquadrons: Ægeon, a giant, with 50 heads, and an hundred hands; to ſignify Neptune with his men in a ſhip of fifty oars: Thoth with a dog's head, and wings at his cap and feet, and a Caduceus writhen about with two ſerpents; to ſignify a man of craft, and an embaſſador who reconciled two contending nations: Pan with a pipe

EGYPT.

(11) HOMER often gives him, in common with all the gods, the title of *ανακ*. But it appears not from Homer where his kingdom was. The negative however appears, that it was not in Lemnos. For Homer, relating the intrigue of Mars and Venus, lays the ſcene in *Vulcan's houſe:* and makes Vulcan, in order to detect them, feign a journey *from home* to Lemnos, Od. Θ. lin. 268, 283, 287, 293. Neither were his works in Lemnos, Od. Θ. lin. 272—284. The ſcholiaſt on Apollodorus Rhodius, lib. 4. lin. 761. places them in Lipara and Strongyle; and with him Virgil (Æn. 8. lin. 416—422.) and other Latin poets agree. Tully is the only reſpectable authority I know, for a forge of Vulcan in Lemnos. De Nat. Deor. lib. 3. c. 22.

(12) Does this aſſertion reſt on any other ground than the precarious conjecture, that Cinyras was the Lemnian Thoas?

(13) The temple of Vulcan at Memphis was built by Menes, whom our author conceives to be the ſame with Amenophis. Herodot. lib. 2. c. 99.

(14) Herodot. lib. 2. c. 112.

and

CHAPTER SECOND.

and the legs of a goat; to ſignify a man delighted in piping and dancing: and Hercules with pillars and a club; becauſe Seſoſtris ſet up pillars in all his conqueſts, and fought againſt the Libyans with clubs. This is that Hercules who, according to [a] Eudoxus, was ſlain by Typhon; and according to Ptolemeus [b] Hephæſtion was called Nilus; and who conquered Geryon with his three ſons in Spain, and ſet up the famous pillars at the mouth of the Straits. For Diodorus [c] mentioning three Hercules's, the Egyptian, the Tyrian (1), and the ſon of Alcmena, ſaith, that "the oldeſt "flouriſhed among the Egyptians, and having conquered a great "part of the world, ſet up the pillars in Afric." And Vaſæus [d], that Oſiris, called alſo Dionyſius, "came into Spain and con-"quered Geryon, and was the firſt who brought idolatry into "Spain." Strabo [e] tells us, that the Ethiopians called Megabars fought with clubs: and ſome of the Greeks [f] did ſo till the times of the Trojan war. Now from this hieroglyphical way of writing it came to paſs, that upon the diviſion of Egypt into Nomes by Seſoſtris, the great men of the kingdom to whom the Nomes were dedicated, were repreſented in their ſepulchres or temples of the Nomes by various hieroglyphicks; as by an ox, a cat, a dog, a cebus, a goat, a lyon, a ſcarabæus, an ichneumon, a crocodile, an hippopotamus, an oxyrinchus, an ibis, a crow, a hawk, a leek, and were worſhipped by the Nomes in the ſhape of theſe creatures.

[a] Apud Athenæum, l. 9 c. 11. p. 392.
[b] Ptol. l. 2.
[c] Diod. l. 3. c. 73. p. 145.
[d] Vaſ. Chron. Hiſp. c. 10.
[e] Strabo, l. 16 p. 776.
[f] Homer.

[g] Diodor. l. 3. c. 56, 57. p. 132, 133.

XXIV. The [g] Atlantides, a people upon mount Atlas conquered by the Egyptians in the reign of Ammon, related, that Uranus was their firſt king; and reduced them from a ſavage courſe of life, and cauſed them to dwell in towns and cities, and lay up and uſe the fruits of the earth; and that he reigned over a great part of the world; and by his wife Titæa had eighteen children; among which were Hyperion and Baſilea the parents of Helius and Selene; that the brothers of Hyperion ſlew him, and drowned his ſon Helius, the Phaeton of the ancients, in the Nile,

§ XXIII.

(1) The Cretan, who was one of the Idæi Dactyli.

§ XXIV.

(1) Diod. Sic. lib. 3. c. 60. p. 135.

and

and divided his kingdom amongſt themſelves (1); and the country bordering upon the ocean fell to the lot of Atlas, from whom the people were called Atlantides. By Uranus or Jupiter Uranius, Hyperion, Baſilea, Helius and Selene, I underſtand Jupiter Ammon, Oſiris, Iſis, Orus and Bubaſte; and by the ſharing of the kingdom of Hyperion amongſt his brothers the Titans, I underſtand the diviſion of the earth among the gods mentioned in the poem of Solon. EGYPT.

XXV. For Solon having travelled into Egypt, and converſed with the prieſts of Sais (1) about their antiquities, wrote a poem of what he had learnt, but did not finiſh it (2): [a] and this poem fell into the hands of Plato; who relates out of it, that at the mouth of the Straits, near Hercules's pillars, there was an iſland called Atlantis; the people of which, nine thouſand years before the days of Solon (3), reigned over Libya as far as Egypt, and over Europe as far as the Tyrrhene ſea (4); and all this force, collected into one body, invaded Egypt and Greece, and whatever was contained within the pillars of Hercules; but was reſiſted and ſtopt by the Athenians and other Greeks, and thereby the reſt of the nations not yet conquered were preſerved (5). He ſaith alſo, that in thoſe days the gods having finiſhed their conqueſts divided the whole earth amongſt themſelves, partly into larger, partly into ſmall portions (6), and inſtituted temples and ſacred rites to themſelves (6); and that the iſland Atlantis fell to the lot of Neptune; who made his eldeſt ſon Atlas king of the whole iſland (6), a part of which was called Gadir (6); and that "in "the hiſtory of the ſaid wars mention was made of Cecrops, "Erechtheus, Erichthonius, and others before Theſeus; and alſo "of the women who warred with the men; and of the habit and "ſtatue of Minerva; the ſtudy of war in thoſe days being com-"mon to men and women (7)." By all theſe circumſtances it is manifeſt, that theſe gods were the *Dii magni majorum gentium*, and lived between the age of Cecrops and Theſeus; and that the

[a] Plato in Timæo, & Critia.

§ XXV.

(1) Plato in Timæo, p. 1043.
(2) ——— p. 1042.
(3) ——— p. 1044, et in Critia, p. 1100.
(4) ——— p. 1045.
(5) In Critia, p. 1100.
(6) ——— p. 1103.
(7) In Critia, p. 1101.

CHAPTER SECOND.

wars which Seſoſtris with his brother Neptune made upon the nations by land and ſea, and the reſiſtance he met with in Greece, and the following invaſion of Egypt by Neptune, are here deſcribed; and how the captains of Seſoſtris ſhared his conqueſts amongſt themſelves, as the captains of Alexander the Great did his conqueſts long after; and inſtituting temples and prieſts and ſacred rites to themſelves, cauſed the nations to worſhip them after death as gods: and that the iſland Gadir or Gades, with all Libya, fell to the lot of him who after death was deified by the name of Neptune. The time therefore when theſe things were done, is by Solon limited to the age of Neptune, the father of Atlas (8); for Homer tells us, that "Ulyſſes preſently after the "Trojan war found Calypſo, the daughter of Atlas (9), in the "Ogygian iſland, perhaps Gadir; and therefore it was but two "generations before the Trojan war." This is that Neptune, who with Apollo or Orus fortified Troy with a wall, in the reign of Laomedon the father of Priamus (10); and left many natural children in Greece (11), ſome of which were Argonauts (12), and others were contemporary to the Argonauts. And therefore he flouriſhed but one generation before the Argonautic expedition, and by conſequence about 400 years before Solon went into Egypt (13). But the prieſts of Egypt in thoſe 400 years had magnified the ſtories and antiquity of their gods ſo exceedingly, as to make them nine thouſand years older than Solon, and the iſland Atlantis bigger than all Afric and Aſia together, and full of people; and becauſe in the days of Solon this great iſland did not appear, they pretended that it was ſunk into the ſea with all its people. Thus great was the vanity of the prieſts of Egypt in magnifying their antiquities.

[a] Apud Diodor. l. 5. c. 69. p. 233.

XXVI. The Cretans [a] affirmed, that "Neptune was the firſt "man who ſet out a fleet, having obtained this præfecture of "his father Saturn; whence poſterity reckoned things done in "the ſea to be under his government, and mariners honoured "him with ſacrifices." The invention of tall ſhips with ſails [b] is alſo aſcribed to him. He was firſt worſhipped in Africa, as

[b] Pamphus apud Pauſan. l. 7. c. 21. p. 577.

(8) *For Homer* ——; *and therefore*——*Trojan war.* Read, *and therefore it was but two generations before the Trojan war; for Homer tells us, that Ulyſſes*, &c.

(9) Od. A. lin. 48—52. and H. 244.

(10) Apollodor. lib. 2. c. 4. § IX.

(11) See Natalis Comes, Myth. lib. 2. c. 8.

He-

Herodotus [a] affirms; and therefore reigned over that province. For his eldeſt ſon Atlas, who ſucceeded him, was not only Lord of the iſland Atlantis, but alſo reigned over a great part of Afric, giving his name to the people called *Atlantii*, and to the mountain Atlas, and the Atlantic Ocean. The [b] outmoſt parts of the earth and promontories, and whatever bordered upon the ſea and was waſhed by it, the Egyptians called Nepthys; and on the coaſts of Marmorica and Cyrene, Bochart and Arius Montanus place the Naphthuhim, a people ſprung from Mizraim, Gen. x. 13; and thence Neptune and his wife Nepthys might have their names; the words Neptune, Nepthys, and Naphthuhim, ſignifying the king, queen, and people of the ſea-coaſts. The Greeks tell us, that Japetus was the father of Atlas (1); and Bochart derives Japetus and Neptune from the ſame original (2). He and his ſon Atlas are celebrated in the ancient fables for making war upon the gods of Egypt; as when Lucian [c] ſaith, that Corinth being full of fables, tells the fight of Sol and Neptune, that is, of Apollo and Python, or Orus and Typhon; and where Agatharchides [d] relates how the gods of Egypt fled from the giants, till the Titans came in and ſaved them, by putting Neptune to flight; and where Hyginus [e] tells the war between the gods of Ægypt, and the Titans commanded by Atlas. The Titans are the poſterity of Titæa (3); ſome of whom under Hercules aſſiſted the gods, others under Neptune and Atlas warred againſt them: "for which reaſon," ſaith Plutarch [f], "the prieſts of "Egypt abominated the ſea, and had Neptune in no honour." By Hercules, I underſtand here the general of the forces of Thebais and Ethiopia, whom the gods or great men of Egypt called to their aſſiſtance againſt the giants or great men of Libya, who had ſlain Oſiris and invaded Egypt. For Diodorus [g] ſaith, that "when Oſiris made his expedition over the world, he left his "kinſman Hercules general of his forces over all his dominions,

EGYPT.

[a] Herod. l. 2. c. 50.

[b] Plutarch in Iſide, p. 366.

[c] Lucian de Saltatione, ſect. 42.

[d] Agatharc. apud Photium, CCL. c. 4.

[e] Hygin. fab. 150.

[f] Plutarch. in Iſide, p. 353 & 363.

[g] Diodor. l. 1. p. 10.

(12) Namely, Polyphemus, Erginus, Ancæus (Apoll. Rhod. lib. 1. lin. 179—187) and Nauplius, according to the Orphic Argonautics, lin. 200. But Apollonius Rhodius makes Nauplius the ſixth in deſcent from Neptune.

(13) See chap. 1. § LVI.

§ XXVI.

(1) Apollor. lib. 1. c. 2. § III.

(2) Phaleg. lib. 1. c. 1.

(3) Diod. Sic. lib. 3. c. 57. p. 133.

CHAPTER SECOND.

"and Antæus governor of Libya and Ethiopia." Antæus reigned over all Afric to the Atlantic Ocean, and built Tingis (4) or Tangieres. Pindar [a] tells us, that he reigned at Irasa, a town of Libya, where Cyrene was afterwards built. He invaded Egypt and Thebais; for he was beaten by Hercules and the Egyptians near Antæa or Antæopolis, a town of Thebais; and Diodorus [b] tells us, that "this town had its name from Antæus, whom Hercules slew in the days of Osiris." Hercules overthrew him several times, and every time he grew stronger by recruits from Libya, his mother earth; but Hercules intercepted his recruits, and at length slew him. In these wars Hercules took the Libyan world from Atlas, and made Atlas pay tribute out of his golden orchard, the kingdom of Afric (5). Antæus and Atlas were both of them sons of Neptune; both of them reigned over all Libya and Afric, between mount Atlas and the Mediterranean to the very ocean; both of them invaded Egypt, and contended with Hercules in the wars of the gods: and therefore they are but two names of one and the same man; and even the name Atlas, in the oblique cases, seems to have been compounded of the name Antæus, and some other word; perhaps the word Atal, *cursed*, put before it. The invasion of Egypt by Antæus, Ovid hath relation unto, where he makes Hercules say,

[a] Pindar. Pyth. ode 9.

[b] Diodor. l. 1. c. 21. p. 12.

Sævoque alimenta parentis
Antæo eripui.

This war was at length composed by the intervention of Mercury; who in memory thereof was said to reconcile two contending serpents, by casting his ambassador's rod between them. And thus much concerning the ancient state of Egypt, Libya, and Greece, described by Solon.

XXVII. The mythology of the Cretans (1) differed in some things from that of Egypt and Libya. For in the Cretan mythology, Cœlus and Terra, or Uranus and Titæa, were the parents of Saturn and Rhea; and Saturn and Rhea were the parents of

(4) Plin. lib. 5. c. 1. Strabo (p. 829.) and Plutarch (in Sertorio, p. 572.) relate, that Antæus was buried there. Sertorius opened the tomb, and found a skeleton of 50 cubits.

(5) See Apollodor. lib. 2. c. 4. § 11. and Bochart. Chanaan. lib. 1. c. 24.

§ XXVII.

(1) For the particulars of which see the Theogony of Hesiod, and Diodor. lib. 5. c. 64—79. p. 230—238.

Jupiter

Jupiter and Juno; and Hyperion, Japetus, and the Titans, were one generation older than Jupiter; and Saturn was expelled his kingdom and castrated by his son Jupiter (2): which fable hath no place in the mythology of Egypt. EGYPT.

XXVIII. During the reign of Sesac, Jeroboam being in subjection to Egypt (1), set up the gods of Egypt in Dan and Bethel (2); and Israel "was without the true God, and without a "teaching priest, and without law: and in those times there was "no peace to him that went out, nor to him that came in; but "great vexations were upon all the inhabitants of the countries; "and nation was destroyed of nation, and city of city: for God "did vex them with all adversity," 2 Chron. xv. 3, 5, 6. But in the fifth year of Asa (3) the land of Judah became quiet from war, and from thence had quiet ten years. And Asa took away the altars of strange gods, and brake down the images, and built the fenced cities of Judah with walls, and towers, and gates, and bars, having rest on every side; and got up an army of 580,000 men (4); with which, in the fifteenth year of his reign, he met Zerah the Ethiopian, who came out against him with an army of a thousand thousand Ethiopians and Libyans (5). The way of the Libyans was through Egypt; and therefore Zerah was now lord of Egypt. They fought at Mareshah near Gerar, between Egypt and Judæa; and Zerah was beaten, so that he could not recover himself. And from all this I seem to gather, that Osiris was slain in the fifth year of Asa, and thereupon Egypt fell into civil wars, being invaded by the Libyans, and defended by the Ethiopians for a time; and after ten years more being invaded by the Ethiopians, who slew Orus, the son and successor of Osiris, drowning him in the Nile (6), and seized his kingdom. By these civil wars of Egypt, the land of Judah had rest ten years. Osiris or Sesostris reigned long, Manetho saith 48 years (7); and by this reckoning he began to reign about the

17th

(*) HERE our author seems to confound two fables. Cælus or Uranus was castrated by Saturn. Apollodor. lib. 1. c. 1. § III. Hesiod Theogon. 168—182. And Saturn, according to some, was deposed, not castrated, by Jupiter.

§ XXVIII.

(1) See 1 Kings xi. 40.
(2) See 1 Kings xii. 25—33.
(3) See chap. 1. § XLII. note 9.
(4) 2 Chron. xiv 1—8.
(5) 2 Chron. xiv. 9—15. and xvi. 8.

(6) No antient author, I believe, hath said either that Orus, the son of Osiris, or that the son

CHAPTER SECOND.

17th year of Solomon; and Orus his ſon was drowned in the 15th year of Aſa. For Pliny [a] tells us ([8]), "*Ægyptiorum bellis* "*attrita eſt Æthiopia, viciſſim imperitando ſerviendoque, clara &* "*potens etiam uſque ad Trojana bella Memnone regnante.*" Ethiopia ſerved Egypt till the death of Seſoſtris, and no longer; for Herodotus [b] tells us, that "he alone enjoyed the empire of Ethio- "pia." Then the Ethiopians became free, and after ten years became lords of Egypt and Libya under Zerah and Amenophis ([9]).

[a] Plin. l. 6. c. 29.

[b] Herod. l. 2. c. 110.

XXIX. When Aſa, by his victory over Zerah, became ſafe from Egypt, he aſſembled all the people, and they offered ſacrifices out of the ſpoils, and entered into a covenant upon oath to ſeek the Lord; and in lieu of the veſſels taken away by Seſac, "he brought into the houſe of God the things that his father "had dedicated, and that he himſelf had dedicated, ſilver and "gold, and veſſels," 2 Chron. xv.

XXX. When Zerah was beaten, ſo that he could not recover himſelf, the people [c] of the lower Egypt revolted from the Ethiopians, and called in to their aſſiſtance two hundred thouſand Jews and Canaanites; and under the conduct of one Oſarſiphus, a prieſt of Egypt, called Uſorthon, Oſorchon, Oſorchor, and Hercules Ægyptius by Manetho, cauſed the Ethiopians, now under Memnon ([1]), to retire to Memphis: and there Memnon turned the river Nile ([2]) into a new channel, built a bridge over it, and fortified that paſs, and then went back into Ethiopia. But after thirteen years, he and his young ſon Rameſſes came down with an army from Ethiopia, conquered the lower Egypt, and drove out the Jews and Phœnicians; and this action the Egyptian writ-

[c] Manetho apud Joſephum cont. Apion. c 26. p. 1352—1354.

ſon of Seſoſtris, was drowned in the Nile. But it is ſaid of the Atlantæan Helius, that he was drowned in the Eridanus. Diod. Sic. lib. 3. c. 57. p. 133. This Helius our author conceives to have been the Egyptian Horus (ſee § XXIV.) and conſequently that the Eridanus, in which he was drowned, was the Nile.

([7]) MANETHO ſays this of Seſoſtris. (Apud Euſeb. Chron. Gr. p. 15.) But of Oſiris he ſays, that he reigned 35 (p. 7.)

([8]) This quotation ſeems to be miſplaced. It ſhould ſtand at the end of this ſection, after the words *under Zerah and Amenophis.*

([9]) Africanus (apud Euſeb. Chron. Gr. p. 26.) ſays that Amenophis, the 40th of the Meſtræan kings, was Memnon.

§ XXX.

([1]) THAT the Ethiopians claimed Memnon, ſee Diod. Sic. lib. 2. c. 22. p. 77, 78. Euſtathius in Od. A. 522. ſpeaks of Memnon, who aſſiſted the Trojans, as an Ethiopian.

ers, and their followers, call the ſecond expulſion of the ſhepherds, taking Oſarſiphus for Moſes. EGYPT.

XXXI. Tithonus, a beautiful youth, the elder brother of Priamus, went into Ethiopia ([1]), being carried thither among many captives by Seſoſtris: and the Greeks, before the days of Heſiod, feigned that Memnon was his ſon ([2]). Memnon therefore, in the opinion of thoſe ancient Greeks, was one generation younger than Tithonus, and was born after the return of Seſoſtris into Egypt: ſuppoſe about 16 or 20 years after the death of Solomon. He is ſaid to have lived very long *([2]), and ſo might die about 95 years after Solomon, as we reckoned above: his mother, called Ciſſia by Æſchylus ([3]), in a ſtatue erected to her in Egypt [a], was repreſented as the daughter, the wife, and the mother of a king ([4]); and therefore he was the ſon of a king: which makes it probable that Zerah, whom he ſucceeded in the kingdom of Ethiopia, was his father.

[a] Diodor. l. 1. c. 47. p. 31.

XXXII. Hiſtorians [b] agree that Menes reigned in Egypt next after the gods, and turned the river into a new channel, and built a bridge over it, and built Memphis and the magnificent temple of Vulcan. He built Memphis over-againſt the place where Grand Cairo now ſtands, called by the Arabian hiſtorians Meſir. He built only the body of the temple of Vulcan, and his ſucceſſors Rameſſes or Rhampſinitus, Mæris, Aſychis, and Pſammiticus, built the weſtern, northern, eaſtern, and ſouthern portico's thereof ([1]). Pſammiticus, who built the laſt portico of this temple, reigned three hundred years after the victory of Aſa

[b] Herod. l. 2. c. 4 & 99 *.

([7]) HERODOTUS aſcribes this work to his firſt king Menes, whom our author conceives to have been Memnon. His opinion has ſome countenance from Philoſtratus Heroic. 3, 4.

§ XXXI.

([1]) Apollodor. lib 3. c. 11. § IV.

([2]) Heſiod. Theogon. lin. 984.

*([2]) According to Euſtathius in Od. A. 520. and Pindar, Nem. 6. he was ſlain in battle by Achilles.

([3]) RATHER ſaid by Æſchylus to be a Ciſſian. See Strabo, p. 728. The Ciſſian land was the name of the particular diſtrict in which Suſa ſtood. Herodot. lib. 5. c. 49.

([4]) THIS is not otherwiſe ſaid of Memnon's mother, than as it is ſaid by Diodorus of the mother of the Egyptian king Oſymanduas. The name Oſymanduas differs little from Iſmandes, And Iſmandes, according to Strabo, lib. 17. p. 813. was ſaid to be the Egyptian name of Memnon.

§ XXXII.

* Add Diod Sic. lib. 1. c. 45. p. 29.

([1]) Herodot. lib. 2. c. 99, 101, 121, 136, 153.

CHAPTER SECOND.

over Zerah; and it is not likely that this temple could be above three hundred years in building, or that any Menes could be king of all Egypt before the expulsion of the shepherds. The last of the gods of Egypt was Orus, with his mother Isis, and sister Bubaste, and secretary Thoth, and uncle Typhon; and the king who reigned next after all their deaths, and turned the river and built a bridge over it, and built Memphis and the temple of Vulcan, was Memnon or Amenophis, called by the Egyptians Amenoph; and therefore he is Menes. For the names Amenoph, or Menoph, and Menes, do not much differ. And from Amenoph the city Memphis, built by Menes, had its Egyptian names, Moph, Nopth, Menoph or Menuf, as it is still called by the Arabian historians. The necessity of fortifying this place against Osarsiphus gave occasion to the building of it.

XXXIII. In the time of the revolt of the lower Egypt under Osarsiphus, and the retirement of Amenophis into Ethiopia, Egypt being then in the greatest distraction, the Greeks built the ship Argo, and sent in it the flower of Greece to Æetes in Colchis, and to many other princes on the coasts of the Euxine and Mediterranean seas. And this ship was built after the pattern of an Egyptian ship with fifty oars; in which Danäus, with his fifty daughters a few years before, fled from Egypt into Greece; and was the first long ship with sails built by the Greeks: and such an improvement of navigation, with a design to send the flower of Greece to many princes upon the sea-coasts of the Euxine and Mediterranean seas, was too great an undertaking to be set on foot, without the concurrence of the princes and states of Greece, and perhaps the approbation of the Amphictyonic council; for it was done by the dictate of the oracle. This council met every half year upon state-affairs for the welfare of Greece (1); and therefore knew of this expedition, and might send the Argonauts upon an embassy to the said princes; and for concealing their design, might make the fable of the golden fleece, in relation to the ship of Phrixus, whose ensign was a golden ram. And probably their design was to notify the distraction of Egypt, and the invasion thereof by the Ethiopians and Israelites to the

§ XXXIII.

(1) Strabo, lib. 9. p. 420.

said

said princes, and to persuade them to take that opportunity to revolt from Egypt, and set up for themselves, and make a league with the Greeks. For the Argonauts went through [a] the kingdom of Colchis by land to the Armenians; and through Armenia, to the Medes; which could not have been done, if they had not made friendship with the nations through which they passed. They visited also Laomedon king of the Trojans; Phineus, king of the Thracians; Cyzicus, king of the Doliones; Lycus, king of the Mariandyni; the coasts of Mysia and Taurica Chersonesus; the nations upon the Tanais; the people about Byzantium, and the coasts of Epirus; Corsica, Melita, Italy, Sicily, Sardinia, and Gallia upon the Mediterranean; and from thence [b] they crossed the sea to Afric, and there conferred with Eurypylus king of Cyrene. And [c] Strabo tells us, that "in Armenia and Media, and the neighbouring places, there were frequent monuments of the expedition of Jason; as also about Sinope, and its sea-coasts; the Propontis and the Hellespont, and in the Mediterranean." And a message by the flower of Greece to so many nations could be on no other account than state-policy. These nations had been invaded by the Egyptians; but after this expedition we hear no more of their continuing in subjection to Egypt.

[a] Strabo, l. 1. p. 48. and p. 45.

[b] Pindar. Pyth. ode 4.

[c] Strabo, l. 1. p. 21, 45, 46.

XXXIV. The Egyptians originally lived on the fruits of the earth, and fared hardly, and abstained from animals, and therefore abominated shepherds. Menes [d] taught them to adorn their beds and tables with rich furniture and carpets; and brought in amongst them a sumptuous, delicious, and voluptuous way of life (1). And about a hundred years after his death Gnephacthus, one of his successors, cursed him for it; and to reduce the luxury of Egypt, caused the curse to be entered in the temple of Jupiter at Thebes; and by this curse the honour of Menes was diminished among the Egyptians.

[d] Diodor. l. 1. c. 43. p. 28. & c. 45. p. 29.

XXXV. The kings of Egypt, who expelled the shepherds and succeeded them, reigned, I think, first at Coptos, and then at

§ XXXIV.

(1) But whoever brought in the eating of flesh, and a voluptuous life, was older than the patriarch Joseph. See Warburton's Divine Legation, book IV. § V.

CHAPTER SECOND.

Thebes, and then at Memphis. At Coptos I place Miſphragmuthoſis and Amoſis, or Thomoſis; who expelled the ſhepherds, and aboliſhed their cuſtom of ſacrificing men; and extended the Coptic language, and the name of Αἰγυπτος, *Ægyptus*, to the conqueſt. Then Thebes became the royal city of Ammon, and from him was called No-Ammon; and his conqueſt on the weſt of Egypt was called Ammonia. After him, in the ſame city of Thebes, reigned Oſiris, Orus, Menes or Amenophis, and Rameſſes. But Memphis and her miracles were not yet celebrated in Greece; for Homer celebrates Thebes as in its glory in his days, and makes no mention of Memphis. After Menes had built Memphis (1); Mœris, the ſucceſſor of Rameſſes, adorned it (2), and made it the ſeat of the kingdom; and this was almoſt two generations after the Trojan war. Cinyras, the Vulcan who married Venus, and under the kings of Egypt reigned over Cyprus and part of Phœnicia, and made armour for thoſe kings; lived till the times of the Trojan war: and upon his death Menes, or Memnon, might deify him, and found the famous temple of Vulcan in that city for his worſhip, but not live to finiſh it. In a plain [a] not far from Memphis are many ſmall pyramids, ſaid to be built by Venephes or Enephes (3); and I ſuſpect that Venephes and Enephes have been corruptly written for Menephes or Amenophis, the letters AM being almoſt worn out in ſome old manuſcript. For after the example of theſe pyramids, the following kings, Mœris and his ſucceſſors, built others much larger (4). The plain, in which they were built, was the burying-place of that city; as appears by the mummies there found: and therefore the pyramids were the ſepulchral monuments of the kings and princes of that city: and by theſe and ſuch like works the city grew famous ſoon after the days of Homer; who therefore flouriſhed in the reign of Rameſſes.

[a] Manetho.

XXXVI. Herodotus [b] is the oldeſt hiſtorian now extant who wrote of the antiquities of Egypt, and had what he wrote from the prieſts of that country: and Diodorus, who wrote almoſt

[b] Herod. l. 2. c. 3, 55, 99.

§ XXXV.

(1) Herodot. lib. 2. c. 99. (2) Herodot. lib. 2. c. 102. Diod. Sic lib. 1. c. 11. p. 33.
(3) The fourth prince of the firſt Dynaſty after the flood. Manetho apud Euſeb. in Chron. Gr. p. 14.

400 years after him, and had his relations alſo from the prieſts of Egypt, placed many nameleſs kings between thoſe whom Herodotus placed in continual ſucceſſion. The prieſts of Egypt had therefore, between the days of Herodotus and Diodorus, out of vanity, very much increaſed the number of their kings: and what they did after the days of Herodotus, they began to do before his days. For he tells us, that they recited to him out of their books, the names of 330 kings (1) who reigned after Menes, but did nothing memorable, except Nitocris and Mœris the laſt of them. All theſe reigned at Thebes, till Mœris tranſlated the ſeat of the empire from Thebes to Memphis. After Mœris he reckons Seſoſtris, Pheron, Proteus, Rhampſinitus, Cheops, Cephren, Mycerinus, Aſychis, Anyſis, Sabacon, Anyſis again, Sethon, twelve contemporary kings, Pſammitichus, Nechus, Pſammis, Apries, Amaſis (2), and Pſammenitus (3). The Egyptians had, before the days of Solon, made their monarchy 9000 years old; and now they reckoned to Herodotus a ſucceſſion of 330 kings reigning ſo many generations, that is about 11000 years before Seſoſtris. But the kings who reigned long before Seſoſtris might reign over ſeveral little kingdoms in ſeveral parts of Egypt, before the riſe of their monarchy; and by conſequence before the days of Eli and Samuel, and ſo are not under our conſideration: and theſe names may have been multiplied by corruption; and ſome of them, as Athothes or Thoth, the ſecretary of Oſiris; Toſorthrus or Æſculapius, a phyſician who invented building with ſquare ſtones; and Thuor, or Polybus, the huſband of Alcandra, were only princes of Egypt. If with Herodotus we omit the names of thoſe kings who did nothing memorable, and conſider only thoſe whoſe actions are recorded, and who left ſplendid monuments of their having reigned over Egypt; ſuch as were temples, ſtatues, pyramids, obeliſks, and palaces, dedicated or aſcribed to them; theſe kings, reduced into good order, will give us all, or almoſt all, the kings of Egypt,

EGYPT.

(4) Herodot. & Diod. Sic.

§ XXXVI.

(1) Herodot. lib. 2. c. 100. (3) ——— c. 101—172.
(2) ——— lib. 3. c. 10.

CHAPTER SECOND.

from the days of the expulſion of the ſhepherds and founding of the monarchy, downwards to the conqueſt of Egypt by Cambyſes. For Seſoſtris reigned in the age of the gods of Egypt, being deified by the names of Oſiris, Hercules, and Bacchus, as above; and therefore Menes, Nitocris, and Mœris, are to be placed after him. Menes, and his ſon Rameſſes, reigned next after the gods; and therefore Nitocris and Mœris reigned after Rameſſes. Mœris is ſet down immediately before Cheops, three times in the dynaſties of the kings of Egypt compoſed by Eratoſthenes, and once in the dynaſties of Manetho. And in the ſame dynaſties Nitocris is ſet after the builders of the three great pyramids; and, according to Herodotus, her brother reigned before her, and was ſlain, and ſhe revenged his death (4); and, according to Syncellus, ſhe built the third great pyramid; and the builders of the pyramids reigned at Memphis, and by conſequence after Mœris. Now from theſe things I gather, that the kings of Egypt, mentioned by Herodotus, ought to be placed in this order: Seſoſtris, Pheron, Proteus, Menes, Rhampſinitus, Mœris, Cheops, Cephren, Mycerinus, Nitocris, Aſychis, Anyſis, Sabacon, Anyſis again, Sethon, twelve contemporary kings, Pſammitichus, Nechus, Pſammis, Apries, Amaſis, Pſammenitus.

XXXVII. Pheron is by Herodotus ſaid to be the ſon and ſucceſſor of Seſoſtris (1). He was deified by the name of Orus.

XXXVIII. Proteus reigned in the lower Egypt, when Paris ſailed thither, that is at the end of the Trojan war, according to [a] Herodotus (1): and at that time Amenophis was king of Egypt and Ethiopia: but in his abſence Proteus might be governor of ſome part of the lower Egypt under him. For Homer places Proteus

[a] Herod. l. 2. c. 112—119.

(4) Herodot. lib. 2. c. 100.

§ XXXVII.

(1) Herodot. lib. 2. c. 111.

§ XXXVIII.

(1) PROTEUS reigned in Egypt, according to Herodotus, both when Paris was driven to that coaſt with Helen, before the Trojan war; and when Menelaus ſailed thither, after Troy was taken.

(2) Od. Δ. 384—386.

(3) THIS is ſaid by Diodorus, lib. 1. c. 62. p. 39; not, that I know of, by Herodotus 1. who mentions only this one circumſtance of his extraction, that he was a Memphite, lib. 2. c. 112.

upon

upon the ſea-coaſts, and makes him a ſea god, and calls him the ſervant of Neptune (2); and Herodotus ſaith, that he roſe up from among the common people (3), and that Proteus was his name tranſlated into Greek (4); and this name in Greek ſignifies only a prince or preſident. He ſucceeded Pheron, and was ſucceeded by Rhampſinitus, according to Herodotus; and ſo was contemporary to Amenophis. EGYPT.

XXXIX. Amenophis reigned next after Orus and Iſis, the laſt of the gods. He reigned at firſt over all Egypt; and then over Memphis, and the upper parts of Egypt; and by conquering Oſarſiphus, who had revolted from him, became king of all Egypt again, about 51 years after the death of Solomon. He built Memphis (1), and ordered the worſhip of the gods of Egypt (2), and built a palace at Abydus (3), and the Memnonia at This (4) and Suſa (5), and the magnificent temple of Vulcan in Memphis (6); the building with ſquare ſtones being found out before by Toſorthrus (7), the Æſculapius of Egypt. He is, by corruption of his name, called Menes, Mines, Minæus, Mineus, Minies, Mnevis, Enephes, Venephes, Phamenophis, Oſymanthyas, Oſimandes, Iſmandes, Imandes, Memnon, Arminon.

XL. Amenophis was ſucceeded by his ſon, called by Herodotus, Rhampſinitus, and by others Ramſes, Ramiſes, Rameſes, Rameſſes, [a] Rameſtes, Rhampſes, Remphis. Upon an obeliſk erected by this king in Heliopolis, and ſent to Rome by the emperor Conſtantius, was an inſcription, interpreted by Hermapion, an Egyptian prieſt, expreſſing, that the king was long lived, and reigned over a great part of the earth. And Strabo [b], an eye-witneſs, tells us, that in the monuments of the kings of Egypt, above the Memnonium, were inſcriptions upon obeliſks, ex-

[a] Ammian. l. 17. c. 4.

[b] Strabo, l. 17. p. 816.

(2) Herodot. & Diod. Sic. ibid.

§ XXXIX.

(1) Herodot. lib. 2. c. 99. (2) Diod. Sic. lib. 1. c. 45. p. 29.
(3) At Abydus in the upper Egypt. Strabo, lib. 17. p. 813.

(4) STEPHANUS Byzantinus mentions a town of Egypt of this name, not far from Abydus. But I ſuſpect, that it is written here by miſtake for Thebes. For beſides that, I find no authority for any Memnonian works at This; if Thebes be not intended here, our author hath entirely omitted the moſt remarkable of the Egyptian Memnonia. See Strabo, lib. 17. p. 813 and 816.
(5) Strabo, lib. 15. p. 728. Diod. Sic. lib. 2. c. 22. p. 77. (6) Herodot. lib. 2. c. 99.
(7) The ſecond prince of Manetho's third dynaſty. See Syncell. p. 56. and Euſeb. Chron. Gr. p. 14.

preſſing

CHAPTER SECOND.

preſſing the riches of the kings, and their reigning as far as Scythia, Bactria, India, and Ionia. And Tacitus [a] tells us, from an inſcription ſeen at Thebes by Cæſar Germanicus, and interpreted to him by the Egyptian prieſts, that this king Rameſſes had an army of 700000 men; and reigned over Libya, Ethiopia, Media, Perſia, Bactria, Scythia, Armenia, Cappadocia, Bithynia, and Lycia (1); whence the monarchy of Aſſyria was not yet riſen. This king was very covetous, and a great collector of taxes, and one of the richeſt of all the kings of Egypt, and built the weſtern portico of the temple of Vulcan (2).

[a] Annal. l. 2. c. 60.

XLI. Mœris inheriting the riches of Rameſſes, built the northern portico of that temple more ſumptuouſly; and made the lake of Mœris with two great pyramids of brick in the midſt of it (1). And for preſerving the diviſion of Egypt into equal ſhares amongſt the ſoldiers, this king wrote a book of ſurveying; which gave a beginning to geometry (2). He is called alſo Maris, Myris, Meres, Marres, Smarres; and more corruptly, by changing M into A, T, B, Σ, YX, Λ, &c. Ayres, Tyris, Byires, Soris, Uchoreus, Lachares, Labaris, &c.

[b] Diodor. l. 1. c. 50. p. 32.

XLII. Diodorus [b] places Uchoreus between Oſymanduas and Myris, that is between Amenophis and Mœris; and ſaith that he built Memphis, and fortified it to admiration with a mighty rampaat of earth, and a broad and deep trench, which was filled with the water of the Nile; and made there a vaſt and deep lake for receiving the water of the Nile in the time of its overflowing; and built palaces in the city; and that this place was ſo commodiouſly ſeated, that moſt of the kings who reigned after him preferred it before Thebes, and removed the court from

§ XL.

(1) The inſcription, as Tacitus relates it, ſet forth that Rameſſes was the conqueror of theſe countries.

(2) Herodot. lib. 2. c. 121.

§ XLI.

(1) Herodot. lib. 2. c. 101.

(2) AUTHORS differ much about the firſt inventor of geometry. Herodotus (lib. 2. c. 109.) and Proclus (on the firſt of Euclid) agree that the inundations of the Nile gave occaſion to it. Herodotus refers the invention to the age of Seſoſtris. Diodorus (lib. 1. c. 94.) aſcribes it to the king Saſychis. Plato gives the honour of it to Thoth. Diogenes Laertius, in the life of Pythagoras, mentions Mœris, as ſaid by Anticlides, to be the firſt inventor. lib. 8. ſegm. 11. Where our author found that Mœris wrote a book of ſurveying, I know not.

thence to this place; ſo that the magnificence of Thebes from that time began to decreaſe, and that of Memphis to increaſe, till Alexander, king of Macedon, built Alexandria. Theſe great works of Uchoreus, and thoſe of Mœris, favour of one and the ſame genius, and were certainly done by one and the ſame king, diſtinguiſhed into two by a corruption of the name as above; for this lake of Uchoreus was certainly the ſame with that of Mœris. EGYPT.

XLIII. After the example of the two brick pyramids made by Mœris, the three next kings, Cheops, Cephren, and Mycerinus, built the three great pyramids at Memphis (1); and therefore reigned in that city. Cheops ſhut up the temples of the Nomes, and prohibited the worſhip of the gods of Egypt (2); deſigning no doubt to have been worſhipped himſelf after death. He is called alſo Chembis, Chemmis, Chemnis, Phiops, Apathus, Apappus, Suphis, Saophis, Syphoas, Syphaoſis, Soiphis, Syphuris, Anoiphis, Anoïſis. He built the biggeſt of the three great pyramids, which ſtand together; and his brother Cephren, or Cerpheres, built the ſecond, and his ſon Mycerinus founded the third. This laſt king was celebrated for clemency and juſtice (3). He ſhut up the dead body of his daughter in a hollow ox, and cauſed her to be worſhipped daily with odours (4). He is called alſo Cheres, Cherinus, Bicheres, Moſcheres, Mencheres. He died before the third pyramid was finiſhed (5); and his ſiſter and ſucceſſor Nitocris finiſhed it (6).

XLIV. Then reigned Aſychis, who built the eaſtern portico of the temple of Vulcan very ſplendidly; and among the ſmall pyramids a large pyramid of brick, made of mud dug out of the

§ XLIII.

(1) Herodot. lib. 2 c. 124, 127, 134. Diod. Sic. lib. 1. c. 63, 64. p. 39—41.
(2) Herodot. lib. 2. c. 129. (3) ——— c. 129. Diod. Sic. lib. 1. c. 64. p. 41.
(4) ——— c. 129, 130. (5) Diod. Sic. lib. 1. c. 64. p. 40.

(6) IN the ſixth of Manetho's dynaſties, Nitocris is mentioned, as the princeſs who ſet up the third pyramid. The third pyramid, according to Diodorus, was begun, but not finiſhed, by Mycerinus Therefore Nitocris reigned after Mycerinus, and finiſhed the pyramid which he begun. Nitocris, according to Herodotus, lib. 2. c. 100, was the ſiſter of the prince whom ſhe ſucceeded. Since ſhe finiſhed Mycerinus's works, ſhe reigned not long after him, and cheriſhed an affection for his memory. Mycerinus therefore was that brother of this princeſs, whom ſhe ſucceeded These ſeem to have been the reaſons by which our author perſuaded himſelf, that Nitocris held the place, which he aſſigns to her, in the ſucceſſion of the Egyptian monarchs.

CHAPTER SECOND.

lake of Mœris (1). And these are the kings who reigned at Memphis, and spent their time in adorning that city, until the Ethiopians and the Assyrians and others revolted, and Egypt lost all her dominion abroad, and became again divided into several small kingdoms.

XLV. One of those kingdoms was, I think, at Memphis, under Gnephactus, and his son (1) and successor Bocchoris. Africanus calls Bocchoris a Saite (2); but Sais at this time had other kings. Gnephactus, otherwise called Neochabis and Technatis, cursed Menes for his luxury, and caused the curse to be entered in the temple of Jupiter at Thebes (3); and therefore reigned over Thebais: and Bocchoris sent in a wild bull upon the god Mnevis (4), which was worshipped at Heliopolis. Another of those kingdoms was at Anysis, or Hanes, Isa. xxx. 4. under its king Anysis or Amosis; a third was at Sais, under Stephanathis, Nechepsos, and Nechus (5): and a fourth was at Tanis, or Zoan, under Petubastes, Osorchon, and Psammis (6). And Egypt being weakened by this division, was invaded and conquered by the Ethiopians under Sabacon, who slew Bocchoris (7) and Nechus (8), and made Anysis fly (9). The olympiads began in the reign of Petubastes (6), and the æra of Nabonassar in the 22d year of the reign of Bocchoris (10), according to Africanus; and therefore the division of Egypt into many kingdoms began before the olympiads, but not above the length of two kings reign before them.

XLVI. After the study of astronomy was set on foot for the use of navigation, and the Egyptians by the heliacal risings and settings of the stars had determined the length of the solar year of 365 days, and by other observations had fixed the solstices, and formed the fixed stars into asterisms (all which was done in the reign of Ammon, Sesac, Orus, and Memnon) it may be presumed that they continued to observe the motions of the pla-

§ XLIV.

(1) Herodot. lib. 2. c. 136.

§ XLV.

(1) Diod. Sic. lib. 1. c. 45. p. 29.
(2) See the 24th dynasty.
(3) Diod. Sic. lib. 1. c. 45. p. 29. Plutarch de Is. & Os. p. 354.

nets.

nets. For they called them after the names of their gods; and Nechepsos, or Nicepsos, king of Sais, by the assistance of Petosiris, a priest of Egypt, invented astrology; grounding it upon the aspects of the planets, and the qualities of the men and women to whom they were dedicated (1). And in the beginning of the reign of Nabonassar king of Babylon, about which time the Ethiopians under Sabacon invaded Egypt, those Egyptians who fled from him to Babylon carried thither the Egyptian year of 365 days, and the study of astronomy and astrology, and founded the æra of Nabonassar; dating it from the first year of that king's reign, which was the 22d year of Bocchoris as above, and beginning the year on the same day with the Egyptians for the sake of their calculations. So Diodorus [a]: "They say that the "Chaldæans in Babylon, being colonies of the Egyptians, be-"came famous for astrology, having learnt it from the priests "of Egypt." And Histiæus, who wrote an history of Egypt, speaking of a disaster of the invaded Egyptians, saith, [b] that "the priests who survived this disaster, taking with them the Sa-"cra of Jupiter Enyalius, came to Semnaar in Babylonia." From the 15th year of Asa, in which Zerah was beaten, and Menes, or Amenophis, began his reign, to the beginning of the æra of Nabonassar, were 200 years. And this interval of time allows room for about nine or ten reigns of kings, at about twenty years to a reign one with another; and so many reigns there were, according to the account set down above out of Herodotus; and therefore that account, as it is the oldest, and was received by Herodotus from the priests of Thebes, Memphis, and Heliopolis, three principal cities of Egypt, agrees also with the course of nature, and leaves no room for the reigns of the many nameless kings which we have omitted. These omitted kings reigned before Mœris, and by consequence at Thebes; for Mœ-

EGYPT.

[a] Diodor. l. 1. p. 51.

[b] Joseph. Ant. l. 1. c. 4.

(4) Sir John Marsham from Ælian.
(5) See the 26th dynasty.
(6) See the 23d dynasty.
(7) See the 25th dynasty.
(8) Herodot. lib. 2. c. 152.
(9) ——— c. 137.
(10) See the 24th dynasty.

§ XLVI.

(1) See Sir John Marsham, Sect. IX. Tit. *Mosis.* § III. and § XVI. Tit. *Necepsos rex.*

CHAPTER SECOND.

ris tranſlated the ſeat of the empire from Thebes to Memphis. They reigned after Rameſſes; for Rameſſes was the ſon and ſucceſſor of Menes, who reigned next after the gods. Now Menes built the body of the temple of Vulcan; Rameſſes, the firſt portico; and Mœris, the ſecond portico thereof. But the Egyptians, for making their gods and kingdom look ancient, have inſerted, between the builders of the firſt and ſecond portico of this temple, three hundred and thirty kings of Thebes; and ſuppoſed that theſe kings reigned eleven thouſand years; as if any temple could ſtand ſo long. This being a manifeſt fiction, we have corrected it, by omitting thoſe interpoſed kings who did nothing, and placing Mœris the builder of the ſecond portico, next after Rameſſes the builder of the firſt.

XLVII. In the dynaſties of Manetho, Sevechus (1) is made the ſucceſſor of Sabacon, being his ſon; and perhaps he is the Sethon of Herodotus, who became prieſt of Vulcan, and neglected military diſcipline (2). For Sabacon is that So, or Sau, with whom Hoſhea king of Iſrael conſpired againſt the Aſſyrians, in the fourth year of Hezekiah, anno Nabonaſſ. 24. Herodotus tells us twice or thrice, that Sabacon, after a long reign of fifty years, relinquiſhed Egypt voluntarily; and that Anyſis, who fled from him, returned and reigned again in the lower Egypt after him (3), or rather with him: and that Sethon reigned after Sabacon, and went to Peluſium againſt the army of Sennacherib, and was relieved with a great multitude of mice, which eat the bow-ſtrings of the Aſſyrians; in memory of which the ſtatue of Sethon, ſeen by Herodotus [a], was made with a mouſe in its hand. A mouſe was the Egyptian ſymbol of deſtruction; and the mouſe in the hand of Sethon ſignifies only, that he overcame the Aſſyrians with a great deſtruction. The Scriptures inform us, that when Sennacherib invaded Judæa, and beſieged Lachiſh and Libnah, which was in the 14th year of Hezekiah (4), anno Nabonaſſ. 34. the king of Judah truſted upon Pharaoh king of Egypt, that is upon Sethon; and that Tirhakah, king of Ethiopia, came out alſo to fight againſt Sennacherib, 2 King. xviii. 21. and xix. 9 (5).

[a] Herodot. l. 2. c. 141.

(1) See the 25th dynaſty.
(2) Herodot. lib. 2. c. 141.
(3) ——— lib. 3. c. 137—140.
(4) 2 Kings xviii. 13.
(5) ——— 21.

Which makes it probable, that when Sennacherib heard of the kings of Egypt and Ethiopia coming againſt him, he went from Libnah towards Peluſium to oppoſe them; and was there ſurprized and ſet upon in the night by them both (6); and routed with as great a ſlaughter, as if the bow-ſtrings of the Aſſyrians had been eaten by mice. Some think that the Aſſyrians were ſmitten by lightning; or by a fiery wind; which ſometimes comes from the ſouthern parts of Chaldæa. After this victory Tirhakah ſucceeding Sethon, carried his arms weſtward through Libya and Afric to the mouth of the Straits (7). But Herodotus tells us, that the prieſts of Egypt reckoned Sethon the laſt king of Egypt, who reigned before the diviſion of Egypt into twelve contemporary kingdoms (8), and by conſequence before the invaſion of Egypt by the Aſſyrians. EGYPT.

XLVIII. For Aſſerhadon king of Aſſyria, in the 68th year of Nabonaſſar, after he had reigned about thirty years over Aſſyria, invaded the kingdom of Babylon; and then carried into captivity many people from Babylon, and Cuthah, and Ava, and Hamath, and Sepharvaim; placing them in the regions of Samaria and Damaſcus: and from thence they carried into Babylonia and Aſſyria the remainder of the people of Iſrael and Syria, which had been left there by Tiglath-pileſer. This captivity was 65 years after the firſt year of Ahaz, Iſa. vii. 1, 8. and 2 King. xv. 37. and xvi. 5. and by conſequence in the twentieth year of Manaſſeh, anno Nabonaſſ. 69. And then Tartan was ſent by Aſſerhadon with an army againſt Aſhdod, or Azoth, a town at that time ſubject to Judæa, 2 Chron. xxvi. 6. and took it, Iſa. xx. 1. And this poſt being ſecured, the Aſſyrians beat the Jews, and captivated Manaſſeh, and ſubdued Judæa: and in theſe wars Iſaiah was ſawed aſunder by the command of Manaſſeh, for propheſying againſt him. Then the Aſſyrians invaded and ſubdued Egypt and Ethiopia, and carried the Egyptians and Ethiopians into captivity, and thereby put an end to the reign of the Ethiopians over Egypt, Iſa. vii. 18. and viii. 7. and x. 11, 12. and

(6) 2 Kings xix. 35.
(7) See Strabo, lib. 15. p. 686, 687.
(8) Herodot. lib. 1. c. 142, 147.

CHAPTER SECOND.

xix. 23. and xx. 4 (1). In this war the city No-Ammon, or Thebes, which had hitherto continued in a flouriſhing condition, was miſerably waſted and led into captivity, as is deſcribed by Nahum, chap. iii. ver. 8, 9, 10; for Nahum wrote after the laſt invaſion of Judæa by the Aſſyrians, chap. i. ver. 15; and therefore deſcribes this captivity as freſh in memory: and this and other following invaſions of Egypt under Nebuchadnezzar and Cambyſes, put an end to the glory of that city. Aſſerhadon reigned over the Egyptians and Ethiopians three years, Iſa. xx. 3, 4. that is until his death, which was in the year of Nabonaſſar 81; and therefore invaded Egypt, and put an end to the reign of the Ethiopians over the Egyptians, in the year of Nabonaſſar 78. So that the Ethiopians under Sabacon, and his ſucceſſors Sethon and Tirhakah, reigned over Egypt about 80 years. Herodotus allots 50 years to Sabacon; and Africanus, 14 years to Sethon, and 18 to Tirhakah (2).

XLIX. The diviſion of Egypt into more kingdoms than one, both before and after the reign of the Ethiopians, and the conqueſt of the Egyptians by Aſſerhadon, the prophet Iſaiah [a] ſeems to allude unto in theſe words: "I will ſet," ſaith he, "the Egyptians againſt the Egyptians, and they ſhall fight every one againſt his brother, and every one againſt his neighbour, city againſt city, and kingdom againſt kingdom; and the ſpirit of Egypt ſhall fail.—And the Egyptians will I give over into the hand of a cruel lord [viz. Aſſerhadon] and a fierce king ſhall reign over them.—Surely the princes of Zoan [Tanis] are fools, the counſel of the wiſe councellors of Pharaoh is become brutiſh: how long ſay ye unto Pharaoh, I am the ſon of the ancient kings?—The princes of Zoan are become fools: the princes of Noph [Memphis] are deceived,—even they that were the ſtay of the tribes thereof.—In that day there ſhall be a high-way out of Egypt into Aſſyria, and the Egyptians ſhall ſerve the Aſſyrians."

[a] Iſa. xix. 2, 4, 11, 13, 23.

§ XLVIII.

(1) See chap. iii. § XIII.

(2) See the 25th dynaſty.

§ L.

(2) Herodot. lib. 2. c. 151, 152.

L.

L. After the death of Aſſerhadon, Egypt remained ſubject to twelve contemporary kings, who revolted from the Aſſyrians, and reigned together fifteen years; including, I think, the three years of Aſſerhadon, becauſe the Egyptians do not reckon him among their kings. They [a] built the labyrinth adjoining to the lake of Mœris, which was a very magnificent ſtructure, with twelve halls in it, for their palaces: and then Pſammitichus, who was one of the twelve, conquered all the reſt (1). He built the laſt portico of the temple of Vulcan, founded by Menes about 260 years before; and reigned 54 years (2), including the fifteen years (3) of his reign with the twelve kings. Then reigned Nechaoh, or Nechus, 17 years (4); Pſammis ſix years (5); Vaphres, Apries, Eraphius, or Hophra, 25 years (6); Amaſis 44 years (7); and Pſammenitus ſix months, according to Herodotus (8). Egypt was ſubdued by Nebuchadnezzar in the laſt year but one of Hophra, anno Nabonaſſ. 178, and remained in ſubjection to Babylon forty years, Jer. xliv. 30. and Ezek. xxix. 12, 13, 14, 17, 19; that is, almoſt all the reign of Amaſis, a plebeian (9) ſet over Egypt by the conqueror. The forty years ended with the death of Cyrus; for he reigned over Egypt and Ethiopia, according to Xenophon. At that time therefore thoſe nations recovered their liberty; but after four or five years more they were invaded and conquered by Cambyſes, anno Nabonaſſ. 223 or 224, and have almoſt ever ſince remained in ſervitude, as was predicted by the prophets.

[a] Herod. l. 2. c. 148, &c.

EGYPT.

LI. The reigns of Pſammitichus, Nechus, Pſammis, Apries, Amaſis, and Pſammenitus, ſet down by Herodotus, amount unto 146½ years: and ſo many years there were from the 78th year of Nabonaſſar, in which the dominion of the Ethiopians over Egypt came to an end, unto the 224th year of Nanobaſſar, in which Cambyſes invaded Egypt, and put an end to that kingdom. Which is an argument that Herodotus was circumſpect and faithful in his narrations, and has given us a good account of the antiquities of Egypt, ſo far as the prieſts of Egypt at Thebes,

(2) Herodot. lib. 2. c. 157.
(3) Diod. Sic. lib. 1. c. 66. p. 41.
(4) Herodot. lib. 2. c. 159.
(5) —— c. 161.
(6) —— Ibid.
(7) —— lib. 3. c. 10.
(8) —— lib. 3. c. 14.
(9) —— lib. 2. c. 172.

Memphis,

CHAPTER SECOND.

Memphis, and Heliopolis, and the Carians and Ionians inhabiting Egypt, were then able to inform him. For he conſulted them all; and the Cares and Ionians had been in Egypt from the time of the reign of the twelve contemporary kings (').

[a] Plin. l. 36. c. 8, 9.

LII. Pliny [a] tells us, that the Egyptian obeliſks were of a ſort of ſtone dug near Syene in Thebais; and that the firſt obeliſk was made by Mitres, who reigned in Heliopolis; that is, by Mephres, the predeceſſor of Miſphragmuthoſis (') ; and that afterwards other kings made others. Sochis, that is Seſochis, or Seſac, four; each of 48 cubits in length: Ramiſes, that is Rameſſes, two; Smarres, that is Mœris, one of 48 cubits in length; Eraphius, or Hophra, one of 48; and Nectabis, or Nectenabis, one of 80. Mephres therefore extended his dominion over all the upper Egypt, from Syene to Heliopolis; and after him, Miſphragmuthoſis and Amoſis, reigned Ammon and Seſac; who erected the firſt great empire in the world. And theſe four, Amoſis, Ammon, Seſac, and Orus, reigned in the four ages of the great gods of Egypt; and Amenophis was the Menes who reigned next after them: he was ſucceeded by Rameſſes and Mœris, and ſome time after by Hophra.

[a] Diodor. l. 1.

LIII. Diodorus [a] recites the ſame kings of Egypt with Herodotus, but in a more confuſed order; and repeats ſome of them twice, or oftener, under various names, and omits others. His kings are theſe; Jupiter Ammon and Juno, Oſiris and Iſis, Horus, Menes, Buſiris I. Buſiris II. Oſymanduas, Uchoreus, Myris, Seſooſis I. Seſooſis II. Amaſis, Actiſanes, Mendes, or Marrus, Proteus, Remphis, Chembis, Cephren, Mycerinus, or Cherinus, Gnephacthus, Bocchoris, Sabacon, twelve contemporary kings, Pſammitichus, * * Apries, Amaſis. Here I take Seſooſis I. and Seſooſis II. Buſiris I. and Buſiris II. to be the ſame kings with Oſiris and Orus: alſo Oſymanduas to be the ſame with Amenophis or Menes: alſo Amaſis, and Actiſanes, an Ethiopian who conquered him, to be the ſame with Anyſis and Sabacon in Herodotus: and Uchoreus, Mendes, Marrus, and Myris, to be only ſeveral names of one and the ſame king. Whence the catalogue of Dio-

§ LII.

(') Herodot. lib. 2. c. 142.

dorus

dorus will be reduced to this: Jupiter Ammon and Juno; Oſiris, Buſiris or Seſooſis, and Iſis; Horus, Buſiris II. or Seſooſis II; Menes, or Oſymanduas; Proteus; Remphis or Rameſſes; Uchoreus, Mendes, Marrus, or Myris; Chembis or Cheops; Cephren; Mycerinus; * * Gnephacthus; Bocchoris; Amaſis, or Anyſis; Actiſanes, or Sabacon; * twelve contemporary kings; Pſammitichus; * * Apries; Amaſis. To which, if in their proper places you add Nitocris, Aſychis, Sethon, Nechus, and Pſammis, you will have the catalogue of Herodotus. EGYPT.

LIV. The dynaſties of Manetho and Eratoſthenes ſeem to be filled with many ſuch names of kings, as Herodotus omitted. When it ſhall be made appear, that any of them reigned in Egypt after the expulſion of the ſhepherds, and were different from the kings deſcribed above, they may be inſerted in their proper places.

LV. Egyyt was conquered by the Ethiopians under Sabacon, about the beginning of the æra of Nabonaſſar, or perhaps three or four years before; that is, about three hundred years before Herodotus wrote his hiſtory; and about eighty years after that conqueſt, it was conquered again by the Aſſyrians under Aſſerhadon: and the hiſtory of Egypt ſet down by Herodotus from the time of this laſt conqueſt, is right both as to the number, and order, and names of the kings, and as to the length of their reigns: and therein he is now followed by hiſtorians, being the only author who hath given us ſo good a hiſtory of Egypt for that interval of time. If his hiſtory of the earlier times be leſs accurate, it was becauſe the archives of Egypt had ſuffered much during the reign of the Ethiopians and Aſſyrians: and it is not likely that the prieſts of Egypt, who lived two or three hundred years after the days of Herodotus, could mend the matter. On the contrary, after Cambyſes had carried away the records of Egypt, the prieſts were daily feigning new kings, to make their gods and nation look ancient; as is manifeſt by comparing Herodotus with Diodorus Siculus, and both of them with what Plato relates out of the poem of Solon: which poem makes the wars

(') See the 18th dynaſty.

of

CHAPTER SECOND.

of the great gods of Egypt againſt the Greeks, to have been in the days of Cecrops, Erechtheus, and Erichthonius, and a little before thoſe of Theſeus; theſe gods at that time inſtituting temples and ſacred rites to themſelves. I have therefore choſen to rely upon the ſtories related to Herodotus by the prieſts of Egypt in thoſe days, and corrected by the poem of Solon; ſo as to make theſe gods of Egypt no older than Cecrops and Erechtheus, and their ſucceſſor Menes no older than Theſeus and Memnon, and the temple of Vulcan not above 280 years in building: rather than to correct Herodotus by Manetho, Eratoſthenes, Diodorus, and others, who lived after the prieſts of Egypt had corrupted their antiquities much more than they had done in the days of Herodotus.

CHAP.

CHAP. III.

OF THE ASSYRIAN EMPIRE.

AS the gods, or ancient deified kings and princes of Greece, Egypt, and Syria of Damaſcus, have been made much ancienter than the truth; ſo have thoſe of Chaldæa and Aſſyria. For Diodorus [a] tells us, that when Alexander the Great was in Aſia, the Chaldæans reckoned 473000 years ſince they firſt began to obſerve the ſtars; and Cteſias, and the ancient Greek and Latin writers who copy from him, have made the Aſſyrian empire as old as Noah's flood within 60 or 70 years; and tell us the names of all the kings of Aſſyria downwards, from Belus, and his feigned ſon Ninus, to Sardanapalus, the laſt king of that monarchy. But the names of his kings, except two or three, have no affinity with the names of the Aſſyrians mentioned in Scripture. For the Aſſyrians were uſually named after their gods, Bel or Pul; Chaddon, Hadon, Adon, or Adonis; Melech, or Moloch; Atſur, or Aſſur; Nebo; Nergal; Merodach: as in theſe names, Pul, Tiglath-Pul-Aſſur, Salman-Aſſur, Adra-Melech, Shar-Aſſur, Aſſur-Hadon, Sardanapalus, or Aſſur-Hadon-Pul, Nabonaſſar, or Nebo-Adon-Aſſur, Bel-Adon, Chiniladon, or Chen-El-Adon, Nebo-Pul-Aſſur, Nebo-Chaddon-Aſſur, Nebuzaradon or Nebo-Aſſur-Adon, Nergal-Aſſur, Nergal-Shar-Aſſur, Labo-Aſſur-dach, Sheſeb-Aſſur, Beltes-Aſſur, Evil-Merodach, Shamgar-Nebo, Rabſaris or Rab-Aſſur, Nebo-Shaſhban, Mardocempad or Merodach-Empad. Such were the Aſſyrian names; but thoſe in Cteſias are of another ſort, except Sardanapalus, whoſe name he had met with in Herodotus. He makes Semiramis as old as the firſt Belus. But Herodotus tells us, that ſhe was

ASSYRIANS.

[a] Diodor. l. 2. c. 31. p. 83.

CHAPTER THIRD.

but five generations older than the mother of Labynetus (1). He repreſents, that the city Ninus was founded by a man of the ſame name (2); and Babylon, by Semiramis (3); whereas either Nimrod or Aſſur founded thoſe and other cities, without giving his own name to any of them. He makes the Aſſyrian empire continue about 1360 years (4); whereas Herodotus tells us that it laſted only 520 years (5); and the numbers of Herodotus concerning thoſe ancient times are all of them too long. He makes Nineveh deſtroyed by the Medes and Babylonians three hundred years before the reign of Aſtibares and Nebuchadnezzar, who deſtroyed it; and ſets down the names of ſeven or eight feigned kings of Media, between the deſtruction of Nineveh and the reigns of Aſtibares and Nebuchadnezzar; as if the empire of the Medes, erected upon the ruins of the Aſſyrian empire, had laſted 300 years (6), whereas it laſted but 72: and the true empire of the Aſſyrians deſcribed in Scripture, whoſe kings were Pul, Tiglath-pileſar, Shalmaneſer, Sennacherib, Aſſerhadon, &c. he mentions not, though much nearer to his own times: which ſhews that he was ignorant of the antiquities of the Aſſyrians. Yet ſomething of truth there is in the bottom of ſome of his ſtories, as there uſes to be in romances; as, that Nineveh was deſtroyed by the Medes and Babylonians; that Sardanapalus was the laſt king of the Aſſyrian empire; and that Aſtibares and Aſtyages were kings of the Medes. But he has made all things too ancient, and out of vain-glory taken too great a liberty in feigning names and ſtories to pleaſe his reader.

II. When the Jews were newly returned from the Babylonian captivity, they confeſſed their ſins in this manner: "Now there-
"fore our God,—let not all the trouble ſeem little before thee
"that hath come upon us, on our kings, on our princes, and
"on our prieſts, and on our prophets, and on our fathers, and
"on

CHAP. III. § I.

(1) Herodot. lib. 1. c. 184 and 188.
(2) ——— c. 7—10. p. 67.
(3) ——— c. 21. p. 77.
(4) Herodot. lib. 1. 95.
(5) Diod. Sic. lib. 2. c. 3. p. 65.
(6) Diod. Sic. lib. 2. c. 32—34. p. 83—85.

§ II.

(1) THAT it was in the days of Pul, that the Aſſyrians began to afflict Iſrael, appears from 2 Kings

"on all thy people, ſince the time of the kings of Aſſyria unto ASSYRIANS.
"this day;" Nehem. ix. 32. That is, ſince the time of the kingdom of Aſſyria, or ſince the riſe of that empire: and therefore the Aſſyrian empire aroſe when the kings of Aſſyria began to afflict the inhabitants of Paleſtine; which was in the days of Pul (1). He and his ſucceſſors afflicted Iſrael, and conquered the nations round about them; and upon the ruin of many ſmall and ancient kingdoms erected their empire, conquering the Medes, as well as other nations. But of theſe conqueſts Cteſias knew not a word, no not ſo much as the names of the conquerors, or that there was an Aſſyrian empire then ſtanding; for he ſuppoſes that the Medes reigned at that time, and that the Aſſyrian empire was at an end above 250 years before it began.

III. However, we muſt allow that Nimrod founded a kingdom at Babylon, and perhaps extended it into Aſſyria. But this kingdom was but of ſmall extent, if compared with the empires which roſe up afterwards; being only within the fertile plains of Chaldæa, Chalonitis, and Aſſyria, watered by the Tigris and Euphrates: and if it had been greater, yet it was but of ſhort continuance, it being the cuſtom in thoſe early ages for every father to divide his territories amongſt his ſons. So Noah was king of all the world; and Cham was king of all Afric; and Japhet of all Europe and Aſia Minor; but they left no ſtanding kingdoms. After the days of Nimrod, we hear no more of an Aſſyrian empire till the days of Pul. The four kings who, in the days of Abraham, invaded the ſouthern coaſt of Canaan (1), came from the countries where Nimrod had reigned; and perhaps were ſome of his poſterity who had ſhared his conqueſts. In the time of the judges of Iſrael, Meſopotamia was under its own king, Judg. iii. 8; and the king of Zobah reigned on both ſides of the river Euphrates till David conquered him, 2 Sam. viii and x. The kingdoms of Iſrael, Moab, Ammon, Edom, Philiſtia, Zidon, Da-

2 Kings xi. 9 and 1. Chron. v. 26. But why the time of the kings of Aſſyria, in Nehemiah ix. 32. muſt neceſſarily be underſtood of the *riſe* of the Aſſyrian empire, is not ſo evident. The expreſſion naturally denotes the time when the Aſſyrians began to harraſs Iſrael, whether it was ſooner or later after the riſe of the empire.

§ III.

(1) Gen. xii.

CHAPTER THIRD.

maſcus, and Hamath the Great, continued ſubject to other lords than the Aſſyrians till the days of Pul and his ſucceſſors; and ſo did the houſe of Eden, Amos i. 5. 2 Kings xix. 12. and Haran or Carrhæ, Gen. xii. 2 Kings xix. 12; and Sepharvaim in Meſopotamia, and Calneh near Bagdad, Gen. x. 10. Iſa. x. 9. 2 Kings xvii. 31. Seſac and Memnon were great conquerors, and regned over Chaldæa, Aſſyria, and Perſia; but in their hiſtories there is not a word of any oppoſition made to them by an Aſſyrian empire then ſtanding. On the contrary, Suſiana, Media, Perſia, Bactria, Armenia, Cappadocia, &c. were conquered by them; and continued ſubject to the kings of Egypt, till after the long reign of Rameſſes, the ſon of Memnon, as above. Homer mentions Bacchus and Memnon kings of Egypt and Perſia, but knew nothing of an Aſſyrian empire. Jonah propheſied when Iſrael was in affliction under the king of Syria; and this was in the latter part of the reign of Jehoahaz, and firſt part of the reign of Joaſh, kings of Iſrael (2); and I think in the reign of Mœris, the ſucceſſor of Rameſſes king of Egypt, and about ſixty years before the reign of Pul. And Nineveh was then a city of large extent, but full of paſtures for cattle; ſo that it contained but about 120000 perſons (3). It was not yet grown ſo great and potent as not to be terrified at the preaching of Jonah, and to fear being invaded by its neighbours, and ruined within forty days. It had ſome time before got free from the dominion of Egypt, and had got a king of its own; but its king was not yet called king of Aſſyria, but only king of Nineveh, Jonah iii. 6, 7; and his proclamation for a faſt was not publiſhed in ſeveral nations, nor in all Aſſyria, but only in Nineveh, and perhaps in the villages thereof. But ſoon after, when the dominion of Nineveh was eſtabliſhed at home, and exalted over all Aſſyria properly ſo called, and this kingdom began to make war upon the neighbouring nations; its kings were no longer called kings of Nineveh, but began to be called kings of Aſſyria.

(2) See 2 Kings xiii. 22. and xiv. 23—25. And Jerom's preface to his commentary on the book of Jonah.

(3) Jonah iv. 11.

IV.

IV. Amos propheſied in the reign of Jeroboam, the ſon of Joaſh king of Iſrael, ſoon after Jeroboam had ſubdued the kingdoms of Damaſcus and Hamath, that is, about ten or twenty years before the reign of Pul. And he [a] thus reproves Iſrael for being lifted up by thoſe conqueſts; "Ye which rejoice in a thing of nought, which ſay, have we not taken to us horns by our ſtrength? But behold I will raiſe up againſt you a nation, O houſe of Iſrael, ſaith the Lord the God of hoſts, and they ſhall afflict you from the entering in of Hamath unto the river of the wilderneſs." God here threatens to raiſe up a nation againſt Iſrael; but what nation he names not; that he conceals, till the Aſſyrians ſhould appear and diſcover it. In the propheſies of Iſaiah, Jeremiah, Ezekiel, Hoſea, Micah, Nahum, Zephaniah, and Zechariah, which were written after the monarchy grew up, it is openly named upon all occaſions; but in this of Amos, not once; though the captivity of Iſrael and Syria be the ſubject of the propheſy, and that of Iſrael be often threatened. He only ſaith in general, that Syria ſhould go into captivity unto Kir, and that Iſrael, notwithſtanding her preſent greatneſs, ſhould go into captivity beyond Damaſcus; and that God would raiſe up a nation to afflict them: meaning that he would raiſe up above them, from a lower condition, a nation whom they yet feared not. For ſo the Hebrew word פָּקַד ſignifies when applied to men, as in Amos v. 2. 1 Sam. xii. 11. Pſal. cxiii. 7. Jer. x. 20. l. 32. Hab. i. 6. Zech. xi. 16. As Amos names not the Aſſyrians, at the writing of this prophecy they made no great figure in the world; but were to be raiſed up againſt Iſrael; and by conſequence roſe up in the days of Pul and his ſucceſſors. For after Jeroboam had conquered Damaſcus and Hamath (1); his ſucceſſor Menahem deſtroyed Tiphſah (2) with its territories upon Euphrates, becauſe they opened not to him: and therefore Iſrael continued in its greatneſs till Pul, probably grown formidable by ſome victories, cauſed Menahem to buy his peace (3). Pul therefore reigning preſently after the propheſy of Amos, and being the firſt upon record who began to fulfill it, may be juſtly

ASSYRIANS.

[a] Amos vi. 13, 14.

§ IV.

(1) 2 Kings xiv. 28. (2) —— xv. 16. (3) —— 19, 20.

reckoned

CHAPTER THIRD.

reckoned the firſt conqueror and founder of this empire. For "God ſtirred up the ſpirit of Pul, and the ſpirit of Tiglath-pi-"leſer king of Aſſyria," 1 Chron. v. 26.

V. The ſame prophet Amos, in propheſying againſt Iſrael, threatened them in this manner, with what had lately befallen other kingdoms: "Paſs ye [a]," ſaith he, "unto Calneh and ſee, "and from thence go ye to Hamath the Great, then go down to "Gath of the Philiſtims. Be they better than theſe kingdoms?" Theſe kingdoms were not yet conquered by the Aſſyrians, except that of Calneh, or Chalonitis, upon Tigris, between Babylon and Nineveh. Gath was newly vanquiſhed [b] by Uzziah king of Judah, and Hamath [c] by Jeroboam king of Iſrael. And while the prophet, in threatening Iſrael with the Aſſyrians, inſtances in deſolations made by other nations, and mentions no other conqueſt of the Aſſyrians than that of Chalonitis near Nineveh; it argues, that the king of Nineveh was now beginning his conqueſts, and had not yet made any great progreſs in that vaſt career of victories, which we read of a few years after.

[a] Amos vi. 2.

[b] 2 Chron. xxvi. 6.

[c] 2 King. xiv. 25.

VI. For about ſeven years after the captivity of the ten tribes (1), when Sennacherib warred in Syria, which was in the 16th olympiad, he [d] ſent this meſſage to the king of Judah: "Behold, "thou haſt heard what the kings of Aſſyria have done to all "lands, by deſtroying them utterly, and ſhalt thou be delivered? "Have the gods of the nations delivered them which the gods "of my fathers have deſtroyed, as Gozan, and Haran, and Re-"ſeph, and the children of Eden which were in [the kingdom "of] Thelaſar? Where is the king of Hamath, and the king of "Arpad, and the king of the city of Sepharvaim, and of Hena "and Ivah?" And Iſaiah [e] thus introduceth the king of Aſſyria boaſting: "Are not my princes altogether as kings? Is not Calno "[or Calneh] as Carchemiſh? Is not Hamath as Arpad? Is not "Samaria as Damaſcus? As my hand hath found the kingdom "of the idols, and whoſe graven images did excel them of Je-"ruſalem and of Samaria; ſhall I not as I have done unto Sa-"maria and her idols, ſo do to Jeruſalem and her idols?" All

[d] 2 King. xix. 11.

[e] Iſa. x. 8.

§ VI.

(1) 2 Kings xviii. 10 and 13.

this

this deſolation is recited as freſh in memory to terrify the Jews; and theſe kingdoms reach to the borders of Aſſyria; and to ſhew the largeneſs of the conqueſts, they are called "all lands," that is, all round about Aſſyria. It was the cuſtom of the kings of Aſſyria, for preventing the rebellion of people newly conquered, to captivate and tranſplant thoſe of ſeveral countries into one another's lands, and intermix them variouſly: and thence it appears [a], that Halah, and Habor, and Hara, and Gozan, and the cities of the Medes into which Galilee and Samaria were tranſplanted; and Kir into which Damaſcus was tranſplanted; and Cabylon, and Cuth, or the Suſanchites, and Hamath, and Ava, and Sepharvaim, and the Dinaites, and the Apharſachites, and the Tarpelites, and the Archevites, and the Dehavites, and the Elamites, or Perſians, part of all which nations were led captive by Aſſerhadon and his predeceſſors into Samaria; were all of them conquered by the Aſſyrians not long before.

ASSYRIANS.

[a] 1 Chron. v. 26. 2 King xvi. 9. & xvii. 6, 24. & Ezra iv. 9.

VII. In theſe conqueſts are involved, on the weſt and ſouth ſide of Aſſyria, the kingdoms of Meſopotamia; whoſe royal ſeats were Haran or Carrhæ, and Carchemiſh or Circutium, and Sepharvaim, a city upon Euphrates, between Babylon and Nineveh, called Sipparæ by Beroſus, Abydenus, and Polyhiſtor, and Sipphara by Ptolemy; and the kingdoms of Syria ſeated at Samaria, Damaſcus, Gath, Hamath, Arpad, and Reſeph, a city placed by Ptolemy near Thapſacus. On the ſouth ſide and ſouth-eaſt ſide were Babylon and Calneh, or Calno, a city which was founded by Nimrod, where Bagdat now ſtands, and gave the name of Chalonitis to a large region under its government; and Thelaſar, or Talatha, a city of the children of Eden, placed by Ptolemy in Babylonia, upon the common ſtream of Tigris and Euphrates, which was therefore the river of Paradiſe; and the Archevites at Areca or Erech, a city built by Nimrod on the eaſt ſide of Paſitigris, between Apamia and the Perſian Gulph; and the Suſanchites at Cuth or Suſa, the metropolis of Suſiana. On the eaſt were Elymais, and ſome cities of the Medes; and Kir, [b] a city and large region of Media, between Elymais and Aſſyria, called Kirene by the Chaldee paraphraſt and Latin interpreter, and Carine by Ptolemy. On the north-eaſt were Habor or Chaboras,

[b] Iſa. xxii. 6.

CHAPTER THIRD.

boras, a mountainous region between Aſſyria and Media; and the Apharſachites, or men of Arrapachitis, a region originally peopled by Arphaxad, and placed by Ptolemy at the bottom of the mountains next Aſſyria. And on the north, between Aſſyria and the Gordiæan mountains, was Halah or Chalach, the metropolis of Calachene: and beyond theſe, upon the Caſpian ſea, was Gozan, called Gauzania by Ptolemy. Thus did theſe new conqueſts extend every way from the province of Aſſyria to conſiderable diſtances, and make up the great body of that monarchy: ſo that well might the king of Aſſyria boaſt how his armies had deſtroyed all lands. All theſe nations [a] had till now their ſeveral gods; and each accounted his god the god of his own land, and the defender thereof, againſt the gods of the neighbouring countries, and particularly againſt the gods of Aſſyria; and therefore they were never till now united under the Aſſyrian monarchy; eſpecially ſince the king of Aſſyria doth not boaſt of their being conquered by the Aſſyrians oftener than once: but theſe being ſmall kingdoms, the king of Aſſyria eaſily overflowed them. "Know ye not," ſaith Sennacherib to the Jews [b], "what I and my fathers have done unto all the people of "other lands?—for no god of any nation or kingdom was able "to deliver his people out of mine hand, and out of the hand "of my fathers: how much leſs ſhall your God deliver you out "of mine hand?" He and his fathers therefore, Pul, Tiglath-pileſer, and Shalmaneſer, were great conquerors; and with a current of victories had newly overflowed all nations round about Aſſyria, and thereby ſet up this monarchy.

[a] 2 King. xvii. 24, 30, 31. & xviii. 33, 34, 35. 2 Chron. xxxii. 15.

[b] Chron. xxxii. 13, 15.

VIII. Between the reigns of Jeroboam II. and his ſon Zachariah, there was an interregnum of about ten or twelve years in the kingdom of Iſrael (1). And the prophet Hoſea [c], in the time of that interregnum, or ſoon after, mentions the king of Aſſyria by the name of Jareb, and another conqueror by the name of Shalman; and perhaps Shalman might be the firſt part of the name of Shalmaneſer; and Iareb, or Irib, for it may be read both ways, the laſt part of the name of his ſucceſſor Sennache-

[c] Hoſea v. 13. & x. 6, 14.

§ VIII.

(1) See Petav. Doct. Temp. lib. 9. c. 61.

rib.

rib. But whoever theſe princes were, it appears not that they reigned before Shalmaneſer. Pul, or Belus, ſeems to be the firſt who carried on his conqueſts beyond the province of Aſſyria: he conquered Calneh with its territories in the reign of Jeroboam, Amos i. 1. vi. 2. and Iſa. x. 8, 9. and invaded Iſrael in the reign of Menahem, 2 King. xv. 19. but ſtayed not in the land, being bought off by Menahem for a thouſand talents of ſilver. In his reign therefore the kingdom of Aſſyria was advanced on this ſide Tigris: for he was a great warrior, and ſeems to have conquered Haran, and Carchemiſh, and Reſeph, and Calneh, and Thelaſar, and might found or enlarge the city of Babylon, and build the old palace. ASSYRIANS.

IX. Herodotus tells us, that one of the gates of Babylon was called the gate of Semiramis; and that ſhe adorned the walls of the city, and the temple of Belus; and that ſhe [b] was five generations older than Nitocris, the mother of Labynitus, or Nabonnedus, the laſt king of Babylon. And therefore ſhe flouriſhed four generations, or about 134 years, before Nebuchadnezzar; and by conſequence, in the reign of Tiglath-pileſer, the ſucceſſor of Pul. And the followers of Cteſias tell us, that ſhe built Babylon; and was the widow of the ſon and ſucceſſor of Belus, the founder of the Aſſyrian empire (1); that is, the widow of one of the ſons of Pul. But [c] Beroſus, a Chaldæan, blames the Greeks for aſcribing the building of Babylon to Semiramis; and other authors aſcribe the building of this city to Belus himſelf; that is, to Pul. So Curtius [d] tells us; "*Semiramis* "*Babylonem condiderat, vel ut plerique credidere Belus, cujus regia* "*oſtenditur.*" And Abydenus, who had his hiſtory from the ancient monuments of the Chaldæans, writes: "Λεγεται Βηλον Βα- "βυλωνα τειχει περιβαλειν· τω χρονω δε τω ικνευμενω αφανισθηναι. τει- "χισαι δε αυθις Ναβυχοδονοσορον, το μεχρι της Μακεδονιων αρχης δια- "μειναν εον χαλκοπυλον." "It is reported that Belus compaſſed "Babylon with a wall, which in time was aboliſhed: and that "Nebuchadnezzar afterwards built a new wall with brazen gates,

[a] Herod. l. 3. c. 155.

[b] Herod. l. 1. c. 184.

[c] Beroſ. apud Joſeph. contr. Appion. l. 1. c. 20. p. 1343.

[d] Curt. l. 5. c. 1.

[c] Apud Euſeb. Præp. l. 9. c. 41. p. 268.

§ IX.

(1) Diod. Sic. lib. 2. c. 7—10. p. 67—70. Euſeb. in Chron.

CHAPTER THIRD.

"which ſtood till the time of the Macedonian empire." And ſo Dorotheus [a], an ancient poet of Sidon:

[a] Doroth. apud Julium Firmicum.

"Αρχαιη Βαβυλων, Τυριε Βηλοιο πολισμα."

"The ancient city Babylon, built by the Tyrian Belus;"

That is, by the Syrian or Aſſyrian Belus; the words Tyrian, Syrian, and Aſſyrian, being anciently uſed promiſcuouſly for one another. Herennius [b] tells us, that it was built by the ſon of Belus; and this ſon might be Nabonaſſar. After the conqueſt of Calneh, Thelaſar, and Sipparæ, Belus might ſeize Chaldæa, and begin to build Babylon, and leave it to his younger ſon. For all the kings of Babylon, in the canon of Ptolemy, are called Aſſyrians, and Nabonaſſar is the firſt of them. And Nebuchadnezzar [c] reckoned himſelf deſcended from Belus, that is, from the Aſſyrian Pul: and the building of Babylon is aſcribed to the Aſſyrians by [d] Iſaiah: "Behold," ſaith he, "the land of "the Chaldæans: this people was not till the Aſſyrian founded "it for them that dwell in the wilderneſs [that is, for the Ara-"bians]. They ſet up the towers thereof, they raiſed up the "palaces thereof (2)." From all this it ſeems therefore, that Pul founded the walls and the palaces of Babylon, and left the city with the province of Chaldæa to his younger ſon Nabonaſſar; and that Nabonaſſar finiſhed what his father began, and erected the temple of Jupiter Belus to his father: and that Semiramis lived in thoſe days, and was the queen of Nabonaſſar; becauſe one of the gates of Babylon was called the gate of Semiramis, as Herodotus affirms: but whether ſhe continued to reign there after her huſband's death, may be doubted.

[b] Heren. apud Steph. in Bac.

[c] Abyden. apud Euſeb. Præp. l. 9. c. 41. p. 268.

[d] Iſa. xxiii. 13.

X. Pul therefore was ſucceeded at Nineveh by his elder ſon Tiglath-pileſer; at the ſame time that he left Babylon to his younger ſon Nabonaſſar. Tiglath-pileſer, the ſecond king of Aſſyria, warred in Phœnicia, and captivated Galilee with the two tribes and an half, in the days of Pekah king of Iſrael; and placed them in Halath, and Habor, and Hara, and at the river Gazon; places lying on the weſtern borders of Media, between

(2) See Sir John Marſham, ſect. XVII. Tit. *Babylon condita.*

Aſſyria

Aſſyria and the Caſpian Sea, 2 King. xv. 29, and 1 Chron. v. 26: and about the fifth or ſixth of year of Nabonaſſar, he came to the aſſiſtance of the king of Judah againſt the kings of Iſrael and Syria; and overthrew the kingdom of Syria, which had been ſeated at Damaſcus ever ſince the days of king David; and carried away the Syrians to Kir in Media, as Amos had propheſied; and placed other nations in the regions of Damaſcus, 2 King. xv. 37, and xvi. 5, 9, Amos i. 5, Joſeph. Antiq. l. 9. c. 13. Whence it ſeems that the Medes were conquered before, and that the empire of the Aſſyrians was now grown great: "for the "God of Iſrael ſtirred up the ſpirit of Pul king of Aſſyria, and "the ſpirit of Tiglath-pileſer, king of Aſſyria, to make war," 1 Chron. v. 26.

ASSYRIANS.

XI. Shalmaneſer, or Salmanaſſer, called Enemeſſar by Tobit, invaded [a] all Phœnicia, took the city of Samaria, and captivated Iſrael; and placed them in Chalach and Chabor, by the river Gazon, and in the cities of the Medes (1). And Hoſea [b] ſeems to ſay that he took Arbela: and his ſucceſſor Sennacherib ſaid, that his fathers had conquered alſo Gozan, and Haran or Carrhæ, and Reſeph or Reſen, and the children of Eden, and Arpad or the Aradii, 2 King. xix. 12.

[a] Tobit i. 13. Annal. Tyr. apud Joſeph. Ant. l. 9. c. 14.

[b] Hoſea i. 5.

XII. Sennacherib, the ſon of Shalmaneſer, in the 14th year of Hezekiah invaded Phœnicia; and took ſeveral cities of Judah; and attempted Egypt: and Sethon or Sevechus, king of Egypt (1), and Tirhakah king of Ethiopia (2), coming againſt him, he loſt in one night 185000 men (3), as ſome ſay by a plague, or perhaps by lightning, or a fiery wind which blows ſometimes in the neighbouring deſerts, or rather by being ſurprized by Sethon and Tirhakah: for the Egyptians, in memory of this action, erected a ſtatue to Sethon, holding in his hand a mouſe, the Egyptian ſymbol of deſtruction (4). Upon this defeat Sennacherib returned in haſte to Nineveh (5); and [c] his kingdom became

[c] Tobit i. 15.

§ XI.

(1) 2 Kings xvii. 6.

§ XII.

(1) Herodot. lib. 2. c. 141. (2) 2 Kings xix. 9. (3) ——— 35.
(4) Herodot. lib. 2. c. 141. (5) 2 Kings xix. 36.

CHAPTER THIRD.

troubled, so that Tobit could not go into Media, the Medes, I think, at this time revolting: and he was soon after slain by two of his sons who fled into Armenia, and his son Asserhadon succeeded him (6). At that time did Merodach Baladan, or Mardocempad, king of Babylon, send an embassy to Hezekiah king of Judah.

[a] Tobit i. 21. 2 King. xix. 37. Ptol. Canon.

XIII. Asserhadon [a], called Sarchedon by Tobit, Asordan by the LXX, and Assaradin in Ptolemy's canon, began his reign at Nineveh, in the year of Nabonassar 42 (1); and in the year 68 extended it over Babylon. Then he carried the remainder of the Samaritans into captivity, and peopled Samaria with captives brought from several parts of his kingdom; the Dinaites, the Apharsachites, the Tarpelites, the Apharsites, the Archevites, the Babylonians, the Susanchites, the Dehavites, the Elamites, Ezra iv. 2, 9; and therefore he reigned over all these nations. Pekah and Rezin, kings of Samaria and Damascus, invaded Judæa in the first year of Ahaz (2); and within 65 years after, that is in the 21st year of Manassah, anno Nabonass. 69, Samaria by this captivity ceased to be a people, Isai. vii. 8. Then Asserhadon invaded Judæa; took Azoth; carried Manasseh captive to Babylon, and [b] captivated also Egypt, Thebais, and Ethiopia above Thebais: and by this war he seems to have put an end to the reign of the Ethiopians over Egypt, in the year of Nabonassar 77 or 78.

[b] Isa. xx. 1, 3, 4. and 2 Chron. xxxiii. 11.

XIV. In the reign of Sennacherib and Asserhadon, the Assyrian empire seems arrived at its greatness; being united under one monarch, and containing Assyria, Media, Apolloniatis, Susiana, Chaldæa, Mesopotamia, Cilicia, Syria, Phœnicia, Egypt, Ethiopia, and part of Arabia; and reaching eastward into Elymais, and Parætacene, a province of the Medes: and if Cha-

(6) 2 Kings xix. 37.

§ XIII.

(1) Asserhaddon began to reign upon his father's death; which could hardly be later than in the 18th of Hezekiah. The 18th of Hezekiah was the 38th of Nabonassar.

(2) 2 Kings xv. 37. and xvi. 1—5.

§ XIV.

(1) Herodot. lib. 2. c. 104.

Iach and Chabor be Colchis and Iberia, as some think, and as may seem probable from the circumcision used by those nations till the days of Herodotus (1), we are also to add these two provinces, with the two Armenia's, Pontus, and Cappadocia, as far as to the river Halys. For [a] Herodotus tells us, that the people of Cappadocia, as far as to that river, were called Syrians by the Greeks, both before and after the days of Cyrus; and that the Assyrians were also called Syrians by the Greeks.

ASSYRIANS.

[a] Herod. l. 1. c. 72. and l. 7. c. 63.

XV. Yet the Medes revolted from the Assyrians in the latter end of the reign of Sennacherib; I think upon the slaughter of his army near Egypt, and his flight to Nineveh. For at that time the estate of Sennacherib was troubled, so that Tobit could not go into Media as he had done before, Tobit i. 15; and some time after, Tobit advised his son to go into Media (1), where he might expect peace; while Nineveh, according to the prophesy of Jonah, should be destroyed. Ctesias wrote, that Arbaces, a Mede, being admitted to see Sardanapalus in his palace, and observing his voluptuous life amongst women, revolted with the Medes; and in conjunction with Belesis, a Babylonian, overcame him, and caused him to set fire to his palace, and burn himself (2). But he is contradicted by other authors of better credit. For Duris [b] and many others wrote, that Arbaces, upon being admitted into the palace of Sardanapalus, and seeing his effeminate life, slew himself (3); and Cleitarchus, that Sardanapalus died of old age, after he had lost his dominion over Syria (4). He lost it by the revolt of the western nations; and Herodotus [c] tells us, that the Medes revolted first, and defended their liberty by force of arms against the Assyrians, without conquering them; and at their first revolting had no king; but after some time set up Dejoces over them, and built Ecbatane for his residence; and

[b] Apud Athenæum, l. xii. p. 528.

[c] Herod. l. 1. c. 96—103. &c.

§ XV.

(1) Tobit. c. xiv. 4—8.

(2) Diod. Sic. lib. 2. c. 23—28. p. 78—81.

(3) The text of Athenæus, in the place to which Sir Isaac Newton refers, is exceedingly corrupt. Sir Isaac Newton follows the sense given by the Latin translator. But Athenæus seems to say, that whereas Ctesias relates, that Sardanapalus, after sustaining a war with Arbaces, set fire to his palace, and burnt himself with it: many other historians, of whom Duris was one, affirmed, that Arbaces, having procured admission to the king's presence, and seeing his effeminacy, in indignation that the Medes should be governed by so contemptible a prince, stabbed him on the spot: not himself, but Sardanapalus.

(4) Athenæus, lib. 12. p. 529.

CHAPTER THIRD.

that Dejoces reigned only over Media, and had a peaceable reign of 53 years: but his ſon and ſucceſſor Phraortes made war upon his neighbours, and conquered Perſia; and that the Syrians alſo, and other weſtern nations, at length revolted from the Aſſyrians, being encouraged thereunto by the example of the Medes; and that after the revolt of the weſtern nations, Phraortes invaded the Aſſyrians; but was ſlain by them in that war, after he had reigned twenty and two years. He was ſucceeded by Aſtyages.

XVI. Now Aſſerhadon ſeems to be the Sardanapalus who died of old age after the revolt of Syria; the name Sardanapalus being derived from Aſſerhadon-Pul. Sardanapalus was the [a] ſon of Anacyndaraxis, Cyndaraxis, or Anabaxaris, king of Aſſyria; and this name ſeems to have been corruptly written for Sennacherib, the father of Aſſerhadon. Sardanapalus built Tarſus and Anchiale in one day; and therefore reigned over Cilicia, before the revolt of the weſtern nations: and if he be the ſame king with Aſſerhadon, he was ſucceeded by Saoſduchinus in the year of Nabonaſſar 81 (1). And by this revolution Manaſſeh was ſet at liberty to return home and fortify Jeruſalem (2). And the Egyptians alſo, after the Aſſyrians had harraſſed Egypt and Ethiopia three years, Iſai. xx. 3, 4. were ſet at liberty; and continued under twelve contemporary kings of their own nation, as above. The Aſſyrians invaded and conquered the Egyptians the firſt of the three years, and reigned over them two years more: and theſe two years are the interregnum which Africanus (3), from Manetho, places next before the twelve kings. The Scythians of Touran, or Turqueſtan, beyond the river Oxus, began in thoſe days to infeſt Perſia (4); and by one of their inroads might give occaſion to the revolt of the weſtern nations.

XVII. In the year of Nabonaſſar 101, Saoſduchinus, after a reign of twenty years, was ſucceeded at Babylon by Chyniladon (1); and I think at Nineveh alſo. For I take Chyniladon to be that Nabuchodonoſor who is mentioned in the book of Judith; for the hiſtory of that king ſuits beſt with theſe times.

[a] Athenæus, l. 12. p. 529, 530.

§ XVI.

(1) Ptolemæi Can. (2) 2 Chron. xxxiii. 3.
(3) Diodorus Siculus ſpeaks of this interregnum, lib. 1. c. 66. p. 41. But I cannot find that Manetho or Africanus take any notice of it.

For

ASSYRIANS.

For there it is ſaid, that "Nabuchodonoſor, king of the Aſſyrians, who reigned at Nineveh, that great city, in the twelfth year of his reign made war upon Arphaxad king of the Medes;" and was then left alone by a defection of the auxiliary nations of Cilicia, Damaſcus, Syria, Phœnicia, Moab, Ammon, and Egypt (2); and without their help routed the army of the Medes, and ſlew Arphaxad (3): and Arphaxad is there ſaid to have built Ecbatane (4); and therefore was either Dejoces, or his ſon Phraortes, who might finiſh the city founded by his father. And Herodotus [a] tells the ſame ſtory of a king of Aſſyria who routed the Medes and ſlew their king Phraortes; and ſaith, that in the time of this war the Aſſyrians were left alone by the defection of the auxiliary nations, being otherwiſe in good condition. Arphaxad was therefore the Phraortes of Herodotus, and by conſequence was ſlain near the beginning of the reign of Joſiah. For this war was made after Phœnicia, Moab, Ammon, and Egypt, had been conquered and revolted, Judith i. 7, 8, 9, and by conſequence after the reign of Aſſerhadon, who conquered them. It was made when the Jews were newly returned from captivity, "and the veſſels and altar and temple were ſanctified after the "profanation," Judith iv. 3; that is, ſoon after Manaſſeh their king had been carried captive to Babylon by Aſſerhadon; and upon the death of their king, or ſome other change in the Aſſyrian empire, had been releaſed with the Jews from that captivity, and had repaired the altar, and reſtored the ſacrifices and worſhip of the temple, 2 Chron. xxxiii. 11, 16. In the Greek verſion of the book of Judith, chap. v. 18. it is ſaid, that "the "temple of God was caſt to the ground;" but this is not ſaid in Jerom's verſion; and in the Greek verſion, chap. iv. 3. and chap. xvi. 20. it is ſaid, that "the veſſels, and the altar, and the "houſe, were ſanctified after the prophanation;" and in both verſions, chap. iv. 11. the temple is repreſented ſtanding.

[a] Herod. l. 1. c. 102.

(4) Herodot. lib. 1. c. 103.

§ XVII.

(1) Ptolemæi Can.
(2) Judith i. 1—11. (3) —— 15. (4) —— 1—4.

XVIII.

CHAPTER THIRD.

XVIII. After this war Nebuchadnezzar king of Aſſyria, in the 13th year of his reign, according to the verſion of Jerom (1), ſent his captain Holofernes with a great army to avenge himſelf on all the weſt country; becauſe they had diſobeyed his commandment. And Holofernes went forth with an army of 12000 horſe, and 120000 foot, of Aſſyrians, Medes, and Perſians; and reduced Cilicia, Meſopotamia, and Syria, and Damaſcus, and part of Arabia, and Ammon, and Edom, and Madian, and then came againſt Judæa: and this was done when the government was in the hands of the high-prieſt and ancients of Iſrael, Judith iv. 6, 7, 8. and vii. 23; and by conſequence not in the reign of Manaſſeh or Amon, but when Joſiah was a child. In times of proſperity the children of Iſrael were apt to go after falſe gods; and in times of affliction, to repent and turn to the Lord. So Manaſſeh, a very wicked king, being captivated by the Aſſyrians, repented; and being releaſed from captivity reſtored the worſhip of the true God. So when we are told, that "Joſiah, "in the eighth year of his reign, while he was yet young, be-"gan to ſeek after the God of David, his father; and in the "twelfth year of his reign began to purge Judah and Jeruſalem "from idolatry, and to deſtroy the high places, and groves, and "altars and images of Baalim," 2 Chron. xxxiv. 3; we may underſtand, that theſe acts of religion were occaſioned by impending dangers, and eſcapes from danger. When Holofernes came againſt the weſtern nations, and ſpoiled them, then were the Jews terrified, and they fortified Judæa, and "cried unto "God with great fervency, and humbled themſelves in ſackcloth, "and

§ XVIII.

(1) Judith ii. 1.

(2) The argument intended, which I think our author has not ſtated very clearly, ſeems to be this:

The 53 years of the reign of Dejoces are probably to be reckoned, not from the time when he was actually inveſted with the royal power, but from the revolt of the Medes. Which revolt took place, as our author imagines, as ſoon as the news of Sennacherib's diſaſter near Peluſium, and of his retreat to Nineve, reached Media. This retreat was in the 14th or 15th year of Hezekiah's reign, according to the ſacred hiſtory; that is, in the 34th or 35th of Nabonaſſar. Therefore the 35th or 36th of Nabonaſſar was probably the firſt of Dejoces. Dejoces reigned 53 years. Therefore the laſt of Dejoces, and the firſt of Phraortes, muſt fall on the 87th or 88th, or at any rate not later than the 89th of Nabonaſſar. Phraortes reigned 22 years. Therefore the laſt of Phraortes muſt have fallen on the 108th or 109th of Nabonaſſar, or at any rate not

"and put aſhes on their heads, and cried unto the God of Iſrael, ASSYRIANS.
"that he would not give their wives, and their children, and ci-
"ties for a prey, and the temple for a profanation: and the high-
"prieſt, and all the prieſts, put on ſackcloth and aſhes, and of-
"fered daily burnt offerings, with vows and free gifts of the
"people," Judith iv; and then began Joſiah to ſeek after the God of his father David. And after Judith had ſlain Holofernes, and the Aſſyrians were fled, and the Jews who purſued them were returned to Jeruſalem, "they worſhipped the Lord, and "offered burnt offerings and gifts, and continued feaſting before "the ſanctuary for the ſpace of three months," Judith xvi. 18—20; and then did Joſiah purge Judah and Jeruſalem from idolatry. Whence it ſeems to me, that the eighth year of Joſiah fell in with the fourteenth or fifteenth of Nabuchodonoſor; and that the twelfth year of Nabuchodonoſor, in which Phraortes was ſlain, was the fifth or ſixth of Joſiah. Phraortes reigned 22 years, according to Herodotus; and therefore ſucceeded his father Dejoces about the 40th year of Manaſſeh, anno Nabonaſſ. 89; and was ſlain by the Aſſyrians, and ſucceeded by Aſtyages, anno Nabonaſſ. 111. Dejoces reigned 53 years according to Herodotus, and theſe years began in the 16th year of Hezekiah; which makes it probable, that the Medes dated them from the time of their revolt: and according to all this reckoning, the reign of Nabuchodonoſor fell in with that of Chyniladon; which makes it probable, that they were but two names of one and the ſame king (2).

XIX. Soon after the death of Phraortes [a], the Scythians under Madyes, or Medus, invaded Media, and beat the Medes in

[a] Herod. l. 1. c. 103—106. Steph. in Παρθυαῖοι.

not later than the 111th. In the 111th year of Nabonaſſar, the 11th of Chyniladon ended, and his 12th began according to the canon. Phraortes, therefore, a king of Media, who, according to Herodotus, was ſlain by a king of Aſſyria, was ſlain by Chyniladon, king of Aſſyria, in the 12th year of Chyniladon's reign, and the 111th of the æra of Nabonaſſar.

But on the 111th of the æra of Nabonaſſar began the 5th or 6th of Joſiah king of Judah. And in the 5th or 6th of Joſiah king of Judah, Arphaxad, a king of the Medes, as appears from the book of Judith, according to Jerome's tranſlation, compared with the ſacred hiſtory of the Jews, was ſlain by Nabuchodonoſor, a king of Aſſyria, in the 12th year of Nabuchodonoſor's reign.

Chyniladon therefore and Nabuchodonoſor appear to have been kings of Aſſyria at the ſame time; and each, in the ſame numerical year of his reign, ſlew a vanquiſhed king of Media. Therefore Chyniladon and Nabuchodonoſor are only different names of the ſame king of Aſſyria; and Phraortes and Arphaxad are only different names of the Median king ſubdued and ſlain by that Aſſyrian.

CHAPTER THIRD.

battle, anno Nabonaſſ. 113, and went thence towards Egypt; but were met in Phœnicia by Pſammitichus and bought off, and returned reigning over a great part of Aſia. But in the end of about 28 years, were expelled; many of their princes and commanders being ſlain in a feaſt by the Medes under the conduct of Cyaxeres, the ſucceſſor of Aſtyages, juſt before the deſtruction of Nineveh, and the reſt being ſoon after forced to retire.

[a] Alexander Polyhiſt. apud Euſeb. in Chron. p. 46. & apud Syncellum, p. 210.

XX. In the year of Nabonaſſar 123 (1), [a] Nabopolaſſar, the commander of the forces of Chyniladon, the king of Aſſyria, in Chaldæa, revolted from him, and became king of Babylon; and Chyniladon was either then, or ſoon after, ſucceeded at Nineveh by the laſt king of Aſſyria, called Sarac by Polyhiſtor. And at length Nebuchadnezzar, the ſon of Nabopolaſſar, married Amyite, the daughter of Aſtyages and ſiſter of Cyaxeres; and by this marriage the two families having contracted affinity, they conſpired againſt the Aſſyrians. And Nabopolaſſar being now grown old, and Aſtyages being dead, their ſons Nebuchadnezzar and Cyaxeres led the armies of the two nations againſt Nineveh; ſlew Sarac; deſtroyed the city; and ſhared the kingdom of the Aſſyrians. This victory the Jews refer to the Chaldæans; the Greeks, to the Medes; Tobit (2), Polyhiſtor, Joſephus (3), and Cteſias (4), to both. It gave a beginning to the great ſucceſſes of Nebuchadnezzar and Cyaxeres, and laid the foundation of the two collateral empires of the Babylonians and Medes; theſe being branches of the Aſſyrian empire: and thence the time of the fall of the Aſſyrian empire is determined, the conquerors being then in their youth. In the reign of Joſiah, when Zephaniah propheſied, Nineveh and the kingdom of Aſſyria were ſtanding, and their fall was predicted by that prophet, Zeph. i. 3. and ii. 13. And in the end of his reign Pharaoh Nechoh, king of Egypt, the ſucceſſor of Pſammitichus, went up againſt the king of Aſſyria to the river Euphrates, to fight againſt Carchemiſh or Circutium, and in his way thither

§ XX.

(1) Ptolemœi Can. (2) Tibit xiv. 15.
(3) Joſephus to the Medes, lib. 10. c. 2. § II. p 435.
(4) Apud Diod. Sic. lib. 2. c. 24. p. 78.

ſlew

ſlew Joſiah (2 Kings xxiii. 29. 2 Chron. xxxv. 20) and therefore the laſt king of Aſſyria was not yet ſlain. But in the third and fourth year of Jehoiakim, the ſucceſſor of Joſiah, the two conquerors having taken Nineveh and finiſhed their war in Aſſyria, proſecuted their conqueſts weſtward; and leading their forces againſt the king of Egypt, as an invader of their right of conqueſt, they beat him at Carchemiſh, and [a] took from him whatever he had newly taken from the Aſſyrians: and therefore we cannot err above a year or two, if we refer the deſtruction of Nineveh, and fall of the Aſſyrian empire, to the ſecond year of Jehoiakim, anno Nabonaſſ. 140. The name of the laſt (5) king Sarac, might perhaps be contracted from Sarchedon; as this name was from Aſſerhadon, Aſſerhadon-Pul, or Sardanapalus.

ASSYRIANS.

[a] 2 Kings xxiv. 7. Jer. xlvi. 2. Eupolemus apud Euſeb. Præp. l. 9. c. 35.

XXI. While the Aſſyrians reigned at Nineveh, Perſia was divided into ſeveral kingdoms; and amongſt others there was a kingdom of Elam, which flouriſhed in the days of Hezekiah, Manaſſeh, Joſiah, and Jehoiakim, kings of Judah, and fell in the days of Zedekiah, Jer. xxv. 25. and xlix. 34. and Ezek. xxxii. 24. This kingdom ſeems to have been potent; and to have had wars with the king of Touran or Scythia, beyond the river Oxus, with various ſucceſs; and at length to have been ſubdued by the Medes and Babylonians, or one of them. For while Nebuchadnezzar warred in the weſt, Cyaxeres recovered the Aſſyrian provinces of Armenia, Pontus, and Cappadocia, and then they went eaſtward againſt the provinces of Perſia and Parthia. Whether the Piſchdadians, whom the Perſians reckon to have been their oldeſt kings, were kings of the kingdom of Elam, or of that of the Aſſyrians, and whether Elam was conquered by the Aſſyrians at the ſame time with Babylonia and Suſiana in the reign of Aſſerhadon, and ſoon after revolted, I leave to be examined.

(5) How is this conſiſtent with what our author hath ſo fully proved (§ XVII and XVIII.) that Aſſerhadon had two ſucceſſors at Nineveh, Saoſduchinus and Chyniladon? Or with what he ſays, § XIX. that Sarac, the laſt Aſſyrian king, was the ſucceſſor of Chyniladon?

CHAP. IV.

OF THE TWO CONTEMPORARY EMPIRES OF THE BABYLONIANS AND MEDES.

CHAPTER FOURTH.

BY the fall of the Aſſyrian empire, the kingdoms of the Babylonians and Medes grew great and potent. The reigns of the kings of Babylon are ſtated in Ptolemy's canon. For underſtanding of which you are to note, that every king's reign in that canon began with the laſt Thoth of his predeceſſor's reign; as I gather by comparing the reigns of the Roman emperors in that canon with their reigns recorded in years, months, and days, by other authors. Whence it appears from that canon, that Aſſerhadon died in the year of Nabonaſſar 81; Saoſduchinus, his ſucceſſor, in the year 101; Chyniladon, in the year 123; Nabopolaſſar, in the year 144; and Nebuchadnezzar in the year 187. All theſe kings, and ſome others mentioned in the canon, reigned ſucceſſively over Babylon; and this laſt king died in the 37th year of Jechoniah's captivity (2 Kings xxv. 27) and therefore Jechoniah was captivated in the 150th year of Nabonaſſar.

II. This captivity was in the eighth year of Nebuchadnezzar's reign (2 Kings xxiv. 12), and eleventh of Jehoiakim's. For the firſt year of Nebuchadnezzar's reign was the fourth of Jehoiakim's, (Jer. xxv. 1) and Jehoiakim reigned eleven years before this captivity (2 Kings xxiii. 36, 2 Chron. xxxvi. 5), and Jechoniah three months, ending with the captivity; and the tenth year of Jechoniah's captivity, was the eighteenth year of Nebuchadnezzar's reign (Jer. xxxii. 1); and the eleventh year of Zedekiah, in which Jeruſalem was taken, was the nineteenth of Nebuchadnezzar,

nezzar, Jer. lii. 5, 12. And therefore Nebuchadnezzar began his reign in the year of Nabonaſſar 142, that is, two years before the death of his father Nabopolaſſar, he being then made king by his father; and Jehoiakim ſucceeded his father Joſiah in the year of Nabonaſſar 139; and Jeruſalem was taken and the temple burnt in the year of Nabonaſſar 160, about twenty years after the deſtruction of Nineveh. BABYLONIANS AND MEDES.

III. The reign of Darius Hyſtaſpis over Perſia, by the canon and the conſent of all chronologers, and by ſeveral eclipſes of the moon, began in ſpring in the year of Nabonaſſar 227 (*): and "in the fourth year of king Darius, in the fourth day of "the ninth month, which is the month Chiſleu, when the Jews "had ſent unto the houſe of God, ſaying, Should I weep in the "fifth month as I have done theſe ſo many years? The word of "the Lord came unto Zechariah, ſaying, ſpeak to all the people "of the land, and to the prieſts, ſaying; when ye faſted and "mourned in the fifth and ſeventh month even thoſe ſeventy "years, did ye at all faſt unto me?" Zech. vii. 1—5. Count backwards thoſe ſeventy years, in which they faſted in the fifth month for the burning of the temple, and in the ſeventh for the death of Gedaliah; and the burning of the temple and death of Gedaliah will fall upon the fifth and ſeventh Jewiſh months, in the year of Nabonaſſar 160, as above.

IV. As the Chaldæan aſtronomers counted the reigns of their kings by the years of Nabonaſſar, beginning with the month Thoth; ſo the Jews, as their authors tell us, counted the reigns of theirs by the years of Moſes, beginning every year with the month Niſan. For if any king began his reign a few days before this month began, it was reckoned to him for a whole year, and the beginning of this month was accounted the beginning of the ſecond year of his reign. And according to this reckoning the firſt year of Jehoiakim began with the month Niſan, anno Nabonaſſ. 139, though his reign might not really begin till five or ſix months after; and the fourth year of Jehoiakim, and firſt of Nebuchadnezzar, according to the reckoning of the Jews,

CHAP. IV. § III.

(*) See Petav. Doct. Temp. lib. 10. c. 19.

began

CHAPTER FOURTH.

began with the month Niſan, anno Nabonaſſ. 142; and the firſt year of Zedekiah, and of Jeconiah's captivity, and ninth year of Nebuchadnezzar, began with the month Niſan, in the year of Nabonaſſ. 150; and the tenth year of Zedekiah, and 18th of Nebuchadnezzar, began with the month Niſan in the year of Nabonaſſ. 159. Now in the ninth year of Zedekiah, Nebuchadnezzar invaded Judæa and the cities thereof; and in the tenth month of that year, and tenth day of the month, he and his hoſt beſieged Jeruſalem, 2 Kings xxv. 1. Jer. xxxiv. 1. xxxix. 1. and lii. 4. From this time to the tenth month, in the ſecond year of Darius, are juſt ſeventy years; and accordingly, "upon the 24th day of the eleventh month of the ſecond year "of Darius, the word of the Lord came unto Zechariah,—and "the angel of the Lord ſaid, Oh Lord of hoſts, how long wilt "thou not have mercy on Jeruſalem, and on the cities of Judah, "againſt which thou haſt had indignation, theſe threeſcore and "ten years," Zech. i. 7, 12. So then the ninth year of Zedekiah, in which this indignation againſt Jeruſalem and the cities of Judah began, commenced with the month Niſan in the year of Nabonaſſ. 158; and the eleventh year of Zedekiah, and nineteenth of Nebuchadnezzar, in which the city was taken and the temple burnt, commenced with the month Niſan in the year of Nabonaſſ. 160, as above.

V. By all theſe characters the years of Jehoiakim, Zedekiah, and Nebuchadnezzar, ſeem to be ſufficiently determined; and thereby the chronology of the Jews in the Old Teſtament is connected with that of later times. For between the death of Solomon and the ninth year of Zedekiah, wherein Nebuchadnezzar invaded Judæa, and began the ſiege of Jeruſalem, there were 390 years, as is manifeſt both by the propheſy of Ezekiel, chap. iv. and by ſumming up the years of the kings of Judah; and from the ninth year of Zedekiah incluſively to the vulgar æra of Chriſt, there were 590 years: and both theſe numbers, with half the reign of Solomon, make up a thouſand years.

[a] 2 King. xxiii. 29, &c. 2 Chron. xxxv. 20. xxxvi. 4.

VI. In the [a] end of the reign of Joſiah, anno Nabonaſſ. 139, Pharaoh Nechoh, the ſucceſſor of Pſammitichus, came with a great army out of Egypt againſt the king of Aſſyria; and being denied

BABYLONIANS AND MEDES.

denied paſſage through Judæa, beat the Jews at Megiddo, or Magdolus, before Egypt; ſlew Joſiah their king; marched to Carchemiſh or Circutium, a town of Meſopotamia upon Euphrates, and took it; poſſeſt himſelf of the cities of Syria; ſent for Jehoahaz, the new king of Judah, to Riblah or Antioch; depoſed him there; made Jehoiakim king in the room of Joſiah; and put the kingdom of Judah to tribute. But the king of Aſſyria being in the mean time beſieged and ſubdued, and Nineveh deſtroyed by Aſſuerus king of the Medes; and Nebuchadnezzar king of Babylon, and the conquerors being thereby entitled to the countries belonging to the king of Aſſyria; they led their victorious armies againſt the king of Egypt, who had ſeized part of them. For Nebuchadnezzar, aſſiſted [a] by Aſtibares, that is, by Aſtivares, Aſſuerus, Ackſweres, Axeres, or Cy-Axeres, king of the Medes, in the [b] third year of Jehoiakim, came with an army of Babylonians, Medes, Syrians, Moabites, and Ammonites, to the number of 10000 chariots, and 180000 foot, and 120000 horſe, and laid waſte Samaria, Galilee, Scythopolis, and the Jews in Galaaditis, and beſieged Jeruſalem, and took king Jehoiakim alive, and [c] bound him in chains for a time, and carried to Babylon Daniel and others of the people, and part of what gold and ſilver and braſs they found in the temple. And in [d] the fourth year of Jehoiakim, which was the twentieth of Nabopolaſſar, they routed the army of Pharaoh Nechoh at Carchemiſh; and by purſuing the war, took from the king of Egypt whatever pertained to him from the river of Egypt to the river of Euphrates (1). This king of Egypt is called by Beroſus [e] the Satrapa of Egypt, Cœle-Syria, and Phœnicia; and this victory over him put an end to his reign in Cœle-Syria and Phœnicia, which he had newly invaded, and gave a beginning to the reign of Nebuchadnezzar there: and by the conqueſts over Aſſyria and Syria, the ſmall kingdom of Babylon was erected into a potent empire.

[a] Polyhiſtor apud Euſeb. Præp. l. 9. c. 39. p. 266. 2 King. xxiv. 2. 7. [b] Dan. i. 1.

[c] Dan. i. 2. 2 Chron. xxxvi. 6.

[d] Jer. xlvi. 2.

[e] Apud Joſeph. Antiq. l. 10. c. 11. & contr. Ap. lib. 1. c. 19. p. 1342.

VII. Whilſt Nebuchadnezzar was acting in Syria [f], his father Nabopolaſſar died, having reigned 21 years; and Nebuchadnez-

[f] Beroſ. apud Joſeph. Ant. l. 10. c. 11.

(1) 2 Kings xxiv. 7.

§ VI.

zar,

CHAPTER FOURTH.

zar, upon the news thereof, having ordered his affairs in Syria returned to Babylon, leaving the captives and his army with his ſervants to follow him. And from henceforward he applied himſelf ſometimes to war, conquering Sittacene, Suſiana, Arabia, Edom, Egypt, and ſome other countries; and ſometimes to peace, adorning the temple of Belus with the ſpoils that he had taken; and the city of Babylon with magnificent walls and gates, and ſtately palaces and penſile gardens, as Beroſus relates; and amongſt other things he cut the new rivers Naarmalcha and Pallacopas above Babylon, and built the city of Teredon (1).

VIII. Judæa was now in ſervitude under the king of Babylon, being invaded and ſubdued in the third and fourth years of Jehoiakim; "and Jehoiakim ſerved him three years, and then "turned and rebelled," 2 King. xxiv. 1. While Nebuchadnezzar and the army of the Chaldæans continued in Syria, Jehojakim was under compulſion; after they returned to Babylon, Jehojakim continued in fidelity three years, that is, during the 7th, 8th, and 9th years of his reign, and rebelled in the tenth. Whereupon, in the return or end of the year, that is in ſpring, he ſent [a] and beſieged Jeruſalem; captivated Jeconiah, the ſon and ſucceſſor of Jehoiakim; ſpoiled the temple; and carried away to Babylon the princes, craftſmen, ſmiths, and all that were fit for war: and, when none remained but the pooreſt of the people, made [b] Zedekiah their king, and bound him upon oath to ſerve the king of Babylon. This was in ſpring, in the end of the eleventh year of Jehoiakim, and beginning of the year of Nabonaſſar 150.

[a] 2 King. xxiv. 12, 14. 2 Chron. xxxvi. 10.

[b] 2 Kings xxiv. 17. Ezek. xvii. 13, 16, 18.

IX. Zedekiah, notwithſtanding his oath [c], revolted, and made a covenant with the king of Egypt; and therefore Nebuchadnezzar, in the ninth year of Zedekiah [d], invaded Judæa and the cities thereof; and in the tenth Jewiſh month of that year beſieged Jeruſalem again; and in the eleventh year of Zedekiah,

[c] Ezek. xvii. 15.

[d] 2 King. xxv. 1, 2, 8. Jer. xxxii. 1. & xxxix. 1, 2.

§ VII.

(1) Abydenus apud Euſeb. Præp. lib. 9. p. 268.

§ XI.

(1) Ptolemæi Can.

(2) Beroſus apud Joſeph. contr. Ap. lib. 1. c. 20. p. 1344.

in

in the 4th and 5th months, after a ſiege of one year and an half, took and burnt the city and temple.

BABYLONIANS AND MEDES.

X. Nebuchadnezzar, after he was made king by his father, reigned over Phœnicia and Cœle-Syria 45 years; and [a] after the death of his father, 43 years; and [b] after the captivity of Jeconiah, 37; and then was ſucceeded by his ſon Evilmerodach, called Iluarodamus in Ptolemy's canon. Jerome [c] tells us, that Evilmerodach reigned ſeven years in his father's life-time, while his father did eat graſs with oxen; and after his father's reſtoration was put in priſon with Jeconiah king of Judah, till the death of his father; and then ſucceeded in the throne. In the fifth year of Jeconiah's captivity, Belſhazzar was next in dignity to his father Nebuchadnezzar, and was deſigned to be his ſucceſſor (Baruch i. 2, 10, 11, 12, 14) and therefore Evilmedorach was even then in diſgrace. Upon his coming to the throne [d], he brought his friend and companion Jeconiah out of priſon on the 27th day of the twelfth month; ſo that Nebuchadnezzar died in the end of winter, anno Nabonaſſ. 187.

[a] Canon. & Berof.

[b] 2 King. xxv. 27.

[c] Hieron. in Iſa. xiv. 19.

[d] 2 King. xxv. 27, 29, &c.

XI. Evilmerodach reigned two years after his father's death (1); and for his luſt and evil manners was ſlain by his ſiſter's huſband Nerigliſſar (2), or Nergalaſſar, Nabonaſſ. 189, according to the canon.

XII. Nerigliſſar, in the name of his young ſon Laboſordachus, or Laboaſſerdach, the grand-child of Nebuchadnezzar by his daughter, reigned four years, according to the canon and Beroſus, including the ſhort reign of Laboaſſerdach alone. For Laboaſſerdach, according to Beroſus and Joſephus, reigned nine months after the death of his father; and then for his evil manners was ſlain in a feaſt, by the conſpiracy of his friends with Nabonnedus, a Babylonian, to whom by conſent they gave the kingdom: but theſe nine months are not reckoned apart in the canon.

XIII. Nabounedus, or Nabonadius, according to the canon, began his reign in the year of Nabonaſſ. 193; reigned ſeventeen years; and ended his reign in the year of Nabonaſſ. 210, being then vanquiſhed, and Babylon taken by Cyrus (1).

§ XIII.

(1) Beroſus, ibid.

CHAPTER FOURTH.

XIV. Herodotus calls this laſt king of Babylon, Labynetus; and ſays, that he was the ſon of a former Labynetus, and of Nitocris, an eminent queen of Babylon (1). By the father he ſeems to underſtand, that Labynetus, who, as he tells us, was king of Babylon when the great eclipſe of the ſun, predicted by Thales, put an end to the five years war between the Medes and Lydians (2); and this was the great Nebuchadnezzar. Daniel [a] calls the laſt king of Babylon, Belſhazzar; and ſaith, that Nebuchadnezzar was his father. And Joſephus [b] tells us, that the laſt king of Babylon was called Naboandel by the Babylonians, and reigned ſeventeen years; and therefore he is the ſame king of Babylon with Nabonnedus or Labynetus. And this is more agreeable to ſacred writ, than to make Nabonnedus a ſtranger to the royal line. For all "nations were to ſerve Nebuchadnezzar "and his poſterity, till the very time of his land ſhould come, "and many nations ſhould ſerve themſelves of him," Jer. xxvii. 7. Belſhazzar was born and lived in honour before the fifth year of Jeconiah's captivity, which was the eleventh year of Nebuchadnezzar's reign; and therefore he was above 34 years old at the death of Evilmerodach, and ſo could be no other king than Nabonnedus: for Laboaſſerdach, the grandſon of Nebuchadnezzar, was a child when he reigned.

[a] Dan. v. 2.

[b] Joſ. Ant. l. 10. c. 11. ſect. 2. p. 460.

XV. Herodotus [c] tells us, that there were two famous queens of Babylon, Semiramis and Nitocris; and that the latter was more ſkillful. She obſerving, that the kingdom of the Medes, having ſubdued many cities, and among others Nineveh, was become great and potent, intercepted and fortified the paſſages out of Media into Babylonia; and the river, which before was ſtraight, ſhe made crooked, with great windings, that it might be more ſedate and leſs apt to overflow. And on the ſide of the river above Babylon, in imitation of the Lake of Mœris in Egypt, ſhe dug a lake every way forty miles broad, to receive the water of the river, and keep it for watering the land. She built alſo a bridge over the river in the middle of Babylon, turning the

[c] Herod. l. 1. c. 184, 185, 186.

§ XIV.

(1) Herodot. lib. 1. c. 188.

(2) Vide Herodot. lib. 1. c. 74. Where Herodotus, however, does not call Labynetus king of Babylon, but ſimply the Babylonian.

ſtream

ſtream into the lake till the bridge was built. Philoſtratus [a] ſaith, that ſhe made a bridge under the river two fathoms broad; meaning an arched vault, over which the river flowed, and under which they might walk croſs the river. He calls her Μηδεια, a Mede.

BABYLONIANS AND MEDES.

[a] Philoſt. in vita Apollonii, l. 1. c. 25.

XVI. Beroſus tells us (1), that Nebuchadnezzar built a penſile garden upon arches, becauſe his wife was a Mede, and delighted in mountainous proſpects, ſuch as abounded in Media, but were wanting in Babylonia. She was Amyite (2), the daughter of Aſtyages, and ſiſter of Cyaxeres, kings of the Medes. Nebuchadnezzar married her upon a league between the two families againſt the king of Aſſyria. But Nitocris might be another woman; who in the reign of her ſon Labynetus, a voluptuous and vicious king, took care of his affairs, and, for ſecuring his kingdom againſt the Medes, did the works above-mentioned. This is that queen mentioned in Daniel, chap. v. 10.

XVII. Joſephus [b] relates out of the Tyrian records, that in the reign of Ithobalus king of Tyre, that city was beſieged by Nebuchadnezzar thirty years together. In the end of that ſiege Ithobalus their king was ſlain, Ezek. xxviii. 8, 9, 10. And after him, according to the Tyrian records, reigned Baal ten years; Ecnibalus and Chelbes, one year; Abbarus, three months; Mytgonus and Geraſtratus, ſix years; Balatorus, one year; Merbalus, four years; and Iromus, twenty years. And in the fourteenth year of Iromus, ſay the Tyrian records, the reign of Cyrus began in Babylonia. Therefore the ſiege of Tyre began 48 years and ſome months before the reign of Cyrus in Babylonia. It began when Jeruſalem had been newly taken and burnt, with the temple (Ezek. xxvi.) and by conſequence after the eleventh year of Jeconiah's captivity, or 160th year of Nabonaſſar. And therefore the reign of Cyrus in Babylonia began after the year of Nabonaſſar 208. It ended before the eight and twentieth year of Jeconiah's captivity, or 176th year of Nabonaſſar (Ezek. xxix. 17.) and therefore the reign of Cyrus in Babylonia began before the year of Nabonaſſar 211. By this argument the firſt

[b] Joſ. contr. Apion, l. 1. c. 21. p. 1344.

§ XVI.

(1) Apud Joſeph. contr. Ap. lib. 1. c. 19. p. 1343.

(2) Vid. chap. 3. § XX.

year

CHAPTER FOURTH.

year of Cyrus in Babylonia was one of the two intermediate years 209, 210. Cyrus invaded Babylonia in the year of Nabonaſſar 209; Babylon [a] held out, and the next year was taken, (Jer. li. 39, 57,) by diverting the river Euphrates, and entering the city through the emptied channel, and by conſequence after Midſummer: for the river, by the melting of the ſnow in Armenia, overflows yearly in the beginning of ſummer, but in the heat of ſummer grows low. "[b] And that night was the king of "Babylon ſlain; and Darius the Mede, or king of the Medes, "took the kingdom, being about threeſcore and two years old." So then Babylon was taken a month or two after the ſummer ſolſtice, in the year of Nabonaſſ. 210; as the canon alſo repreſents.

[a] Herod. l. 1. c. 189, 190, 191. Xenoph. l. 7. p. 190, 191, 192. Ed. Paris.

[b] Dan, v. 30, 31. Joſeph. Ant. l. 10, c. 11.

XVIII. The kings of the Medes before Cyrus were Dejoces, Phraortes, Aſtyages, Cyaxeres, or Cyaxares, and Darius. The three firſt reigned before the kingdom grew great; the two laſt were great conquerors, and erected the empire. For Æſchylus, who flouriſhed in the reigns of Darius Hyſtaſpis and Xerxes, and died in the 76th olympiad (1), introduces Darius thus complaining of thoſe who perſuaded his ſon Xerxes to invade Greece [c]:

[c] Æſch. Perſæ, v. 761.

"Τοιγαρ σφιν εργον εστιν εξειργασμενον
"Μεγιστον, αιειμνηστον, οιον ωδεπω,
"Το δ' αυ Σωσων εξεκεινωσεν στεσον·
"Εξ ὑτε τιμην Ζευς αναξ τηνδ' ωπασεν,
"Εν ανδρα πασης Ασιαδος μηλοτροφω
"Ταγειν, εχοντα σκηπ]ρον ευθυντηριον.
"Μηδος γαρ ην ὁ πρωτος ἡγεμων στρατω·
"Αλλος δ' εκεινω παις τοδ' εργον ηυσε·
"Φρενες γαρ αυτω θυμον οιακοστροφων.
"Τριτος δ' απ' αυτω Κυρος, ευδαιμων ανηρ, &c.

"They have done a work
"The greateſt, and moſt memorable, ſuch as never happen'd,

§ XVIII.

(1) It is very uncertain in what year Æſchylus died. But it is certain, from the Amudelian Marbles, that he was preſent in the battle of Marathon; and his ſcholiaſt ſays he was in thoſe of Salamis and Platæa.

(a) Dan. vi. 18. (b) Dan. ix. 1. (c) Tobit xiv. 15.

"For

BABYLONIANS AND MEDES.

"For it has emptied the falling Suſa:
"From the time that king Jupiter granted this honour,
"That one man ſhould reign over all fruitful Aſia,
"Having the imperial ſcepter.
"For he that firſt led the army was a Mede;
"The next, who was his ſon, finiſh'd the work,
"For prudence directed his ſoul;
"The third was Cyrus, a happy man, &c."

The poet here attributes the founding of the Medo-Perſian empire to the two immediate predeceſſors of Cyrus, the firſt of which was a Mede, and the ſecond was his ſon. The ſecond was Darius the Mede, the immediate predeceſſor of Cyrus (2), according to Daniel; and therefore the firſt was the father of Darius, that is, Achſuerus, Aſſuerus, Oxyares, Axeres, prince Axeres, or Cy-Axeres, the word Cy ſignifying a prince. For Daniel tells us, that Darius was the ſon of Achſuerus, or Ahaſuerus (3), as the Maſoretes erroneouſly call him, of the ſeed of the Medes (3), that is, of the ſeed royal. This is that Aſſuerus who, together with Nebuchadnezzar, took and deſtroyed Nineveh, according to Tabit (4): which action is by the Greeks aſcribed to Cyaxeres (5), and by Eupolemus to Aſtibares (6), a name perhaps corruptly written for Aſſuerus. By this victory over the Aſſyrians, and ſubverſion of their empire ſeated at Nineveh, and the enſuing conqueſts of Armenia, Cappadocia, and Perſia, he began to extend the reign of one man over all Aſia; and his ſon Darius the Mede, by conquering the kingdoms of Lydia and Babylon, finiſhed the work. And the third king was Cyrus, a happy man for his great ſucceſſes under and againſt Darius, and large and peaceable dominion in his own reign.

XIX. Cyrus lived ſeventy years, according to Cicero (1), and reigned nine years over Babylon, according to Ptolemy's canon; and therefore was 61 years old at the taking of Babylon; at which

(1) Herodot. lib. 1. c. 103—106.

(6) Aſtibares, king of the Medes, is mentioned by Polyhiſtor (apud Euſeb. Præp. lib. 9. p. 266.) as the ally of Nabuchodonoſor in his invaſion of Judæa.

§ XX.

(1) De Divinat. lib. 1. c. 23.

time

CHAPTER FOURTH.

time Darius the Mede was 62 years old, according to Daniel (2): and therefore Darius was two generations younger than Aſtyages, the grandfather of Cyrus. For Aſtyages, according to both Herodotus [a] and Xenophon, gave his daughter Mandane to Cambyſes, a prince of Perſia, and by them became the grandfather of Cyrus; and Cyaxeres was the ſon of Aſtyages, according to Xenophon [b], and gave his daughter to Cyrus. This daughter, ſaith [c] Xenophon, was reported to be very handſome; and uſed to play with Cyrus when they were both children, and to ſay, that ſhe would marry him: and therefore they were much of the ſame age. Xenophon ſaith, that Cyrus married her after the taking of Babylon. But ſhe was then an old woman. It is more probable, that he married her while ſhe was young and handſome, and he a young man; and that becauſe he was the brother-in-law of Darius the king, he led the armies of the kingdom until he revolted. So then Aſtyages, Cyaxeres, and Darius, reigned ſucceſſively over the Medes; and Cyrus was the grandſon of Aſtyages, and married the ſiſter of Darius, and ſucceeded him in the throne.

[a] Herod. l. 1. c. 107, 108. Xenophon. Cyropæd. l. 1. p. 3.
[b] Cyropæd. l. 1. p. 22.
[c] Cyropæd. l. 8. p. 228, 229.

XX. Herodotus [d] therefore hath inverted the order of the kings Aſtyages and Cyaxeres; making Cyaxeres to be the ſon and ſucceſſor of Phraortes, and the father and predeceſſor of Aſtyages, the father of Mandane, and grandfather of Cyrus; and telling us, that this Aſtyages married Ariene, the daughter of Alyattes king of Lydia (1), and was at length taken priſon and deprived of his dominion by Cyrus (2). And Pauſanias (3) hath copied after Herodotus, in telling us, that Aſtyages, the ſon of Cyaxeres, reigned in Media in the days of Alyattes king of Lydia. Cyaxeres had a ſon who married Ariene, the daughter of Alyattes; but this ſon was not the father of Mandane, and grandfather of Cyrus, but of the ſame age with Cyrus; and his true name is preſerved in the name of the Darics (4), which, upon the conqueſt of Crœſus by the conduct of his general Cyrus, he coined out of the gold and ſilver of the conquered Ly-

[d] Herod. l. 1. c. 73. & 103—107.

(2) Dan. v. 31.

§ XX.

(1) Herodot. lib. 1. c. 74. (2) ——— c. 125—130.

dians. His name was therefore Darius, as he is called by Daniel. For Daniel tells us, that this Darius was a Mede, and that his father's name was Aſſuerus, that is Axeres or Cyaxeres, as above. Conſidering therefore that Cyaxeres reigned long; and that no author mentions more kings of Media than one, called Aſtyages; and that Æſchylus, who lived in thoſe days, knew but of two great monarchs of Media and Perſia, the father and the ſon, older than Cyrus: it ſeems to me, that Aſtyages, the father of Mandane and grandfather of Cyrus, was the father and predeceſſor of Cyaxeres; and that the ſon and ſucceſſor of Cyaxeres was called Darius. Cyaxeres, according to Herodotus [a], reigned 40 years, and his ſucceſſor 35, and Cyrus, according to Xenophon, ſeven. Cyrus died anno Nabonaſſ. 219, according to the canon; and therefore Cyaxeres died anno Nabonaſſ. 177, and began his reign anno Nabonaſſ. 137; and his father Aſtyages reigned 26 years, beginning his reign at the death of Phraortes, who was ſlain by the Aſſyrians anno Nabonaſſ. 111, as above (5).

BABYLONIANS AND MEDES.

[a] Herod. l. 1. c. 106, 130.

XXI. Of all the kings of the Medes, Cyaxeres was the greateſt warrior. Herodotus [b] ſaith, that he was much more valiant than his anceſtors, and that he was the firſt who divided the kingdom into provinces, and reduced the irregular and undiſciplined forces of the Medes into diſcipline and order. And therefore, by the teſtimony of Herodotus, he was that king of the Medes, whom Æſchylus makes the firſt conqueror and founder of the empire. For Herodotus repreſents him and his ſon to have been the two immediate predeceſſors of Cyrus, erring only in the name of the ſon. Aſtyages did nothing glorious. In the beginning of his reign a great body of Scythians, commanded by Madyes, [c] invaded Media and Parthia, as above, and reigned there about 28 years. But at length his ſon Cyaxeres circumvented and ſlew them in a feaſt, and made the reſt fly to their brethren in Parthia; and immediately after, in conjunction with Nebuchadnezzar, invaded and ſubverted the kingdom of Aſſyria, and deſtroyed Nineveh.

[b] Herod. l. 1. c. 103.
[c] Herod. lib. 1. c. 103—107.

(3) Pauſan. lib. 5. c. 10. p. 398.
(4) Vid. Schol. in Ariſtoph. Ἐκκλησιαζ. lin. 598.
(5) Chap. 3. § XVIII.

CHAPTER FOURTH.

XXII. In the fourth year of Jehoiakim, which the Jews reckon to be the firſt of Nebuchadnezzar (1), dating his reign from his being made king by his father, or from the month Niſan preceding, when the victors had newly ſhared the empire of the Aſſyrians, and in proſecuting their victory were invading Syria and Phœnicia, and were ready to invade the nations round about; God [a] threatened that "he would take all the families of "the north," that is, the armies of the Medes, "and Nebu- "chadnezzar the king of Babylon, and bring them againſt Ju- "dæa, and againſt the nations round about, and utterly deſtroy "thoſe nations, and make them an aſtoniſhment and laſting de- "ſolations, and cauſe them all to drink the wine-cup of his fu- "ry;" and in particular he names "the kings of Judah and "Egypt, and thoſe of Edom, and Moab, and Ammon, and "Tyre, and Zidon, and the iſles of the ſea, and Arabia, and "Zimri, and all the kings of Elam, and all the kings of the "Medes, and all the kings of the north, and the king of Se- "ſac (2); and that after ſeventy years, he would alſo puniſh the "king of Babylon (3)." Here, in numbering the nations which ſhould ſuffer, he omits the Aſſyrians as fallen already; and names the kings of Elam or Perſia, and Seſac or Suſa, as diſtinct from thoſe of the Medes and Babylonians; and therefore the Perſians were not yet ſubdued by the Medes, nor the king of Suſa by the Chaldæans. And as by the puniſhment of the king of Babylon, he means the conqueſt of Babylon by the Medes; ſo by the puniſhment of the Medes, he ſeems to mean the conqueſt of the Medes by Cyrus.

[a] Jer. xxv. 9.

XXIII. After this, in the beginning of the reign of Zedekiah, that is, in the ninth year of Nebuchadnezzar, God threatened that "he would give the kingdoms of Edom, Moab, and Am- "mon, and Tyre, and Zidon, into the hand of Nebuchadnez- "zar king of Babylon, and that all the nations ſhould ſerve him, "and his ſon, and his ſon's ſon, until the very time of his land "ſhould come, and many nations and great kings ſhould ſerve "themſelves of him," Jer. xxvii. 2—7. And at the ſame time

§ XXII.

(1) See § II. (2) Jerem. xxv. 15—26. (3) ——— 11, 12.

God

God thus predicted the approaching conqueſt of the Perſians by the Medes and their confederates: "Behold," ſaith he, "I will "break the bow of Elam, the chief of their might: and upon "Elam will I bring the four winds from the four quarters of hea- "ven, and will ſcatter them towards all thoſe winds, and there "ſhall be no nation whither the outcaſts of Elam ſhall not come: "for I will cauſe Elam to be diſmayed before their enemies, and "before them that ſeek their life; and I will bring evil upon "them, even my fierce anger, ſaith the Lord; and I will ſend "the ſword after them till I have conſumed them; and I will "ſet my throne in Elam, and will deſtroy from thence the king "and the princes, ſaith the Lord: but it ſhall come to paſs in "the latter days [viz. in the reign of Cyrus] that I will bring again "the captivity of Elam, ſaith the Lord," Jer. xlix. 34—39. The Perſians were therefore hitherto a free nation under their own king; but ſoon after this were invaded, ſubdued, captivated, and diſperſed into the nations round about, and continued in ſervitude until the reign of Cyrus. And ſince the Medes and Chaldæans did not conquer the Perſians, till after the ninth year of Nebuchadnezzar; it gives us occaſion to enquire, what that active warrior Cyaxeres was doing, next after the taking of Nineveh.

BABYLONIANS AND MEDES.

XXIV. When Cyaxeres expelled the Scythians [a], ſome of them made their peace with him, and ſtaid in Media, and preſented to him daily ſome of the veniſon which they took in hunting: but happening one day to catch nothing, Cyaxeres, in a paſſion, treated them with opprobrious language. This they reſented; and ſoon after killed one of the children of the Medes, dreſſed it like veniſon, and preſented it to Cyaxeres, and then fled to Alyattes king of Lydia; whence followed a war of five years between the two kings Cyaxeres and Alyattes. And thence I gather, that the kingdoms of the Medes and Lydians were now contiguous; and by conſequence that Cyaxeres, ſoon after the conqueſt of Nineveh, ſeized the regions belonging to the Aſſyrians, as far as to the river Halys. In the ſixth year of this war, in the midſt of a battle between the two kings, there was a total eclipſe of the ſun, predicted by Thales [b]; and this eclipſe fell upon the 28th of May, anno Nabonaſſ. 163, forty and ſeven years

[a] Herod. l. 1. c. 73, 74.

[b] Herod. l. 1. c. 174. Plin. l. 2. c. 12.

CHAPTER FOURTH.

years before the taking of Babylon, and put an end to the battle: and thereupon the two kings made peace by the mediation of Nebuchadnezzar king of Babylon, and Syennesis king of Cilicia; and the peace was ratified by a marriage between Darius the son of Cyaxeres, and Ariene the daughter of Alyattes. Darius was therefore fifteen or sixteen years old at the time of this marriage; for he was 62 years old at the taking of Babylon.

XXV. In the eleventh year of Zedekiah's reign, the year in which Nebuchadnezzar took Jerusalem and destroyed the temple, Ezekiel, comparing the kingdoms of the east to trees in the garden of Eden, thus mentions their being conquered by the kings of the Medes and Chaldæans: "Behold," saith he, "the Assy-"rian was a Cedar in Lebanon with fair branches,—his height "was exalted above all the trees of the field,—and under his "shadow dwelt all great nations,—not any tree in the garden of "God was like unto him in his beauty:—but I have delivered "him into the hand of the mighty One of the heathen,—I made "the nations to shake at the sound of his fall, when I cast him "down to the grave with them that descend into the pit: and all "the trees of Eden, the choice and best of Lebanon, all that "drink water, shall be comforted in the nether parts of the "earth: they also went down into the grave with him, unto "them that be slain with the sword, and they that were his arm, "that dwelt under his shadow in the midst of the heathen," Ezek. xxxi.

XXVI. The next year Ezekiel, in another prophesy, thus enumerates the principal nations who had been subdued and slaughtered by the conquering sword of Cyaxeres and Nebuchadnezzar. "Asshur is there, and all her company," viz. in Hades, or the lower parts of the earth, where the dead bodies lay buried, "his "graves are about him; all of them slain, fallen by the sword, "which caused this terror in the land of the living. There is "Elam, and all her multitude round about her grave, all of them "slain, fallen by the sword, which are gone down uncircum-"scribed into the nether parts of the earth, which caused their "terror in the land of the living: yet have they borne their "shame with them that go down into the pit.—There is Me-"shech,

"shech, Tubal, and all her multitude *; her graves are round "about him: all of them uncircumcised, slain by the sword, "though they caused their terror in the land of the living.— "There is Edon, her kings, and all her princes, which with "their might are laid by them that were slain by the sword.— "There be the princes of the north all of them, and all the "Zidonians, which with their terror are gone down with the "slain," Ezek. xxxii. 22—30. Here, by the princes of the north, I understand those on the north of Judæa, and chiefly the princes of Armenia and Cappadocia; who fell in the wars, which Cyaxeres made in reducing those countries after the taking of Nineveh. Elam or Persia was conquered by the Medes, and Susiana by the Babylonians after the ninth, and before the nineteenth year of Nebuchadnezzar: and therefore we cannot err much, if we place these conquests in the twelfth or fourteenth year of Nebuchadnezzar. In the nineteenth (1), twentieth, and one-and-twentieth year of this king, he invaded and [a] conquered Judæa, Moab, Ammon, Edom, the Philistims and Zidon; and [b] the next year he besieged Tyre; and after a siege of thirteen years he took it, in the 35th year of his reign; and then he [c] invaded and conquered Egypt, Ethiopia, and Libya; and about eighteen or twenty years after the death of this king, Darius the Mede conquered the kingdom of Sardes; and after five or six years more he invaded and conquered the empire of Babylon: and thereby finished the work of propagating the Medo-Persian monarchy over all Asia, as Æschylus represents.

BABYLONIANS AND MEDES.

* The Scythians.

[a] Jer. xxvii. 3, 6. Ezek. xxi. 19, 20. & xxv. 2, 8, 12.
[b] Ezek. xxvi. 2. & xxix. 17, 19.
[c] Ezek. xxix. 19. & xxx. 4, 5.

XXVII. Now this is that Darius who coined a great number of pieces of pure gold called Darics, or *Stateres Darici*. For Suidas, Harpocration, and the scholiast of Aristophanes [d] tell us, that these were coined not by the father of Xerxes, but by an earlier Darius; by Darius the First; by the first king of the Medes and Persians who coined gold money. They were stamped on one side with the effigies of an archer, who was crowned with a spiked crown, had a bow in his left hand, and an arrow in his right, and was cloathed with a long robe. I have seen one of

[d] Suid. in Δαρεικος & Δαρεικης. Harpocr. in Δαρεικος. Scholiast. in Aristophanis. Εκκλησιαζουσαι. v. 599.

(1) See § II.

CHAPTER FOURTH.

them in gold, and another in silver. They were of the same weight and value with the Attic Stater, or piece of gold money weighing two Attic drachms. Darius seems to have learnt the art and use of money from the conquered kingdom of the Lydians, and to have recoined their gold: for the Medes, before they conquered the Lydians, had no money. Herodotus [a] tells us, that "when Crœsus was preparing to invade Cyrus, a certain Lydian, called Sandanis, advised him, that he was preparing an expedition against a nation who were cloathed with leathern breeches, who eat not such victuals as they would, but such as their barren country afforded; who drank no wine, but water only; who eat no figs no other good meat; who had nothing to lose, but might get much from the Lydians. For the Persians," saith Herodotus, "before they conquered the Lydians, had nothing rich or valuable." And [b] Isaiah tells us, that "the Medes regarded not silver, nor delighted in gold." But the Lydians and Phrygians were exceeding rich, even to a proverb. "*Midas & Crœsus*," saith Pliny, "*infinitum possederant. Jam Cyrus devictâ Asiâ auri*] *pondo* xxxiv *millia invenerat, præter vasa aurea aurumque factum, & in eo folia ac platanum vitemque. Quâ victoriâ argenti quingenta millia talentorum reportavit, & craterem Semiramidis; cujus pondus quindecim talentorum colligebat. Talentum autem Ægyptium pondo octoginta capere, Varro tradit.*" What the conqueror did with all this gold and silver appears by the Darics. The Lydians, according to [d] Herodotus, were the first who coined gold and silver. And Crœsus coined gold monies in plenty, called *Crœsei*; and it was not reasonable, that the monies of the kings of Lydia should continue current after the overthrow of their kingdom: and therefore Darius recoined it with his own effigies, but without altering the current weight and value. He reigned then from before the conquest of Sardes till after the conquest of Babylon.

[a] Herod. l. 1. c. 71.

[b] Isa. xiii. 17.

[c] Plin. l. 33. c. 3.

[d] Herod. l. 1. c. 94.

XXVIII. And since the cup of Semiramis was preserved till the conquest of Crœsus by Darius; it is not probable, that she could be older, than is represented by Herodotus.

BABYLONIANS AND MEDES.

XXIX. This conquest of the kingdom of Lydia put the Greeks into fear of the Medes. For Theognis, who lived at Megara in the very times of these wars (1), writes thus:

[a] Theogn. Πυμαι, v. 761.

"Πινωμεν, χαριεντα μετ' αλληλοισι λεγοντες,
"Μηδεν τον Μηδων δειδιοτες πολεμον."

"Let us drink, talking pleasant things with one another,
"Not fearing the war of the Medes."

And again [b]:

[b] Ibid. v. 773.

"Αυτος δε κρατον ὑβριςην Μηδων απερυκε
"Τησδε πολευς, ἱνα σοι λαοι εν ευφροσυνη
"Ηρος επερχομενω κλειτας πεμπωσ' ἑκατομβας,
"Τερτομενοι κιθαρη και ερατη θαλιη,
"Παιανωντε χορoις, μαχαισι τε, σον περι βωμον.
"Η γαρ εγωγε δεδοικ', αφραδιην εσορων
"Και κασιν Ἑλληνων λαοφθορον· αλλα συ Φοιβε,
"Ἱλαος ἡμετερην τηνδε φυλασσε πολιν."

"Thou Apollo drive away the injurious army of the Medes
"From this city, that the people may with joy
"Send thee choice hecatombs in the spring,
"Delighted with the harp and chearful feasting,
"And chorus's of Pœans and acclamations about thy altar.
"For truly I am afraid, beholding the folly
"And sedition of the Greeks, which corrupts the people:
but thou, Apollo,
"Being propitious, keep this our city."

The poet tells us further, that discord had destroyed Magnesia, Colophon, and Smyrna, cities of Ionia and Phrygia, and would destroy the Greeks; which is as much as to say, that the Medes had then conquered those cities.

XXX. The Medes therefore reigned till the taking of Sardes. And further, according to Xenophon and the Scriptures, they

(1) Euseb. in Chron.

CHAPTER FOURTH.

reigned till the taking of Babylon. For Xenophon [a] tells us, that after the taking of Babylon, Cyrus went to the king of the Medes at Ecbatane, and ſucceeded him in the kingdom. And Jerom [b], "that Babylon was taken by Darius king of the Medes, "and his kinſman Cyrus." And the Scriptures tell us, that Babylon was deſtroyed by "a nation out of the north" (Jerem. l. 3, 9, 41); by "the kingdoms of Ararat Minni, or Armenia, "and Aſhchenez, or Phrygia Minor" (Jer. li. 27); by the Medes, (Iſa. xiii. 17, 19); "by the kings of the Medes and the captains "and rulers thereof, and all the land of his dominion" (Jer. li. 11, 28.) The kingdom of Babylon was "numbered, and finiſh-"ed, and broken, and given to the Medes and Perſians" (Dan. v. 26, 28); firſt to the Medes under Darius, and then to the Perſians under Cyrus. For Darius reigned over Babylon like a conqueror, not obſerving the laws of the Babylonians, but introducing the immutable laws of the conquering nations, the Medes and Perſians (Dan. vi. 8, 12, 15); and the Medes in his reign are ſet before the Perſians (Dan. ib. and v. 28, and viii. 20); as the Perſians were afterwards in the reign of Cyrus and his ſucceſſors ſet before the Medes (Eſther i. 3, 14, 18, 19, Dan. x. 1, 20, and xi. 2); which ſhews, that in the reign of Darius the Medes were uppermoſt.

[a] Cyrop. l. 8.

[b] Comment. in Dan. v.

XXXI. You may know alſo by the great number of provinces in the kingdom of Darius, that he was king of the Medes and Perſians. For upon the conqueſt of Babylon, he ſet over the whole kingdom an hundred and twenty princes (Dan. vi. 1); and afterwards when Cambyſes and Darius Hyſtaſpis had added ſome new territories, the whole contained but 127 provinces.

XXXII. The extent of the Babylonian empire was much the ſame with that of Nineveh after the revolt of the Medes. Beroſus ſaith (1), that Nebuchadnezzar held Egypt, Syria, Phœnicia, and Arabia. And Strabo adds Arbela to the territories of Babylon (2); and ſaying, that Babylon was anciently the metropolis of Aſſyria, he thus deſcribes the limits of this Aſſyrian empire. "[c] Contiguous," ſaith he, "to Perſia and Suſiana are the

[c] Strabo, l. 16. initio.

§ XXXII.

(1) Apud Joſeph. cont. Ap. lib. 1. c. 19. p. 1342.

"Aſſy-

"Aſſyrians: for ſo they called Babylonia, and the greateſt part "of the region about it: part of which is Atturia, wherein is "Ninus [or Nineveh]; and Apolloniatis, and the Elymæans, "and the Parætacæ, and Chalonitis by the mountain Zagrus, and "the fields near Ninus, and Dolomene, and Chalachene, and "Chazene, and Adiabene, and the nations of Meſopotamia near "the Gordyæans, and the Mygdones about Niſibis, unto Zeug-"ma upon Euphrates; and a large region on this ſide Euphrates "inhabited by the Arabians and Syrians, properly ſo called, as "far as Cilicia, and Phœnicia, and Libya, and the ſea of Egypt, "and the Sinus Iſſicus." And a little after (3), deſcribing the extent of the Babylonian region, he bounds it on the north, with the Armenians and Medes, unto the mountain Zagrus; on the eaſt ſide, with Suſa and Elymais and Parætacene, incluſively; on the ſouth, with the Perſian Gulph and Chaldæa; and on the weſt, with the *Arabes Scenitæ* as far as Adiabene and Gordyæa. Afterwards ſpeaking of Suſiana and Sitacene, a region between Babylon and Suſa, and of Parætacene, and Coſſæa, and Elymais, and of the Sagapeni and Siloceni, two little adjoining provinces, he concludes [a], "and theſe are the nations which inhabit Baby-"lonia eaſtward: to the north are Media and Armenia, exclu-"ſively; and weſtward are Adiabene and Meſopotamia, incluſive-"ly: the greateſt part of Adiabene is plain, the ſame being part "of Babylonia: in ſome places it borders on Armenia: for the "Medes, Armenians, and Babylonians, warred frequently on one "another." Thus far Strabo.

BABYLONIANS AND MEDES.

[a] Strab. l. 16. p. 745.

XXXIII. When Cyrus took Babylon, he changed the kingdom into a ſatrapy or province: whereby the bounds were long after known. And by this means Herodotus [b] gives us an eſtimate of the bigneſs of this monarchy in proportion to that of the Perſians; telling us, that "whilſt every region over which the king "of Perſia reigned in his days, was diſtributed for the nouriſh-"ment of his army, beſides the tributes, the Babylonian region "nouriſhed him four months of the twelve in the year, and all "the reſt of Aſia eight: ſo the power of the region," ſaith he, "is equivalent to the third part of Aſia, and its principality,

[b] Herod. l. 1. c. 192.

(2) Strabo, lib. 16. p. 737.

(3) ——— p. 739.

"which

CHAPTER FOURTH.

" which the Perſians call a ſatrapy, is far the beſt of all the " provinces."

[a] Herod. l. 1. c. 178, &c.

XXXIV. Babylon [a] was a ſquare city of 120 furlongs, or 15 miles on every ſide, compaſſed firſt with a broad and deep ditch, and then with a wall fifty cubits thick, and two hundred high. Euphrates flowed through the middle of it ſouthward, a few leagues on this ſide Tigris: and in the middle of one half, weſtward, ſtood the king's new palace, built by Nebuchadnezzar; and in the middle of the other half ſtood the temple of Belus, with the old palace between that temple and the river. This old palace was built by the Aſſyrians, according to [b] Iſaiah, and by conſequence by Pul and his ſon Nabonaſſar, as above: " they " founded the city for the Arabians, and ſet up the towers there- " of, and raiſed the palaces thereof." And at that time Sabacon, the Ethiopian, invaded Egypt, and made great multitudes of Egyptians fly from him into Chaldæa, and carry thither their aſtronomy, and aſtrology, and architecture, and the form of their year, which they preſerved there in the æra of Nabonaſſar. For the practice of obſerving the ſtars began in Egypt in the days of Ammon, as above; and was propagated from thence in the reign of his ſon Seſac into Afric, Europe, and Aſia, by conqueſt; and then Atlas formed the ſphere of the Libyans, and Chiron that of the Greeks, and the Chaldæans alſo made a ſphere of their own. But aſtrology was invented in Egypt by Nichepſos, or Nicepſos, one of the kings of the lower Egypt, and Petoſiris, his prieſt, a little before the days of Sabacon, and propagated thence into Chaldæa, where Zoroaſter, the legiſlator of the Magi, met with it. So Paulinus:

[b] Iſa. xxiii. 13.

" *Quique magos docuit myſteria vana Necepſos.*"

[c] Diod. l. 1. p. 51.

And Diodorus [c], " they ſay that the Chaldæans in Babylonia are " colonies of the Egyptians, and being taught by the prieſts of " Egypt, became famous for aſtrology." By the influence of the ſame colonies, the temple of Jupiter Belus in Babylon ſeems to have been erected in the form of the Egyptian pyramids. For [d] this temple was a ſolid tower or pyramid a furlong ſquare, and a furlong high, with ſeven retractions; which made it appear like eight

[d] Herod. l. 1. c. 181.

BABYLONIANS AND MEDES.

eight towers ſtanding upon one another, and growing leſs and leſs to the top. And in the eighth tower was a temple with a bed and a golden table, kept by a woman, after the manner of the Egyptians in the temple of Jupiter Ammon at Thebes; and above the temple was a place for obſerving the ſtars: they went up to the top of it by ſteps on the outſide, and the bottom was compaſſed with a court, and the court with a building two furlongs in length on every ſide.

XXXV. The Babylonians were extremely addicted to ſorcery, inchantments, aſtrology, and divinations (Iſa. xlvii. 9, 12, 13. Dan. ii. 2. and v. 11.) and to the worſhip of idols (Jer. l. 2, 40.) and to feaſting, wine and women. " *Nihil urbis ejus corruptius* " *moribus, nec ad irritandas illiciendaſque immodicas voluptates in-* " *ſtructius. Liberos conjugeſque cum hoſpitibus ſtupro coire, modò* " *pretium flagitii detur, parentes maritique patiuntur. Convivales* " *ludi totâ Perſide regibus purpuratiſque cordi ſunt: Babylonii maxi-* " *mè in vinum, & quæ ebrietatem ſequuntur, effuſi ſunt. Fœmina-* " *rum convivia ineuntium, in principio modeſtus eſt habitus; dein* " *ſumma quæque amicula exuunt, paulatimque pudorem profanant:* " *ad ultimum, bonos auribus ſit, ima corporum velamenta projici-* " *unt. Nec meretricum hoc dedecus eſt, ſed matronarum virgi-* " *numque; apud quas comitas habetur vulgati corporis vilitas.*" Q. Curtius, lib. 5. cap. 1. And this lewdneſs of their women, coloured over with the name of civility, was encouraged even by their religion. For it was the cuſtom for their women, once in their life, to ſit in the temple of Venus for the uſe of ſtrangers (1); which temple they called *Succoth Benoth* (2), the temple of women. And when any woman was once ſat there, ſhe was not to depart till ſome ſtranger threw money into her boſom, took her away, and lay with her; and the money being for ſacred uſes, ſhe was obliged to accept of it how little ſoever, and follow the ſtranger.

XXXVI. The Perſians being conquered by the Medes about the middle of the reign of Zedekiah, continued in ſubjection under them till the end of the reign of Darius the Mede: and

§ XXXV.

(1) Herodot. lib. 1. c. 199.

(2) Vid. Selden De Dis Syris Syntagm. 2.

CHAPTER FOURTH.

Cyrus, who was of the royal family of the Perſians, might be Satrapa of Perſia, and command a body of their forces under Darius; but was not yet an abſolute and independant king. But after the taking of Babylon, when he had a victorious army at his devotion, and Darius was returned from Babylon into Media, he revolted from Darius, in conjunction with the Perſians under him [a]; they being incited thereunto by Harpagus, a Mede, whom Xenophon calls Artagerſes and Atabazus, and who had aſſiſted Cyrus in conquering Croeſus and Aſia Minor, and had been injured by Darius (1). Harpagus was ſent by Darius with an army againſt Cyrus; and in the midſt of a battle revolted with part of the army to Cyrus (2). Darius got up a freſh army (3), and the next year the two armies fought again. This laſt battle was fought at Paſargadæ in Perſia, according to [b] Strabo; and there Darius was beaten and taken priſoner by Cyrus (4), and the monarchy was by this victory tranſlated to the Perſians. The laſt king of the Medes is by Xenophon called Cyaxeres; and by Herodotus, Aſtyages, the father of Mandane. But theſe kings were dead before; and Daniel lets us know that Darius was the true name of the laſt king; and Herodotus [c], that the laſt king was conquered by Cyrus in the manner above deſcribed; and the Darics coined by the laſt king teſtify, that his name was Darius.

[a] Suidas in Ἀστυάγης. Herod. l. 1. c. 123, &c.

[b] Strabo, l. 15. p. 730.

[c] Herod. l. 1. c. 127, &c.

XXXVII. This victory over Darius was about two years after the taking of Babylon. For the reign of Nabonnedus, the laſt king of the Chaldees, whom Joſephus calls Naboandel and Belſhazzar, ended in the year of Nabonaſſar 210, nine years before the death of Cyrus, according to the canon. But after the tranſlation of the kingdom of the Medes to the Perſians, Cyrus reigned only ſeven years, according to [d] Xenophon; and ſpending the ſeven winter months yearly at Babylon, the three ſpring months yearly at Suſa, and the two ſummer months at Ecbatane, he came the ſeventh time into Perſia, and died there in the ſpring, and was buried at Paſargadæ (1). By the canon, and the common

[d] Cyrop. l. 8. p. 233.

§ XXXVI.

(1) Herodot. lib. 1. c. 119.
(2) ——— c. 127.
(3) ——— c. 128.
(4) ——— c. 128—130.

BABYLONIANS AND MEDES.

mon conſent of all chronologers, he died in the year of Nabonaſſar 219; and therefore conquered Darius in the year of Nabonaſſar 212, ſeventy and two years before the deſtruction of Nineveh (2); and beat him the firſt time in the year of Nabonaſſar 211, and revolted from him, and became king of the Perſians either the ſame year, or in the end of the year before. At his death he was ſeventy years old, according to Herodotus; and therefore he was born in the year of Nabonaſſar 149; his mother Mandane being the ſiſter of Cyaxeres, at that time a young man, and alſo the ſiſter of Amyite, the wife of Nebuchadnezzar; and his father Cambyſes being of the old royal family of the Perſians.

§ XXXVII.

(1) Strabo, lib. 15. p. 730.
(2) See chap. 3. § XX.

CHAP. V.

A DESCRIPTION OF THE TEMPLE OF SOLOMON.

CHAPTER FIFTH. See Plate I and II.

THE temple of Solomon being deſtroyed by the Babyloni-
ans, it may not be amiſs here to give a deſcription of that
edifice.

[a] Ezek. xli. 13, 14. [b] Ezek. xl. 47.

This [a] temple looked eaſtward, and ſtood in a ſquare area,
called the Separate Place: and [b] before it ſtood the Altar, in the
center of another ſquare area, called the Inner Court, or Court
of the Prieſts: and theſe two ſquare areas, being parted only by
a marble rail, made an area 200 cubits long from weſt to eaſt,
and 100 cubits broad. This area was compaſſed on the weſt
with a wall; and [c] on the other three ſides with a pavement 50
cubits broad, upon which ſtood the buildings for the prieſts, with
cloyſters under them: and the pavement was faced on the inſide
with a marble rail before the cloyſters: the whole made an area
250 cubits long from weſt to eaſt, and 200 broad, and was com-
paſſed with an outward court, called alſo the Great Court, or
Court of the People, [d] which was 100 cubits broad on every
ſide; for there were but two courts built by Solomon: and the
outward court was about four cubits lower than the inward, and
was compaſſed on the weſt with a wall, and on the other three
ſides [e] with a pavement 50 cubits broad, upon which ſtood the
buildings for the people. All this was the [f] Sanctuary, and
made a ſquare area 500 cubits long, and 500 broad, and was
[f] compaſſed with a walk, called the Mountain of the Houſe:
and this walk being 50 cubits broad, was compaſſed with a wall
ſix cubits broad, and ſix high, and 600 long on every ſide: and
the

[c] Ezek. xl. 29, 33, 36.

[d] Ezek. xl. 19, 23, 27. 2 King. xxi. 5. 2 Chron. iv. 9.

[e] Ezek. xl. 15, 17, 21. 2 Chron. xxviii. 12.

[f] Ezek. xl. 5. xlii. 20, and xlv. 2.

the cubit was about 21½, or almoſt 22 inches of the Engliſh foot, being the ſacred cubit of the Jews; which was an hand-breadth, or the ſixth part of its length, bigger than the common cubit. TEMPLE OF SOLOMON.

II. The Altar ſtood in the center of the whole; and in the buildings of [a] both courts over againſt the middle of the Altar, eaſtward, ſouthward, and northward, were gates [b] 25 cubits broad between the buildings, and 40 long; with porches of ten cubits more, looking towards the Altar Court, which made the whole length of the gates 50 cubits croſs the pavements. Every gate had two doors, one at either end, ten cubits wide, and twenty high, with poſts and threſholds ſix cubits broad. Within the gates was an area 28 cubits long between the threſholds, and 13 cubits wide: and on either ſide of this area were three poſts, each ſix cubits ſquare, and twenty high, with arches five cubits wide between them: all which poſts and arches filled the 28 cubits in length between the threſholds; and their breadth being added to the 13 cubits, made the whole breadth of the gates 25 cubits. Theſe poſts were hollow, and had rooms in them with narrow windows for the porters, and a ſtep before them a cubit broad: and the walls of the porches being ſix cubits thick, were alſo hollow for ſeveral uſes. At the eaſt gate of the Peoples' Court, called the King's Gate, [c] were ſix porters; at the ſouth gate, were four; and at the north gate, were four. The people [d] went in and out at the ſouth and north gates: the [e] eaſt gate was opened only for the king, and in this gate he ate the ſacrifices. There were alſo four gates or doors in the weſtern wall of the Mountain of the Houſe: of theſe [f] the moſt northern, called Shallecheth, or the Gate of the Cauſey, led to the king's palace; the valley between being filled up with a cauſey. The next gate, called Parbar, led to the ſuburbs Millo. The third and fourth gates, called Aſurpim, led the one to Millo, the other to the city of Jeruſalem; there being ſteps down into the valley, and up again into the city. At the gate Shallecheth were four porters; at the other three gates were ſix porters, two at each gate: the houſe of the porters who had the charge of the north gate of the People's Court, had alſo the charge of the gates Shal-

[a] 2 King. xxi. 5. [b] Ezek. xl.

Plate I.

[c] 1 Chron. xxvi. 17. [d] Ezek. xlvi. 8, 9. [e] Ezek. xliv. 2, 3.

[f] 1 Chron. xxvi. 15—18.

CHAPTER FIFTH.

Shallecheth and Parbar; and the houſe of the porters who had the charge of the ſouth gate of the People's Court, had alſo the charge of the other two gates called Aſuppim.

III. They came through the four weſtern gates into the Mountain of the Houſe; and [a] went up from the Mountain of the Houſe to the gates of the People's Court by ſeven ſteps, and from the People's Court to the gates of the Prieſt's Court by eight ſteps: and the arches in the ſides of the gates of both courts led into cloyſters [b] under a double building, ſupported by three rows of marble pillars, which butted directly upon the middles of the ſquare poſts, and ran along from thence upon the pavements towards the corners of the courts. The axes of the pillars in the middle row being eleven cubits diſtant from the axes of the pillars in the other two rows on either hand; and the building joining to the ſides of the gates: the pillars were three cubits in diameter below, and their baſes four cubits and an half ſquare. The gates and buildings of both courts were alike, and [c] faced their courts: the cloyſters of all the buildings, and the porches of all the gates looking towards the Altar. The row of pillars on the backſides of the cloyſters adhered to marble walls, which bounded the cloyſters and ſupported the buildings. Theſe buildings were three ſtories high above the cloyſters, and [d] were ſupported in each of thoſe ſtories by a row of cedar beams, or pillars of cedar, ſtanding above the middle row of the marble pillars: the buildings on either ſide of every gate of the People's Court being $187\frac{1}{2}$ cubits long, were diſtinguiſhed into five chambers on a floor, running in length from the gates to the corners of the courts: there [e] being in all thirty chambers in a ſtory, where the people ate the ſacrifices, or thirty exhedras, each of which contained three chambers, a lower, a middle, and an upper. Every exhedra was $37\frac{1}{2}$ cubits long, being ſupported by four pillars in each row, whoſe baſes were $4\frac{1}{2}$ cubits ſquare, and the diſtances between their baſes $6\frac{1}{2}$ cubits, and the diſtances between the axes of the pillars eleven cubits: and where two exhedras joined, there the baſes of their pillars joined; the axes of thoſe two pillars being only $4\frac{1}{2}$ cubits diſtant from one another: and perhaps for ſtrengthening the building, the ſpace between

[a] Ezek. xl. 22, 26, 31, 34, 37.

Plate II and III.

[b] 1 King. vi. 36. & vii. 12. Ezek. xl. 17, 18.

[c] Ezek. xl. 19. 31 34, 37.

Plate I.

[d] 1 King. vi. 36, & vii. 12.

[e] Ezek. xl. 17.

Plate III.

between the axes of theſe two pillars in the front was filled up with a marble column $4\frac{1}{2}$ cubits ſquare, the two pillars ſtanding half out on either ſide of the ſquare column. At the ends of theſe buildings, [a] in the four corners of the People's Court, were little courts fifty cubits ſquare on the outſide of their walls, and forty on the inſide thereof, for ſtair-caſes to the buildings, and kitchins to bake and boil the ſacrifices for the people; the kitchin being thirty cubits broad, and the ſtair-caſe ten. The buildings on either ſide of the gates of the Prieſts Court were alſo $37\frac{1}{2}$ cubits long, and contained each of them one great chamber in a ſtory, ſubdivided into ſmaller rooms, for the great officers of the temple, and princes of the prieſts. And in the ſouth-eaſt and north-eaſt corners of this court, at the ends of the buildings, were kitchins and ſtair-caſes for the great officers; and perhaps rooms for laying up wood for the Altar.

TEMPLE OF SOLOMON.

Plate I and II.

[a] Ezek. xlvi. 21, 22.

IV. In the eaſtern gate of the People's Court ſat a court of judicature, compoſed of 23 elders. The eaſtern gate of the Prieſts Court, with the buildings on either ſide, was for the high-prieſt, and his deputy the Sagan; and for the Sanhedrim, or Supreme Court of Judicature, compoſed of 70 elders. [b] The building or exhedra on the eaſtern ſide of the ſouthern gate, was for the prieſts who had the overſight of the charge of the Sanctuary with its treaſuries: and theſe were, firſt, two Catholikim; who were high-treaſurers and ſecretaries to the high-prieſt; and examined, ſtated, and prepared all acts and accounts to be ſigned and ſealed by him: then ſeven Amarcholim; who kept the keys of the ſeven locks of every gate of the Sanctuary, and thoſe alſo of the treaſuries; and had the overſight, direction, and appointment of all things in the Sanctuary: then three or more Giſbarim, or under-treaſurers, or receivers; who kept the holy veſſels, and the publick money, and received or diſpoſed of ſuch ſums as were brought in for the ſervice of the temple, and accounted for the ſame. All theſe, with the high-prieſt, compoſed the ſupreme council for managing the affairs of the temple.

[b] Ezek. xl. 45.

V. The ſacrifices [c] were killed on the northern ſide of the Altar, and flea'd, cut in pieces and ſalted in the northern gate of the temple; and therefore the building or exhedra on the eaſtern

[c] Ezek. xl. 39, 41, 42, 46.

ſide

CHAPTER FIFTH.

side of this gate, was for the priests who had the oversight of the charge of the Altar, and daily service: and these officers were, He that received money of the people for purchasing things for the sacrifices, and gave out thickets for the same; He that, upon sight of the tickets, delivered the wine, flower, and oil purchased; He that was over the lots, whereby every priest attending on the Altar had his duty assigned; He that, upon sight of the tickets, delivered out the doves and pigeons purchased; He that administered physic to the priests attending; He that was over the waters; He that was over the times, and did the duty of a crier, calling the priests or Levites to attend in their ministeries; He that opened the gates in the morning to begin the service, and shut them in the evening when the service was done, and for that end received the keys of the Amarcholim, and returned them when he had done his duty; He that visited the night-watches; He that by a cymbal called the Levites to their stations for singing; He that appointed the hymns and set the tune; and he that took care of the shew-bread. There were also officers who took care of the perfume, the veil, and the wardrobe of the priests.

VI. The exhedra on the western side of the south gate, and that on the western side of the north gate, were for the princes of the four and twenty courses of the priests, one exhedra for twelve of the princes, and the other exhedra for the other twelve. And upon the pavement on either side of the Separate Place [a] were other buildings without cloysters, for the four and twenty courses of the priests to eat the sacrifices, and lay up their garments and the most holy things: each pavement being 100 cubits long, and 50 broad, had buildings on either side of it twenty cubits broad, with a walk or alley ten cubits broad between them. The building which bordered upon the Separate Place was an hundred cubits long, and that next the People's Court but fifty; the other fifty cubits westward [b] being for a stair-case and kitchin. These buildings [c] were three stories high; and the middle story was narrower in the front than the lower story, and the upper story still narrower, to make room for galleries; for they had galleries before them, and under the galleries were closets for laying

Plate II.

[a] Ezek. xlii. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 14.

[b] Ezek. xlvi. 1, 20.

[c] Ezek. xlii. 5, 6.

laying up the holy things, and the garments of the priests; and these galleries were towards the walk or alley, which ran between the buildings. TEMPLE OF SOLOMON.

VII. They went up from the Priests Court to the porch of the temple by ten steps: and the [a] house of the temple was twenty cubits broad, and sixty long within; or thirty broad, and seventy long, including the walls; or seventy cubits broad, and ninety long, including a building of treasure-chambers, which was twenty cubits broad on three sides of the house; and if the porch be also included, the temple was [b] an hundred cubits long. The treasure-chambers were built of cedar, between the wall of the temple, and another wall without: they were built [c] in two rows three stories high, and opened door against door into a walk or gallery which ran along between them, and was five cubits broad in every story; so that the breadth of the chambers on either side of the gallery, including the breadth of the wall to which they adjoined, was ten cubits; and the whole breadth of the gallery and chambers, and both walls, was five and twenty cubits: the chambers [d] were five cubits broad in the lower story, six broad in the middle story, and seven broad in the upper story; for the wall of the temple was built with retractions of a cubit, to rest the timber upon. Ezekiel represents the chambers a cubit narrower, and the walls a cubit thicker than they were in Solomon's temple. There were [e] thirty chambers in a story; in all ninety chambers; and they were five cubits high in every story. The [f] porch of the temple was 120 cubits high, and its length from south to north equalled the breadth of the house. The house was three stories high, which made the height of the Holy Place three times thirty cubits, and that of the Most Holy three times twenty. The upper rooms were treasure-chambers. They [g] went up to the middle chamber by winding stairs in the southern shoulder of the house, and from the middle into the upper.

[a] 1 King. vi. 2. Ezek. xli. 2, 4, 12, 13, 14.

[b] 1 King. vi. 3. Ezek. xli. 13.

[c] Ezek. xli. 6, 11.

[d] 1 King. vi. 6.

[e] Ezek. xli. 6.

[f] 2 Chron. iii. 4.

[g] 1 King. vi. 8.

VIII. Some time after this temple was built, the Jews [h] added a New Court on the eastern side of the Priests Court, before the King's Gate; and therein built [i] a covert for the sabbath. This court was not measured by Ezekiel; but the dimensions thereof may

[h] 2 Chron. xx. 5.

[i] 2 King. xvi. 18.

CHAPTER FIFTH.

may be gathered from those of the Womens' Court in the second temple, built after the example thereof. For when Nebuchadnezzar had destroyed the first temple, Zerubbabel, by the commissions of Cyrus and Darius, built another upon the same area, excepting the Outward Court, which was left open to the Gentiles: and this temple [a] was sixty cubits long, and sixty broad, being only two stories in height, and having only one row of treasure-chambers about it. And on either side of the Priests Court were double buildings for the priests, built upon three rows of marble pillars in the lower story, with a row of cedar beams or pillars in the stories above: and the cloyster in the lower story looked towards the Priests Court: and the Separate Place, and Priests Court, with their buildings on the north and south sides, and the Womens' Court, at the east end, took up an area three hundred cubits long, and two hundred broad, the Altar standing in the center of the whole. The Womens' Court was so named, because the women came into it as well as the men. There were galleries for the women; and the men worshipped upon the ground below: and in this state the second temple continued all the reign of the Persians; but afterwards suffered some alterations, especially in the days of Herod.

[a] Ezra vi. 3, 4.

IX. This description of the temple being taken principally from Ezekiel's vision thereof; and the ancient Hebrew copy followed by the Seventy, differing in some readings from the copy followed by the editors of the present Hebrew; I will here subjoin that part of the vision which relates to the Outward Court, as I have deduced it from the present Hebrew, and the version of the Seventy, compared together.

EZEKIEL, chap. xl. ver. 5, &c.

"And behold a wall on the outside of the house round about," Plate I. *at the distance of fifty cubits from it, aabb:* "and in the man's "hand a measuring reed six cubits long by the cubit, and an "hand-breadth: so he measured the breadth of the building, *or* "*wau*, one reed, and the height one reed. Then came he unto Plate III. "the gate *of the house*, which looketh towards the east, and "went

"went up the seven steps thereof, AB, and measured the thresh- TEMPLE OF SOLOMON.
"hold of the gate, CD, which was one reed broad, and the *por-*
"*ters* little chamber, EFG, one reed long, and one reed broad;
"and the arched passage between the little chambers, FH, five
"cubits: and the second little chamber, HIK, a reed broad and
"a reed long; and the arched passage, IL, five cubits: and the
"third little chamber LMN, a reed long and a reed broad: and
"the threshold of the gate next the porch of the gate within,
"OP, one reed: and he measured the porch of the gate, QR,
"eight cubits; and the posts thereof, ST, *st*, two cubits; and
"the porch of the gate, QR, was inward, *or toward the inward*
"*court*; and the little chambers, EF, HI, LM, *ef*, *hi*, *lm*, were
"*outward, or* to the east; three on this side, and three on that
"side *of the gate*. There was one measure of the three, and
"one measure of the posts on this side, and on that side; and
"he measured the breadth of the door of the gate, CC, *or* DD,
"ten cubits; and the breadth of the gate *within between the lit-*
"*tle chambers*, EE *or* FF, thirteen cubits; and the limit, or mar-
"gin, or step before the little chambers, EM, one cubit on this
"side, and the step, *em*, one cubit on the other side; and the
"little chambers, EFG, HIK, LMN, *efg*, *hik*, *lmn*, were six cubits
"*broad* on this side, and six cubits *broad* on that side: and he
"measured *the whole breadth of* the gate, from the *further* wall
"of one little chamber to the *further* wall of another little cham-
"ber: the breadth, GG *or* KK, *or* NN, was twenty and five cu-
"bits *through*; door, FH, against door, *fh*: and he measured
"the posts, EF, HI, *and* LM, *ef*, *hi*, *and lm*, twenty cubits *high*;
"and at the posts there were gates, *or arched passages*, FH, IL,
"*fh*, *il*, round about; and from the *eastern* face of the gate at
"the entrance, CC, to the *western* face of the porch of the gate
"within, TT, were fifty cubits: and there were narrow windows
"to the little chambers, and to the porch within the gate, round
"about, and likewise to the posts; even windows were round
"about within; and upon each post palm-trees.

"Then he brought me into the Outward Court, and lo there
"were chambers, and a pavement with pillars upon it in the
"court round about; thirty chambers *in length* upon the pave- Plate I.

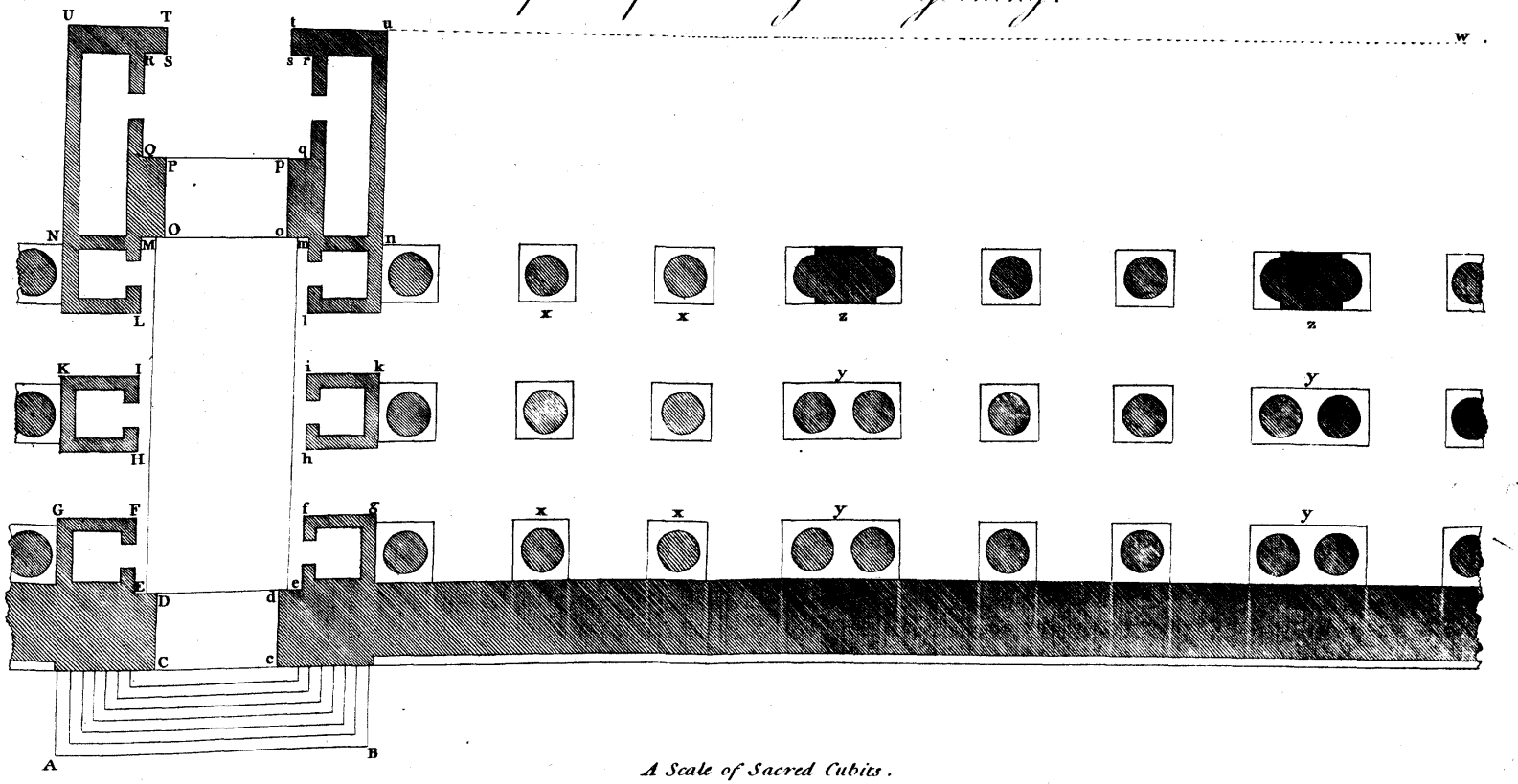
CHAPTER FIFTH.

" ment, ſupported by the pillars, *ten chambers on every ſide, ex-*
" *cept the weſtern:* and the pavement butted upon the ſhoulders
" or ſides of the gates below, *every gate having five chambers or*
" *exhedræ on either ſide.* And he meaſured the breadth *of the*
" *Outward Court,* from the fore-front of the lower gate, to the
" fore-front of the inward court, an hundred cubits weſtward.

" Then he brought me northward, and there was a gate that
" looked towards the north; he meaſured the length thereof,
" and the breadth thereof, and the little chambers thereof, three
" on this ſide, and three on that ſide; and the poſts thereof, and
" the porch thereof, and it was according to the meaſures of the
" firſt gate; its length was fifty cubits, and its breadth was five
" and twenty: and the windows thereof, and the porch and the
" palm-trees thereof *were* according to the meaſures of the gate
" which looked to the eaſt; and they went up to it by ſeven
" ſteps: and its porch was before them, *that is inward.* And
" there was a gate of the inward court over againſt *this* gate of
" the north, as *in the gates* to the eaſtward: and he meaſured
" from gate to gate an hundred cubits."

CHAP.

A Particular Description of one of the Gates of the Peoples Court, with part of the Cloyster adjoining.



A Scale of Sacred Cubits.

10 20 30 40 50 60

t.u.w. The inner Margin of the Pavement compassing three sides of the Peoples Court. x.xx.&c. The Pillars of the Cloyster supporting the Buildings for the People.
y.y.y.y. Double Pillars where two Exhedræ joined, and whose interstices in the front z.z. were filled up with a square Column of Marble.

Note. The preceding letters of this Plate refer to the description in page

A Description of the Inner Court — and — Buildings for the Priests in Solomons Temple.

A.B.C.D. *The Separate Place.*

A.B.E.F. *The Inner Court, or Court of the Priests, parted from the Separate Place, and Pavement on the other three sides, by a marble rail.*

G. *The Altar.*

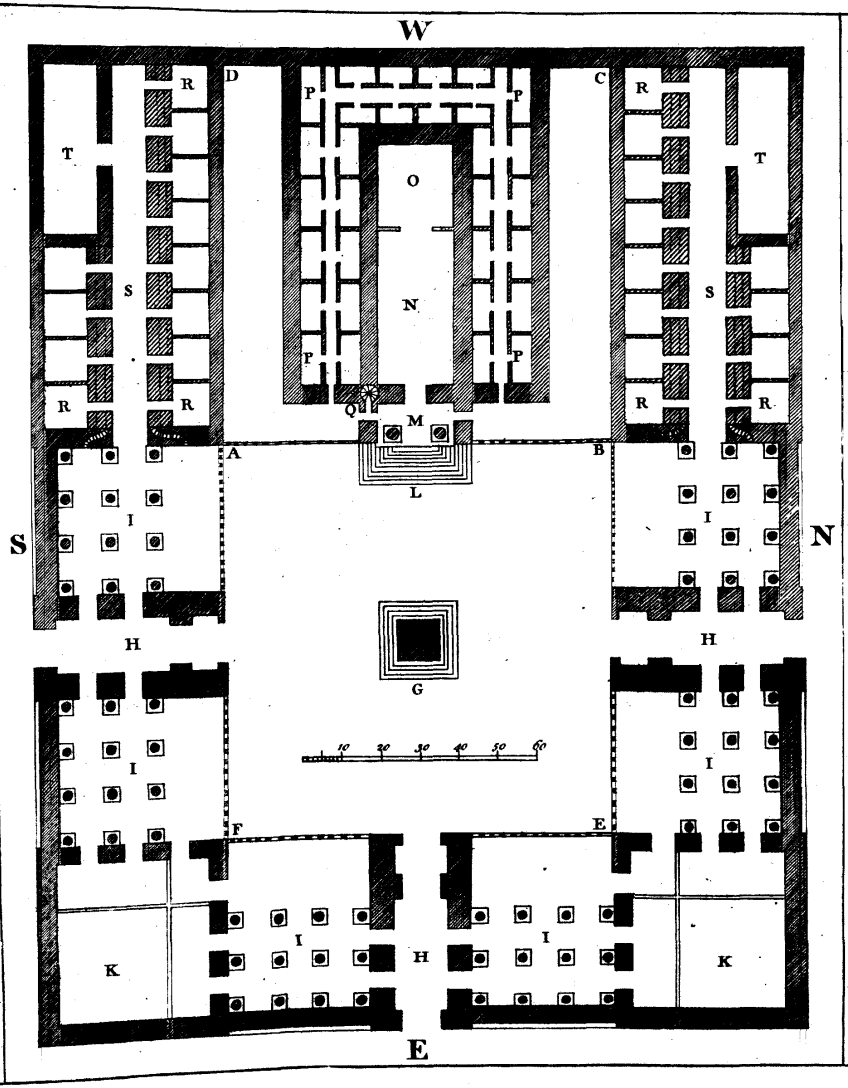
H.H.H. *The East, South, and North Gates of the Priests Court.*

I.I.I. &c. — *The Cloysters supporting the Buildings for the Priests.*

K.K. *Two Courts in which were Stair Cases and Kitchins for the Priests.*

L. *Ten Steps to the Porch of the Temple.*

M. *The Porch of the Temple.*



N. *The Holy Place.*

O. *The most Holy Place.*

P.P.P.P. *Thirty Treasure Chambers, in two rows, opening into a gallery, door against door, and compassing three sides of the Holy and most Holy Places.*

Q. *The Stairs leading to the Middle Chamber.*

R.R.R.R. &c. *The buildings for the four and twenty Courses of Priests, upon the Pavement on either side of the Separate Place, three Stories high without Cloysters, but the upper Stories narrower than the lower, to make room for Galleries before them. There were 24 Chambers in each Story and they opened into a walk or alley, S.S. between the Buildings.*

T.T. *Two Courts in which were Kitchins for the Priests of the twenty four Courses.*

A Description of THE TEMPLE OF SOLOMON.

AB.CD. *The Separate Place in which stood the Temple.*

A.B.E.F. *The Court of the Priests.*

G. *The Altar.*

D.HL.KI.C.E.F.D. *A Pavement compassing three sides of the forementioned Courts, and upon which stood the Buildings for the Priests, with Cloysters under them.*

M.N.O.P. *The Court of the People.*

M.Q.T.S.R.N. *A Pavement compassing three sides of the Peoples Court, upon which stood the Buildings for the People, with Cloysters under them*

U.X.Y.Z. *The Mountain of the House.*

a.a.b.b. *A Wall enclosing the whole.*

c. *The Gate Shallecheth.*

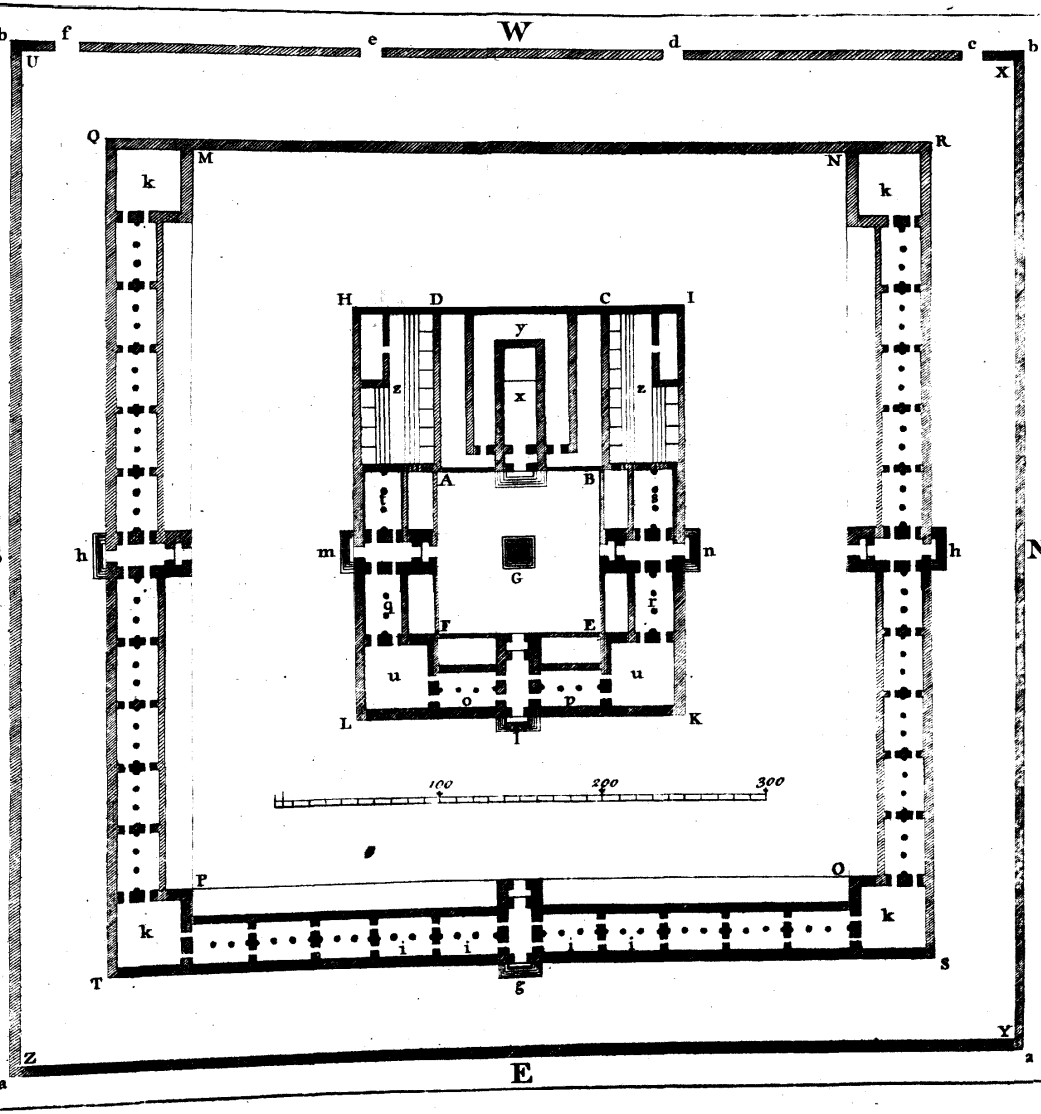
d. *The Gate Parbar.*

e.f. *The two Gates Assupim.*

g. *The East Gate of the Peoples Court, called the Kings Gate.*

h.h. *The North and South Gates of the same Courts.*

i.i.i.i. *The Chambers over the Cloysters of the Peoples Court, where the People ate the Sacrifices; 30 Chambers in each Story.*



k.k.k.k. *Four little Courts serving for Stair-Cases and Kitchins for the People.*

l. *The Eastern Gate of the Priests Court, over which sate the Sanhedrim.*

m. *The Southern Gate of the Priests Court.*

n. *The Northern Gate of the same Court, where the Sacrifices where flea'd, &c.*

o.p.q.r.s.t. *The Buildings over the Cloysters for the Priests, viz. six large Chambers (subdivided) in each Story whereof o. and p. were for the High Priest and Sagan. q. for the Overseers of the Sanctuary and Treasury. r. for the Overseers of the Altar and Sacrifice: and s. & t. for the Princes of the twenty-four Courses of Priests.*

u.u. *Two Courts in which were Stair-Cases and Kitchins for the Priests.*

x. *The House or Temple which (together with the Treasure Chambers y. and Buildings z.z. on each side of the Separate Place) is more particularly described in the second Plate.*

A Description of THE TEMPLE OF SOLOMON.

AB.CD. *The Separate Place in which stood the Temple.*

AB.E.F. *The Court of the Priests.*

G. *The Altar.*

D.H.L.K.I.C.E.F.D. *A Pavement compassing three sides of the foremention'd Courts, and upon which stood the Buildings for the Priests, with Cloysters under them.*

MNOP. *The Court of the People.*

MQ.T.S.R.N. *A Pavement compassing three sides of the Peoples Court, upon which stood the Buildings for the People, with Cloysters under them*

UXY.Z. *The Mountain of the House.*

aabb. *A Wall enclosing the whole.*

c. *The Gate Shallecheth.*

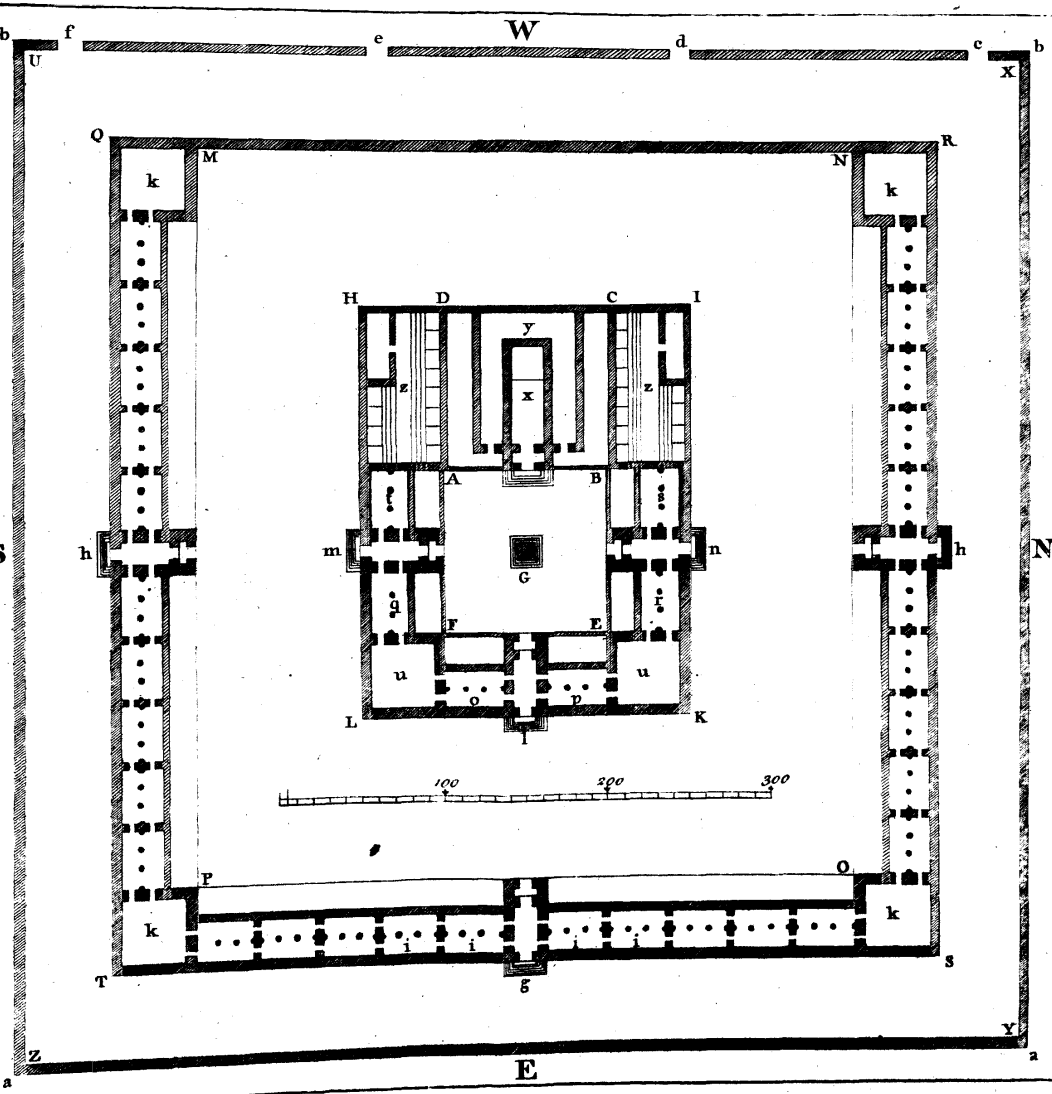
d. *The Gate Parbar.*

ef. *The two Gates Assupim.*

g. *The East Gate of the Peoples Court, called the Kings Gate.*

hh. *The North and South Gates of the same Courts.*

iiii. *The Chambers over the Cloysters of the Peoples Court, where the People ate the Sacrifices; 30 Chambers in each Story.*



k.k.k.k. *Four little Courts serving for Stair-Cases and Kitchins for the People.*

l. *The Eastern Gate of the Priests Court, over which sate the Sanhedrim.*

m. *The Southern Gate of the Priests Court.*

n. *The Northern Gate of the same Court, where the Sacrifices where flea'd, &c.*

o.p.q.r.s.t. *The Buildings over the Cloysters for the Priests, viz. six large Chambers (subdivided) in each Story whereof o. and p. were for the High Priest and Sagan. q. for the Overseers of the Sanctuary and Treasury. r. for the Overseers of the Altar and Sacrifice: and s. & t. for the Princes of the twenty-four Courses of Priests.*

u.u. *Two Courts in which were Stair-Cases and Kitchins for the Priests.*

x. *The House or Temple which (together with the Treasure Chambers y. and Buildings z.z. on each side of the Separate Place) is more particularly described in the second Plate.*

A Description of the Inner Court — and — Buildings for the Priests in Solomons Temple.

A.B.C.D. *The Separate Place.*

A.B.E.F. *The Inner Court, or Court of the Priests, parted from the Separate Place, and Pavement on the other three sides, by a marble rail.*

G. *The Altar.*

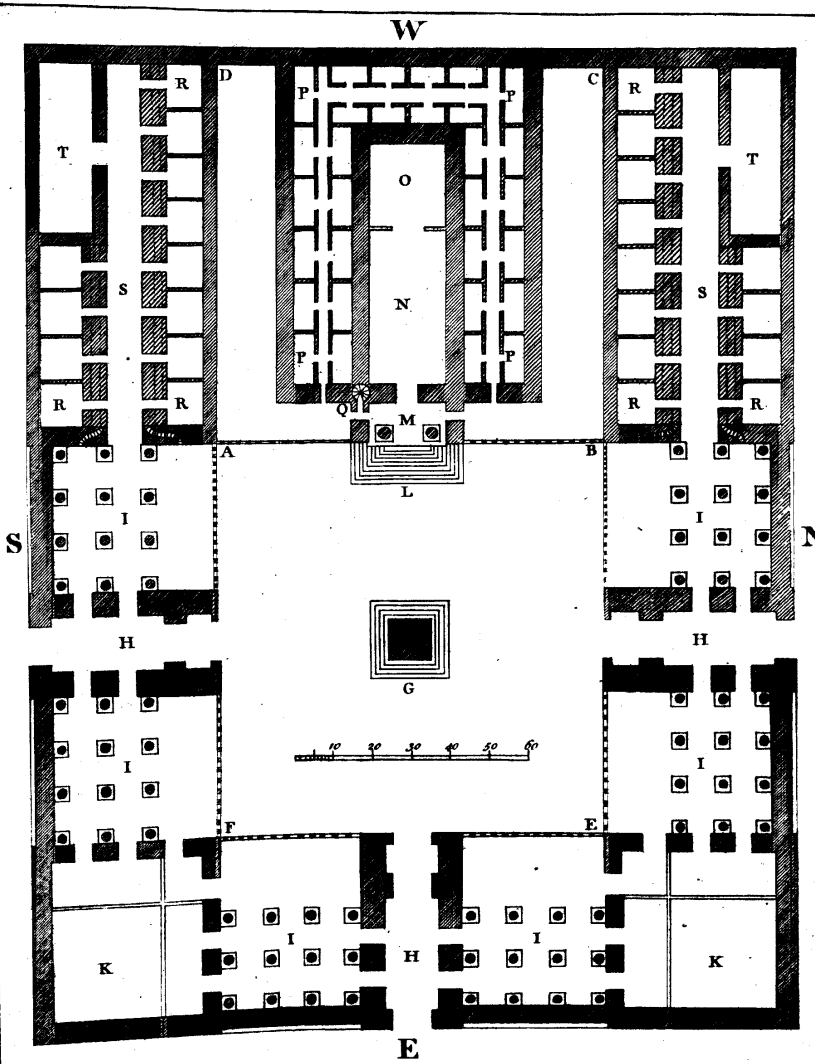
H.H.H. *The East, South, and North Gates of the Priests Court.*

I.I.I. &c. — *The Cloysters supporting the Buildings for the Priests.*

K.K. *Two Courts in which were Stair Cases and Kitchins for the Priests.*

L. *Ten Steps to the Porch of the Temple.*

M. *The Porch of the Temple.*



N. *The Holy Place.*

O. *The most Holy Place.*

P.P.P.P. *Thirty Treasure Chambers, in two rows, opening into a gallery, door against door, and compassing three sides of the Holy and most Holy Places.*

Q. *The Stairs leading to the Middle Chamber.*

R.R.R.R. &c. *The buildings for the four and twenty Courses of Priests, upon the Pavement on either side of the Separate Place, three Stories high without Cloysters, but the upper Stories narrower than the lower, to make room for Galleries before them. There were 24 Chambers in each Story and they opened into a walk or alley, S.S. between the Buildings.*

T.T. *Two Courts in which were Kitchins for the Priests of the twenty four Courses.*

CHAP. VI.

OF THE EMPIRE OF THE PERSIANS.

CYRUS having tranſlated the monarchy to the Perſians, and reigned ſeven years, was ſucceeded by his ſon Cambyſes; who reigned ſeven years and five months (1), and in the three laſt years of his reign ſubdued Egypt. He was ſucceeded by Mardus, or Smerdis the Magus, who feigned himſelf to be Smerdis the brother of Cambyſes (1). PERSIANS.

II. Smerdis reigned ſeven months, and in the eighth month being diſcovered (2), was ſlain, with a great number of the Magi (3); ſo the Perſians called their prieſts, and in memory of this kept an anniverſary day, which they called, The Slaughter of the Magi (3). Then reigned Maraphius and Artaphernes a few days (3); and after them Darius, the ſon of Hyſtaſpes, the ſon of Arſamenes (4), of the family of Achæmenes, a Perſian, being choſen king by the neighing of his horſe (5): before he reigned his [a] name was Ochus. He ſeems on this occaſion to have reformed the conſtitution of the Magi, making his father Hyſtaſpes their maſter, or *Archimagus*. For Porphyrius tells us, [b] that "the Magi were a ſort of men ſo venerable amongſt the "Perſians, that Darius, the ſon of Hyſtaſpes, wrote on the mo- [a] Valer. Max. l. 9. c. 2. [b] Porph. de Abſtinentia, lib. 4.

CHAP. VI. § I.

(1) Herodot. lib. 3. c. 66.

§ II.

(1) Herodot. lib. 3. c. 67, 68. (2) ——— c. 79. (3) Æſchyl. Perſæ. lin. 780.
(4) Or Arſames, the ſon of Armnes, the ſon of Teiſpeus, the ſon of Cyrus, the ſon of Cambyſes, the ſon of Teiſpeus, the ſon of Achæmenes. Herodot. lib. 7. c. 11.
(5) Herodot. lib. 3. c. 84—88.

"nument

CHAPTER SIXTH.

" nument of his father," amongſt other things, " that he had " been the maſter of the Magi." In this reformation of the Magi, Hyſtaſpes was aſſiſted by Zoroaſtres. So Agathias; " the " Perſians at this day ſay ſimply, that Zoroaſtres lived under " Hyſtaſpes." And Apuleius; *Pythagoram, aiunt, inter captivos " Cambyſæ Regis [ex Ægypto Babylonem abductos] doctores habuiſſe " Perſarum Magos, & præcipue Zoroaſtrem, omnis divini arcani " antiſtitem* (6)." By Zoroaſtres's converſing at Babylon, he ſeems to have borrowed his ſkill from the Chaldæans; for he was ſkilled in aſtronomy, and uſed their year. So Q. Curtius; " [a] *Magi " proximi patrium carmen canebant: Magos trecenti & ſexaginta " quinque juvenes ſequebantur, puniceis amiculis velati, diebus to- " tius anni pares numero.*" And Ammianus; " *Scientiæ multa " ex Chaldæorum arcanis Bactrianus addidit Zoroaſtres.*" From his converſing in ſeveral places he is reckoned a Chaldæan, an Aſſyrian, a Mede, a Perſian, a Bactrian. Suidas calls him [b] a Perſo-Mede; and ſaith, that he was " the moſt ſkilful of aſtro- " nomers, and firſt author of the name of the Magi received " among them." This ſkill in aſtronomy he had doubtleſs from the Chaldæans. But Hyſtaſpes travelled into India, to be inſtructed by the Gymnoſophiſts. And theſe two conjoining their ſkill and authority, inſtituted a new ſet of prieſts or Magi, and inſtructed them in ſuch ceremonies and myſteries of religion and philoſophy as they thought fit to eſtabliſh for the religion and philoſophy of that empire; and theſe inſtructed others, till from a ſmall number they grew to a great multitude. For Suidas tells us, that " Zoroaſtres gave a beginning to the name of the " Magi." And Elmacinus; that " he reformed the religion of " the Perſians, which before was divided into many ſects." And Agathias; that " he introduced the religion of the Magi among " the Perſians, changing their ancient ſacred rites, and bringing " in ſeveral opinions. And Ammianus [c] tells us, " *Magiam eſſe " divinorum incorruptiſſimum cultum; cujus ſcientiæ ſeculis priſcis " multa ex Chaldæorum arcanis Bactrianus addidit Zoroaſtres: de- " inde Hyſtaſpes, Rex prudentiſſimus, Darii pater; qui quum ſupe- " rioris Indiæ ſecreta fidentius penetraret, ad nemoroſam quandam*

[a] Q. Curt. lib. iii. c. 3.

[b] Suidas in Ζωροαστρης.

[c] Ammian. l. 23. c. 6.

(6) Florida XV.

" *venera-*

" *venerat ſolitudinem, cujus tranquillis ſilentiis præcelſa Brachma-* PERSIANS.
" *norum ingenia potiuntur; eorumque monitu rationes mundani " motûs & ſiderum, puroſque ſacrorum ritus, quantum colligere po- " tuit, eruditus, ex his quæ didicit, aliqua ſenſibus Magorum infu- " dit: quæ illi cum diſciplinis præſentiendi futura, per ſuam quiſ- " que progeniem, poſteris ætatibus tradunt. Ex eo per ſæcula " multa ad præſens, unâ eâdemque proſapiâ multitudo creata Deo- " rum cultibus dedicatur. Feruntque, ſi juſtum eſt credi, etiam " ignem cœlitus lapſum apud ſe ſempiternis focuſis cuſtodiri; cujus " portionem exiguam, ut fauſtam, præiſſe quondam Aſiaticis Regibus " dicunt. Hujus originis apud veteres numerus erat exilis; ejuſque " myſteriis Perſicæ poteſtates in faciendis rebus divinis ſolemniter ute- " bantur. Eratque piaculum aquas adire, vel hoſtiam contrectare, " antequam Magus, conceptis precationibus, libamenta diffunderet " præcurſoria. Verùm aucti paullatim, in amplitudinem gentis ſo- " lidæ conceſſerunt & nomen: villaſque inhabitantes, nullâ muro- " rum firmitudine communitas, & legibus ſuis uti permiſſi, reli- " gionis reſpectu ſunt honorati.*" So this empire was at firſt compoſed of many nations, each of which had hitherto its own religion. But now Hyſtaſpes and Zoroaſtres collected what they conceived to be beſt; eſtabliſhed it by law, and taught it to others; and thoſe to others, till their diſciples became numerous enough for the prieſthood of the whole empire: and inſtead of thoſe various old religions, they ſet up their own inſtitutions in the whole empire, much after the manner that Numa contrived and inſtituted the religion of the Romans: and this religion of the Perſian empire was compoſed partly of the inſtitutions of the Chaldæans, in which Zoroaſtres was well ſkilled, and partly of the inſtitutions of the ancient Brachmans; who are ſuppoſed to derive even their name from the Abrahamans, or ſons of Abraham, born of his ſecond wife Keturah, inſtructed by their father in the worſhip of ONE GOD without images, and ſent into the eaſt, where Hyſtaſpes was inſtructed by their ſucceſſors. About the ſame time with Hyſtaſpes and Zoroaſtres lived alſo Oſtanes, another eminent Magus. Pliny places him under Darius Hyſtaſpis (7)

(7) Pliny places him under Xerxes, and ſays, that the moſt accurate writers made Zoroaſter a little older. Lib. 30. c. 1.

and

CHAPTER SIXTH.

and Suidas makes him the follower of Zoroaſtres (8). He came into Greece with Xerxes (9); and ſeems to be the Otanes of Herodotus, who diſcovered Smerdis (10), and formed the conſpiracy againſt him; and for that ſervice was honoured by the conſpirators, and exempt from ſubjection to Darius (11).

III. In the ſacred commentary of the Perſian rites theſe words are aſcribed to Zoroaſtres; "[a] Ὁ Θεος εϛι κεφαλην εχων ἱερακος. "ὁϛος εϛιν ὁ πρωτος, αφθαρτος, αιδιος, αγενητος, αμερης, ανομοιοτατος, "ηνιοχος παντος καλε, αδωροδοκητος, αγαθων αγαθωτατος, φρονιμων φρο- "νιμωτατος· εϛι δε και πατηρ ευνομιας και δικαιοσυνης, αυτοδιδακτος, "φυσικος, και τελειος, και σοφος, και ἱερε φυσικε μονος ευρετης." "Deus "eſt accipitris capite: hic eſt primus, incorruptibilis, æternus, in- "genitus, ſine partibus, omnibus aliis diſſimillimus, moderator om- "nis boni, donis non capiendus, bonorum optimus, prudentium pru- "dentiſſimus, legum æquitatis ac juſtitiæ parens, ipſe ſui doctor, "phyſicus & perfectus & ſapiens & ſacri phyſici unicus inventor." And the ſame was taught by Oſtanes, in his book called Octateuchus. This was the ancient god of the Perſian Magi; and they worſhipped him by keeping a perpetual fire for ſacrifices upon an altar in the center of a round area, compaſſed with a ditch, without any temple in the place, and without paying any worſhip to the dead, or any images. But in a ſhort time they declined from the worſhip of this Eternal, Inviſible God, to worſhip the ſun, and the fire, and dead men, and images, as the Egyptians, Phœnicians, and Chaldæans had done before: and from theſe ſuperſtitions, and the pretending to prognoſtications, the words *Magi* and *Magia*, which ſignify the prieſts and religion of the Perſians, came to be taken in an ill ſenſe.

[a] Euſeb. Præp. Evang. l. 1. c. ult.

IV. Darius, or Darab, began his reign in ſpring, in the ſixteenth year of the empire of the Perſians, anno Nabonaſſ. 227, and reigned 36 years, by the unanimous conſent of all chronologers. In the ſecond year (1) of his reign the Jews began to

(8) Suidas makes him the next to Zoroaſter in the ſucceſſion of Archimagi. See Suid. in voc. Ἀρχιμαγος.
(9) Plin. lib. 30. c. 1. (10) Herodot. lib. 3. c. 68, 69. (11) ——— c. 83.

§ IV.

(1) Ezra iv. 24. v. 1, 2. Hagg. I. 1, 2.
(2) Ezra vi. 15.

build

PERSIANS.

build the temple, by the propheſying of Haggai and Zechariah, and finiſhed it in the ſixth (2). He fought the Greeks at Marathon in October, anno Nabonaſſ. 258 (3), ten years before the battle at Salamis; and died in the fifth year following, in the end of winter, or beginning of ſpring, anno Nabonaſſ. 263. The years of Cambyſes and Darius are determined by three eclipſes of the moon recorded by Ptolemy, ſo that they cannot be diſputed. And by thoſe eclipſes, and the propheſies of Haggai and Zechariah compared together, it is manifeſt that the years of Darius began after the 24th day of the eleventh Jewiſh month, and before the 25th day of April, and by conſequence in March or April.

V. Xerxes, Achſchiroſch, Achſweros, or Oxyares, ſucceeded his father Darius; and ſpent the firſt five years of his reign, and ſomething more, in preparations for his expedition againſt the Greeks: and this expedition was in the time of the olympic games, in the beginning of the firſt year of the 75th olympiad, Callias being Archon at Athens; as all chronologers agree (1). The great number of people which he drew out of Suſa to invade Greece, made Æſchylus the poet ſay [a]:

[a] Æſch. Perſæ. v. 763.

"Το δ' ασυ Σουσων εξεκεινωσεν πεδον."

"It emptied the falling city of Suſa."

The paſſage of his army over the Helleſpont began in the end of the fourth year of the 74th olympiad, that is in June, anno Nabonaſſ. 268, and took up a month; and in autumn, after three months more, on the 16th day of the month Munychion, at the full moon, was the battle at Salamis; and a little after that an eclipſe of the moon, which by the calculation fell on October 2. His firſt year therefore began in ſpring, anno Nabonaſſ. 263, as above. He reigned almoſt twenty one years by the conſent of all writers, and was murdered by Artabanus, captain of his guards; towards the end of winter, anno Nabonaſſ. 284 (2).

(3) See Petav. Doct. Temp. lib 10. c. 23—25. who places each of theſe battles and the death of Darius one year later than Sir Iſaac Newton does.

§ V.

(1) Petav Doct. Temp. lib. 10. c.
(2) Diod Sic. lib. 11. c. 69. p. 278. Petav. Doct. Temp. lib. 13.

CHAPTER SIXTH.

VI. Artabanus reigned ſeven months (1); and upon ſuſpicion of treaſon againſt Xerxes, was ſlain by Artaxerxes Longimanus (2), the ſon of Xerxes.

VII. Artaxerxes began his reign in the autumnal half year, between the 4th and 9th Jewiſh months (Nehem. i. 1. and ii. 1. and v. 14. and Ezra vii. 7, 8, 9); and his 20th year fell in with the 4th year of the 83d olympiad, as Africanus [a] informs us; and therefore his firſt year began within a month or two of the autumnal equinox, anno Nabonaſſ. 284. Thucydides relates, that the news of his death came to Athens in winter, in the ſeventh year of the Peloponneſian war (1), that is ann. 4. olymp. 88. and by the canon he reigned forty-one years, including the reign of his predeceſſor Artabanus, and died about the middle of winter, anno Nabonaſſ. 325 *ineunte*. The Perſians now call him Ardſchir and Bahaman; the oriental Chriſtians, Artahaſcht.

[a] Apud Hieron. in Dan. ix.

VIII. Then reigned Xerxes two months (1); and Sogdian ſeven months (1); and Darius Nothus, the baſtard-ſon of Artaxerxes, nineteen years (1) wanting four or five months. And Darius died in ſummer, a little after the end of the Peloponneſian war, and in the ſame olympic year (2), and by conſequence in May or June, anno Nabonaſſ. 344. The 13th year of his reign was coincident in winter with the 20th of the Peloponneſian war (3); and the years of that war are ſtated by indiſputable characters, and agreed on by all chronologers: the war began in ſpring, ann. 1. olymp. 87, laſted 27 years, and ended April 14. ann. 4. olymp. 93.

IX. The next king was Artaxerxes Mnemon, the ſon of Darius: he reigned forty-ſix years (1), and died anno Nabonaſſ. 390. Then reigned Artaxerxes Ochus twenty-one years (2); Arſes, or Arogus, two years (3); and Darius Codomannus four

§ VI.

(1) Euſeb. in Chron.
(2) Diod. Sic. p. 278.

§ VII.

(1) Lib. 4. c. 50, 51. p. 243.

§ VIII.

(1) Euſeb. in Chron.
(2) Diod. Sic. lib. 13. c. 107, 108. p. 389.
(3) Thucydid. lib. 8. c. 58, 60. p. 499, 500.

years (4), unto the battle of Arbela; whereby the Perſian monarchy was tranſlated to the Greeks, October 2. anno Nabonaſſ. 417 (5); but Darius was not ſlain until a year and ſome months after (6). PERSIANS.

X. I have hitherto ſtated the times of this monarchy out of the Greek and Latin writers. For the Jews knew nothing more of the Babylonian and Medo-Perſian empires, than what they have out of the ſacred books of the Old Teſtament; and therefore own no more kings, nor years of kings, than they can find in thoſe books. The kings they reckon are only Nebuchadnezzar, Evilmerodach, Belſhazzar, Darius the Mede, Cyrus, Ahaſuerus, and Darius the Perſian. This laſt Darius they reckon to be the Artaxerxes, in whoſe reign Ezra and Nehemiah came to Jeruſalem; accounting Artaxerxes a common name of the Perſian kings. Nebuchadnezzar, ſay they, reigned forty-five years, (2 King. xxv. 27); Belſhazzar three years (Dan. viii. 1.) and therefore Evilmerodach twenty-three, to make up the ſeventy years captivity; excluding the firſt year of Nebuchadnezzar, in which they ſay the propheſy of the ſeventy years was given. To Darius the Mede they aſſign one year, or at moſt but two (Dan. ix. 1.) To Cyrus, three years incomplete (Dan. x. 1.) To Ahaſuerus, twelve years till the caſting of Pur (Eſth. iii. 7.) One year more, till the Jews ſmote their enemies (Eſth. ix. 1); and one year more, till Eſther and Mordecai wrote the ſecond letter for the keeping of Purim (Eſth. ix. 29): in all fourteen years. And to Darius the Perſian they allot thirty-two, or rather thirty-ſix years (Nehem. xiii. 6.) So that the Perſian empire, from the building of the temple in the ſecond year of Darius Hyſtaſpis, flouriſhed only thirty-four years, until Alexander the Great overthrew it. Thus the Jews reckon, in their greater chroni-

§ IX.

(1) Sir Iſaac Newton follows Ptolemy's Canon. Diodorus gives this prince 43 years (p. 389). Euſebius in Chron. only 40.
(2) According to the canon: 26 years according to Euſebius.
(3) According to the canon: 4 years according to Euſebius.
(4) According to the canon: 6 according to Euſebius.
(5) Diodorus places the battle of Arbela on the ſecond year of the 112th olympiad, i. e. the 418th of Nabonaſſar, lib. 17. c. 61; and with him Petavius agrees, Doct. Temp. lib. 10. c. 38. and lib. 13.
(6) Diod. Sic. lib. 17. c. 73. p. 601.

CHAPTER SIXTH.

cle, Seder Olam Rabbah. Joſephus, out of the ſacred and other books, reckons only theſe kings of Perſia; Cyrus, Cambyſes, Darius Hyſtaſpis, Xerxes, Artaxerxes, and Darius. And taking this Darius, who was Darius Nothus, to be one and the ſame king with the laſt Darius, whom Alexander the Great overcame; by means of this reckoning he makes Sanballat and Jaddua alive when Alexander the Great overthrew the Perſian empire. Thus all the Jews conclude the Perſian empire with Artaxerxes Longimanus, and Darius Nothus; allowing no more kings of Perſia than they found in the books of Ezra and Nehemiah; and referring to the reigns of this Artaxerxes, and this Darius, whatever they met with in profane hiſtory concerning the following kings of the ſame names: ſo as to take Artaxerxes Longimanus, Artaxerxes Mnemon, aud Artaxerxes Ochus, for one and the ſame Artaxerxes; and Darius Nothus, and Darius Codomannus, for one and the ſame Darius; and Jaddua, and Simeon Juſtus, for one and the ſame high-prieſt. Thoſe Jews who took Herod for the Meſſiah, and were thence called Herodians, ſeem to have grounded their opinion upon the ſeventy weeks of years, which they found between the reign of Cyrus and that of Herod: but afterwards, in applying the propheſy to Theudas, and Judas of Galilee, and at length to Barchochab, they ſeem to have ſhortened the reign of the kingdom of Perſia. Theſe accounts being very imperfect, it was neceſſary to have recourſe to the records of the Greeks and Latines, and to the canon recited by Ptolemy, for ſtating the times of this empire. Which being done, we have a better ground for underſtanding the hiſtory of the Jews, ſet down in the books of Ezra and Nehemiah, and adjuſting it. For this hiſtory having ſuffered by time, wants ſome illuſtration. And firſt I ſhall ſtate the hiſtory of the Jews under Zerubbabel, in the reigns of Cyrus, Cambyſes, and Darius Hyſtaſpis.

XI. This hiſtory is contained partly in the three firſt chapters of the book of Ezra, and firſt five verſes of the fourth; and partly in the book of Nehemiah, from the 5th verſe of the ſeventh chapter to the 9th verſe of the twelfth. For Nehemiah copied all this out of the chronicles of the Jews, written before his

his days; as may appear by reading the place, and conſidering that the prieſts and Levites who ſealed the covenant on the 24th day of the ſeventh month (Nehem. viii. 14. ix. 1. and x.) were the very ſame with thoſe who returned from captivity in the firſt year of Cyrus (Nehem. xii.) and that all thoſe who returned ſealed it. This will be perceived by the following compariſon of their names. PERSIANS.

The prieſts who returned.	The prieſts who ſealed.
Nehemiah. Ezra ii. 2.	Nehemiah.
Serajah.	Serajah.
*	Azariah.
Jeremiah.	Jeremiah.
Ezra.	Ezra. Nehem. viii.
*	Paſhur.
Amariah.	Amariah.
Malluch: or Melicu. Neh. xii. 2, 14.	Malchijah.
Hattuſh.	Hattuſh.
Shechaniah, or Shebaniah. Neh. xii. 3, 14.	Shebaniah.
*	Malluch.
Rehum, or Harim. Ib. 3, 15.	Harim.
Meremoth.	Meremoth.
Iddo.	Obadiah, or Obdia.
*	Daniel.
Ginnetho, or Ginnethon. Neh. xii. 4, 16.	Ginnethon.
*	Baruch.
*	Meſhullam.
Abijah.	Abijah.
Miamin.	Mijamin.
Maadiah.	Maaziah.
Bilgah.	Bilgai.
Shemajah.	Shemajah.
Jeſhua.	Jeſhua.

Binnui,

CHAPTER SIXTH.

Binnui.	Binnui.
Kadmiel.	Kadmiel.
Sherebiah. שרביה.	Shebaniah. שבניה.
Judah, or Hodaviah. Ezra ii. 40. and iii. 9. Ωδουια; Septuag.	Hodijah.

The Levites, Jeſhua, Kadmiel, and Hodaviah, or Judah, here mentioned, are reckoned chief fathers among the people who returned with Zerubbabel, Ezra ii. 40; and they aſſiſted as well in laying the foundation of the temple (Ezra iii. 9.) as in reading the law, and making and ſealing the covenant, Nehem. viii. 7. and ix. 5. and x. 9, 10.

XII. Comparing therefore the books of Ezra and Nehemiah together; the hiſtory of the Jews under Cyrus, Cambyſes, and Darius Hyſtaſpis, is that they returned from captivity under Zerubbabel, in the firſt year of Cyrus, with the holy veſſels, and a commiſſion to build the temple (1); and came to Jeruſalem and Judah, every one to his city, and dwelt in their cities until the ſeventh month (2); and then coming to Jeruſalem, they firſt built the altar (3); and on the firſt day of the ſeventh month began to offer the daily burnt-offerings (4), and read in the book of the law, and they kept a ſolemn faſt, and ſealed a covenant (5); and thenceforward the rulers of the people dwelt at Jeruſalem; and the reſt of the people caſt lots, to dwell one in ten at Jeruſalem, and the reſt in the cities of Judah (6): and in the ſecond year of their coming, in the ſecond month, which was ſix years before the death of Cyrus, they laid the foundation of the temple (7); but "the adverſaries of Judah troubled "them in building, and hired counſellors againſt them all the "days of Cyrus, and longer, even until the reign of Darius "king of Perſia (8)." But in the ſecond year of his reign, by the propheſying of Haggai and Zechariah, they returned to the work (9); and by the help of a new decree from Darius (10), fi-

§ XII.

(1) Ezra i. 2.
(2) —— 6.
(3) Ezra iii. 8.
(4) Ezra iii. 1—5.
(5) Nehem. vii. 5.—— ix. 3.
(6) —— iv. 1—5.
(7) —— xi. 1, 2.
(8) —— 24. v. 1, 2.

niſhed

niſhed it on the third day of the month Adar, in the ſixth year of his reign (11), and kept the dedication with joy, and the Paſſover, and feaſt of Unleavened Bread (12). PERSIANS.

XIII. Now this Darius was not Darius Nothus, but Darius Hyſtaſpis; as I gather by conſidering that the ſecond year of this Darius was the ſeventieth of the indignation againſt Jeruſalem, and the cities of Judah: which indignation commenced with the invaſion of Jeruſalem, and the cities of Judah by Nebuchadnezzar, in the ninth year of Zedekiah (Zech. i. 12. Jer. xxxiv. 1, 7, 22. and xxxix. 1); and that the fourth year of this Darius was the ſeventieth from the burning of the temple in the eleventh year of Zedekiah (Zech. vii. 5. and Jer. lii. 12); both which are exactly true of Darius Hyſtaſpis: and that in the ſecond year of this Darius there were men living who had ſeen the firſt temple, Hagg. ii. 3 (1). Whereas the ſecond year of Darius Nothus was 166 years after the deſolation of the temple and city. And further, if the finiſhing of the temple be deferred to the ſixth year of Darius Nothus; Jeſhua and Zerubbabel muſt have been the one high-prieſt, the other captain of the people an hundred and eighteen years together, beſides their ages before; which is ſurely too long. For in the firſt year of Cyrus the chief prieſts were Serajah, Jeremiah, Ezra, Amariah, Malluch, Shechaniah, Rehum, Meremoth, Iddo, Ginnetho, Abijah, Miamin, Maadiah, Bilgah, Shemajah, Joiarib, Jedaiah, Sallu, Amok, Hilkiah, Jedaiah (2). Theſe were prieſts in the days of Jeſhua; and the eldeſt ſons of them all, Merajah the ſon of Serajah, Hananiah the ſon of Jeremiah, Meſhullam the ſon of Ezra, &c. were chief prieſts in the days of Joiakim the ſon of Jeſhua (Nehem. xii); and therefore the high-prieſthood of Jeſhua was but of an ordinary length.

XIV. I have now ſtated the hiſtory of the Jews in the reigns of Cyrus, Cambyſes, and Darius Hyſtaſpis. It remains, that I ſtate their hiſtory in the reigns of Xerxes and Artaxerxes Lon-

(10) —— vi. 8—12.
(11) —— 14, 15.
(12) —— 16—22.

§ XIII.

(1) And Ezra iii. 2.
(2) Nehem. xii. 1—7.

gimanus.

CHAPTER SIXTH.

gimanus. For I place the hiſtory of Ezra and Nehemiah in the reign of this Artaxerxes, and not in that of Artaxerxes Mnemon. For during all the Perſian monarchy, until the laſt Darius mentioned in Scripture, whom I take to be Darius Nothus, there were but ſix high-prieſts in continual ſucceſſion of father and ſon; namely, Jeſhua, Joiakim, Eliaſhib, Joiada, Jonathan, Jaddua; and the ſeventh high-prieſt was Onias the ſon of Jaddua, and the eighth was Simeon Juſtus, the ſon of Onias; and the ninth was Eleazar, the younger brother of Simeon. Now, at a mean reckoning, we ſhould allow about 27 or 28 years only to a generation by the eldeſt ſons of a family, one generation with another, as above; but if in this caſe we allow 30 years to a generation, and may further ſuppoſe that Jeſhua, at the return of the captivity in the firſt year of the empire of the Perſians, was about 30 or 40 years old; Joiakim will be of about that age in the 16th year of Darius Hyſtaſpis; Eliaſhib, in the tenth year of Xerxes; Joiada, in the 19th year of Artaxerxes Longimanus; Jonathan, in the 8th year of Darius Nothus; Jaddua, in the 19th year of Artaxerxes Mnemon; Onias, in the third year of Artaxerxes Ochus; and Simeon Juſtus, two years before the death of Alexander the Great. And this reckoning, as it is according to the courſe of nature, ſo it agrees perfectly well with hiſtory. For thus Eliaſhib might be high-prieſt, and have grandſons, before the ſeventh year of Artaxerxes Longimanus (Ezra x. 6.) And without exceeding the age which many old men attain unto, continue high-prieſt till after the 32d year of that king (Nehem. xiii. 6, 7) And his grandſon Johanan, or Jonathan, might have a chamber in the temple in the ſeventh year of that king; (Ezra x. 6.) and be high-prieſt before Ezra wrote the ſons of Levi in the book of Chronicles, Nehem. xii. 23. And in his high-prieſthood, he might ſlay his younger brother Jeſus in the temple, before the end of the reign of Artaxerxes Mnemon (Joſeph. Antiq. l. xi. c. 7.) And Jaddua might be high-prieſt before the death of Sanballat (Joſeph. ib.) and before the death of Nehemiah (Nehem. xii. 22.) and alſo before the end of the reign of Darius Nothus. And he might thereby give occaſion to Joſephus and the later Jews, who took this king for the laſt Darius, to fall

fall into an opinion, that Sanballat, Jaddua, and Manaſſeh, the younger brother of Jaddua, lived till the end of the reign of the laſt Darius (Joſeph. Antiq. l. xi. c. 7, 8.) And the ſaid Manaſſeh might marry Nicaſo, the daughter of Sanballat, and for that offence be chaſed from Nehemiah, before the end of the reign of Artaxerxes Longimanus (Nehem. xiii. 28. Joſeph. Antiq. l. xi. c. 7, 8;) and Sanballat might at that time be Satrapa of Samaria, and in the reign of Darius Nothus, or ſoon after, build the temple of the Samaritans in Mount Gerizim for his ſon-in-law Manaſſeh, the firſt high-prieſt of that temple (Joſeph. ib.) And Simeon Juſtus might be high-prieſt when the Perſian empire was invaded by Alexander the Great, as the Jews repreſent (Joma, fol. 69, 1. Liber Juchaſis, R. Gedaliah, &c.) and for that reaſon he might be taken by ſome of the Jews for the ſame high-prieſt with Jaddua; and be dead ſome time before the book of Eccleſiaſticus was writ in Hebrew at Jeruſalem by the grandfather of him, who in the 38th year of the Egyptian æra of Dionyſius, that is in the 77th year after the death of Alexander the Great, met with a copy of it in Egypt, and there tranſlated it into Greek (Eccleſiaſt. c. 50. and in Prolog.) And Eleazar, the younger brother and ſucceſſor of Simeon, might cauſe the law to be tranſlated into Greek in the beginning of the reign of Ptolemæus Philadelphus (Joſeph. l. 12. c. 2.) And Onias, the ſon of Simeon Juſtus, who was a child at his father's death, and by conſequence was born in his father's old age, might be ſo old in the reign of Ptolemæus Euergetes, as to have his follies excuſed to that king, by repreſenting, that he was then grown childiſh with old age (Joſeph. Antiq. l. 12. c. 4.) In this manner the actions of all theſe high-prieſts ſuit with the reigns of the kings, without any reſtraining from the courſe of nature. And according to this reckoning the days of Ezra and Nehemiah fall in with the reign of the firſt Artaxerxes; for Ezra and Nehemiah flouriſhed in the high-prieſthood of Eliaſhib (Ezra x. 6. Nehem. iii. 1. and xiii. 4, 28.) But if Eliaſhib, Ezra, and Nehemiah, be placed in the reign of the ſecond Artaxerxes, ſince they lived beyond the 32d year of Artaxerxes (Nehem. xiii. 28.) there muſt be at leaſt 160 years allotted to the three firſt high-

PERSIANS.

CHAPTER SIXTH.

priests, and but 42 to the four or five last; a division too unequal. For the high-priesthoods of Jeshua, Joiakim, and Eliashib, were but of an ordinary length. That of Jeshua fell in with one generation of the chief priests; and that of Joiakim with the next generation, as we have already shewed; and that of Eliashib fell in with the third generation. For at the dedication of the wall, Zechariah, the son of Jonathan, the son of Shemaiah, was one of the priests (Nehem. xii. 35.) and Jonathan, and his father Shemaiah, were contemporaries to Joiakim and his father Jeshua (Nehem. xii. 6, 18.) I observe further, that in the first year of Cyrus, Jeshua, and Bani, or Binnui, were chief fathers of the Levites (Nehem. vii. 7, 15. and Ezra ii. 2, 10. and iii. 9); and that Jozabad the son of Jeshua, and Noadiah the son of Binnui, were chief Levites in the seventh year of Artaxerxes, when Ezra came to Jerusalem (Ezra viii. 33.) So that this Artaxerxes began his reign before the end of the second generation. And that he reigned in the time of the third generation is confirmed by two instances more. For Meshullam the son of Berechiah, the son of Meshezabeel, and Azariah the son of Maaseiah, the son of Ananiah, were fathers of their houses at the repairing of the wall (Nehem. iii. 4, 23;) and their grandfathers, Meshazabeel and Hananiah, subscribed the covenant in the reign of Cyrus (Nehem. x. 21, 23.) Yea Nehemiah, this same Nehemiah, the son of Hachaliah, was the Tirshatha, and subscribed it (Nehem. x. 1. and viii. 9. and Ezra ii. 2, 63;) and therefore in the 32d year of Artaxerxes Mnemon, he will be above 180 years old; an age surely too great. The same may be said of Ezra, if he was that priest and scribe who read the law, Nehem. viii; for he is the son of Serajah, the son of Azariah, the son of Hilkiah, the son of Shallum, &c. (Ezra vii. 1;) and this Serajah went into captivity at the burning of the temple, and was there slain (1 Chron. vi. 14. 2 King. xxv. 18;) and from his death to the twentieth year of Artaxerxes Mnemon is above 200 years; an age too great for Ezra.

XV. I consider further that Ezra, chap. iv. names Cyrus, *, Darius, Ahasuerus, and Artaxerxes, in continual order, as successors to one another, and these names agree to Cyrus, *, Darius

rius Hystaspis, Xerxes, and Artaxerxes Longimanus, and to no other kings of Persia. Some take this Artaxerxes to be not the successor, but the predecessor of Darius Hystaspis; not considering, that in his reign the Jews were busy in building the city and the wall (Ezra iv. 12.) and by consequence had finished the temple before. Ezra describes first how the people of the land hindered the building of the temple all the days of Cyrus, and further, until the reign of Darius (1); and after the temple was built, how they hindered the building of the city in the reign of Ahasuerus and Artaxerxes (2); and then returns back to the story of the temple in the reign of Cyrus and Darius (3); and this is confirmed by comparing the book of Ezra with the book of Esdras. For if in the book of Ezra you omit the story of Ahasuerus and Artaxerxes; and in that of Esdras you omit the same story of Artaxerxes, and that of the three wise men; the two books will agree. And therefore the book of Esdras, if you except the story of the three wise men, was originally copied from authentic writings of sacred authority. Now the story of Artaxerxes, which, with that of Ahasuerus, in the book of Ezra interrupts the story of Darius, doth not interrupt it in the book of Esdras, but is there inserted into the story of Cyrus, between the first and second chapter of Ezra; and all the rest of the story of Cyrus, and that of Darius, is told in the book of Esdras in continual order, without any interruption. So that the Darius which, in the book of Ezra, precedes Ahasuerus and Artaxerxes, and the Darius which in the same book follows them, is, by the book of Esdras, one and the same Darius; and I take the book of Esdras to be the best interpreter of the book of Ezra. So the Darius mentioned between Cyrus and Ahasuerus is Darius Hystaspis; and therefore Ahasuerus and Artaxerxes, who succeeded him, are Xerxes and Artaxerxes Longimanus; and the Jews who came up from Artaxerxes to Jerusalem, and began to build the city and the wall (Ezra iv. 13.) are Ezra with his companions. Which being understood, the history of the Jews in the reign of these kings will be as follows.

PERSIANS.

(1) Chap. iv. 1—5.

§ XV.

(2) —— 6—16.

(3) —— 24.

CHAPTER SIXTH.

XVI. After the temple was built, and Darius Hyſtaſpis was dead, the enemies of the Jews, in the beginning of the reign of his ſucceſſor Ahaſuerus or Xerxes, wrote unto him an accuſation againſt them (Ezra iv. 6.) But in the ſeventh year of his ſucceſſor Artaxerxes, Ezra and his companions went up from Babylon with offerings and veſſels for the temple, and power to beſtow on it out of the king's treaſure what ſhould be requiſite (Ezra vii); whence the temple is ſaid to be finiſhed, "according to the "commandment of Cyrus, and Darius, and Artaxerxes king of "Perſia," (Ezra vi. 14.) Their commiſſion was alſo to ſet magiſtrates and judges over the land (1); and thereby becoming a new body politic, they called a great council or ſanhedrim, to ſeparate the people from ſtrange wives; and they were alſo encouraged to attempt the building of Jeruſalem with its wall: and thence Ezra ſaith in his prayer, that "God had extended mercy "unto them in the ſight of the kings of Perſia, and giving "them a reviving to ſet up the houſe of their God, and to repair "the deſolations thereof, and to give them a WALL in Judah, "even in Jeruſalem" (Ezra ix. 9.) But when they had begun to repair the wall, their enemies wrote againſt them to Artaxerxes: "Be it known," ſay they, "unto the king, that the Jews which "came up from thee to us, are come unto Jeruſalem, building "the rebellious and the bad city, and have ſet up the walls there-"of, and joined the foundations," &c. And the king wrote back, that the Jews ſhould ceaſe, and the city not be built, until another commandment ſhould be given from him: whereupon their enemies "went up to Jeruſalem, and made them ceaſe by "force and power" (Ezra iv.) But in the twentieth year of the king, Nehemiah hearing that the Jews were in great affliction and diſtreſs, and that the wall of Jeruſalem, that wall which had been newly repaired by Ezra, "was broken down, and the gates "thereof burnt with fire;" he obtained leave of the king to go and build the city, and the governor's houſe (Nehem. i. 3. and ii. 6, 8, 17.) And coming to Jeruſalem the ſame year, he continued governor twelve years (2), and built the wall; and being

(1) Ezra vii. 25.

§ XVI.

(2) Nehem. v. 14.

oppoſed

PERSIANS.

oppoſed by Sanballat, Tobiah, and Geſhem, he perſiſted in the work with great reſolution and patience, until the breaches were made up. Then Sanballat and Geſhem ſent meſſengers unto him five times, to hinder him from ſetting up the doors upon the gates (3). But, notwithſtanding, he perſiſted in the work, until the doors were alſo ſet up: ſo the wall was finiſhed in the eight-and-twentieth year of the king (Joſeph. Antiq. l. xi. c. 5.) in the five-and-twentieth day of the month Elul, or ſixth month, in fifty and two days after the breaches were made up (4), and they began to work upon the gates. While the timber for the gates was preparing and ſeaſoning, they made up the breaches of the wall; both were works of time, and are not jointly to be reckoned within the 52 days. This is the time of the laſt work of the wall, the work of ſetting up the gates after the timber was ſeaſoned and the breaches made up. When he had ſet up the gates, he dedicated the wall with great ſolemnity, and appointed officers "over the chambers for the treaſure, for the of-"ferings, for the firſt-fruits, and for the tithes, to gather into "them, out of the fields of the cities, the portions appointed "by the law for the prieſts and Levites; and the ſingers and the "porters kept the ward of their God (Nehem. xii); but the peo-"ple in the city were but few, and the houſes were unbuilt," (Nehem. vii. 1, 4.) And in this condition he left Jeruſalem in the 32d year of the king; and after ſome time returning back from the king, he reformed ſuch abuſes as had been committed in his abſence (Nehem. xiii). In the mean time, the genealogies of the prieſts and Levites were recorded in the book of the Chronicles, in the days of Eliaſhib, Joiada, Jonathan, and Jaddua, until the reign of the next king Darius Nothus, whom Nehemiah calls Darius the Perſian (Nehem. xii. 11, 22, 23.) Whence it follows, that Nehemiah was governor of the Jews until the reign of Darius Nothus. And here ends the ſacred hiſtory of the Jews.

XVII. The hiſtories of the Perſians now extant in the eaſt repreſent, that the old dynaſties of the kings of Perſia were thoſe whom they call Piſchdadians and Kaianides; and that the dynaſty

(3) Nehem. vi. 1—5.

(4) ——— 15.

of

CHAPTER SIXTH.

of the Kaianides immediately ſucceeded that of the Piſchdadians. They derive the name Kaianides from the word Kai, which, they ſay, in the old Perſian language ſignified a giant, or great king; and they call the firſt four kings of this dynaſty, Kai-Cobad, Kai-Caus, Kai-Coſroes, and Lohoraſp, and by Lohoraſp mean Kai-Axeres, or Cyaxeres. For they ſay that Lohoraſp was the firſt of their kings who reduced the armies to good order and diſcipline; and Herodotus affirms the ſame thing of Cyaxeres. And they ſay further, that Lohoraſp went eaſtward, and conquered many provinces of Perſia; and that one of his generals, whom the Hebrews call Nebuchadnezzar, the Arabians, Bocktanaſſar, and others Raham and Gudars, went weſtward, and conquered all Syria and Judæa, and took the city of Jeruſalem and deſtroyed it. They ſeem to call Nebuchadnezzar the general of Lohoraſp, becauſe he aſſiſted him in ſome of his wars. The fifth king of this dynaſty they call Kiſchtaſp, and by this name mean ſometimes Darius Medus, and ſometimes Darius Hyſtaſpis. For they ſay that he was contemporary to Ozair or Ezra, and to Zaraduſt or Zoroaſtres, the legiſlator of the Ghebers or fire-worſhippers, and eſtabliſhed his doctrines throughout all Perſia; and here they take him for Darius Hyſtaſpis. They ſay alſo that he was contemporary to Jeremiah and to Daniel, and that he was the ſon and ſucceſſor of Lohoraſp; and here they take him for Darius the Mede. The ſixth king of the Kaianides they call Bahaman; and tell us, that Bahaman was Ardſchir Diraz, that is Artaxerxes Longimanus, ſo called from the great extent of his power. And yet they ſay that Bahaman went weſtward into Meſopotamia and Syria, and conquered Belſhazzar the ſon of Nebuchadnezzar, and gave the kingdom to Cyrus, his lieutenant-general over Media: and here they take Bahaman for Darius Medus. Next after Ardſchir Diraz they place Homai, a queen, the mother of Darius Nothus, though really ſhe did not reign. And the two next and laſt kings of the Kaianides they call Darab, the baſtard-ſon of Ardſchir Diraz; and Darab who was conquered by Aſcander Roumi, that is Darius Nothus, and Darius who was conquered by Alexander the Greek. And the kings between theſe two Darius's they omit; as they do alſo Cyrus, Cambyſes.

byſes, and Xerxes. The dynaſty of the Kaianides was there- PERSIANS.
fore that of the Medes and Perſians, beginning with the defection of the Medes from the Aſſyrians, in the end of the reign of Sennacherib, and ending with the conqueſt of Perſia by Alexander the Great. But their account of this dynaſty is very imperfect, ſome kings being omitted, and others being confounded with one another. And their chronology of this dynaſty is ſtill worſe; for to the firſt king they aſſign a reign of 120 years, to the ſecond a reign of 150 years, to the third a reign of 60 years, to the fourth a reign of 120 years, to the fifth as much, and to the ſixth a reign of 112 years.

XVIII. This dynaſty being the monarchy of the Medes and Perſians; the dynaſty of the Piſchdadians which immediately preceded it, muſt be that of the Aſſyrians. And according to the oriental hiſtorians this was the oldeſt kingdom in the world, ſome of its kings living a thouſand years apiece, and one of them reigning five hundred years, another ſeven hundred years, and another a thouſand years.

XIX. We need not then wonder, that the Egyptians have made the kings in the firſt dynaſty of their monarchy, that which was ſeated at Thebes in the days of David, Solomon, and Rehoboam, ſo very ancient and ſo long-lived; ſince the Perſians have done the like to their kings, who began to reign in Aſſyria two hundred years after the death of Solomon; and the Syrians of Damaſcus have done the like to their kings Adar and Hazael, who reigned an hundred years after the death of Solomon, "worſhipping them as gods, and boaſting their antiquity, and "not knowing," ſaith Joſephus, "that they were but modern."

XX. And whilſt all theſe nations have magnified their antiquities ſo exceedingly, we need not wonder that the Greeks and Latines have made their firſt kings a little older than the truth.

THE SHORT

THE

SHORT CHRONICLE.

FROM A

MS. OF SIR ISAAC NEWTON,

IN THE POSSESSION OF

THE REV. DR. EKINS, DEAN OF CARLISLE.

A

SHORT CHRONICLE

FROM THE

First memory of things in EUROPE to the conqueſt of PERSIA by ALEXANDER the GREAT.

THE INTRODUCTION.

THE Greek antiquities are full of poetical fictions, becauſe the Greeks wrote nothing in proſe before the conqueſt of Aſia by Cyrus the Perſian. Then Pherecydes Scyrius and Cadmus Mileſius introduced the writing in proſe. Pherecydes Athenienſis, about the end of the reign of Darius Hyſtaſpis, wrote of antiquities, and digeſted his work by genealogies, and was reckoned one of the beſt genealogers. Epimenides, the hiſtorian, proceeded alſo by genealogies; and Hellanicus, who was twelve years older than Herodotus, digeſted his hiſtory by the ages or ſucceſſions of the prieſteſſes of Juno Argiva. Others digeſted theirs by the kings of the Lacedemonians, or archons of Athens. Hippias the Elean, about thirty years before the fall of the Perſian empire, publiſhed a breviary, or liſt, of the olympic victors: and about ten years before the fall thereof Ephorus, the diſciple of Iſocrates, formed a chronological hiſtory of Greece, beginning with the return of the Heraclidæ into Peloponneſus,

INTRODUCTION.

and ending with the ſiege of Perinthus, in the twelfth year of Philip the father of Alexander the Great. But he digeſted things by generations, and the reckoning by olympiads was not yet in uſe; nor doth it appear that the reigns of kings were yet ſet down by numbers of years. The Arundelian marbles were compoſed ſixty years after the death of Alexander the Great (an. 4. olymp. 128.) and yet mention not the olympiads. But in the next olympiad Timæus Siculus publiſhed an hiſtory in ſeveral books down to his own times, according to the olympiads, comparing the Ephori, the kings of Sparta, the archons of Athens, and the prieſteſſes of Argos with the olympic victors; ſo as to make the olympiads, and the genealogies and ſucceſſions of kings, archons, and prieſteſſes, and poetical hiſtories, ſuit with one another, according to the beſt of his judgment. And where he left off, Polybius began and carried on the hiſtory.

So then, a little after the death of Alexander the Great, they began to ſet down the generations, reigns, and ſucceſſions, in numbers of years; and by putting reigns and ſucceſſions equipollent to generations, and three generations to an hundred or an hundred and twenty years (as appears by their chronology) they have made the antiquities of Greece three or four hundred years older than the truth: and this was the original of the technical chronology of the Greeks. Eratoſthenes wrote about an hundred years after the death of Alexander the Great. He was followed by Apollodorus; and theſe two have been followed ever ſince by chronologers.

But how uncertain their chronology is, and how doubtful it was reputed by the Greeks of thoſe times, may be underſtood by theſe paſſages of Plutarch. 'Some reckon,' ſaith he[a], 'Lycurgus contemporary to Iphitus, and to have been his compa-
'nion in ordering the olympic feſtivals: amongſt whom was
'Ariſtotle the philoſopher, arguing from the olympic diſc which
'had the name of Lycurgus upon it. Others, ſupputing the
'times by the ſucceſſion of the kings of the Lacedemonians, as
'Eratoſthenes and Apollodorus, affirm that he was not a few
'years older than the firſt olympiad. Firſt, Ariſtotle and ſome
'others

[a] In the life of Lycurgus.

'others made him as old as the firſt olympiad; then Eratoſthenes, Apollodorus, and ſome others, made him above an hundred
'years older.' And in another place Plutarch[a] tells us: 'The
'congreſs of Solon, with Crœſus, ſome think they can confute
'by chronology. But an hiſtory ſo illuſtrious, and verified by
'ſo many witneſſes, and (which is more) ſo agreeable to the
'manners of Solon, and ſo worthy of the greatneſs of his mind
'and of his wiſdom, I cannot perſuade myſelf to reject becauſe
'of ſome chronological canons, as they call them; which hun-
'dreds of authors correcting, have not yet been able to conſti-
'tute any certainty among themſelves about repugnances.' It ſeems the chronologers had made the legiſlature of Solon too ancient to conſiſt with that congreſs.

[a] In the life of Solon.

For reconciling ſuch repugnances, chronologers have ſometimes doubled the perſons of men. So when the poets had changed Io, the daughter of Inachus, into the Egyptian Iſis, chronologers made her huſband Oſiris, or Bacchus, and his miſtreſs Ariadne as old as Io; and ſo feigned that there were two Ariadne's, one the miſtreſs of Bacchus, the other the miſtreſs of Theſeus, and two Minos's their fathers, and a younger Io the daughter of Jaſus; writing Jaſus corruptly for Inachus: and ſo they have made two Pandion's and two Erechtheus's, giving the name of Erechthonius to the firſt. Homer calls the firſt Erechtheus. And by ſuch corruptions they have exceedingly perplexed ancient hiſtory.

And as for the chronology of the Latins, that is ſtill more uncertain. Plutarch repreſents great uncertainties in the originals of Rome: and ſo doth Servius. The old records of the Latines were burnt by the Gauls ſixty-four years before the death of Alexander the Great; and Quintus Fabius Pictor, the oldeſt hiſtorian of the Latines, lived an hundred years later then that king.

In ſacred hiſtory, the Aſſyrian empire began with Pul and Tiglathpileſar, and laſted about 170 years. And accordingly Herodotus hath made Semiramis only five generations, or about 166 years, older than Nitocris, the mother of the laſt king of

INTRODUCTION.

Babylon. But Cteſias has made Semiramis 1500 years older than Nitocris; and feigned a long ſeries of kings of Aſſyria, whoſe names are not Aſſyrian, nor have any affinity with the Aſſyrian names in Scripture.

The prieſts of Egypt told Herodotus, that Menes built Memphis, and the ſumptuous temple of Vulcan in that city: and that Rhampſinitus, Mœris, Aſychis, Pſammiticus, added magnificent porticos to that temple. And it is not likely that Memphis could be famous before Homer's days, who doth not mention it, or that a temple could be above two or three hundred years in building: and yet the prieſts of Egypt had ſo magnified their antiquities before the days of Herodotus, as to tell him, that from Menes to Mœris there were 330 kings, whoſe reigns took up as many ages, that is, eleven thouſand years; and had filled up the interval with feigned kings who had done nothing. And before the days of Diodorus Siculus they had raiſed their antiquities ſo much higher, as to place ſix, eight, or ten, new reigns of kings between thoſe kings whom they had repreſented to Herodotus to ſucceed one another immediately.

In the kingdom of Sicyon, chronologers have ſplit Apis, Epaphus, or Epopeus, into two kings, whom they call Apis and Epopeus; and between them have inſerted eleven or twelve feigned names of kings who did nothing; and thereby they have made its founder Ægialeus three hundred years older than his brother Phoroneus: and ſome have made the kings of Germany as old as the Flood. And yet before the uſe of letters, the names and actions of men could ſcarce be remembered above eighty or an hundred years after their deaths: and therefore I admit no chronology of things done in Europe above eighty years before Cadmus brought letters into Greece: none of things done in Germany before the riſe of the Roman empire.

Now ſince Eratoſthenes and Apollodorus computed the times by the reigns of the kings of Sparta, and (as appears by their chronology ſtill followed) have made the ſeventeen reigns of thoſe kings between the return of the Heraclidæ into Peloponneſus and the battle of Thermopylæ take up 622 years, which is after the

INTRODUCTION.

the rate of $36\frac{1}{2}$ years to a reign; and yet a race of ſeventeen kings of that length is no where to be met with in all true hiſtory; and kings, at a moderate reckoning, reign but 18 or 20 years apiece one with another: I have ſtated the time of the return of the Heraclidæ by the laſt way of reckoning; placing it 345 years before the battle of Thermopylæ. And making the Trojan war eighty years older, according to Thucydides; and the Argonautic expedition a generation older; and the wars of Seſoſtris in Thrace, and death of Ino the daughter of Cadmus, a generation older: I have drawn up the following chronological table, ſo as to make chronology ſuit with the courſe of nature, with aſtronomy, with ſacred hiſtory, and with itſelf, without the many repugnances complained of by Plutarch. I do not pretend to be exact to a year. There may be errors of five or ten years, and ſometimes twenty, and not much above.

A SHORT

A

SHORT CHRONICLE

FROM THE

Firſt memory of things done in EUROPE to the conqueſt of PERSIA by ALEXANDER the GREAT.

The times are ſet down in years before Chriſt.

CHRONICLE. THE Canaanites who fled from Joſhua retired in great numbers into Egypt, and there conquered Timaus, Thamus or Thammuz, king of the lower Egypt, and reigned there under their kings Salatis, Beon, Apachnas, Apophis, Janias, Aſſis, &c. until the days of Eli and Samuel. They fed on fleſh, and ſacrificed men after the manner of the Phœnicians, and were called ſhepherds by the Egyptians who lived only on the fruits of the earth and abominated fleſh-eaters. The upper parts of Egypt were in thoſe days under many kings reigning at Coptos, Thebes, This, Elephantis, and other places, which, by conquering one another, grew by degrees into one kingdom, over which Miſphragmuthoſis reigned in the days of Eli.

Anno ante Chriſtum 1120. About this time Mephres reigned over the upper Egypt from Syene to Heliopolis, and his ſucceſſor Miſphragmuthoſis made a laſting war upon the ſhepherds ſoon after, and cauſed many of them to fly into Paleſtine, Idumea, Syria, and Libya, and under Lelex, Æzeus, Inachus, Pelaſgus, Æolus the Firſt, Cecrops, and other captains, into Greece: and theſe ſtrangers built the firſt houſes in Greece. Before thoſe days,

days, Greece and all Europe was peopled by wandering Cimmerians and Scythians from the backſide of the Euxine Sea, who lived a rambling wild ſort of life like the Tartars in the northern parts of Aſia. Of their race was Ogyges, in whoſe days theſe Egyptian ſtrangers came into Greece. The reſt of the ſhepherds were ſhut up by Miſphragmuthoſis in a part of the lower Egypt called Abaris and Peluſium. CHRONICLE.

Anno 1100. The Philiſtim, ſtrengthened by the acceſs of the ſhepherds, conquer Iſrael and take the Ark. Samuel judges Iſrael.

1085. Hæmon, the ſon of Pelaſgus, reigns in Theſſaly.

1080. Lycaon, the ſon of Pelaſgus, builds Lycoſura; Phoroneus the ſon of Inachus, Phoronicum, afterwards called Argos. Ægialeus the brother of Phoroneus, and ſon of Inachus, Ægialeum, afterwards called Sicyon; the oldeſt towns in Peloponneſus. Till then they built only ſingle houſes ſcattered up and down in the fields. About the ſame time Cecrops built Cecropia in Attica, afterwards called Athens; and Eleuſine the ſon of Ogyges built Eleuſina: and theſe towns gave a beginning to the kingdoms of the Arcadians, Argives, Sicyons, Athenians, Eleuſinians, &c.

1070. Amoſis, or Tethmoſis, the ſucceſſor of Miſphragmuthoſis, drives the ſhepherds out of Abaris, and aboliſhes the Phœnician cuſtom in Heliopolis of ſacrificing men. By their acceſs the Philiſtim became ſo numerous, as to bring into the field againſt Saul 30000 chariots, 6000 horſemen, and people as the ſand on the ſea-ſhore in multitude. Abas, the father of Acriſius and Prætus, comes from Egypt.

1069. Saul is made king of Iſrael, and by the hand of Jonathan gets a great victory over the Philiſtim. Eurotas the ſon of Lelex, and Lacedæmon, who married Sparta the daughter of Eurotas, reign in Laconia and build Sparta. Deucalion flouriſhes.

1060. Samuel dies.

1059. David made king.

1048. The Edomites are conquered by David. Their mariners fly from the Red Sea to the Mediterranean, fortify Azoth,

Chronicle. and take Zidon; and the Zidonians who fled from them build Tyre, and make Abibalus their firſt king.

1047. Acriſius marries Eurydice, the daughter of Lacedæmon and Sparta.

1045. The Phœnician mariners who fled from the Red Sea, being uſed to long voyages for the ſake of traffic, begin the like voyages on the Mediterranean from Sidon; and, ſailing as far as Greece, carry away Io the daughter of Inachus, who, with other Grecian women, came to their ſhips to buy their merchandize. The Greek ſeas begin to be infeſted with pirates. Endymion builds Elis.

1043. The Syrians of Zobah and Damaſcus are conquered by David.

1042. Nyctimus the ſon of Lycaon reigns in Arcadia. Deucalion ſtill alive.

1041. Many of the Phœnicians and Syrians flee from Sidon, and come, under the conduct of Cadmus, Cilix, Phœnix, Membliarius, Nicteus, Thaſus, Alymnus, and other captains, into Aſia Minor, Crete, Greece, and Libya; and introduce letters, muſic, poetry, the Octaeteris, metals, and their fabrication, and other arts, ſciences, and cuſtoms of the Phœnicians. At this time Cranaus, the ſucceſſor of Cecrops, reigned in Attica; and in his reign, and the beginning of the reign of Nyctimus, the Greeks place the flood of Deucalion. This flood was ſucceeded by four ages or generations of men; in the firſt of which Chiron, the ſon of Saturn and Philyra, was born; and the laſt of which, according to Heſiod, ended with the Trojan war; and ſo place the deſtruction of Troy four generations, or about 133 years, later than that flood, and than the coming of Cadmus; reckoning with the ancients three generations to an hundred years. With theſe Phœnicians came a ſort of men ſkilled in the religious myſteries, arts, and ſciences of Phœnicia, and ſettled in ſeveral places under the names of Curetes, Corybantes, Telchines, and Idæi Dactyli.

1039. Helen, the ſon of Deucalion, and father of Æolus Xuthus and Dorus, flouriſhes.

1037. Erechtheus reigns in Attica.

1036.

1036. Ceres, a woman of Sicily, in ſeeking her daughter Chronicle. who was ſtolen, comes into Attica, and there teaches the Greeks to ſow corn: for which benefaction ſhe was deified after death. She firſt taught the art to Triptolemus, the young ſon of Celeus king of Eleuſis.

1035. The Idæi Dactyli find out iron in Mount Ida in Crete, and work it into armour and iron-tools; and thereby give a beginning to the trades of ſmiths and carpenters in Europe. And by ſinging and dancing in their armour, and keeping time by ſtriking upon one another's armour with their ſwords, they bring in muſic and poetry. And at the ſame time they nurſe up the Cretan Jupiter in a cave of the ſame mountain, dancing about him in their armour.

1034. Ammon reigns in Egypt. He conquered Libya, and reduced that people from a wandering ſavage life to a civil one, and taught them to lay up the fruits of the earth: and from him Libya and the deſert above it were anciently called Ammonia. He was the firſt that built long and tall ſhips with ſails; and had a fleet of ſuch ſhips on the Red Sea, and another on the Mediterranian at Graſa in Libya. Till then they uſed ſmall and round veſſels of burden invented on the Red Sea, and kept within ſight of the ſhore. For enabling them to croſs the ſeas without ſeeing the ſhore, the Egyptians began in his days to obſerve the ſtars: and from this beginning aſtronomy and ſailing had their riſe. Hitherto the luniſolar year had been in uſe: but this year being of an uncertain length, and ſo unfit for aſtronomy, in his days, and in the days of his ſons and grandſons, by obſerving the heliacal riſings and ſettings of the ſtars, they found the length of the ſolar year; and made it conſiſt of five days more than the twelve calendar months of the old luniſolar year.

1028. Oenotrus, the youngeſt ſon of Lycaon (the Janus of the Latines) led the firſt colony of the Greeks into Italy, and there taught them to build houſes. Perſeus born.

1025. Arcas, the ſon of Calliſto and grandſon of Lycaon, and Eumelus, the firſt king of Achaia, received bread-corn from Triptolemus.

CHRONICLE. 1020. Apis, Epaphus, or Epopeus, the ſon of Phoroneus, and Nicteus king of Bœotia ſlain. Lycus inherits the kingdom of his brother Nicteus. Ætolus the ſon of Endymion flees into the country of the Curetes in Achaia, and calls it Ætolia; and of Pronoë, the daughter of Phorbus, begets Pleuron and Calydon; who built cities in Ætolia called by their own names. Antiopa, the daughter of Nycteus, is ſent home to Lycus by Lamedon, the ſucceſſor of Apis, and in the way brings forth Amphion and Zethus.

1019. Solomon reigns, and marries the daughter of Ammon; and by means of this affinity is ſupplied with horſes from Egypt. And his merchants from thence alſo bring horſes for all the kings of the Hittites and Syrians; for horſes came originally from Libya: and thence Neptune was called Equeſtris. Tantalus king of Phrygia ſteals Ganimede, the ſon of Tros king of Troas.

1017. Solomon, by the aſſiſtance of the Tyrians, who had mariners amongſt them acquainted with the Red Sea, ſets out a fleet upon that ſea. Creüſa, the daughter of Erechtheus, marries Zuthus the ſon of Hellen. Erechtheus having firſt celebrated the Panathanæa, joins horſes to a chariot. Ægina, the daughter of Aſopus and mother of Æacus, born.

1015. The Temple of Solomon is founded. Minos reigns in Crete, expelling his father, who flees into Italy, and becomes the Saturn of the Latines. Ammon takes Gezer from the Canaanites, and gives it to his daughter, Solomon's wife.

1014. Ammon places Cepheus at Joppa. Ceres being dead, Eumolpus inſtitutes her myſteries in Eleuſine. The myſteries of Rhea are inſtituted in Phrygia, in the city Cybele. About this time temples began to be built in Greece. Hyagnis the Phrygian invents the pipe. After the example of the common-council of the five lords of the Philiſtim, the Greeks ſet up the Amphictyonic council firſt at Thermopylæ, by the influence of Amphictyon the ſon of Deucalion, and a few years after at Delphi by the influence of Acriſius. Among the cities, whoſe deputies met at Thermopylæ, I do not find Athens; and therefore doubt, whether Amphictyon was king of that city. If he was the

the ſon of Deucalion and brother of Hellen, he and Cranaüs might reign together in ſeveral parts of Attica. But I meet with a later Amphictyon, who entertained the great Bacchus. This council worſhipped Ceres, and therefore was inſtituted after her death. CHRONICLE.

1012. Cecrops II. reigns in Attica. Caucon teaches the myſteries of Ceres in Meſſene. Seſac, in the reign of his father Ammon, invades Arabia Felix.

1011. Pandion, the brother of Cecrops II. reigns in Attica. Pelops the ſon of Tantalus comes into Peloponneſus; marries Hippodamia the grand-daughter of Acriſius; takes Ætolia from Ætolus the ſon of Endymion, and by his reaches grows potent.

1010. Car the ſon of Phoroneus builds a temple to Ceres. Hellen the ſon of Deucalion reigns in Phthiotis.

1008. Seſac, in the reign of his father Ammon, invades Afric and Spain; and ſets up pillars at the mouth of the ſtreights, and in all his conqueſts; and returns by the coaſt of Gaul and Italy.

1006. Minos prepares a fleet; clears the Greek ſeas of pirates; and ſends colonies to the iſlands of the Greeks, ſome of which were not inhabited before. War between Pandion, and Labdacus the grandſon of Cadmus.

1005. Andromeda carried away from Joppa by Perſeus.

1002. Seſac reigns in Egypt and adorns Thebes, dedicating it to his father Ammon by the name of No-Ammon, or Ammon-No; that is, the city or people of Ammon. Whence the Greeks called it Dioſpolis; the city of Jupiter. Seſac alſo erected temples and oracles to his father in Thebes, Ammonia, and Ethiopia, and thereby cauſed his father to be worſhipped as a god in thoſe countries; and I think alſo in Arabia Felix. And this was the original of the worſhip of Jupiter Ammon, and the firſt mention of oracles that I meet with in prophane hiſtory.

1000. Amphion and Zethus ſlay Lycus; put Laius, the ſon of Labdacus, to flight, and reign in Thebes, and wall the city about.

994. Ægeus reigns in Attica.

993. Siſyphus, the ſon of Æolus and grandſon of Hellen, reigns in Corinth; and ſome ſay that he built that city.

990.

CHRONICLE. 990. Dædalus and his nephew Talus invent the ſaw, the turning-lath, the wimble, the chip-axe, and other inſtruments of carpenters and joiners, and thereby gave a beginning to thoſe arts in Europe. Dædalus alſo invented the making of ſtatues with their feet aſunder, as if they walked.

988. Minos makes war upon the Athenians for killing his ſon Androgeus. Æacus flouriſhes.

987. Dædalus kills Talus and flees to Minos. A prieſteſs of Jupiter Ammon, being brought by Phœnician merchants into Greece, ſets up the oracle of Jupiter at Dodona; and this gives a beginning to oracles in Greece. And by their dictates the worſhip of the dead is every where introduced.

981. Alcmena born of Electryo, the ſon of Perſeus and Andromeda, and of Eurydice the daughter of Pelops.

980. Laius recovers the kingdom of Thebes. Athamas, the brother of Siſyphus, and father of Phryxus and Helle, marries Ino the daughter of Cadmus.

979. Rehoboam reigns. Thoas is ſent from Crete to Lemnos, and reigns there in the city Hepheſtia; where he works in copper and iron.

974. Seſac ſpoils the temple, and invades Syria, Perſia and India, ſetting up pillars in all his conqueſts. Jeroboam, becoming ſubject to Seſac, ſets up the worſhip of the Egyptian gods in Iſrael.

971. Seſac invades India, and returns with triumph the next year but one. Whence Triëterica Bacchi. He ſets up pillars on two mountains at the mouth of the river Ganges.

968. Theſeus reigns, having overcome the Minotaur; and ſoon after unites the twelve cities of Attica under one government. Seſac, having carried on his victories to mount Caucaſus, leaves his nephew Prometheus there, and Æetes at Colchos.

967. Seſac, paſſing over the Helleſpont, conquers Thrace; kills Lycurgus king thereof, and gives his kingdom and one of his ſinging-women to Oeagrus, the father of Orpheus. Seſac had in his army Ethiopians commanded by Pan, and Libyan women commanded by Merina, or Minerva. It was the cuſtom of the Ethiopians to dance when they were entering into a battle; and

and from their ſkipping they were painted with goats-feet in the CHRONICLE. form of ſatyrs.

966. Thoas, being made king of Cyprus by Seſac, goes thither with his wife Callicopis, and leaves his daughter Hypſipyle in Lemnos.

965. Seſac is baffled by the Greeks and Scythians; loſes many of his women, with their queen Minerva; compoſes the war; is received by Amphictyon at a feaſt; buries Ariadne; goes back through Aſia and Syria into Egypt with innumerable captives, among whom was Tithonus the ſon of Laomedon king of Troy; and leaves his Libyan Amazons under Martheſia and Lampeto, the ſucceſſor of Minerva, at the river Thermodon. He left alſo in Colchos geographical tables of all his conqueſts; and thence geography had its riſe. His ſinging-women were celebrated in Thrace by the name of the Muſes: and the daughters of Pierus, a Thracian, imitating them, were celebrated by the ſame name.

964. Minos making war upon Cocalus king of Sicily, is ſlain by him. He was eminent for his dominion, his laws, and his juſtice. Upon his ſepulchre, viſited by Pythagoras, was this inſcription, ΤΟΥ ΔΙΟϹ; the ſepulchre of Jupiter. Danäus with his daughters, flying from his brother Ægyptus (that is from Seſac) comes into Greece. Seſac, uſing the advice of his ſecretary Thoth, diſtributes Egypt into XXXVI nomes; and in every nome erects a temple; and appoints the ſeveral gods, feſtival, and religions of the ſeveral nomes. The temples were the ſepulchres of his great men, where they were to be buried and worſhipped after death, each in his own temple, with ceremonies and feſtivals appointed by him; while he and his queen, by the names of Oſiris and Iſis, were to be worſhipped in all Egypt. Theſe were the temples ſeen and deſcribed by Lucian eleven hundred years after to be of one and the ſame age. And this was the original of the ſeveral nomes of Egypt, and of the ſeveral gods and ſeveral religions in thoſe nomes. Seſac divided alſo the land of Egypt by meaſure amongſt his ſoldiers; and thence geometry had its riſe. Hercules and Euryſtheus born.

CHRONICLE. 963. Amphictyon brings the twelve gods of Egypt into Greece; and these are the *Dii magni majorum gentium*, to whom the earth, and planets, and elements are dedicated.

962. Phrixus and Helle fly from their stepmother Ino, the daughter of Cadmus. Helle is drowned in the Hellespont, so named from her; but Phryxus arrives at Colchos.

960. The war between the Lapithæ, and the people of Thessaly called Centaurs.

958. Oedipus kills his father Daius. Sthenelus the son of Perseus reigns in Mycene.

956. Sesac is slain by his brother Japetus; who, after death, was deified in Afric by the name of Neptune, and called Typhon by the Egyptians. Orus reigns and routs the Libyans; who, under the conduct of Japetus and his son Antæus, or Atlas, invaded Egypt. Sesac, from his making the river Nile useful by cutting channels from it to all the cities of Egypt, was called by its names, Sihor or Siris, Nilus, and Ægyptus. The Greeks, hearing the Egyptians lament O Siris and Bou Siris, called him Osiris and Busiris. The Arabians, from his great acts, called him Bacchus, that is, the great. The Phrygians called him Ma-fors, or Mavors, the Valiant; and by contraction Mars. Because he set up pillars in all his conquests, and his army in his father's reign fought against the Africans with clubs, he is painted with pillars and a club. And this is that Hercules who, according to Cicero, was born upon the Nile; and, according to Eudoxus, was slain by Typhon; and, according to Diodorus, was an Egyptian, and went over a great part of the world, and set up the pillars in Afric. He seems to be also the Belus, who, according to Diodorus, led a colony of Egyptians to Babylon, and there instituted priests called Chaldæans, who were free from taxes, and observed the stars as in Egypt. Hitherto Judah and Israel laboured under great vexations: but henceforward Asa king of Judea had peace ten years.

947. The Ethiopians invade Egypt, and drown Orus in the Nile. Thereupon Bubaste the sister of Orus kills herself by falling from the top of a house; and their mother Isis, or Astræa, goes mad: and thus ended the reign of the gods of Egypt.

946.

946. Zerah the Ethiopian is overthrown by Asa. The peo- CHRONICLE.
ple of the lower Egypt make Osarsiphus their king, and call in two hundred thousand Jews and Phœnicians against the Ethiopians. Menes, or Amenophis, the young son of Zerah and Cissia, reigns.

944. The Ethiopians under Amenophis retire from the lower Egypt, and fortify Memphis against Osarsiphus: and by these wars and the Argonautic expedition the great empire of Egypt breaks in pieces. Eurystheus, the son of Sthenelus, reigns in Mycenæ.

943. Evander and his mother Carmenta carry letters into Italy.

942. Orpheus deifies the son of Semele by the name of Bacchus; and appoints his ceremonies.

940. The great men of Greece, hearing of the civil-wars and distractions of Egypt, resolve to send an embassy to the nations upon the Euxine and Mediterranean Seas subject to that empire; and for that end order the building of the ship Argo.

939. The ship Argo is built, after the pattern of the long ship in which Danäus came into Greece: and this was the first long ship build by the Greeks. Chiron, who was born in the golden age, forms the constellations for the use of the Argonauts; and places the solstitial and equinoctial points in the fifteenth degrees, or middles, of the constellations of Cancer, Chelæ, Capricorn, and Aries. Meton, in the year of Nabonassar 316, observed the summer solstice in the eighth degree of Cancer; and therefore the solstice had then gone back seven degrees. It goes back one degree in about seventy and two years, and seven degrees in about 504 years. Count these years back from the year of Nabonassar 316, and they will place the Argonautic expedition about 936 years before Christ.

Gingris the son of Thoas slain, and deified by the name of Adonis.

938. Theseus being fifty years old steals Hellen, then seven years old. Perithous, the son of Ixion, endeavouring to steal Persephone the daughter of Orcus king of the Molossians, is

Chronicle. ſlain by the dog of Orcus, and his companion Theſeus is taken and impriſoned. Helena is ſet at liberty by her brothers.

937. The Argonautic expedition. Prometheus leaves Mount Caucaſus, being ſet at liberty by Hercules. Laomedon king of Troy ſlain by Hercules. Priam ſucceeds him. Talus, a brazen man of the brazen age, the ſon of Minos, ſlain by the Argonauts. Æſculapius and Hercules were Argonauts; and Hippocrates was the eighteenth from Æſculapius by the father's ſide, and the nineteenth from Hercules by the mother's ſide. And becauſe theſe generations, being noted in hiſtory, were moſt probably by the chief of the family, and for the moſt part by the eldeſt ſons; we may reckon 28, or at moſt 30, years to a generation. And thus the ſeventeen intervals by the father's ſide, and eighteen by the mother's, will, at a middle reckoning, amount unto about 507 years. Which being counted backwards from the beginning of the Peloponneſian war (at which time Hippocrates began to flouriſh) will reach up to the time where we have placed the Argonautic expedition.

936. Theſeus is ſet at liberty by Hercules.

934. The hunting of the Calydonian boar, ſlain by Meleager.

930. Amenophis, with an army out of Ethiopia and Thebais, invades the lower Egypt; conquers Oſarſiphus; and drives out the Jews and Canaanites: and this is reckoned the ſecond expulſion of the ſhepherds. Callicopis dies; and is deified by Thoas with temples at Paphos and Amathus in Cyprus, and at Byblus in Syria, and with prieſts and ſacred rites, and becomes the Venus of the ancients, and the *Dea Cypria* and *Dea Syria:* and from theſe and other places, where temples were erected to her, ſhe was alſo called Paphia, Amathuſia, Byblia, Cytherea, Salaminia, Cnidia, Erycina, Idalia, &c: and her three waiting-women became the three Graces.

928. The war of the ſeven captains againſt Thebes.

927. Hercules and Æſculapius are deified. Euryſtheus drives the Heraclidæ out of Peloponneſus. He is ſlain by Hyllus the ſon of Hercules. Atreus, the ſon of Pelops, ſucceeds him in the kingdom of Mycenæ. Meneſtheus, the great-grandſon of Erechtheus, reigns at Athens.

925.

925. Theſeus is ſlain; being caſt down from a rock. Chronicle.

924. Hyllus, invading Peloponneſus, is ſlain by Echemus.

919. Atreus dies. Agamemnon reigns. In the abſence of Menelaüs, who went to look after what his father Atreus had left him, Paris ſteals Helena.

618. The ſecond war againſt Thebes.

912. Thoas, king of Cyprus and part of Phœnicia, dies: and for making armour for the kings of Egypt is deified with a ſumptuous temple at Memphis, by the name of Baal Canaan, Vulcan. This temple was ſaid to be built by Menes, the firſt king of Egypt who reigned next after the gods; that is, by Menoph, or Amenophis, who reigned next after the death of Oſiris, Iſis, Orus, Bubaſte, and Thoth. The city Memphis was alſo ſaid to be built by Menes. He began to build it when he fortified it againſt Oſarſiphus; and from him it was called Menoph, Moph, Noph, &c. and is to this day called Menuf by the Arabians: and therefore Menes, who built the city and temple, was Menoph or Amenophis. The prieſts of Egypt at length made this temple above a thouſand years older than Amenophis; and ſome of them five or ten thouſand years older. But it could not be above two or three hundred years older than the reign of Pſammiticus, who finiſhed it, and died 614 years before Chriſt. When Menoph, or Menes, built the city, he built a bridge there over the Nile; a work too great to be older than the monarchy of Egypt.

909. Amenophis (called Memnon by the Greeks) built the Memnonia at Suſa; and left Egypt under the government of Proteus, his viceroy.

904. Troy taken. Amenophis was ſtill at Suſa: the Greeks feigning that he came from thence to the Trojan war.

903. Demophoon, the ſon of Theſeus by Phædra the daughter of Minos, reigns at Athens.

901. Amenophis builds ſmall pyramids in Cochome.

895. Teucer builds Salamis in Cyprus. Hadad, or Benhadad, king of Syria dies; and is deified at Damaſcus with a temple and ceremonies.

CHRONICLE. 887. Amenophis dies; and is ſucceeded by his ſon Rameſſes or Rhampſinitus; who builds the weſtern portico of the temple of Vulcan. The Egyptians dedicated to Oſiris, Iſis, Orus ſenior, Typhon, and Nephthe, the ſiſter and wife of Typhon, the five days added by the Egyptians to the twelve calendar months of the luniſolar year; and ſaid, that they were added when theſe five princes were born. They were added therefore in the reign of Ammon, the father of theſe princes. But this year was not brought into uſe before the reign of Amenophis. For in his temple or ſepulchre at Abydus, they placed a circle of 365 cubits in compaſs, covered on the upper ſide with a plate of gold, and divided into 365 equal parts, to repreſent all the days of the year; every part having the day of the year, and the heliacal riſings and ſettings of the ſtars on that day, noted upon it: and this circle remained there till Cambyſes ſpoiled the temples of Egypt. And from this monument I collect, that it was Amenophis who eſtabliſhed this year, fixing the beginning thereof to one of the four cardinal points of the heavens. For had not the beginning thereof been now fixed, the heliacal riſings and ſettings of the ſtars could not have been noted upon the days thereof. The prieſts of Egypt therefore, in the reign of Amenophis, continued to obſerve the heliacal riſings and ſettings of the ſtars upon every day: and when, by the ſun's meridional altitudes, they had found the ſolſtices and equinoxes according to the ſun's mean motion, his equation being not yet known; they fixed the beginning of this year to the vernal equinox, and in memory thereof erected this monument. Now this year being carried into Chaldea, the Chaldeans began their years of Nabonaſſar on the ſame Thoth with the Egyptians; and the Thoth of the firſt year of Nabonaſſar fell upon the 26th day of February: which was thirty-three days and five hours before the vernal equinox, according to the ſun's mean motion: and the Thoth of this year moves backward thirty-three days and five hours in 137 years; and therefore fell upon the vernal equinox 137 years before the æra of Nabonaſſar began; that is, 884 years before Chriſt. And if it began upon the day next after the vernal equinox, it might begin three or four years earlier: and there we may place the death of

of this king. The Greeks feigned that he was the ſon of Ti- CHRONICLE.
thonus; and therefore he was born after the return of Seſac into Egypt with Tithonus and other captives, and ſo might be about 70 or 75 years old at his death.

886. Ulyſſes leaves Calypſo in the iſland Ogygia, perhaps Cadis or Cales. She was the daughter of Atlas, according to Homer. The ancients at length feigned that this iſland, which from Atlas they called Atlantis, had been as big as all Europe, Africa, and Aſia, but was ſunk into the ſea.

885. Dido builds Carthage; and the Phœnicians begin preſently after to ſail as far as the ſtrait's mouth and beyond. Æneas was ſtill alive, according to Virgil.

870. Heſiod flouriſhes. He has told us himſelf, that he lived in the age next after the wars of Thebes and Troy; and that this age ſhould end when the men then living grew hoary and dropt into the grave: and therefore it was but of an ordinary length. And Herodotus has told us, that Heſiod and Homer were but 400 years older than himſelf.

860. Moeris reigns in Egypt. He adorned Memphis, and tranſlated the ſeat of his empire thither from Thebes. There he built the famous labyrinth, and the northern portico of the temple of Vulcan; and dug the great lake called the Lake of Moeris; and upon the bottom of it built two great pyramids of brick. And theſe things, being not mentioned by Homer or Heſiod, were unknown to them, and done after their days. He wrote alſo a book of geometry.

852. Hazael, the ſucceſſor of Hadad at Damaſcus, dies, and is deified. Theſe gods, Hadad and Hazael, together with Arathes the wife of Hadad, were worſhipped in their ſepulchres or temples till the days of Joſephus the Jew; and the Syrians boaſted their antiquity, not knowing, ſaith Joſephus, that they were novel.

844. The Æolic migration. Bœotia, formerly called Cadmëis, is ſeized by the Bœotians.

838. Cheops reigns in Egypt. He built the greateſt pyramid for his ſepulchre, and forbid the worſhip of the former kings; intending to have been worſhipped himſelf.

CHRONICLE. 825. The Heraclidæ, after three generations, or an hundred years, reckoned from their former expedition, return into Peloponneſus. Henceforward to the end of the firſt Meſſenian war reigned ten kings of Sparta by one race, and nine by another: ten of Meſſene; and nine of Arcadia: which, reckoning according to the ordinary courſe of nature about 18 or 20 years to a reign, one reign with another, will ſcarce take up above 200 years. And the ſeven reigns more in each of the two races of the Spartan kings to the battle of Thermopylæ, may take up 140 years more; and ſo place the return of the Heraclidæ about 820 years before Chriſt.

824. Cephren reigns in Egypt, and builds another great pyramid.

808. Mycerine reigns there, and begins the third great pyramid. He ſhut up the dead body of his daughter in a hollow ox, and cauſed her to be worſhipped daily with odours.

804. The war between the Athenians and Spartans, in which Codrus king of the Athenians is ſlain.

802. Nitocris, the ſiſter of Mycerine, ſucceeds him, and finiſhes the third great pyramid.

794. The Ionic migration under the conduct of the ſons of Codrus.

790. Pul founds the Aſſyrian empire.

788. Aſychis reigns in Egypt, and builds the eaſtern portico of the temple of Vulcan very ſplendidly; and a large pyramid of brick made of mud, dug out of the Lake of Mœris. Egypt breaks into ſeveral kingdoms. Gnephactus and Boccharis reign ſucceſſively in the upper Egypt; Stephanates, Nechepſos, and Nechus, at Sais; Anyſis, or Amoſis, at Anyſis, or Hanes; and Tacellotis at Bubaſte.

776. Iphitus reſtores the olympiads: and from this æra the olympiads are now reckoned. Gnephactus reigns at Memphis.

772. Necepſos and Petoſiris invent aſtrology in Egypt.

762. Boccharis reigns in Egypt.

760. Semiramis begins to flouriſh. Sanchoniatho writes.

751. Sabacon the Ethiopian invades Egypt, now divided into various

various kingdoms; burns Boccharis; ſlays Nechus; and makes CHRONICLE. Anyſis fly.

747. Pul is ſucceeded at Babylon by Nabonaſſar; and at Nineveh, by Tiglathpilaſer. The Egyptians who fled from Sabacon carry their aſtronomy and aſtrology to Babylon; and found the æra of Nabonaſſar in Egyptian years of 365 days, beginning on the ſame day with thoſe of Egypt.

740. Tiglathpilaſſer king of Aſſyria takes Damaſcus, and captivates the Syrians.

729. Tiglathpilaſſer is ſucceeded by Salmanaſſer.

721. Salmanaſſer, king of the Aſſyrians, carries the ten tribes into captivity.

719. Sennacherib reigns over Aſſyria.

717. Tirhakah reigns in Æthiopia.

714. Sennacherib is put to flight by the Ethiopians and Egyptians.

713. The Medes revolt from the Aſſyrians. Sennacherib ſlain. Aſſerhadon ſucceeds him. This is that Aſſerhadon-Pul, or Sardanapalus, the ſon of Anacyndaraxis or Sennacherib, who built Tarſus and Anchiale in one day.

710. Lycurgus brings the poems of Homer out of Aſia into Greece.

708. Lycurgus becomes tutor to Charillus, or Charilaus, the young king of Sparta. Ariſtotle makes Lycurgus as old as Iphitus, becauſe his name was upon the olympic diſc. But the diſc was one of the five games called the Quinquertium; and the Quinquertium was firſt inſtituted upon the eighteenth olympiad. Socrates and Thucydides made the inſtitutions of Lycurgus about 300 years older than the end of the Peloponneſian war; that is, 705 years before Chriſt.

701. Sabacon, after a reign of 50 years, relinquiſhes Egypt to his ſon Sevechus, or Sethon; who becomes prieſt of Vulcan, and neglects military affairs.

698. Maneſſes reigns.

697. The Corinthians began firſt of any men to build ſhips with three orders of oars, called Triremes. Hitherto the Greeks had uſed long veſſels of fifty oars.

687.

CHRONICLE.

687. Tirhakah reigns in Egypt.

681. Aſſerhadon takes Babylon.

673. The Jews conquered by Aſſerhadon, and Manaſſes carried captive to Babylon.

671. Aſſerhadon invades Egypt. The government of Egypt committed to twelve princes.

668. The weſtern nations of Syria, Phœnicia, and Egypt, revolt from the Aſſyrians. Aſſerhadon dies, and is ſucceeded by Saoſduchinus. Maneſſes returns from captivity.

658. Phraortes reigns in Media. The Prytanes reign in Corinth, expelling their kings.

657. The Corinthians overcome the Corcyreans at ſea; and this was the oldeſt ſea-fight. Achias the ſon of Evagetus, of the ſtock of Hercules, led a colony from Corinth into Sicily, and built Syracuſe.

655. The firſt Meſſenian war begins: it laſted twenty years. Pſammiticus becomes king of all Egypt, by conquering the other eleven kings, with whom he had already reigned fifteen years; he reigned about 39 years more. Henceforward the Ionians had acceſs into Egypt; and thence came the Ionian philoſophy, aſtronomy, and geometry.

650. Charops the firſt decennial archon of the Athenians. Some of theſe archons might die before the end of the ten years, and the remainder of the ten years be ſupplied by a new archon: and hence the ſeven decennial archons might not take up above forty or fifty years.

647. Saoſduchinus king of Aſſyria dies, and is ſucceeded by Chyniladon.

640. Joſias reigns in Judæa.

636. Phraortes king of the Medes is ſlain in a war againſt the Aſſyrians. Aſtyages ſucceeds him.

635. The Scythians invade the Medes and Aſſyrians.

633. Battus builds Cyrene, where Iraſa, the city of Antæus, had ſtood.

625. Nabopolaſſar revolts from the king of Aſſyria, and reigns over Babylon.

624. Phalantus leads the Parthenians into Italy, and builds Tarentum.

617. The ſecond Meſſenian war begins. Pſammiticus dies. Nechao reigns in Egypt. Rome is built. CHRONICLE.

611. Cyaxeres reigns over the Medes.

610. Creon the firſt annual archon of the Athenians. The princes of the Scythians ſlain in a feaſt by Cyaxeres.

609. Joſiah ſlain. Cyaxeres and Nebuchadnezzar overthrow Niniveh; and, by ſharing the Aſſyrian empire, grow great.

607. Cyaxeres makes the Scythians retire beyond Colchos and Iberia; and ſeizes the Aſſyrian provinces of Armenia, Pontus, and Cappadocia.

606. Nebuchadnezzar invades Syria and Judæa. Cyaxeres makes war upon Alyattes king of Lydia.

604. Nabopolaſſar dies; and is ſucceeded by his ſon Nebuchadnezzar, who had already reigned two years with his father.

601. In the ſixth year of the Lydian war, a total eclipſe of the ſun, predicted by Thales, April 28, between 8 and 9 of the clock in the morning, puts an end to a battle between the Medes and Lydians. Whereupon they make peace; and ratify it by a marriage between Aſtyages, the ſon of Cyaxeres, and Ariene the daughter of Alyattes.

600. Darius the Mede, the ſon or grandſon of Cyaxeres, is born.

599. Cyrus is born of Mandane, the ſiſter of Cyaxeres, and daughter of Aſtyages.

598. The Meſſenians, being conquered, fly into Sicily and build Meſſana.

596. Suſiana and Elam conquered by Nebuchadnezzar. Caranus and Perdiccas fly from Phidon, and found the kingdom of Macedon. Phidon introduces weights and meaſures, and the coining of ſilver money.

588. The temple of Solomon is burnt by Nebuchadnezzar.

584. Phidon preſides in the 49th olympiad.

580. Draco is archon of the Athenians, and makes laws for them. Phidon is overthrown. Two men choſen by lot out of the city Elis, to preſide in the olympic games.

575. The Amphictyons make war upon the Cyrrheans, by the advice of Solon, and take Cyrrha. Cliſthenes, Alcmæon,

CHRONICLE. and Eurolycus, commanded the forces of the Amphictyons, and were contemporary to Phidon. For Leocides the ſon of Phidon, and Megacles the ſon of Alcmæon, at one and the ſame time courted Agariſta the daughter of Cliſthenes.

569. Nebuchadnezzar invades Egypt. Darius the Mede reigns.

563. Solon being archon of the Athenians, makes laws for them.

557. Periander dies; and Corinth becomes free from tyrants.

555. Nabonnidus reigns at Babylon. His mother Nitocris adorns and fortifies that city.

553. The conference between Crœſus and Solon.

550. Piſiſtratus becomes tyrant at Athens.

547. Sardes is taken by Cyrus. Darius the Mede re-coins the Lydian money into Darics. Solon dies, Hegiſtratus being archon of Athens.

538. Babylon is taken by Cyrus.

536. Cyrus overcomes Darius the Mede, and tranſlates the empire to the Perſians. The Jews return from captivity.

529. Cyrus dies. Cambyſes reigns.

521. Darius the ſon of Hyſtaſpes reigns. The Magi are ſlain. The various religions of the ſeveral nations of Perſia, which conſiſted in the worſhip of their ancient kings, are aboliſhed; and by the influence of Hyſtaſpes and Zoroaſtres the worſhip of the ſupreme God, at altars without temples, is ſet up in all Perſia.

520. The ſecond temple is built at Jeruſalem by the command of Darius.

515. The ſecond temple is finiſhed and dedicated.

513. Harmodius and Ariſtogiton ſlay Hipparchus, the ſon of Piſiſtratus, tyrant of the Athenians.

508. The kings of the Romans expelled and conſuls erected.

491. The battle of Marathon.

485. Xerxes reigns.

480. The paſſage of Xerxes over the Helleſpont into Greece, and battles of Thermopylæ and Salamis.

464. Artaxerxes Longimanus reigns.

457. Ezra returns into Judæa. Jonathan, the father of Jadua, was now grown up; having a chamber in the temple.

444. Nehemiah returns into Judæa. Herodotus writes. CHRONICLE.

431. The Peloponneſian war begins.

428. Nehemiah drives away Eliezar, the brother of Jadua; becauſe he had married Nicaſo, the daughter of Sanballat.

424. Darius Nothus reigns.

422. Sanballat builds a temple in Mount Gerizim, and makes his ſon-in-law Eleazar the firſt high-prieſt thereof.

412. Hitherto the prieſts and Levites were numbered and written in the chronicles of the Jews before the death of Nehemiah: at which time either Johanan or Jadua was high-prieſt: and here ends the ſacred hiſtory of the Jews.

405. Artaxerxes Mnemon reigns. The end of the Peloponneſian war.

332. The Perſian empire conquered by Alexander the Great.

331. Darius Codomanus, the laſt king of Perſia, ſlain.

END OF THE CHRONOLOGY.

OBSERVATIONS

UPON THE

PROPHECIES OF HOLY WRIT,

PARTICULARLY THE

PROPHECIES OF DANIEL,

AND THE

APOCALYPSE OF ST. JOHN.

PART I.

UPON THE

PROPHECIES OF DANIEL.

CONTENTS OF THIS BOOK.

PART I.

UPON THE PROPHECIES OF DANIEL.

CHAPTER I. *Concerning the compilers of the books of the Old Teſtament,* - - pag. 297
II. *Of the prophetic language,* - - 306
IV. *Of the viſion of the Four Beaſts,* - 313
V. *Of the kingdoms repreſented by the feet of the Image compoſed of iron and clay,* 316
VI. *Of the ten kingdoms repreſented by the ten horns of the Beaſt,* - - - 324
VII. *Of the eleventh horn of Daniel's fourth Beaſt,* 341
VIII. *Of the power which ſhould change times and laws,* 350
IX. *Of the kingdoms repreſented in Daniel by the Ram and He-Goat,* - - - 365
X. *Of the prophecy of the ſeventy weeks,* - 372
XI. *Of the times of the birth and paſſion of Chriſt,* 384
XII. *Of the prophecy of the Scripture of Truth,* 398
XIII. *Of the king who doeth according to his will,* &c. 413
XIV. *Of the Mahuzzim, honoured by the king who doeth according to his will,* - - 418

PART II.

Obſervations upon the apocalypſe of St. John, - 440

OBSERVATIONS

UPON THE

PROPHECIES, &c.

CHAP. I.

Introduction concerning the Compilers of the books of the Old Teſtament.

WHEN Manaſſes ſet up a carved image in the houſe of the Lord, and built altars in the two courts of the houſe to all the hoſt of heaven, and uſed inchantments and witchcraft and familiar ſpirits, and for his great wickedneſs was invaded by the army of Aſſerhadon king of Aſſyria, and carried captive to Babylon; the book of the Law was loſt till the eighteenth year of his grandſon Joſiah. Then Hilkiah the high-prieſt, upon repairing the temple, found it there; and the king lamented, that their fathers had not done after the words of the book, and commanded that it ſhould be read to the people, and cauſed the people to renew the holy covenant with God. This is the book of the Law now extant. 2 Chron. xxxiii. 5, 6, 7. 2 Chron. xxxiv.

II. When Shiſhak came out of Egypt and ſpoiled the temple, and brought Judah into ſubjection to the monarchy of Egypt (which was in the fifth year of Rehoboam) the Jews continued under 2 Chron xii. 2, 3, 4, 8, 9. and xv. 3, 5, 10.

CHAPTER FIRST.

great troubles for about twenty years; being "without the true "God, and without a teaching-prieſt, and without law: and in "thoſe times there was no peace to him that went out, nor to "him that came in, but great vexations were upon all the inha- "bitants of the countries, and nation was deſtroyed of nation, "and city of city, for God did vex them with all adverſity."

2 Chron. xiv. 1,6,7,8,9,12. But when Shiſhak was dead, and Egypt fell into troubles, Judah had quiet ten years; and in that time Aſa built fenced cities in Judah, and got up an army of 580000 men; with which, in the 15th year of his reign, he met and overcame Zerah the Ethiopian; who had conquered Egypt and Libya, and Troglodytica, and came out with an army of 1000000 Libyans and Ethiopians, to recover the countries conquered by Seſac. And

2 Chron. xv. 3, 12, 13, 16, 18. after this victory Aſa dethroned his mother for idolatry; and he renewed the altar, and brought new veſſels of gold and ſilver into the temple; and he and the people entered into a new covenant to ſeek the Lord God of their fathers, upon pain of death to thoſe who worſhipped other gods; and his ſon Jehoſaphat took away the high places; and in the third year of his reign ſent ſome of his princes, and of the prieſts and Levites, to teach in the cities of Judah; and they had the book of the Law with them, and went about throughout all the cities of Judah, and taught the people. This is that book of the Law which was afterwards loſt in the reign of Manaſſes, and found again in the reign of Joſiah; and therefore it was written before the third year of Jehoſaphat.

III. The ſame book of the Law was preſerved and handed down to poſterity by the Samaritans; and therefore was received by the

2 Kings xvii. 27, 28, 32, 33. ten tribes before their captivity. For when the ten tribes were captivated, a prieſt of the captivity was ſent back to Bethel, by order of the king of Aſſyria, to inſtruct the new inhabitants of Samaria, in "the manner of the God of the land;" and the Samaritans had the Pentateuch from this prieſt, as containing the law or "manner of the God of the land," which he was to teach

2 Kings xvii. 34, 41. them. For they perſevered in the religion which he taught them, joining with it the worſhip of their own gods; and by perſevering in what they had been taught, they preſerved this book

book of their law in the original character of the Hebrews; while the two tribes, after their return from Babylon, changed the character to that of the Chaldees, which they had learned at Babylon.

JEWISH CANON.

IV. And ſince the Pentateuch was received as the book of the Law, both by the two tribes and by the ten tribes; it follows, that they received it before they became divided into two kingdoms. For after the diviſion, they received not laws from one another, but continued at variance. Judah could not reclaim Iſrael from the ſin of Jeroboam, and Iſrael could not bring Judah to it. The Pentateuch therefore was the book of the Law in the days of David and Solomon. The affairs of the tabernacle and temple were ordered by David and Solomon, according to the law of this book; and David in the 78th Pſalm, admoniſhing the people to give ear to the law of God, means the law of this book. For in deſcribing how their forefathers kept it not, he quotes many hiſtorical things out of the books of Exodus and Numbers.

V. The race of the kings of Edom, before there reigned any king over Iſrael, is ſet down in the book of Geneſis; and therefore that book was not written, entirely in the form now extant, before the reign of Saul. The writer ſet down the race of thoſe kings till his own time; and therefore wrote, before David conquered Edom. The Pentateuch is compoſed of the law and the hiſtory of God's people together; and the hiſtory hath been collected from ſeveral books: ſuch as were the Hiſtory of the Creation compoſed by Moſes, Gen. ii. 4; the Book of the Generations of Adam, Gen. v. i; and the Book of the Wars of the Lord, Num. xxi. 14. This Book of Wars contained what was done at the Red Sea, and in the journeying of Iſrael through the Wilderneſs, and therefore was begun by Moſes: and Joſhua might carry it on to the conqueſt of Canaan. For Joſhua wrote ſome things in the book of the law of God (Joſh. xxiv. 26.) and therefore might write his own wars in the Book of Wars; thoſe being the principal wars of God. Theſe were public books; and therefore not written without the authority of Moſes and Joſhua. And Samuel had leiſure in the reign of Saul to put them into the

CHAPTER FIRST.

form of the books of Moſes and Joſhua now extant, inſerting into the book of Geneſis the race of the kings of Edom, until there reigned a king in Iſrael.

VI. The book of the Judges is a continued hiſtory of the Judges down to the death of Sampſon; and therefore was compiled after his death out of the acts of the Judges. Several things in this book are ſaid to be done "when there was no king in Iſrael," (Judg. xvii. 6. xviii. 1. xix. 1. xxi. 25.) and therefore this book was written after the beginning of the reign of Saul. When it was written, the Jebuſites dwelt in Jeruſalem (Jud. i. 21); and therefore it was written before the eighth year of David (2 Sam. v. 8. and 1 Chron. xi. 6.) The books of Moſes, Joſhua, and Judges, contain one continued hiſtory, down from the creation to the death of Sampſon. Where the Pentateuch ends, the book of Joſhua begins; and where the book of Joſhua ends, the book of Judges begins. Therefore all theſe books have been compoſed out of the writings of Moſes, Joſhua, and other records, by one and the ſame hand, after the beginning of the reign of Saul, and before the eighth year of David. And Samuel was a ſacred writer (1 Sam. x. 25.) acquainted with the hiſtory of Moſes and the Judges (1 Sam. 8, 9, 10, 11, 12.) and had leiſure in the reign of Saul, and ſufficient authority to compoſe theſe books. He was a prophet, and judged Iſrael all the days of his life, and was in the greateſt eſteem with the people; and the law, by which he was to judge the people, was not to be publiſhed by leſs authority than his own, the law-maker being not inferior to the judge. And the book of Jaſher, which is quoted in the book of Joſhua (Joſh. x. 13.) was in being at the death of Saul (2 Sam. i. 18.)

VII. At the dedication of the temple of Solomon, when the Ark was brought into the moſt holy place, there was nothing in it but the two tables (1 Kings viii. 9.) and therefore when the Philiſtines took the Ark, they took out of it the book of the law, and the golden pot of manna, and Aaron's rod. And this and other loſſes in the deſolation of Iſrael, by the conquering Philiſtines, might give occaſion to Samuel, after ſome reſpite from thoſe enemies, to recollect the ſcattered writings of Moſes and Joſhua,

Joſhua, and the records of the patriarchs and judges, and compoſe them in the form now extant.

JEWISH CANON.

VIII. The book of Ruth is a hiſtory of things done in the days of the Judges, and may be looked upon as an addition to the book of the Judges, written by the ſame author, and at the ſame time. For it was written after the birth of David (Ruth iv. 17, 22.) and not long after; becauſe the hiſtory of Boaz and Ruth, the great-grandfather and great-grandmother of David, and that of their contemporaries, could not be well remembered above two or three generations. And ſince this book derives the genealogy of David from Boaz and Ruth, and omits David's elder brothers and his ſons; it was written in honour of David, after he was anointed king by Samuel, and before he had children in Hebron, and by conſequence in the reign of Saul. It proceeds not to the hiſtory of David; and therefore ſeems to have been written, preſently after he was anointed. They judge well, therefore, who aſcribe to Samuel the books of Joſhua, Judges, and Ruth.

IX. Samuel is alſo reputed the author of the firſt book of Samuel, till the time of his death. The two books of Samuel cite no authors, and therefore ſeem to be originals. They begin with his genealogy, birth, and education, and might be written partly in his life-time by himſelf, or his diſciples the prophets at Naioth in Ramah (1 Sam. xix. 18, 19, 20.) and partly after his death by the ſame diſciples.

X. The books of the Kings cite other authors; as the book of the Acts of Solomon; the book of the Chronicles of the kings of Iſrael; and the book of the Chronicles of the kings of Judah. The books of the Chronicles cite the book of Samuel the ſeer; the book of Nathan the prophet; and the book of Gad the ſeer, for the acts of David: the book of Nathan the prophet; the prophecy of Ahijah the Shilonite; and the viſions of Iddo the ſeer, for the acts of Solomon: the book of Shemajah the prophet; and the book of Iddo the ſeer concerning genealogies, for the acts of Rehoboam and Abijah: the book of the kings of Judah and Iſrael for the acts of Aſa, Joaſh, Amaziah, Jotham, Ahaz, Hezekiah, Manaſſeh, and Joſiah: the book of Hanani the

CHAPTER FIRST.

the ſeer, for the acts of Jehoſaphat; and the viſions of Iſaiah for the acts of Uzziah and Hezekiah. Theſe books were therefore collected out of the hiſtorical writings of the antient ſeers and prophets. And becauſe the books of the Kings and Chronicles quote one another, they were written at one and the ſame time: and this time was after the return from the Babylonian captivity; becauſe they bring down the hiſtory of Judah, and the genealogies of the kings of Judah, and of the high-prieſts, to that captivity. The book of Ezra was originally a part of the book of the Chronicles, and has been divided from it: for it begins with the two laſt verſes of the books of Chronicles; and the firſt book of Eſdras begins with the two laſt chapters thereof. Ezra was therefore the compiler of the books of Kings and Chronicles, and brought down the hiſtory to his own time. He was a ready ſcribe in the law of God; and for aſſiſting him in this work Nehemias founded a library, and "gathered together "the acts of the kings and the prophets, and of David, and the "epiſtles of the kings concerning the holy gifts" (2 Maccab. ii. 13.) By the Acts of David, I underſtand here the two books of Samuel, or at leaſt the ſecond book. Out of the Acts of the Kings, written from time to time by the prophets, he compoſed the books of the kings of Judah and Iſrael, the Chronicles of the kings of Judah, and the Chronicles of the kings of Iſrael. And in doing this he joined thoſe acts together in due order of time, copying the very words of the authors; as is manifeſt from hence, that the books of the Kings and Chronicles frequently agree with one another in words for many ſentences together: where they agree in ſenſe, there they agree in words alſo.

XI. So the prophecies of Iſaiah, written at ſeveral times, he has collected into one body: and the like he did for thoſe of Jeremiah, and the reſt of the prophets, down to the days of the ſecond temple. The book of Jonah is the hiſtory of Jonah, written by another hand. The book of Daniel is a collection of papers written at ſeveral times. The ſix laſt chapters contain prophecies, written at ſeveral times by Daniel himſelf; the ſix firſt are a collection of hiſtorical papers written by others: the fourth

fourth chapter is a decree of Nebuchadnezzar: the firſt chapter was written after Daniel's death; for the author ſaith, that Daniel continued to the firſt year of Cyrus; that is, to his firſt year over the Perſians and Medes, and third year over Babylon: and, for the ſame reaſon, the fifth and ſixth chapters were alſo written after his death; for they end with theſe words: "So "this Daniel proſpered in the reign of Darius, and in the reign "of Cyrus the Perſian:" yet theſe words might be added by the collector of the papers, whom I take to be Ezra.

JEWISH CANON.

XII. The pſalms compoſed by Moſes, David, and others, ſeem to have been alſo collected by Ezra into one volume. I reckon him the collector, becauſe in this collection I meet with pſalms as late as the Babylonian captivity, but with none later.

XIII. After theſe things Antiochus Epiphanes ſpoiled the temple; commanded the Jews to forſake the Law upon pain of death; and cauſed the ſacred books to be burnt wherever they could be found: and in theſe troubles the book of the Chronicles of the kings of Iſrael was entirely loſt. But upon recovering from this oppreſſion, Judas Maccabæus gathered together all thoſe writings that were to be met with (2 Maccab. ii. 14.) and in reducing them into order, part of the prophecies of Iſaiah, or ſome other prophet, have been added to the end of the prophecies of Zechariah; and the book of Ezra has been ſeparated from the book of Chronicles, and ſet together in two different orders; in one order in the book of Ezra, received into the canon, and in another order in the firſt book of Eſdras.

XIV. After the Roman captivity, the Jews, for preſerving their traditions, put them in writing in their Talmud; and for preſerving their ſcriptures, agreed upon an edition; and pointed it, and counted the letters of every ſort in every book: and by preſerving only this edition, the antienter various lections, except what can be diſcovered by means of the Septuagint verſion, are now loſt; and ſuch marginal notes, or other corruptions, as by the errors of the tranſcribers, before this edition was made, had crept into the text, are now ſcarce to be corrected.

XV. The Jews, before the Roman captivity, diſtinguiſhed the ſacred books into the Law, the Prophets, and the Hagiographa, or holy

CHAPTER FIRST.

holy writings; and read only the law and the prophets in their ſynagogues. And Chriſt and his apoſtles laid the ſtreſs of religion upon the law and the prophets (Matt. vii. 12. xxii. 4. Luke xvi. 16, 29, 31. xxiv. 44. Acts xxiv. 14. xxvi. 22. Rom. iii. 21.) By the Hagiographa they meant the hiſtorical books, called Joſhua, Judges, Ruth, Samuel, Kings, Chronicles, Ezra, Nehemiah, and Eſther, the book of Job, the Pſalms, the books of Solomon, and the Lamentations. The Samaritans read only the Pentateuch: and when Jehoſaphat ſent men to teach in the cities, they had with them only the book of the law; for the prophecies now extant were not then written. And upon the return from the Babylonian captivity, Ezra read only the book of the law to the people, from morning to noon, on the firſt day of the ſeventh month; and from day to day in the feaſt of tabernacles: for he had not yet collected the writings of the prophets into one volume now extant; but inſtituted the reading of them after the collection was made. By reading the law and the prophets in the ſynagogues, thoſe books have been kept freer from corruption than the Hagiographa.

XVI. In the infancy of the nation of Iſrael, when God had given them a law, and made a covenant with them to be their God if they would keep his commandments, he ſent prophets to reclaim them, as often as they revolted to the worſhip of other gods: and upon their returning to him, they ſometimes renewed the covenant which they had broken. Theſe prophets he continued to ſend till the days of Ezra: but after their prophecies were read in the ſynagogues, thoſe prophecies were thought ſufficient. For if the people would not hear Moſes and the old prophets, they would hear no new ones, no not "though they ſhould riſe "from the dead." At length when a new treaty was to be preached to the Gentiles, namely, "that Jeſus was the Chriſt," God ſent new prophets and teachers: but after their writings were alſo received and read in the ſynagogues of the Chriſtians, prophecy ceaſed a ſecond time. We have Moſes, the prophets, and apoſtles, and the words of Chriſt himſelf; and if we will not hear them, we ſhall be more inexcuſable than the Jews. For the prophets and apoſtles have foretold, that as Iſrael often revolted

JEWISH CANON.

volted and brake the covenant, and upon repentance renewed it; ſo there ſhould be a falling away among the Chriſtians, ſoon after the days of the apoſtles; and that in the latter days God would deſtroy the impenitent revolters, and make a new covenant with his people: and the giving ear to the prophets is a fundamental character of the true church. For God has ſo ordered the prophecies, that in the latter days "the wiſe may underſtand, "but the wicked ſhall do wickedly, and none of the wicked "ſhall underſtand," (Dan. xii. 9, 10.) The authority of emperors, kings, and princes, is human. The authority of councils, ſynods, biſhops, and preſbyters, is human. The authority of the prophets is divine, and comprehends the ſum of religion, reckoning Moſes and the apoſtles among the prophets; and "if "an angel from heaven preach any other goſpel *than what they* "*have preached*, let him be accurſed." Their writings contain the covenant between God and his people, with inſtructions for keeping this covenant; inſtances of God's judgments upon them that break it; and predictions of things to come. While the people of God keep the covenant, they continue to be his people: when they break it, they ceaſe to be his people or church, and become "the ſynagogue of God, who ſay they are Jews and are "not." And no power on earth is authorized to alter this covenant.

XVII. The predictions of things to come relate to the ſtate of the church in all ages: and amongſt the old prophets, Daniel is moſt diſtinct in order of time, and eaſieſt to be underſtood: and therefore in thoſe things which relate to the laſt times, he muſt be made the key to the reſt.

CHAP. II.

OF THE PROPHETIC LANGUAGE.

CHAPTER SECOND.

FOR underſtanding the prophecies, we are, in the firſt place, to acquaint ourſelves with the figurative language of the prophets. This language is taken from the analogy between the world natural, and an empire or kingdom conſidered as a world politic.

II. Accordingly, the whole world natural conſiſting of Heaven and Earth, ſignifies the whole world politic, conſiſting of Thrones and People; or ſo much of it as is conſidered in the prophecy: and the things in that world ſignify the analogous things in this. For the Heavens, and the things therein, ſignify thrones and dignities, and thoſe who enjoy them; and the Earth, with the things thereon, the inferior people; and the loweſt parts of the Earth, called Hades, or Hell, the loweſt or moſt miſerable part of them. Whence aſcending towards heaven, and deſcending to the earth, are put for riſing and falling in power and honour: riſing out of the earth, or waters, and falling into them, for the riſing up to any dignity or dominion, out of the inferior ſtate of the people, or falling down from the ſame into that inferior ſtate; deſcending into the lower parts of the earth, for deſcending to a very low and unhappy ſtate; ſpeaking with a faint voice out of the duſt, for being in a weak and low condition; moving from one place to another, for tranſlation from one office, dignity, or dominion, to another; great earthquakes, and the ſhaking of heaven and earth, for the ſhaking of dominions, ſo as to diſtract or overthrow them; the creating a new heaven and earth, and the paſſing away of an old one, or the beginning

ning and end of the world, for the riſe and ruin of the body politic ſignified thereby. PROPHETIC LANGUAGE.

III. In the heavens, the Sun and Moon are, by interpreters of dreams, put for the perſons of kings and queens. But in ſacred prophecy, which regards not ſingle perſons, the Sun is put for the whole ſpecies and race of kings, in the kingdom or kingdoms of the world politic, ſhining with regal power and glory; the Moon for the body of the common people, conſidered as the king's wife; the Stars for ſubordinate princes and great men, or for biſhops and rulers of the people of God, when the Sun is Chriſt; Light for the glory, truth, and knowledge, wherewith great and good men ſhine and illuminate others; Darkneſs for obſcurity of condition, and for error, blindneſs, and ignorance; darkening, ſmiting, or ſetting of the ſun, moon, and ſtars, for the ceaſing of a kingdom, or for the deſolation thereof, proportional to the darkneſs; darkening the ſun, turning the moon into blood, and falling of the ſtars, for the ſame; new moons, for the return of a diſperſed people into a body politic or eccleſiaſtic.

IV. Fire and meteors refer to both heaven and earth, and ſignify as follows; burning any thing with fire, is put for the conſuming thereof by war; a conflagration of the earth, or turning a country into a lake of fire, for the conſumption of a kingdom by war; the being in a furnace, for the being in ſlavery under another nation; the aſcending up of the ſmoke of any burning thing for ever and ever, for the continuation of a conquered people under the miſery of perpetual ſubjection and ſlavery; the ſcorching heat of the ſun, for vexatious wars, perſecutions and troubles inflicted by the king; riding on the clouds, for reigning over much people; covering the ſun with a cloud, or with ſmoke, for oppreſſion of the king by the armies of an enemy; tempeſtuous winds, or the motion of clouds, for wars; thunder, or the voice of a cloud, for the voice of a multitude; a ſtorm of thunder, lightening, hail, and overflowing rain, for a tempeſt of war deſcending from the heavens and clouds politic, on the heads of their enemies; rain, if not immoderate, and

CHAPTER SECOND.

dew, and living water, for the graces and doctrines of the Spirit; and the defect of rain, for ſpiritual barrenneſs.

V. In the earth, the dry land and congregated waters, as a ſea, a river, a flood, are put for the people of ſeveral regions, nations, and dominions; embittering of waters, for great affliction of the people by war and perſecution; turning things into blood, for the myſtical death of bodies politic, that is, for their diſſolution; the overflowing of a ſea or river, for the invaſion of the earth politic, by the people of the waters; drying up of waters, for the conqueſt of their regions by the earth; fountains of waters for cities, the permanent heads of rivers politic; mountains and iſlands, for the cities of the earth and ſea politic, with the territories and dominions belonging to thoſe cities; dens and rocks of mountains, for the temples of cities; the hiding of men in thoſe dens and rocks, for the ſhutting up of idols in their temples; houſes and ſhips, for families, aſſemblies, and towns, in the earth and ſea politic; and a navy of ſhips of war, for an army of that kingdom that is ſignified by the ſea.

VI. Animals alſo and Vegetables are put for the people of ſeveral regions and conditions; and particularly trees, herbs, and land animals, for the people of the earth politic: flags, reeds, and fiſhes, for thoſe of the waters politic; birds and inſects, for thoſe of the politic heaven and earth; a foreſt, for a kingdom; and a wilderneſs, for a deſolate and thin people.

VII. If the world politic, conſidered in prophecy, conſiſts of many kingdoms; they are repreſented by as many parts of the world natural; as the nobleſt by the celeſtial frame, and then the moon and clouds are put for the common people; the leſs noble, by the earth, ſea, and rivers, and by the animals or vegetables, or buildings therein; and then the greater and more powerful animals and taller trees, are put for kings, princes, and nobles. And becauſe the whole kingdom is the body politic of the king; therefore the ſun, or a tree, or a beaſt, or bird, or a man, whereby the king is repreſented, is put in a large ſignification for the whole kingdom; and ſeveral animals, as a lion, a bear, a leopard, a goat, according to their qualities, are put for ſeveral

PROPHETIC LANGUAGE.

ſeveral kingdoms and bodies politic; and ſacrificing of beaſts, for ſlaughtering and conquering of kingdoms; and friendſhip between beaſts, for peace between kingdoms. Yet ſometimes vegetables and animals are, by certain epithets or circumſtances, extended to other ſignifications; as a tree, when called the "tree of life" or "of knowledge;" and a beaſt, when called "the old ſerpent," or worſhiped.

VIII. When a beaſt or man is put for a kingdom, his parts and qualities are put for the analogous parts and qualities of the kingdom: as the head of a beaſt, for the great men who precede and govern; the tail for the inferior people, who follow and are governed; the heads, if more than one, for the number of capital parts, or dynaſties, or dominions in the kingdom, whether collateral or ſucceſſive, with reſpect to the civil government; the horns on any head, for the number of kingdoms in that head, with reſpect to military power; ſeeing, for underſtanding; and the eyes, for men of underſtanding and policy; and in matters of religion, for Επισκοποι, biſhops; ſpeaking, for making laws; the mouth, for a law-giver, whether civil or ſacred; the loudneſs of the voice, for might and power; the faintneſs thereof, for weakneſs; eating and drinking, for acquiring what is ſignified by the things eaten and drank; the hairs of a beaſt or man, and the feathers of a bird, for people; the wings, for the number of kingdoms repreſented by the beaſt; the arm of a man, for his power, or for any people wherein his ſtrength and power conſiſts; his feet, for the loweſt of the people, or for the latter end of the kingdom; the feet, nails, and teeth of beaſts of prey, for armies and ſquadrons of armies; the bones, for ſtrength, and for fortified places; the fleſh, for riches and poſſeſſions; and the days of their acting, for years; and when a tree is put for a kingdom, its branches, leaves, and fruit, ſignify as do the wings, feathers, and food of a bird or beaſt.

IX. When a man is taken in a myſtical ſenſe; his qualities are often ſignified by his actions, and by the circumſtances of things about him. So a ruler is ſignified by his riding on a beaſt; a warrior and conqueror, by his having a ſword and bow; a potent man, by his gigantic ſtature; a judge, by weights and meaſures;

CHAPTER SECOND.

ſures; a ſentence of abſolution, or condemnation, by a white or a black ſtone; a new dignity, by a new name; moral or civil qualifications, by garments; honour and glory, by ſplendid apparel; royal dignity, by purple or ſcarlet, or by a crown; righteouſneſs, by white and clean robes; wickedneſs, by ſpotted and filthy garments; affliction, mourning, and humiliation, by clothing in ſack-cloth; diſhonour, ſhame, and want of good works, by nakedneſs; error and miſery, by drinking a cup of his or her wine that cauſeth it; propagating any religion for gain, by exerciſing traffick and merchandize with that people whoſe religion it is; worſhiping or ſerving the falſe gods of any nation, by committing adultery with their princes, or by worſhiping them; a council of a kingdom, by its image; idolatry, by blaſphemy; overthrow in war, by a wound of man or beaſt; a durable plague of war, by a ſore and pain; the affliction or perſecution which a people ſuffers in labouring to bring forth a new kingdom, by the pain of a woman in labour to bring forth a man-child; the diſſolution of a body politic or eccleſiaſtic, by the death of a man or beaſt; and the revival of a diſſolved dominion, by the reſurrection of the dead.

CHAP.

CHAP. III.

OF THE VISION OF THE IMAGE COMPOSED OF FOUR METALS.

IMAGE OF FOUR METALS.

THE prophecies of Daniel are all of them related to one another, as if they were but ſeveral parts of one general prophecy, given at ſeveral times. The firſt is the eaſieſt to be underſtood, and every following prophecy adds ſomething new to the former. The firſt was given in a dream to Nebuchadnezzar king of Babylon, in the ſecond year of his reign; but the king forgetting his dream, it was given again to Daniel in a dream, and by him revealed to the king. And thereby Daniel preſently became famous for wiſdom, and revealing of ſecrets: inſomuch, that Ezekiel his contemporary, in the nineteenth year of Nebuchadnezzar, ſpake thus of him to the king of Tyre: "Behold," ſaith he, "thou art wiſer than Daniel, there "is no ſecret that they can hide from thee" (Ezek. xxviii. 3.) And the ſame Ezekiel, in another place, joins Daniel with Noah and Job, as moſt high in the favour of God (Ezek. xiv. 14, 16, 18, 20.) And in the laſt year of Belſhazzar, the queen-mother ſaid of him to the king: "Behold there is a man in thy "kingdom, in whom is the ſpirit of the holy gods; and in the "days of thy father, light and underſtanding and wiſdom, like "the wiſdom of the gods, was found in him; whom the king "Nebuchadnezzar thy father, the king, I ſay, thy father made "maſter of the magicians, aſtrologers, Chaldeans and ſooth-"ſayers: foraſmuch as an excellent ſpirit, and knowledge, and "underſtanding, interpreting of dreams, and ſhewing of hard "ſentences, and diſſolving of doubts, were found in the ſame "Daniel,

CHAPTER THIRD.

" Daniel, whom the king named Belteſhazzar" (Dan. v. 11, 12.) Daniel was in the greateſt credit amongſt the Jews, till the reign of the Roman emperor Hadrian: and to reject his prophecies, is to reject the Chriſtian religion. For this religion is founded upon his prophecy concerning the Meſſiah.

II. Now in this viſion of the image compoſed of four metals, the foundation of all Daniel's prophecies is laid. It repreſents a body of four great nations, which ſhould reign over the earth ſucceſſively, viz. the people of Babylonia, the Perſians, the Greeks, and the Romans. And by a ſtone cut out without hands, which fell upon the feet of the image, and brake all the four metals to pieces, and " became a great mountain, and filled the whole " earth;" it further repreſents that a new kingdom ſhould ariſe, after the four, and conquer all thoſe nations, and grow very great, and laſt to the end of all ages.

III. The head of the image was of Gold; and ſignifies the nations of Babylonia, who reigned firſt, as Daniel himſelf interprets. " Thou art this head of gold," ſaith he to Nebuchadnezzar. Theſe nations reigned till Cyrus conquered Babylon, and within a few months after that conqueſt revolted to the Perſians, and ſet them up above the Medes. The breaſt and arms of the image were of Silver; and repreſent the Perſians, who reigned next. The belly and thighs of the image were of Braſs; and repreſent the Greeks, who, under the dominion of Alexander the Great, conquered the Perſians, and reigned next after them. The legs were of Iron; and repreſent the Romans, who reigned next after the Greeks, and began to conquer them in the eighth year of Antiochus Epiphanes. For in that year they conquered Perſeus king of Macedon, the fundamental kingdom of the Greeks; and from thenceforward grew into a mighty empire, and reigned with great power till the days of Theodoſius the Great. Then by the incurſion of many northern nations, they brake into many ſmaller kingdoms, which are repreſented by the feet and toes of the image, compoſed part of iron, and part of clay. For then, ſaith Daniel, " the kingdom ſhall be di-
" vided, and there ſhall be in it of the ſtrength of iron, but
" they ſhall not cleave one to another.

" And in the days of theſe kings, ſaith Daniel, ſhall the
" God of heaven ſet up a kingdom which ſhall never be de-
" ſtroyed: and the kingdom ſhall not be left to other people;
" but it ſhall break in pieces, and conſume all theſe kingdoms,
" and it ſhall ſtand for ever. Foraſmuch as thou ſaweſt that
" the ſtone was cut out of the mountains without hands, and
" that it brake in pieces the iron, the braſs, the clay, the ſilver
" and the gold."

CHAP. IV.

Of the Viſion of the Four Beaſts.

IN the next viſion, which is of the Four Beaſts, the prophecy of the four empires is repeated, with ſeveral new additions; ſuch as are the two wings of the Lion; the three ribs in the mouth of the Bear; the four wings and four heads of the Leopard; the eleven horns of the fourth Beaſt; and the Son of man coming in the clouds of heaven, to the antient of days ſitting in judgment. DANIEL'S FOUR BEASTS.

II. The firſt Beaſt was like a lion, and had eagle's wings, to denote the kingdoms of Babylon and Media, which overthrew the Aſſyrian empire, and divided it between them; and thereby became conſiderable, and grew into great empires. In the former prophecy, the empire of Babylonia was repreſented by the head of gold; in this both empires are repreſented together by the two wings of the lion. " And I beheld," ſaith Daniel (a), " till [a] Chap. vii. 4.
" the wings thereof were plucked, and it was lifted up from the
" earth, and made to ſtand upon the feet as a man, and a man's

CHAPTER FOURTH.

"heart was given to it;" that is, till it was humbled and subdued, and made to know its human state.

III. The second beast was like a bear; and represents the empire which reigned next after the Babylonians, that is, the empire of the Persians. "Thy kingdom is divided," or broken, saith Daniel to the last king of Babylon, "and given to the Medes and "Persians" (Dan. v. 28.). This beast "raised itself up on one "side;" the Persians being under the Medes at the fall of Babylon, but presently rising up above them. "And it had three [a] Chap. vii. 5. "ribs in the mouth of it, between the teeth of it[a]," to signify the kingdoms of Sardes, Babylon, and Egypt, which were conquered by it, but did not belong to its proper body. And it devoured much flesh, the riches of those three kingdoms.

IV. The third beast was the kingdom which succeeded the Persian; and this was the empire of the Greeks (Dan. viii. 6, 7, 20, 21.) It was "like a Leopard," to signify its fierceness; and had four heads and four wings, to signify that it should become divided into four kingdoms (Dan. viii. 22.) for it continued in a monarchial form during the reign of Alexander the Great, and his brother Aridæus, and young sons Alexander and Hercules; and then brake into four kingdoms, by the governors of provinces putting crowns on their own heads, and by mutual consent reigning over their provinces. Cassander reigned over Macedon, Greece, and Epirus; Lysimachus over Thrace and Bithynia; Ptolemy over Egypt, Libya, Arabia, Cœlosyria, and Palestine; and Seleucus over Syria.

V. The fourth beast was the empire which succeeded that of the Greeks; and this was the Roman. This beast was exceeding dreadful and terrible, and had great iron teeth, and devoured and brake in pieces, and stamped the residue with its feet; and such was the Roman empire. It was larger, stronger, and more formidable and lasting than any of the former. It conquered the kingdom of Macedon, with Illyricum and Epirus, in the eighth year of Antiochus Epiphanes, anno Nabonass. 580; and inherited that of Pergamus, anno Nabonass. 615; and conquered that of Syria, anno Nabonass. 679, and that of Egypt, anno Nabonass. 718. And by these and other conquests it became

DANIEL'S FOUR BEASTS.

came greater and more terrrible than any of the three former beasts. This empire continued in its greatness till the reign of Theodosius the Great; and then brake into ten kingdoms, represented by the ten horns of this beast; and continued in a broken form till the antient of days sat in a throne like fiery flame, and "the judgment was set, and the books were opened, and the beast was slain and his body destroyed, and given "to the burning flames; and one like the Son of man came "with the clouds of heaven, and came to the ancient of days[a]," [a] Chap. vii. 13. and received dominion over all nations, and judgment was given to the saints of the most High, and the time came that they possessed the kingdom.

VI. "I beheld," saith Daniel[b], "till the beast was slain, and [b] Chap. vii. 11, 12. "his body destroyed, and given to the burning flames. As concern"ing the rest of the beasts, they had their dominion taken away: "yet their lives were prolonged for a season and a time." And therefore all the four beasts are still alive, though the dominion of the three first be taken away. The nations of Chaldea and Assyria are still the first beast: those of Media and Persia are still the second beast: those of Macedon, Greece, and Thrace, Asia Minor, Syria and Egypt, are still the third: and those of Europe, on this side Greece, are still the fourth. Seeing therefore the body of the third beast is confined to the nations on this side the river Euphrates, and the body of the fourth beast is confined to the nations on this side Greece; we are to look for all the four heads of the third beast among the nations on this side of the river Euphrates; and for all the eleven horns of the fourth beast, among the nations on this side of Greece. And therefore, at the breaking of the Greek empire into four kingdoms of the Greeks, we include no part of the Chaldeans, Medes, and Persians, in those kingdoms, because they belonged to the bodies of the two first beasts. Nor do we reckon the Greek empire seated at Constantinople, among the horns of the fourth beast, because it belonged to the body of the third.

CHAP. V.

Of the kingdoms repreſented by the feet of the image compoſed of iron and clay.

DACIA was a large country bounded on the ſouth by the Danube; on the eaſt, by the Euxine Sea; on the north, by the river Neiſter and the mountain Crapac; and on the weſt, by the river Tibeſis, or Teys, which runs ſouthward into the Danube a little above Belgrade. It comprehended the countries now called Tranſylvania, Moldavia, and Wallachia, and the eaſtern part of the upper Hungary. Its antient inhabitants were called Getæ by the Greeks, Daci by the Latins, and Goths by themſelves. Alexander the Great attacked them, and Trajan conquered them, and reduced their country into a province of the Roman empire: and thereby the propagation of the Goſpel among them was much promoted. They were compoſed of ſeveral Gothic nations, called Oſtrogoths, Viſigoths, Vandals, Gepides, Lombards, Burgundians, Alans, &c. who all agreed in their manners, and ſpake the ſame language, as Procopius repreſents (a). While they lived under the Romans, the Goths or Oſtrogoths were ſeated in the eaſtern parts of Dacia; the Vandals, in the weſtern part upon the river Teys, where the rivers Mareſh and Kereſh run into it: the Viſigoths were between them: the Gepides, according to Jornandes, were upon the Viſtula: the Burgundians, a Vandalic nation, were between the Viſtula and the ſouthern fountain of the Boriſthenes, at ſome diſtance from the mountain Crapac northwards; where Ptolemy places them, by the names of Phrugundiones and Burgiones: the Alans, another Gothic nation, were between the northern fountain of the Boriſthenes and the mouth of the river Tanais; where Ptolemy

(a) Procop. lib. 1. de Bell. Vandal.

lemy placeth the mountain Alanus, and weſtern ſide of the Paſus Mæotis. FEET OF DANIEL'S IMAGE.

II. Theſe nations continued under the dominion of the Romans till the ſecond year of the emperor Philip, and then for want of their military pay began to revolt; the Oſtrogoths ſetting up a kingdom, which, under their kings Oſtrogotha, Cniva, Araric, Geperic, and Hermanaric, encreaſed till the year of Chriſt 376; and then, by an incurſion of the Huns from beyond the Tanais, and the death of Hermanaric, brake into ſeveral ſmaller kingdoms. Hunnimund, the ſon of Hermanaric, became king over the Oſtrogoths; Fridigern over the Viſigoths; Winithar, or Vinithar, over a part of the Goths, called Gruthungi by Ammian, Gothunni by Claudian, and Sarmatæ and Scythians by others: Athanaric reigned over another part of the Goths in Dacia, called Thervingi; Box, over the Antes in Sarmatia; and the Gepides had alſo their king. The Vandals fled over the Danube from Geberic, in the latter end of the reign of Conſtantine the Great, and had ſeats granted them in Pannonia by that emperor; where they lived quietly forty years, viz. till the year 377; when ſeveral Gothic nations, flying from the Hunns, came over the Danube, and had ſeats granted them in Mæſia and Thrace by the Greek emperor Valens. But the next year they revolted; called in ſome Goths, Alans, and Hunns, from beyond the Danube; and routed the Roman army; ſlew the emperor Valens; and ſpread themſelves into Greece and Pannonia as far as the Alps. In the years 379 and 380 they were checked by the arms of the emperors Gratian and Theodoſius, and made a ſubmiſſive peace: the Viſigoths and Thervingi returned to their ſeats in Mæſia and Thrace; the Hunns retired over the Danube; and the Alans and Gruthingi obtained ſeats in Pannonia.

III. About the year 373, or 374, the Burgundians roſe from their ſeats upon the Viſtula, with an army of eighty thouſand men to invade Gallia; and being oppoſed, ſeated themſelves upon the northern ſide of the Rhine, over againſt Mentz. In the year 358 a body of the Salian Franks, with their king, coming from the river Sala, were received into the empire by the emperor Julian, and ſeated in Gallia between Brabant and the Rhine;

CHAPTER FIFTH.

and their king Mellobaudes was made *Comes domeſticorum* by the emperor Gratian. Richomer, another noble Salian Frank, was made *Comes domeſticorum*, and *Magiſter utriuſque Militiæ* by Theodoſius; and A. C. 384, was conſul with Clearchus. He was a great favourite of Theodoſius, and accompanied him in his wars againſt Eugenius; but died in the expedition, and left a ſon called Theudomir; who afterwards became king of the Salian Franks in Brabant. In the time of this war, ſome Franks from beyond the Rhine invaded Gallia under the conduct of Genobald, Marcomir, and Suno; but were repulſed by Stilico: and Marcomir being ſlain, was ſucceeded in Germany by his ſon Pharamond.

III. While theſe nations remained quiet within the empire, ſubject to the Romans, many others continued ſo beyond the Danube, till the death of the emperor Theodoſius; and then roſe up in arms. For Paulus Diaconus in his *Hiſtoria Miſcell.* lib. xiv. ſpeaking of the times next after the death of this emperor, tells us: *Eodem tempore erant Gothi & aliæ gentes maximæ trans Danubium habitantes: ex quibus rationabiliores quatuor ſunt, Gothi ſcilicet, Huiſogothi, Gepides & Vandali; & nomen tantùm & nihil aliud mutantes. Iſti ſub Arcadio & Honorio Danubium tranſeuntes, locati ſunt in terrâ Romanorum: & Gepides quidem, ex quibus poſtea diviſi ſunt Longobardi & Avares, villas, quæ ſunt circa Singidonum & Sirmium, habitavere.* And Procopius, in the beginning of his *Hiſtoria Vandalica*, writes to the ſame purpoſe. Hitherto the Weſtern Empire continued entire, but now brake into many kingdoms.

IV. Theodoſius died A. C. 395; and then the Viſigoths, under the conduct of Alaric, the ſucceſſor of Fridigern, roſe from their ſeats in Thrace, and waſted Macedon, Theſſaly, Achaia, Peloponneſus, and Epirus, with fire and ſword for five years together; when turning weſtward, they invaded Dalmatia, Illyricum, and Pannonia; and from thence went into Italy, A. C. 402; and the next year were ſo beaten at Pollentia and Verona, by Stilico the commander of the forces of the Weſtern Empire, that Claudian calls the remainder of the forces of Alaric, *tantâ ex gente reliquias breves*; and Prudentius, *Gentem deletam.* Thereupon Alaric

made peace with the emperor, being ſo far humbled, that Oroſius ſaith he did, *pro pace optimâ & quibuſcunque ſedibus ſupplicitèr & ſimpliciter orare.* This peace was ratified by mutual hoſtages; Ætius was ſent hoſtage to Alaric; and Alaric continued a free prince in the ſeats now granted to him. FEET OF DANIEL'S IMAGE.

V. When Alaric took up arms, the nations beyond the Danube began to be in motion; and the next winter, between A. C. 395 and 396, a great body of Hunns, Alans, Oſtrogoths, Gepides, and other northern nations, came over the frozen Danube, being invited by Rufinus: when their brethren, who had obtained ſeats within the empire, took up arms alſo. Jerome calls this great multiude, Hunns, Alans, Vandals, Goths, Sarmatirans, Quades, and Marcomans; and ſaith, that they invaded all places between Conſtantinople and the Julian Alps; waſting Scythia, Thrace, Macedon, Dardania, Dacia, Theſſaly, Achaia, Epirus, Dalmatia, and all Pannonia. The Suevians alſo invaded Rhætia: for when Alaric ravaged Pannonia, the Romans were defending Rhætia; which gave Alaric an opportunity of invading Italy, as Claudian thus mentions.

"*Non niſi perfidiâ nacti penetrabile tempus,*
"*Irrupere Getæ, noſtras dum Rhætia vires*
"*Occupat, atque alio defudant Marte cohortes.*"

And when Alaric went from thoſe parts into Italy, ſome other barbarous nations invaded Noricum and Vindelicia, as the ſame poet Claudian thus writes:

"——— *Jam fœdera gentes*
"*Exuerant, Latiique auditâ clade feroces*
"*Vendelicos ſaltus & Norica rura tenebant.*"

This was in the years 402 and 403. And among theſe nations I reckon the Suevians, Quades, and Marcomans; for they were all in arms at this time. The Quades and Marcomans were Suevian nations; and they and the Suevians came originally from Bohemia, and the river Suevus or Sprake in Luſatia; and were now united under one common king called Ermeric, who ſoon after led them into Gallia. The Vandals and Alans might alſo

about

CHAPTER FIFTH.

about this time extend themſelves into Noricum. Uldin alſo, with a great body of Hunns, paſſed the Danube about the time of Chryſoſtom's baniſhment, that is, A. C. 404, and waſted Thrace and Mæſia. Radagaiſus, king of the Gruthunni and ſucceſſor of Winithar, inviting over more barbarians from beyond the Danube, invaded Italy with an army of above two hundred thouſand Goths; and within a year or two, A. C. 405 or 406, was overcome by Stilico, and periſhed with his army. In this war Stilico was aſſiſted with a great body of Hunns and Oſtrogoths, under the conduct of Uldin and Sarus, who were hired by the emperor Honorius. In all this confuſion it was neceſſary for the Lombards in Pannonia to arm themſelves in their own defence, and aſſert their liberty, the Romans being no longer able to protect them.

VI. And now Stilico, purpoſing to make himſelf emperor, procured a military prefecture for Alaric, and ſent him into the Eaſt in the ſervice of Honorius the Weſtern emperor; committing ſome Roman troops to his conduct, to ſtrengthen his army of Goths, and promiſing to follow ſoon after with his own army. His pretence was to recover ſome regions of Illyricum, which the Eaſtern emperor was accuſed to detail injuriouſly from the Weſtern; but his ſecret deſign was to make himſelf emperor, by the aſſiſtance of the Vandals and their allies: for he himſelf was a Vandal. For facilitating this deſign, he invited a great body of the barbarous nations to invade the Weſtern Empire, while he and Alaric invaded the Eaſtern. And theſe nations under their ſeveral kings, the Vandals under Godegiſilus, the Alans in two bodies, the one under Goar, the other under Reſplendial, and the Suevians, Quades, and Marcomans, under Ermeric, marched through Rhætia to the ſide of the Rhine, leaving their ſeats in Pannonia to the Hunns and Oſtrogoths; and joined the Burgundians under Gundicar, and ruffled the Franks in their further march. On the laſt of December, A. C. 406, they paſſed the Rhine at Ments, and ſpread themſelves into Germania Prima and the adjacent regions; and amongſt other actions the Vandals took Triers. Then they advanced into Belgium, and began to waſte that country. Whereupon the Salian Franks in Brabant took up

FEET OF DANIEL'S IMAGE.

up arms, and under the conduct of Theudomir, the ſon of Ricimer, or Richomer, above-mentioned, made ſo ſtout a reſiſtance, that they ſlew almoſt twenty thouſand of the Vandals, with their king Godegeſilus, in battle; the reſt eſcaping only by a party of Reſplendial's Alans, which came timely to their aſſiſtance.

VIII. Then the Britiſh ſoldiers, alarmed by the rumour of theſe things, revolted, and ſet up tyrants there; firſt Marcus, whom they ſlew preſently; then Gratian, whom they ſlew within four months; and laſtly Conſtantine, under whom they invaded Gallia, A. C. 408, being favoured by Goar and Gundicar. And Conſtantine having poſſeſſed a good part of Gallia, created his ſon Conſtans Cæſar, and ſent him into Spain to order his affairs there, A. C. 409.

IX. In the mean time Reſplendial, ſeeing the aforeſaid diſaſter of the Vandals, and that Goar was gone over to the Romans, led his army from the Rhine; and, together with the Suevians and reſidue of the Vandals, went towards Spain; the Franks in the mean time proſecuting their victory ſo far as to retake Triers, which, after they had plundered, they left to the Romans. The Barbarians were at firſt ſtopt by the Pyrenean Mountains; which made them ſpread themſelves into Aquitain: but the next year they had the paſſage betrayed by ſome ſoldiers of Conſtans; and entering Spain, 4 Kal. Octob. A. C. 409, they conquered every one what he could; and at length, A. C. 411, divided their conqueſts by lot; the Vandals obtained Bœtica, and part of Gallæcia; the Suevians the reſt of Gallæcia; and the Alans, Luſitania and the Carthaginian province: the emperor for the ſake of peace confirming them in thoſe ſeats by grant, A. C. 413.

X. The Roman Franks above-mentioned, having made Theudomir their king, began ſtrait, after their conqueſt of the Vandals, to invade their neighbours alſo. The firſt they ſet upon were the Gauls of Brabant (a): but meeting with notable reſiſtance, they deſired their alliance: and ſo thoſe Gauls fell off from the Romans, and made an intimate league with the Franks to be as one people, marrying with one another, and conforming to one another's manners, till they became one without diſtinction. Thus by

(a) Galli Arborici: whence the region was named Arboricbant; and by contraction, Brabant.

CHAPTER FIFTH.

by the acceſs of theſe Gauls, and of the foreign Franks alſo, who afterwards came over the Rhine, the Salian kingdom ſoon grew very great and powerful.

XI. Stilico's expedition againſt the Greek emperor was ſtopt by the order of Honorius; and then Alaric came out of Epirus into Noricum, and requeſted a ſum of money for his ſervice. The ſenate was inclined to deny him; but by Stilico's mediation granted it. But after ſome time Stilico being accuſed of a traiterous conſpiracy with Alaric, and ſlain 10 Kal. Sept. A. C. 408; Alaric was thereby diſappointed of his money, and reputed an enemy to the empire. He then broke ſtrait into Italy, with the army he brought out of Epirus, and ſent to his brother Adolphus to follow him with what forces he had in Pannonia; which were not great, but yet not to be deſpiſed. Thereupon Honorius, fearing to be ſhut up in Rome, retired to Ravenna in October, A. C. 408. And from that time Ravenna continued to be the ſeat of the Weſtern emperors. In thoſe days the Hunns alſo invaded Pannonia; and ſeizing the deſerted ſeats of the Vandals, Alans, and Goths, founded a new kingdom there. Alaric advancing to Rome beſieged it, and, 9 Kal. Sept. A. C. 410, took it: and afterwards attempting to paſs into Africa was ſhipwreckt. After which Honorius made peace with him, and got up an army to ſend againſt the tyrant Conſtantine.

XII. At the ſame time Gerontius, one of Conſtantine's captains, revolted from him, and ſet up Maximus emperor in Spain. Whereupon Conſtantine ſent Edobec, another of his captains, to draw to his aſſiſtance the Barbarians under Goar and Gundicar in Gallia, and ſupplies of Franks and Alemans from beyond the Rhine; and committed the cuſtody of Vienne in Gallia Narbonenſis to his ſon Conſtans. Gerontius advancing, firſt ſlew Conſtans at Vienne, and then began to beſiege Conſtantine at Arles. But Honorius at the ſame time ſending Conſtantius with an army on the ſame errand, Gerontius fled; and Conſtantius continued the ſiege, ſtrengthened by the acceſs of the greateſt part of the ſoldiers of Gerontius. After four months ſiege, Edobec having procured ſuccours, the barbarian kings at Ments, Goar and Gundicar, conſtitute Jovinus emperor; and together with him ſet forward

forward to relieve Arles. At their approach Conſtantius retired. They purſued, and he beat them by ſurprize; but not proſecuting his victory, the Barbarians ſoon recovered themſelves; yet not ſo as to hinder the fall of the tyrants Conſtantine, Jovinus and Maximus. Britain could not be recovered to the empire, but remained ever after a diſtinct kingdom. FEET OF DANIEL'S IMAGE.

XIII. The next year, A. C. 412, the Viſigoths, being beaten in Italy, had Aquitain granted them to retire into: and they invaded it with much violence; cauſing the Alans and Burgundians to retreat, who were then depopulating of it. At the ſame time the Burgundians were brought to peace; and the emperor granted them for inheritance a region upon the Rhine, which they had invaded: and the ſame, I preſume, he did with the Alans. But the Franks not long after retaking and burning Triers, Caſtinus, A. C. 415, was ſent againſt them with an army, who routed them, and ſlew Theudomir their king. This was the ſecond taking of Triers by the Franks. It was therefore taken four times, once by the Vandals and thrice by the Franks. Theudomir was ſucceeded by Pharamond, the prince or king of the Salian Franks in Germany. From thence he brought new forces, reigned over the whole, and had ſeats granted to his people within the empire near the Rhine.

XIV. And now the Barbarians were all quieted, and ſettled in ſeveral kingdoms within the empire, not only by conqueſt, but alſo by the grants of the emperor Honorius. For Rutilius in his Itinerary, written in autumn, *Anno Urbis* 1169, that is, accordcording to Varro's computation then in uſe, A. C. 416, thus laments the waſted fields:

"*Illa quidem longis nimium deformia bellis.*"

And then adds:

"*Jam tempus laceris poſt longa incendia fundis*
"*Vel paſtorales ædificare caſas.*"

And a little after;

"*Æternum tibi Rhenus aret.*"

And Oroſius in the end of his hiſtory, which was finiſhed A. C. 417, repreſents now a general pacification of the barbarous nations by the words *comprimere, coanguſtare, addicere gentes immaniſſimas*; terming them *imperio addictas*, becauſe they had obtained ſeats in the empire by league and compact; and *coanguſtatas*, becauſe they did no longer invade all regions at pleaſure, but by the ſame compact remained quiet in the ſeats then granted them. And theſe are the kingdoms of which the feet of the image were henceforward compoſed; and which are repreſented by iron and clay intermixed, which did not ſtick one to another, and were of different ſtrength.

CHAP. VI.

Of the ten kingdoms repreſented by the ten horns of the fourth beaſt.

CHAPTER SIXTH.

NOW by the wars above-deſcribed, the Weſtern empire of the Romans, about the time that Rome was beſieged and taken by the Goths, became broken into the following ten kingdoms:

1. The kingdom of the Vandals and Alans in Spain and Africa.
2. The kingdom of the Suevians in Spain.
3. The kingdom of the Viſigoths.
4. The kingdom of the Alans in Gallia.
5. The kingdom of the Burgundians.
6. The kingdom of the Franks.

7. The

7. The kingdom of the Britains.
8. The kingdom of the Hunns.
9. The kingdom of the Lombards.
10. The kingdom of Ravenna.

HORNS OF DANIEL'S FOURTH BEAST.

II. Seven of theſe kingdoms are thus mentioned by Sigonius. "[1] *Honorio regnante*, [2] *in Pannoniam Hunni*, [3] *in Hiſpaniam Vandali*, "[4] *Alani*, [5] *Suevi & Gothi*, [6] *in Galliam Alani*, [7] *Burgundiones*, [6] *& Gothi*, "*certis ſedibus permiſſis, accepti.*" Add the Franks, Britains, and Lombards, and you have the ten: for theſe aroſe about the ſame time with the ſeven. But let us view them ſeverally.

I.

FIRST HORN. VANDALS.

The kings of the Vandals were, A. C. 407, Godegeſilus; 407, Gunderic; 426, Geiſeric; 477, Hunneric; 484, Gundemund; 496, Thraſamund; 523, Geiſeric; 530, Gelimer. Godegeſilus led them into Gallia, A. C. 406; Gunderic into Spain, A. C. 409; Geiſeric into Africa, A. C. 427; and Gelimer was conquered by Beliſarius, A. C. 533. Their kingdom laſted in Gallia, Spain, and Africa together 126 years; and in Africa they were very potent. The Alans had only two kings of their own in Spain; Reſplendial, and Ataces Utacus or Othacar. Under Reſplendial they went into France, A. C. 407, and into Spain, A. C. 409. Ataces was ſlain with almoſt all his army by Vallia king of the Viſigoths, A. C. 419. And then the remainder of theſe Alans ſubjected themſelves to Gunderic king of the Vandals in Bœtica, and went afterwards with them into Africa, as I learn out of Procopius. Whence the kings of the Vandals ſtiled themſelves kings of the Vandals and Alans; as may be ſeen in the edict of Hunneric, recited by Victor in his Vandalic perſecution. In conjunction with the Chatti, theſe Alans gave the name of Cathalaunia, or Catth-Alania, to the province which is ſtill ſo called. Theſe Alans had alſo Gepides among them; and therefore the Gepides came into Pannonia before the Alans left it. There they became ſubject to the Hunns till the death of Attila, A. C. 454, and at length were conquered by the Oſtrogoths.

II. The

II.

Chapter Sixth. Second Horn. Suevians.

The kings of the Suevians were, A. C. 407, Ermeric; 438, Rechila; 448, Rechiarius; 458, Maldra; 460, Frumarius; 463, Regiſmund. And after ſome other kings who are unknown, reigned, A. C. 558, Theudomir; 568, Miro; 582, Euboricus; and 583, Andeca. This kingdom, after it had been once ſeated in Spain, remained always in Gallæcia and Luſitania. Ermeric, after the fall of the Alan kingdom, enlarged it into all Gallæcia, forcing the Vandals to retire into Bœtica and the Carthaginian province. This kingdom laſted 177 years according to Iſidorus; and then was ſubdued by Leovigildus king of the Viſigoths, and made a province of his kingdom, A. C. 585.

III.

Third Horn. Visigoths.

The kings of the Viſigoths were, A. C. 400, Alaric; 410, Athaulphus; 415, Sergeric and Vallia; 419, Theoderic; 451, Thoriſmund; 452, Theoderic; 465, Euric; 482, Alaric; 505, Genſalaric; 526, Amalaric; 531, Theudius; 548, Theudiſclus, &c. I date this kingdom from the time that Alaric left Thrace and Greece, to invade the Weſtern Empire. In the end of the reign of Athaulphus, the Goths were humbled by the Romans, and attempted to paſs out of France into Spain. Sergeric reigned but a few days. In the beginning of Vallia's reign they aſſaulted the Romans afreſh; but were again repulſed; and then made peace on this condition, that they ſhould, on the behalf of the empire, invade the Barbarian kingdoms in Spain: and this they did, together with the Romans, in the years 417 and 418, overthrowing the Alans and part of the Vandals. Then they received Aquitain of the emperor by a full donation, leaving their conqueſts in Spain to the emperor: and thereby the ſeats of the conquered Alans came into the hands of the Romans. In the year 455, Theoderic, aſſiſted by the Burgundians, invaded Spain, which was then almoſt all ſubject to the Suevians, and took a part of it from them. A. C. 506, the Goths were driven out of Gallia by the Franks. A. C. 585, they conquered the Suevian kingdom, and became lords of all Spain. A. C. 713, the

the Saracens invaded them; but in time they recovered their dominions, and have reigned in Spain ever ſince. Horns of Daniel's fourth Beast.

IV.

Fourth Horn. Alans.

The kings of the Alans in Gallia were Goar, Sambida, Eocharic, Sangibanus, Beurgus, &c. Under Goar they invaded Gallia, A. C. 407, and had ſeats given them near the Rhine, A. C. 412. Under Sambida, whom Bucher makes the ſucceſſor, if not the ſon of Goar, they had the territories of Valence given them by Ætius the emperor's general, A. C. 440. Under Eocharic they conquered a region of the rebelling Galli Arborici, given them alſo by Ætius. This region was from them named *Alenconium, quaſi Alanorum conventus.* Under Sangibanus they were invaded, and their regal city Orleans was beſieged by Attila king of the Hunns, with a vaſt army of 500000 men. Ætius, and the Barbarian kings of Gallia, came to raiſe the ſiege, and beat the Hunns in a very memorable battle, A. C. 451, *in campis Catalaunicis*, ſo called from theſe Alans mixed with the Charti. The region is now called Campania or Champagne. In that battle were ſlain on both ſides 162000 men. A year or two after, Attila returned with an immenſe army to conquer this kingdom; but was again beaten by them and the Viſigoths together in a battle of three days continuance, with a ſlaughter almoſt as great as the former. Under Beurgus, or Biorgor, they infeſted Gallia round about, till the reign of Maximus the emperor; and then they paſſed the Alps in winter, and came into Liguria; but were there beaten, and Beurgus ſlain by Ricimer commander of the emperor's forces, A. C. 464. Afterwards they were again beaten by the joint force of Odoacer king of Italy, and Childeric king of the Franks, about the year 480; and again by Theudobert, king of the Auſtrian Franks, about the year 511.

V.

Fifth Horn. Burgundians.

The kings of the Burgundians were, A. C. 407, Gundicar; 436, Gundioc; 467, Bilimer; 473, Gundobaldus with his brothers; 510, Sigiſmund; 517, Godomarus. Under Gundicar they invaded Gallia, A. C. 407; and had ſeats given them

by

CHAPTER SIXTH.

by the emperor near the Rhine in Gallia Belgica, A. C. 412. They had Saxons among them, and were now ſo potent, that Oroſius, A. C. 417, wrote of them: "*Burgundionem eſſe præ-*
"*validam manum, Galliæ hodieque teſtes ſunt; in quibus præ-*
"*ſumptâ poſſeſſione conſiſtunt.*" About the year 435 they received great overthrows by Ætius, and ſoon after by the Hunns: but five years after had Savoy granted them to be ſhared with the inhabitants; and from that time became again a potent kingdom, being bounded by the river Rhodanus, but afterwards extending much farther into the heart of Gallia. Gundobald conquered the regions about the rivers Araris and Rhodanus, with the territories of Marſeilles; and invading Italy, in the time of the emperor Glycerius, conquered all his brethren. Godomarus made Orleans his royal ſeat: whence the kingdom was called *Regnum Aurelianorum.* He was conquered by Clotharius and Childebert, kings of the Franks, A. C. 526. From thenceforward this kingdom was ſometimes united to the kingdom of the Franks, and ſometimes divided from it, till the reign of Charles the Great; who made his ſon Carolottus king of Burgundy. From that time, for about 300 years together, it enjoyed its proper kings; and was then broken into the dukedom of Burgundy, county of Burgundy, and county of Savoy; and afterwards thoſe were broken into other leſſer countries.

VI.

Sixth Horn. FRANKS.

The kings of the Franks were, A. C. 407, Theudomir; 417, Pharamond; 428, Clodio; 448, Merovæus; 456, Childeric; 482, Clodovæus, &c. Windeline and Bucher, two of the moſt diligent ſearchers into the originals of this kingdom, make it begin the ſame year with the Barbarian invaſions of Gallia, that is, A. C. 407. Of the firſt kings there is in Labbe's Bibliotheca M. S. this record.

"HISTORICA QUÆDAM EXCERPTA
"EX VETERI STEMMATE GENEALOGICO REGUM FRANCIÆ.

"GENOBALDUS, MARCOMERUS, SUNO, THEODEMERIS. *Iſti*
"*duces, vel reguli extiterunt à principio gentis Francorum diverſis*
"*temporibus. Sed incertum relinquunt hiſtorici, quali ſibi procreâ-*
"*tionis lineâ ſucceſſerunt.*

HORNS OF DANIEL'S FOURTH BEAST.

"PHARAMUNDUS: *ſub hoc rege ſuo primo Franci legibus ſe ſub-*
"*dunt; quas primores eorum tulerunt Wiſogaſtus, Atrogaſtus, Sa-*
"*legaſtus.*

"CHLOCHILO. *Iſte, tranſito Rheno, Romanos in Carbonariâ*
"*ſylvâ devicit; Camaracum cepit & obtinuit; annis 20 regnavit.*
"*Sub hoc rege Franci uſque ſummam progreſſi ſunt.*

"MEROVECHUS. *Sub hoc rege Franci Trevirim deſtruunt;*
"*Metim ſuccendunt; uſque Aurelianum perveniunt.*"

2. Now for Genobaldus, Marcomer, and Suno, they were captains of the Tranſrhenane Franks in the reign of Theodoſius, and concern us not. We are to begin with Theudomir, the firſt king of the rebelling Salii, called Didio by Ivo Carnotenſis, and Thiedo and Theudemerus by Rhenanus. His face is extant in a coin of gold found with this inſcription, THEUDEMIR REX, publiſhed by Petavius, and ſtill, or lately, extant, as Windeline teſtifies: which ſhews that he was a king, and that in Gallia; ſeeing that rude Germany underſtood not then the coining of money, nor uſed either Latin words or letters. He was the ſon of Ricimer, or Richomer, the favourite of the emperor Theodoſius; and ſo being a Roman Frank, and of the Salian royal blood, they therefore upon the rebellion made him king. The whole time of his reign you have ſtated in *Excerptis Gregorii Turonenſis è Fredigario, cap.* 5, 6, 7, 8; where the making him king, the tyranny of Jovinus, the ſlaughter of the aſſociates of Jovinus, the ſecond taking of Triers by the Franks, and their war with Caſtinus, in which this king was ſlain, are as a ſeries of ſucceſſive things thus ſet down in order. "*Extinctis Duci-*
"*bus in Francis, denuo Reges creantur, ex eâdem ſtirpe quâ priùs*
"*fuerant. Eodem tempore Jovinus ornatus regios aſſumpſit. Con-*
"*ſtantinus fugam verſus Italiam dirigit; miſſis à Jovino Principe*
"*percuſſoribus, ſuper Mentio flumine, capite truncatur. Multi*
"*nobilium juſſu Jovini apud Avernis capti, & à ducibus Honorii*
"*crudeliter interempti ſunt. Trevirorum civitas, factione unius*
"*ex ſenatoribus nomine Lucii, à Francis capta & incenſa eſt.—*
"*Caſtinus Domeſticorum Comes expeditionem accipit contra Francos,*
"*&c.*"

CHAPTER SIXTH.

"&c." Then returning to ſpeak of Theudomir, he adds: "*Franci electum à ſe regem, ſicut priùs fuerat, crinitum inquirentes diligenter ex genere Priami, Frigi & Francionis, ſuper ſe creârunt, nomine Theudemerum filium Richemeris; qui in hoc prælio, quod ſuprà memini, à Romanis interfectus eſt*:" that is, in the battle with Caſtinus's army. Of his death, Gregory Turonenſis makes this further mention: "*In conſularibus legimus Theodemerem regem Francorum, filium Ricimeris quondam, & Aſcilam matrem ejus, gladio interfectos.*"

3. Upon the victory of the Romans, the Franks and rebelling Gauls, who in the time of Theudomir were at war with one another, united to ſtrengthen themſelves; as Ordericus Vitalis thus mentions: "*Cùm Galli priùs contra Romanos rebellâſſent, Franci iis ſociati ſunt; & pariter juncti, Ferramundum Sunonis ducis filium, ſibi regem præfecerunt.*" Proſper ſets down the time; *anno* 25 *Honorii, Pharamundus regnat in Franciâ.* This, Bucher well obſerves, refers to the end of the year 416, or the beginning of the next year, dating the years of Honorius from the death of Valentinian; and argues well, that at this time Pharamond was not only king by the conſtitution of the Franks, but crowned alſo by the conſent of Honorius, and had a part of Gallia aſſigned him by covenant. And this might be the cauſe that Roman writers reckoned him the firſt king: which ſome not underſtanding, have reputed him the founder of this kingdom by an army of the Tranſrhenane Franks. He might come with ſuch an army, but he ſucceeded Theudomir by right of blood and conſent of the people. For the above-recited paſſage of Fredigarius, "*Extinctis Ducibus, in Francis denuo Reges creantur ex eâdem ſtirpe quâ prius fuerant,*" implies, that the kingdom continued to this new-elected family, during the reign of more kings than one. If you date the years of Honorius from the death of his father, the reign of Pharamond might begin two years later than is aſſigned by Bucher. The Salique laws made in his reign, which are yet extant, ſhew by their name that it was the kingdom of the Salii over which he reigned; and, by the pecuniary mulcts in them, that the place where he reigned abounded much with money, and conſequently was within

in the empire; rude Germany knowing not the uſe of money till they mixed with the Romans. In the preface alſo to the Salique laws, written and prefixed to them ſoon after the converſion of the Franks to the Chriſtian religion, that is, in the end of the reign of Merovæus, or ſoon after, the original of this kingdom is thus deſcribed: "*Hæc enim gens, quæ, fortis dum eſſet & robore valida, Romanorum jugum duriſſimum de ſuis cervicibus excuſſit pugnando, &c.*" This kingdom therefore was erected, not by invaſion but by rebellion, as was deſcribed above. Proſper, in regiſtering their kings in order, tells us: "*Pharamundus regnat in Franciâ; Clodio regnat in Franciâ; Merovæus regnat in Franciâ.*" And who can imagine but that in all theſe places he meant one and the ſame Francia? And yet it is certain that the Francia of Merovæus was in Gallia.

HORNS OF DANIEL'S FOURTH BEAST.

4. Yet the father of Pharamond being king of a body of Franks in Germany in the reign of the emperor Theodoſius, as above; Pharamond might reign over the ſame Franks in Germany, before he ſucceeded Theudomir in the kingdom of the Salians within the empire, and even before Theudomir began his reign; ſuppoſe in the firſt year of Honorius; or when thoſe Franks, being repulſed by Stilico, loſt their kings Marcomir and Suno; one of which was the father of Pharamond: and the Roman Franks, after the death of Theudomir, might invite Pharamond with his people from beyond the Rhine. But we are not to regard the reign of Pharamond in Germany: we are to date this reign from its riſe within the empire, and to look upon it as ſtrengthened by the acceſs of other Franks coming from beyond the Rhine, whether in the reign of this king or in that of his ſucceſſor Clodio. For in the laſt year of Pharamond's reign, Ætius took from him a part of his poſſeſſion in Gallia: but his ſucceſſor Clodio, whom Fredigarius repreſents as the ſon of Theudomir, and ſome call Clogio, Cloio, and Claudius, inviting from beyond the Rhine a great body of Franks, recovered all, and carried on their conqueſts as far as the river Soame. Then thoſe Franks, dividing conqueſts with them, erected certain new kingdoms at Cologn and Cambray, and ſome other cities: all which were afterwards conquered by Clodovæus; who alſo drove the Goths out of Gallia,

CHAPTER SIXTH.

lia, and fixed his ſeat at Paris, where it has continued ever ſince. And this was the original of the preſent kingdom of France.

VII.

Seventh Horn. BRITAIN.

The kings of Britain were, A. C. 407 or 408, Marcus, Gratian, and Conſtantine, ſucceſſively; A. C. 425, Vortigern; 466, Aurelius Ambroſius; 498, Uther Pendraco; 508, Arthur; 542, Conſtantinus; 545, Aurelius Cunanus; 578, Vortiporeus; 581, Malgo; 586, Careticus; 613, Cadwan; 635, Cadwalin; 676, Cadwalladar. The three firſt were Roman tyrants, who revolted from the empire. Oroſius, Proſper, and Zoſimus, connect their revolt with the irruptions of the Barbarians into Gallia, as conſequent thereunto. Proſper, with whom Zoſimus agrees, puts it in the year which began the day after that irruption. The juſt time I thus recollect: Marcus reigned not many days; Gratian four months; and Conſtantine three years. He was ſlain the year after the taking of Rome, that is, A. C. 411, 14 Kal. Octob. Whence the revolt was in ſpring, A. C. 408. Sozomen joins Conſtantine's expedition into Gallia with Arcadius's death, or the times a little after; and Arcadius died A. C. 408, May the 1ſt. Now though the reign of theſe tyrants was but ſhort, yet they gave a beginning to the kingdom of Britain, and ſo may be reckoned the three firſt kings; eſpecially ſince the poſterity of Conſtantine, viz. his ſons Aurelius Ambroſius, and Uther Pendraco, and his grandſon Arthur, reigned afterwards. For from the time of the revolt of theſe tyrants, Britain continued a diſtinct kingdom, abſolved from ſubjection to the empire; the emperor not being able to ſpare ſoldiers, to be ſent thither to receive and keep the iſland, and therefore neglecting it; as we learn by unqueſtionable records. For Proſper tells us: "*A. C.* "410, *Variane Coſ. Hâc tempeſtate præ valetudine Romanorum,* "*vires funditus attenuatæ Britanniæ.*" And Sigebert, conjoining this with the ſiege of Rome, ſaith: "*Britannorum vires* "*attenuatæ, & ſubſtrahunt ſe à Romanorum dominatione.*" And Zoſimus, lib. 6: "The Tranſrhenane Barbarians invading all "places, reduced the inhabitants of the iſland of Britain, and "alſo certain Celtic nations to that paſs, that they fell off from "the

"the Roman empire; and being no longer obedient to the Ro- HORNS OF DANIEL'S FOURTH BEAST.
"man laws, καθ' ἑαυτὸν βιοτεύειν, they lived in ſeparate bodies
"after their own pleaſure. The Britons therefore took up
"arms; and hazarding themſelves for their own ſafety, freed
"their cities from the imminent Barbarians. In like manner
"all Brabant, and ſome other provinces of the Gauls imitating
"the Britons, freed themſelves alſo; ejecting the Roman preſi-
"dents, and forming themſelves into a ſort of commonwealth
"according to their own pleaſure. This rebellion of Britain
"and the Celtic nations happened when Conſtantine uſurped the
"kingdom." So alſo Procopius, lib. 1. Vandal. ſpeaking of the ſame Conſtantine, ſaith: "Conſtantine being overcome in
"battle, was ſlain with his children: Βρεττανίαν μέν τοι Ῥωμαῖοι
"ἀνασώσασθαι ἐκέτι ἔσχον· ἀλλ' ὅσα ὑπὸ τυράννοις ἀπ' αὐτῆ ἔμενε.
"Yet the Romans could not recover Britain any more, but from
"that time it remained under tyrants." And Beda, l. 1. c. 11.
"*Fracta eſt Roma à Gothis anno* 1164 *ſuæ conditionis; ex quo*
"*tempore Romani in Britanniâ regnare ceſſaverunt.*" And Ethelwaldus: "*A tempore Romæ à Gothis expugnatæ, ceſſavit impe-*
"*rium Romanorum à Britanniâ inſulâ, & ab aliis, quas ſub jugo*
"*ſervitutis tenebant, multis terris.*" And Theodoret, ſerm. 9. *de curand. Græc. affect.* about the year 424, reckons the Britons among the nations which were not then in ſubjection to the Roman empire. Thus Sigonius: "*Ad annum* 411, *Imperium*
"*Romanorum, poſt exceſſum Conſtantini, in Britanniâ nullum fuit.*"

2. Between the death of Conſtantine and the reign of Vortigern was an interregnum of about 14 years; in which the Britons had wars with the Picts and Scots; and twice obtained the aſſiſtance of a Roman legion; who drove out the enemy, but told them poſitively at their departure, that they would come no more. Of Vortigern's beginning to reign, there is this record in an old chronicle in Nennius, quoted by Camden and others: "*Guortigernus tenuit imperium in Britanniâ, Theodoſio & Valen-*
"*tiniano Coſſ.* [*viz. A. C.* 425.] *& in quarto anno regni ſui Sax-*
"*ones ad Britanniam venerunt, Felice & Tauro Coſſ.*" [*viz. A. C.* 428.] This coming of the Saxons, Sigebert refers to the 4th year of Valentinian; which falls in with the year 428 aſſigned

CHAPTER SIXTH.

by this chronicle: and two years after the Saxons, together with the Picts, were beaten by the Britons. Afterwards, in the reign of Martian the emperor, that is, between the years 450 and 456, the Saxons under Hengiſt were called in by the Britons; but ſix years after revolted from them; made war upon them with various ſucceſs; and by degrees ſucceeded them (a). Yet the Britons continued a flouriſhing kingdom till the reign of Careticus; and the war between the two nations continued till the pontificate of Sergius, A. C. 688.

(a) Rolevinc Antiq. Saxon. l. 1. c. 6.

VIII.

Eighth Horn. HUNNS.

The kings of the Hunns were, A. C. 406, Octar and Rugila; 433, Bleda and Attila. Octar and Rugila were the brothers of Munzuc king of the Hunns, in Gothia beyond the Danube; and Bleda and Attila were his ſons, and Munzuc was the ſon of Balamir. The two firſt, as Jornandes tells us, were kings of the Hunns, but not of them all; and had the two laſt for their ſucceſſors. I date the reign of the Hunns in Pannonia from the time that the Vandals and Alans relinquiſhed Pannonia to them, A. C. 407: Sigonius, from the time that the Viſigoths relinquiſhed Pannonia, A. C. 408. "*Conſtat*," ſaith he, "*quòd* "*Gothis, ex Illyrico profectis, Hunni ſucceſſerunt; atque imprimis* "*Pannoniam tenuerunt. Neque enim Honorius, viribus ad reſiſ-* "*endum in tantis difficultatibus deſtitutus, prorſus eos prohibere po-* "*tuit; ſed meliore conſilio, animo ad pacem converſo, fœdus cum* "*eis, datis acceptiſque obſidibus, fecit; ex quibus qui dati ſunt,* "*Ætius, qui etiam Alarico tributus fuerat, præcipuè memoratur.*" How Ætius was hoſtage to the Goths and Hunns is related by Frigeridus; who, when he had mentioned that Theodoſius, emperor of the Eaſt, had ſent grievous commands to John, who after the death of Honorius had uſurped the crown of the Weſterm Empire, he ſubjoins: "*Iis permotus Johannes, Ætium, id* "*tempus curam palatii gerentem, cum ingenti auri pondere ad* "*Chunnos tranſmiſit, notos ſibi obſidiatûs ſui tempore, & familiari* "*amicitiâ devinctos.*" And a little after: "*Ætius tribus annis* "*Alarici obſes, dehinc Chunnorum, poſtea Carpilionis gener ex Co-* "*mite domeſticorum & Joannis curopalatæ.*" Now Bucher ſhews, that

HORNS OF DANIEL'S FOURTH BEAST.

that Ætius was hoſtage to Alaric till the year 410, when Alaric died; and to the Hunns, between the years 411 and 415; and ſon-in-law to Carpilio about the year 417 or 418; and Curopalates to John about the end of the year 423. Whence it is probable that he became hoſtage to the Hunns about the year 412 or 413; when Honorius made leagues with almoſt all the barbarous nations, and granted them ſeats: but I had rather ſay with Sigonius, that Ætius became hoſtage to Alaric A. C. 403. It is further manifeſt out of Proſper, that the Hunns were in quiet poſſeſſion of Pannonia in the year 432. For in the firſt book of Euſebius's chronicle Proſper writes: "*Anno decimo poſt obitum* "*Honorii, cùm ad Chunnorum gentem, cui tunc Rugila præerat,* "*poſt prælium cum Bonifacio ſe Ætius contuliſſet, impetrato auxilio* "*ad Romanorum ſolum regreditur.*" And in the ſecond book: "*Ætio & Valerio Coſſ. Ætius, depoſitâ poteſtate, profugus ad Hunnos* "*in Pannoniâ pervenit; quorum amicitiâ auxilioque uſus, pacem* "*principum interpellatæ poteſtatis obtinuit.*" Hereby it appears, that at this time Rugila, or as Maximus calls him Rechilla, reigned over the Hunns in Pannonia; and that Pannonia was not now ſo much as accounted within the ſoil of the empire, being formerly granted away to the Hunns; and that theſe were the very ſame body of Hunns with which Ætius had, in the time of his being an hoſtage, contracted friendſhip: by virtue of which, as he ſolicited them before to the aid of John the Tyrant, A. C. 424, ſo now he procured their interceſſion for himſelf with the emperor. Octar died A. C. 430; for Socrates tells us, that about that time the Burgundians, having been newly vexed by the Hunns, upon intelligence of Octar's death, ſeeing them without a leader, ſet upon them ſuddenly with ſo much vigour, that 3000 Burgundians ſlew 10000 Hunns. Of Rugila's being now king in Pannonia, you have already heard. He died A. C. 433, and was ſucceeded by Bleda; as Proſper and Maximus inform us. This Bleda, with his brother Attila, were before this time kings of the Hunns beyond the Danube, their father Munzuc's kingdom being divided between them; and now they united the kingdom of Pannonia to their own. Whence Paulus Diaconus ſaith, they did "*regnum intra Pannonium Da-* "*ciamque*

CHAPTER SIXTH.

" *ciamque gerere.*" In the year 441, they began to invade the empire afreſh, adding to the Pannonian forces new and great armies from Scythia. But this war was preſently compoſed; and then Attila, ſeeing Bleda inclined to peace, ſlew him, A. C. 444; inherited his dominions; and invaded the empire again. At length, after various great wars with the Romans, Attila periſhed A. C. 454; and his ſons quarrelling about his dominions, gave occaſion to the Gepides, Oſtrogoths, and other nations who were their ſubjects, to rebel and make war upon them. The ſame year the Oſtrogoths had ſeats granted them in Pannonia by the emperors Marcian and Valentinian; and with the Romans ejected the Hunns out of Pannonia, ſoon after the death of Attila, as all hiſtorians agree. This ejection was in the reign of Avitus, as is mentioned in the *Chronicum Boiorum*, and in Sidonius, *Carm. 7. in Avitum*, which ſpeaks thus of that emperor.

" —— *Cujus ſolum amiſſas poſt ſæcula multa*
" *Pannonias revocavit iter; jam credere promptum eſt*
" *Quid faciet bellis.*"

The poet means, that by the coming of Avitus, the Hunns yielded more eaſily to the Goths. This was written by Sidonius in the beginning of the reign of Avitus: and his reign began in the end of the year 455, and laſted not one full year.

2. Jornandes tells us: " *Duodecimo anno regni Valiæ, quando &* " *Hunni poſt pene quinquaginta annos invaſâ Pannoniâ, à Romanis* " *& Gothis expulſi ſunt.*" And Marcellinus: " *Hierio & Arda-* " *burio Coſſ. Pannoniæ, quæ per quinquaginta annos ab Hunnis re-* " *tinebantur, à Romanis receptæ ſunt.*" Whence it ſhould ſeem that the Hunns invaded and held Pannonia from the year 378 or 379 to the year 427, and then were driven out of it. But this is a plain miſtake: for it is certain that the emperor Theodoſius left the empire entire; and we have ſhewed out of Proſper, that the Hunns were in quiet poſſeſſion of Pannonia in the year 432. The Viſigoths in thoſe days had nothing to do with Pannonia, and the Oſtrogoths continued ſubject to the Hunns till the death of Attila, A. C. 454; and Valia king of the Viſigoths did

did not reign twelve years. He began his reign in the end of the year 415; reigned three years; and was ſlain A. C. 419; as Idacius, Iſidorus, and the Spaniſh manuſcript chronicles ſeen by Grotius teſtify. And Olympiodorus, who carries his hiſtory only to the year 425, ſets down therein the death of Valia king of the Viſigoths, and conjoins it with that of Conſtantius, which happened A. C. 420. Wherefore the Valia of Jornandes, who reigned at the leaſt twelve years, is ſome other king. And I ſuſpect, that this name hath been put by miſtake for Valamir king of the Oſtrogoths: for the action recorded was of the Romans and Oſtrogoths driving the Hunns out of Pannonia after the death of Attila; and it is not likely, that the hiſtorian would refer the hiſtory of the Oſtrogoths to the years of the Viſigothic kings. This action happened in the end of the year 455; which I take to be the twelfth year of Valamir in Pannonia; and which was almoſt fifty years after the year 406, in which the Hunns ſucceeded the Vandals and Alans in Pannonia. Upon the ceaſing of the line of Hunnimund, the ſon of Hermaneric, the Oſtrogoths lived without kings of their own nation about forty years together, being ſubject to the Hunns. And when Alaric (a) began to make war upon the Romans, which was in the year 444, he made Valamir, with his brothers Theodomir and Videmir, the grandſons of Vinethar, captains or kings of theſe Oſtrogoths under him. In the twelfth year of Valamir's reign, dated from thence, the Hunns were driven out of Pannonia.

HORNS OF DANIEL'S FOURTH BEAST.

(a) For Alaric, read Attila.

3. Yet the Hunns were not ſo ejected, but that they had further conteſts with the Romans, till the head of Denſix the ſon of Attila was carried to Conſtantinople, A. C. 469, in the conſulſhip of Zeno and Marcian, as Marcellinus relates. Nor were they yet totally ejected the empire: for beſides their reliques in Pannonia, Sigonius tells us, that when the emperors Marcian and Valentinian granted Pannonia to the Goths, which was in the year 454, they granted part of Illyricum to ſome of the Hunns and Sarmatians. And in the year 526, when the Lombards, removing into Pannonia, made war there with the Gepides; the Avares, a part of the Hunns, who had taken the name of Avares from one of their kings, aſſiſted the Lombards in

CHAPTER SIXTH.

in that war: and the Lombards afterwards, when they went into Italy, left their ſeats in Pannonia to the Avares in recompence of their friendſhip. From that time the Hunns grew again very powerful; their kings, whom they called Chagan, troubling the empire much in the reigns of the emperors Mauritius, Phocas, and Heraclius: and this is the original of the preſent kingdom of Hungary, which from theſe Avares and other Hunns mixed together, took the name of Hun-Avaria, and by contraction Hungary.

IX.

Ninth Horn. LOMBARDS.

The Lombards, before they came over the Danube, were commanded by two captains, Ibor and Ayon: after whoſe death they had kings, Agilmund, Lamiſſo, Lechu, Hildehoc, Gudehoc, Claſſo, Tato, Wacho, Walter, Audoin, Alhoin, Cleophis, &c. Agilmund was the ſon of Ayon, who became their king, according to Proſper, in the conſulſhip of Honorius and Theodoſius, A. C. 389; reigned thirty-three years, according to Paulus Warnefridus; and was ſlain in battle by the Bulgarians. Proſper places his death in the conſulſhip of Marinianus and Aſclepiodorus, A. C. 423. Lamiſſo routed the Bulgarians, and reigned three years; and Lechu almoſt forty. Gudehoc was contemporary to Odoacer king of the Heruli in Italy, and led his people from Pannonia into Rugia, a country on the north ſide of Noricum next beyond the Danube; from whence Odoacer then carried his people into Italy. Tato overthrew the kingdom of the Heruli beyond the Danube. Wacho conquered the Suevians, a kingdom then bounded on the eaſt by Bavaria, on the weſt by France, and on the ſouth by the Burgundians. Audoin returned into Pannonia A. C. 526, and there overcame the Gepides. Alboin, A. C. 551, overthrew the kingdom of the Gepides, and ſlew their king Chunnimund; A. C. 563, he aſſiſted the Greek emperor againſt Totila king of the Oſtrogoths in Italy; and, A. C. 568, led his people out of Pannonia into Lombardy, where they reigned till the year 774.

2. According to Paulus Diaconus, the Lombards, with many other Gothic nations, came into the empire from beyond the Danube

nube in the reign of Arcadius and Honorius, that is, between the years 395 and 408. But they might come in a little earlier: for we are told that the Lombards, under their captains Ibor and Ayon, beat the Vandals in battle; and Proſper placeth this victory in the conſulſhip of Auſonius and Olybrius, that is, A. C. 379. Before this war, the Vandals had remained quiet forty years, in the ſeats granted them in Pannonia by Conſtantine the Great. And therefore if theſe were the ſame Vandals, this war muſt have been in Pannonia; and might be occaſioned by the coming of the Lombards over the Danube into Pannonia, a year or two before the battle; and ſo have put an end to that quiet which had laſted forty years. After Gratian and Theodoſius had quieted the Barbarians, they might either retire over the Danube, or continue quiet under the Romans till the death of Theodoſius; and then either invade the empire anew, or throw off all ſubjection to it. By their wars, firſt with the Vandals, and then with the Bulgarians, a Scythian nation ſo called from the river Volga whence they came, it appears, that even in thoſe days they were a kingdom not contemptible.

HORNS OF DANIEL'S FOURTH BEAST.

X.

Tenth Horn. Reſidue of WESTERN EMPIRE.

Theſe nine kingdoms being rent away, we are next to conſider the reſidue of the Weſtern Empire. While this empire continued entire, it was the beaſt itſelf: but the reſidue thereof is only a part of it. Now if this part be conſidered as a horn, the reign of this horn may be dated from the tranſlation of the imperial ſeat from Rome to Ravenna, which was in October, A. C. 408. For then the emperor Honorius, fearing that Alaric would beſiege him in Rome, if he ſtaid there, retired to Millan, and thence to Ravenna: and the enſuing ſiege and ſacking of Rome confirmed his reſidence there; ſo that he and his ſucceſſors ever after made it their home. Accordingly Macchiavel, in his Florentine hiſtory, writes, that Valentinian having left home, tranſlated the ſeat of the empire to Ravenna.

2. Rhætia belonged to the Weſtern emperors, ſo long as that empire ſtood; and then it deſcended, with Italy and the Roman

CHAPTER SIXTH.

ſenate, to Odoacer king of the Heruli in Italy; and after him, to Theoderic king of the Oſtrogoths, and his ſucceſſors, by the grant of the Greek emperors. Upon the death of Valentinian the Second, the Alemans and Suevians invaded Rhætia, A. C. 455. But I do not find they erected any ſettled kingdom there: for in the year 457, while they were yet depopulating Rhætia, they were attacked and beaten by Burto, maſter of the horſe to the emperor Majoranus; and I hear nothing more of their invading Rhætia. Clodovæus king of France, in or about the year 496, conquered a kingdom of the Alemans, and ſlew their laſt king Ermeric. But this kingdom was ſeated in Germany, and only bordered upon Rhætia: for its people fled from Clodovæus into the neighbouring kingdom of the Oſtrogoths under Theoderic; who received them as friends, and wrote a friendly letter to Clodovæus in their behalf: and by this means they became inhabitants of Rhætia, as ſubjects under the dominion of the Oſtrogoths.

3. When the Greek emperor conquered the Oſtrogoths, he ſucceeded them in the kingdom of Ravenna, not only by right of conqueſt, but alſo by right of inheritance; the Roman ſenate ſtill going along with this kingdom. Therefore we may reckon that this kingdom continued in the exarchate of Ravenna and ſenate of Rome: for the remainder of the Weſtern Empire went along with the ſenate of Rome, by reaſon of the right which this ſenate ſtill retained, and at length exerted, of chuſing a new Weſtern emperor.

4. I have now enumerated the ten kingdoms into which the Weſtern Empire became divided at its firſt breaking; that is, at the time of Rome's being beſieged and taken by the Goths. Some of theſe kingdoms at length fell, and new ones aroſe: but whatever was their number afterwards, they are ſtill called the Ten Kings from their firſt number.

CHAP.

CHAP. VII.

Of the eleventh horn of Daniel's Fourth Beaſt.

"NOW Daniel conſidered the horns, and behold there came "up among them another horn, before whom there were "three of the firſt horns plucked up by the roots; and behold in "this horn were eyes like the eyes of a man, and a mouth "ſpeaking great things (a),—*and his* look was more ſtout than his "fellows,—and the ſame horn made war with the ſaints, and "prevailed againſt them (b): *and one who ſtood by, and made Daniel* "*know the interpretation of theſe things, told him, that* the ten "horns were ten kings that ſhould ariſe, and another ſhould "ariſe after them, and be diverſe from the firſt, and he ſhould "ſubdue three kings (c), and ſpeak great words againſt the moſt "High, and wear out the ſaints, and think to change times and "laws: and that they ſhould be given into his hands until a "time and times and half a time (d)." Kings are put for kingdoms, as above; and therefore the little horn is a little kingdom. It was a horn of the fourth beaſt, and rooted up three of his firſt horns; and therefore we are to look for it among the nations of the Latin empire, after the riſe of the ten horns. But it was a kingdom of a different kind from the other ten kingdoms, having a life or ſoul peculiar to itſelf, with eyes and a mouth. By its eyes, it was a ſeer; and by its mouth ſpeaking great things and changing times and laws, it was a prophet as well as a king. And ſuch a ſeer, a prophet and a king, is the church of Rome.

(a) Chap. vii. 8. (b) Ver. 20, 21. (c) Ver. 24. (d) Ver. 25.

II. A ſeer, Ἐπίσκοπος, is a biſhop in the literal ſenſe of the word; and this church claims the univerſal biſhoprick.

III. With his mouth he gives laws to kings and nations as an oracle; and pretends to infallibility, and that his dictates are binding

CHAPTER SEVENTH.

ing to the whole world; which is to be a prophet in the higheſt degree.

IV. In the eighth century, by rooting up and ſubduing the exarchate of Ravenna, the kingdom of the Lombards, and the ſenate and dukedom of Rome, he acquired Peter's patrimony out of their dominions; and thereby roſe up as a temporal prince or king, or horn of the fourth beaſt.

V. In a ſmall book printed at Paris, A. C. 1689, entitled, "*An "hiſtorical diſſertation upon ſome coins of Charles the Great, "Ludovicus Pius, Lotharius, and their ſucceſſors, ſtamped at "Rome,*" it is recorded, that in the days of pope Leo X. there was remaining in the Vatican, and till thoſe days expoſed to public view, an inſcription in honour of Pipin, the father of Charles the Great, in theſe words: "*Pipinum pium, primum fuiſſe qui "ampliſicandæ Eccleſiæ Romanæ viam aperuerit, Exarchatu Ra"vennate, & plurimis aliis oblatis.*" "That Pipin the Pius was "the firſt who opened a way to the grandeur of the church of "Rome, conferring upon her the exarchate of Ravenna, and "many other oblations." In and before the reign of the emperors Gratian and Theodoſius, the biſhop of Rome lived ſplendidly; but this was by the oblations of the Roman ladies, as Ammianus deſcribes. After thoſe reigns Italy was invaded by foreign nations, and did not get rid of her troubles before the fall of the kingdom of Lombardy. It was certainly by the victory of the ſee of Rome over the Greek emperor, the king of Lombardy, and the ſenate of Rome, that ſhe acquired Peter's patrimony, and roſe up to her greatneſs. The donation of Conſtantine the Great is a fiction; and ſo is the donation of the *Alpes Cottiæ* to the pope by Aripert king of the Lombards: for the *Alpes Cottiæ* were a part of the exarchate; and, in the days of Aripert, belonged to the Greek emperor.

VI. The invocation of the dead, and veneration of their images, being gradually introduced in the 4th, 5th, 6th and 7th centuries; the Greek emperor Philippicus declared againſt the latter, A. C. 711 or 712 (a). And the emperor Leo Iſaurus, to put a ſtop to it, called a meeting of counſellors and biſhops in his palace, A. C. 726; and by their advice put out an edict againſt that worſhip,

[a] Sigonius de Regno Italiæ, ad ann. 726.

worſhip, and wrote to pope Gregory II. that a general council might be called. But the pope thereupon called a council at Rome; confirmed the worſhip of images; excommunicated the Greek emperor; abſolved the people from their allegiance; and forbad them to pay tribute, or otherwiſe be obedient to him. Then the people of Rome, Campania, Ravenna, and Pentapolis, with the cities under them, revolted; and laid violent hands upon their magiſtrates, killing the exarch Paul at Ravenna, and laying aſide Peter duke of Rome, who was become blind: and when Exhileratus, duke of Campania, incited the people againſt the pope; the Romans invaded Campania, and ſlew him with his ſon Hadrian. Then a new exarch, Eutychius, coming to Naples, ſent ſome ſecretly to take away the lives of the pope and the nobles of Rome: but the plot being diſcovered, the Romans revolted abſolutely from the Greek emperor, and took an oath to preſerve the life of the pope; to defend his ſtate; and be obedient to his authority in all things. Thus Rome with its duchy, including part of Tuſcany and part of Campania, revolted in the year 726, and became a free ſtate under the government of the ſenate of this city. The authority of the ſenate in civil affairs was henceforward abſolute; the authority of the pope extending hitherto no farther than to the affairs of the church only.

ELEVENTH HORN.

VII. At that time the Lombards (a) alſo being zealous for the worſhip of images, and pretending to favour the cauſe of the pope, invaded the cities of the exarchate: and at length, viz. A. C. 752, took Ravenna, and put an end to the exarchate. And this was the firſt of the three kingdoms which fell before the little horn.

[a] Sigonius ibid. ad ann. 726, 752.

VIII. In the year 751 pope Zechary depoſed Childeric (b), a ſlothful and uſeleſs king of France, and the laſt of the race of Merovæus; and, abſolving his ſubjects from their oath of allegiance, gave the kingdom to Pipin the major of the palace; and thereby made a new and potent friend. His ſucceſſor, pope Stephen III. (c) knowing better how to deal with the Greek emperor than with the Lombards, went the next year to the king of the Lombards, to perſuade him to return the exarchate to the emperor. But this not ſucceeding, he went into France; and perſuaded Pipin

[b] Sigon. ibid. ann. 750.

[c] Sigon. ibid. ann. 753, 751, 755.

CHAPTER SEVENTH.

Pipin to take the exarchate and Pentapolis from the Lombards, and give it to St. Peter. Accordingly Pipin, A. C. 754, came with an army into Italy, and made Aiſtulphus king of the Lombards promiſe to ſurrender: but the next year Aiſtulphus, on the contrary, to revenge himſelf on the pope, beſieged the city of Rome. Whereupon the pope ſent letters to Pipin, wherein he told him, that if he came not ſpeedily againſt the Lombards, "*pro datâ ſibi potentiâ, alienandum fore à regno Dei & vitâ æternâ*;" he ſhould be excommunicated. Pipin therefore, fearing a revolt of his ſubjects, and being indebted to the church of Rome, came ſpeedily with an army into Italy; raiſed the ſiege; beſieged the Lombards in Pavia; and forced them to ſurrender the exarchate and region of Pentapolis to the pope, for a perpetual poſſeſſion. Thus the pope became lord of Ravenna, and the exarchate, ſome few cities excepted; and the keys were ſent to Rome, and laid upon the confeſſion of St. Peter, that is, upon his tomb at the high altar, "*in ſignum veri perpetuique dominii, ſed pietate Regis gratuitâ*," as the inſcription of a coin of Pipin hath it. This was in the year of Chriſt 755. And henceforward the popes, being temporal princes, left off in their epiſtles and bulls to note the years of the Greek emperors, as they had hitherto done.

[a] Sigon. ib. ann. 773.

IX. After this ([a]) the Lombards invading the pope's countries, pope Adrian ſent to Charles the Great, the ſon and ſucceſſor of Pipin, to come to his aſſiſtance. Accordingly Charles entered Italy with an army; invaded the Lombards; overthrew their kingdom; became maſter of their countries; and reſtored to the pope not only what they had taken from him, but alſo the reſt of the exarchate, which they had promiſed Pipin to ſurrender to him, but had hitherto detained; and alſo gave him ſome cities of the Lombards; and was in return himſelf made *Patricius* by the Romans, and had the authority of confirming the elections of the popes conferred upon him. Theſe things were done in the years 773 and 774. This kingdom of the Lombards was the ſecond kingdom which fell before the little horn. But Rome, which was to be the ſeat of his kingdom, was not yet his own.

X. In the year 796, Leo III. being made pope, notified his election to Charles the Great by his legates; ſending to him for a preſent, the golden keys of the confeſſion of Peter, and the banner of the city of Rome ([a]): the firſt, as an acknowledgment of the pope's holding the cities of the exarchate and Lombardy by the grant of Charles; the other, as a ſignification that Charles ſhould come and ſubdue the ſenate and people of Rome, as he had done the exarchate and the kingdom of the Lombards. For the pope at the ſame time deſired Charles to ſend ſome of his princes to Rome, who might ſubject the Roman people to him, and bind them by oath *in fide & ſubjectione*, in fealty and ſubjection, as his words are recited by Sigonius. An anonymous poet, publiſhed by Boeclerus at Straſburg, expreſſeth it thus:

ELEVENTH HORN.

[a] Sigon. de Regno Ital. ad ann. 796.

"*Admonuitque piis precibus, qui mittere vellet*
"*Ex propriis aliquos primoribus, ac ſibi plebem*
"*Subdere Romanam, ſervandaque fœdera cogens*
"*Hanc fidei ſacramentis promittere magnis.*"

XI. Hence aroſe a miſunderſtanding between the pope and the city: and the Romans about two or three years after, by aſſiſtance of ſome of the clergy, raiſed ſuch tumults againſt him, as gave occaſion to a new ſtate of things in all the Weſt. For two of the clergy accuſed him of certain crimes; and with an armed force of the Romans ſeized him; ſtripped him of his ſacerdotal habit; and impriſoned him in a monaſtery. But by aſſiſtance of his friends he made his eſcape, and fled into Germany to Charles the Great; to whom he complained of the Romans for acting againſt him out of a deſign to throw off all authority of the church, and to recover their antient freedom. In his abſence, his accuſers with their forces ravaged the poſſeſſions of the church, and ſent the accuſations to Charles; who, before the end of the year, ſent the pope back to Rome with a large retinue. The nobles and biſhops of France who accompanied him, examined the chief of his accuſers at Rome, and ſent them into France in cuſtody. This was in the year 799. The next year Charles himſelf went to Rome; and, upon a day appointed, preſided in a

CHAPTER SEVENTH.

council of Italian and French biſhops to hear both parties. But when the pope's adverſaries expected to be heard; the council declared, that he who was the ſupreme judge of all men, was above being judged by any other than himſelf (a): whereupon the pope made a ſolemn declaration of his innocence before all the people; and by doing ſo was looked upon as acquitted.

(a) Vide Anaſtaſium.

XII. Soon after, upon Chriſtmas-day, the people of Rome, who had hitherto elected their biſhop, and reckoned that they and their ſenate inherited the rights of the antient ſenate and people of Rome; voted Charles their emperor, and ſubjected themſelves to him in ſuch manner, as the old Roman empire and their ſenate were ſubjected to the old Roman emperors. The pope crowned him, and anointed him with holy oil, and worſhiped him on his knees after the manner of adoring the old Roman emperors; as the aforeſaid poet thus relates:

"*Poſt laudes igitur dictas, & ſummus eundem*
"*Præſul adoravit; ſicut mos debitus olim*
"*Principibus fuit antiquis.*"

The emperor, on the other hand, took the following oath to the pope: "*In nomine Chriſti ſpondeo atque polliceor, Ego Carolus* "*Imperator coram Deo & beato Petro Apoſtolo, me protectorem ac* "*defenſorem fore hujus ſanctæ Romanæ Eccleſiæ in omnibus utilita-* "*tibus, quatenus divino fultus fuero adjutorio, prout ſciero potero-* "*que.*" The emperor was alſo made conſul of Rome, and his ſon Pipin crowned king of Italy: and henceforward the emperor ſtiled himſelf "*Carolus ſereniſſimus, Auguſtus, à Deo corona-* "*tus, magnus, pacificus, Romæ gubernans imperium,* or *Impera-* "*tor Romanorum;*" and was prayed for in the churches of Rome. His image was henceforward put upon the coins of Rome. And the enemies of the pope, to the number of three hundred Romans and two or three of the clergy, were ſentenced to death. The three hundred Romans were beheaded in one day in the Lateran fields: but the clergymen, at the interceſſion of the pope, were pardoned, and baniſhed into France. And thus the right of the Roman emperors, which had hitherto been in the Greek emperors,

perors, was by this act transferred in the Weſt to the kings of France. ELEVENTH HORN.

XIII. After theſe things Charles (a) gave the city and duchy of Rome to the pope, ſubordinately to himſelf as emperor of the Romans; ſpent the winter in ordering the affairs of Rome, and thoſe of the apoſtolic ſee, and of all Italy, both civil and eccleſiaſtical, and in making new laws for them; and returned the next ſummer into France; leaving the city under its ſenate, and both under the pope and himſelf. And hearing that his new laws were not obſerved by the judges in dictating the law, nor by the people in hearing it; and that the great men took ſervants from free men, and from the churches and monaſteries, to labour in their vineyards, fields, paſtures and houſes; and continued to exact cattle and wine of them, and to oppreſs thoſe that ſerved the churches: he wrote to his ſon Pipin to remedy theſe abuſes; to take care of the church; and ſee his laws executed.

(a) Sigon. de Regno Ital.

XIV. Now the ſenate and people, and principality of Rome, I take to be the third king the little horn overcame, and even the chief of the three. For this people elected the pope and the emperor; and now, by electing the emperor and making him conſul, was acknowledged to retain the authority of the old Roman ſenate and people. This city was the metropolis of the old Roman empire, repreſented in Daniel by the fourth beaſt; and by ſubduing the ſenate and people and duchy, it became the metropolis of the little horn of that beaſt, and compleated Peter's patrimony, which was the kingdom of that horn. Beſides, this victory was attended with greater conſequences, than thoſe over the other two kings. For it ſet up the Weſtern Empire, which continues to this day. It ſet up the pope above the judicature of the Roman ſenate, and above that of a council of Italian and French biſhops, and even above all human judicature; and gave him the ſupremacy over the Weſtern churches and their councils, in a high degree. It gave him "a look more ſtout than his "fellows;" ſo that when this new religion began to be eſtabliſhed in the minds of men, he grappled not only with kings, but even with the Weſtern emperor himſelf. It is obſervable alſo,

CHAPTER SEVENTH.

that the cuſtom of kiſſing the pope's feet, an honour ſuperior to that of kings and emperors, began about this time. There are ſome inſtances of it in the ninth century: Platina tells us, that the feet of pope Leo IV. were kiſſed, according to antient cuſtom, by all who came to him: and ſome ſay that Leo III. began this cuſtom; pretending, that his hand was infected by the kiſs of a woman. The popes began alſo about this time to canonize ſaints; and to grant indulgences and pardons: and ſome repreſent, that Leo III. was the firſt author of all theſe things. It is further obſervable, that Charles the Great, between the years 775 and 796, conquered all Germany, from the Rhine and Danube northward to the Baltic Sea, and eaſtward to the river Teis; extending his conqueſts alſo into Spain, as far as the river Eber: and by theſe conqueſts he laid the foundation of the new empire; and, at the ſame time, he propagated the Roman-Catholic religion into all his conqueſts; obliging the Saxons and Hunns, who were heathens, to receive the Roman faith; and diſtributing his northern conqueſts into biſhopricks, granting tithes to the clergy and Peter-pence to the pope: by all which the church of Rome was highly enlarged, enriched, exalted, and eſtabliſhed.

XV. In the before-mentioned "Diſſertation upon ſome coins of "Charles the Great, Ludovicus Pius, Lotharius, and their ſuc-"ceſſors, ſtamped at Rome," there is a draught of a piece of Moſaic work, which pope Leo III. cauſed to be made in his palace near the church of John Lateran, in memory of his ſending the ſtandard or banner of the city of Rome, curiouſly wrought, to Charles the Great; and which ſtill remained there, at the publiſhing of the ſaid book. In the Moſaic work there appeared Peter with three keys in his lap, reaching the Pallium to the pope, with his right-hand, and the banner of the city to Charles the Great, with his left. By the pope was this inſcription, SCISSIMUS D. N. LEO PP: by the king, this; D. N. CARVLO REGI: and under the feet of Peter, this; BEATE PETRE, DONA VITAM LEONI PP, ET VICTORIAM CARVLO REGI DONA. This monument gives the title of king to Charles; and therefore was erected, before he was emperor. It was erected, when Peter was reaching the Pallium to the pope, and the pope was ſending the banner of the city

city to Charles, that is, A. C. 796. The words above, viz. "*Sanc-*"*tiſſimus Dominus noſter Leo Papa Domino noſtro Carolo Regi,*" relate to the meſſage; and the words below, viz. "*Beate Petre, dona* "*vitam Leoni Papæ, & victoriam Carolo regi dona,*" are a prayer, that in this undertaking God would preſerve the life of the pope, and give victory to the king over the Romans. The three keys, in the lap of Peter, ſignify the keys of the three parts of his patrimony; that of Rome with its duchy, which the pope claimed and was conquering; thoſe of Ravenna, with the exarchate, and of the territories taken from the Lombards; both which he had newly conquered. Theſe were the three dominions, whoſe keys were in the lap of St. Peter; and whoſe crowns are now worn by the pope; and by the conqueſt of which he became the little horn of the fourth beaſt. By Peter's giving the Pallium to the pope with his right-hand, and the banner of the city to the king with his left, and by naming the pope before the king in the inſcription, may be underſtood, that the pope was then reckoned ſuperior in dignity to the kings of the earth.

ELEVENTH HORN.

XVI. After the death of Charles the Great, his ſon and ſucceſſor Ludovicus Pius, at the requeſt of the pope (a), confirmed the donations of his grandfather and father to the ſee of Rome. And in the confirmation he names firſt Rome, with its duchy extending into Tuſcany and Campania; then the exarchate of Ravenna, with Pentapolis; and, in the third place, the territories taken from the Lombards. Theſe are his three conqueſts; and he was to hold them of the emperor for the uſe of the church, *ſub integritate*, entirely; without the emperor's meddling therewith, or with the juriſdiction or power of the pope therein, unleſs called thereto in certain caſes. This ratification the emperor Ludovicus made under an oath: and as the king of the Oſtrogoths, for acknowledging that he held his kingdom of Italy of the Greek emperor, ſtamped the effigies of the emperor on one ſide of his coins, and his own on the reverſe; ſo the pope made the like acknowledgment to the Weſtern emperor. For the pope began now to coin money: and the coins of Rome are henceforward found with the heads of the emperors (Charles, Ludovicus Pius, Lo-

(a) Confirmationem recitat Sigonius, lib. 4. de Regno Italiæ, ad ann. 817.

Lotharius) and their ſucceſſors, on the one ſide, and the pope's inſcription on the reverſe, for many years.

CHAP. VIII.

Of the power of the eleventh Horn of Daniel's fourth Beaſt, to change times and laws.

CHAPTER EIGHTH.

IN the reign of the Greek emperor Juſtinian, and again in the reign of Phocas, the biſhop of Rome obtained ſome dominion over the Greek churches, but of no long continuance. His ſtanding dominion was only over the nations of the Weſtern Empire, repreſented by Daniel's fourth beaſt. And this juriſdiction was ſet up by the following edict of the emperors Gratian and Valentinian.——"*Volumus* (a), *ut quicunque judicio Damaſi, quod* "*ille cum Concilio quinque vel ſeptem habuerit Epiſcoporum, vel* "*eorum, qui Catholici ſunt, judicio vel Concilio condemnatus fuerit*; "*ſi juſtè voluerit Eccleſiam retentare, ut qui ad ſacerdotale judi-* "*cium per contumeliam non iviſſet: ut ab illuſtribus viris Præfec-* "*tis Prætorio Galliæ atque Italiæ, authoritate adhibitâ, ad Epiſ-* "*copale judicium remittatur*; *ſive à Conſularibus vel Vicariis, ut* "*ad Urbem Romam ſub proſecutione perveniat. Aut ſi in longin-* "*quioribus partibus alicujus ferocitas talis emerſerit, omnis ejus* "*cauſæ edictio ad Metropolitæ in eâdem Provinciâ Epiſcopi deduce-* "*retur examen. Vel ſi ipſe Metropolitanus eſt, Romam neceſſariò,* "*vel ad eos quos Romanus Epiſcopus judices dederit, ſine delatione* "*contendat.—Quòd ſi vel Metropolitani Epiſcopi, vel cujuſcunque ſa-* "*cerdotis, iniquitas eſt ſuſpecta, aut gratia*; *ad Romanum Epiſco-* "*pum,*

(a) See the Annals of Baronius, anno 381. ſect. 6.

"*pum, vel ad Concilium quindecim finitimorum Epiſcoporum ac-* "*cerſitum liceat provocare*; *modò ne poſt examen habitum, quod* "*definitum fuerit, integretur.*" This edict wanting the name of both Valens and Theodoſius in the title, was made in the time between their reigns; that is, in the end of the year 378, or the beginning of 379. It was directed to the *Præfecti Prætorio Italiæ & Galliæ*; and therefore was general. For the *Præfectus Prætorio Italiæ* governed Italy, *Illyricum occidentale*, and Africa; and the *Præfectus Prætorio Galliæ* governed Gallia, Spain, and Britain.

CHANGE OF TIMES AND LAWS.

II. The granting of this juriſdiction to the pope gave ſeveral biſhops occaſion to write to him for his reſolutions upon doubtful caſes; and to his anſwering them by decretal epiſtles: and henceforward he gave laws to the Weſtern churches by ſuch epiſtles. Himerius biſhop of Tarraco, the head city of a province in Spain, writing to pope Damaſus for his direction about certain eccleſiaſtical matters, and the letter not arriving at Rome till after the death of Damaſus, A.C. 384; his ſucceſſor Siricius anſwered the letter with a legiſlative authority, telling him of one thing: "*Cùm hoc fieri—miſſa ad Provincias, à venerandæ memoriæ præ-* "*deceſſore meo Liberio, generalia decreta prohibeant.*" Of another: "*Noverint ſe ab omni eccleſiaſtico honore, quo indignè uſi* "*ſunt, Apoſtolicæ Sedis auctoritate, dejectos.*" Of another: "*Sci-* "*turi poſthac omnium Provinciarum ſummi Antiſtites, quòd ſi ultrò* "*ad ſacros ordines quenquam de talibus eſſe aſſumendum, & de ſuo* "*& de aliorum ſtatu, quos contra Canones & interdicta noſtra* "*provexerint, congruam ab Apoſtolicâ Sede promendam eſſe ſen-* "*tentiam.*" And the epiſtle he concludes thus: "*Explicuimus* "*ut arbitror, frater chariſſime, univerſâ quæ digeſta ſunt in que-* "*relam*; *& ad ſingulas cauſas, de quibus ad Romanam Eccleſiam,* "*utpote ad caput tui corporis, retuliſti*; *ſufficientia, quantum opi-* "*nor, reſponſa reddidimus. Nunc fraternitatis tuæ animum ad* "*ſervandos canones, & tenenda decretalia conſtituta, magis ac* "*magis incitamus: adhæc quæ ad tua conſulta reſcripſimus, in* "*omnium Coepiſcoporum perferri facias notionem*; *& non ſolum* "*eorum, qui in tuâ ſunt diœceſi conſtituti, ſed etiam ad univerſos* "*Carthaginenſes, ac Bæticos, Luſitanos atque* (a) *Gallicos, vel eos* "*qui*

(a) Populi Gallicani.

CHAPTER EIGHTH.

" *qui vicinis tibi collimitant hinc inde Provinciis, hæc, quæ à nobis* " *ſunt ſalubri ordinatione diſpoſita, ſub literarum tuarum proſecu-* " *tione mittantur. Et quanquam ſtatuta ſedis Apoſtolicæ, vel Ca-* " *nonum venerabilia definita, nulli Sacerdotum Domini ignorare ſit* " *liberum: utilius tamen, atque pro antiquitate ſacerdotii tui, di-* " *lectioni tuæ eſſe admodum poterit glorioſum; ſi ea, quæ ad te ſpe-* " *ciali nomine generaliter ſcripta ſunt, per unanimitatis tuæ ſollici-* " *tudinem, in univerſorum fratrum noſtrorum notitiam perferantur;* " *quatenus & quæ à nobis, non inconſultè, ſed providè, ſub nimiâ* " *cautelâ & deliberatione, ſunt ſalubriter conſtituta, intemerata per-* " *maneant; & omnibus in poſterum excuſationibus aditus, qui jam* " *nulli apud nos patere poterit, obſtruatur. Dat. 3 Id. Febr. Ar-* " *cadio & Bautone viris clariſſimis Conſulibus, A. C. 385.*" Pope Liberius, in the reign of Jovian, or Valentinian I. ſent general decrees to the provinces, ordering that the Arians ſhould not be rebaptized: and this he did in favour of the council of Alexandria; that nothing more ſhould be required of them, than to renounce their opinions. Pope Damaſus is ſaid to have decreed in a Roman council, that tithes and tenths ſhould be paid upon pain of an Anathema; and that " Glory be to the Father, &c." ſhould be ſaid or ſung at the end of the Pſalms. But the firſt decretal epiſtle, now extant, is this of Siricius to Himerius; and by this epiſtle the pope made Himerius his vicar over all Spain for promulging his decrees, and ſeeing them obſerved. The biſhop of Sevill was alſo the pope's vicar ſometimes; for pope Simplicius wrote thus to Zeno, biſhop of Sevill: " *Talibus idcirco glori-* " *antes indiciis, congruum duximus vicariâ Sedis noſtræ te auctoritate* " *fulciri: cujus vigore munitus, Apoſtolicæ inſtitutionis Decreta,* " *vel ſanctorum terminos Patrum, nullatenus tranſcendi permittas.*" And Pope Hormiſda (a) made the biſhop of Sevill his vicar over Bœtica and Luſitania; and the biſhop of Tarraco his vicar over all the reſt of Spain, as appears by his epiſtles to them.

(a) Hormiſd. Epiſt. 24, 26.

III. Pope Innocent the Firſt, in his decretal epiſtle to Victricius, biſhop of Rouen in France, A. C. 404, in purſuance of the edict of Gratian, made this decree: " *Si quæ autem cauſæ vel conten-* " *tiones inter Clericos, tam ſuperioris ordinis quàm etiam inferioris,* " *fuerint exortæ; ut ſecundum Synodum Nicenam congregatis ejuſ-* " *dem*

" *dem Provinciæ Epiſcopis, jurgium terminetur: nec alicui liceat,* " *Romanæ* (b) *Eccleſiæ, cujus in omnibus cauſis debet reverentia* " *cuſtodiri, relictis his ſacerdotibus, qui in eâdem Provinciâ Dei* " *Eccleſiam nutu Divino gubernant, ad alias convolare Provincias.* " *Quod ſiquis fortè præſumpſerit; & ab officio Clericatûs ſummo-* " *tus, & injuriarum reus judicetur. Si autem majores cauſæ in* " *medium fuerint devolutæ, ad Sedem Apoſtolicam, ſicut Synodus ſta-* " *tuit, & beata conſuetudo exigit, poſt judicium Epiſcopale referan-* " *tur.*" By theſe letters it appears to me that Gallia was now ſubject to the pope; and had been ſo for ſome time; and that the biſhop of Rouen was then his vicar, or one of them: for the pope directs him, to refer the greater cauſes to the ſee of Rome, according to cuſtom. But the biſhop of Arles ſoon after became the pope's vicar over all Gallia: for pope Zoſimus, A. C. 417, ordaining that none ſhould have acceſs to him without the credentials of his vicars, conferred upon Patroclus, the biſhop of Arles, this authority over all Gallia by the following decree.

CHANGE OF TIMES AND LAWS.

(b) The words, *ſine auctoritate*, ſeem wanting.

" *Zoſimus univerſis Epiſcopis per Gallias & ſeptem Provincias* " *conſtitutis.*

" *Placuit Apoſtolicæ Sedi, ut ſiquis ex quâlibet Galliarum parte* " *ſub quolibet eccleſiaſtico gradu, ad nos Romæ venire contendit, vel* " *alio terrarum ire diſponit; non aliter proficiſcatur, niſi Metropo-* " *litani Epiſcopi Formatas acceperit; quibus ſacerdotium ſuum, vel* " *locum eccleſiaſticum quem habet, ſcriptorum ejus adſtipulatione* " *perdoceat: quod ex gratiâ ſtatuimus: quia plures epiſcopi, ſive preſ-* " *byteri, ſive eccleſiaſtici ſimulantes, quia nullum documentum For-* " *matarum extat, per quod valeant confutari, in nomen venerationis* " *irrepunt, & indebitam reverentiam promerentur. Quiſquis igi-* " *tur, fratres chariſſimi, prætermiſſâ ſupradicti Formatâ, ſive epiſ-* " *copus, ſive preſbyter, ſive diaconus, aut deinceps inferiori gradu* " *ſit, ad nos venerit; ſciat ſe omnino ſuſcipi non poſſe. Quam* " *auctoritatem ubique nos miſiſſe manifeſtum eſt; ut cunctis regio-* " *nibus innoteſcat, id quod ſtatuimus omnimodis eſſe ſervandum. Si-* " *quis autem hæc ſalubriter conſtituta temerare tentaverit ſponte* " *ſuâ, ſe à noſtrâ noverit communione diſcretum. Hoc autem* " *pri-*

CHAPTER EIGHTH.

" *privilegium Formatarum ſancto Patroclo, fratri & coepiſcopo noſ-*
" *tro, meritorum ejus ſpeciali contemplatione, conceſſimus.*" And that the biſhop of Arles was ſometimes the pope's vicar over all France, is affirmed alſo by all the biſhops of the dioceſs of Arles, in their letter to pope Leo I. " *Cui id etiam honoris dignita-*
" *tiſque collatum eſt,*" ſay they, " *ut non tantùm has Provincias*
" *poteſtate propriâ gubernaret; verùm etiam omnes Gallias, ſibi*
" *Apoſtolicæ Sedis vice mandatâ, ſub omni eccleſiaſticâ regulâ con-*
" *tineret.*" And pope Pelagius I. A. C. 556, in his epiſtle to Sapaudus biſhop of Arles: " *Majorum noſtrorum, operante Dei*
" *miſericordiâ, cupientes inhærere veſtigiis, & eorum actus divino*
" *examine in omnibus imitari: Charitati tuæ per univerſam Gal-*
" *liam, ſanctæ Sedis Apoſtolicæ, cui divinâ gratiâ præſidemus, vices*
" *injungimus.*"

IV. By the influence of the ſame imperial edict, not only Spain and Gallia, but alſo Illyricum became ſubject to the pope. Damaſcus made Aſcholius, or Acholius, biſhop of Theſſalonica, the metropolis of Oriental Illyricum, his vicar for hearing of cauſes; and in the year 382, Acholius, being ſummoned by pope Damaſcus, came to a council at Rome. Pope Siricius, the ſucceſſor of Damaſcus, decreed, that no biſhop ſhould be ordained in Illyricum without the conſent of Anyſius, the ſucceſſor of Acholius. And the following popes gave Rufus, the ſucceſſor of Anyſius, a power of calling provincial councils: for in the collections of Holſtenius, there is an account of a council of Rome convened under pope Boniface II. in which were produced letters of Damaſus, Siricius, Innocent I. Boniface I. and Cæleſtine biſhops of Rome, to Aſcholius, Anyſius, and Rufus, biſhops of Theſſalonica; in which letters they commend to them the hearing of cauſes in Illyricum, granted by the lord and the holy canons to the apoſtolic ſee throughout that province. And pope Siricius ſaith in his epiſtle to Anyſius: *Etiam dudum, frater chariſſime,*
" *per Candidianum Epiſcopum, qui nos præceſſit ad Dominum, hu-*
" *juſmodi literas dederamus; ut nulla licentia eſſet, ſine conſenſu tuo*
" *in Illyrico Epiſcopos ordinare præſumere; quæ utrum ad te perve-*
" *nerint, ſcire non potui. Multa enim geſta ſunt per contentionem*
" *ab Epiſcopis in ordinationibus faciendis, quod tua melius caritas*
" *novit.*"

CHANGE OF TIMES AND LAWS.

" *novit.*" And a little after: " *Ad omnem enim hujuſmodi auda-*
" *ciam comprimendam vigilare debet inſtantia tua, Spiritu in te*
" *Sancto fervente: ut vel ipſe, ſi potes, vel quos judicaveris Epiſ-*
" *copos idoneos, cum literis dirigas, dato conſenſu qui poſſit, in ejus*
" *locum qui defunctus vel depoſitus fuerit, Catholicum Epiſcopum*
" *vitâ & moribus probatum, ſecundum Nicænæ Synodi ſtatuta, vel*
" *Eccleſiæ Romanæ, Clericum de Clero meritum ordinare.*" And pope Innocent I. ſaith in his epiſtle to Anyſius: " *Cui* [Anyſio]
" *etiam anteriores tanti ac tales viri prædeceſſores mei Epiſcopi, id*
" *eſt, ſanctæ memoriæ Damaſus, Siricius, atque ſuprà memoratus*
" *vir, ita detulerunt; ut omnia quæ in omnibus illis partibus gere-*
" *rentur, Sanctitati tuæ, quæ plena juſtitiæ eſt, traderent cogno-*
" *cenda.*" And in his epiſtle to Rufus, the ſucceſſor of Anyſius:
" *Ita longis intervallis diſterminatis à me eccleſiis diſcat conſulen-*
" *dum; ut prudentiæ gravitatique tuæ committendam curam, cau-*
" *ſaſque, ſiquæ exoriantur, per Achaiæ, Theſſaliæ, Epiri veteris,*
" *Epiri novæ, & Cretæ, Daciæ Mediterraneæ, Daciæ Ripenſis,*
" *Mœſiæ, Dardaniæ, & Prævali eccleſias, Chriſto domino annuente,*
" *cenſeam. Verè enim ejus ſacratiſſimis monitis, lectiſſimæ ſinceri-*
" *tatis tuæ providentiæ & virtuti hanc injungimus ſollicitudinem:*
" *non primitus hæc ſtatuentes, ſed Præceſſores noſtros Apoſtolicos imi-*
" *tati; qui beatiſſimis Acholio & Anyſio injungi pro meritis iſta vo-*
" *luerunt.*" And Boniface I. in his decretal epiſtle to Rufus, and the reſt of the biſhops in Illyricum: " *Nullus, ut frequenter dixi,*
" *alicujus ordinationem citra ejus* [Epiſcopi Theſſalonicenſis] *con-*
" *ſcientiam celebrare præſumat: cui, ut ſupra dictum eſt, vice noſ-*
" *trâ cuncta committimus.*" And pope Cæleſtine, in his decretal epiſtle to the biſhops throughout Illyricum, ſaith: " *Vicem noſ-*
" *tram per veſtram Provinciam noveritis* [Rufo] *eſſe commiſſam;*
" *ita ut ad eum, fratres cariſſimi, quicquid de cauſis agitur, refera-*
" *tur. Sine ejus conſilio nullus ordinetur. Nullus uſurpet, eodem*
" *inconſcio, commiſſam illi Provinciam; colligere, niſi cum ejus vo-*
" *luntate, Epiſcopus non præſumat.*" And in the cauſe of Perigenes, in the title of his epiſtle, he thus enumerates the provinces under this biſhop: " *Rufo & cæteris Epiſcopis per Macedo-*
" *niam, Achaiam, Theſſaliam, Epirum veterem, Epirum novam,*
" *Prævalin, & Daciam conſtitutis.*" And pope Xiſtus, in a decretal

CHAPTER EIGHTH.

cretal epiſtle to the ſame biſhops: "*Illyricanæ omnes Eccleſiæ, ut* "*à deceſſoribus noſtris recepimus, & nos quoque fecimus, ad cu-* "*ram nunc pertinent Theſſalonicenſis Antiſtitis; ut ſuâ ſollicitudine,* "*ſiquæ inter fratres naſcantur, ut aſſolent, actiones, diſtinguat atque* "*definiat; & ad eum, quicquid à ſingulis ſacerdotibus agitur, re-* "*feratur. Sit Concilium, quotiens cauſæ fuerint; quotiens ille, pro* "*neceſſitatum emergentium ratione, decreverit.*" And pope Leo I. in his decretal epiſtle to Anaſtaſius biſhop of Theſſalonica: "*Sin-* "*gulis autem Metropolitanis ſicut poteſtas iſta committitur, ut in* "*ſuis provinciis jus habeant ordinandi; ita eos Metropolitanos à te* "*volumus ordinari; maturo tamen & decocto judicio.*"

V. Occidental Illyricum comprehended Pannonia *Prima* and *Secunda*, Savia, Dalmatia, Noricum Mediterraneum, and Noricum Ripenſe; and its metropolis was Sirmium, till Attila deſtroyed this city. Afterwards Laureacum became the metropolis of Noricum, and both Pannonias, and Salona the metropolis of Dalmatia. Now the biſhops of Laureacum and Salona (a) received the *Pallium* from the pope: and Zoſimus, in his decretal epiſtle to Heſychius biſhop of Salona, directed him to denounce the apoſtolic decrees as well to the biſhops of his own, as to thoſe of the neighbouring provinces. The ſubjection of theſe provinces to the ſee of Rome ſeems to have begun in Anemius; who was ordained biſhop of Sirmium by Ambroſe biſhop of Millan, and who, in the council of Aquileia under pope Damaſus, A. C. 381, declared his ſentence in theſe words: "*Caput Illyrici non* "*niſi civitas Sirmienſis; ego igitur illius civitatis epiſcopus ſum.* "*Eum, qui non confitetur filium Dei æternum, & coeternum patri,* "*qui eſt ſempiternus, anathema dico.*" The next year Anemius and Ambroſe, with Valerian biſhop of Aquileia, Acholius biſhop of Theſſalonica, and many others, went to the council of Rome, which met for over-ruling the Greek church by majority of votes, and exalting the authority of the apoſtolic ſee, as was attempted before in the council of Sardica.

(a) Vide Caroli à S. Paulo Geographiam Sacram, p. 72, 73.

VI. Aquileia was the ſecond city of the Weſtern Empire, and by ſome called the ſecond Rome. It was the metropolis of Iſtria, Forum Julium, and Venetia; and its ſubjection to the ſee of Rome is manifeſt by the decretal epiſtle of Leo I. directed to Nicetas,

cetas, biſhop of this city. For the pope begins his epiſtle thus: "*Regreſſus ad nos filius meus Adeodatus Diaconus Sedis noſtræ, di-* "*lectionem tuam popoſciſſe memorat, ut de bis à nobis authoritatem* "*Apoſtolicæ Sedis acciperes; quæ quidem magnam difficultatem di-* "*judicationis videntur afferre.*" Then he ſets down an anſwer to the queſtions propoſed by Nicetas, and concludes thus: "*Hanc* "*autèm epiſtolam noſtram, quam ad conſultationem tuæ fraterni-* "*tatis emiſimus, ad omnes fratres & comprovinciales tuos epiſco-* "*pos facies pervenire, ut in omnium obſervantiâ data proſit au-* "*thoritas. Data* 12 *Kal. Apr. Majorano Aug. Coſ. A. C.* 458."

CHANGE OF TIMES AND LAWS.

Gregory (a) the Great, A. C. 591, cited Severus, biſhop of Aquileia, to appear before him in judgment in a council at Rome.

(a) Greg. M. lib. 1. Indict. 9. epiſt. 16.

VII. The biſhops of Aquileia and Millan created one another; and therefore were of equal authority, and alike ſubject to the ſee of Rome. Pope Pelagius (b), about the yea r557, teſtified this in the following words: "*Mos antiquus fuit,*" ſaith he, "*ut quia* "*pro longinquitate vel difficultate itineris, ab Apoſtolico illis onero-* "*ſum fuerit ordinari; ipſi ſe invicem, Mediolanenſis & Aquileienſis,* "*ordinare epiſcopos debuiſſent.*" Theſe words imply, that the ordination of theſe two biſhops belonged to the ſee of Rome. When Laurentius biſhop of Millan had excommunicated Magnus, one of his preſbyters, and was dead; Gregory the Great (c) abſolved Magnus, and ſent the *Pallium* to the new-elected biſhop Conſtantius; whom (d) the next year he reprehended of partiality in judging Fortunatus, and commanded him to ſend Fortunatus to Rome to be judged there. Four years after he (e) appointed the biſhops of Millan and Ravenna to hear the cauſe of one Maximus; and two years after, viz. A. C. 601, when Conſtantius was dead, and the people of Millan had elected Deuſdedit his ſucceſſor, and the Lombards had elected another; Gregory (f) wrote to the notary, clergy, and people of Millan, that, by the authority of his letters, Deuſdedit ſhould be ordained; and that he, whom the Lombards had ordained, was an unworthy ſucceſſor of Ambroſe. Whence I gather, that the church of Millan had continued in this ſtate of ſubordination to the ſee of Rome, ever ſince the days of Ambroſe; for Ambroſe himſelf acknowledged the authority of the ſee of Rome. "*Eccleſia Romana* (g)," ſaith

(b) Apud Gratianum de Mediolanenſi & Aquileienſi Epiſcopis.

(c) Greg. M. lib. 3. epiſt. 26. & lib. 4. epiſt. 1.

(d) Greg. lib. 5. epiſt. 4.

(e) Greg. lib. 9. epiſt. 10 & 67.

(f) Greg. lib. 11. epiſt. 3, 4.

(g) Ambroſ. l. 3. de ſacramentis, c. 1.

CHAPTER EIGHTH.

faith he, "*hanc consuetudinem non habet, cujus typum in omnibus* "*sequimur & formam.*" And a little after: "*In omnibus cupio* "*sequi Ecclesiam Romanam.*" And in his Commentary upon 1 Tim. iii. "*Cum totus mundus Dei sit, tamen domus ejus ecclesia* "*dicitur; cujus hodie rector est Damasus.*" In his oration on the death of his brother Satyrus, he relates how his brother coming to a certain city of Sardinia, "*advocavit episcopum loci; percon-* "*tatusque est ex eo, utrum cum episcopis Catholicis, hoc est cum Ro-* "*mana ecclesia, conveniret?*" And in conjunction with the synod "of Aquileia, A. C. 381, in a synodical epistle to the emperor Gratian, he saith: "*Totius orbis Romani caput Romanam eccle-* "*siam, atque illam sacrosanctam Apostolorum fidem, ne turbari si-* "*neret, obsecranda fuit clementia vestra; inde enim in omnes ve-* "*nerandæ communionis jura dimanant.*" The churches therefore of Aquileia and Millan were subject to the see of Rome from the days of the emperor Gratian. Auxentius, the predecessor of Ambrose, was not subject to the see of Rome; and consequently the subjection of the church of Millan began in Ambrose. This diocese of Millan contained Liguria with Insubria, the Alpes Cottiæ, and Rhætia; and was divided from the diocese of Aquileia by the river Addua. In the year 844, the bishop of Millan broke off from the see of Rome; and continued in this separation about 200 years, as is thus mentioned by Sigonius(a): "*Eodem anno Angilbertus, Mediolanensis Archiepiscopus, ab ecclesia* "*Romana parum comperta de causa descivit; tantumque exemplo* "*in posterum valuit, ut non nisi post ducentos annos ecclesia Medio-* "*lanensis ad Romanæ obedientiam auctoritatemque redierit.*"

[a] Sigonius de Regno Italiæ, lib. 5.

VIII. The bishop of Ravenna, the metropolis of Flaminia and Æmilia, was also subject to the pope. For pope Zosimus, A. C. 417, excommunicated some of the presbyters of that church; and wrote a commonitory epistle about them to the clergy of that church, as a branch of the Roman church: "*In sua,*" saith he, "*hoc* "*est, in ecclesia nostra Romana.*" And when those of Ravenna, having elected a new bishop, gave notice thereof to pope Sixtus(b); the pope set him aside, and ordained Peter Chrysologus in his room. Chrysologus, in his epistle to Eutyches, extant in the acts of the council of Chalcedon, wrote thus: "*Nos pro studio* "*pacis*

[b] See Baronius, anno 433, sect. 24.

"*pacis & fidei, extra consensum Romanæ civitatis episcopi, causas* "*fidei audire non possumus.*" And pope Leo I. being consulted by Leo, bishop of Ravenna, about some questions, answered him by a decretal epistle, A. C. 451. And pope Gregory the Great, reprehending John bishop of Ravenna about the use of the *Pallium*(a); tells him of a precept of one of his predecessors, pope John, commanding that all the privileges formerly granted to the bishop and church of Ravenna should be kept: and this bishop John returned a submissive answer; and after his death pope Gregory ordered a visitation of the church of Ravenna; sent the *Pallium* to his successor Marinian, as of antient custom; and confirmed the privileges heretofore granted to this church. Yet this church revolted sometimes from the church of Rome, but returned again to its obedience.

CHANGE OF TIMES AND LAWS.

[a] Greg. M. lib. 3. epist. 56, 57, & lib. 5. epist. 25, 26, 56.

IX. The rest of Italy, with the islands adjacent, containing the *suburbicarian* regions, or ten provinces under the temporal vicar of Rome, viz. Campania,[1] Tuscia[2] and Umbria,[3] Picenum *suburbicarium*,[4] Sicily,[5] Apulia and Calabria,[6] Brutii and Lucania,[7] Samnium,[8] Sardinia,[9] Corsica, and Valeria,[10] constituted the proper province of the bishop of Rome. For the council of Nice, in their fifth canon, ordained, that councils should be held every spring and autumn in every province; and, according to this canon, the bishops of this province met every half year at Rome. For in this sense, pope Leo I. applied this canon to Rome, in a decretal epistle to the bishops of Sicily, written *Alippio & Ardabure Coss.* A. C. 447. "*Quia saluberrime,*" saith he, "*à sanctis patribus* "*constitutum est, binos in annis singulis episcoporum debere esse con-* "*ventus; terni semper ex vobis, ad diem tertium kalendarum Octo-* "*brium, Romam æterno concilio sociandi occurrant. Et indissimu-* "*lanter à vobis hæc consuetudo servetur; quoniam adjuvante Dei* "*gratia facilius poterit provideri, ut in ecclesiis Christi nulla scan-* "*dala, nulli nascantur errores, cùm coram apostolo Petro semper* "*in communione retractatum fuerit, ut omnia canonum Decreta* "*apud omnes domini sacerdotes inviolata permaneant.*" The province of Rome therefore comprehended Sicily, with so much of

CHAPTER EIGHTH.

Italy and the neighbouring iſlands, as ſent biſhops to the annual councils of Rome; but extended not into the provinces of Ravenna, Aquileia, Millan, Arles, &c. thoſe provinces having councils of their own. The biſhops in every province of the Roman empire were convened in council by the metropolitan, or biſhop of the head city of the province; and this biſhop preſided in that council: but the biſhop of Rome did not only preſide in his own council of the biſhops of the *ſuburbicarian* regions, but alſo gave orders to the metropolitans of all the other provinces in the Weſtern Empire, as their uſual governor; as may be further perceived by the following inſtances.

X. Pope Zoſimus, A. C. 417, cited Proculus, biſhop of Marſeilles, to appear before a council at Rome for illegitimate ordinations; and condemned him, as he mentions in ſeveral of his epiſtles. Pope Boniface I. A. C. 419, upon a complaint of the clergy of Valentia againſt Maximus a biſhop, ſummoned the biſhops of all Gallia, and the ſeven provinces, to convene in a council againſt him; and ſaith in his epiſtle, that his predeceſſors had done the like. Pope Leo I. called a general council of all the provinces of Spain to meet in Gallæcia, againſt the Machinees and Priſcillianiſts, as he ſays in his decretal epiſtle to Turribius, a Spaniſh biſhop. And in one of his decretal epiſtles to Nicetas biſhop of Aquileia, he commands him to call a council of the biſhops of that province againſt the Pelagians; which might ratify all the ſynodal decrees, which had been already ratified by the ſee of Rome againſt this hereſy. And in his decretal epiſtle to Anaſtaſius biſhop of Theſſalonica, he ordained that that biſhop ſhould hold two provincial councils every year, and refer the harder cauſes to the ſee of Rome: and if upon any extraordinary occaſion it ſhould be neceſſary to call a council, he ſhould not be troubleſome to the biſhops under him, but content himſelf with two biſhops out of every province, and not detain them above fifteen days. And in the ſame epiſtle he deſcribes the form of church-government, then ſet up, to conſiſt in a ſubordination of all the churches to the ſee of Rome: "*De quâ formâ*," ſaith he, "*epiſcoporum quoque eſt orta diſtinctio; & magnâ diſpoſitione proviſum eſt, ne omnes ſibi omnia vindicarent; ſed eſſent in ſingulis Provinciis ſinguli quorum*

"*quorum inter fratres haberetur prima ſententia; & rurſus quidam, in majoribus urbibus conſtituti, ſollicitudinem ſumerent ampliorem; per quos ad unam Petri Sedem univerſalis eccleſiæ cura confluereret, & nihil uſque à ſuo capite diſſideret. Qui ergo ſcit ſe quibuſdam eſſe præpoſitum, non moleſtè ferat aliquem ſibi eſſe præpoſitum; ſed obedientiam, quam exigit, etiam ipſe dependat; et ſicut non vult gravis oneris ſarcinam ferre, ita non audeat aliis importabile pondus imponere.*" Theſe words ſufficiently ſhew the monarchical form of government, then ſet up in the churches of the Weſtern Empire under the biſhop of Rome, by means of the imperial decree of Gratian, and the appeals and decretal epiſtles grounded thereupon. CHANGE OF TIMES AND LAWS.

XI. The ſame pope Leo, having in a council at Rome paſſed ſentence upon Hilary biſhop of Arles, for what he had done by a provincial council in Gallia, took occaſion from thence to procure the following edict from the Weſtern emperor Valentinian III. for eſtabliſhing more abſolutely the authority of his ſee over all the churches of the Weſtern Empire.

Impp. Theodoſius & Valentinianus AA. Aetio Viro illuſtri, Comiti & Magiſtro utriuſque militiæ & Patricio.

"*Certum eſt, & nobis & imperio noſtro unicum eſſe præſidium in ſupernæ Divinitatis favore; ad quem promerendum præcipuè Chriſtiana fides, & veneranda nobis religio, ſuffragatur. Cùm igitur Sedis Apoſtolicæ Primatum ſancti Petri meritum, qui princeps eſt epiſcopalis coronæ, & Romanæ dignitas civitatis, ſacræ etiam Synodi firmavit auctoritas; ne quid præter auctoritatem Sedis iſtius illicitum præſumptio attemperare nitatur: tunc enim demum eccleſiarum pax ubique ſervabitur, ſi Rectorem ſuum agnoſcat Univerſitas. Hæc cùm hactenus inviolabiliter fuerint cuſtodita, Hilarius Arelatenſis, ſicut venerabilis viri Leonis Romani Papæ fideli relatione comperimus, contumaci auſu illicita quædam præſumenda tentavit; & ideo Tranſalpinas eccleſias abominabilis tumultus invaſit; quod recens maximè teſtatur exemplum. Hilarius enim, qui epiſcopus Arelatenſis vocatur, eccleſiæ Romanæ urbis inconſulto Pontifice, indebitas ſibi ordinationes epiſcoporum ſolâ*

CHAPTER EIGHTH.

" *ſolâ temeritate uſurpans invaſit. Nam alios incompetenter re-*
" *movit; indecenter alios, invitis & repugnantibus civibus, ordi-*
" *navit. Qui quidem, quoniam non facilè, ab his qui non elegerant,*
" *recipiebantur; manum ſibi contrahebat armatam, & clauſtra*
" *murorum in hoſtilem morem vel obſidione cingebat, vel aggreſſione*
" *reſerabat, & ad ſedem quietis, pacem prædicaturus, per bella du-*
" *cebat. His talibus contra imperii majeſtatem, & contra reve-*
" *rentiam Apoſtolicæ Sedis admiſſis, per ordinem religioſi viri Urbis*
" *Papæ cognitione diſcuſſis, certa in eum, ex his quos malè ordina-*
" *verat, lata ſententia eſt. Erat quidem ipſa ſententia per Gallias*
" *etiam ſine Imperiali Sanctione valitura: quid enim Pontificis auc-*
" *toritate non liceret? Sed noſtram quoque præceptionem hæc ratio*
" *provocavit. Nec ulterius vel Hilario, quem adhuc epiſcopum*
" *nuncupare ſola manſueta Præſulis permittit humanitas, nec cui-*
" *quam alteri eccleſiaſticis rebus arma miſcere, aut præceptis Ro-*
" *mani Antiſtitis liceat obviare: auſibus enim talibus fides & reve-*
" *rentia noſtri violatur Imperii. Nec hoc ſolum, quod eſt maximi*
" *criminis, ſubmovemus: verùm ne levis ſaltem inter eccleſias turba*
" *naſcatur, vel in aliquo minui religionis diſciplina videatur, hoc*
" *perenni ſanctione diſcernimus; nequid tam epiſcopis Gallicanis,*
" *quàm aliarum Provinciarum, contra conſuetudinem veterem li-*
" *ceat, ſine viri venerabilis Papæ Urbis æternæ auctoritate, tentare.*
" *Sed illis omnibuſque pro lege ſit, quicquid ſanxit vel ſanxerit Apoſ-*
" *tolicæ Sedis auctoritas: ita ut quiſquis epiſcoporum, ad judicium*
" *Romani Antiſtitis evocatus venire neglexerit, per Moderatorem*
" *ejuſdem Provinciæ adeſſe cogatur; per omnia ſervatis, quæ Divi pa-*
" *rentes noſtri Romanæ Eccleſiæ retulerunt, Aeti pater cariſſime*
" *Auguſti. Unde illuſtris & præclara magnificentia tua præſentis*
" *Edictalis Legis auctoritate faciet, quæ ſunt ſuperius ſtatuta ſervari;*
" *decem librarum auri multâ protinus exigendâ ab unoquoque Ju-*
" *dice, qui paſſus fuerit præcepta noſtra violari. Divinitas te ſervet*
" *per multos annos, parens cariſſime. Dat. viii. Id. Jun. Romæ,*
" *Valentiniano A. vi. Conſule, A. C.* 455." By this edict, the emperor Valentinian enjoined an abſolute obedience to the will of the biſhop of Rome, throughout all the churches of his empire; and declares, that for the biſhops to attempt any thing without the pope's authority, is contrary to antient cuſtom; and that the biſhops

CHANGE OF TIMES AND LAWS.

biſhops ſummoned to appear before his judicature, muſt be carried thither by the governor of the province; and he aſcribes theſe privileges of the ſee of Rome to the conceſſions of his dead anceſtors; that is, to the edict of Gratian and Valentinian II. as above: by which reckoning, this dominion of the church of Rome was now of 66 years ſtanding: and if in all this time it had not been ſufficiently eſtabliſhed, this new edict was enough to ſettle it, beyond all queſtion, throughout the Weſtern Empire.

XII. Hence all the biſhops of the province of Arles, in their letter to pope Leo, A. C. 450, in petitioning the pope for a reſtitution of the privileges of their metropolitan, ſay: " *Per beatum*
" *Petrum, Apoſtolorum principem, ſacroſanctæ eccleſiæ Romanæ tene-*
" *bat ſupra omnes totius mundi eccleſias principatum.*" And Ceretius, Salonius and Veranus, three biſhops of Gallia, ſay, in their epiſtle to the ſame pope: " *Magnâ præterea & ineffabili quâdam nos, pe-*
" *culiares tui, gratulatione ſuccreſcimus, quòd illa ſpecialis doctrinæ*
" *veſtræ pagina ita per omnium eccleſiarum conventicula celebratur,*
" *ut verè conſonâ omnium ſententiâ declaretur, merito illic princi-*
" *patum Sedis Apoſtolicæ conſtitutum, unde adhuc apoſtolici ſpiritûs*
" *oracula referentur.*" And pope Leo himſelf, in his epiſtle to the metropolitan biſhops throughout all Illyricum (*): " *Quia per om-*
" *nes eccleſias cura noſtra diſtenditur; exigente hoc à nobis Domino,*
" *qui Apoſtolicæ dignitatis beatiſſimo Apoſtolo Petro primatum, fidei*
" *ſui remuneratione commiſit, univerſalem eccleſiam in fundamenti*
" *ipſius ſoliditate conſtituens.*"

(*) Epiſt. 84. apud Holſtenium.

XIII. While this eccleſiaſtical dominion was riſing up, the northern barbarous nations invaded the Weſtern Empire; and founded ſeveral kingdoms therein, of different religions from the church of Rome. But theſe kingdoms by degrees embraced the Roman faith, and at the ſame time ſubmitted to the pope's authority. The Franks in Gaul ſubmitted in the end of the fifth century; the Goths in Spain in the end of the ſixth; and the Lombards in Italy were conquered by Charles the Great, A. C. 774. And between the years 775 and 794, the ſames Charles extended the pope's authority over all Germany and Hungary, as far to as the river Teis and the Baltic ſea; and then ſet him above all human

CHAPTER EIGHTH.

judicature, and at the ſame time aſſiſted him in ſubduing the city and duchy of Rome. By the converſion of the ten kingdoms to the Roman religion, the pope only enlarged his ſpiritual dominion, and did not yet riſe up as a horn of the beaſt. It was his temporal dominion, which made him one of the horns: and this kingdom he acquired in the latter half of the eighth century, by ſubduing three of the former horns as above. And now being arrived at a temporal dominion, and a power above all human judicature, he reigned "(a) with a look more ſtout "than his fellows,—and times and laws were *henceforward* given "into his hands, for a time times and half a time (b)," or three times and a half; that is, for 1260 ſolar years, reckoning a time for a calendar year of 360 days, and a day for a ſolar year. After which "(c) the judgment is to ſit, and they ſhall take away his "dominion, *not at once, but by degrees*, to conſume, and to de-"ſtroy it unto the end.—(d) And the kingdom and dominion, "and greatneſs of the kingdom under the whole heaven ſhall, "*by degrees*, be given unto the people of the ſaints of the moſt "High, whoſe kingdom is an everlaſting kingdom, and all do-"minions ſhall ſerve and obey him."

[a] Dan. vii. 20.

[b] Ver. 25.

[c] Ver. 26.

[d] Ver. 27.

CHAP.

CHAP. IX.

Of the kingdoms repreſented in Daniel by the Ram and He-Goat.

THE ſecond and third empires, repreſented by the Bear and Leopard, are again repreſented by the Ram and He-Goat; but with this difference, that the Ram repreſents the kingdoms of the Medes and Perſians from the beginning of the four empires; and the Goat repreſents the kingdom of the Greeks to the end of them. By this means, under the type of the ram and he-goat, the times of all the four empires are again deſcribed: "(a) I lifted up mine eyes," ſaith Daniel, "and ſaw, and behold "there ſtood before the river [Ulai] a Ram which had two horns; "and the two horns were high, but one was higher than the "other, and the higher came up laſt.—And the ram having "two horns, are the kings of Media and Perſia." Not two perſons, but two kingdoms, the kingdoms of Media and Perſia; and the kingdom of Perſia was the higher horn, and came up laſt. The kingdom of Perſia roſe up, when Cyrus having newly conquered Babylon, revolted from Darius king of the Medes, and beat him at Paſargadæ, and ſet up the Perſians above the Medes. This was the horn which came up laſt. And the horn which came up firſt was the kingdom of the Medes, from the time that Cyaxares and Nebuchadnezzar overthrew Nineveh, and ſhared the empire of the Aſſyrians between them. The empires of Media and Babylon were contemporary, and roſe up together by the fall of the Aſſyrian empire; and the prophecy of the four beaſts begins with one of them, and that of the ram and he-goat with the other. And as the Ram repreſents the kingdom of Media and Perſia from the beginning of the four empires; ſo

DANIEL'S RAM AND HE-GOAT.

[a] Chap. viii. 3.

CHAPTER NINTH.

the He-Goat repreſents the empire of the Greeks to the end of thoſe monarchies. In the reign of his great horn, and of the four horns which ſucceeded it, he repreſents this empire during the reign of the Leopard: and in the reign of his little horn, which ſtood up in the latter time of the kingdom of the four, and after their fall became mighty, but not by his own power, he repreſents it during the reign of the fourth beaſt.

" II. The rough goat," ſaith Daniel, " is the king of Græcia, " *that is, the kingdom*; and the great horn between his eyes is the " firſt king." Not the firſt monarch, but the firſt kingdom; that which laſted during the reign of Alexander the Great, and his brother Aridæus and two young ſons, Alexander and Hercules. " (a) Now that [*born*] being broken off, whereas four " [*horns*] ſtood up for it, four kingdoms ſhall ſtand up out of the " nation [*of the Greeks*], but not in his [*the firſt horn's*] power." The four horns are therefore four kingdoms; and by conſequence, the firſt great horn which they ſucceeded, is the firſt great kingdom of the Greeks; that which was founded by Alexander the Great, ann. Nabonaſſ. 414, and laſted till the death of his ſon Hercules, ann. Nabonaſſ. 441. And the four are thoſe of Caſſander, Lyſimachus, Antigonus, and Ptolemy, as above.

[a] Ver. 22.

III. " And in the latter time of their kingdom, when the tranſ- " greſſors are come to the full, a king [*or new kingdom*] of fierce " countenance, and underſtanding dark ſentences, ſhall ſtand " up (b): and his power ſhall be mighty, but not by his own power." This king was the laſt horn of the goat; the little horn which came up out of one of the four horns, and waxed exceeding great. The latter time of their kingdom, was when the Romans began to conquer them; that is, when they conquered Perſeus king of Macedonia, the fundamental kingdom of the Greeks. And at that time the tranſgreſſors came to the full: for then the high-prieſthood was expoſed to ſale; the veſſels of the temple were ſold to pay for the purchaſe; and the high-prieſt, with ſome of the Jews, procured a licence from Antiochus Epiphanes to do after the ordinances of the heathen; and ſet up a ſchool at Jeruſalem for teaching thoſe ordinances. Then Antiochus took Jeruſalem with an armed force; ſlew 4000 Jews; took as many priſoners

[b] Ver. 23.

priſoners and ſold them; ſpoiled the temple; interdicted the worſhip; commanded the law of Moſes to be burnt; and ſet up the worſhip of the heathen gods in all Judea. In the very ſame year, ann. Nabonaſſ. 580, the Romans conquered Macedonia, the chief of the four horns. Hitherto the goat was mighty by its own power; but henceforward began to be under the Romans. Daniel diſtinguiſhes the times, by deſcribing very particularly the actions of the kings of the north and ſouth, thoſe two of the four horns which bordered upon Judea, until the Romans conquered Macedonia; and thenceforward only touching upon the main revolutions, which happened within the compaſs of the nations repreſented by the goat. In this latter period of time the little horn was to ſtand up and grow mighty, but not by his own power.

DANIEL'S RAM AND HE-GOAT.

IV. The three firſt of Daniel's beaſts had their dominions taken away, each of them at the riſe of the next beaſt; but their lives were prolonged, and they are all of them ſtill alive. The third beaſt, or leopard, reigned in his four heads, till the riſe of the fourth beaſt, or empire of the Latins; and his life was prolonged under their power. This Leopard reigning in his four heads, ſignifies the ſame thing with the He-Goat reigning in his four horns: and therefore the He-Goat reigned in his four horns till the riſe of Daniel's fourth beaſt, or empire of the Latins: then its dominion was taken away by the Latins, but its life was prolonged under their power. The Latins are not comprehended among the nations repreſented by the He-Goat in this prophecy: their power over the Greeks is only named in it, to diſtinguiſh the times in which the He-Goat was mighty by his own power, from the times in which he was mighty, but not by his own power. He was mighty by his own power till his dominion was taken away by the Latins; after that, his life was prolonged under their dominion, and this prolonging of his life was in the days of his laſt horn: for in the days of this horn the Goat became mighty, but not by his own power.

V. Now becauſe this horn was a horn of the Goat; we are to look for it, among the nations which compoſed the body of the goat. Among thoſe nations he was to riſe up, and grow mighty: he

grew

CHAPTER NINTH.

grew mighty " (a) towards the ſouth, and towards the eaſt, and
[a] Chap. viii. 9. " towards the pleaſant land;" and therefore he was to riſe up in the north-weſt parts of thoſe nations, and extend his dominion towards Egypt, Syria, and Judea. In the latter time of the kingdom of the four horns, it was to riſe up out of one of them and ſubdue the reſt, but not by its own power. It was to be aſſiſted by a foreign power, a power ſuperior to itſelf; the power which took away the dominion of the third beaſt, the power of the fourth beaſt. And ſuch a little horn was the kingdom of Macedonia, from the time that it became ſubject to the Romans. This kingdom, by the victory of the Romans over Perſeus king of Macedonia, ann. Nabonaſſ. 580, ceaſed to be one of the four horns of the goat, and became a dominion of a new ſort: not a horn of the fourth beaſt, for Macedonia belonged to the body of the third; but a horn of the third beaſt of a new ſort; a horn of the Goat which grew mighty, but not by his own power; a horn which roſe up and grew potent under a foreign power, the power of the Romans.

VI. The Romans, by the legacy of Attalus, the laſt king of Pergamus, ann. Nabonaſſ. 615, inherited that kingdom, including all Aſia Minor on this ſide mount Taurus. Ann. Nabonaſſ. 684 and 685 they conquered Armenia, Syria, and Judea; ann. Nabonaſſ. 718, they ſubdued Egypt. And by theſe conqueſts the little horn " waxed exceeding great towards the ſouth, and to-
[b] Chap. viii. 9-10. " wards the eaſt, and towards the pleaſant land.—(b) And it " waxed great even to the hoſt of heaven; and caſt down ſome " of the hoſt and of the ſtars to the ground, and ſtamped upon " them," that is, upon the people and great men of the Jews.
[c] Ver. 11. " (c) Yea, he magnified himſelf even to the prince of the hoſt, " *the* Meſſiah, *the prince of the* Jews," whom he put to death, ann. Nabonaſſ. 780. " And by him the daily ſacrifice was taken " away, and the place of his ſanctuary was caſt down," viz. in the wars, which the armies of the Eaſtern nations, under the conduct of the Romans, made againſt Judea, when Nero and Veſpa-
[d] Ver. 12. ſian were emperors, ann. Nabonaſſ. 816, 817, 818. " (d) And " an hoſt was given him againſt the daily ſacrifice by reaſon of " tranſgreſſion, and it caſt down the truth to the ground, and " it

" it practiſed and proſpered." This tranſgreſſion is in the next words called " the tranſgreſſion of deſolation;" and in Dan. xi. 31. " the abomination which maketh deſolate;" and in Matth. xxiv. 15. " the abomination of deſolation, ſpoken of by Daniel " the prophet, ſtanding in the holy place." It may relate chiefly to the worſhip of Jupiter Olympius in the temple built by the emperor Hadrian, in the place of the temple of the Jews, and to the revolt of the Jews under Barchochab occaſioned thereby, and to the deſolation of Judea which followed thereupon; all the Jews being thenceforward baniſhed Judea upon pain of death. " (a) Then I heard," ſaith Daniel, " one ſaint ſpeak- [a] Ver. 13, 14. " ing, and another ſaint ſaid unto him which ſpake, How " long ſhall be the viſion concerning the daily ſacrifice, and the " tranſgreſſion of deſolation, to give both the ſanctuary and the " hoſt to be trodden under feet? And he ſaid unto me, Unto " two thouſand and three hundred days; then ſhall the ſanctua- " ry be cleanſed." Daniel's days are years; and theſe years may perhaps be reckoned either from the deſtruction of the temple by the Romans in the reign of Veſpaſian; or from the pollution of the ſanctuary by the worſhip of Jupiter Olympius; or from the deſolation of Judea made in the end of the Jewiſh war by the baniſhment of all the Jews out of their own country; or from ſome other period which time will diſcover. Henceforward the laſt horn of the Goat continued mighty under the Romans, till the reign of Conſtantine the Great and his ſons: and then by the diviſion of the Roman empire between the Greek and Latin emperors, it ſeparated from the Latins, and became the Greek empire alone, but yet under the dominion of a Roman family; and at preſent it is mighty under the dominion of the Turks. RAM AND HE-GOAT.

VII. This laſt horn is by ſome taken for Antiochus Epiphanes, but not very judiciouſly. A horn of a beaſt is never taken for a ſingle perſon: it always ſignifies a new kingdom, and the kingdom of Antiochus was an old one. Antiochus reigned over one of the four horns, and the little horn was a fifth under its proper kings. This horn was at firſt a little one, and waxed exceeding great; and ſo did not Antiochus. It is deſcribed great above all the former horns; and ſo was not Antiochus. His

CHAPTER NINTH.

kingdom, on the contrary, was weak, and tributary to the Romans, and he did not enlarge it. The horn was a "king of "fierce countenance, and deſtroyed wonderfully, and proſpered "and practiſed;" that is, he proſpered in his practices againſt the holy people: but Antiochus was frighted out of Egypt by a mere meſſage of the Romans, and afterwards routed and baffled by the Jews. The horn was mighty by another's power; Antiochus acted by his own. The horn ſtood up againſt the prince of the hoſt of heaven, the prince of princes; and this is the character not of Antiochus, but of Antichriſt. The horn caſt down the ſanctuary to the ground; and ſo did not Antiochus; he left it ſtanding. The ſanctuary and hoſt were trampled under foot 2300 days; and in Daniel's prophecies days are put for years: but the profanation of the temple in the reign of Antiochus did not laſt ſo many natural days. Theſe were to laſt till the time of the end, till the laſt end of the indignation againſt the Jews; and this indignation is not yet at an end. They were to laſt till the ſanctuary which had been caſt down ſhould be cleanſed; and the ſanctuary is not yet cleanſed.

VIII. This prophecy of the Ram and He-Goat is repeated in the laſt prophecy of Daniel. There the angel tells Daniel (a), that "he ſtood up to ſtrengthen Darius the Mede, and that there "ſhould ſtand up yet three kings in Perſia [Cyrus, Cambyſes, "and Darius Hyſtaſpis], and the fourth [Xerxes] ſhould be far "richer than they all; and by his wealth through his riches he "ſhould ſtir up all againſt the realm of Grecia." This relates to the Ram, whoſe two horns were the kingdoms of Media and Perſia. Then he goes on to deſcribe the horns of the goat by the "(b) ſtanding up of a mighty king, which ſhould rule with "great dominion, and do according to his will;" and by the breaking of his kingdom into four ſmaller kingdoms, and not deſcending to his own poſterity. Then he deſcribes the actions of two of thoſe kingdoms, which bordered on Judea, viz. Egypt and Syria, calling them the kings of the South and North, that is, in reſpect of Judea; and he carries on the deſcription till the latter end of the kingdoms of the four, and till the reign of Antiochus Epiphanes, when tranſgreſſors were come to the full.

(a) Dan. xi. 1, 2.

(b) Ver. 3.

In

DANIEL'S RAM AND HE-GOAT.

In the eighth year of Antiochus, the year in which he profaned the temple and ſet up the heathen gods in all Judea, and the Romans conquered the kingdom of Macedon; the prophetic angel leaves off deſcribing the affairs of the kings of the South and North, and begins to deſcribe thoſe of the Greeks under the dominion of the Romans, in theſe words: "(a) And after him "Arms [the Romans] ſhall ſtand up, and they ſhall pollute the "ſanctuary of ſtrength." As ממלך ſignifies "after the king" (Dan. xi. 8); ſo here ממנו may ſignify "after him:" and ſo מן־האחת may ſignify "after one of them" [Dan. viii. 9.] Arms are every where in theſe prophecies of Daniel put for the military power of a kingdom, and they ſtand up when they conquer and grow powerful. The Romans conquered Illyricum, Nabonaſſ. 580; and thirty-five years after, by the laſt will and teſtament of Attalus, the laſt king of Pergamus, they inherited that rich and flouriſhing kingdom, that is, all Aſia on this ſide mount Taurus: and ſixty-nine years after, they conquered the kingdom of Syria, and reduced it into a province: and thirty-four years after they did the like to Egypt. By all theſe ſteps the Roman arms ſtood up over the Greeks. And after 95 years more, by making war upon the Jews, "they polluted the ſanctuary of "ſtrength, and took away the daily ſacrifice, and, *in its room* "*ſoon after*, placed the abomination which made *the land* deſo-"late;" for this abomination was placed after the days of Chriſt (Matth. xxiv. 15.) In the 16th year of the emperor Hadrian, A. C. 132, they placed this abomination by building a temple to Jupiter Capitolinus, where the temple of God in Jeruſalem had ſtood. Thereupon the Jews, under the conduct of Barchochab, roſe up in arms againſt the Romans, and in that war had 50 cities demoliſhed, 985 of their beſt towns deſtroyed, and 580000 men ſlain by the ſword: and in the end of the war, A. C. 136, they were all baniſhed Judea upon pain of death; and that time the land hath remained deſolate of its old inhabitants.

(a) Dan. xi. 3f.

IX. Now that the prophetic angel paſſes in this manner from the four kingdoms of the Greeks to the Romans reigning over the Greeks, is confirmed from hence; that in the next place he deſcribes the affairs of the Chriſtians unto the time of the end, in

[a] Chap. xi. 33, &c.

theſe words: " ([a]) " And they that underſtand among the peo- " ple ſhall inſtruct many; yet they ſhall fall by the ſword and by " flame, by captivity and by ſpoil many days. Now when they " ſhall fall they ſhall be holpen with a little help," viz. in the reign of Conſtantine the Great; " but many ſhall cleave to them " with diſſimulation. And ſome of them of underſtanding " there ſhall fall to try them, and to purge *them from the diſ- " ſemblers*; and to make them white even to the time of the " end." And a little after, the time of the end is ſaid to be " a time, times, and half a time:" which is the duration of the reign of the laſt horn of Daniel's fourth beaſt, and of the Woman and her Beaſt in the Apocalyps.

CHAP. X.

Of the prophecy of the Seventy Weeks.

CHAPTER TENTH.

THE viſion of the image compoſed of four metals was given firſt to Nebuchadnezzar, and then to Daniel, in a dream: and Daniel began then to be celebrated for revealing of ſecrets (Ezek. xxviii. 3.) The viſion of the Four Beaſts, and of the Son of Man coming in the clouds of heaven, was alſo given to Daniel in a dream. That of the Ram and He-Goat appeared to him in the day-time, when he was by the bank of the river Ulay; and was explained to him by the prophetic angel Gabriel.

(α) *Cut upon.* A phraſe in Hebrew, taken from the practiſe of numbering by cutting notches.
(β) Heb. *To ſeal*, i. e. to finiſh or conſummate: a metaphor taken from ſealing what is finiſhed. So the Jews compute, *ad obſignatum Miſna, ad obſignatum Talmud*, that is, *ad abſolutum.*

It concerns the Prince of the Hoſt, and the Prince of Princes: and now in the firſt year of Darius the Mede over Babylon, the ſame prophetic angel appears to Daniel again, and explains to him what is meant by the Son of man, by the Prince of the hoſt, and the Prince of princes. The prophecy of the Son of man coming in the clouds of heaven, relates to the ſecond coming of Chriſt; that of the Prince of the hoſt, relates to his firſt coming: and this prophecy of the Meſſiah, in explaining them, relates to both comings, and aſſigns the times thereof. DANIEL's SEVENTY WEEKS.

II. This prophecy, like all the reſt of Daniel's, conſiſts of two parts, an introductory prophecy, and an explanation thereof; the whole I thus tranſlate and interpret.

III. " ([a]) Seventy weeks are (α) cut out upon thy people, and " upon thy holy city, to finiſh tranſgreſſion, and (β) to make " an end of ſins, to expiate iniquity, and to bring in everlaſting " righteouſneſs, to conſummate the viſion and (γ) the prophet, " and to anoint the moſt Holy. [a] Chap. xi. 24, 25, 26, 27.

" Know alſo and underſtand, that from the going forth of " the commandment to cauſe to return and to build Jeruſalem, " unto (δ) the Anointed the Prince, ſhall be ſeven weeks.

" Yet threeſcore and two weeks ſhall (ε) it return, and the " ſtreet be built and the wall; but in troubleſome times: and " after the threeſcore and two weeks, the Anointed ſhall be cut " off, and (ε) it ſhall not be his; but the people of a prince to " come ſhall deſtroy the city and the ſanctuary: and the end " thereof ſhall be with a flood, and unto the end of the war, " deſolations are determined.

" Yet ſhall he confirm the covenant with many for one week: " and in half a week he ſhall cauſe the ſacrifice and oblation to " ceaſe: and upon a wing of abominations he ſhall make it de- " ſolate, even until the conſummation, and that which is deter- " mined be poured upon the deſolate."

(γ) Heb. *The Prophet*, not the prophecy.
(δ) Heb. *The Meſſiah*, that is, in Greek, the Chriſt; in Engliſh, the Anointed. I uſe the Engliſh word, that the relation of this clauſe to the former may appear.
(ε) Jeruſalem.

" Seventy

CHAPTER TENTH.

IV. "Seventy weeks are cut out upon thy people, and upon thy "holy city, to finiſh tranſgreſſion, &c." Here, by putting a week for ſeven years, as in Gen. xxix. 17, 18. are reckoned 490 years from the time that the diſperſed Jews ſhould be re-incorporated into (a) a people and a holy city, until the death and reſurrection of Chriſt; "whereby tranſgreſſion ſhould be finiſhed, and ſins ended, iniquity "be expiated, and everlaſting righteouſneſs brought in, and this "viſion be accompliſhed, and the prophet conſummated;" that Prophet whom the Jews expected, and whereby the moſt Holy ſhould be anointed; he who is therefore in the next words called the Anointed, that is, the Meſſiah, or the Chriſt. For by joining the accompliſhment of the viſion with the expiation of ſins, the 490 years are ended with the death of Chriſt. Now the diſperſed Jews became a people and city when they firſt returned into a polity or body politic; and this was in the ſeventh year of Artaxerxes Longimanus, when Ezra returned with a body of Jews from captivity, and revived the Jewiſh worſhip; and by the king's commiſſion created magiſtrates in all the land, to judge and govern the people according to the laws of God and the king (Ezra vii. 25.) There were but two returns from captivity, Zerubbabel's and Ezra's; in Zerubbabel's they had only commiſſion to build the temple, in Ezra's they became a polity or city by a government of their own. Now the years of this Artaxerxes began about two or three months after the ſummer ſolſtice, and his ſeventh year fell in with the third year of the eightieth olympiad; and the latter part thereof, wherein Ezra went up to Jeruſalem, was in the year of the Julian Period 4257. Count the time from thence to the death of Chriſt, and you will find it juſt 490 years. If you count in Judaic years, commencing in autumn, and date the reckoning from the firſt autumn after Ezra's coming to Jeruſalem. when he put the king's decree in execution; the death of Chriſt will fall on the year of the Julian Period 4747, anno Domini 34; and the weeks will be Judaic weeks, ending with ſabbatical years; and this I take to be the truth: but if you had rather place the death of Chriſt in the year before, as is commonly done, you may take the year of Ezra's journey into the reckoning.

(a) See Iſa. xxiii. 13.

"Know

DANIEL'S SEVENTY WEEKS.

V. "Know alſo and underſtand, that from the going forth of "the commandment to cauſe to return and to build Jeruſalem, "unto the Anointed the Prince, ſhall be ſeven weeks." The former part of the prophecy related to the firſt coming of Chriſt, being dated to his coming as a prophet; this being dated to his coming to be prince or king, ſeems to relate to his ſecond coming. There, the prophet was conſummate, and the moſt Holy anointed: here, he that was anointed comes to be prince and to reign. For Daniel's prophecies reach to the end of the world; and there is ſcarce a prophecy in the Old Teſtament concerning Chriſt, which doth not in ſomething or other relate to his ſecond coming. If divers of the antients, as (α) Irenæus, (β) Julius Africanus, Hippolytus the Martyr, and Apollinaris biſhop of Laodicea, applied the half week to the times of Antichriſt; why may not we, by the ſame liberty of interpretation, apply the ſeven weeks to the time when Antichriſt ſhall be deſtroyed by the brightneſs of Chriſt's coming?

VI. The Iſraelites in the days of the antient prophets, when the ten tribes were led into captivity, expected a double return; and that at the firſt the Jews ſhould build a new temple inferior to Solomon's, until the time of that age ſhould be fulfilled; and afterwards they ſhould return from all places of their captivity, and build Jeruſalem and the temple gloriouſly (Tobit xiv. 4, 5, 6): and to expreſs the glory and excellence of this city, it is figuratively ſaid to be built of precious ſtones (Tobit xiii. 16, 17, 18. Iſa. liv. 11, 12. Rev. xi.) and called the New Jeruſalem, the Heavenly Jeruſalem, the Holy City, the Lamb's Wife, the City of the Great King, the City into which the kings of the earth do bring their glory and honour. Now while ſuch a return from captivity was the expectation of Iſrael, even before the times of Daniel, I know not why Daniel ſhould omit it in his prophecy. This part of the prophecy being therefore not yet fulfilled, I ſhall not attempt a particular interpretation of it, but content myſelf with obſerving, that as the ſeventy and the ſixty-two weeks were Jewiſh weeks, ending with ſabbatical years; ſo the ſeven weeks are the compaſs of a Jubilee, and begin and end with actions proper for a Jubilee, and of the higheſt nature

for.

CHAPTER TENTH.

for which a Jubilee can be kept: and that ſince the commandment to return and to build Jeruſalem, precedes the Meſſiah the Prince 49 years; it may perhaps come forth not from the Jews themſelves, but from ſome other kingdom friendly to them, and precede their return from captivity, and give occaſion to it; and, laſtly, that this rebuilding of Jeruſalem and the waſte places of Judah is predicted in Micah vii. 11. Amos ix. 11, 14. Ezek. xxxvi. 33, 35, 36, 38. Iſa. liv. 3, 11, 12. lv. 12. lxi. 4. lxv. 18, 21, 22. and Tobit xiv. 5. and that the return from captivity and coming of the Meſſiah and his kingdom are deſcribed in Daniel vii. Rev. xix. Acts i. Matth. xxiv. Joel iii. Ezek. xxxvi. xxxvii. Iſa. lx. lxii. lxiii. lxv. and lxvi. and many other places of ſcripture. The manner I know not. Let time be the interpreter.

VII. "Yet threeſcore and two weeks ſhall it return, and the ſtreet "be built and the wall, but in troubleſome times: and after the "threeſcore and two weeks the Meſſiah ſhall be cut off, and it "ſhall not be his; but the people of a prince to come ſhall de-"ſtroy the city and the ſanctuary, &c." Having foretold both comings of Chriſt, and dated the laſt from their returning and building Jeruſalem; to prevent the applying that to the building Jeruſalem by Nehemiah, he diſtinguiſhes this from that, by ſaying that from this period to the Anointed ſhall be, not ſeven weeks, but threeſcore and two weeks, and this not in proſperous but in troubleſome times; and at the end of theſe weeks the Meſſiah ſhall not be the prince of the Jews, but be cut off; and Jeruſalem not be his, but the city and ſanctuary be deſtroyed. Now Nehemiah came to Jeruſalem in the 20th year of this ſame Artaxerxes, while Ezra ſtill continued there (Nehem. xii. 36.) and found the city lying waſte, and the houſes and wall unbuilt, (Nehem. ii. 17. vii. 4.) and finiſhed the wall the 25th day of the month Elul (Nehem. vi. 15.) in the 28th year of the king, that is, in September, in the year of the Julian Period 4278. Count now from this year threeſcore and two weeks of years, that is 434 years, and the reckoning will end in September in the year of the Julian Period 4712, which is the year in which Chriſt was born, according to Clemens Alexandrinus, Irenæus,

(α) Iren. l. 5. Hær. c. 25. (β) Apud Hieron. in h. l.

Euſebius,

Euſebius, Epiphanius, Jerome, Oroſius, Caſſiodorus, and other antients: for this was the general opinion, till Dionyſius Exiguus invented the vulgar account, in which Chriſt's birth is placed two years later. If with ſome you reckon that Chriſt was born three or four years before the vulgar account; yet his birth will fall in the latter part of the laſt week, which is enough. How after theſe weeks Chriſt was cut off, and the city and ſanctuary deſtroyed by the Romans, is well known.

DANIEL'S SEVENTY WEEKS.

VI. "Yet ſhall he confirm the covenant with many for one "week." For he kept it, notwithſtanding his death, till the rejection of the Jews, and calling of Cornelius and the Gentiles in the ſeventh year after his paſſion.

VII. "And in half a week he ſhall cauſe the ſacrifice and ob-"lation to ceaſe;" that is, by the war of the Romans upon the Jews: which war, after ſome commotions, began in the 13th year of Nero, A. D. 67, in ſpring, when Veſpaſian with an army invaded them; and ended in the ſecond year of Veſpaſian, A. D. 70, in autumn, Sept. 7, when Titus took the city, having burnt the temple 27 days before: ſo that it laſted three years and an half.

VIII. "And upon a wing of abominations he ſhall cauſe deſola-"tion, even until the conſummation, and that which is determined "be poured upon the deſolate." The prophets, in repreſenting kingdoms by beaſts and birds, put their wings, ſtretched out over any country, for their armies ſent out to invade and rule over that country. Hence a wing of abominations is an army of falſe gods: for an abomination is often put in ſcripture for a falſe god; as where Chemoſh is called the abomination of Moab, and Molech the abomination of Ammon. The meaning therefore is, that the people of a prince to come ſhall deſtroy the ſanctuary, and aboliſh the daily worſhip of the true God, and overſpread the land with an army of falſe gods; and by ſetting up their dominion and worſhip, cauſe deſolation to the Jews, until the times of the Gentiles be fulfilled. For Chriſt tells us, that the abomination of deſolation ſpoken of by Daniel was to be ſet up in the times of the Roman Empire (Matth. xxiv. 15.)

CHAPTER TENTH.

IX. Thus have we in this ſhort prophecy, a prediction of all the main periods relating to the coming of the Meſſiah: the time of his birth; that of his death; that of the rejection of the Jews; the duration of the Jewiſh war, whereby he cauſed the city and ſanctuary to be deſtroyed; and the time of his ſecond coming: and ſo the interpretation here given is more full and complete and adequate to the deſign, than if we ſhould reſtrain it to his firſt coming only, as interpreters uſually do. We avoid alſo the doing violence to the language of Daniel, by taking the ſeven weeks and ſixty-two weeks for one number. Had that been Daniel's meaning, he would have ſaid ſixty and nine weeks, and not ſeven weeks and ſixty-two weeks; a way of numbering uſed by no nation. In our way the years are Jewiſh luni-ſolar years, as they ought to be; and the ſeventy weeks of years are Jewiſh weeks ending with ſabbatical years, which is very remarkable. For they end either with the year of the birth of Chriſt, two years before the vulgar account, or with the year of his death, or with the ſeventh year after it: all which are ſabbatical years. Others either count by lunar years, or by weeks not Judaic: and, which is worſt, they ground their interpretations on erroneous chronology, excepting the opinion of Funccius about the ſeventy weeks, which is the ſame with ours. For they place Ezra and Nehemiah in the reign of Artaxerxes Mnemon, and the building of the temple in the reign of Darius Nothus, and date the weeks of Daniel from thoſe two reigns.

X. The grounds of the chronology here followed, I will now ſet down as briefly as I can.

The Peloponneſian war began in ſpring, ann. 1. olymp. 87; as Diodorus, Euſebius, and all other authors agree. It began two months before Pythodorus ceaſed to be archon (Thucyd. l. 2.) that is, in April, two months before the end of the olympic year. And the years of this war are moſt certainly determined by the 50 years diſtance of its firſt year from the tranſit of Xerxes incluſively; (Thucyd. l. 2.) or 48 years excluſively; (Eratoſth. apud Clem. Alex.) by the 69 years diſtance of its end, or 27th year, from the beginning of Alexander in Greece; by the acting of the olympic games in its 4th and 12th years; (Thucyd. l. 5.)

DANIEL'S SEVENTY WEEKS.

5.) and by three eclipſes of the ſun, and one of the moon, mentioned by Thucydides and Xenophon. Now Thucydides, an unqueſtionable witneſs, tells us, that the news of the death of Artaxerxes Longimanus was brought to Epheſus, and from thence by ſome Athenians to Athens, in the 7th year of this Peloponneſian war, when the winter half year was running; and therefore he died ann. 4. olymp. 88, in the end of ann. J. P. 4289, ſuppoſe a month or two before mid-winter; for ſo long the news would be in coming. Now Artaxerxes Longimanus reigned 40 years, by the conſent of Diodorus, Euſebius, Jerome, Sulpitius; or 41, according to Ptol. in can. Clem. Alexand. l. 1. Strom. Chron. Alexand. Abulpharagius, Nicephorus, including therein the reign of his ſucceſſors Xerxes and Sogdian, as Abulpharagius informs us. After Artaxerxes reigned his ſon Xerxes two months, and Sogdian ſeven months; but their reign is not reckoned apart in ſumming up the years of the kings, but is included in the 40 or 41 years reign of Artaxerxes: omit theſe nine months, and the preciſe reign of Artaxerxes will be thirty-nine years and three months. And therefore ſince his reign ended in the beginning of winter, ann. J. P. 4289, it began between midſummer and autumn, ann. J. P. 4250.

XI. The ſame thing I gather alſo thus. Cambyſes began his reign in ſpring, ann. J. P. 4185, and reigned eight years, including the five months of Smerdes; and then Darius Hyſtaſpis began in ſpring, ann. J. P. 4193, and reigned thirty-ſix years, by the unanimous conſent of all chronologers. The reigns of theſe two kings are determined by three eclipſes of the moon obſerved at Babylon, and recorded by Ptolemy; ſo that it cannot be diſputed. One was in the ſeventh year of Cambyſes, ann. J. P. 4191, Jul. 16, at 11 at night; another in the 20th year of Darius, ann. J. P. 4212, Nov. 19, at 11^h. 45′. at night; a third in the 31ſt year of Darius, ann. J. P. 4223, Apr. 25, at 11^h. 30 at night. By theſe eclipſes, and the prophecies of Haggai and Zachary compared together, it is manifeſt that his years began after the 24th day of the 11th Jewiſh month, and before the 25th day of April, and by conſequence about March. Xerxes therefore began in ſpring, ann. J. P. 4229: for Darius

CHAPTER TENTH.

died in the fifth year after the battle at Marathon, as Herodotus, lib. 7, and Plutarch mention; and that battle was in October, ann. J. P. 4224, ten years before the battle at Salamis. Xerxes therefore began within leſs than a year after October, ann. J. P. 4228, ſuppoſe in the ſpring following: for he ſpent his firſt five years, and ſomething more, in preparations for his expedition againſt the Greeks; and this expedition was in the time of the olympic games, ann. 1. olymp. 75, *Calliade Athenis Archonte*; 28 years after the Regifuge, and conſulſhip of the firſt conſul Junius Brutus, *anno urbis conditæ* 273, *Fabio & Furio Coſſ.* The paſſage of Xerxes's army over the Helleſpont began in the end of the fourth year of the 74th olympiad, that is, in June, ann. J. P. 4234, and took up one month: and in autumn, after three months more, on the full moon, *die* 16 *Munychionis, plenilunio*, was the battle at Salamis; and a little after that an eclipſe of the ſun, which by the calculation fell on Oct. 2. His ſixth year therefore began a little before June, ſuppoſe in ſpring, ann. J. P. 4234; and his firſt year conſequently in ſpring, ann. J. P. 4229, as above. Now he reigned almoſt twenty-one years, by the conſent of all writers. Add the 7 months of Artabanus, and the ſum will be 21 years and about four or five months; which end between Midſummer and autumn, ann. J. P. 4250. At this time therefore began the reign of his ſucceſſor Artaxerxes, as was to be proved.

XII. The ſame thing is alſo confirmed by Julius Africanus; who informs us out of former writers, that the 20th year of this Artaxerxes was the 115th year from the beginning of the reign of Cyrus in Perſia, and fell in with ann. 4. olymp. 83. It began therefore with the olympic year, ſoon after the ſummer ſolſtice, ann. J. P. 4269. Subduct nineteen years, and his firſt year will begin at the ſame time of the year, ann. J. P. 4250, as above.

XIII. His 7th year therefore began after Midſummer, ann. J. P. 4256; and the journey of Ezra to Jeruſalem, in the ſpring following, fell on the beginning of ann. J. P. 4257, as above.

CHRONOLOGICAL OBSERVATIONS UPON THE FOREGOING INTERPRETATION.

DANIEL'S SEVENTY WEEKS.

I.

That the years uſed by DANIEL are Jewiſh luniſolar years.

1. THE antient ſolar years of the eaſtern nations conſiſted of 12 months, and every month of 30 days: and hence came the diviſion of a circle into 360 degrees. This year ſeems to be uſed by Moſes, in his hiſtory of the Flood: and by John, in the Apocalypſe; where a time, times and half a time, 42 months, and 1260 days, are put equipollent. But in reckoning by many of theſe years together an account is to be kept of the odd days, which were added to the end of theſe years. For the Egyptians added five days to the end of this year; and ſo did the Chaldeans long before the times of Daniel, as appears by the æra of Nabonaſſar: and the Perſian Magi uſed the ſame year of 365 days, till the empire of the Arabians. The antient Greeks alſo uſed the ſame ſolar year of 12 equal months, or 360 days; but every other year added an intercalary month, conſiſting of 10 and 11 days alternately.

2. The year of the Jews, even from their coming out of Egypt, was luni-ſolar. It was ſolar; for the harveſt always followed the Paſſover, and the fruits of the land were always gathered before the feaſt of Tabernacles (Levit. xxiii.) But the months were lunar; for the people were commanded by Moſes in the beginning of every month to blow with trumpets, and offer burnt-offerings with their drink-offerings (Num. x. 10. xxviii. 11, 14.) and this ſolemnity was kept on the new moons (Pſal. lxxxi. 3, 4, 5. 1 Chron. xxiii. 31.) Theſe months were called by Moſes the firſt, ſecond, third, fourth month, &c. and the firſt month was alſo called Abib, the ſecond Zif, the ſeventh Ethanim, the eighth Bull (Exod. xiii. 4. 1 Kings vi. 37, 38. viii. 2.) But in the Babylonian captivity the Jews uſed the names of the

Chaldean

CHAPTER TENTH.

Chaldean months, and by thoſe names underſtood the months of their own year; ſo that the Jewiſh months then loſt their old names, and are now called by thoſe of the Chaldeans.

3. The Jews began their civil year from the autumnal equinox, and their ſacred year from the vernal: and the firſt year of the firſt month was on the viſible new moon, which was neareſt the equinox.

4. Whether Daniel uſed the Chaldaic or Jewiſh year, is not very material; the difference being but ſix hours in a year, and 4 months in 480 years. But I take his months to be Jewiſh: firſt, becauſe Daniel was a Jew; and the Jews even by the names of the Chaldean months underſtood the months of their own year: ſecondly, becauſe this prophecy is grounded on Jeremiah's concerning the 70 years captivity, and therefore muſt be underſtood of the ſame ſort of years with the ſeventy; and thoſe are Jewiſh, ſince that prophecy was given in Judea before the captivity: and, laſtly, becauſe Daniel reckons by weeks of years, which is a way of reckoning peculiar to the Jewiſh years. For as their days ran by ſevens, and the laſt day of every ſeven was a ſabbath; ſo their years ran by ſevens, and the laſt year of every ſeven was a ſabbatical year, and ſuch ſeven weeks of years made a Jubilee.

III.

That EZRA and NEHEMIAH flouriſhed under ARTAXERXES LONGIMANUS.

1. For clearing up the hiſtory of the Jews, contained in the books of Ezra and Nehemiah, I lay down the following conſiderations.

2. Firſt, that the book of Nehemiah, from the fifth verſe of the ſeventh chapter to the ninth verſe of the twelfth chapter, was copied by Nehemiah out of the chronicles of the Jews; and contains the hiſtory of the Jews at their return from captivity under Zerubbabel, in the firſt year of Cyrus. For this will appear

DANIEL'S SEVENTY WEEKS.

pear by reading the place, and conſidering that the men who ſealed the covenant in the 24th day of the ſeventh month, were the very ſame with the men who returned from captivity with Zerubbabel in the firſt year of Cyrus, as you may perceive by the following compariſon of their names.

Here ſhould follow the compariſon of the names, which is wanting in the MS. but the defect may be ſupplied from the Chronology, chap. VI. § XI.

3. Secondly, I conſider that ſoon after theſe things the temple was finiſhed in the ſixth year of Darius Hyſtaſpis. For it was finiſhed in the high-prieſthood of Jeſhuah; and Jeſhuah was not long-lived beyond the uſual age of men; for he out-lived not the age of his contemporaries. For in the firſt year of Cyrus, the chief-prieſts were Serajah, Jeremiah, Ezra, Amariah, Malluch, Shemaiah, Rehum, Meremoth, Iddo, Ginetho, Abijah, Miamin, Maadiah, Bilgah, Shemaiah, Jojarib, Jedaiah, Sallu, Amock, Hilkiah, Jedaiah; and the eldeſt ſons of them all (Merajah the ſon of Serajah, Hananiah the ſon of Jeremiah, Meſhullam the ſon of Ezra) were chief-prieſts in the days of Jojakim the ſon of Jeſhuah (Nehem. xii.) and therefore the high-prieſthood of Jeſhuah was but of an ordinary length. ******

Much ſeems wanting; but the defect may be ſupplied from Chronology, chap. VI. § X—XVI.

CHAP.

CHAP. XI.

Of the times of the birth and paſſion of Chriſt.

CHAPTER ELEVENTH. THE times of the birth and paſſion of Chriſt, with ſuch like niceties, being not material to religion, were little regarded by the Chriſtians of the firſt age. They who began firſt to celebrate them, placed them in the cardinal periods of the year; as the annunciation of the Virgin Mary, on the 25th of March, which, when Julius Cæſar corrected the calendar, was the vernal equinox; the feaſt of John Baptiſt on the 24th of June, which was the ſummer ſolſtice; the feaſt of St. Michael on Sept. 29, which was the autumnal equinox; and the birth of Chriſt on the winter ſolſtice, Decemb. 25, with the feaſts of St. Stephen, St. John and the Innocents, as near it as they could place them. And becauſe the ſolſtice in time removed from the 25th of December to the 24th, the 23d, the 22d, and ſo on backwards; hence ſome in the following centuries placed the birth of Chriſt on Decemb. 23, and at length on Decemb. 20: and for the ſame reaſon they ſeem to have ſet the feaſt of St. Thomas on Decemb. 21, and that of St. Matthew on Sept. 21. So alſo at the entrance of the ſun into all the ſigns in the Julian calendar, they placed the days of other ſaints; as the converſion of Paul on Jan. 25, when the ſun entered ♒; St. Matthias on Feb. 25, when ☉ entered ♓; St. Mark on Apr. 25, when ☉ entered ♉; Corpus Chriſti on May 26, when ☉ entered ♊; St James on July 25, when ☉ entered ♌; St. Bartholomew on Aug. 24, when ☉ entered ♍; Simon and Jude on Octob. 28, when ☉ entered ♏: and if there were any other remarkable days in the Julian calendar, they placed the ſaints upon them; as St. Barnabas on June 11, where Ovid ſeems to place the feaſt of Veſta and Fortuna, and the goddeſs Matuta; and St. Philip and James

James on the firſt of May, a day dedicated both to the *Bona Dea*, or *Magna Mater*, and to the goddeſs Flora, and ſtill celebrated with her rites. All which ſhews, that theſe days were fixed in the firſt Chriſtian calendar by mathematicians at pleaſure, without any ground in tradition; and that the Chriſtians afterwards took up with what they found in the calendars. NATIVITY AND PASSION.

II. Neither was there any certain tradition about the years of Chriſt. For the Chriſtians who firſt began to enquire into theſe things, as Clemens Alexandrinus, Origen, Tertullian, Julius Africanus, Lactantius, Jerome, St. Auſtin, Sulpicius Severus, Proſper, and as many as place the death of Chriſt in the 15th or 16th year of Tiberius, make Chriſt to have preached but one year, or at moſt but two. At length Euſebius diſcovered four ſucceſſive paſſovers in the goſpel of John, and thereupon ſet on foot an opinion that he preached three years and an half; and ſo died in the 19th year of Tiberius. Others afterwards, finding the opinion that he died in the equinox, Mar. 25, more conſonant to the times of the Jewiſh paſſover, in the 17th and 20th years, have placed his death in one of thoſe two years. Neither is there any greater certainty in the opinions about the time of his birth. The firſt Chriſtians placed his baptiſm near the beginning of the 15th year of Tiberius; and thence reckoning thirty years backwards, placed his birth in the 43d Julian year, the 42d of Auguſtus, and 28th of the Actiac victory. This was the opinion which obtained in the firſt ages; till Dionyſius Exiguus, placing the baptiſm of Chriſt in the 16th year of Tiberius, and miſinterpreting the text of Luke iii. 23, as if Jeſus was only beginning to be 30 years old when he was baptized, invented the vulgar account, in which his birth is placed two years later than before. So then as to theſe things, there is nothing in tradition worth conſidering; and therefore laying aſide theſe prejudices, let us ſee whether any thing can be gathered from records of good account.

III. The fifteenth year of Tiberius began Aug. 28, ann. J. P. 4727. So ſoon as the winter was over, and the weather became warm enough, we may reckon that John began to baptize; and that before next winter his fame went abroad, and all the people

CHAPTER ELEVENTH.

came to his baptism, and Jesus among the rest. Whence the first passover after his baptism, mentioned John ii. 13, was in the 16th year of Tiberius. After this feast Jesus came into the land of Judea, and staid there baptizing, whilst John was baptizing in Ænon (John iii. 22, 23.) But when he heard that John was cast into prison, he departed into Galilee (Matth. iv. 12.) being afraid, because the Pharisees had heard that he baptized more disciples than John (John iv. 1.) and in his journey he passed through Samaria four months before the harvest (John iv. 35.) that is, about the time of the winter solstice. For their harvest was between Easter and Whitsunday, and began about a month after the vernal equinox. "Say not ye," saith he, "there "are yet four months, and then cometh harvest? Behold I say "unto you, lift up your eyes, and look on the fields, for they "are white already to harvest;" meaning, that the people in the fields were ready for the gospel, as his next words shew (a). John

(a) I observe, that Christ and his forerunner John in their parabolical discourses were wont to allude to things present. The old prophets, when they would describe things emphatically, did not only draw parables from things which offered themselves, as from the rent of a garment (1 Sam. xv.) from the sabbatic year (Isa. xxxvii.) from the vessels of a potter (Jer. xviii, &c.) but also when such fit objects were wanting, they supplied them by their own actions, as by rending a garment (1 Kings xi.) by shooting (2 Kings xiii.) by making bare their body (Isa. xx.) by imposing significant names to their sons (Isa. viii. Hos. i.) by hiding a girdle in the bank of Euphrates (Jer. xiii.) by breaking a potter's vessel (Jer. xix.) by putting on fetters and yokes (Jer. xxvii.) by binding a book to a stone, and casting them both into Euphrates (Jer. li.) by besieging a painted city (Ezek. iv.) by dividing hair into three parts (Ezek. v.) by making a chain (Ezek. vii.) by carrying out houshold stuff like a captive and trembling (Ezek. xii, &c.) By such kind of types the prophets loved to speak. And Christ being endued with a nobler prophetic spirit than the rest, excelled also in this kind of speaking; yet so as not to speak by his own actions; that was less grave and decent; but to turn into parables such things as offered themselves. On occasion of the harvest approaching, he admonishes his disciples once and again of the spiritual harvest (John iv. 35. Matth. ix. 37.) Seeing the lilies of the field, he admonishes his disciples about gay clothing (Matth. vi. 28.) In allusion to the present season of fruits, he admonishes his disciples about knowing men by their fruits (Matth. vii. 16.) In the time of the passover, when trees put forth leaves, he bids his disciples "learn a parable from "the fig-tree: when its branch is yet tender and putteth forth leaves, ye know that summer is "nigh, &c." (Matth. xxiv. 32. Luke xxi. 29.) The same day, alluding both to the season of the year and to his passion, which was to be two days after, he formed a parable of the time of fruits approaching, and the murdering of the heir (Matth. xxi. 33.) At the same time alluding both to the money-changers whom he had newly driven out of the temple, and to his passion at hand; he made a parable of a nobleman going into a far country to receive a kingdom and return, and delivering his goods to his servants, and at his return condemning the slothful servant because he put not his money to the exchangers (Matth. xxv. 14. Luke xix. 12.) Being near the temple where sheep were kept in folds to be sold for the sacrifices, he spake many things parabolically of sheep, of the shepherd, and of the door of the sheep-fold; and discovers that he alluded to the sheep-folds which were to be hired in the market-place, by speaking of

John therefore was imprisoned about November, in the 17th year of Tiberius; and Christ thereupon went from Judea to Cana of Galilee in December, and was received there of the Galileans, who had seen all he did at Jerusalem at the passover: and when a nobleman of Capernaum heard he was returned into Galilee, and went to him, and desired him to come and cure his son; he went not thither yet, but only said, "Go thy way, "thy son liveth; and the nobleman returned and found it so, "and believed, he and his house," (John iv.) This is the beginning of his miracles in Galilee; and thus far John is full and distinct in relating the actions of his first year, omitted by the other evangelists. The rest of his history is from this time related more fully by the other evangelists than by John; for what they relate he omits.

NATIVITY AND PASSION.

IV. From this time therefore Jesus taught in the synagogues of Galilee on the sabbath-days, being glorified of all: and coming to his own city Nazareth, and preaching in their synagogue,

of such folds as a thief could not enter by the door, nor the shepherd himself open, but a porter opened to the shepherd (John x. 1, 3.) Being in the mount of Olives (Matth. xxxvi. 30. John xiv. 31.) a place so fertile that it could not want vines, he spake many things mystically of the husbandman, and of the vine and its branches (John xv.) Meeting a blind man, he admonished of spiritual blindness (John ix. 39.) At the sight of little children, he described once and again the innocence of the elect (Matth. xviii. 2. xix. 13.) Knowing that Lazarus was dead and should be raised again, he discoursed of the resurrection and life eternal (John xi. 25, 26.) Hearing of the slaughter of some whom Pilate had slain, he admonished of eternal life (Luke xiii. 1.) To his fishermen he spake of fishers of men (Matth. iv. 10.) and composed another parable about fishes (Matth. xiii. 47.) Being by the temple, he spake of the temple of his body (John ii. 19.) At supper he spake a parable about the mystical supper to come in the kingdom of heaven (Luke xiv.) On occasion of temporal food, he admonished his disciples of spiritual food, and of eating his flesh and drinking his blood mystically (John vi. 27, 53.) When his disciples wanted bread, he bad them beware of the leven of the Pharisees (Matth. xvi. 6.) Being desired to eat, he answered that he had other meat (John iv. 31.) In the great day of the feast of tabernacles, when the Jews, as their custom was, brought a great quantity of waters from the river Shiloah into the temple, Christ stood and cried, saying, "If any man "thirst, let him come unto me and drink. He that believeth in me, out of his belly shall flow "rivers of living water" (John vii. 37.) The next day, in allusion to the servants who, by reason of the sabbatical year, were newly set free, he saith, "If he continue in my word, the "truth shall make you free." Which the Jews understanding literally with respect to the present manumission of servants, answered, "We be Abraham's seed, and were never in bondage "to any man: how sayest thou, ye shall be made free?" (John viii.) They assert their freedom by a double argument: first, because they were the seed of Abraham, and therefore newly made free, had they been even in bondage; and then, because they never were in bondage. In the last passover, when Herod led his army through Judea against Aretas king of Arabia, because Aretas was aggressor and the stronger in military forces, as appeared by the event; Christ alluding to that state of things, composed the parable of a weaker king leading his army against a stronger, who made war upon him (Luke xiv. 31). And I doubt not but divers other parables were formed upon other occasions, the history of which we have not.

CHAPTER ELEVENTH.

they were offended, and thruſt him out of the city, and led him to the brow of the hill on which the city was built to caſt him headlong; but he, paſſing through the midſt of them, went his way, and came and dwelt at Capernaum (Luke iv.) And by this time we may reckon the ſecond paſſover was either paſt or at hand.

V. All this time Matthew paſſeth over in few words, and here begins to relate the preaching and miracles of Chriſt. "When "Jeſus," ſaith he, "had heard that John was caſt into priſon, "he departed into Galilee; and leaving Nazareth, he came and "dwelt at Capernaum, and from that time began to preach and "ſay, Repent, for the kingdom of heaven is at hand" (Matth. iv. 12.) Afterwards he called his diſciples Peter, Andrew, James and John; and then "went about all Galilee, teaching in the "ſynagogues,—and healing all manner of ſickneſs:—and his "fame went throughout all Syria; and they brought unto him "all ſick people,—and there followed him great multitudes of "people from Galilee, and from Decapolis, and from Jeruſalem, "and from Judea, and from beyond Jordan" (Matth. iv. 18, 25.) All this was done before the ſermon in the mount: and therefore we may certainly reckon, that the ſecond paſſover was paſt before the preaching of that ſermon. The multitudes, that followed him from Jeruſalem and Judea, ſhew that he had lately been there at the feaſt. The ſermon in the mount was made when great multitudes came to him from all places, and followed him in the open fields; which is an argument of the ſummer-ſeaſon: and in this ſermon he pointed at the lilies of the field then in the flower before the eyes of his auditors. "Conſider," ſaith he, "the lilies of the field, how they grow; "they toil not, neither do they ſpin; and yet Solomon in all his "glory was not arrayed like one of theſe. Wherefore if God "ſo clothe the graſs of the field, which to-day is and to-morrow is caſt into the oven, &c." (Matth. vi. 28.) So therefore the graſs of the field was now in the flower; and by conſequence the month of March with the paſſover was paſt.

VI. Let us ſee therefore how the reſt of the feaſts follow in order in Matthew's goſpel: for he was an eye-witneſs of what he relates,

relates, and ſo tells all things in due order of time, which Mark and Luke do not.

NATIVITY AND PASSION.

VII. Some time after the ſermon in the mount, when the time came that he ſhould be received, that is, when the time of a feaſt came, that he ſhould be received by the Jews, he ſet his face to go to Jeruſalem: and as he went with his diſciples in the way, when the Samaritans in his paſſage through Samaria had denied him lodgings, and a certain ſcribe ſaid unto him, "Maſter, I "will follow thee whitherſoever thou goeſt; Jeſus ſaid unto "him, The foxes have holes, and the birds of the air have "neſts, but the Son of man hath not where to lay his head" (Matth. viii. 19. Luke ix. 51, 57.) The ſcribe told Chriſt he would bear him company in his journey; and Chriſt replied that he wanted a lodging. Now this feaſt I take to be the feaſt of tabernacles; becauſe ſoon after I find Chriſt and his apoſtles on the ſea of Tiberias in a ſtorm ſo great, that the ſhip was covered with water and in danger of ſinking, till Chriſt "rebuked the winds and the ſea" (Matth. viii. 23.) For this ſtorm ſhews that winter was now come on.

VIII. After this Chriſt did many miracles, and "went about all "the cities and villages of Galilee, teaching in their ſynagogues, "and preaching the goſpel of the kingdom, and healing every "ſickneſs, and every diſeaſe among the people" (Matth. ix.) and ſent forth the twelve to do the like (Matth. x.) and at length, when he had received a meſſage from John and anſwered it, he ſaid to the multitudes, "From the days of John the Baptiſt un-"til now, the kingdom of heaven ſuffereth violence;" and upbraided the cities Chorazin, Bethſaida, and Capernaum, wherein moſt of his mighty works were done, becauſe they repented not (Matth. xi.) Both which paſſages ſhew, that from the impriſonment of John till now there was a conſiderable length of time paſt. For now the winter was paſt, and the next paſſover was at hand; for immediately after this, Matthew, in chap. xii. ſubjoins, that "Jeſus went on the ſabbath-day through the corn, "and his diſciples were an hungred, and began to pluck the ears "of corn and to eat,—rubbing them," ſaith Luke, "in their "hands." The corn therefore was not only in the ear, but ripe;

CHAPTER ELEVENTH.

ripe; and conſequently the paſſover, in which the firſt-fruits were always offered before the harveſt, was now come or paſt. Luke calls this ſabbath δευτεροπρωτον, the ſecond prime ſabbath, that is, the ſecond of the two great feaſts of the paſſover. As we call Eaſter day high Eaſter, and its octave low Eaſter or Low-ſunday: ſo Luke calls the feaſt on the ſeventh day of the unleavened-bread, the ſecond of the two prime ſabbaths.

IX. In one of the ſabbaths following he went into a ſynagogue, and healed a man with a withered arm (Matth. xii. 9. Luke vi. 6.) And when the Phariſees took counſel to deſtroy him, "he "withdrew himſelf from thence, and great multitudes followed "him; and he healed them all, and charged them that they "ſhould not make him known" (Matth. xii. 14.) Afterwards being in a ſhip, and the multitude ſtanding on the ſhore, he ſpake to them three parables together, taken from the ſeeds-men ſowing the fields (Matth. xiii.) by which we may know that it was now ſeed-time, and by conſequence that the feaſt of tabernacles was paſt. After this he went "into his own country, and "taught them in their ſynagogue, but did not many mighty "works there becauſe of their unbelief." Then the twelve having been abroad a year, returned, and told Jeſus all that they had done: and at the ſame time Herod beheaded John in priſon, and his diſciples came and told Jeſus; and when Jeſus heard it, he took the twelve and departed thence privately by ſhip into a deſart place belonging to Bethſaida: and the people when they knew it, followed him on foot out of the cities, the winter being now paſt; and he healed their ſick, and in the deſert fed them to the number of five thouſand men, beſides women and children, with only five loaves and two fiſhes (Matth. xiv. Luke ix.) at the doing of which miracle the paſſover of the Jews was nigh (John vi. 4.) But Jeſus went not up to this feaſt; but after theſe things walked in Galilee, becauſe the Jews at the paſſover before had taken counſel to deſtroy him, and ſtill ſought to kill him (John vii. 1.) Henceforward therefore he is found firſt in the coaſt of Tyre and Sidon, then by the ſea of Galilee, afterwards in the coaſt of Cæſarea Philippi; and laſtly at Capernaum (Matth. xv. 21, 29. xvi. 13. xvii. 34.)

X. After-

NATIVITY AND PASSION.

X. Afterwards when the feaſt of tabernacles was at hand, his brethren upbraided him for walking ſecretly, and urged him to go up to the feaſt. But he went not till they were gone, and then went up privately (John vii. 2.) and when the Jews ſought to ſtone him, eſcaped (John viii. 59.) After this he was at the feaſt of the dedication in winter (John x. 22.) and when they ſought again to take him, he fled beyond Jordan (John x. 39, 40. Matth. xix. 1.) where he ſtayed till the death of Lazarus; and then came to Bethany near Jeruſalem, and raiſed him (John xi. 7, 18.) whereupon the Jews took council from that time to kill him: and "therefore he walked no more openly "among the Jews, but went thence into a country near to the "wilderneſs, into a city called Ephraim; and there continued "with his diſciples" till the laſt paſſover, in which the Jews put him to death (John xi. 53, 54.)

XI. Thus have we, in the goſpels of Matthew and John compared together, the hiſtory of Chriſt's actions in continual order during five paſſovers. John is more diſtinct in the beginning and end; Matthew in the middle: what either omits, the other ſupplies. The firſt paſſover was between the baptiſm of Chriſt and the impriſonment of John (John ii. 13.) the ſecond within four months after the impriſonment of John, and Chriſt's beginning to preach in Galilee (John iv. 35.) and therefore it was either that feaſt to which Jeſus went up, when the ſcribe deſired to follow him (Matth. viii. 19. Luke ix. 51, 57.) or the feaſt before it. The third was the next feaſt after it, when the corn was eared and ripe (Matth. xii. 1. Luke vi. 1.) The fourth was that which was nigh at hand, when Chriſt wrought the miracle of the five loaves (Matth. xiv. 15. John vi. 4, 5.) and the fifth was that in which Chriſt ſuffered (Matth. xx. 17. John xii. 1.)

XII. Between the firſt and ſecond paſſover, John and Chriſt baptized together, till the impriſonment of John, which was four months before the ſecond. Then Chriſt began to preach, and call his diſciples; and after he had inſtructed them a year, ſent them to preach in the cities of the Jews: at the ſame time John, hearing of the fame of Chriſt, ſent to him to know who he was. At the third, the chief prieſts began to conſult about the death

of

CHAPTER ELEVENTH.

of Chriſt. A little before the fourth, the twelve, after they had preached a year in all the cities, returned to Chriſt; and at the ſame time Herod beheaded John in priſon, after he had been in priſon two years and a quarter: and therefore Chriſt fled into the deſart for fear of Herod. The fourth, Chriſt went not up to Jeruſalem for fear of the Jews, who at the paſſover before had conſulted his death, and becauſe his time was not yet come. Thenceforward therefore till the feaſt of tabernacles he walked in Galilee, and that ſecretly for fear of Herod: and after the feaſt of tabernacles he returned no more into Galilee, but ſometimes was at Jeruſalem, and ſometimes retired beyond Jordan, or to the city Ephraim by the wilderneſs, till the paſſover in which he was betrayed, apprehended, and crucified.

XIII. John therefore baptized two ſummers, and Chriſt preached three. The firſt ſummer John preached to make himſelf known, in order to give teſtimony to Chriſt. Then, after Chriſt came to his baptiſm, and was made known to him; he baptized another ſummer, to make Chriſt known by his teſtimony: and Chriſt alſo baptized the ſame ſummer, to make himſelf the more known: and by reaſon of John's teſtimony there came more to Chriſt's baptiſm than to John's. The winter following John was impriſoned; and now his courſe being at an end, Chriſt entered upon his proper office of preaching in the cities. In the beginning of his preaching, he compleated the number of the twelve apoſtles, and inſtructed them all the firſt year in order to ſend them abroad. Before the end of this year, his fame by his preaching and miracles was ſo far ſpread abroad, that the Jews at the paſſover following conſulted how to kill him. In the ſecond year of his preaching, it being no longer ſafe for him to converſe openly in Judea, he ſent the twelve to preach in all their cities: and in the end of the year they returned to him, and told him all they had done. All the laſt year the twelve continued with him to be inſtructed more perfectly, in order to their preaching to all nations after his death. And upon the news of John's death, being afraid of Herod as well as of the Jews, he walked this year more ſecretly than before; frequenting deſarts, and

and ſpending the laſt half of the year in Judea, without the dominions of Herod.

NATIVITY AND PASSION.

XIV. Thus have we in the goſpels of Matthew and John all things told in due order, from the beginning of John's preaching to the death of Chriſt; and the years diſtinguiſhed from one another by ſuch eſſential characters, that they cannot be miſtaken. The ſecond paſſover is diſtinguiſhed from the firſt, by the interpoſition of John's impriſonment. The third is diſtinguiſhed from the ſecond, by a double character: firſt, by the interpoſition of the feaſt to which Chriſt went up (Matth. viii. 19. Luke ix. 57.) and ſecondly, by the diſtance of time from the beginning of Chriſt's preaching: for the ſecond was in the beginning of his preaching, and the third ſo long after, that before it came Chriſt ſaid, "from the days of John the Baptiſt until now, &c." and upbraided the cities of Galilee for their not repenting at his preaching, and mighty works done in all that time. The fourth is diſtinguiſhed from the third, by the miſſion of the twelve from Chriſt to preach in the cities of Judea in all the interval. The fifth is diſtinguiſhed from all the former by the twelve's being returned from preaching, and continuing with Chriſt during all the interval, between the fourth and fifth, and by the paſſion and other infallible characters.

XV. Now ſince the firſt ſummer of John's baptizing fell in the fifteenth year of the emperor Tiberius, and by conſequence the firſt of theſe five paſſovers in his ſixteenth year; the laſt of them, in which Jeſus ſuffered, will fall on the twentieth year of the ſame emperor; and by conſequence in the conſulſhip of Fabius and Vitellius, in the 79th Julian year, and year of Chriſt 34, which was the ſabbatical year of the Jews. And that it did ſo, I further confirm by theſe arguments.

XVI. I take it for granted that the paſſion was on Friday the 14th day of the month Niſan; the great feaſt of the paſſover, on Saturday the 15th day of Niſan; and the reſurrection on the day following. Now the 14th day of Niſan always fell on the full moon next after the vernal equinox; and the month began at the new moon before, not at the true conjunction, but at the firſt appearance of the new moon: for the Jews referred all the time

CHAPTER ELEVENTH.

of the ſilent moon, as they phraſed it, that is, of the moon's diſappearing, to the old moon; and becauſe the firſt appearance might uſually be about 18 hours after the true conjunction, they therefore began their month from the ſixth hour at evening, that is, at ſun-ſet, next after the eighteenth hour from the conjunction. And this rule they called יה Jah, deſigning by the letters י and ה the number 18.

XVII. I know that Epiphanius tells us, if ſome interpret his words rightly, that the Jews uſed a vicious cycle, and thereby anticipated the legal new moons by two days. But this ſurely he ſpake not as a witneſs; for he neither underſtood Aſtronomy nor Rabbinical learning; but as arguing from his erroneous hypotheſis about the time of the paſſion. For the Jews did not anticipate, but poſtpone their months: they thought it lawful to begin their months a day later than the firſt appearance of the new moon, becauſe the new moon continued for more days than one; but not a day ſooner, leſt they ſhould celebrate the new moon before there was any. And the Jews ſtill keep a tradition in their books, that the Sanhedrim uſed diligently to define the new moons by ſight: ſending witneſſes into mountainous places, and examining them about the moon's appearing, and tranſlating the new moon from the day they had agreed on to the day before, as often as witneſſes came from diſtant regions, who had ſeen it a day ſooner than it was ſeen at Jeruſalem. Accordingly Joſephus, one of the Jewiſh prieſts who had miniſtered in the temple (a), tells us that the paſſover was kept "on the 14th day of "Niſan, κατὰ σελήνην, according to the moon, when the ſun was "in Aries." This is confirmed alſo by two inſtances, recorded by him, which totally overthrew the hypotheſis of the Jews uſing a vicious cycle. For that year in which Jeruſalem was taken and deſtroyed, he ſaith, the paſſover was on the 14th day of the month Xanticus, which according to Joſephus is our April; and that five years before, it fell on the 8th day of the ſame month. Which two inſtances agree with the courſe of the moon.

XVIII. Computing therefore the new moons of the firſt month according to the courſe of the moon and the rule Jah, and thence counting

counting 14 days, I find that the 14th day of this month in the year of Chriſti 31, fell on Tueſday, March 27; in the year 32, on Sunday, April 13; in the year 33, on Friday, April 3; in the year 34, on Wedneſday, March 24, or rather, for avoiding the equinox which fell on the ſame day, and for having a fitter time for harveſt, on Thurſday, April 22; alſo in the year 35, on Tueſday, April 12; and in the year 36, on Saturday, March 31. NATIVITY AND PASSION.

XIX. But becauſe the 15th and 21ſt days of Niſan, and a day or two of Pentecoſt, and the 10th, 15th, and 22d of Tiſri, were always ſabbatical days, or days of reſt, and it was inconvenient on two ſabbaths together to be prohibited burying their dead and making ready freſh meat, and in that hot region their meat would be apt in two days to corrupt: to avoid theſe and ſuch like inconveniences, the Jews poſtponed their months a day, as often as the firſt day of the month Tiſri, or, which is all one, the third of the month Niſan, was Sunday, Wedneſday, or Friday: and this rule they called אד Adu, by the letters א, ד, ו, ſignifying the numbers 1, 4, 6; that is, the 1ſt, 4th, and 6th days of the week; which days we call Sunday, Wedneſday, and Friday. Poſtponing therefore by this rule the months found above; the 14th day of the month Niſan will fall in the year of Chriſt 31, on Wedneſday, March 28; in the year 32, on Monday, Apr. 14; in the year 33, on Friday, Apr. 3; in the year 34, on Friday, Apr. 23; in the year 35, on Wedneſday, Apr. 13; and in the year 36, on Saturday, March 31.

XX. By this computation therefore the year 32 is abſolutely excluded, becauſe the paſſion cannot fall on Friday without making it five days after the full moon, or two days before it; whereas it ought to be upon the day of the full moon, or the next day. For the ſame reaſon the years 31 and 35 are excluded, becauſe in them the paſſion cannot fall on Friday, without making it three days after the full moon, or four days before it: errors ſo erroneous, that they would be very conſpicuous in the heavens to every vulgar eye. The year 36 is contended for by few or none, and both this and the year 35 may be thus excluded.

CHAPTER ELEVENTH.

XXI. Tiberius in the beginning of his reign made Valerius Gratus preſident of Judea; and after 11 years ſubſtituted Pontius Pilate, who governed 10 years. Then Vitellius, newly made preſident of Syria, deprived him of his honour, ſubſtituted Marcellus, and at length ſent him to Rome: but, by reaſon of delays, Tiberius died before Pilate got thither. In the mean time Vitellius, after he had depoſed Pilate, came to Jeruſalem in the time of the paſſover, to viſit that province as well as others in the beginning of his office; and in the place of Caiaphas, then high-prieſt, created Jonathas the ſon of Ananus, or Annas, as he is called in Scripture. Afterwards, when Vitellius was returned to Antioch, he received letters from Tiberius, to make peace with Artabanus king of the Parthians. At the ſame time the Alans, by the ſolicitation of Tiberius, invaded the kingdom of Artabanus; and his ſubjects alſo, by the procurement of Vitellius, ſoon after rebelled: for Tiberius thought that Artabanus, thus preſſed with difficulties, would more readily accept the conditions of peace. Artabanus therefore ſtraightway gathering a greater army, oppreſſed the rebels; and then meeting Vitellius at Euphrates, made a league with the Romans. After this, Tiberius commanded Vitellius to make war upon Aretas king of Arabia. He therefore leading his army againſt Aretas, went together with Herod to Jeruſalem, to ſacrifice at the public feaſt which was then to be celebrated. Where being received honourably, he ſtayed three days; and in the mean while tranſlated the high-prieſthood from Jonathas to his brother Theophilus: and the fourth day, receiving letters of the death of Tiberius, made the people ſwear allegiance to Caius the new emperor; and recalling his army, ſent them into quarters. All this is related by Joſephus Antiq. lib. 18. c. 6, 7. Now Tiberius reigned 22 years and 7 months, and died March 16, in the beginning of the year of Chriſt 37; and the feaſt of the paſſover fell on April 20 following, that is, 35 days after the death of Tiberius: ſo that there were about 36 or 38 days, for the news of his death to come from Rome to Vitellius at Jeruſalem; which being a convenient time for the meſſage, confirms that the feaſt which Vitellius and Herod now went up to was the paſſover.

For

NATIVITY AND PASSION.

For had it been the pentecoſt, as is uſually ſuppoſed, Vitellius would have continued three months ignorant of the emperor's death: which is not to be ſuppoſed. However, the things done between this feaſt and the paſſover which Vitellius was at before; namely, the ſtirring up a ſedition in Parthia, the quieting that ſedition, the making a league after that with the Parthians, the ſending news of that league to Rome, the receiving new orders from thence to go againſt the Arabians, and the putting thoſe orders in execution; required much more time than the fifty days between the paſſover and pentecoſt of the ſame year: and therefore the paſſover which Vitellius firſt went up to, was in the year before. Therefore Pilate was depoſed before the paſſover A. C. 36, and by conſequence the paſſion of Chriſt was before that paſſover: for he ſuffered not under Vitellius, nor under Vitellius and Pilate together, but under Pilate alone.

XXI. Now it is obſervable that the high-prieſthood was at this time become an annual office, and the paſſover was the time of making a new high-prieſt. For Gratus, the predeceſſor of Pilate, ſaith Joſephus, made Iſmael high-prieſt after Ananus; and a while after, ſuppoſe a year, depoſed him, and ſubſtituted Eleazar, and a year after Simon, and after another year Caiaphas; and then gave way to Pilate. So Vitellius at one paſſover made Jonathas ſucceſſor to Caiaphas; and at the next, Theophilus to Jonathas. Hence Luke tells you, that in the 15th year of Tiberius, Annas and Caiaphas were high-prieſts, that is, Annas till the paſſover, and Caiaphas afterwards. Accordingly John ſpeaks of the high-prieſthood as an annual office: for he tells you again and again, in the laſt year of Chriſt's preaching, that Caiaphas was high-prieſt for that year (John xi. 49, 51. xviii. 13.) And the next year Luke tells you, that Annas was high-prieſt (Acts iv. 6.) So then Theophilus was made high-prieſt in the firſt year of Caius; Jonathas, in the 22d year of Tiberius; and Caiaphas, in the 21ſt year of the ſame emperor: and therefore, allotting a year to each, the paſſion, when Annas ſucceeded Caiaphas, could not be later than the 20th year of Tiberius, A. C. 34.

XXII. So

CHAPTER ELEVENTH.

XXIII. So then there remain only the years 33 and 34 to be conſidered; and the year 33 I exclude by this argument. In the paſſover two years before the paſſion, when Chriſt went through the corn, and his diſciples plucked the ears, and rubbed them with their hands to eat; this ripeneſs of the corn ſhews that the paſſover then fell late: and ſo did the paſſover, A. C. 32, April 14; but the paſſover A. C. 31, March 28th, fell very early. It was not therefore two years after the year 31, but two years after 32 that Chriſt ſuffered.

So then all the characters of the paſſion agree to the year 34; and that is the only year to which they all agree.

CHAP. XII.

Of the prophecy of the Scripture of Truth.

THE kingdoms repreſented by the ſecond and third beaſts, or the Bear and Leopard, are again deſcribed by Daniel in his laſt prophecy written in the third year of Cyrus over Babylon, the year in which he conquered Perſia. For this prophecy is a commentary upon the viſion of the Ram and He-Goat.

[a] Ch. xi. 2, 3, 4.

II. "Behold ([a]), " ſaith he, "there ſhall ſtand up yet three kings "in Perſia [Cyrus, Cambyſes, and Darius Hyſtaſpes] and the "fourth [Xerxes] ſhall be far richer than they all: and by his "ſtrength and his riches he ſhall ſtir up all againſt the realm "of Greece. And a mighty king [Alexander the Great] ſhall "ſtand up, that ſhall rule with great dominion, and do accord-"ing to his will. And when he ſhall ſtand up, his kingdom "ſhall be broken, and ſhall be divided towards the four winds "of heaven; and not to his poſterity [but after their death], "nor

"nor according to his dominion which he ruled: for his king- DANIEL'S SCRIPTURE OF TRUTH.
"dom ſhall be plucked up, even for others beſides thoſe." Alexander the Great having conquered all the Perſian empire, and ſome part of India, died at Babylon a month before the ſummer ſolſtice, in the year of Nabonaſſar 425: and his captains gave the monarchy to his baſtard brother Philip Aridæus, a man diſturbed in his underſtanding; and made Perdiccas adminiſtrator of the kingdom. Perdiccas with their conſent made Meleager commander of the army; Seleucus, maſter of the horſe; Craterus, treaſurer of the kingdom; Antipater, governor of Macedon and Greece; Ptolemy, governor of Egypt; Antigonus, governor of Pamphylia, Lycia, Lycaonia, and Phrygia Major; Lyſimachus, governor of Thrace; and other captains governors of other provinces; as many as had been ſo before in the days of Alexander the Great. The Babylonians began now to count by a new æra, which they called the æra of Philip; uſing the years of Nabonaſſar, and reckoning the 425th year of Nabonaſſar to be the firſt year of Philip. Roxana, the wife of Alexander, being left big with child, and about three or four months after brought to bed of a ſon, they called him Alexander, ſaluted him king, and joined him with Philip, whom they had before placed in the throne of the kingdom. Philip reigned three years under the adminiſtratorſhip of Perdiccas; two years more under the adminiſtratorſhip of Antipater; and above a year more under that of Polyſperchon; in all ſix years and four months; and then was ſlain with his queen Eurydice in September, by the command of Olympias the mother of Alexander the Great. The Greeks being diſguſted at the cruelties of Olympias, revolted to Caſſander the ſon and ſucceſſor of Antipater. Caſſander affecting the dominion of Greece, ſlew Olympias; and ſoon after ſhut up the young king Alexander, with his mother Roxana, in the caſtle of Amphipolis, under the charge of Glaucias, ann. Nabonaſſ. 432. The next year Ptolemy, Caſſander, and Lyſimachus, by means of Seleucus, formed a league againſt Antigonus; and after certain wars made peace with him, ann. Nabonaſſ. 438, upon theſe conditions: that Caſſander ſhould command the forces of Europe till Alexander, the ſon of Roxana, came to age; and that Lyſimachus

CHAPTER TWELFTH.

chus ſhould govern Thrace; Ptolemy, Egypt and Lybia; and Antigonus all Aſia. Seleucus had poſſeſſed himſelf of Meſopotamia, Babylonia, Suſiana, and Media, the year before. About three years after Alexander's death he was made governor of Babylon by Antipater; then was expelled by Antigonus; but now he recovered and enlarged his government over a great part of the Eaſt: which gave occaſion to a new æra, called *Æra Seleucidarum*. Not long after the peace made with Antigonus (Diodorus ſaith the ſame Olympic year) Caſſander, ſeeing that Alexander the ſon of Roxana grew up, and that it was diſcourſed throughout Macedonia, that it was fit he ſhould be ſet at liberty, and take upon him the government of his father's kingdom; commanded Glaucias the governor of the caſtle to kill Roxana, and the young king Alexander her ſon, and conceal their deaths. Then Polyſperchon ſet up Hercules, the ſon of Alexander the Great by Barſiné, to be king; and ſoon after, at the ſolicitation of Caſſander, cauſed him to be ſlain. Soon after that, upon a great victory at ſea got by Demetrius the ſon of Antigonus over Ptolemy, Antigonus took upon himſelf the title of king, and gave the ſame title to his ſon. This was ann. Nabonaſſ. 441. After his example, Seleucus, Caſſander, Lyſimachus, and Ptolemy, took upon themſelves the title and dignity of kings, having abſtained from this honour while there remained any of Alexander's race to inherit the crown. Thus the monarchy of the Greeks for want of an heir was broken into ſeveral kingdoms; four of which, ſeated to the four winds of heaven, were very eminent. For Ptolemy reigned over Egypt, Lybia, and Ethiopia; Antigonus over Syria and the leſſer Aſia; Lyſimachus over Thrace; and Caſſander over Macedon, Greece, and Epirus, as above.

III. Seleucus at this time reigned over the nations which were beyond Euphrates, and belonged to the bodies of the two firſt beaſts; but after ſix years he conquered Antigonus, and thereby became poſſeſſed of one of the four kingdoms. For Caſſander being afraid of the power of Antigonus, combined with Lyſimachus, Ptolemy, and Seleucus, againſt him: and while Lyſimachus

machus invaded the parts of Aſia next the Helleſpont, Ptolemy ſubdued Phœnicia and Cœloſyria, with the ſea-coaſts of Aſia.

DANIEL'S SCRIPTURE OF TRUTH.

IV. Seleucus came down with a powerful army into Cappadocia; and joining the confederate forces, fought Antigonus in Phrygia, and ſlew him, and ſeized his kingdom, ann. Nabonaſſ. 447. After which Seleucus built Antioch, Seleucia, Laodicea, Apamea, Berrhœa, Edeſſa, and other cities in Syria and Aſia; and in them granted the Jews equal privileges with the Greeks.

V. Yet Demetrius the ſon of Antigonus retained a ſmall part of his father's dominions, and at length loſt Cyprus to Ptolemy; but killing Alexander, the ſon and ſucceſſor of Caſſander king of Macedon, he ſeized his kingdom, ann. Nabonaſſ. 454. And ſome time after, preparing a very great army to recover his father's dominions in Aſia; Seleucus, Ptolemy, Lyſimachus, and Pyrrhus king of Epire, combined againſt him: and Pyrrhus invading Macedonia, corrupted the army of Demetrius; put him to flight; ſeized his kingdom; and ſhared it with Lyſimachus. After ſeven months, Lyſimachus beating Pyrrhus, took Macedonia from him, and held it five years and a half, uniting the kingdoms of Macedon and Thrace. Lyſimachus in his wars with Antigonus and Demetrius, had taken from them Caria, Lydia, and Phrygia; and had a treaſury in Pergamus, a caſtle on the top of a conical hill in Phrygia, by the river Caicus, the cuſtody of which he had committed to one Philetærus; who was at firſt faithful to Lyſimachus, but in the laſt year of his reign revolted. For Lyſimachus, at the inſtigation of his wife Arſinoe, ſlew firſt his own ſon Agathocles, and then thoſe that lamented him: upon which the wife of Agathocles fled with her children and brothers, and ſome others of their friends, and ſollicited Seleucus to make war upon Lyſimachus. And Philetærus alſo, grieving at the death of Agathocles, and being accuſed thereof by Arſinoe, revolted, and ſided with Seleucus. On this occaſion Seleucus and Lyſimachus met and fought in Phrygia; and Lyſimachus being ſlain in the battle, loſt his kingdom to Seleucus, ann. Nabonaſſ. 465. Thus the empire of the Greeks, which at firſt brake into four great kingdoms, became now reduced into two notable ones, henceforward called by Daniel the kings

CHAPTER TWELFTH.

of the South and North. For Ptolemy now reigned over Egypt, Libya, Ethiopia, Arabia, Phœnicia, Cœlosyria, and Cyprus; and Seleucus, having united three of the four kingdoms, had a dominion scarce inferior to that of the Persian empire, conquered by Alexander the Great. All which is thus represented by Daniel (a): "And the king of the South [Ptolemy] shall become "strong, and one of his princes [Seleucus, one of Alexander's "princes] shall become strong above him, and have dominion; "his dominion shall be a great dominion."

[a] Chap. xi. 5.

VI. After Seleucus had reigned seven months over Macedon, Greece, Thrace, Asia, Syria, Babylonia, Media, and all the East as far as India; Ptolemæus Ceraunus, the younger brother of Ptolemæus Philadelphus king of Egypt, slew him treacherously, and seized his dominions in Europe: and Antiochus Soter, the son of Seleucus, succeeded his father in Asia, Syria, and most of the East; and after nineteen or twenty years was succeeded by his son Antiochus Theos; who having a lasting war with Ptolemæus Philadelphus, composed the same by marrying Berenice the daughter of Philadelphus: but after a reign of fifteen years, his first wife Laodice poisoned him, and set her son Seleucus Callinicus upon the throne. Callinicus in the beginning of his reign, by the impulse of his mother Laodice, besieged Berenice in Daphne near Antioch, and slew her with her young son and many of her women. Whereupon Ptolemæus Euergetes, the son and successor of Philadelphus, made war upon Callinicus; took from him Phœnicia, Syria, Cilicia, Mesopotamia, Babylonia, Susiana, and some other regions; and carried back into Egypt 40000 talents of silver, and 2500 images of the gods; amongst which were the gods of Egypt carried away by Cambyses. Antiochus Hierax at first assisted his brother Callinicus, but afterwards contended with him for Asia. And in the mean time Eumenes, governor of Pergamus, beat Antiochus; and took from them both all Asia on this side the mountain Taurus. This was in the fifth year of Callinicus; who, after an inglorious reign of 20 years, was succeeded by his son Seleucus Ceraunus; and Euergetes after four years more, ann. Nabonass. 527, was succeeded by his son Ptolemæus Philopator. All which is thus signified by Daniel

niel (a): "And after certain years they [the kings of the South "and North] shall make friendship: for the king's daughter of the South [Berenice] shall come to the king of the "North to establish an agreement, but she shall not retain the "power of the arm; and she shall not stand, nor her seed; but "she shall be delivered up, and he [Callinicus] that brought "her, and he whom she brought forth, and they that strengthened her in [those] times, [or defended her in the siege of "Daphne.] But out of a branch of her roots shall one stand "up in his seat [her brother Euergetes] who shall come with an "army, and shall enter into the fortress [or fenced cities] of the "king of the North, and shall act against them and prevail: "and shall carry captives into Egypt, their gods with their "princes and precious vessels of silver and gold; and he shall "continue some years after the king of the North."

DANIEL'S SCRIPTURE OF TRUTH.

[a] Chap. xi. 6, 7, 8.

VII. Seleucus Ceraunus, inheriting the remains of his father's kingdom, and thinking to recover the rest, raised a great army against the governor of Pergamus, now king thereof, but died in the third year of his reign; and his brother and successor, Antiochus Magnus, carrying on the war, took from the king of Pergamus almost all the lesser Asia, and recovered also the provinces of Media, Persia, and Babylonia, from the governors who had revolted: and in the fifth year of his reign invaded Cœlosyria, and with little opposition possessed himself of a good part thereof; and the next year returning to invade the rest of Cœlosyria and Phœnicia, beat the army of Philopator near Berytus; and invaded Palestine and the neighbouring parts of Arabia; and the third year returned with an army of 78000: and Ptolemy coming out of Egypt with an army of 75000, fought and routed him at Raphia near Gaza, between Palestine and Egypt; and recovered all Phœnicia and Cœlosyria, ann. Nabonass. 532; and being puffed up with this victory, and living in all manner of luxury, the Egyptians revolted, and had wars with him, but were overcome; and in the broils sixty thousand Egyptian Jews were slain. All which is thus described by Daniel (b): "But his sons [Seleucus Ceraunus, and Antiochus Mag-"nus, the sons of Callinicus] shall be stirred up, and shall ga-

[b] Chap. xi. 10, &c.

CHAPTER TWELFTH.

" ther a great army; and he [Antiochus Magnus] ſhall come ef-
" fectually and overflow, and paſs through and return, and
" [again the next year] be ſtirred up [marching even] to his for-
" treſs, [the frontier towns of Egypt;] and the king of the
" South ſhall be moved with choler, and come forth [the third
" year] and fight with him, even with the king of the North;
" and he [the king of the North] ſhall lead forth a great multi-
" tude, but the multitude ſhall be given into his hand. And
" the multitude being taken away, his heart ſhall be lifted up,
" and he ſhall caſt down many ten thouſands; but he ſhall not
" be ſtrengthened by it: for the king of the North ſhall re-
" turn, &c."

VIII. About twelve years after the battle between Philopator and Antiochus, Philopator died; and left his kingdom to his young ſon Ptolemy Epiphanes, a child of five years old: and thereupon Antiochus Magnus confederated with Philip king of Macedon, that they ſhould invade the dominions of Epiphanes which lay next to each of them. And hence aroſe a various war between Antiochus and Epiphanes, each of them ſeizing Phœnicia and Cœloſyria by turns; whereby thoſe countries were much afflicted by both parties. Firſt Antiochus ſeized thoſe countries; then one Scopas being ſent with the army of Egypt, recovered them from Antiochus: and the next year, ann. Nabonaſſ. 550, Antiochus fought and routed Scopas near the fountains of Jordan; beſieged him in Sidon; took the city; and recovered Syria and Phœnicia from Egypt, the Jews coming over to him voluntarily. But about three years after, upon preparing for a war againſt the Romans, he came to Raphia in the borders of Egypt, and made peace with Epiphanes, and gave him his daughter Cleopatra: and the next autumn he paſſed the Helleſpont to invade the cities of Greece under the Roman protection, and took ſome of them; but was beaten by the Romans the ſummer following, and forced to return back with his army into Aſia. And before the end of the year the fleet of Antiochus was beaten by the fleet of the Romans near Phocæa: and at the ſame time Epiphanes and Cleopatra ſent an embaſſy to Rome to congratulate the Romans on their ſucceſs againſt their father Antiochus, and to exhort them to proſecute the war againſt him into Aſia.

Aſia. And the Romans beat Antiochus again at ſea near Epheſus, and paſt their army over the Helleſpont; and obtained a great victory over him by land, and took from him all Aſia on this ſide the mountain Taurus, and gave it to the king of Pergamus who aſſiſted them in the war; and impoſed a large tribute upon Antiochus. Thus the king of Pergamus, by the power of the Romans, recovered what Antiochus had taken from him; and Antiochus retiring into the remainder of his kingdom, was ſlain two years after by the Perſians, as he was robbing the temple of Jupiter Belus in Elymais, to raiſe money for the Romans. All which is thus deſcribed by Daniel (a). " For the king of the North [Antiochus] [a] Chap. xi. 13—19.
" ſhall return, and ſhall ſet forth a multitude greater than the
" former; and ſhall certainly come, after certain years, with a
" great army and much riches. And in thoſe times there
" ſhall many ſtand up againſt the king of the South, [particu-
" larly the Macedonians;] alſo the robbers of thy people [the
" Samaritans, &c.] ſhall exalt themſelves to eſtabliſh the viſion,
" but they ſhall fall. So the king of the North ſhall come, and
" caſt up a mount, and take the moſt fenced cities; and the
" arms of the South ſhall not withſtand, neither his choſen peo-
" ple, nether ſhall there be any ſtrength to withſtand. But he
" that cometh againſt him ſhall do according to his own will,
" and none ſhall ſtand before him: and he ſhall ſtand in the
" glorious land, which ſhall fall in his hand. He ſhall alſo ſet
" his face to go with the ſtrength [or army] of all his kingdom,
" and make an agreement with him [at Raphia;] and he ſhall
" give him the daughter of women corrupting her; but ſhe ſhall
" not ſtand his ſide, nether be for him. And he ſhall turn
" his face unto the iſles, and ſhall take many: but a prince for
" his own behalf [the Romans] ſhall cauſe the reproach offered
" by him to ceaſe; without his own reproach ſhall he cauſe it
" to turn upon him. Then he ſhall turn his face towards the
" fort of his own land: but he ſhall ſtumble and fall, and not
" be found."

IX. Seleucus Philopator ſucceeded his father Antiochus, ann. Nabonaſſ. 561, and reigned twelve years, but did nothing memorable; being ſluggiſh, and intent upon raiſing money for the Romans,

CHAPTER TWELFTH.

Romans, to whom he was tributary. He was ſlain by Heliodorus, whom he had ſent to rob the temple of Jeruſalem. Daniel (a) thus deſcribes his reign: "Then ſhall ſtand up in his "ſeat a raiſer of taxes in the glory of the kingdom; but with- "in few days he ſhall be deſtroyed, neither in anger nor in "battle."

(a) Chap. xi. 20.

X. A little before the death of Philopator, his ſon Demetrius was ſent hoſtage to Rome, in the place of Antiochus Epiphanes, the brother of Philopator; and Antiochus was at Athens in his way home from Rome, when Philopator died: whereupon Heliodorus, the treaſurer of the kingdom, ſtept into the throne. But Antiochus ſo managed his affairs, that the Romans kept Demetrius at Rome; and their ally, the king of Pergamus, expelled Heliodorus, and placed Antiochus in the throne. And while Demetrius, the right heir, remained an hoſtage at Rome; Antiochus, by the friendſhip of the king of Pergamus, reigned powerfully over Syria and the neighbouring nations. Now Antiochus being made king, carried himſelf much below his dignity; ſtealing privately out of his palace, and rambling up and down the city in diſguiſe with one or two of his companions; converſing and drinking with people of the loweſt rank, and with foreigners and ſtrangers; frequenting the meetings of rakes to feaſt and revel; clothing himſelf like the Roman candidates and officers, and acting their parts like a mimick; and in public feſtivals jeſting and dancing and herding himſelf with ſervants and mimicks and light people, and behaving himſelf with all manner of ridiculous geſtures; which made ſome take him for a madman, and call him Antiochus Επιφανης. In the firſt year of his reign he depoſed Onias the high-prieſt, and ſold the high-prieſthood to Jaſon, the younger brother of Onias: for Jaſon had promiſed the king to give him 440 talents of ſilver for the high-prieſthood, and 150 more for a licence to erect a place of exerciſe for the training up of the youth in the faſhions of the heathen; which licence was granted by the king, and put in execution by Jaſon. Then the king ſending one Apollonius into Egypt to the coronation of Ptolemy Philometor, the young ſon of Philometor and Cleopatra, and knowing Philometor not to be well affected to his affairs in Phœnicia, provided for his own ſafety in

thoſe parts; and for that end came to Joppa and Jeruſalem, where he was honourably received; and from thence he went in like manner with his little army to the cities of Phœnicia, to eſtabliſh himſelf againſt Egypt, by courting the people, and diſtributing extraordinary favours amongſt them. All which is thus repreſented by Daniel (a). "And in his [Philometor's] ſeat "ſhall ſtand up a vile perſon, to whom they [the Syrians who "ſet up Heliodorus] ſhall not give the honour of the kingdom. "Yet he ſhall come in peaceably, and obtain the kingdom by "flatteries [made principally to the king of Pergamus;] and the "arms [which in favour of Heliodorus oppoſe him] ſhall be "overflowed with a flood from before him, and be broken; yea "alſo [Onias the high-prieſt] the prince of the covenant. And "after friendſhip made with him, [the king of Egypt, by ſend- "ing Apollonius to his coronation] he ſhall work deceitfully "[againſt the king of Egypt,] for he ſhall come up and "become ſtrong [in Phœnicia] with a ſmall people. And he "ſhall enter into the quiet and plentiful cities of the province "[of Phœnicia;] and [to ingratiate himſelf with the Jews of "Phœnicia and Egypt, and with their friends] he ſhall do that "which his fathers have not done, nor his fathers fathers: he "ſhall ſcatter among them the prey and the ſpoil, and the riches "[exacted from other places;] and ſhall forecaſt his devices "againſt the ſtrong holds [of Egypt] even for a time."

(a) Chap. xi. 21, &c.

XI. Theſe things were done in the firſt year of his reign, ann. Nabonaſſ. 573. And thenceforward he forecaſt his devices againſt the ſtrong holds of Egypt, until the ſixth year. For three years after, that is in the fourth year of his reign, Menelaus bought the high-prieſthood from Jaſon; but not paying the price was ſent for by the king; and the king, before he could hear the cauſe, went into Cilicia to appeaſe a ſedition there, and left Andronicus his deputy at Antioch. And then the brother of Menelaus, to make up the money, conveyed ſeveral veſſels out of the temple, ſelling ſome of them at Tyre, and ſending others to Andronicus. And when Menelaus was reproved for this by Onias, he cauſed Onias to be ſlain by Andronicus: for which fact the king, at his return from Cilicia, cauſed Andronicus

CHAPTER TWELFTH.

nicus to be put to death. And then he prepared his ſecond expedition againſt Egypt; which he performed in the ſixth year of his reign, ann. Nabonaſſ. 578: for upon the death of Cleopatra, the governors of her ſon, the young king of Egypt, claimed Phœnicia and Cœloſyria from Antiochus as her dowry; and to recover thoſe countries raiſed a great army. Antiochus conſidering that his father (a) had not quitted the poſſeſſion of thoſe countries, denied that they were her dowry; and with another great army met and fought the Egyptians on the borders of Egypt, between Peluſium and the mountain Caſius. And when he had beaten, and might have deſtroyed the army of the Egyptians, rode up and down, commanding his ſoldiers not to kill them, but to take them alive: by which humanity he gained Peluſium, and ſoon after all Egypt; entering it with a vaſt multitude of foot and chariots, and elephants and horſemen, and a great navy. And ſeizing the cities of Egypt as a friend, he marched to Memphis; laid the whole blame of the war upon Eulæus the king's governor; entered into outward friendſhip with the young king, and took upon him to order the affairs of the kingdom. In the mean time a report being ſpread in Phœnicia that Antiochus was dead; Jaſon, to recover the high-prieſthood, aſſaulted Jeruſalem with above a thouſand men, and took the city. Whereupon Antiochus thinking that Judea had revolted, came out of Egypt in a furious manner; took the city; ſlew forty thouſand of the people; took as many priſoners, and ſold them to raiſe money; went into the temple; ſpoiled it of its treaſures, ornaments, utenſils, and veſſels of gold and ſilver, amounting to 1800 talents; and carried all away to Antioch. This was done in the year of Nabonaſſar 578, and is thus deſcribed by Daniel (b). "And he ſhall ſtir up his power, and his courage "againſt the king of the South with a great army; and the "king of the South ſhall be ſtirred up to battle with a very great "and mighty army; but he ſhall not ſtand: for they [Antiochus and his friends] ſhall forecaſt devices againſt him, [as "is repreſented above;] yea, they that feed of the portion of his "meat, ſhall [betray and] deſtroy him, and his army ſhall be "overthrown, and many ſhall fall down ſlain. And [upon the "news

(a) 2 Maccab. iii. 5, 8, and iv. 4.

(b) Chap. xi. 25, &c.

"king's hearts ſhall be to do miſchief; and they [being now made friends] ſhall ſpeak lies at one table [againſt the Jews and againſt the holy covenant]; but it ſhall not proſper: for "yet the end [in which the ſetting up of the abomination of "deſolation is to proſper] ſhall be at the time appointed. Then "ſhall he return into his land with great riches, and his heart "ſhall be againſt the holy covenant; and he ſhall act [againſt it "by ſpoiling the temple] and return into his own land."

DANIEL'S SCRIPTURE OF TRUTH.

XII. The Egyptians of Alexandria ſeeing Philometor firſt educated in luxury by the eunuch Eulæus, and now in the hands of Antiochus, gave the kingdom to Euergetes, the younger brother of Philometor. Whereupon Antiochus, pretending to reſtore Philometor, made war upon Euergetes; beat him at ſea, and beſieged him and his ſiſter Cleopatra in Alexandria: and the beſieged princes ſent to Rome to implore the aſſiſtance of the ſenate. Antiochus, finding himſelf unable to take the city that year, returned into Syria; leaving Philometor at Memphis, to govern Egypt in his abſence. But Philometor made friendſhip with his brother that winter; and Antiochus, as he was returning the next ſpring, ann. Nabonaſſ. 580, to beſiege both the brothers in Alexandria, was met in the way by the Roman ambaſſadors, Popilius Læna, C. Decimius, and C. Hoſtilius; and he offered them his hand to kiſs: but Popilius delivering to him the tables wherein the meſſage of the ſenate was written, bad him read thoſe firſt. When he had read them, he replied he would conſider with his friends what was fit to be done. But Popilius, drawing a circle about the king, bad him anſwer before he went out of the circle. At which blunt and unuſual imperiouſneſs the king being aſtoniſhed, made anſwer, that he would do what the Romans demanded. Then Popilius gave the king his hand to kiſs, and the king returned out of Egypt; and the ſame year, ann. Nabonaſſ. 580, his captains by his order ſpoiled and ſlaughtered the Jews; profaned the temple; ſet up the worſhip of the heathen gods in all Judea; and began to perſecute and make war upon thoſe who would not worſhip them. Which actions are thus deſcribed by Daniel (c). "At the time appointed he ſhall come [again] towards the South, "but the latter ſhall not be as the former. For the ſhips of "Chittim

(c) Chap. xi. 29, 30.

CHAPTER TWELFTH.

"Chittim ſhall come [with an embaſſy from Rome] againſt him. "Therefore he ſhall be grieved, and return, and have indigna- "tion againſt the holy covenant. So ſhall he do; he ſhall even "return, and have intelligence with them that forſake the holy "covenant."

XIII. In the ſame year that Antiochus, by the command of the Romans, retired out of Egypt, and ſet up the worſhip of the Greeks in Judea; the Romans conquered the kingdom of Macedon, the fundamental kingdom of the empire of the Greeks, and reduced it into a Roman province; and thereby began to put an end to the reign of Daniel's third Beaſt. This is thus expreſſed by Daniel. "And after him Arms [the Romans] "ſhall ſtand up." As ממלך ſignifies *after the king* (Dan. xi. 8.) ſo ממנו may ſignify *after him*. Arms are every where in this prophecy of Daniel put for the military power of a kingdom: and they ſtand up, when they conquer and grow powerful. Hitherto Daniel deſcribed the actions of the kings of the North and South; but upon the conqueſt of Macedon by the Romans, he left off deſcribing the actions of the Greeks, and began to deſcribe thoſe of the Romans in Greece. They conquered Macedon, Illyricum, and Epire, in the year of Nabonaſſar 580. And thirty-five years after, by the laſt will and teſtament of Attalus, the laſt king of Pergamus, they inherited that rich and flouriſhing kingdom; that is, all Aſia on this ſide the mountain Taurus; and 69 years after they conquered the kingdom of Syria, and reduced it into a province; and 34 years after they did the like to Egypt: and by all theſe ſteps the Roman arms ſtood up over the Greeks; and after 95 years more, by making war upon the Jews, "they polluted the ſanctuary of ſtrength, and took away "the daily ſacrifice, and then placed the abomination of deſo- "lation." For this abomination was placed after the days of Chriſt (Matth. xxiv. 15.) In the 16th year of the emperor Adrian, A. C. 132, they placed this abomination by building a temple to Jupiter Capitolinus, where the temple of God in Jeruſalem had ſtood. For thereupon the Jews, under the conduct of Barchochab, roſe up in arms againſt the Romans, and in the war had 50 cities demoliſhed, and 985 of their beſt towns deſtroyed, and

and 580000 men ſlain by the ſword; and in the end of the war, A. C. 136, were baniſhed Judea upon pain of death, and thenceforward the land remained deſolate of its old inhabitants. DANIEL'S SCRIPTURE OF TRUTH.

XIV. In the beginning of the Jewiſh war in Nero's reign, the apoſtles fled out of Judea with their flocks; ſome beyond Jordan to Pella and other places; ſome into Egypt, Syria, Meſopotamia, Aſia Minor, and elſewhere. Peter and John came into Aſia; and Peter went thence, by Corinth, to Rome; but John, ſtaying in Aſia, was baniſhed by the Romans into Patmos, as the head of a party of the Jews, whoſe nation was in war with the Romans. By this diſperſion of the Chriſtian Jews, the Chriſtian religion, which was already propagated weſtward as far as Rome, ſpread faſt into all the Roman empire, and ſuffered many perſecutions under it till the days of Conſtantine the Great and his ſons. And this is thus deſcribed by Daniel (a). "And ſuch as do wick- "edly againſt the covenant, ſhall he [who places the abomina- "tion] cauſe to diſſemble [and worſhip the heathen gods]; but "the people among them who do know their God, ſhall be "ſtrong and act. And they that underſtand among the people, "ſhall inſtruct many: yet they ſhall fall by the ſword, and by "flame, and by captivity, and by ſpoil many days. Now when "they ſhall fall, they ſhall be holpen with a little help [viz. in "the reign of Conſtantine the Great]; and [at that time by rea- "ſon of their proſperity] many ſhall [come over to them from "among the heathen, and] cleave to them with diſſimulation. "But of thoſe of underſtanding there ſhall [ſtill] fall to try [God's "people] by them, and to purge [them from the diſſemblers], "and to make them white to the time of the end: becauſe it is "yet for a time appointed." (a) Chap. xi. 32, &c.

XV. Hitherto the Roman empire continued entire; and under this dominion, the little horn of the He-Goat continued mighty, but not by his own power. But now, by the building of Conſtantinople, and endowing it with a ſenate and other like privileges with Rome; and by the diviſion of the Roman empire into the two empires of the Greeks and Latins, headed by thoſe two cities; a new ſcene of things commences, in which a king, the empire of the Greeks, doth according to his will, and, by

CHAPTER TWELFTH.

ſetting his own laws above the laws of God, "exalts and magnifies himſelf above every god, and ſpeaks marvellous things "againſt the God of gods, and ſhall proſper till the indignation "be accompliſhed.—Neither ſhall he regard the God of his fathers, nor the [lawful] deſire of women in matrimony, nor any "God, but ſhall magnify himſelf above all. And in his ſeat "he ſhall honour Mahuzzims [ſtrong guardians, the ſouls "of the dead]; even with a God whom his fathers knew not, "ſhall he honour them [in their temples] with gold and ſilver, "and with precious ſtones and valuable things[a]." All which relates to the overſpreading of the Greek empire with Monks and nuns, who placed holineſs in abſtinence from marriage; and to the invocation of ſaints and veneration of their reliques, and ſuch like ſuperſtitions, which theſe men introduced in the fourth and fifth centuries. "And at the time of the end the king of "the South [or empire of the Saracens] ſhall puſh at him; "and the king of the North [or empire of the Turks] ſhall "come againſt him like a whirlwind, with chariots and with "horſemen, and with many ſhips; and he ſhall enter into the "countries [of the Greeks], and ſhall overflow and paſs over. "He ſhall enter alſo into the glorious land, and many countries "ſhall be overthrown; but theſe ſhall eſcape out of his hand, "even Edom and Moab, and the chief of the children of Ammon: [viz. to whom his caravans pay tribute.] He ſhall "ſtretch forth his hand alſo upon the countries, and the land "of Egypt ſhall not eſcape; but he ſhall have power over the "treaſures of gold and ſilver, and over all the precious things "of Egypt; and the Lybians and Ethiopians ſhall be at his "ſteps[b]." All theſe nations compoſe the empire of the Turks; and therefore this empire is here to be underſtood by the king of the North. They compoſe alſo the body of the He-Goat; and therefore the goat ſtill reigns in his laſt horn, but not by his own power.

[a] Chap. xi. 36, &c.

[b] Chap. xi. 40, &c.

CHAP.

CHAP. XIII.

Of the king who did according to his will, and magnified himſelf above every god, and honoured Mahuzzims, and regarded not the deſire of women.

IN the firſt ages of the Chriſtian religion, the Chriſtians of every city were governed by a council of preſbyters; and the preſident of the council was the biſhop of the city. The biſhop and preſbyters of one city meddled not with the affairs of another city, except by admonitory letters or meſſages. Nor did the biſhops of ſeveral cities meet together in council, before the time of the emperor Commodus: for they could not meet together without the leave of the Roman governors of the provinces. But in the reign of that emperor they began to meet in provincial councils, by the leave of the governors; firſt in Aſia, in oppoſition to the Cataphrygian hereſy, and ſoon after in other places and upon other occaſions. And the biſhop of the chief city, or metropolis of the Roman province, was uſually made preſident of the council; and hence came the authority of metropolitan biſhops above that of other biſhops within the ſame province. Hence alſo it was, that the biſhop of Rome, in Cyprian's days, called himſelf the biſhop of biſhops. And as ſoon as the empire became Chriſtian, the Roman emperors began to call general councils out of all the provinces of the empire; and by preſcribing to them what points they ſhould conſider, and influencing them by their intereſt and power, they ſet up what party they pleaſed. Hereby the Greek empire, upon the diviſion of the Roman empire into the Greek and Latin empires, became the king who, in matters of religion, did according to his will; and, in legiſlature, exalted and magnified himſelf above every god. And at length, by the ſeventh general council, eſtabliſhed

DANIEL'S WILFULL KING.

the

CHAPTER THIRTEENTH.

the worſhip of the images and ſouls of dead men, here called Mahuzzims.

II. The ſame king placed holineſs in abſtinence from marriage. Euſebius (a) in his Eccleſiaſtical Hiſtory tells us, that Muſanus wrote a tract againſt thoſe who fell away to the hereſy of the *Encratitæ*, which was then newly riſen, and introduced a pernicious error; and that Tatian, the diſciple of Juſtin, was the author thereof; and that Irenæus, in his firſt book againſt hereſies, teaches this; writing of Tatian and his hereſy in theſe words: "*A Saturnino & Marcione profecti qui vocantur* Continentes, *docuerunt non contrahendum eſſe matrimonium; reprobantes ſcilicet primitivum illud opificium Dei, & tacitè accuſantes Deum, qui maſculum & fœminam condidit ad procreationem generis humani. Induxerunt etiam abſtinentiam ab eſu eorum, quæ animalia appellant; ingratos ſe exhibentes erga eum, qui univerſa creavit, Deum. Negant etiam primi hominis ſalutem. Atque hoc nuper apud illos excogitatum eſt, Tatiano quodam omnium primo hujus impietatis auctore: qui Juſtini auditor, quamdiu cum illo verſatus eſt, nihil ejuſmodi protulit. Poſt martyrium autem illius, ab eccleſiâ ſe abrumpens, doctoris arrogantiâ elatus ac tumidus, tanquam præſtantior cæteris, novam quandam formam doctrinæ conflavit; Æonas inviſibiles commentus, perinde ac Valentinus: aſſerens quoque cum Saturnino & Marcione, matrimonium nihil aliud eſſe quàm corruptionem ac ſtuprum: nova præterea argumenta ad ſubvertendam Adami ſalutem excogitans. Hæc Irenæus de Hæreſi, quæ tunc, viguit Encratitarum.*" Thus far Euſebius. But although the followers of Tatian were at firſt condemned as Hereticks, by the name of *Encratitæ*, or *Continentes*; yet their principles could not be quite exploded: for Montanus refined upon them, and made only ſecond marriages unlawful: he introduced frequent faſtings, and annual faſting days, and Lent, and feeding upon dried meats. The *Apoſtolici*, about the middle of the third century, condemned marriage, and were a branch of the diſciples of Tatian. The *Hierocitæ* in Egypt, in the latter end of the third century, alſo condemned marriage. Paul the Eremite fled into the wilderneſs from the perſecution of Decius, and lived there a ſolitary

(a) Lib. 4. c. 27, 28.

tary life till the reign of Conſtantine the Great, but made no diſciples. Antony did the like in the perſecution of Diocleſian, or a little before, and made diſciples; and many others ſoon followed his example.

DANIEL'S WILFULL KING.

III. Hitherto the principles of the *Encratitæ* had been rejected by the churches; but now being refined by the Monks, and impoſed not upon all men, but only upon thoſe who would voluntarily undertake a monaſtic life, they began to be admired; and to overflow firſt the Greek church, and then the Latin alſo, like a torrent. Euſebius (a) tells us, that Conſtantine the Great had thoſe men in the higheſt veneration, who dedicated themſelves wholly to the divine philoſophy; and that he almoſt venerated the moſt holy company of virgins perpetually devoted to God; being certain that the God, to whom he had conſecrated himſelf, did dwell in their minds. In his time and that of his ſons, this profeſſion of a ſingle life was propagated in Egypt by Antony, and in Syria by Hilarion; and ſpread ſo faſt, that ſoon after the time of Julian the apoſtate, a third part of the Egyptians were got into the deſarts of Egypt. They lived firſt ſingly in cells, then aſſociated into *cœnobia*, or convents; and at length came into towns, and filled the churches with biſhops, preſbyters, and deacons. Athanaſius, in his younger days, poured water upon the hands of his maſter Antony; and finding the monks faithful to him, made many of them biſhops and preſbyters in Egypt: and theſe biſhops erected new monaſteries, out of which they choſe preſbyters of their own cities, and ſent biſhops to other cities. The like was done in Syria, the ſuperſtition being quickly propagated thither out of Egypt by Hilarion, a diſciple of Antony. Spiridion and Epiphanius, of Cyprus; James, of Niſibis; Cyril, of Jeruſalem; Euſtathius, of Sebaſtia in Armenia; Euſebius, of Emiſa; Titus, of Boſtra; Baſilius, of Ancyra; Acacius, of Cæſarea in Paleſtine; Elpidius, of Laodicea; Melitius and Flavian, of Antioch; Theodorus, of Tyre; Protogenes, of Carrhæ; Acacius, of Berrhœa; Theodotus, of Hierapolis; Euſebius, of Chalcedon; Amphilochius, of Iconium; Gregory Nazianzen, Gregory Nyſſen, and John Chryſoſtom, of Conſtantinople, were both biſhops and monks in the fourth century.

(a) In vita Conſtantini, lib. 4. c. 28.

Euſtathius,

CHAPTER THIRTEENTH.

Euſtathius, Gregory Nazianzen, Gregory Nyſſen, Baſil, &c. had monaſteries of clergymen in their cities, out of which biſhops were ſent to other cities; who in like manner erected monaſteries there, till the churches were ſupplied with biſhops out of theſe monaſteries. Whence Jerome (a), in a letter written about the year 385, ſaith of the clergy: "*Quaſi & ipſi aliud ſint quàm "Monachi; & non quicquid in Monachos dicitur, redundet in Cleri- "cos, qui patres ſunt Monachorum. Detrimentum pecoris paſtoris "ignominia eſt.*" And in his book againſt Vigilantius: "*Quid "facient Orientis Eccleſiæ? Quæ aut virgines Clericos accipiunt, "aut Continentes; aut ſi uxores habuerint, mariti eſſe deſiſtunt.*" Not long after even the emperors commanded the churches to chuſe clergymen out of the monaſteries by this law.

(a) Epiſt. 10.

"*Impp. Arcad. & Honor. AA. Cæſario PF. P.*

"*Siquos forte epiſcopi deeſſe ſibi clericos arbitrantur, ex Mona- "chorum numero rectius ordinabunt: non obnoxios publicis priva- "tiſque rationibus cum invidiâ teneant, ſed habeant jam probatos. "Dat. vii. Kal. Aug. Honorio A. iv. & Eutychianio Coſſ. A. C. "398 (b).*" The Greek empire being now in the hands of theſe *Encratitæ*, and having them in great admiration; Daniel makes it a characteriſtick of the king, who doth according to his will, that he ſhould not regard the deſire of women.

(b) L. 32. de Epiſcopis.

IV. Thus the ſect of the *Encratitæ*, ſet on foot by the Gnoſticks, and propagated by Tatian and Montanus near the end of the ſecond century; which was condemned by the churches of that and the third century, and refined upon by their followers; overſpread the Eaſtern churches in the fourth century, and before the end of it began to overſpread the Weſtern. Henceforward the Chriſtian churches having a form of godlineſs, but denying the power thereof, came into the hands of the *Encratitæ:* and the heathens, who in the fourth century came over in great numbers to the Chriſtians, embraced more readily this ſort of Chriſtianity, as having a greater affinity with their old ſuperſtitions, than that of the ſincere Chriſtians; who by the lamps of the ſeven churches of Aſia, and not by the lamps of the monaſteries,

DANIEL'S WILFULL KING.

teries, had illuminated the church catholic during the three firſt centuries.

V. The Cataphrygians brought in alſo ſeveral other ſuperſtitions: ſuch as were the doctrine of ghoſts, and of their puniſhment in purgatory, with prayers and oblations for mitigating that puniſhment; as Tertullian teaches in his books *De Animâ* and *De Monogamiâ.* They uſed alſo the ſign of the croſs as a charm. So Tertullian in his book *De Coronâ Militis:* "*Ad omnem pro- "greſſum atque promotum, ad omnem aditum & exitum, ad veſ- "titum, ad calceatum, ad lavacra, ad menſas, ad lumina, ad cu- "bilia, ad ſedilia, quæcunque nos converſatio exercet, frontem cru- "cis ſignaculo terimus.*" All theſe ſuperſtitions the apoſtle refers to, where he ſaith: "Now the Spirit ſpeaketh expreſsly, that "in the latter times ſome ſhall depart from the faith, giving "heed to ſeducing ſpirits, and doctrines of ghoſts, [the devils "worſhiped by the heathens], ſpeaking lies in hypocriſy, [about "their apparitions, and the miracles done by them, and their "reliques, and the ſign of the croſs,] having conſciences ſeared "with a hot iron; forbidding to marry, and teaching to ab- "ſtain from meats, &c." (1 Tim. iv. 1, 2, 3.) From the Cataphrygians theſe principles and practices were propagated down to poſterity. For the myſtery of iniquity began to work, in the apoſtles days, in the Gnoſticks; and continued to work very ſtrongly in their offspring, the Tatianiſts and Cataphrygians; and was to work "till the man of ſin ſhould be revealed; whoſe coming "is after the working of Satan, with all power and ſigns, and "lying wonders, and all deceivableneſs of unrighteouſneſs;" coloured over with a form of Chriſtian godlineſs, but without the power thereof (2 Theſſ. ii. 7—10.)

VI. For though ſome ſtop was put to the Cataphrygian Chriſtianity, by provincial councils, till the fourth century; yet the Roman emperors then turning Chriſtians, and great multitudes of heathens coming over to the Chriſtian religion in outward profeſſion, and finding the Cataphrygian Chriſtianity more ſuitable to their old principles, of placing religion in outward forms and ceremonies, holy-days, and doctrines of ghoſts, than that of the ſincere Chriſtians: they readily ſided with the Cataphrygian Chriſ-

tians, and set up that Christianity before the end of the fourth century. And by this means those of understanding, after they had been persecuted by the heathen emperors in the three first centuries, and were "holpen with a little help," by the conversion of Constantine the Great and his sons to the Christian religion, fell under new persecutions, to "purge them" from the dissemblers, and "to make them white, even to the time "of the end."

CHAP. XIV.

Of the Mahuzzims, honoured by the king who doth according to his will.

CHAPTER FOURTEENTH.

IN Scripture we are told of some trusting in God, and others trusting in idols, and that God is our refuge, our strength, our defence. And in this sense God is the rock of his people; and false gods are called the rock of those that trust in them (Deut. xxxii. 4, 15, 18, 30, 31, 37.) And in the same sense the gods of the king, who shall do according to his will, are called Mahuzzims; munitions, fortresses, protectors, defenders. "In his estate," saith Daniel (a), "shall he honour Mahuzzims [Guardians]; "even with a God whom his fathers knew not, shall he honour "them with gold and silver, and with precious stones, and "things of value. Thus shall he do in the most strong holds [or "temples];—and he shall cause them to rule over many, and "divide the land [among them] for a possession." Now this came to pass by degrees in the following manner.

(a) Chap. xi. 38, 39.

II. Gregory

II. Gregory Nyssen (a) tells us, that after the persecution of the emperor Decius, Gregory, bishop of Neocæsarea in Pontus, "instituted among all people, as an addition or corollary of devotion towards God, that festival days and assemblies should be "celebrated to them who had contended for the faith," that is, to the Martyrs. And he adds this reason for the institution: "When he observed," saith Nyssen, "that the simple and unskilful multitude, by reason of corporeal delights, remained "in the error of idols; that the principal thing might be corrected among them, namely, that instead of their vain worship they might turn their eyes upon God; he permitted, that "at the memories of the holy martyrs they might make merry "and delight themselves, and be dissolved into joy." The heathens were delighted with the festivals of their gods, and unwilling to part with those delights; and therefore Gregory, to facilitate their conversion, instituted annual festivals to the Saints and Martyrs. Hence it came to pass, that for exploding the festivals of the heathens, the principal festivals of the Christians succeeded in their room: as the keeping of Christmas with ivy and feasting, and playing and sports, in the room of the *Bacchanalia* and *Saturnalia*; the celebrating of May-day with flowers, in the room of the *Floralia*; and the keeping of festivals to the Virgin Mary, John the Baptist, and divers of the apostles, in the room of the solemnities at the entrance of the sun into the signs of the Zodiac in the old Julian calendar. In the same persecution of Decius, Cyprian ordered the passions of the martyrs in Africa to be registered, in order to celebrate their memories annually with oblations and satrifices. And Felix bishop of Rome, a little after, as Platina relates, "*Martyrum gloriæ* "*consulens, constitutit ut quotannis sacrificia eorum nomine cele-* "*brarentur*." "consulting the glory of the martyrs, ordained "that sacrifices should be celebrated annually in their name." By the pleasures of these festivals the Christians increased much in number, and decreased as much in virtue; until they were purged and made white by the persecution of Diocletian. And this was the first step made in the Christian religion towards the veneration of the martyrs: and though it did not yet amount to an

MAHUZZIMS.

(a) Orat. de vita Greg. Theumaturg. T. 3. P. 574.

CHAPTER FOURTEENTH.

unlawful worſhip, yet it diſpoſed the Chriſtians towards ſuch a further veneration of the dead, as in a ſhort time ended in the invocation of ſaints.

III. The next ſtep was the affecting to pray at the ſepulchres of the martyrs: which practice began in Diocleſian's perſecution. The council of Eliberis in Spain, celebrated in the third or fourth year of Diocleſian's perſecution, A. C. 305, hath theſe canons. Can. 34. "*Cereos per diem placuit in Cœmeterio non incendi: in-*" *quietandi enim ſpiritus ſanctorum non ſunt. Qui hæc non obſer-*" *varint, arceantur ab eccleſiæ communione.*" Can. 35. "*Pla-*" *cuit prohiberi ne fœminæ in Cœmeterio pervigilent, eo quòd ſæpe* " *ſub obtentu orationis latenter ſcelera committant.*" Preſently after that perſecution, ſuppoſe about the year 314, the council of Laodicea in Phrygia, which then met for reſtoring the lapſed diſcipline of the church, has the following canons. "Can. 9. " Thoſe of the church are not allowed to go into the Cœmete-" ries, or Martyries as they are called, of Hereticks, for the " ſake of prayer or recovery of health: but ſuch as go, if they " be of the faithful, ſhall be excommunicated for a time." Can. 34. "A Chriſtian muſt not leave the martyrs of Chriſt, and " go to falſe martyrs," that is, to the martyrs of the Hereticks; " for theſe are alien from God: and therefore let thoſe be ana-" thema who go to them." Can. 51. "The birth-days of the " martyrs ſhall not be celebrated in Lent; but their commemora-" tion ſhall be made on the Sabbath-days and Lord's days." The council of Paphlagonia, celebrated in the year 324, made this canon: "If any man be arrogant, abominates the congre-" gations of the martyrs, or the liturgies performed therein, or " the memories of the martyrs, let him be anathema." By all which it is manifeſt that the Chriſtians, in the time of Diocleſian's perſecutions, uſed to pray in the Cœmeteries, or burying-places of the dead; for avoiding the danger of the perſecution, and for want of churches, which were all thrown down: and after the perſecution was over, continued that practice in honour of the martyrs, till new churches could be built: and by uſe affected it as advantageous to devotion, and for recovering the health of thoſe that were ſick: and that in theſe burying-places

places they commemorated the martyrs yearly upon days dedi- MABUZZIM.
cated to them; and accounted all theſe practices pious and religious; and anathematized thoſe men as arrogant, who oppoſed them, or prayed in the Martyries of the Hereticks. They alſo lighted torches to the martyrs in the day-time, as the heathens did to their gods; which cuſtom, before the end of the fourth century, prevailed much in the Weſt. And they ſprinkled the worſhipers of the martyrs with holy-water, as the heathens did the worſhipers of their gods; and went in proceſſion to ſee Jeruſalem and other holy places, as if the places conferred ſanctity on the viſiters. And from the cuſtom of praying in the Cœmeteries and Martyries, came the cuſtom of tranſlating the bodies of the ſaints and martyrs into ſuch churches as were new built; the emperor Conſtantius beginning this practice about the year 359, by cauſing the bodies of Andrew the apoſtle, Luke and Timothy, to be tranſlated into a new church at Conſtantinople: and before this act of Conſtantius, the Egyptians kept the bodies of their martyrs and ſaints unburied upon beds in their private houſes, and told ſtories of their ſouls appearing after death and aſcending up to heaven, as Athanaſius relates in the life of Antony. All which gave occaſion to the emperor Julian, as Cyril relates, to accuſe the Chriſtians in this manner: "Your adding to that " antient dead man, [viz. Jeſus,] many new dead men, who can " ſufficiently abominate? You have filled all places with ſepul-" chres and monuments; although you are no where bidden to " proſtrate yourſelves to ſepulchres, and to reſpect them offici-" ouſly." And a little after: "Since Jeſus ſaid that ſepulchres " are full of filthineſs, how do you invoke God upon them?" And in another place he ſaith, that if Chriſtians had adhered to the precepts of the Hebrews, "they would have worſhiped one " God inſtead of many, and not a man; or rather not many un-" happy men: and that they adhered to the wood of the croſs, " making its images on their foreheads, and before their " houſes."

IV. After the ſepulchres of ſaints and martyrs were thus converted into places of worſhip like the heathen temples, and the churches into ſepulchres, and a certain ſort of ſanctity was placed in

CHAPTER FOURTEENTH.

in the dead bodies of the ſaints and martyrs buried in them, and annual feſtivals were kept to them, with ſacrifices offered to God in their name; the next ſtep towards the invocation of ſaints, was the attributing to the bodies, bones and other reliques of the ſaints, a power of working miracles, by means of the ſeparate ſouls; who were ſuppoſed to know what we do or ſay, and to be able to do us good or hurt, and to work thoſe miracles. This is the very notion the heathens had of the ſeparate ſouls of their antient kings and heroes; whom they worſhiped under the names of Saturn, Rhea, Jupiter, Juno, Mars, Venus, Bacchus, Ceres, Oſiris, Iſis, Apollo, Diana, and the reſt of their gods. For theſe gods being male and female, huſband and wife, ſon and daughter, brother and ſiſter, are thereby diſcovered to be antient men and women. Now as the firſt ſtep towards the invocation of ſaints was ſet on foot by the perſecution of Decius, and the ſecond by the perſecution of Dioclesian; ſo this third ſeems to have been owing to the proceedings of Conſtantius and Julian the apoſtate. When Julian began to reſtore the worſhip of the heathen gods, and to vilify the ſaints and martyrs; the Chriſtians of Syria and Egypt ſeem to have made a great noiſe about the miracles done by the reliques of the Chriſtian ſaints and martyrs, in oppoſition to the powers attributed by Julian and the heathens to their idols. For Sozomen and Ruffinus tells us, that when he opened the heathen temples, and conſulted the oracle of Apollo Daphnæus in the ſuburbs of Antioch, and preſſed by many ſacrifices for an anſwer; the oracle at length told him, that the bones of the martyr Babylas, which were buried there, hindered him from ſpeaking. By which anſwer you may underſtand, that ſome Chriſtian was got into the place, where the heathen prieſts uſed to ſpeak through a pipe in delivering their oracles: and before this Hilary, in his book againſt Conſtantius, written in the laſt year of that emperor, makes the following mention of what was then doing in the Eaſt where he was: "*Sine martyrio perſe-*
"*queris. Plus credulitati veſtræ Nero, Deci, Maximiane, debe-*
"*mus. Diabolum enim per vos vicimus. Sanctus ubique beatorum*
"*martyrum ſanguis exceptus eſt, dum in his Dæmones mugiunt,*
"*dum ægritudines depelluntur, dum miraculorum opera cernuntur,*
"*elevari*

"*elevari ſine laqueis corpora, & diſpenſis pede fœminis veſtes non* MAHUZZIM.
"*defluere in faciem, uri ſine ignibus ſpiritus, confiteri ſine interro-*
"*gantis incremento fidei.*" And Gregory Nazianzen, in his firſt oration againſt the emperor Julian then reigning, writes thus:
"*Martyras non extimuiſti, quibus præclari honores & feſta conſti-*
"*tuta, à quibus Dæmones propellantur, & morbi curantur; quo-*
"*rum ſunt apparitiones & prædictiones; quorum vel ſola corpora*
"*idem poſſunt, quod animæ ſanctæ, ſive manibus contrectentur, ſive*
"*honorentur: quorum vel ſolæ ſanguinis guttæ, atque exigua paſ-*
"*ſionis ſigna,* [i. e. *ſigna crucis*] *idem poſſunt, quod corpora. Hæc non*
"*colis, ſed contemnis & aſpernaris.*" Theſe things made the heathens, in the reign of the ſame emperor, demoliſh the ſepulchre of John the Baptiſt in Phœnicia, and burn his bones; and ſome Chriſtians mixing themſelves with the heathens, gathered up ſome of his remains, which were ſent to Athanaſius, who hid them in the wall of a church; foreſeeing by a prophetic ſpirit, as Ruffinus tells us, that they might be profitable to future generations.

V. The cry of theſe miracles being once ſet on foot, continued for many years, and encreaſed and grew more general. For Chryſoſtom, in his ſecond oration on St. Babylas, twenty years after the ſilencing of the oracle of Apollo Daphnæus as above, viz. A. C. 382, ſaith of the miracles done by the ſaints and their reliques (a): "*Nulla eſt noſtri hujus Orbis ſeu regio, ſeu gens, ſeu*
"*urbs, ubi nova & inopinata miracula hæc non decantentur;*
"*quæ quidem ſi figmenta fuiſſent, prorſus in tantam hominum ad-*
"*mirationem non veniſſent.*" And a little after: "*Abunde ora-*
"*tioni noſtræ fidem faciunt, quæ quotidiana à martyribus miracula*
"*eduntur, magnâ affatim ad illa hominum multitudine affluente.*"
And in his 66th homily, deſcribing how the devils were tormented and caſt out by the bones of the martyrs, he adds:
"*Ob eam cauſam multi plerumque Reges peregre profecti ſunt, ut*
"*hoc ſpectaculo fruerentur. Siquidem ſanctorum martyrum tem-*
"*pla futuri judicii veſtigia & ſigna exhibent; dum nimirum Dæ-*
"*mones flagris cæduntur, homineſque torquentur, & liberantur.*
"*Vide quæ ſanctorum vitâ functorum vis ſit?*" And Jerom, in his epitaph on Paula, thus mentions the ſame things (b). "*Paula*
"*vidit Samariam: ibi ſiti ſunt Eliſæus & Abdias prophetæ, &*

(a) Vide Hom. 47. in S. Julian.

(b) Epiſt. 27. ad Euſtochium.

"*Joannes*

CHAPTER FOUTTEENTH.

" *Joannes Baptiſta, ubi multis intremuit conſternata miraculis.*
" *Nam cernebat variis dæmones rugire cruciatibus, & ante ſe-*
" *pulchra ſanctorum ululare homines more luporum; vocibus latrare*
" *canum, fremere leonum, ſibilare ſerpentum, mugire taurorum;*
" *alios rotare caput, & poſt tergum terram vertice tangere, ſuſ-*
" *penſiſque pede fæminis veſtes non defluere in faciem.*" This was about the year 384: and Chryſoſtom, in his oration on the Egyptian martyrs, ſeems to make Egypt the ringleader in theſe matters, ſaying (a): " *Benedictus Deus, quandoquidem ex Ægypto*
" *prodeunt martyres, ex Ægypto illâ cum Deo pugnante ac inſaniſſi-*
" *mâ, & unde impia ora, unde linguæ blaſphemæ; ex Ægypto*
" *martyres habentur; non in Ægypto tantùm, nec in finitimâ vici-*
" *nâque regione, ſed* UBIQUE TERRARUM. *Et quemadmodum in*
" *annonæ ſummâ ubertate, cùm viderunt urbium incolæ majorem*
" *quàm uſus habitatorum poſtulat eſſe proventum, ad peregrinas*
" *etiam urbes tranſmittunt: cum ut ſuam comitatem & liberali-*
" *tatem oſtendant, tum ut, præter horum abundantiam, cum facili-*
" *tate res, quibus indigent, rurſus ab illis ſibi comparent: ſic &*
" *Ægyptii, quod attinet ad religionis athletas, fecerunt. Cùm apud*
" *ſe multam eorum, Dei benignitate, copiam cernerent; nequaquam*
" *ingens Dei munus ſuâ civitate concluſerunt, ſed in* OMNES TERRÆ
" PARTES *bonorum theſauros effuderunt: cum ut ſium in fratres*
" *amorem oſtenderent, tum ut communem omnium dominum ho-*
" *nore afficerent, ac civitati ſuæ gloriam apud omnes compararent,*
" *totiuſque terrarum* ORBIS *eſſe* METROPOLIN *declararent.—Sanc-*
" *torum enim illorum corpora quovis adamantino & inexpugnabili*
" *muro tutius nobis urbem communiunt; & tanquam excelſi qui-*
" *dam ſcopuli undique prominentes, non horum, qui ſub ſenſus ca-*
" *dunt, & oculis cernuntur, hoſtium impetus propulſant tantùm, ſed*
" *etiam inviſibilium dæmonum inſidias, omneſque diaboli fraudes*
" *ſubvertunt ac diſſipant.—Neque vero tantùm adverſus hominum*
" *inſidias, aut adverſus fallacias dæmonum, utilis nobis eſt hæc poſ-*
" *ſeſſio; ſed ſi nobis communis dominus ob peccatorum multitudinem*
" *iraſcatur, his objectis corporibus continuò poterimus eum propiti-*
" *um reddere civitati.*" This oration was written at Antioch, while Alexandria was yet the metropolis of the Eaſt, that is, before the year 381, in which Conſtantinople became the metropolis:

(a) Edit. Frontonis Ducæi, Tom. 1.

tropolis: and it was a work of ſome years for the Egyptians to have diſtributed the miracle-working reliques of their martyrs over all the world, as they had done before that war. Egypt abounded moſt with the reliques of ſaints and martyrs, the Egyptians keeping them embalmed upon beds in their private houſes; and Alexandria was eminent above all other cities for diſperſing them; ſo as on that account to acquire glory with all men, and manifeſt herſelf to be the Metropolis of the world. Antioch followed the example of Egypt, in diſperſing the reliques of the forty martyrs: and the examples of Egypt and Syria were ſoon followed by the reſt of the world. MAHUZZIM.

VI. The reliques of the forty martyrs at Antioch were diſtributed among the churches before the year 373; for Athanaſius, who died in that year, wrote an oration upon them. This oration is not yet publiſhed; but Gerard Voſſius ſaw it in MS. in the library of cardinal Aſcanius in Italy, as he ſays in his commentary upon the oration of Ephraem Syrus on the ſame forty martyrs. And ſince the monks of Alexandria ſent the reliques of the martyrs of Egypt into all parts of the earth, and thereby acquired glory to their city, and declared her in theſe matters the metropolis of the whole world, as we have obſerved out of Chryſoſtom; it may be concluded, that before Alexandria received the forty martyrs from Antioch, ſhe began to ſend out the reliques of her own martyrs into all parts, ſetting the firſt example to other cities. This practice therefore began in Egypt ſome years before the death of Athanaſius. It began when the miracle-working bones of John the Baptiſt were carried into Egypt, and hid in the wall of a church, " that they might be profitable " to future generations." It was reſtrained during the reign of Julian the apoſtate: and then it ſpread from Egypt into all the empire; Alexandria being the metropolis of the whole world, according to Chryſoſtom, for propagating this ſort of devotion, and Antioch and other cities ſoon following her example.

VII. In propagating theſe ſuperſtitions, the ringleaders were the Monks, and Antony was at the head of them: for in the end of the life of Antony, Athanaſius relates that theſe were his dying words to his diſciples, who then attended him. " Do you

CHAPTER FOURTEENTH.

"take care," said Antony, "to adhere to Christ in the first place, "and then to the saints; that after death they may receive you "as friends and acquaintance into the everlasting tabernacles. "Think upon these things, perceive these things; and if you "have any regard to me, remember me as a father." This being delivered in charge to the monks by Antony at his death, A. C. 356, could not but inflame their whole body with devotion towards the saints, as the ready way to be received by them into the eternal tabernacles after death. Hence came that noise about the miracles done by the reliques of the saints, in the time of Constantius: hence came the dispersion of the miracle-working reliques into all the empire; Alexandria setting the example, and being renowned for it above all other cities. Hence it came to pass in the days of Julian, A. C. 362, that Athanasius, by a prophetic spirit, as Ruffinus tells us, hid the bones of John the Baptist from the heathens, not in the ground to be forgotten, but in the hollow wall of a church before proper witnesses, that they might be "profitable to future generations." Hence also came the invocation of the saints, for doing such miracles, and for assisting men in their devotions, and mediating with God. For Athanasius, even from his youth, looked upon the dead saints and martyrs as mediators of our prayers: for in his epistle to Marcellinus, written in the days of Constantine the Great, he saith that the words of the Psalms are not to be transposed, or any wise changed, but to be recited and sung without any artifice, as they are written; "that the holy men who delivered "them, knowing them to be their own words, may pray with "us; or rather, that the Holy Ghost, who spake in the holy "men, seeing his own words with which he inspired them, may "join with them in assisting us."

VIII. And whilst Egypt abounded with monks above any other country, the veneration of the saints began sooner, and spread faster there than in other places. Palladius going into Egypt in the year 388 to visit the monasteries, and the sepulchres of Apollonius and other martyrs of Thebais, who had suffered under Maximinus, saith of them: "*Iis omnibus Christiani fecerunt ædem* "*unam, ubi nunc multæ virtutes peraguntur. Tanta autem fuit* "*viri*

"*viri gratia, ut de iis quæ esset precatus, statim exaudiretur, eum* MAHUZZIM. "*sic honorante servatore: quem etiam nos in martyrio precati vi-* "*dimus, cum iis qui cum ipso fuerunt martyrio affecti; & Deum* "*adorantes, eorum corpora salutavimus.*" And Eunapius, a heathen, yet a competent witness of what was done in his own times, relating how the soldiers delivered the temples of Egypt into the hands of the monks, which was done in the year 389, rails thus in an impious manner at the martyrs, as succeeding in the room of the old gods of Egypt. "*Illi ipsi* [*milites*] *Mona-* "*chos Canobi quoque collocárunt; ut pro Diis, qui animo cernuntur,* "*servos, & quidem flagitiosos, divinis honoribus percolerent; homi-* "*num mentibus ad cultum ceremoniasque obligatis. Ii namque* "*condita & salita eorum capita, qui ob scelerum multitudinem à* "*judicibus extremo judicio fuerant affecti, pro Divis ostentabant;* "*iis genua submittebant; eos in Deorum numerum receptabant, ad* "*illorum sepulchra pulvere sordibusque conspurcati. Martyres igi-* "*tur vocabantur, & ministri quidem & legati arbitrique precum* "*apud Deos; cùm fuerint servitia infida, & flagris pessimè subacta,* "*quæ cicatrices scelerum, ac nequitiæ vestigia, corporibus circumfe-* "*runt; ejusmodi tamen Deos fert tellus.*" By these instances we may understand the invocation of saints was now of some standing in Egypt, and that it was already generally received and practised there by the common people.

IX. Thus Basil a monk, who was made bishop of Cæsarea in the year 369, and died in the year 378, in his oration on the martyr Mamas, saith: "Be ye mindful of the martyr, as ma- "ny of you as have enjoyed him in your dreams; as many as "in this place have been assisted by him in prayer; as many of "you as upon invoking him by name have had him present in "your works; as many as he has reduced into the way from "wandering; as many as he has restored to health; as many as "have had their dead children restored by him to life; as many "as have had their lives prolonged by him." And a little after, he thus expresses the universality of this superstition in the regions of Cappadocia and Bithynia: "At the memory of the mar- "tyr," saith he, "the whole region is moved; at his festival "the whole city is transported with joy. Nor do the kindred

CHAPTER FOURTEENTH.

" of the rich turn aſide to the ſepulchres of their anceſtors, but " all go to the place of devotion." And, in the end of the homily, he prays, that " God would preſerve the church, thus " fortified with the great towers of the martyrs." And in his oration on the forty martyrs: " Theſe are they," ſaith he, " who " obtaining our country, like certain towers, afford us ſafety " againſt our enemies. Neither are they ſhut up in one place " only; but being diſtributed are ſent into many regions, and " adorn many countries.—You have often endeavoured, you " have often laboured to find one who might pray for you: here " are forty, emitting one voice of prayer.—He that is in afflic- " tion flies to theſe; he that rejoices, has recourſe to theſe: the " firſt, that he may be freed from evil; the laſt, that he may " continue in happineſs. Here a woman, praying for her chil- " dren, is heard; ſhe obtains a ſafe return for her huſband from " abroad, and health for him in his ſickneſs.—O ye common " keepers of mankind, the beſt companions of our cares, ſuf- " fragans and coadjutors of our prayers, moſt powerful embaſ- " ſadors to God, &c." By all which it is manifeſt, that before the year 378, the orations and ſermons upon the ſaints went much beyond the bounds of mere oratorical flouriſhes, and that the common people in the Eaſt were already generally corrupted by the monks with ſaint-worſhip.

X. Gregory Nazianzen, a monk, in his ſixth oration, written A. C. 373, when he was newly made biſhop of Saſima, ſaith: " Let us purify ourſelves to the martyrs, or rather to the God of " the martyrs." And a little after he calls the martyrs " media- " tors of obtaining an aſcenſion or divinity." The ſame year, in the end of his oration upon Athanaſius, then newly dead, he thus invokes him: " Do thou look down upon us propitiouſly, " and govern this people, a perfect adorer of the perfect Tri- " nity, which in the Father, Son, and Holy Ghoſt, is contem- " plated and adored. If there ſhall be peace, preſerve me, " and feed my flock with me; but if war, bring me home, " place me with yourſelf, and with ſuch as you are; although it " be great which I deſire." And in the end of the funeral oration upon Baſil, written A. C. 378, he thus invokes Baſil: " But " thou,

" thou, O divine and ſacred head, look down upon us from MARUZZIM. " heaven; and by thy prayers either take away that thorn of the " fleſh, which is given us by God for exerciſe; or obtain, that we " may bear it with courage, and direct all our life to that which " is moſt conducible. And when we depart this life, receive us " there in your tabernacles; that living together, and beholding " the holy and bleſſed Trinity more purely and perfectly, where- " of we have now but an imperfect view, we may there come to " the end of our deſires, and receive this reward of the wars " which we have waged or ſuffered." And in his oration upon Cyprian, not the biſhop of Carthage, but a Greek, he invokes him after the ſame manner; and tells us alſo, how a pious virgin, named Juſtina, was protected by invoking the Virgin Mary; and how miracles were done by the aſhes of Cyprian.

XI. Gregory Nyſſen, another eminent monk and biſhop, in the life of Ephraem Syrus, tells how a certain man, returning from a far country, was in great danger, by reaſon that all the ways were intercepted by the armies of barbarous nations; but upon invoking Ephraem by name, and ſaying, " Holy Ephraem aſſiſt me," he eſcaped the danger, neglected the fear of death, and beyond his hope got ſafe home. And in the end of this oration Gregory calls upon Ephraem after the following manner: " But thou [O " Ephraem] aſſiſting now at the divine altar, and ſacrificing to " the Prince of life, and to the moſt holy Trinity, together with " the angels, remember us all; and obtain for us pardon of our " ſins, that we may enjoy the eternal happineſs of the king- " dom of heaven." The ſame Gregory, in his oration on the martyr Theodorus, written A. C. 381, thus deſcribes the power of that martyr, and the practice of the people. " This mar- " tyr," ſaith he, " the laſt year quieted the barbarous tempeſt, " and put a ſtop to the horrid war of the fierce and cruel Scy- " thians.—If any one is permitted to carry away the duſt, with " which the tomb is covered wherein the body of the martyr " reſts; the duſt is accepted as a gift, and gathered to be laid up " as a thing of great price. For to touch the reliques them- " ſelves, if any ſuch proſperous fortune ſhall at any time hap- " pen, how great a favour that is, and not to be obtained with-

CHAPTER FOURTEENTH.

"out the moſt earneſt prayers; they know well, who have obtained it. For as a living and florid body, they who behold it "embrace it; applying to it the eyes, mouth, ears, and all the "organs of ſenſe: and then with affection pouring tears upon "the martyr, as if he was whole and appeared to them, they "offer prayers with ſupplication, that he would intercede for "them as an advocate; praying to him as an officer attending "upon God, and invoking him as receiving gifts, whenever he "will." And at length Gregory concludes the oration wih this prayer: "O Theodorus, we want many bleſſings; intercede "and deprecate for your country before the common King and "Lord: for the country of the martyr is the place of his paſſion; and they are his citizens, brethren and kindred, who "have him, and defend, adorn and honour him. We fear afflictions; we expect dangers: the wicked Scythians are not far "off, ready to make war againſt us. As a ſoldier, fight for us; "as a martyr, uſe liberty of ſpeech for thy fellow-ſervants. "Pray for peace; that theſe public meetings may not ceaſe; that "the furious and wicked barbarian may not rage againſt the temples and altars; that the profane and impious may not trample "upon the holy things. For we acknowledge it a benefit received "from thee, that we are preſerved ſafe and entire; and we pray "for freedom from danger in time to come: and if there ſhall "be need of greater interceſſion and deprecation, call together a "choir of thy brethren the martyrs, and in conjunction with "them all intercede for us. Let the prayers of many juſt ones "atone for the ſins of the multitudes and the people; exhort "Peter, excite Paul, and alſo John the Divine and beloved diſciple, that they may be ſolicitous for the churches which they "have erected, for which they have been in chains, for which "they have undergone dangers and deaths; that the worſhip of "idols may not lift up its head againſt us; that hereſies may not "ſpring up like thorns in the vineyard; that tares grown up may "not choak the wheat; that no rock, void of the fatneſs of true "dew, may be againſt us, and render the fruitful power of the "word void of a root; but by the power of the prayers of your"ſelf and your companions, O admirable man and eminent "among

"among the martyrs, the commonwealth of Chriſtians may be- MAHUZZIM.
"come a field of corn." The ſame Gregory Nyſſen, in his ſermon upon the death of Meletius biſhop of Antioch, preached at Conſtantinople the ſame year, A. C. 381, before the biſhops of all the Eaſt aſſembled in the ſecond general council, ſpake thus of Meletius. "The Bridegroom," ſaith he, "is not taken "from us: he ſtands in the midſt of us, though we do not ſee "him: he is a Prieſt in the moſt inward places, and face to "face intercedes before God for us and the ſins of the people." This was no oratorical flouriſh, but Gregory's real opinion; as may be underſtood by what we have cited out of him concerning Ephraem and Theodorus: and as Gregory preached this before the council of Conſtantinople, you may thence know, ſaith Baronius (a), that he profeſſed what the whole council, and there- (a) Ad an. 381. & 41.
with the whole church of thoſe parts believed, namely, that the ſaints in heaven offer prayers for us before God.

XII. Ephraem Syrus, another eminent monk, who was contemporary with Baſil, and died the ſame year with him; in the end of his encomium or oration upon Baſil then newly dead, invokes him after this manner: "Deprecate for me, a very "miſerable man; and recall me by thy interceſſions, O Father "[Baſil]; thou courageous, for me a weak one; thou diligent, for me a negligent one; thou chearful, for me a "ſlothful one; thou wiſe, for me a fooliſh one. Thou "who haſt treaſured up a treaſure of all virtues, reduce me "who am empty of every good work." In the beginning of his encomium upon the forty martyrs, written at the ſame time, he thus invokes them: "Help me therefore, O ye ſaints, "with your interceſſion; and O ye beloved, with your holy "prayers; that Chriſt by his grace may direct my tongue to "ſpeak, &c." And afterwards mentioning the mother of one of theſe forty martyrs, he concludes the oration with this prayer: "I entreat thee, O holy, faithful, and bleſſed woman, pray for "me to the ſaints, ſaying, Intercede ye triumphers of Chriſt, "for the leaſt and the miſerable Ephraem, that he may find "mercy, and by the grace of Chriſt may be ſaved." And again, in his ſecond ſermon or oration on the praiſes of the holy martyrs.

CHAPTER FOURTEENTH.

tyrs of Chriſt, he thus addreſſes them: "We entreat you, moſt "holy martyrs, to deprecate the Lord for us miſerable ſin- "ners, beſet with the ſquallor of negligence, that he would "infuſe his divine grace into us." And afterwards, near the end of the ſame diſcourſe: "Now ye moſt holy men and glo- "rious martyrs of God, help me a miſerable ſinner with your "prayers, that in that dreadful hour I may obtain mercy, when "the ſecrets of all hearts ſhall be made manifeſt. I am to-day "become to you, O ye moſt holy martyrs of Chriſt, as it were an "unprofitable and unſkilful cup-bearer: for I have delivered to "the ſons and brothers of your faith, a cup of the excellent wine "of your warfare: and with the excellent table of your victo- "ry, repleniſhed with all ſorts of dainties, I have endeavour- "ed, with the whole affection and deſire of my mind, to re- "create your fathers and brothers, kindred and relations, who "daily frequent the table. For behold they ſing, and with exul- "tation and jubilee glorify God; who has crowned your virtues, "by ſetting on your moſt ſacred heads incorruptible and celeſ- "tial crowns; and with exceſſive joy they ſtand about the ſacred "reliques of your martyrdom, wiſhing for a bleſſing, and de- "ſiring to carry away the holy medicines both for the body and "mind. As good diſciples and faithful miniſters of our be- "nign Lord and Saviour, beſtow therefore a bleſſing on them "all. And I alſo, though weak and feeble, having received "ſtrength by your merits and interceſſions, have with the whole "devotion of my mind, ſung a hymn of your praiſe and glory "before your holy reliques. Wherefore, I beſeech you, ſtand be- "fore the throne of the divine Majeſty for me Ephraem, a vile "and miſerable ſinner; that by your prayers I may deſerve to "obtain ſalvation, and with you enjoy eternal felicity by the "grace and benignity and mercy of our Lord and Saviour Jeſus "Chriſt; to whom with the Father and Holy Ghoſt be praiſe, "honour, virtue, and glory, for ever and ever. Amen."

XIII. By what has been cited out of Baſil, the two Gregories, and Ephræm, we may underſtand that ſaint-worſhip was eſtabliſhed among the monks and their admirers in Egypt, Phœnicia, Syria and

and Cappadocia, before the year 378, this being the year in which Baſil and Ephraem died. Chryſoſtom was not much later; he preached at Antioch almoſt all the time of Theodoſius the Great, and in his ſermons are many exhortations to this ſort of ſuperſtition; as may be ſeen in the end of his orations on St. Julia, on St. Pelagia, on the martyr Ignatius, on the Egyptian martyrs, on Fate and Providence, on the martyrs in general, on St. Berenice and St. Proſdoce, on Juventinus and Maximus, on the name of Cœmetery, &c. So in his ſermon on SS. Berenice and Proſdoce; "Perhaps," ſaith he, "you are "inflamed with no ſmall love towards theſe martyrs; therefore "with this ardour let us fall down before their reliques, let us "embrace their coffins. For the coffins of the martyrs have "great virtue, even as the bones of the martyrs have great "power. Nor let us only on the day of this feſtival, but alſo "on other days apply to them, invoke them, and beſeech them "to be our patrons: for they have great power and efficacy, "not only whilſt alive, but alſo after death; and much more "after death than before. For now they bear the marks or "brands of Chriſt; and when they ſhew theſe marks, they can "obtain all things of the King. Seeing therefore they abound "with ſuch efficacy, and have ſo much friendſhip with him; "we alſo, when, by continual attendance and perpetual vi- "ſitation of them we have inſinuated ourſelves into their fa- "miliarity, may by their aſſiſtance obtain the mercy of God."

MAIUZZIM.

XIV. Conſtantinople was free from theſe ſuperſtitions till Gregory Nazianzen came thither A. C. 379; but in a few years was inflamed with it. Ruffinus (a) tells us, that when the emperor Theodoſius was ſetting out againſt the tyrant Eugenius, which was in the year 394, he went about with the prieſts and people to all the places of prayer; lay proſtrate in hair-cloth before the ſhrines of the martyrs and apoſtles, and "prayed for aſſiſtance by the interceſſion of the ſaints." Sozomen (b) adds, that when the emperor was marched ſeven miles from Conſtantinople againſt Eugenius, he went into a church which he had built to John the Baptiſt, "and invoked the Bap-

(a) Hiſt. Eccl. l. 2. c. 33.

(b) L. 7. c. 24.

CHAPTER FOUTTEENTH.

"tiſt for his aſſiſtance." Chryſoſtom [a] ſays: "He that is "clothed in purple, approaches to embrace theſe ſepulchres; "and laying aſide his dignity, ſtands ſupplicating the ſaints to "intercede for him with God: and he who goes crowned with "a diadem, offers his prayers to the tent-maker and the fiſher-"man as his protectors." And in another place [b]: "The ci-"ties run together to the ſepulchres of the martyrs, and the "people are inflamed with the love of them."

[a] Hom. 66. ad populum, circa finem, & Hom. 8, 27, in Matth. Hom. 42, 43. in Gen. Hom. 1. in 1 Theſſ.
[b] Expoſit. in Pſal. 114. ſub finem.

XV. This practice of ſending reliques from place to place for working miracles, and thereby inflaming the devotion of the nations towards the dead ſaints and their reliques, and ſetting up the religion of invoking their ſouls, laſted only till the middle of the reign of the emperor Theodoſius the Great; for he then prohibited it by the following edict: "*Humatum corpus,* "*nemo ad alterum locum transferat; nemo Martyrem diſtrahat,* "*nemo mercetur: habeant verò in poteſtate, ſi quolibet in loco* "*ſanctorum eſt aliquis conditus, pro ejus veneratione, quod Mar-* "*tyrium vocandum ſit, addant quod voluerint fabricarum. Dat.* "*iv. Kal. Mart. Conſtantinopoli, Honorio nob. puero & Euodio* "*Coſſ. A. C.* 386." After this they filled the fields and high-ways with altars erected to martyrs, which they pretended to diſcover by dreams and revelations: and this occaſioned the making the fourteenth canon of the fifth council of Carthage, A. C. 398. "*Placuit, ut altaria, quæ paſſim per agros aut* "*vias, tanquam memoriæ Martyrum conſtituuntur, in quibus* "*nullum corpus aut reliquiæ Martyrum conditæ probantur, ab* "*Epiſcopis, qui illis locis præſunt, ſi fieri poteſt, evertantur. Si* "*autem hoc propter tumultus populares non ſinitur, plebes tamen* "*admoneantur, ne illa loca frequentent; ut qui rectè ſapiunt,* "*nullâ ibi ſuperſtitione devincti teneantur. Et omnino nulla me-* "*moria Martyrum probabiliter acceptetur, niſi aut ibi corpus aut* "*aliquæ certæ reliquiæ ſint, aut ibi origo alicujus habitationis,* "*vel poſſeſſionis, vel paſſionis fideliſſimâ origine traditur. Nam* "*quæ per ſomnia, & per inanes quaſi revelationes quorumlibet* "*hominum, ubique conſtituuntur altaria, omnimodè reprobentur.*" Theſe altars were for invoking the ſaints or martyrs buried or pretended

pretended to be buried under them. Firſt they filled the churches in all places with the reliques or pretended reliques of the martyrs, for invoking them in the churches; and then they filled the fields and high-ways with altars, for invoking them every where: and this new religion was ſet up by the monks in all the Greek empire before the expedition of the emperor Theodoſius againſt Eugenius, and I think before the abovementioned edict of this emperor, A. C. 386. MAHUZZIM.

XVI. The ſame religion of worſhiping Mahuzzims quickly ſpread into the Weſtern Empire alſo: but Daniel in this prophecy deſcribes chiefly the things done among the nations comprehended in the body of his third beaſt.

END OF THE FIRST PART.

PART II.

OBSERVATIONS

UPON THE

APOCALYPSE OF ST. JOHN.

CONTENTS OF THE SECOND PART.

CHAP. I. *Concerning the time when the Apocalypſe was written,* - - - pag. 439

II. *Of the relation which the Apocalypſe of John hath to the book of Moſes, and to the worſhip of God in the Temple,* - - - - - 450

III. *Of the relation which the prophecy of John hath to thoſe of Daniel; and of the ſubject of the prophecy,* - - - - 463

OBSERVATIONS

UPON THE

APOCALYPSE OF ST. JOHN.

CHAP. I.

Introduction, concerning the time when the Apocalypſe was written.

IRENÆUS has ſet on foot an opinion, that the Apocalypſe was writ in the time of Domitian; but he alſo poſtpones the writing of ſome others of the ſacred books, and was to place the Apocalypſe after them. Perhaps his maſter Polycarp might ſay, he had it from St. John in the end of Domitian's reign; and John might at that time have put out a new edition of it, and Irenæus might from thence form a notion of its being written at that time. Euſebius, in his Chronicle and Eccleſiaſtical Hiſtory, follows Irenæus; but afterwards (a) in his Evangelical Demonſtrations, he conjoins the baniſhment of John into Patmos, with the deaths of Peter and Paul: and ſo do (b) Tertullian and Pſeudo-Prochorus, and the firſt author, whoever he was, of that very antient fable, that John was put by Nero into a veſſel of hot oil, and coming out without

[a] Dem. Evang. l. 3.
[b] Vid. Pamelium in notis ad Tertull. de Præſcriptionibus, n. 215. & Hieron. l. 1. contra Jovinianum, c. 14. edit. Eraſmi.

CHAPTER FIRST.

without hurt, was baniſhed by him into Patmos. Though this be but a fiction, yet it was founded on a tradition of the firſt churches, that John was baniſhed into Patmos in the days of Nero. Epiphanius repreſents the Goſpel of John as written in Domitian's reign, and the Apocalypſe even before Nero's. (a) Arethas, in the beginning of his commentary, mentions out of Euſebius the opinion of Irenæus, but follows it not: for afterwards he affirms that the Apocalypſe was writ before the deſtruction of Jeruſalem, and that former commentators had expounded the ſixth ſeal of that deſtruction.

(a) Areth. c. 18, 19.

II. With the opinion of the firſt commentators agrees the tradition of the churches of Syria, preſerved to this day in the title of the Syriac verſion of the Apocalypſe; which title is this: "The Revelation which was made to John the Evangeliſt by "God in the Iſland Patmos, into which he was baniſhed by Nero "the Cæſar." The ſame is confirmed by a ſtory told by (b) Euſebius out of Clemens Alexandrinus, and other antient authors, concerning a youth whom John, ſome time after his return from Patmos, committed to the care of the biſhop of a certain city. The biſhop educated, inſtructed, and at length baptized him; but then remitted of his care. The young man thereupon got into ill company; and began by degrees firſt to revel and grow vicious, then to abuſe and ſpoil thoſe he met in the night; and at laſt grew ſo deſperate, that his companions, turning a band of highwaymen, made him their captain: and, ſaith Chryſoſtom (c), he continued their captain a long time. At length John returning to that city, and hearing what was done, rode to the thief; and, when he out of reverence to his old maſter fled, John rode after him, recalled him, and reſtored him to the church. This is a ſtory of many years; and requires, that John ſhould have returned from Patmos rather at the death of Nero, than at that of Domitian; becauſe between the death of Domitian and that of John there were but two years and an half; and John in his old age was (d) ſo infirm as to be carried to church, dying above 90 years old, and therefore could not be then ſuppoſed able to ride after the thief.

(b) Hiſt. Eccl. l. 3. c. 23.

(c) Chryſoſt. ad Theodorum lapſum.

(d) Hieron. in Epiſt. ad Gal. l. 3. c. 6.

This

AGE OF THE APOCALYPSE.

This opinion is further confirmed by the alluſions in the Apocalypſe to the temple and altar, and holy city, as then ſtanding; and to the Gentiles, who were ſoon after to tread under foot the holy city and outward court. It is confirmed alſo by the ſtyle of the Apocalypſe, which is fuller of Hebraiſms than his goſpel. For thence it may be gathered, that it was writ when John was newly come out of Judea, where he had been uſed to the Syriac tongue; and that he did not write his goſpel, till by long converſe with the Aſiatick Greeks he had left off moſt of the Hebraiſms. It is confirmed alſo by the many falſe Apocalypſes; as thoſe of Peter, Paul, Thomas, Stephen, Elias, and Cerinthus, written in imitation of the true one. For as the many falſe goſpels, falſe acts, and falſe epiſtles were occaſioned by true ones; and the writing many falſe Apocalypſes, and aſcribing them to apoſtles and prophets, argues that there was a true apoſtolic one in great requeſt with the firſt Chriſtians: ſo this true one may well be ſuppoſed to have been written early; that there may be room in the apoſtolic age for the writing of ſo many falſe ones afterwards, and fathering them upon Peter, Paul, Thomas, and others, who were dead before John. Caius, who was contemporary with Tertullian (a), tells us that Cerinthus wrote his revelations as a great apoſtle, and pretended the viſions were ſhewn him by angels, aſſerting a *milennium* of carnal pleaſures at Jeruſalem after the reſurrection; ſo that his Apocalypſe was plainly written in imitation of John's: and yet he lived ſo early, that (b) he reſiſted the apoſtles at Jeruſalem in or before the firſt year of Claudius, that is, 26 years before the death of Nero, and (c) died before John.

(a) Apud Euſeb. Eccl. Hiſt. l. 3. c. 28. Edit. Valeſii.

(b) Epiphan. Hæreſ. 28.

(c) Hieron. adv. Lucif.

III. Theſe reaſons may ſuffice for determining the time; and yet there is one more, which to conſidering men may ſeem a good reaſon, to others not. I will propound it, and leave it to every man's judgment. The Apocalypſe ſeems to be alluded to in the epiſtles of Peter and that to the Hebrews, and therefore to have been written before them. Such alluſions in the epiſtles to the Hebrews, I take to be the diſcourſes concerning the high-prieſt in the heavenly tabernacle, who is both prieſt and

CHAPTER FIRST.

king, as was Melchisedec; and those concerning the word of God, with the two-edged sword; the σαββατισμὸς, or millennial rest; the earth whose end is to be burned, supposed by the lake of fire; the judgment and fiery indignation which shall devour the adversaries; the heavenly city which hath foundations whose builder and maker is God; the cloud of witnesses, Mount Sion, heavenly Jerusalem, general assembly, spirits of just men made perfect, viz. by the resurrection, and the shaking of heaven and earth, and removing them, that the new heaven, new earth, and new kingdom which cannot be shaken, may remain.

In the first of Peter (a) occur these: "The revelation of Jesus "Christ," twice or thrice repeated; "(b) the blood of Christ as "a Lamb foreordained before the foundation of the world;" "(c) the spiritual building in heaven (1 Pet. ii. 5.) an inheri- "tance incorruptible and undefiled and that fadeth not away, "reserved in heaven for us, who are kept unto the salvation, "ready to be revealed in the last time" (1 Pet. i. 4, 5.) (d) the royal priesthood, (e) the holy priesthood, (f) the judgment beginning at the house of God, and (g) the church at Babylon. These are indeed obscurer allusions; but the second epistle, from the 19th verse of the first chapter to the end, seems to be a continued commentary upon the Apocalypse. There, in writing to the churches in Asia, to whom John was commanded to send this prophecy, he tells them, they "have a more sure word of "prophecy, to be heeded by them, as a light that shineth in a "dark place, until the day dawn, and the day-star arise in their "hearts," that is, until they begin to understand it: for "no "prophecy," saith he, "of the scripture is of any private in- "terpretation; the prophecy came not in old time by the will "of man, but holy men of God spake, as they were moved by "the Holy Ghost." Daniel (h) himself professes that he understood not his own Prophecies; and therefore the churches were not to expect the interpretation from their prophet John, but to study the prophecies themselves. This is the substance of what Peter says in the first chapter; and then in the second he proceeds to describe, out of this sure word of prophecy, how there should arise in the church false prophets, or false teachers, ex-

(a) 1 Pet. i. 7, 13 iv. 13. & v. 1.
(b) Apoc. xiii. 8.
(c) Apoc. xxi.
(d) Apoc. i. 6. & v. 10.
(e) Apoc. xx. 6.
(f) Apoc. xx. 4, 12.
(g) Apoc. xvii.
(h) Dan. viii. 15, 16, 27. & xii. 8, 9.

pressed collectively in the Apocalypse by the name of the false prophet; who should bring in damnable heresies, even denying the Lord that bought them, which is the character of Antichrist. And many, saith he, shall follow their lusts (a); [they that dwell on the earth (b) shall be deceived by the false prophet, and be made drunk with the wine of the Whore's fornication,] by reason of whom the way of truth shall be blasphemed; [for (c) the beast is full of blasphemy]: and through covetousness shall they with feigned words make merchandize of you; [for these are the merchants of the earth, who trade with the great Whore, and their merchandize (d) is all things of price, with the bodies and souls of men]: whose judgment lingereth not, and their damnation (e) slumbereth not, but shall surely come upon them at the last day suddenly, as the flood upon the old world, and fire and brimstone upon Sodom and Gomorrha, when the just shall be delivered (f) like Lot; for the Lord knoweth how to deliver the godly out of temptation, and to reserve the unjust unto the day of judgment to be punished [in the lake of fire]; but chiefly them that walk after the flesh in the lust of uncleanness, [(g) being made drunk with the wine of the Whore's fornication]; who despise dominion, and are not afraid to despise glories; [for the beast opened his mouth against God (h) to blaspheme his name and his tabernacle, and them that dwell in heaven.] These, as natural brute beasts, [the ten-horned beast and two-horned beast, or false prophet], made to be taken and destroyed [in the lake of fire], blaspheme the things they understand not:—they take pleasure to riot in the day time—sporting themselves with their own deceivings, while they feast (i) with Christians, having eyes full of an (k) adultéress: [for the kingdoms of the beast live deliciously with the great Whore, and the nations are made drunk with the wine of her fornication.] They are gone astray, following the way of Balaam, the son of Bosor, who loved the wages of unrighteousness, [the false prophet (l)] who taught Balak to cast a stumbling-block before the children of Israel. These are [not fountains of living water, but] wells without water; [not such clouds of saints as the two witnesses ascend in, but] clouds that are carried with

(a) Apoc. xiii. 7, 12.
(b) Apoc. xiii. 12, 13.
(c) Apoc. xiii. 1, 5, 6.
(d) Apoc. xviii. 11, 13.
(e) Apoc. xix. 20.
(f) Apoc. xxi. 3, 4.
(g) Apoc. ix. 21. & xvii. 2.
(h) Apoc. xiii. 6.
(i) Apoc. xviii. 7, 9.
(k) Apoc. ii. 14.

ἀσέλγειαις, in many of the best MSS.

CHAPTER FIRST.

with a tempeſt, &c. Thus does the author of this epiſtle ſpend all the ſecond chapter in deſcribing the qualities of the Apocalyptic beaſts and falſe prophet: and then in the third he goes on to deſcribe their deſtruction more fully, and the future kingdom. He ſaith, that becauſe the coming of Chriſt ſhould be long deferred, they ſhould ſcoff; ſaying, where is the promiſe of his coming? Then he deſcribes the ſudden coming of the day of the Lord upon them, as a thief in the night, which is the Apocalyptic phraſe; and the milennium, or thouſand years, which are with God but as a day; the paſſing away of the old heavens and earth, by a conflagration in the lake of fire, and our looking for new heavens and a new earth, wherein dwelleth righteouſneſs.

IV. Seeing therefore Peter and John were apoſtles of the circumciſion, it ſeems to me that they ſtaid with their churches in Judea and Syria till the Romans made war upon their nation; that is, till the twelfth year of Nero: that they then followed the main body of their flying churches into Aſia, and that Peter went thence by Corinth to Rome; that the Roman empire looked upon thoſe churches as enemies, becauſe Jews by birth; and therefore, to prevent inſurrections, ſecured their leaders, and baniſhed John into Patmos. It ſeems alſo probable to me, that the Apocalypſe was there compoſed; and that ſoon after, the epiſtle to the Hebrews and thoſe of Peter were written to theſe churches, with reference to this prophecy as a thing they were particularly concerned in. For it appears by theſe epiſtles, that they were written in times of general affliction and tribulation under the heathens; and by conſequence when the empire made war upon the Jews: for till then the heathens were at peace with the Chriſtian Jews, as well as with the reſt. The epiſtle to the Hebrews, ſince it mentions Timothy as related to thoſe Hebrews, muſt be written to them after their flight into Aſia, where Timothy was biſhop; and by conſequence after the war began, the Hebrews in Judea being ſtrangers to Timothy. Peter ſeems alſo to call Rome Babylon, as well with reſpect to the war made upon Judea, and the approaching captivity, like that under old Babylon; as with reſpect to that name in the Apocalypſe: and in writing

writing to the ſtrangers ſcattered throughout Pontus, Galatia, Cappadocia, Aſia and Bithynia, he ſeems to intimate that they were the ſtrangers newly ſcattered by the Roman wars; for thoſe were the only ſtrangers there belonging to his care.

AGE OF THE APOCALYPSE.

V. And this account of things agrees beſt with hiſtory duly rectified. For Juſtin (a) and Irenæus (b) ſay, that Simon Magus came to Rome in the reign of Claudius, and exerciſed juggling tricks there. Pſeudo-Clemens adds, that he endeavoured there to fly, but broke his neck through the prayers of Peter. Whence Euſebius (c), or rather his interpolator Jerom, has recorded, that Peter came to Rome in the ſecond year of Claudius: but Cyril (d) biſhop of Jeruſalem, Philaſtrius, Sulpitius, Proſper, Maximus Taurinenſis, and Hegeſippus junior, place this victory of Peter in the time of Nero. Indeed the antienter tradition was, that Peter came to Rome in the days of this emperor; as may be ſeen in Lactantius (e). Chryſoſtom (f) tells us, that the apoſtles continued long in Judea; and that then, being driven out by the Jews, they went to the Gentiles. This diſperſion was in the firſt year of the Jewiſh war; when the Jews, as Joſephus tells us, began to be tumultuous and violent in all places. For all agree, that the apoſtles were diſperſed into ſeveral regions at once; and Origen (g) has ſet down the time; telling us, that in the beginning of the Judaic war, the apoſtles and diſciples of our Lord were ſcattered into all nations; Thomas into Parthia; Andrew into Scythia; John into Aſia; and Peter firſt into Aſia, where he preached to the diſperſion, and thence into Italy. Dionyſius Corinthius (h) ſaith, that Peter went from Aſia by Corinth to Rome; and all antiquity agree that Peter and Paul were martyred there in the end of Nero's reign. Mark went with Timothy to Rome (2 Tim. iv. 11. Coloſſ. iv. 10.) Sylvanus was Paul's aſſiſtant; and by the companions of Peter, mentioned in his firſt epiſtle, we may know that he wrote from Rome; and antiquity generally agree, that in this epiſtle he underſtood Rome by Babylon. His ſecond epiſtle was writ to the ſame diſperſed ſtrangers with the firſt (2 Pet. iii. 1.) and therein he ſaith, that Paul had writ of the ſame things to them, and alſo in his other epiſtles (ver. 15, 16.) Now as there is no epiſtle of Paul to

(a) Apol. ad Antonin. Pium.
(b) Hæreſ. l. 1. c. 20. Vide etiam Tertullianum, Apol. c. 13.
(c) Euſeb. Chron.
(d) Cyril. Catech. 6. Philaſtr. de hæreſ. cap. 30. Sulp. Hiſt. l. 2. Proſper de promiſſ. dimid. temp. cap. 13. Maximus ſerm. 5. in Natal. Apoſt. Hegeſip. l. 2. c. 2.
(e) Lactant. de mortib. Perſec. c. 2.
(f) Hom. 70. in Mart.
(g) c. 22.
(h) Apud Euſeb. Eccl. Hiſt. l. 2. c. 25.
(i) Euſeb. Hiſt. l. 2. c. 25.

CHAPTER FIRST.

to these strangers besides that to the Hebrews, so in this epistle (chap. x. 11, 12.) we find at large all those things which Peter had been speaking of, and refers to; particularly the passing away of the old heavens and earth, and establishing an inheritance immoveable, with an exhortation to grace, because God, to the wicked, "is a consuming fire" (Heb. xii. 25, 26, 28, 29.)

VI. Having determined the time of writing the Apocalypse, I need not say much about the truth of it; since it was in such request with the first ages, that many endeavoured to imitate it, by feigning Apocalypses under the apostles names; and the apostles themselves, as I have just now shewed, studied it, and used its phrases; by which means the style of the epistle to the Hebrews became more mystical, than that of Paul's other epistles; and the style of John's gospel more figurative and majestical, than that of the other gospels. I do not find that Christ was called the Word of God, in any book of the New Testament written before the Apocalypse; and therefore am of opinion, the language was taken from this prophecy, as were also many other phrases in this gospel, such as those of Christ's being "the "Light, which enlightens the world; the Lamb of God, which "taketh away the sins of the world; the Bridegroom; he that "testifieth; he that came down from heaven; the Son of God, "&c." Justin Martyr, who within thirty years after John's death became a Christian, writes expressly, that "a certain man "among the Christians, whose name was John, one of the "twelve apostles of Christ, in the revelation which was shewed "him, prophesied, that those who believed in Christ should live "a thousand years at Jerusalem." And a few lines before he saith: "But I, and as many as are Christians, in all things "right in their opinions, believe both that there shall be a re-"surrection of the flesh, and a thousand years life at Jerusalem "built, adorned and enlarged." Which is as much as to say, that all true Christians in that early age received this prophecy: for in all ages, as many as believed the thousand years, received the Apocalypse as the foundation of their opinion: and I do not know one instance to the contrary. Papias bishop of Hierapolis,

polis, a man of the apostolic age, and one of John's own disciples, did not only teach the doctrine of the thousand years, but also (a) asserted the Apocalypse as written by divine inspiration. Melito, who flourished next after Justin (b), wrote a commentary upon this prophecy; and he, being bishop of Sardis, one of the seven churches, could neither be ignorant of their tradition about it, nor impose upon them. Irenæus, who was contemporary with Melito, wrote much upon it; and said, that "the number 666 was in all the antient and approved copies; "and that he had it also confirmed to him, by those who had "seen John face to face;" meaning, no doubt, his master Polycarp for one. At the same time Theophilus (c) bishop of Antioch asserted it, and so did Tertullian, Clemens Alexandrinus, and Origen, soon after; and their contemporary Hippolytus the Martyr, Metropolitan of the Arabians (d), wrote a commentary upon it. All these were antient men, flourishing within a hundred and twenty years after John's death, and of greatest note in the churches of those times. Soon after did Victorinus Pictaviensis write another commentary upon it; and he lived in the reign of Diocletian. This may surely suffice to shew, how the Apocalypse was received and studied in the first ages: and I do not indeed find any other book of the New Testament so strongly attested, or commented upon so early as this. The prophecy said: "Blessed is he that readeth, and they that hear the words "of this prophecy, and keep the things which are written "therein." This animated the first Christians to study it so much, till the difficulty made them remit, and comment more upon the other books of the New Testament. This was the fate of the Apocalypse, till the thousand years being misunderstood, brought a prejudice against it: and Dionysius of Alexandria, by noting how it abounded with barbarisms, that is with Hebraisms, promoted the prejudice so as to cause many Greeks in the fourth century to doubt of the book. But whilst the Latins, and a great part of the Greeks, always retained the book, and the rest doubted only out of prejudice; it makes nothing against its authority.

AGE OF THE APOCALYPSE.

[a] Arethas in Præem. comment. in Apoc.

[b] Euseb. Hist. l. 4. cap. 26. Hieron.

[c] Euseb. Hist. l. 4. c. 24.

[d] Hieron.

VII. This

CHAPTER FIRST.

VII. This prophecy is called the revelation, with reſpect to the ſcripture of truth, which Daniel (a) was commanded to ſhut up and ſeal, till the time of the end. Daniel ſealed it until the time of the end; and until that time comes, the Lamb is opening the ſeals: and afterwards the two witneſſes prophecy out of it a long time in ſack-cloth, before they aſcend up to heaven in a cloud. All which is as much as to ſay, that theſe prophecies of Daniel and John ſhould not be underſtood till the time of the end: but then ſome ſhould propheſy out of them in an afflicted and mournful ſtate for a long time, and that but darkly, ſo as to convert but few. But in the very end, the prophecy ſhould be ſo far interpreted as to convince many. "Then," ſaith Daniel, "many ſhall run to and fro, and knowledge ſhall be en-"creaſed." For the goſpel muſt be preached in all nations before the great tribulation, and end of the world. The palm-bearing multitude, which come out of this great tribulation, cannot be innumerable out of all nations, unleſs they be made ſo by the preaching of the goſpel before it comes. There muſt be a ſtone cut out of a mountain without hands, before it can fall upon the toes of the image, and become a great mountain and fill the earth. An angel muſt fly through the midſt of heaven, with the everlaſting goſpel, to preach to all nations; before Babylon falls, and the Son of Man reaps his harveſt. The two prophets muſt aſcend up to heaven in a cloud, before the kingdoms of this world become the kingdoms of Chriſt. It is therefore a part of this prophecy, that it ſhould not be underſtood before the laſt age of the world; and therefore it makes for the credit of the prophecy, that it is not yet underſtood. But if the laſt age, the age of opening theſe things, be now approaching, as by the great ſucceſſes of late interpreters it ſeems to be, we have more encouragement than ever to look into theſe things. If the general preaching of the goſpel be approaching, it is to us and our poſterity that thoſe words mainly belong (b): "In the time of the end the wiſe ſhall underſtand, but none of "the wicked ſhall underſtand.—(c) Bleſſed is he that readeth, "and they that hear the words of this prophecy, and keep thoſe "things which are written therein."

[a] Dan. x. 21. xii. 4, 9.

[b] Dan. xii. 4, 10.

[c] Apoc. i. 3.

The

AGE OF THE APOCALYPSE.

VIII. The folly of interpreters hath been, to foretell times and things by this prophecy, as if God deſigned to make them prophets. By this raſhneſs they have not only expoſed themſelves, but brought the prophecy alſo into contempt. The deſign of God was much otherwiſe. He gave this, and the prophecies of the Old Teſtament, not to gratify mens' curioſities by enabling them to foreknow things; but that, after they were fulfilled, they might be interpreted by the event, and his own Providence, not the interpreters, be then manifeſted thereby to the world. For the event of things, predicted many ages before, will then be a convincing argument that the world is governed by Providence. For as the few and obſcure prophecies concerning Chriſt's firſt coming were for ſetting up the Chriſtian religion, which all nations have ſince corrupted; ſo the many and clear prophecies concerning the things to be done at Chriſt's ſecond coming, are not only for predicting, but alſo for effecting a recovery and re-eſtabliſhment of the long-loſt truth, and ſetting up a kingdom wherein dwells righteouſneſs. The event will prove the Apocalypſe; and this prophecy, thus proved and underſtood, will open the old prophets, and all together will make known the true religion, and eſtabliſh it. For he that will underſtand the old prophets, muſt begin with this; but the time is not yet come for underſtanding them perfectly, becauſe the main revolution predicted in them is not yet come to paſs. "In the days "of the voice of the ſeventh angel, when he ſhall begin to "ſound, the myſtery of God ſhall be finiſhed, as he hath de-"clared to his ſervants the prophets: and then the kingdoms of "this world ſhall become the kingdoms of our Lord and his "Chriſt, and he ſhall reign for ever" (Apoc. x. 7. xi. 15.) There is already ſo much of the prophecy filled, that as many as will take pains in this ſtudy, may ſee ſufficient inſtances of God's providence: but then the ſignal revolutions predicted by all the holy prophets, will at once both turn mens' eyes upon conſidering the predictions, and plainly interpret them. Till then we muſt content ourſelves with interpreting what hath been already fulfilled.

CHAPTER FIRST.

IX. Amongſt the interpreters of the laſt age there is ſcarce one of note who hath not made ſome diſcovery worth knowing; and thence, it ſeems, one may gather that God is about opening theſe myſteries. The ſucceſs of others put me upon conſidering it; and if I have done any thing which may be uſeful to following writers, I have my deſign.

CHAP. II.

Of the relation which the Apocalypſe of John hath to the book of the Law of Moſes, and to the worſhip of God in the temple.

THE Apocalypſe of John is written in the ſame ſtyle and language with the prophecies of Daniel, and hath the ſame relation to them which they have to one another, ſo that all of them together make but one complete prophecy; and in like manner it conſiſts of two parts, an introductory prophecy, and an interpretation thereof.

II. The prophecy is diſtinguiſhed into ſeven ſucceſſive parts, by the opening of the ſeven ſeals of the book which Daniel was commanded to ſeal up: and hence it is called the Apocalypſe, or Revelation of Jeſus Chriſt. The time of the ſeventh ſeal is ſub-divided into eight ſucceſſive parts by the ſilence in heaven for half an hour, and the ſounding of ſeven trumpets ſucceſſively: and the ſeventh trumpet ſounds to the battle of the great day of God Almighty, whereby the kingdoms of this world become the kingdoms of the Lord and of his Chriſt; and thoſe are deſtroyed, that deſtroyed the earth.

III. The

III. The interpretation begins with the words, "And the temple of God was opened in heaven, and there was ſeen in his temple the ark of his teſtament:" and it continues to the end of the prophecy. The temple is the ſcene of the viſions, and the viſions in the temple relate to the feaſt of the ſeventh month: for the feaſts of the Jews were typical of things to come. The paſſover related to the firſt coming of Chriſt, and the feaſts of the ſeventh month to his ſecond coming: his firſt coming being therefore over before this prophecy was given, the feaſts of the ſeventh month are here only alluded unto. SCENE OF THE VISIONS.

IV. On the firſt day of that month, in the morning, the high-prieſt dreſſed the lamps: and this is alluded unto in the firſt viſion; where the Son of Man, in the habit of the high-prieſt, appears in or over-againſt the midſt of the ſeven candleſticks, with ſeven ſtars in his right hand, which are the ſeven lamps, appearing like a rod of ſeven ſtars, as it were, in his right-hand, while he dreſſes them: and this dreſſing is performed by the ſending ſeven epiſtles to the angels of the ſeven churches, repreſented by the ſeven candleſticks. Theſe epiſtles contain admonitions againſt the approaching apoſtacy, and therefore relate to the times when the apoſtacy began to work ſtrongly, and before it prevailed. It began to work in the apoſtles days, and was to continue working till the man of ſin ſhould be revealed. It began to work in the diſciples of Simeon, Menander, Carpocrates, Cerinthus, and ſuch ſorts of men as had imbibed the metaphyſical philoſophy of the Gentiles and Cabaliſtical Jews, and were thence called Gnoſticks. John calls them Antichriſts, ſaying, that in his days there were many Antichriſts. But theſe being condemned by the apoſtles, and their immediate diſciples, put the churches in no danger during the opening of the firſt four ſeals. The viſions at the opening of theſe ſeals relate only to the civil affairs of the heathen Roman empire. So long the apoſtolic traditions prevailed, and preſerved the church in its purity: and therefore the affairs of the church do not begin to be conſidered in this prophecy before the opening of the fifth ſeal. She began then to decline, and to want admonitions; and therefore is

CHAPTER SECOND.

admonished by these epistles, till the apostacy prevailed and took place, which was at the opening of the seventh seal. The admonitions therefore in these seven epistles relate to the state of the church in the times of the fifth and sixth seals. At the opening of the fifth seal, the church is purged from hypocrites by a great persecution. At the opening of the sixth, that which letted is taken out of the way, namely, the heathen Roman empire. At the opening of the seventh, the man of sin is revealed. And to these times the seven epistles relate.

V. The seven angels, to whom these epistles were written, answer to the seven Amarc-holim, who were priests and chief officers of the temple, and had jointly the keys of the gates of the temple, with those of the treasuries, and the direction, appointment, and oversight of all things in the temple.

VI. After the lamps were dressed, John saw the door of the temple opened; and by the voice as it were of a trumpet, was called up to the eastern gate of the great court, to see the visions: "and behold a throne was set," viz. the mercy-seat upon the ark of the testament, which the Jews respected as the throne of God between the cherubims (Exod. xxv. 2. Psal. xcix. 1.) "And he that sat on it was to look upon like Jasper and "Sardine stone," that is, of an olive colour, the people of Judea being of that colour. And, the sun being then in the east, "a "rainbow was about the throne;" the emblem of glory. "And "round about the throne were four and twenty seats;" answering to the chambers of the four and twenty princes of the priests, twelve on the south side, and twelve on the north side of the priest's court. "And upon the seats were four and twenty elders "sitting, clothed in white rayment, with crowns on their heads;" representing the princes of the four and twenty courses of the priests clothed in linen. "And out of the throne proceeded light-"enings, and thunderings, and voices," viz. the flashes of the fire upon the altar at the morning-sacrifice, and the thundering voices of those that sounded the trumpets, and sung at the eastern gate of the priests court; for these being between John and the throne appeared to him as proceeding from the throne. "And "there were seven lamps of fire burning [in the temple] before "the

"the throne, which are the seven spirits of God," or angels of the seven churches, represented in the beginning of this prophecy by seven stars. "And before the throne was a sea of glass clear "as crystal;" the brazen sea between the porch of the temple and the altar, filled with clear water. "And in the midst of "the throne, and round about the throne, were four beasts full "of eyes before and behind:" that is, one beast before the throne and one behind it, appearing to John as in the midst of the throne, and one on either side in the circle about it, to represent by the multitude of their eyes the people standing in the four sides of the peoples' court. "And the first beast was "like a lion, and the second was like a calf, and the third had "the face of a man, and the fourth was like a flying eagle." The people of Israel in the wilderness encamped round about the tabernacle, and on the east side were three tribes under the standard of Judah, on the west were three tribes under the standard of Ephraim, on the south were three tribes under the standard of Reuben, and on the north were three tribes under the standard of Dan (Numb. ii.) And the standard of Judah, was a Lion; that of Ephraim, an Ox; that of Reuben, a Man; and that of Dan, an Eagle; as the Jews affirm. Whence were framed the hieroglyphicks of Cherubims and Seraphims, to represent the people of Israel. A Cherubim had one body with four faces; the faces of a lion, an ox, a man, and an eagle, looking to the four winds of heaven, without turning about, as in Ezekiel's vision, chap. i. And four Seraphims had the same four faces with four bodies, one face to every body. The four beasts are therefore four Seraphims standing in the four sides of the people's court; the first in the eastern side with the head of a lion, the second in the western side with the head of an ox, the third in the southern side with the head of a man, the fourth in the northern side with the head of an eagle: and all four signify together the twelve tribes of Israel, out of whom the hundred forty and four thousand were sealed (Apoc. vii. 4.) "And the four beasts had each of them six wings," two to a tribe, in all twenty and four wings; answering to the twenty and four stations of the people. "And they were full of eyes "within,"

SCENE OF THE VISIONS.

CHAPTER SECOND.

"within," or under their wings. "And they reſt not day and "night," or at the morning and evening ſacrifices, "ſaying, ho-"ly, holy, holy Lord God Almighty, which was, and is, and "is to come." Theſe animals are therefore the Seraphims, which appeared to Iſaiah (*) in a viſion like this of the Apocalypſe. For there alſo the Lord ſat upon a throne in the temple; and the Seraphims each with ſix wings cried, Holy, holy, holy Lord God of hoſts. "And when thoſe animals give glory and "honour and thanks to him that ſitteth upon the throne, who "liveth for ever and ever, the four and twenty elders [go into the "temple] and there fall down before him that ſitteth on the "throne, and worſhip him that liveth for ever and ever, and "caſt their crowns before the throne, ſaying, Thou art worthy, "O Lord, to receive glory and honour and power: for thou "haſt created all things, and for thy pleaſure they are and were "created." At the morning and evening ſacrifices, ſo ſoon as the ſacrifice was laid upon the altar, and the drink-offering began to be poured out, the trumpets ſounded, and the Levites ſang by courſe three times; and every time when the trumpets ſounded, the people fell down and worſhiped. Three times therefore did the people worſhip; to expreſs which number, the beaſts cry, holy, holy, holy: and the ſong being ended, the people prayed ſtanding, till the ſolemnity was finiſhed. In the mean time the prieſts went into the temple, and there fell down before him that ſat upon the throne, and worſhiped.

* Chap. vi.

VII. "And John ſaw, in the right hand of him that ſat upon the "throne, a book written within and on the backſide, ſealed with "ſeven ſeals," viz. the book which Daniel was commanded to ſeal up, and which is here repreſented by the prophetic book of the law laid up on the right ſide of the ark, as it were in the right hand of him that ſat on the throne: for the feſtivals and ceremonies of the law preſcribed to the people in this book, adumbrated thoſe things which were predicted in the book of Daniel; and the writing within and on the backſide of this book, relates to the ſynchronal prophecies. "(b) And none was "found worthy to open the book but the Lamb of God. And "lo, in the midſt of the throne and of the four beaſts, and in

"the midſt of the elders," that is, at the foot of the altar, "ſtood a lamb as it had been ſlain," the morning ſacrifice; "having ſeven horns," which are the ſeven churches, "and ſe-"ven eyes, which are the ſeven ſpirits of God ſent forth into "all the earth. And he came, and took the book out of the "hand of him that ſat upon the throne: and when he had "taken the book, the four beaſts and four and twenty elders "fell down before the Lamb, having every one of them harps, "and golden vials full of odours, which are the prayers of ſaints. "And they ſung a new ſong, ſaying, Thou art worthy to take "the book, and to open the ſeals thereof: for thou waſt ſlain, "and haſt redeemed us to God by thy blood out of every kin-"dred, and tongue, and people, and nation; and haſt made us, "unto our God, kings and prieſts, and we ſhall reign on the "earth." The beaſts and elders therefore repreſent the primitive Chriſtians of all nations; and the worſhip of theſe Chriſtians in their churches is here repreſented, under the form of worſhiping God and the Lamb in the temple: God for his benefaction in creating all things, and the Lamb for his benefaction in redeeming us with his blood: God as ſitting upon the throne and living for ever, and the Lamb as exalted above all by the merits of his death. "And I heard," ſaith John, "the "voice of many angels round about the throne, and the beaſts "and the elders: and the number of them was ten thouſand "times ten thouſand, and thouſands of thouſands; ſaying with "a loud voice, Worthy is the Lamb that was ſlain to receive "power, and riches, and wiſdom, and ſtrength, and honour, and "glory, and bleſſing. And every creature which is in heaven, "and on the earth, and under the earth, and ſuch as are in the "ſea, and all that are in them, heard I, ſaying, Bleſſing, ho-"nour, glory, and power, be unto him that ſitteth upon the "throne, and unto the Lamb for ever and ever. And the four "beaſts ſaid, Amen. And the four and twenty elders fell down "and worſhiped him that liveth for ever and ever." This was the worſhip of the primitive Chriſtians.

SCENE OF THE VISIONS.

VIII. It was the cuſtom for the high-prieſt, ſeven days before the faſt of the ſeventh month, to continue conſtantly in the tem-

CHAPTER SECOND.

ple, and ſtudy the book of the law, that he might be perfect in it againſt the day of expiation; wherein the ſervice, which was various and intricate, was wholly to be performed by himſelf; part of which ſervice was reading the law to the people: and to promote his ſtudying it, there were certain prieſts appointed by the Sanhedrim to be with him thoſe ſeven days in one of his chambers in the temple, and there to diſcourſe with him about the law, and read it to him, and put him in mind of reading and ſtudying it himſelf. And this his opening and reading the law thoſe ſeven days, is alluded unto in the Lamb's opening the ſeals. Conceive that thoſe ſeven days begin in the evening before each day) for the Jews began their day in the evening) and that the ſolemnity of the faſt begins in the morning of the ſeventh day.

IX. The ſeventh ſeal was therefore opened on the day of expiation, and then "there was ſilence in heaven for half an hour. "And an angel [the high-prieſt] ſtood at the altar, having a "golden cenſer; and there was given him much incenſe, that "he ſhould offer it with the prayers of all ſaints, upon the "golden altar which was before the throne." The cuſtom was on other days, for one of the prieſts to take fire from the great altar in a ſilver cenſer; but on this day, for the high-prieſt to take fire from the great altar in a golden cenſer: and when he was come down from the great altar, he took incenſe from one of the prieſts who brought it to him, and went with it to the golden altar: and while he offered the incenſe, the people prayed without in ſilence, which is the ſilence in heaven for half an hour. When the high-prieſt had laid the incenſe on the altar, he carried a cenſer of it burning in his hand, into the moſt holy place before the ark. "And the ſmoke of the incenſe, with the "prayers of the ſaints, aſcended up before God out of the an-"gel's hand." On other days there was a certain meaſure of incenſe for the golden altar: on this day there was a greater quantity for both the altar and the moſt holy place, and therefore it is called much incenſe. After this "the angel took the cen-"ſer, and filled it with fire from the great altar, and caſt it into "the earth; that is, by the hands of the prieſts who belong to "his

his myſtical body, he caſt it to the earth without the temple, for burning the goat which was the Lord's lot. "And [at this "and other concomitant ſacrifices, until the evening-ſacrifice "was ended] there were voices, and thunderings, and lighten-"ings, and an earthquake;" that is, the voice of the high-prieſt reading the law to the people, and other voices and thunderings from the trumpets and temple-muſick at the ſacrifices, and lightenings from the fire of the altar. SCENE OF THE VISIONS.

X. The ſolemnity of the day of expiation being finiſhed, the ſeven angels ſound their trumpets at the great ſacrifices of the ſeven days of the feaſt of tabernacles; and at the ſame ſacrifices, the ſeven thunders utter their voices; which are the muſick of the temple, and ſinging of the Levites, intermixed with the ſoundings of the trumpets: and the ſeven angels pour out their vials of wrath, which are the drink-offerings of thoſe ſacrifices.

XI. When ſix of the ſeals were opened, John ſaid: "And af-"ter theſe things (a)," that is, after the viſions of the fixth ſeal, "I ſaw four angels ſtanding on the four corners of the earth, "holding the four winds of the earth, that the wind ſhould not "blow on the earth, nor on the ſea, nor on any tree. And I "ſaw another angel aſcending from the Eaſt, having the ſeal of "the living God: and he cried with a loud voice to the four an-"gels, to whom it was given to hurt the earth and the ſea, ſay-"ing, Hurt not the earth, nor the ſea, nor the trees, till we "have ſealed the ſervants of our God in their foreheads." This ſealing alludes to a tradition of the Jews, that upon the day of expiation all the people of Iſrael are ſealed up in the books of life and death. For the Jews in their Talmud (b) tell us, that in the beginning of every new year, or firſt day of the month Tiſri, the ſeventh month of the ſacred year, three books are opened in judgment; the book of life, in which the names of thoſe are written who are perfectly juſt; the book of death, in which the names of thoſe are written who are atheiſts, or very wicked; and a third book, of thoſe whoſe judgment is ſuſpended till the day of expiation, and whoſe names are not written in the book of life or death before that day. The firſt ten

(a) Apoc. vii.

(b) Buxtorf in Synagogâ Judaicâ, c. 18, 21.

CHAPTER SECOND.

days of this month they call the penitential days; and all theſe days they faſt and pray very much, and are very devout, that on the tenth day their ſins may be remitted, and their names may be written in the book of life; which day is therefore called the day of expiation. And upon this tenth day, in returning home from the ſynagogues, they ſay to one another, "God the Crea-"tor ſeal you to a good year." For they conceive that the books are now ſealed up, and that the ſentence of God remains unchanged henceforward to the end of the year. The ſame thing is ſignified by the two goats, upon whoſe foreheads the high-prieſt yearly, on the day of expiation, lays the two lots inſcribed, "For God, and For Azazel;" God's lot ſignifying the people who are ſealed with the name of God in their foreheads; and the lot Azazel, which was ſent into the wilderneſs, repreſenting thoſe who receive the mark and name of the beaſt, and go into the wilderneſs with the great Whore.

XII. The ſervants of God being therefore ſealed in the day of expiation, conceive that this ſealing is ſynchronal to the viſions which appear upon opening the ſeventh ſeal; and that when the Lamb had opened ſix of the ſeals, and ſeen the viſions relating to the inſide of the ſixth, he looked on the backſide of the ſeventh leaf, and then ſaw "the four angels holding the "four winds of heaven, and another angel aſcending from the "Eaſt with the ſeal of God." Conceive alſo, that the angels which held the four winds were the firſt four of the ſeven angels, who upon opening the ſeventh ſeal were ſeen ſtanding before God; and that upon their holding the winds, there was ſilence in heaven for half an hour; and that while the ſervants of God were ſealing, the angel with the golden cenſer offered their prayers with incenſe upon the golden altar, and read the law: and that ſo ſoon as they were ſealed, the winds hurt the earth at the ſounding of the firſt trumpet, and the ſea at the ſounding of the ſecond; theſe winds ſignifying the wars, to which the firſt four trumpets ſounded. For as the firſt four ſeals are diſtinguiſhed from the three laſt, by the appearance of four horſe-men towards the four winds of heaven; ſo the wars of the firſt four trumpets are diſtinguiſhed from thoſe of the three

three laſt, by repreſenting theſe by four winds, and the others by three great woes.

SCENE OF THE VISIONS.

XIII. In one of Ezekiel's viſions, when the Babylonian captivity was at hand, "ſix men appeared with ſlaughter-weapons; and "a ſeventh (a), who appeared among them clothed in white "linen and a writer's ink-horn by his ſide, is commanded to go "through the midſt of Jeruſalem, and ſet a mark upon the "foreheads of the men that ſigh and cry for all the abomina-"tions done in the midſt thereof." And then the ſix men, like the angels of the firſt ſix trumpets, are commanded to ſlay thoſe men who are not marked. Conceive therefore that the hundred forty and four thouſand are ſealed, to preſerve them from the plagues of the firſt ſix trumpets; and that at length, by the preaching of the everlaſting goſpel, they grow into a great multitude, which no man could number, of all nations, and kindreds, and people and tongues: and at the ſounding of the ſeventh trumpet come out of the great tribulation with palms in their hands: the kingdoms of this world, by the war to which that trumpet ſounds, becoming the kingdoms of God and his Chriſt. For the ſolemnity of the great Hoſannah was kept by the Jews upon the ſeventh or laſt day of the feaſt of tabernacles; the Jews upon that day carrying palms in their hands, and crying Hoſannah.

XIV. After ſix of the angels, anſwering to the ſix men with ſlaughter-weapons, had ſounded their trumpets; the Lamb, in the form of a mighty angel, came down from heaven clothed with a cloud, and a rainbow was upon his head, and his face was as it were the ſun, and his feet as pillars of fire, the ſhape in which Chriſt appeared in the beginning of this prophecy; and he had in his hand a little book open, the book which he had newly opened; for he received but one book from him that ſitteth upon the throne, and he alone was worthy to open and look on this book. "And he ſet his right foot upon the ſea, "and his left foot on the earth, and cried with a loud voice, as "when a lion roared." It was the cuſtom for the high-prieſt on the day of expiation, to ſtand in an elevated place in the people's court, at the eaſtern gate of the prieſts court, and read the law

CHAPTER SECOND.

to the people, while the heifer and the goat, which was the Lord's lot, were burning without the temple. We may therefore ſuppoſe him ſtanding in ſuch a manner, that his right foot may appear to John as it were ſtanding on the ſea of glaſs, and his left foot on the ground of the houſe; and that he cried with a loud voice, in reading the law on the day of expiation. "And "when he had cried, ſeven thunders uttered their voices." Thunders are the voice of a cloud, and a cloud ſignifies a multitude; and this multitude may be the Levites, who ſang with thundering voices, and played with muſical inſtruments at the great ſacrifices, on the ſeven days of the feaſt of tabernacles: at which times the trumpets alſo ſounded. For the trumpets ſounded, and the Levites ſang alternately, three times at every ſacrifice. The prophecy therefore of the ſeven thunders is nothing elſe than a repetition of the prophecy of the ſeven trumpets in another form. "And the angel which I ſaw ſtand upon the ſea and up-"on the earth, lifted up his hand to heaven, and ſware by him "that liveth for ever and ever, that after the ſeven thunders "there ſhould be time no longer; but in the days of the voice "of the ſeventh angel, when he ſhall begin to ſound, the myſ-"tery of God ſhould be finiſhed, as he hath declared to his ſer-"vants the prophets." The voices of the thunders therefore laſt to the end of this world, and ſo do thoſe of the trumpets.

XV. "And the voice which I heard from heaven," ſaith John, "ſpoke unto me again and ſaid, Go and take the little book, &c. "And I took the little book out of the angel's hand, and ate it "up; and it was in my mouth ſweet as honey, and as ſoon as I "had eaten it, my belly was bitter. And he ſaid unto me, "Thou muſt propheſy again before many people's, and nations, "and tongues, and kings." This is an introduction to a new prophecy, to a repetition of the prophecy of the whole book; and alludes to Ezekiel's eating a roll or book ſpread open before him, and written within and without, full of lamentations and mourning and woe, but ſweet in his mouth. Eating and drinking ſignify acquiring and poſſeſſing; and eating the book is becoming inſpired with the prophecy contained in it. It implies being inſpired, in a vigorous and extraordinary manner, with the prophecy

SCENE OF THE VISIONS.

prophecy of the whole book, and therefore ſignifies a lively repetition of the whole prophecy by way of interpretation, and begins not till the firſt prophecy, that of the ſeals and trumpets, is ended. It was ſweet in John's mouth; and therefore begins not with the bitter prophecy of the Babylonian captivity, and the Gentiles being in the outward court of the temple, and treading the holy city under foot, and the propheſying of the two witneſſes in ſackcloth, and their ſmiting the earth with all plagues, and being killed by the beaſt: but ſo ſoon as the prophecy of the trumpets is ended, it begins with the ſweet prophecy of the glorious Woman in heaven, and the victory of Michael over the dragon; and after that, it is bitter in John's belly, by a large deſcription of the times of the great apoſtacy.

XV. "And the angel ſtood, upon the earth and ſea, ſaying, "Riſe and meaſure the temple of God and the altar, and them "that worſhip therein;" that is, their courts with the buildings thereon, viz. the ſquare court of the temple called the ſeparate place, and the ſquare court of the altar called the prieſts court, and the court of them that worſhip in the temple called the new court: "But the [great] court which is without the temple leave "out, and meaſure it not, for it is given to the Gentiles, and "the holy city ſhall they tread under foot forty and two months." This meaſuring hath reference to Ezekiel's meaſuring the temple of Solomon. There the whole temple, including the outward court, was meaſured, to ſignify that it ſhould be rebuilt in the latter days: here the courts of the temple and altar, and they who worſhip therein, are only meaſured, to ſignify the building of a ſecond temple, for thoſe that are ſealed out of all the twelve tribes of Iſrael, and worſhip in the inward court of ſincerity and truth: but John is commanded to leave out the outward court, or outward form of religion and church-government, becauſe it is given to the Babylonian Gentiles. For the glorious woman in heaven, the remnant of whoſe ſeed kept the commandments of God, and had the teſtimony of Jeſus, continued the ſame woman in outward form after her flight into the wilderneſs, whereby ſhe quitted her former ſincerity and piety, and became the great whore. She loſt her chaſtity, but kept her

CHAPTER SECOND.

her outward form and ſhape. And while the Gentiles tread the holy city under foot, and worſhip in the outward court, the two witneſſes, repreſented perhaps by the two feet of the angel ſtanding on the ſea and earth, propheſied againſt them, and "had power," like Elijah and Moſes, "to conſume their enemies "with fire proceeding out of their mouth, and to ſhut heaven, "that it rain not in the days of their prophecy, and to turn the "waters into blood, and to ſmite the earth with all plagues as "often as they will;" that is, with the plagues of the trumpets and vials of wrath; and at length they are ſlain, riſe again from the dead, and aſcend up to heaven in a cloud; and then the ſeventh trumpet ſounds to the day of judgment.

XVII. The prophecy being finiſhed, John is inſpired anew by the eaten book, and begins the interpretation thereof with theſe words: "And the temple of God was opened in heaven, and "there was ſeen in his temple the ark of the teſtament." By the ark, we may know that this was the firſt temple; for the ſecond temple had no ark. "And there were lightenings, and "voices, and thunderings, and an earthquake, and great hail." Theſe anſwer to the wars in the Roman empire, during the reign of the four horſemen, who appeared upon opening the firſt four ſeals. "And there appeared a great wonder in hea-"ven, a woman clothed with the ſun." In the prophecy, the affairs of the church begin to be conſidered at the opening of the fifth ſeal; and in the interpretation, they begin at the ſame time with the viſion of the church in the form of a woman in heaven: there ſhe is perſecuted, and here ſhe is pained in travail. The interpretation proceeds down firſt to the ſealing of the ſervants of God, and marking the reſt with the mark of the beaſt; and then to the day of judgment, repreſented by a harveſt and vintage. Then it returns back to the times of opening the ſeventh ſeal, and interprets the prophecy of the ſeven trumpets by the pouring out of ſeven vials of wrath. The angels who pour them out, come out of the temple of the tabernacle; that is, out of the ſecond temple, for the tabernacle had no outward court. Then it returns back again to the times of meaſuring the temple and altar, and of the Gentiles worſhiping in

in the outward court, and of the beaſt killing the witneſſes in the ſtreets of the great city; and interprets theſe things by the viſion of a woman ſitting on the beaſt, drunken with the blood of the ſaints; and proceeds in the interpretation downwards to the fall of the great city and the day of judgment.

XVIII. The whole prophecy of the book, repreſented by the book of the law, is therefore repeated, and interpreted in the viſions which follow thoſe of ſounding the ſeventh trumpet, and begin with that of the temple of God opened in heaven. Only the things, which the ſeven thunders uttered, were not written down, and therefore not interpreted.

CHAP. III.

Of the relation which the prophecy of John hath to thoſe of Daniel; and of the ſubject of the prophecy.

THE whole ſcene of ſacred prophecy is compoſed of three principal parts: the regions beyond Euphrates, repreſented by the two firſt beaſts of Daniel; the empire of the Greeks on this ſide of Euphrates, repreſented by the Leopard and by the He-Goat; and the empire of the Latins on this ſide of Greece, repreſented by the beaſt with ten horns. And to theſe three parts, the phraſes of the third part of the earth, ſea, rivers, trees, ſhips, ſtars, ſun, and moon, relate. I place the body of the fourth beaſt on this ſide of Greece, becauſe the three firſt of the four beaſts had their lives prolonged after their dominion was taken away, and therefore belong not to the body of the fourth. He only ſtamped them with his feet.

II. By

CHAPTER THIRD.

II. By the earth, the Jews underſtood the great continent of all Aſia and Africa, to which they had acceſs by land: and by the iſles of the ſea, they underſtood the places to which they ſailed by ſea, particularly all Europe: and hence in this prophecy the earth and ſea are put for the nations of the Greek and Latin empires.

III. The third and fourth beaſts of Daniel are the ſame with the Dragon and ten-horned Beaſt of John, but with this difference: John puts the dragon for the whole Roman empire, while it continued entire; becauſe it was entire when that prophecy was given: and the beaſt he conſiders not, till the empire became divided: and then he puts the dragon for the empire of the Greeks, and the beaſt for the empire of the Latins. Hence it is, that the dragon and beaſt have common heads and common horns: but the dragon hath crowns only upon his heads, and the beaſt only upon his horns; becauſe the beaſt and his horns reigned not before they were divided from the dragon: and when the dragon gave the beaſt his throne, the ten horns received power as kings, the ſame hour with the beaſt. The heads are ſeven ſucceſſive kings. Four of them were the four horſemen, which appeared at the opening of the firſt four ſeals. In the latter end of the ſixth head, or ſeal, conſidered as preſent in the viſions, it is ſaid, five of the ſeven kings are fallen, and one is, and another is not yet come; and the beaſt that was and is not, being wounded to death with a ſword, he is the eighth, and of the ſeven: he was therefore a collateral part of the ſeventh. The horns are the ſeven with thoſe of Daniel's fourth beaſt, deſcribed above.

IV. The four horſemen which appear at the opening of the firſt four ſeals, have been well explained by Mr. Mede; excepting that I had rather continue the third to the end of the reign of the three Gordians and Philip the Arabian, thoſe being kings from the South; and begin the fourth with the reign of Deciuſ, and continue it till the reign of Diocleſian. For the fourth horſeman "ſat upon a pale horſe, and his name was death; "and hell followed with him; and power was given them to "kill unto the fourth part of the earth, with the ſword, and "with

"with famine, and with the plague, and with the beaſts of the "earth," or armies of invaders and rebels: and ſuch were the times during all this interval. Hitherto the Roman empire continued in an undivided monarchical form, except rebellions; and ſuch it is repreſented by the four horſemen. But Diocleſian divided it between himſelf and Maximianus, A. C. 285; and it continued in that divided ſtate till the victory of Conſtantine the Great over Licinius, A. C. 323, which put an end to the heathen perſecutions ſet on foot by Diocleſian and Maximianus, and deſcribed at the opening of the fifth ſeal. But this diviſion of the empire was imperfect, the whole being ſtill under one and the ſame ſenate. The ſame victory of Conſtantine over Licinius, a heathen perſecutor, began the fall of the heathen empire, deſcribed at the opening of the ſixth ſeal: and the viſions of this ſeal continue till after the reign of Julian the apoſtate, he being a heathen emperor, and reigning over the whole Roman empire.

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

V. The affairs of the church begin to be conſidered at the opening of the fifth ſeal, as was ſaid above. Then ſhe is repreſented by a "woman in [the temple of] heaven, clothed with "the ſun [of righteouſneſs] and the moon [of Jewiſh ceremonies] "under her feet, and upon her head a crown of twelve ſtars (a)," relating to the twelve apoſtles and to the twelve tribes of Iſrael. When ſhe fled from the temple into the wilderneſs, ſhe left in the temple a "remnant of her ſeed, who kept the command-"ments of God, and had the teſtimony of Jeſus Chriſt (b);" and therefore before her flight ſhe repreſented the true primitive church of God, though afterwards ſhe degenerated like Aholah and Aholibah. In Diocleſian's perſecution "ſhe cried, travelling "in birth, and pained to be delivered (c)." And in the end of that perſecution, by the victory of Conſtantine over Maxentius, A. C. 312, "ſhe brought forth a man-child, ſuch a child as was to "rule all nations with a rod of iron, [a Chriſtian empire.] And "her child, [by the victory of Conſtantine over Licinius, A. C. "323] was caught up unto God and to his throne. And the wo-"man [by the diviſion of the Roman empire into the Greek and "Latin empires] fled [from the firſt temple] into the wilderneſs (d)," or

[a] Apoc. xii. 1.

[b] Apoc. xii. 17.

[c] Apoc. xii. 2.

[d] Apoc. xii. 5, 6.

CHAPTER THIRD.

or ſpiritually barren empire of the Latins, where ſhe is found afterwards ſitting upon the beaſt (a) and upon the ſeven mountains (b); and is called the great city which reigneth over the kings of the earth (c); that is, over the ten kings who give their kingdom to her beaſt.

[a] Apoc. xvii. 3. [b] —— 9. [c] —— 18.

VI. But before her flight there was war in heaven between Michael and the dragon, the Chriſtian and the heathen religions; and the dragon, "that old ſerpent, called the Devil and Satan, "who deceiveth the whole world, was caſt out to the earth, and "his angels were caſt out with him. And John heard a voice "in heaven, ſaying, Now is come ſalvation and ſtrength, and "the kingdom of our God, and the power of his Chriſt: for "the accuſer of our brethren is caſt down.—And they over-"came him by the blood of the Lamb, and by the word of "their teſtimony. And they loved not their lives unto the "death. Therefore rejoice, ye heavens, and ye that dwell in "them. Woe be to the inhabitants of the earth and ſea [or "people of the Greek and Latin empires] for the devil is come "down amongſt you, having great wrath, becauſe he knoweth "that he hath but a ſhort time (d)."

[d] Apoc. xii. 7—12.

VII. And when the dragon ſaw that he was caſt down from the Roman throne, and the man-child caught up thither, "he perſe-"cuted the woman which brought forth the man-child;" and to her, by the diviſion of the Roman empire between the cities of Rome and Conſtantinople, A. C. 330, "were given two wings of a "great eagle," the ſymbol of the Roman empire, "that ſhe might "flee [from the firſt temple] into the wilderneſs of Arabia, to her "place [at Babylon myſtically ſo called]." (e) And the ſerpent [by the diviſion of the ſame empire between the ſons of Conſtantine the Great, A. C. 337,] "caſt out of his mouth water as a flood [the "Weſtern empire] after the woman; that he might cauſe her to "be carried away by the flood. And the earth [or Greek em-"pire] helped the woman, and opened her mouth, and ſwallowed "up the flood (f), [by the victory of Conſtantius over Magnen-"tius, A. C. 353,] and thus the beaſt was wounded to death with "a ſword. And the dragon was wroth with the woman, [in the "reign of Julian the apoſtate, A. C. 361,] and [by a new diviſion "of

[e] Apoc. xii. 13, 14.

[f] Apoc. xii. 15—17.

"of the empire between Valentinian and Valens, A. C. 364,] went "from her [into the Eaſtern empire] to make war with the remnant "of her ſeed," (a) which ſhe left behind her when ſhe fled: and thus the beaſt revived. By the next diviſion of the empire, which was between Gratian and Theodoſius, A. C. 379, "the beaſt with "ten horns roſe out of the ſea (b), and the beaſt with two horns out "of the earth (c):" and by the laſt diviſion thereof, which was between the ſons of Theodoſius, A. C. 395, "the dragon gave the "beaſt his power and throne, and great authority." (d) And the ten horns "received power as kings, the ſame hour with the beaſt (e)."

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

[a] Apoc. xii. 17. [b] Apoc. xiii. 1. [c] Apoc. xiii. 11. [d] Apoc. xiii. 2. [e] Apoc. xvii. 12.

VIII. At length the woman arrived at her place of temporal as well as ſpiritual dominion upon the back of the beaſt, where ſhe is nouriſhed a time, and times, and half a time, from the face of the ſerpent; not in his kingdom, but at a diſtance from him. She is nouriſhed by the merchants of the earth, three times or years and an half, or 42 months, or 1260 days: and in theſe prophecies days are put for years. During all this time the beaſt acted, and ſhe ſat upon him; that is, reigned over him, and over the ten kings who gave their power and ſtrength, that is, their kingdom to the beaſt; and ſhe was drunken with the blood of the ſaints. By all theſe circumſtances ſhe is the eleventh horn of Daniel's fourth beaſt, who reigned with a look more ſtout than his fellows, and was of a different kind from the reſt, and had eyes and a mouth like the woman; and made war with the ſaints, and prevailed againſt them, and wore them out, and thought to change times and laws, and had them given into his hand, until a time, and times, and half a time. The characters of the woman, and little horn of the beaſt, agree perfectly. In reſpect to her temporal dominion, ſhe was a horn of the beaſt; in reſpect of her ſpiritual dominion, ſhe rode upon him in the form of a woman, and was his church, and committed fornication with the ten kings.

IX. The ſecond beaſt, which roſe up out of the earth, was the church of the Greek empire: for it had two horns like thoſe of the Lamb, and therefore was a church; and it ſpake as the dragon, and therefore was of his religion; and it roſe up out of the earth, and by conſequence in his kingdom. It is called alſo

CHAPTER THIRD.

the falſe prophet that wrought miracles before the firſt beaſt, by which he deceived them that received his mark, and worſhiped his image (a). When the dragon went from the woman to make war with the remnant of her ſeed; this beaſt, ariſing out of the earth, aſſiſted in that war, and cauſed the earth and them which dwell thereon to worſhip the authority of the firſt beaſt, whoſe mortal wound was healed, and to make an image to him; that is, to aſſemble a body of men like him in point of religion. And he had power to give life and authority to the image, ſo that it could both ſpeak, and by dictating, cauſe that all religious bodies of men, who could not worſhip the authority of the image, ſhould be myſtically killed. "And he cauſeth all men "to receive a mark in their right hand or in their forehead, "and that no man might buy or ſell ſave he that had the mark, "or the name of the beaſt, or the number of his name (b);" all the reſt being excommunicated by the beaſt with two horns. And his mark is ✝✝✝, and his name ΛΑΤΕΙΝΟΣ, and the number of his name 666 (c).

[a] Apoc. xix. 20.

[b] Apoc. xiii. 16, 17.

[c] —— 18.

X. Thus the beaſt, after he was wounded to death with a ſword and revived, was deified; as the heathens uſed to deify their kings after death; and had an image erected to him; and his worſhipers were initiated in this new religion, by receiving the mark or name of this new god, or the number of his name. By killing all that will not worſhip him and his image, the firſt temple, illuminated by the lamps of the ſeven churches, is demoliſhed, and a new temple built for them who will not worſhip him; and the outward court of this new temple, or outward form of a church, is given to the Gentiles, who worſhip the beaſt and his image: while they who will not worſhip him, are ſealed with the name of God in their foreheads, and retire into the inward court of this new temple. Theſe are the 144000 ſealed out of all the twelve tribes of Iſrael, and called the two Witneſſes, as being derived from the two wings of the woman while ſhe was flying into the wilderneſs, and repreſented by two of the ſeven candleſticks. Theſe appear to John in the inward court of the ſecond temple, ſtanding on Mount Sion with the Lamb, and as it were on the ſea of glaſs. Theſe are the ſaints of

of the moſt High, and the hoſt of heaven, and the holy people ſpoken of by Daniel, as worn out and trampled under foot, and deſtroyed in the latter times by the little horns of his fourth Beaſt and He-Goat.

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

XI. And while the Gentiles tread the holy city under foot, God gives power to his two Witneſſes, and they prophecy a thouſand two hundred and threeſcore days clothed in ſackcloth. They are called the two olive-trees, with relation to the two olive-trees, which in Zechary's viſion (chap. iv.) ſtand on either ſide of the golden candleſtick to ſupply the lamps with oil: and olive-trees, according to the apoſtle Paul, repreſent churches (Rom. xi.) They ſupply the lamps with oil, by maintaining teachers. They are alſo called two candleſticks; and candleſticks in this prophecy ſignify churches, the ſeven churches of Aſia being repreſented by ſeven candleſticks. Five of theſe churches were found faulty, and threatened if they did not repent; the other two were without fault; and ſo their candleſticks were fit to be placed in the ſecond temple. Theſe were the churches in Smyrna and Philadelphia. They were in a ſtate of tribulation and perſecution, and the only two of the ſeven in ſuch a ſtate: and ſo their candleſticks were fit to repreſent the churches in affliction in the times of the ſecond temple, and the only two of the ſeven that were fit. The two Witneſſes are not new churches: they are the poſterity of the primitive church, the poſterity of the two wings of the woman, and ſo are fitly repreſented by two of the primitive candleſticks. We may conceive therefore, that when the firſt temple was deſtroyed, and a new one built for them who worſhip in the inward court, two of the ſeven candleſticks were placed in this new temple.

XII. The affairs of the church are not conſidered during the opening of the firſt four ſeals. They begin to be conſidered at the opening of the fifth ſeal, as was ſaid above; and are further conſidered at the opening of the ſixth ſeal; and the ſeventh ſeal contains the times of the great apoſtacy. And therefore I refer the epiſtles to the ſeven churches unto the times of the fifth and ſixth ſeals: for they relate to the church when ſhe began

CHAPTER THIRD.

gan to decline, and contain admonitions againſt the great apoſtacy then approaching.

XIII. When Euſebius had brought down his Eccleſiaſtical Hiſtory to the reign of Diocleſian, he thus deſcribes the ſtate of the church: "*Qualem quantamque gloriam ſimul ac libertatem doc-*
"*trina veræ erga ſupremum Deum pietatis à Chriſto primùm ho-*
"*minibus annunciata, apud omnes Græcos pariter & barbaros ante*
"*perſecutionem noſtrâ memoriâ excitatam, conſecuta ſit, nos certè*
"*pro merito explicare non poſſumus. Argumento eſſe poſſit Impe-*
"*ratorum benignitas erga noſtros: quibus regendas etiam provin-*
"*cias committebant, omni ſacrificandi metu eos liberantes ob ſingu-*
"*larem, qua in religionem noſtram affecti erant, benevolentiam.*" And a little after: "*Jam vero quis innumerabilem hominum quo-*
"*tidie ad fidem Chriſti confugientium turbam, quis numerum ec-*
"*cleſiarum in ſingulis urbibus, quis illuſtres populorum concurſus in*
"*ædibus ſacris, cumulatè poſſit deſcribere? Quo factum eſt, ut priſ-*
"*cis ædificiis jam non contenti, in ſingulis urbibus ſpatioſas ab ip-*
"*ſis fundamentis exſtruerent eccleſias. Atque hæc progreſſu tem-*
"*poris increſcentia, & quotidie in majus & melius proficiſcentia,*
"*nec livor ullus atterere, nec malignitas dæmonis faſcinare, nec*
"*hominum inſidiæ probibere unquam potuerunt, quamdiu omnipo-*
"*tentis Dei dextra populum ſuum, utpote tali dignum præſidio, texit*
"*atque cuſtodiit. Sed cùm ex nimiâ libertate in negligentiam ac*
"*deſidiam prolapſi eſſemus; cùm alter alteri invidere, atque obtrec-*
"*tare cæpiſſet; cùm inter nos quaſi bella inteſtina gereremus, ver-*
"*bis, tanquam armis quibuſdam baſiſque, nos mutuò vulnerantes;*
"*cùm antiſtites adverſus antiſtites, populi in populos colliſi, jurgia*
"*ac tumultus agitarent; denique cùm fraus & ſimulatio ad ſum-*
"*mum malitiæ culmen adoleviſſet: tum divina ultio, levi brachio*
"*ut ſolet, integro adhuc eccleſiæ ſtatu, & fidelium turbis liberè*
"*convenientibus, ſenſim ac moderatè in nos cæpit animadvertere;*
"*orſâ primum perſecutione ab iis qui militabant. Cùm verò, ſenſu*
"*omni deſtituti, de placando Dei numine ne cogitaremus quidem;*
"*quin potius, inſtar impiorum quorundam, res humanas nullâ provi-*
"*dentiâ gubernari rati, alia quotidie crimina aliis adjiceremus:*
"*cùm paſtores noſtri, ſpretâ religionis regulâ, mutuis inter ſe con-*
"*tentionibus decertarent, nihil aliud quàm jurgia, minas, æmula-*

"*tionem,*

"*tionem, odia, ac mutuas inimicitias amplificare ſtudentes; prin-*
"*cipatum quaſi tyrannidem quandam contentiſſimè ſibi vindicantes:*
"*tunc demum juxta dictum Hieremiæ, obſcuravit Dominus in irâ*
"*ſuâ filiam Sion, & dejecit de cælo gloriam Iſrael,—per Eccleſia-*
"*rum ſcilicet ſubverſionem, &c.*" This was the ſtate of the church juſt before the ſubverſion of the churches in the beginning of Diocleſian's perſecution: and to this ſtate of the church agrees the firſt of the ſeven epiſtles to the angel of the ſeven churches, that to the church in Epheſus. "(a) I have ſome-
"thing againſt thee," ſaith Chriſt to the angel of that church,
"becauſe thou haſt left thy firſt love. Remember therefore
"from whence thou art fallen, and repent, and do the firſt
"works; or elſe I will come unto thee quickly, and will remove
"thy candleſtick out of its place, except thou repent. But this
"thou haſt, that thou hateſt the deeds of the Nicolaitans, which
"I alſo hate." The Nicolaitans are the *Continentes* above deſcribed, who placed religion in abſtinence from marriage, abandoning their wives if they had any. Theſe are here called Nicolaitans from Nicolas, one of the ſeven deacons of the primitive church of Jeruſalem; who having a beautiful wife, and being taxed with uxorioufneſs, abandoned her, and permitted her to marry whom ſhe pleaſed, ſaying that we muſt diſuſe the fleſh; and thenceforward lived a ſingle life in continency, as his children alſo. But the *Continentes* afterwards embraced the doctrine of Æons and ghoſts, male and female, and were avoided by the churches till the fourth century; and the church of Epheſus is here commended for hating their deeds.

[a] Apoc. ii. 4.

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

XIV. The perſecution of Diocleſian began in the year of Chriſt 302, and laſted ten years in the Eaſtern empire, and two years in the Weſtern. To this ſtate of the church the ſecond epiſtle, to the church of Smyrna, agrees. "(b) I know," ſaith Chriſt,
"thy works, and tribulation, and poverty, but thou art rich;
"and I know the blaſphemy of them, which ſay they are Jews
"and are not, but are the ſynagogue of Satan. Fear none of
"thoſe things which thou ſhalt ſuffer: Behold, the Devil ſhall
"caſt ſome of you into priſon, that ye may be tried; and ye
"ſhall have tribulation ten days. Be thou faithful unto death,

[b] Apoc. ii. 9, 10.

"and

CHAPTER THIRD.

"and I will give thee a crown of life." The tribulation of ten days can agree to no other perſecution than that of Dioclesian, it being the only perſecution which laſted ten years. By the blaſphemy of them which ſay they are Jews and are not, but are the ſynagogue of Satan, I underſtand the idolatry of the Nicolaitans, who falſely ſaid they were Chriſtians.

XV. The Nicolaitans are complained of alſo in the third epiſtle ([a]), as men that held the doctrine of Balaam, who taught Balac to caſt a ſtumbling-block before the children of Iſrael, to eat things ſacrificed to idols, and to commit ſpiritual fornication. For Balaam taught the Moabites and Midianites to tempt and invite Iſrael by their women to commit fornication, and to feaſt with them at the ſacrifices of their gods ([b]). The dragon therefore began now to come down among the inhabitants of the earth and ſea.

[a] Apoc. ii. 14.

[b] Numb. xxv. 1, 2, 18, and xxxvi. 16.

XVI. The Nicolaitans are alſo complained of in the fourth epiſtle, under the name of the woman Jezabel, who calleth herſelf a propheteſs, to teach and to ſeduce the ſervants of Chriſt to commit fornication, and to eat things ſacrificed to idols ([c]). The woman therefore began now to fly into the wilderneſs.

[c] Apoc. ii. 20.

XVII. The reign of Conſtantine the Great from the time of his conquering Licinius, was monarchical over the whole Roman empire. Then the empire became divided between the ſons of Conſtantine: and afterwards it was again united under Conſtantius, by his victory over Magnentius. And to the affairs of the church in theſe three ſucceſſive periods of time, the third, fourth, and fifth epiſtles, that is, thoſe to the angels of the churches in Pergamus, Thyatira, and Sardis, ſeem to relate. The next emperor was Julian the apoſtate.

XVIII. In the ſixth epiſtle, that to the angel of the church in Philadelphia, Chriſt ſaith: "([d]) Becauſe [in the reign of the "heathen emperor Julian] thou haſt kept the word of my pati-"ence, I alſo will keep thee from the hour of temptation," which by the woman's flying into the wilderneſs, and the dragon's making war with the remnant of her ſeed, and the killing of all who will not worſhip the image of the beaſt, "ſhall "come upon all the world, to try them that dwell upon the "earth,"

[d] Apoc. iii. 10, 12.

"earth," and to diſtinguiſh them by ſealing the one with the name of God in their foreheads, and marking the other with the mark of the beaſt. "Him that overcometh, I will make a "pillar in the temple of my God; and he ſhall go no more out "of it. And I will write upon him the name of my God in "his forehead." So the Chriſtians of the church of Philadelphia, as many of them as overcome, are ſealed with the ſeal of God, and placed in the ſecond temple, and go no more out. The ſame is to be underſtood of the church in Smyrna, which alſo kept the word of God's patience, and was without fault. Theſe two churches, with their poſterity, are therefore the two pillars, and the two candleſticks, and the two witneſſes in the ſecond temple.

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

XIX. After the reign of the emperor Julian, and his ſucceſſor Jovian, who reigned but five months, the empire became again divided between Valentinian and Valens. Then the church catholick, in the epiſtle to the angel of the church of Laodicea, is reprehended as lukewarm, and threatened to be ſpewed out of Chriſt's mouth ([a]). She ſaid, that ſhe was "rich and in-"creaſed with goods, and had need of nothing [being in out-"ward proſperity]; and knew not that ſhe was [inwardly] wretch-"ed, and miſerable, and poor, and blind, and naked." She is therefore ſpewed out of Chriſt's mouth at the opening of the ſeventh ſeal: and this puts an end to the times of the firſt temple.

[a] Apoc. iii. 16, 17.

XX. About one half of the Roman empire turned Chriſtians in the time of Conſtantine the Great and his ſons. After Julian had opened the temples, and reſtored the worſhip of the heathens, the emperors Valentinian and Valens tolerated it all their reign; and therefore the prophecy of the ſixth ſeal was not fully accompliſhed before the reign of their ſucceſſor Gratian. It was the cuſtom of the heathen prieſts, in the beginning of the reign of every ſovereign emperor, to offer him the dignity and habit of *Pontifex Maximus*. This dignity all emperors had hitherto accepted: but Gratian rejected it, threw down the idols, interdicted the ſacrifices, and took away their revenues with their ſalaries and authority of the prieſts. Theo-

CHAPTER THIRD.

doſius the Great followed his example; and heatheniſm afterwards recovered itſelf no more, but decreaſed ſo faſt, that Prudentius, about ten years after the death of Theodoſius, called the heathens, "*vix pauca ingenia, & pars hominum rariſſima.*" Whence the affairs of the ſixth ſeal ended with the reign of Valens, or rather with the beginning of the reign of Theodoſius; when he, like his predeceſſor Gratian, rejected the dignity of *Pontifex Maximus*. For the Romans were very much infeſted by the invaſions of foreign nations in the reign of Valentinian and Valens: "*Hoc tempore,*" ſaith Ammianus, "*velut* "*per univerſum orbem Romanum bellicum canentibus buccinis,* "*excitæ gentes ſæviſſimæ limites ſibi proximos perſultabant: Gal-* "*lias Rhætiaſque ſimul Alemanni populabantur: Sarmatæ Panno-* "*nias, & Quadi: Picti, Saxones, & Scoti & Attacotti Britannos* "*ærumnis vexavere continuis: Auſtoriani, Mauricæque aliæ gen-* "*tes Africam ſolito acriùs incurſabant: Thracias diripiebant præ-* "*datorii globi Gothorum: Perſarum Rex manus Armeniis injec-* "*tabat.*" And whilſt the emperors were buſy in repelling theſe enemies, the Hunns and Alans and Goths came over the Danube in two bodies, overcame and ſlew Valens, and made ſo great a ſlaughter of the Roman army, that Ammianus ſaith: "*Nec* "*ulla Annalibus præter Cannenſem ita ad internecionem res legi-* "*tur geſta.*" Theſe wars were not fully ſtopt on all ſides till the beginning of the reign of Theodoſius, A. C. 379 and 380: but thenceforward the empire remained quiet from foreign armies, till his death, A. C. 395. So long the four winds were held: and ſo long there was ſilence in heaven. And the ſeventh ſeal

[a] Apoc. viii. 1. was opened when this ſilence began ([a]).

XXI. Mr. Mede hath explained the prophecy of the firſt ſix trumpets not much amiſs: but if he had obſerved, that the prophecy of pouring out the vials of wrath is ſynchronal to that of ſounding the trumpets, his explanation would have been yet more complete.

[b] Apoc. viii. 13. XXII. The name of Woes ([b]) is given to the wars to which the three laſt trumpets ſound, to diſtinguiſh them from the wars of the four firſt. The ſacrifices on the firſt four days of the feaſt of tabernacles, at which the four firſt trumpets ſound, and the firſt four

four vials of wrath are poured out, are ſlaughters in four great wars; and theſe wars are repreſented by four winds ([a]) from the four corners of the earth. The firſt was an eaſt wind, the ſecond a weſt wind, the third a ſouth wind, and the fourth a north wind; with reſpect to the city of Rome, the metropolis of the old Roman empire. Theſe four plagues fell upon the third ([b]) part of the earth, ſea, rivers, ſun, moon, and ſtars; that is, upon the earth, ſea, rivers, ſun, moon, and ſtars, of the third part of the whole ſcene of theſe prophecies of Daniel and John.

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

[a] Apoc. vii. 1.

[b] Apoc. viii. 7—12.

XXIII. The plague of the eaſtern wind at the ſounding of the firſt trumpet, was to fall upon the earth ([c]); that is, upon the nations of the Greek empire. Accordingly, after the death of Theodoſius the Great, the Goths, Sarmatians, Hunns, Iſaurians, and Auſtorian Moors invaded and miſerably waſted Greece, Thrace, Aſia Minor, Armenia, Syria, Egypt, Libya, and Illyricum, for ten or twelve years together.

[c] Apoc. viii. 7.

XXIV. The plague of the weſtern wind at the ſounding of the ſecond trumpet, was to fall upon the Sea ([d]), or Weſtern empire, by means of a great mountain burning with fire caſt into it, and turning it to blood. Accordingly in the year 407, that empire began to be invaded by the Viſigoths, Vandals, Alans, Sueves, Burgundians, Oſtrogoths, Heruli, Quadi, Gepides; and by theſe wars it was broken into ten kingdoms, and miſerably waſted: and Rome itſelf, the burning mountain, was beſieged and taken by the Oſtrogoths in the beginning of theſe miſeries.

[d] Apoc. viii. 8, 9.

XXV. The plague of the ſouthern wind at the ſounding of the third trumpet, was to cauſe "a great ſtar ([e]), burning as it were a "lamp, to fall from heaven upon the rivers and fountains of wa- "ters [the Weſtern empire now divided into many kingdoms,] and "to turn them to wormwood and blood, and make them bitter." Accordingly Genſeric, the king of the Vandals and Alans in Spain, A. C. 427, invaded Africa with an army of eighty thouſand men; and ſeating himſelf in Africa, invaded the Moors, and made war upon the Romans, there and on the ſea-coaſts of Europe, for fifty years together, almoſt without intermiſſion, taking Hippo A. C. 431, and Carthage the capital of Africa A. C. 439. And,

[e] Apoc. viii. 10, 11.

CHAPTER THIRD.

A. C. 455, with a numerous fleet containing three hundred thouſand Vandals and Moors, he invaded Italy, took and plundered Rome, Naples, Capua, and many other cities; and carried thence the wealth of the cities and flower of the people into Africa: and the next year, A. C. 456, he rent all Africa from the empire, expelling the Romans. Then they invaded and took the iſlands of the Mediterranean, Sicily, Sardinia, Corſica, Ebuſus, Majorca, Minorca, &c. and Ricimer beſieged the emperor Anthemius in Rome, took the city, and gave his ſoldiers the plunder, A. C. 472. The Viſigoths about the ſame time ejected the Romans out of Spain: and now the Weſtern emperor, the great ſtar which fell from heaven, burning as it were a lamp, having by all theſe wars gradually loſt almoſt all his dominions, was invaded, and conquered in one year by Odoacer king of the Heruli, A. C. 476. After this the Moors revolted, A. C. 477, and weakened the Vandals by ſeveral wars, and took Mauritania from them. Theſe wars continued till the Vandals were invaded and conquered by Beliſarius, A. C. 534; and by all theſe wars Africa was almoſt depopulated, as Procopius repreſents; who reckons, that above five millions of men periſhed in them. When the Vandals firſt invaded Africa, that country was very populous, conſiſting of about 700 biſhopricks; which were more than were in all France, Spain, and Italy together: but by the wars between the Vandals, Romans, and Moors, it was depopulated to that degree, that Procopius tells us, it was next to a miracle for a traveller to ſee a man.

XXVI. In pouring out the third vial it is ſaid: "Thou art righ-
" teous, O Lord,—becauſe thou haſt judged thus: for they have
" ſhed the blood of thy ſaints and prophets, and thou haſt given
[a] Apoc. xvi. 5, 6. " them blood to drink, for they are worthy ([a])." How they ſhed the blood of ſaints, may be underſtood by the following edict of the emperor Honorius, procured by four biſhops ſent to him by a council of African biſhops, who met at Carthage 14 June, A. C. 410.

" *Impp.*

" *Impp. Honor. & Theod. AA. Heracliano Com. Afric.*

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

" *Oraculo penitus remoto, quo ad ritus ſuos hæreticæ ſuperſti-*
" *tionis obrepſerant, ſciant omnes ſanctæ legis inimici, plectendos*
" *ſe pœnâ & proſcriptionis & ſanguinis, ſi ultrà convenire per*
" *publicum, execrandâ ſceleris ſui temeritate temptaverint. Dat.*
" *viii. Kal. Sept. Varano V. C. Conſ. A. C. 410.*"

Which edict was five years after fortified by the following.

" *Impp. Honor. & Theod. AA. Heracliano Com. Afric.*

" *Sciant cuncti, qui ad ritus ſuos hæreſis ſuperſtitionibus obrep-*
" *ſerant, ſacroſanctæ legis inimici, plectendos ſe pœnâ & proſcrip-*
" *tionis & ſanguinis, ſi ultrà convenire per publicum exercendi ſce-*
" *leris ſui temeritate temptaverint: nequâ vera divinaque reve-*
" *rentia contagione temeretur. Dat. viii. Kal. Sept. Honorio x. &*
" *Theod. vi. AA. Coſſ. A. C. 415.*"

XXVII. Theſe edicts, being directed to the governor of Africa, extended only to the Africans. Before theſe there were many ſevere ones againſt the Donatiſts, but they did not extend to blood. Theſe two were the firſt which made their meetings, and the meetings of all Diſſenters, capital: for by Hereticks in theſe edicts are meant all Diſſenters, as is manifeſt by the following againſt Eureſius, a Luciferan biſhop.

" *Impp. Arcad. & Honor. AA. Aureliano Proc. Africæ.*

" *Hæreticorum vocabulo continentur, & latis adverſus eos ſanc-*
" *tionibus debent ſuccumbere, qui, vel levi argumento, à judicio Ca-*
" *tholicæ religionis & tramite detecti fuerint deviare: ideoque ex-*
" *perientia tua Eureſium hæreticum eſſe cognoſcat. Dat. iii. Non.*
Sept. Conſtantinop. Olybrio & Probino Coſſ. A. C. 395."

XXVIII. The Greek emperor Zeno adopted Theoderic king of the Oſtrogoths to be his ſon, made him maſter of the horſe and Patricius, and conſul of Conſtantinople; and recommending to him the Roman people and ſenate, gave him the Weſtern empire, and ſent him into Italy againſt Odoacer king of the Heruli.

Theoderic

CHAPTER THIRD.

Theoderic thereupon led his nation into Italy, conquered Odoacer, and reigned over Italy, Sicily, Rhætia, Noricum, Dalmatia, Liburnia, Iſtria, and part of Suevia, Pannonia and Gallia. Whence Ennodius ſaid, in a panegyric to Theoderic: "*Ad limitem ſuum Romana regna remeaſſe.*" Theoderic reigned with great prudence, moderation and felicity; treated the Romans with ſingular benevolence; governed them by their own laws, and reſtored their government under their ſenate and conſuls, he himſelf ſupplying the place of emperor, without aſſuming the title. "*Ita ſibi parentibus,*" ſaith Procopius, "*ut verè Imperatori conveniens decus nullum ipſi abeſſet: Juſtitiæ magnus ei cultus, legumque diligens cuſtodia: terras à vicinis barbaris ſervavit intactas, &c.*" Whence I do not reckon the reign of this king amongſt the plagues of the four winds.

XXIX. The plague of the northern wind, at the ſounding of the fourth trumpet, was to cauſe the ſun, moon, and ſtars, that is, the king, kingdom and princes of the Weſtern empire, to be darkened, and to continue ſome time in darkneſs[a]. Accordingly Beliſarius, having conquered the Vandals, invaded Italy, A. C. 535, and made war upon the Oſtrogoths in Dalmatia, Liburnia, Venetia. Lombardy, Tuſcany, and other regions northward from Rome, twenty years together. In this war many cities were taken and retaken. In retaking Millan from the Romans, the Oſtrogoths ſlew all the males young and old, amounting, as Procopius reckons, to three hundred thouſand, and ſent the women captives to their allies the Burgundians. Rome itſelf was taken and retaken ſeveral times, and thereby the people were thinned; the old government by a ſenate ceaſed; the nobles were ruined; and all the glory of the city was extinguiſhed: and, A. C. 552, after a war of ſeventeen years, the kingdom of the Oſtrogoths fell; whoſe kings had been her huſband and her ſon; yet the remainder of the Oſtrogoths, and an army of Germans called in to their aſſiſtance, continued the war three or four years longer. Then enſued a war of the Heruli, who, as Anaſtaſius tells us, "*perimebant cunctam Italiam,*" ſlew all Italy. This was followed by the war of the Lombards, the fierceſt of all the Barbarians, which began A. C. 568, and laſted thirty-eight years together; "*factâ tali clade,*

[a] Apoc. viii. 12.

"*clade,*" ſaith Anaſtaſius, "*qualem à ſæculo nullus meminit.*" It ended in the papacy of Sabinian, A. C. 605, by a laſting peace then made with the Lombards. Three years before it ended, Gregory the Great, then biſhop of Rome, thus ſpeaks of it: "*Qualiter enim & quotidianis gladiis & quantis Longobardorum incurſionibus, ecce jam per triginta quinque annorum longitudinem premimur, nullis explere vocibus ſuggeſtionis valemus.*" And in one of his ſermons to the people, he thus expreſſes the great preſumption of the Romans by theſe wars: "*Ex illâ plebe innumerabili quanti remanſeritis aſpicitis; & tamen adhuc quotidie flagella urgent, repentini caſus opprimunt, novæ res & improviſæ clades affligunt.*" In another ſermon he thus deſcribes the deſolations: "*Deſtructæ urbes, everſa ſunt caſtra, depopulati agri, in ſolitudinem terra redacta eſt. Nullus in agris incola, pene nullus in urbibus habitator remanſit. Et tamen ipſæ parvæ generis humani reliquiæ adhuc quotidiè & ſine ceſſatione feriuntur, & finem non habent flagella cœleſtis juſtitiæ. Ipſa autem, quæ aliquando mundi Domina eſſe videbatur, qualis remanſit Roma, conſpicimus, innumeris doloribus multipliciter attrita, deſolatione civium, impreſſione hoſtium, frequentiâ ruinarum.—Ecce jam de illâ omnes hujus ſæculi potentes ablati ſunt.—Ecce populi defecerunt.—Ubi enim Senatus? Ubi jam populus? Contabuerunt oſſa, conſumptæ ſunt carnes. Omnis enim ſæcularium dignitatum ordo extinctus eſt, & tamen ipſos nos paucos, qui remanſimus, adhuc quotidiè gladii, adhuc quotidiè innumeræ tribulationes premunt.—Vacua jam ardet Roma. Quid autem iſta de hominibus dicimus? Cùm, ruinis crebreſcentibus, ipſa quoque deſtrui ædificia videmus. Poſtquam defecerunt homines, etiam parietes cadunt. Jam ecce deſolata, ecce contrita, ecce gemitibus oppreſſa eſt, &c.*" All this was ſpoken by Gregory to the people of Rome, who were witneſſes of the truth of it. Thus by the plagues of the four winds, the empire of the Greeks was ſhaken, and the empire of the Latins fell; and Rome remained nothing more than the capital of a poor dukedom, ſubordinate to Ravenna, the ſeat of the exarchs.

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

XXX. The fifth trumpet ſounded to the wars, which the king of the South, as he is called by Daniel, made in the time of the

CHAPTER THIRD.

end, in puſhing at the king who did according to his will. This plague began with the opening of the bottomleſs pit (a), which denotes the letting out of a falſe religion: the ſmoke which came out of the pit, ſignifying the multitude which embraced that religion; and the locuſts which came out of the ſmoke, the armies which came out of that multitude. This pit was opened, to let out ſmoke and locuſts into the regions of the four monarchies, or ſome of them. The king of theſe locuſts was the angel of the bottomleſs pit, being chief governor as well in religious as civil affairs, ſuch as was the caliph of the Saracens. Swarms of locuſts often ariſe in Arabia Fælix, and from thence infeſt the neighbouring nations: and ſo are a very fit type of the numerous armies of Arabians invading the Romans. They began to invade the Romans A. C. 634, and to reign at Damaſcus A. C. 637. The built Bagdat A. C. 766, and reigned over Perſia, Syria, Arabia, Egypt, Africa and Spain. They afterwards loſt Africa to Mahades, A. C. 910; Media, Hircania, Choraſan, and all Perſia, to the Dailamites, between the years 927 and 935; Meſopotamia and Miafarekin to Naſiruddaulas, A. C. 930; Syria and Egypt to Achsjid, A. C. 935; and now being in great diſtreſs, the caliph of Bagdad, A. C. 936, ſurrendered all the reſt of his temporal power to Mahomet, the ſon of Rajici, king of Waſit in Chaldea, and made him emperor of emperors. But Mahomet within two years loſt Bagdad to the Turks; and thenceforward Bagdad was ſometimes in the hands of the Turks, and ſometimes in the hands of the Saracens; till Togrul-beig, called alſo Togra, Dogriſſa, Tangrolipix, and Sadoc, conquered Choraſan and Perſia; and, A. C. 1055, added Bagdad to his empire, making it the ſeat thereof. His ſucceſſors Olub-Arſlan and Melechſchah, conquered the regions upon Euphrates; and theſe conqueſts, after the death of Melechſchah, brake into the kingdoms of Armenia, Meſopotamia, Syria, and Cappadocia. The whole time that the caliphs of the Saracens reigned with a temporal dominion at Damaſcus and Bagdad together, was 300 years, viz. from the year 637 to the year 936 incluſive. Now locuſts live but five months; and therefore, for

(a) Apoc. xi. 2.

for the decorum of the type, theſe locuſts are ſaid to hurt men five months (a) and five months, as if they had lived about five months at Damaſcus, and again about five months at Bagdad; in all ten months, or 300 prophetic days, which are years.

APOCALYPSE COMPARED WITH DANIEL.

(a) Apoc. ix. 5.

XXXI. The ſixth trumpet ſounded to the wars, which Daniel's king of the North made againſt the king above-mentioned, who did according to his will. In theſe wars the king of the North, according to Daniel, conquered the empire of the Greeks, and alſo Judea, Egypt, Libya, and Ethiopia: and by theſe conqueſts the empire of the Turks was ſet up, as may be known by the extent thereof. Theſe wars commenced A. C. 1258; when the four kingdoms of the Turks ſeated upon Euphrates, that of Armenia Major ſeated at Miyapharekin, Megarkin or Martyropolis, that of Meſopotamia ſeated at Moſul, that of all Syria ſeated at Aleppo, and that of Cappadocia ſeated at Iconium, were invaded by the Tartars under Hulacu, and driven into the weſtern parts of Aſia Minor, where they made war upon the Greeks, and began to erect the preſent empire of the Turks. Upon the ſounding of the ſixth trumpet, "John "(b) heard a voice from the four horns of the golden altar "which is before God, ſaying to the ſixth angel which had the "trumpet, Looſe the four angels which are bound at the great "river Euphrates. And the four angels were looſed, which "were prepared for an hour and a day, and a month and a "year, for to ſlay the third part of men." By the four horns of the golden altar, is ſignified the ſituation of the head cities of the ſaid four kingdoms, Miyapharekin, Moſul, Aleppo, and Iconium, which were in a quadrangle. They ſlew the third part of men, when they conquered the Greek empire, and took Conſtantinople, A. C. 1453, and they began to be prepared for this purpoſe, when Olub-Arſlan began to conquer the nations upon Euphrates, A. C. 1063. The interval is called an hour and a day, and a month and a year, or 391 prophetic days, which are years. In the firſt thirty years, Olub-Arſlan

(b) Apoc. ix. 13, &c.

and Melechſchah conquered the nations upon Euphrates, and reigned over the whole. Melechſchah died A. C. 1092, and was ſucceeded by a little child; and then this kingdom broke into the four kingdoms above-mentioned.

ADVER-

ADVERTISEMENT.

The laſt pages of theſe obſervations having been differently drawn up by the Author in another copy of his work; they are here inſerted as they follow in that copy, after the 35th line of the 454th page foregoing.

AND none was found worthy to open the book till the Lamb of God appeared; the great high-prieſt repreſented by a lamb ſlain at the foot of the altar in the morning-ſacrifice. "And he came, and took the book out of the hand of him "that ſat upon the throne." For the high-prieſt, in the feaſt of the ſeventh month, went into the moſt holy place, and took the book of the law out of the right ſide of the ark, to read it to the people: and in order to read it well, he ſtudied it ſeven days, that is, upon the fourth, fifth, ſixth, ſeventh, eighth, ninth and tenth days, being attended by ſome of the prieſts to hear him perform. Theſe ſeven days are alluded to, by the Lamb's opening the ſeven ſeals ſucceſſively.

Upon the tenth day of the month, a young bullock was offered for a ſin-offering for the high-prieſt, and a goat for a ſin-offering for the people: and lots were caſt upon two goats to determine which of them ſhould be God's lot for the ſin-offering; and the other goat was called Azazel, the ſcape-goat. The high-prieſt in his linen-garments, took a cenſer full of burning coals of fire from the altar, his hand being full of ſweet incenſe beaten ſmall; and went into the moſt holy place within

the veil, and put the incenſe upon the fire, and ſprinkled the blood of the bullock with his finger upon the mercy-ſeat, and before the mercy-ſeat ſeven times: and then he killed the goat which fell to God's lot, for a ſin-offering for the people, and brought his blood within the veil, and ſprinkled it alſo ſeven times upon the mercy-ſeat and before the mercy-ſeat. Then he went out to the altar, and ſprinkled it alſo ſeven times with the blood of the bullock, and as often with the blood of the goat. After this "he laid both his hands upon the head of the live "goat; and confeſſed over him all the iniquities of the children "of Iſrael, and all their tranſgreſſions in all their ſins, putting "them upon the head of the goat; and ſent him away into the "wilderneſs by the hands of a fit man: and the goat bore upon "him all their iniquities into a land not inhabited" (Levit. chap. iv. and chap. xvi.) While the high-prieſt was doing theſe things in the moſt holy place and at the altar, the people continued at their devotion quietly and in ſilence. Then the high-prieſt went into the holy place, put off his linen garments, and put on other garments; then came out, and ſent the bullock and the goat of the ſin-offering to be burnt without the camp, with fire taken in a cenſer from the altar: and as the people returned home from the temple, they ſaid one to another, "God ſeal you to a "good new year."

In alluſion to all this, "when he had opened the ſeventh "ſeal, there was ſilence in heaven about the ſpace of half an "hour. And an angel ſtood at the altar having a golden cenſer, "and there was given unto him much incenſe, that he ſhould "offer it with the prayers of all ſaints, upon the golden altar "which was before the throne. And the ſmoke of the incenſe "with the prayers of the ſaints aſcended up before God out of "the angel's hand. And the angel took the cenſer, and filled "it with fire of the altar, and caſt it to the earth (a);" ſuppoſe without the camp, for ſacrificing the goat which fell to God's lot. For the high-prieſt being Chriſt himſelf, the bullock is omitted. At this ſacrifice there were voices and thunderings, of the muſick of the temple, and lightenings of the ſacred fire, and an earthquake: and ſynchronal to theſe things was the

[a] Apoc. viii. 1—5.

ſealing of the 144000 out of all the twelve tribes of the children of Iſrael with the ſeal of God in their foreheads (a), while the reſt of the twelve tribes received the mark of the beaſt (b), and the woman fled from the temple into the wilderneſs (c) to her place upon this beaſt. For this ſealing and marking was repreſented by caſting lots upon the two goats, ſacrificing God's lot on mount Sion, and ſending the ſcape-goat into the wilderneſs loaden with the ſins of the people.

[a] Apoc. vii. [b] Apoc. xiii. 3, &c. [c] Apoc. xii. 6. 16.

Upon the fifteenth day of the month, and the ſix following days, there were very great ſacrifices. And in alluſion to the ſounding of trumpets, and ſinging with thundering voices, and pouring out drink-offerings at thoſe ſacrifices, ſeven trumpets are ſounded, and ſeven thunders utter their voices, and ſeven vials of wrath are poured out. Wherefore the ſounding of the ſeven trumpets, the voices of the ſeven thunders, and the pouring out of the ſeven vials of wrath, are ſynchronal; and relate to one and the ſame diviſion of the time of the ſeventh ſeal following the ſilence, into ſeven ſucceſſive parts. The ſeven days of this feaſt were called the feaſt of tabernacles; and during theſe ſeven days the children of Iſrael dwelt in booths, and rejoiced with palm-branches in their hands. To this alludes the multitude with palms in their hands, which appeared after the ſealing of the 144000 (d), and came out of the great tribulation with triumph at the battle of the great day, to which the ſeventh trumpet ſounds. The viſions therefore of the 144000, and of the palm-bearing multitude, extend to the ſounding of the ſeventh trumpet, and therefore are ſynchronal to the times of the ſeventh ſeal.

[d] Apoc. vii. 9.

When the 144000 are ſealed out of all the twelve tribes of Iſrael, and the reſt receive the mark of the beaſt, and thereby the firſt temple is deſtroyed; John is bidden to "meaſure the "temple and altar [that is, their courts], and them that worſhip "therein, [that is, the 144000 ſtanding on mount Sion and on "the ſea of glaſs]: but the court that is without the temple [that "is, the peoples' court], to leave out and meaſure it not, becauſe "it is given to the Gentiles [thoſe who receive the mark of the "beaſt]; and the holy city they ſhall tread under foot forty and

[a] Apoc. xi. 1, 2. [b] ——3. [c] Apoc. xi. 6. [d] Apoc. xi. 4.

"two months ([a])," that is, all the time that the beaſt acts under the woman Babylon: and the two witneſſes propheſy 1260 days, that is, all the ſame time, clothed in ſackcloth ([b]). "Theſe have "power [like Elijah] to ſhut heaven that it rain not [at the ſound- "ing of the firſt trumpet]; and [like Moſes] to turn the waters "into blood [at the ſounding of the ſecond]; and to ſmite the "earth with all plagues [thoſe of the trumpets] as often as they "will ([c])." Theſe propheſy at the building of the ſecond temple, like Haggai and Zechary. Theſe are the two olive-trees ([d]), or churches, which ſupplied the lamps with oil (Zech. iv.) Theſe are the two candleſticks, or churches, ſtanding before the God of the earth ([d]). Five of the ſeven churches of Aſia, thoſe in proſperity, are found fault with, and exhorted to repent, and threatened to be removed out of their places, or ſpewed out of Chriſt's mouth, or puniſhed with the ſword of Chriſt's mouth, except they repent: the other two, the churches of Smyrna and Philadelphia, which were under perſecution, remain in a ſtate of perſecution, to illuminate the ſecond temple. When the primitive church catholick, repreſented by the woman in heaven, apoſtatized, and became divided into two corrupt churches, repreſented by the whore of Babylon and the two-horned beaſt, the 144000 who were ſealed out of all the twelve tribes, became the two witneſſes, in oppoſition to thoſe two falſe churches: and the name of two witneſſes once impoſed, remains to the true church of God in all times and places to the end of the prophecy.

In the interpretation of this prophecy, the woman in heaven clothed with the ſun, before ſhe flies into the wilderneſs, repreſents the primitive church catholick, illuminated with the ſeven lamps in the ſeven golden candleſticks, which are the ſeven churches of Aſia. The dragon ſignifies the ſame empire with Daniel's he-goat in the reign of his laſt horn, that is, the whole Roman empire, until it became divided into the Greek and Latin empires; and all the time of that diviſion it ſignifies the Greek empire alone: and the beaſt is Daniel's fourth beaſt, that is, the empire of the Latins. Before the diviſion of the Roman empire into the Greek and Latin empires, the beaſt is included

included in the body of the dragon; and from the time of that diviſion, the beaſt is the Latin empire only. Hence the dragon and beaſt have the ſame heads and horns; but the heads are crowned upon the dragon, and the horns upon the beaſt. The horns are ten kingdoms, into which the beaſt becomes divided preſently after his ſeparation from the dragon, as hath been deſcribed above. The heads are ſeven ſucceſſive dynaſties, or parts, into which the Roman empire becomes divided by the opening of the ſeven ſeals. Before the woman fled into the wilderneſs ([a]), "ſhe being with child [of a Chriſtian empire], cried [a] Apoc. xii. "travelling, [viz. in the ten years perſecution of Diocleſian] and "pained to be delivered: and the dragon [the heathen Roman "empire] ſtood before her, to devour her child as ſoon as it was "born. And ſhe brought forth a man child, who at length "was to rule all nations with a rod of iron. And her child was "caught up unto God, and to his throne [in the temple, by the "victory of Conſtantine the Great over Maxentius:] and the "woman fled [from the temple] into the wilderneſs of Arabia to "Babylon, where ſhe hath a place [of riches and honour and "dominion, upon the back of the beaſt,] prepared of God, that "they ſhould feed her there 1260 days. And there was war in "heaven, [between the heathens under Maximinus and the new "Chriſtian empire;] and the great dragon was caſt out, that "old ſerpent which deceiveth the whole world [the ſpirit of hea- "then idolatry;] he was caſt out [of the throne] into the earth. "And they overcame him by the blood of the Lamb, and by "the word of their teſtimony; and they loved not their lives "unto the death.

"And when the dragon ſaw that he was caſt unto the "earth, he perſecuted the woman which brought forth the man "child," ſtirring up a new perſecution againſt her in the reign of Licinius. "And to the woman [by the building of Con- "ſtantinople and equalling it to Rome,] were given two wings "of a great eagle, that ſhe might flee into the wilderneſs into "her place [upon the back of her beaſt,] where ſhe is nouriſh- "ed for a time, and times, and half a time, from the face of "the

" the ſerpent. And the ſerpent [upon the death of Conſtan-
" tine the Great] caſt out of his mouth water as a flood [viz.
" the Weſtern empire under Conſtantine Junior and Conſtans,]
" after the woman: that he might cauſe her to be carried away
" of the flood. And the earth [the nations of Aſia now un-
" der Conſtantinople] helped the woman;" and by conquering the Weſtern empire, now under Magnentius, " ſwallowed up
" the flood which the dragon caſt out of his mouth. And the
" dragon was wroth with the woman, and went to make war
" with the remnant of her ſeed, which keep the command-
" ments of God, and have the teſtimony of Jeſus Chriſt, which
" [in that war] were ſealed out of all the twelve tribes of Iſ-
" rael," and remained upon Mount Sion with the Lamb, being in number 144000, and having their father's name written in their foreheads.

When the earth had ſwallowed up the flood, and the dragon was gone to make war with the remnant of the woman's ſeed, " John ſtood upon the ſand of the ſea, and ſaw a beaſt
" riſe out of the ſea, having ſeven heads and ten horns.—And
" the beaſt was like unto a leopard, and his feet were as the
[a] Apoc. xii. 18.—xiii. 2. " feet of a bear, and his mouth as the mouth of a lion [a]." John here names Daniel's four beaſts in order, putting his beaſt in the room of Daniel's fourth beaſt, to ſhew that they are the ſame. " And the dragon gave this beaſt his power and his ſeat
[b] Apoc. xiii. 2. " and great authority [b]," by relinquiſhing the Weſtern empire to him. " And one of his heads [the ſixth] was as it were
[c] —— 3. " wounded to death [c]," viz. by the ſword of the earth, which ſwallowed up the waters caſt out of the mouth of the dragon;
[d] Ibid. " and his deadly wound was healed [d]," by a new diviſion of the empire between Valentinian and Valens, ann. 364. John ſaw the beaſt riſe out of the ſea, at the diviſion thereof between Gratian and Theodoſius, ann. 379. And the dragon gave the beaſt his power, and his ſeat and great authority, at the death of Theodoſius, when Theodoſius gave the Weſtern empire to his ſon Honorius. After which the two empires were no more united: but the Weſtern empire became preſently divided into ten

ten kingdoms, as above; and theſe kingdoms at length united in religion under the woman, and reign with her forty and two months.

" And I beheld," ſaith John, " another beaſt coming up
" out of the earth [a]." When the woman fled from the dragon into the kingdom of the beaſt, and became his church, this other beaſt roſe up out of the earth, to repreſent the church of the dragon. For " he had two horns like the lamb [ſuch as
" were the biſhopricks of Alexandria and Antioch:] and he
" ſpake as the dragon [in matters of religion]: and he cauſeth
" the earth [or nations of the dragon's kingdom] to worſhip the
" firſt beaſt, whoſe deadly wound was healed, [that is, to be of
" his religion. And he doth great wonders, ſo that he maketh
" fire come down from heaven on the earth in the ſight of
" men [b];" that is, he excommunicateth thoſe who differ from him in point of religion: for in pronouncing their excommunications, they uſed to ſwing down a lighted torch from above.
" And he ſaid to them that dwell on the earth, that they ſhould
" make an image to the beaſt, which had the wound by a ſword,
" and did live [c];" that is, that they ſhould call a council of men of the religion of this beaſt. " And he had power to give life
" unto the image of the beaſt, that the image of the beaſt
" ſhould both ſpeak, and cauſe that as many as would not wor-
" ſhip the image of the beaſt ſhould be killed [d], [viz. myſtically, by diſſolving their churches. " And he cauſeth all both ſmall
" and great, rich and poor, free and bond, to receive a mark in
" their right hand or in their foreheads, and that no man might
" buy or ſell, ſave he that had the mark, or the name of the
" beaſt, or the number of his name [e];" that is, the mark ✠, or the name ΛΑΤΕΙΝΟΣ, or the number thereof χξς, 666. All others were excommunicated.

[a] Apoc. xiii. 11.
[b] Apoc. xiii. 11—13.
[c] Apoc. xiii. 14.
[d] Apoc. xiii. 15.
[e] Apoc. xiii. 16, 17.

When the ſeven angels had poured out the ſeven vials of wrath, and John had deſcribed them all in the preſent time, he is called up [f] from the time of the ſeventh vial to the time of the ſixth ſeal, to take a view of the woman and her beaſt, who were to reign in the times of the ſeventh ſeal. And in reſpect of the

[f] Apoc. xvii.

latter part of time of the ſixth ſeal, then conſidered as preſent, the angel tells John: "The beaſt that thou ſaweſt, was and is
[a] Apoc. xvii. 8. "not, and ſhall aſcend out of the abyſs, and go into perdition [a];" that is, "He was," in the reign of Conſtans and Magnentius, until Conſtantius conquered Magnentius, and re-united the Weſtern empire to the Eaſtern: "He is not," during the re-union: "and he ſhall aſcend out of the abyſs," or ſea, at a following diviſion of the empire. The angel tells him further: "Here is the mind which "hath wiſdom: the ſeven heads are ſeven mountains, on which
[b] —— 9. "the woman ſitteth [b];" Rome being built upon ſeven hills, and thence called the ſeven-hilled city. "Alſo there are ſeven "kings: five are fallen, and one is, and the other is not yet "come; and when he cometh, he muſt continue a ſhort ſpace: "and the beaſt that was and is not, even he is the eighth, and is
[c] —— 10, 11. "of the ſeven, and goeth into perdition [c]." "Five are fallen," the times of the five firſt ſeals being paſt: "and one is;" the time of the ſixth ſeal being conſidered as preſent: "and another is not "yet come, and when he cometh [which will be at the opening of "the ſeventh ſeal], he muſt continue a ſhort ſpace: and the beaſt "that was and is not, even he is the eighth [by means of the di-"viſion of the Roman empire into two collateral empires]; and is "of the ſeven [being one-half of the ſeventh], and ſhall go into "perdition." The words, "five are fallen, and one is, and the "other is not yet come," are uſually referred by interpreters to the time of John the apoſtle, when the prophecy was given: but it is to be conſidered, that in this prophecy many things are ſpoken of as preſent, which were not preſent when the prophecy was given, but which were preſent with reſpect to ſome future time, conſidered as preſent in the viſions. So where it is ſaid upon pouring out the ſeventh vial of wrath, "that great Babylon re-
[d] Apoc. xvi. 19. "ceived the cup of the wine of the fierceneſs of God's wrath [d]:" this relates not to the time of John the apoſtle, but to the time of pouring out the ſeventh vial of wrath. And ſo where it is ſaid,
[e] Apoc. xviii. 2. "Babylon is fallen, is fallen [e];" and "thruſt in thy ſickle and reap,
[f] Apoc. xiv. 15. "for the time is come for thee to reap [f];" and "the time of the
[g] Apoc. xi. 18. "dead is come, that they ſhould be judged [g]:" and again, "I "ſaw

"ſaw the dead ſmall and great ſtand before God [a]:" theſe ſay-
[a] Apoc. xx. 12. ings relate not to the days of John the apoſtle, but to the latter times conſidered as preſent in the viſions. And ſo the words, "five are fallen, and one is, and the other is not yet come [b]," [b] Apoc. xvii. 10. "and the beaſt that was and is not, he is the eighth [c]," are not to [c] —— 11. be referred to the age of John the apoſtle, but relate to the time when the beaſt was to be wounded to death with a ſword, and ſhew that this wound was to be given him in his ſixth head: and without this reference we are not told in what head the beaſt was wounded. "And the ten horns which thou ſaweſt, are ten "kings, which have received no kingdom as yet, but receive "power as kings one hour with the beaſt. Theſe have one "mind [being of the whore's religion], and ſhall give their "power and ſtrength to the beaſt. Theſe ſhall make war with "the Lamb [at the ſounding of the ſeventh trumpet;] and the "Lamb ſhall overcome them: for he is Lord of lords, and King "of kings; and they that are with him are called and choſen "and faithful. And he ſaith unto me, the waters which thou "ſaweſt, where the whore ſitteth, are peoples and multitudes "and nations and tongues [compoſing her beaſt]. And the ten "horns which thou ſaweſt upon the beaſt, theſe ſhall hate the "whore, and ſhall make her deſolate and naked, and ſhall eat "her fleſh, and burn her with fire [at the end of the 1260 "days]. For God hath put in their hearts to fulfill his will, "and to agree and give their kingdom unto the beaſt, until the "words of God ſhall be fulfilled. And the woman which thou "ſaweſt, is that great city which reigneth over the kings of the "earth [d]," or the great city of the Latins, which reigneth over [d] Apoc. xvii. 12—18. the ten kings till the end of thoſe days.

THE END OF THE PROPHECIES.

" ſaw the dead ſmall and great ſtand before God (a):" theſe ſay- [a] Apoc. xx. 12.
ings relate not to the days of John the apoſtle, but to the latter
times conſidered as preſent in the viſions. And ſo the words,
" five are fallen, and one is, and the other is not yet come (b)," [b] Apoc. xvii. 10.
" and the beaſt that was and is not, he is the eighth (c)," are not to [c] —— 11.
be referred to the age of John the apoſtle, but relate to the time
when the beaſt was to be wounded to death with a ſword, and
ſhew that this wound was to be given him in his ſixth head: and
without this reference we are not told in what head the beaſt was
wounded. " And the ten horns which thou ſaweſt, are ten
" kings, which have received no kingdom as yet, but receive
" power as kings one hour with the beaſt. Theſe have one
" mind [being of the whore's religion], and ſhall give their
" power and ſtrength to the beaſt. Theſe ſhall make war with
" the Lamb [at the ſounding of the ſeventh trumpet;] and the
" Lamb ſhall overcome them: for he is Lord of lords, and King
" of kings; and they that are with him are called and choſen
" and faithful. And he ſaith unto me, the waters which thou
" ſaweſt, where the whore ſitteth, are peoples and multitudes
" and nations and tongues [compoſing her beaſt]. And the ten
" horns which thou ſaweſt upon the beaſt, theſe ſhall hate the
" whore, and ſhall make her deſolate and naked, and ſhall eat
" her fleſh, and burn her with fire [at the end of the 1260
" days]. For God hath put in their hearts to fulfill his will,
" and to agree and give their kingdom unto the beaſt, until the
" words of God had been fulfilled. And the woman which thou
" ſaweſt, is that great city which reigneth over the kings of the
" earth (d)," or the great city of the Latins, which reigneth over [d] Apoc. xvii. 12—18.
the ten kings till the end of thoſe days.

This tract has been carefully collated with the author's MSS. which has given occaſion to the variations, which the learned reader will obſerve of this from the former editions.

THE END OF THE PROPHECIES.

A N

HISTORICAL ACCOUNT

O F

TWO NOTABLE CORRUPTIONS OF SCRIPTURE.

I N

A LETTER TO A FRIEND.

Now firſt publiſhed entire from a MS. in the AUTHOR's hand-writing in the poſſeſſion of the Rev. Dr. EKENS, Dean of Carliſle.

ADVERTISEMENT.

A VERY imperfect copy of this tract, wanting both the beginning and the end, and erroneous in many places, was published at London in the year 1754, *under the title of Two Letters from Sir Iſaac Newton to Mr. Le Clerc. But in the Author's MS. the whole is one continued diſcourſe; which, although it is conceived in the epiſtolary form, is not addreſſed to any particular perſon.*

AN

HISTORICAL ACCOUNT

OF

TWO NOTABLE CORRUPTIONS OF SCRIPTURE.

IN

A LETTER TO A FRIEND.

SIR,

SINCE the diſcourſes of ſome late writers have raiſed in you a curioſity of knowing the truth of that text of Scripture concerning the teſtimony of the Three in heaven (1 John v. 7.) I have here ſent you an account of what the reading has been in all ages, and by what ſteps it has been changed, ſo far as I can hitherto determine by records. And I have done it the more freely, becauſe to you, who underſtand the many abuſes which they of the Roman church have put upon the world, it will ſcarce be ungrateful to be convinced of one more than is commonly believed. For although the more learned and quick-ſighted men (as Luther, Eraſmus, Bullinger, Grotius, and ſome others) would not diſſemble their knowledge, yet the generality are fond of the place for its making againſt hereſy. But whilſt we exclaim againſt the pious frauds of the Roman church, and make it a part of our religion to detect and renounce all things

of

RECORD OF of that kind, we muſt acknowledge it a greater crime in us to favour ſuch practices, than in the Papiſts we ſo much blame on that account: for they act according to their religion, but we contrary to ours. In the Eaſtern nations, and for a long time in the Weſtern, the faith ſubſiſted without this text; and it is rather a danger to religion, than an advantage, to make it now lean upon a bruiſed reed. There cannot be better ſervice done to the truth, than to purge it of things ſpurious: and therefore knowing your prudence, and calmneſs of temper, I am confident I ſhall not offend you by telling you my mind plainly: eſpecially ſince it is no article of faith, no point of diſcipline, nothing but a criticiſm concerning a text of Scripture which I am going to write about.

II. The hiſtory of the corruption, in ſhort, is this. Firſt, ſome of the Latines interpreted the Spirit, Water and Blood of the Father, Son, and Holy Ghoſt, to prove them One. Then Jerome, for the ſame end, inſerted the Trinity in expreſs words into his verſion. Out of him the Africans began to alledge it againſt the Vandals, about 64 years after his death. Afterwards the Latines noted his variations in the margins of their books; and thence it began at length to creep into the text in tranſcribing, and that chiefly in the twelfth and following centuries, when diſputing was revived by the ſchoolmen. And when printing came up, it crept out of the Latine into the printed Greek, againſt the authority of all the Greek MSS. and ancient verſions; and from the Venetian preſſes it went ſoon after into Greece. Now the truth of this hiſtory will appear by conſidering the arguments on both ſides.

III. The arguments alledged for the teſtimony of the Three in heaven, are the authorities of Cyprian, Athanaſius, and Jerome, and of many Greek manuſcripts, and almoſt all the Latine ones.

IV. Cyprian's (a) words runs thus: the Lord ſaith, "I and the Father am One." And again of the Father, Son, and Holy Ghoſt it is written; "And theſe Three are One." (b) The Socinians here deal too injuriouſly with Cyprian, while they would have this place corrupted: for Cyprian in another place repeats almoſt the ſame thing (b). "If," ſaith he, ["one baptized among "Heretics] be made the temple of God, tell me, I pray, of what "God? If of the Holy Ghoſt, ſince theſe Three are One, how "can the Holy Ghoſt be reconciled to him who is the enemy of "either the Father or the Son?" Theſe places of Cyprian being, in my opinion, genuine, ſeem ſo appoſite to prove the teſtimony of the Three in heaven, that I ſhould never have ſuſpected a miſtake in it, could I but have reconciled it with the ignorance I meet with of this reading in the next age, amongſt the Latines of both Africa and Europe, as well as among the Greeks. For had it been in Cyprian's bible, the Latines of the next age, when all the world was engaged in diſputing about the Trinity, and all arguments that could be thought of were diligently ſought out, and daily brought upon the ſtage, could never have been ignorant of a text, which in our age, now the diſpute is over, is chiefly inſiſted upon. In reconciling this difficulty, I conſider, therefore, that the only words of the text quoted by Cyprian in both places are, "And theſe Three are One;" which words may belong to the eighth verſe as well as to the ſeventh. For Eucherius (c), biſhop of Lion in France, and contemporary to St. Auſtin, reading the text without the ſeventh verſe, tells us, that many then underſtood the Spirit, the Water, and the Blood, to ſignify the Trinity. And St. Auſtin (d) is one of thoſe many; as you may ſee in his third book againſt Maximus, where he tells us, "that the Spirit is the Father, for God is a Spirit: the Wa-"ter the Holy Ghoſt; for he is the Water, which Chriſt gives to "them

(a) Dicit Dominus, ego et pater unum ſumus; et iterum de patre et filio et ſpiritu ſancto ſcriptum eſt, et tres unum ſunt. *Cypr. de Unit. Eccleſ.*

(b) Si templum Dei factus eſt, quæſo cujus Dei? Si ſpiritûs ſancti, cùm tres unum ſint, quomodo ſpiritus ſanctus placatus ei eſſe poteſt, qui aut patris aut filii inimicus eſt. *Cypr. Epiſt.* 73. *ad Jubaianum.*

(c) Eucherius reads the text thus: "Tria ſunt quæ teſtimonium perhibent; aqua, ſanguis, et ſpiritus." And then adds this interpretation: "Plures hîc ipſam, interpretatione myſticâ, intelligunt Trinitatem; eo quod perfecta ipſa perhibeat teſtimonium Chriſto: aquâ, patrem indicans; quia ipſe de ſe dicit, me dereliquerunt fontem aquæ vivæ: ſanguine, Chriſtum demonſtrans, utique per paſſionis cruorem: ſpiritu verò ſanctum ſpiritum manifeſtans." *Eucher. de Quæſt. N. Teſt.*

(d) Sane falli te nolo in epiſtolâ Joannis Apoſtoli, ubi ait, "tres ſunt teſtes, ſpiritus, aqua, et ſanguis, et tres unum ſunt;" ne fortè dicas, ſpiritum et aquam et ſanguinem diverſas eſſe ſubſtantias, et tamen dictam eſſe, tres unum ſunt. Propter hoc admoui te, ne fallaris: hæc enim ſunt,

THE THREE IN HEAVEN.

RECORD OF

"them that thirſt: and the Blood the Son; for the Word was "made fleſh." Now if it was the opinion of many in the Weſtern churches of thoſe times, that the Spirit, the Water, and the Blood, ſignified the Father, the Son, and the Holy Ghoſt; it is plain that the teſtimony of Three in heaven, in expreſs words, was not yet crept into their books: and even without this teſtimony, it was obvious for Cyprian, or any man elſe of that opinion, to ſay of the Father and Son and Holy Ghoſt, it is written, "And theſe Three are One." And that this was Cyprian's meaning, Facundus (c), an African biſhop in the ſixth century, is my author: for he tells us expreſsly that Cyprian, in the above-mentioned place, underſtood it ſo; interpreting the Water, Spirit, and Blood, to be the Father, Son, and Holy Ghoſt: and thence affirming that John ſaid of the Father, Son, and Holy Ghoſt, "theſe Three are One." This at leaſt may be gathered from this paſſage of Facundus, that ſome in thoſe early ages interpreted Cyprian after this manner. Nor do I underſtand, how any of thoſe many who took the Spirit, Water, and Blood, for a type of the Trinity; or any man elſe, who was ignorant of the teſtimony of the Three in heaven, as the churches in the times of the Arian controverſy generally were, could underſtand him otherwiſe. And even Cyprian's own words do plainly make for the interpretation. For he does not ſay, the Father, the Word, and the Holy Ghoſt, as it is now in the ſeventh verſe; but the Father, and Son, and Holy Ghoſt, as it is in baptiſm; the place from which they tried * at firſt to derive the Trinity. If it be pretended, that the words cited by Cyprian

ſunt, in quibus non quid ſint, ſed quid oſtendant, ſemper attenditur. Si vero ea, quæ his ſignificata ſunt, velimus inquirere; non abſurdè occurrit ipſa Trinitas, quæ unus, ſolus, ſummus eſt Deus, pater et filius et ſpiritus ſanctus; de quibus veriſſimè dici potuit, tres ſunt teſtes, et tres unum ſunt: ut nomine ſpiritûs ſignificatum accipiamus Deum Patrem (de Deo ipſo quippe adorando loquebatur dominus, ubi ait, ſpiritus eſt Deus) nomine autem ſanguinis, filium; quia verbum caro factum eſt; nomine autem aquæ, ſpiritum ſanctum. Cùm enim de aquâ loqueretur Jeſus, quam daturus erat ſitientibus, ait evangeliſta; "hoc autem dicit de ſpiritu, quem accepturi erant credentes in eum." *D. Auguſtin. Con. Maximum. Cap. XXII.*

(c) Facundus, in the beginning of his book to the emperor Juſtinian, pro Defenſione trium Capitulorum Conſilii Chalcedonenſis, firſt recites the text after the manner of Cyprian, but more diſtinctly in theſe words: "Nam Joannes Apoſtolus, in epiſtolâ ſuâ, de patre et filio et ſpiritu ſancto ſic dicit: "Tres ſunt, qui teſtimonium dant in terrâ, ſpiritus, aqua, et ſanguis; et hi tres unum ſunt" in ſpiritu ſignificans patrem, &c. Joan. IV. 21. In aquâ ſpiritum ſanctum Joan. VII. 37. in ſanguine vero filium." And a little after he thus confirms this interpretation by Cyprian's

THE THREE IN HEAVEN.

prian are taken out of the ſeventh verſe, rather than out of the eighth; becauſe he reads not, "*Hi Tres in Unum ſunt*," but "*Hi Tres Unum ſunt*;" I anſwer that the Latines generally read, "*Hi Tres Unum ſunt*," as well in the eighth verſe, as in the ſeventh; as you may ſee in the newly-cited places of St. Auſtin and Facundus, and thoſe of Ambroſe, pope Leo, Beda and Caſſiodorus, which follow, and in the preſent vulgar Latine. So then the teſtimony of Cyprian reſpects the eighth, or at leaſt is as applicable to that verſe as to the ſeventh, and therefore is of no force for proving the truth of the ſeventh: but on the contrary, for diſproving it we have here the teſtimony of Facundus, St. Auſtin, Eucherius, and thoſe many others whom Eucherius mentions. For if thoſe of that age had met with it in their books, they would never have underſtood the Spirit, the Water, and the Blood, to be the Three Perſons of the Trinity, in order to prove them One God.

V. Theſe paſſages in Cyprian may receive further light by a like paſſage in Tertullian, from whence Cyprian ſeems to have borrowed them. For it is well known, that Cyprian was a great admirer of Tertullian's writings, and read them frequently, calling Tertullian his maſter. The paſſage is this (f): "The con-"nection of the Father in the Son, and of the Son in the Para-"clete, makes Three coherent ones from one another, which "Three are One (one thing, not one perſon) as it is ſaid, 'I and "the Father are One;' denoting the Unity of ſubſtance, not "the ſingularity of number." Here, you ſee, Tertullian ſays not, "the Father, Word, and Holy Ghoſt," as the text now has it, "but the Father, Son, and Paraclete;" nor cites any thing

Cyprian's authority, ſaying: "Aut ſi forſan ipſi, qui de verbo contendunt, in eo quod dixit, "tres ſunt qui teſtificantur in terrâ, ſpiritus aqua et ſanguis, et hi tres unum ſunt," Trinitatem nolunt intelligi; ſecundum ipſa verba quæ poſuit, pro apoſtolo Joanne reſpondeant. Numquid hi tres, qui in terrâ teſtificari, et qui unum eſſe dicuntur, poſſunt ſpiritus et aquæ et ſanguines dici? Quod tamen Joannis apoſtoli teſtimonium B. Cyprianus Carthaginenſis, antiſtes et martyr, in epiſtolâ ſive libro quem de Trinitate, immo de unitate eccleſiæ ſcripſit, de patre filio et ſpiritu ſancto dictum intelligit: ait enim, dicit dominus, ego et pater unum ſumus; et iterum de patre filio et ſpiritu ſancto ſcriptum eſt; "et hi tres unum ſunt." *Facund. l. 1. p. 16. ex edit. Sirmondi Pariſiis, 1629.*"

(f) Connexus patris in filio, et filii in paracleto, tres efficit cohærentes, alterum ex altero, "qui Tres Unum ſunt" (non Unus) quomodo dictum eſt. "Ego et Pater Unum ſumus;" ad ſubſtantiæ unitatem, non ad numeri ſingularitatem. *Tertullian advers. Prax. c. 25.*

* *The inſinuation contained in this expreſſion, that the Trinity is not to be derived from the words preſcribed for the baptiſmal form, is very extraordinary to come from a writer who was no Socinian.*

RECORD OF more of the text than these words, "which Three are One." Though this treatise against St. Praxeas be wholly spent in discoursing about the Trinity, and all texts of Scripture are cited to prove it, and this text of St. John, as we now read it, would have been one of the most obvious and apposite to have been cited at large, yet Tertullian could find no more obvious words in it for his purpose than "these Three are One." These, therefore, he interprets of the Trinity, and inforces the interpretation by that other text, "I and the Father are One;" as if the phrase was of the same importance in both places.

VI. So then this interpretation seems to have been invented by the Montanists for giving countenance to their Trinity. For Tertullian was a Montanist, when he wrote this; and it is most likely that so corrupt and forced an interpretation had its rise among a sect of men accustomed to make bold with the scriptures. Cyprian being used to it in his master's writings, it seems from thence to have dropt into his: for this may be gathered from the likeness between their citations. And by the disciples of these two great men, it seems to have been propagated among those many Latins, who (as Eucherius tells us) received it in the next age, understanding the Trinity by the "Spirit, Water, "and Blood." For how, without the countenance of some such authority, an interpretation so corrupt and strained should come to be received in that age so generally, I do not understand.

VII. And what is said of the testimony of Tertullian and Cyprian, may be much more said of that in the feigned disputation of Athanasius with Arius at Nice. For there the words cited are only "και οἱ τρεις το ἑν εισιν;" and "these Three are One;" and they are taken out of the seventh verse, without naming the persons of the Trinity before them. For the Greeks interpreted "the Spirit, Water and Blood" of the Trinity, as well as the Latins; as is manifest from the annotations they made on this text

(g) Critical history of N. Test. cap. 18.

(h) Suspicor verba ἐν τῃ γῃ non extare in MS.

(i) The whole preface runs thus: "Incipit prologus in epistolas canonicas. Non ita est ordo apud Græcos, qui integrè sapiunt, fideroque rectam sectantur, epistolarum septem, quæ canonicæ nuncupantur, sicut in Latinis codicibus invenitur: ut quia Petrus est primus in ordine apostolorum, primæ sint etiam ejus epistolæ in ordine ceterarum. Sed sicut evangelistas dedum ad veritatis lineam correximus, ita has proprio ordini, Deo juvante, reddidimus. Est enim una earum

text in the margin of some of their manuscripts. For father THE THREE Simon (g) informs us, that in one of the MSS. in the library of IN HEAVEN. the king of France, marked Numb. 2247, over against these words; "ὁτι τρεις εισιν οἱ μαρτυρουντες εν τῃ γῃ (h) το πνευμα και το "ὑδωρ και το αἱμα." "For there are Three that bear record [in "earth], the Spirit, the Water, and the Blood:" there is this remark, "τελεσι το πνευμα το ἁγιον, και ὁ πατηρ, και αυτος ἑαυτῳ;" that is, "the Holy Ghost, and the Father, and He of Himself." And in the same copy over against these words, "και οἱ τρεις εις "το ἑν εισι," "and these Three are One;" this note is added, "τελεσι μια θεοτης, εἱς θεος." That is, "One Deity, One God." This MS. is about 500 years old.

VIII. Also in the margin of one of the MSS. in Monsieur Colbert's library, Numb. 871, father Simon tells us there is a like remark. For besides these words, "εἱς θεος, μια θεοτης," "One "God, One Godhead;" there are added, "μαρτυρια τῳ θεῳ τῳ "πατρος και τῳ ἁγιῳ πνευματος." "The testimony of God the Fa-"ther, and of the Holy Ghost." These marginal notes sufficiently shew how the Greeks used to apply this text to the Trinity; and by consequence how the author of that disputation is to be understood. But I should tell you also, that that disputation was not writ by Athanasius, but by a later author, and therefore, as a spurious piece, uses not to be much insisted upon.

IX. Now this mystical application of "the Spirit, Water and "Blood, to signify the Trinity, seems to me to have given occasion to somebody, either fraudulently to insert the testimony of "the Three in heaven," in express words into the text, for proving the Trinity; or else to note it in the margin of his book, by way of interpretation. Whence it might afterwards creep into the text in transcribing. And the first upon record that inserted it, is Jerome; if the preface (i) to the canonical epistles, which goes under his name, be his. For whilst he composed not

earum prima Jacobi, duæ Petri, tres Johannis, et Judæ una. Quæ si sicut ab eis digestæ sunt, ita quoque ab interpretibus fideliter in Latinum verterentur eloquium, nec ambiguitatem legentibus facerent, nec sermonum sese varietates impugnarent, illo præcipue loco ubi de Unitate Trinitatis in primâ Johannis epistolâ, positum legimus, &c. In quâ etiam ab infidelibus translatoribus, multum erratum esse à fidei veritate comperimus, trium tantummodo vocabula, hoc est, Aquæ, Sanguinis et Spiritûs, in ipsâ suâ editione ponentibus; et Patris, Verbique, ac Spiritûs testimonium

RECORD OF not a new tranſlation of the New Teſtament, but only corrected the ancient vulgar Latin (as learned men think) and among his emendations (written perhaps at firſt in the margin of his book) he inſerted this teſtimony; he complains in the ſaid preface, how he was thereupon accuſed * by ſome of the Latins for falſifying Scripture; and makes anſwer, that former Latin tranſlators had much erred from the faith, in putting only "the Spirit, "Water and Blood" in their edition, and omitting the teſtimony of "the Three in heaven," whereby the Catholic Faith is eſtabliſhed. In this defence he ſeems to ſay, that he corrected the vulgar Latin tranſlation by the original Greek; and this is the great teſtimony the text relies upon.

X. But whilſt he confeſſes it was not in the Latin before, and accuſes former tranſlators of falſifying the Scriptures in omitting it, he ſatisfies us that it has crept into the Latin ſince his time, and ſo cuts off all the authority of the preſent vulgar Latin for juſtifying it. And whilſt he was accuſed by his contemporaries of falſifying the Scriptures in inſerting it, this accuſation alſo confirms, that he altered the publick reading. For had the reading been dubious before he made it ſo, no man would have charged him with falſification for following either part. Alſo, whilſt upon this accuſation, he recommends the alteration by its uſefulneſs for eſtabliſhing the Catholick Faith, this renders it the more ſuſpected; by diſcovering both the deſign of his making it, and the ground of his hoping for ſucceſs. However, ſeeing he was thus accuſed by his contemporaries, it gives us juſt reaſon to examine the buſineſs between him and his accuſers. And ſo, he being called to the bar, we are not to lay ſtreſs upon his own teſtimony for himſelf (for no man is a witneſs in his own cauſe) but laying aſide all prejudice, we ought, according to the ordinary rules of juſtice, to examine the buſineſs between him and his accuſers by other witneſſes.

alium omittentibus: in quo maxime et fides catholica roboratur, et Patris, ac Filii, et Spiritûs una diviniratis ſubſtantia comprobatur. In cæteris verò epiſtolis, quantum à noſtrâ aliorum diſtet editio, lectoris judicio derelinquo. Sed tu, virgo Chriſti Euſtochium, dum à me impenſius ſcripturæ veritatem inquiris, meam quodammodo ſenectutem invidorum dentibus corrodendam exponis, qui me falſarium, corruptoremque Sanctarum pronunciant Scripturarum. Sed ego in tali opere, nec æmulorum meorum invidiam pertimeſco, nec Sanctæ Scripturæ veritatem poſcentibus denegabo."

XI. They

THE THREE IN HEAVEN.

XI. They that have been converſant in his writings, obſerve a ſtrange liberty which he takes in aſſerting things. Many notable inſtances of this he has left us in compoſing thoſe very fabulous lives of Paul and Hilarian, not to mention what he has written upon other occaſions. Whence Eraſmus ſaid of him, that he was in affirming things, "(k) frequently violent and im-"pudent, and often contrary to himſelf." But I accuſe him not. It is poſſible that he might be ſometimes impoſed upon, or, through inadvertency, commit a miſtake. Yet ſince his contemporaries accuſed him, it is but juſt that we ſhould lay aſide the prejudice of his great name, and hear the cauſe impartially between them.

XII. Now the witneſſes between them are partly the ancient tranſlators of the Scriptures into the various languages; partly the writers of his own age, and of the ages next before, and after him; and partly the Scribes, who have copied out the Greek manuſcripts of the Scriptures in all ages. And all theſe are againſt him. For by the unanimous evidence of all theſe, it will appear that the teſtimony of "the Three in heaven" was wanting in the Greek manuſcripts, from whence Jerome, or whoever was the author of that preface to the canonical epiſtles, pretends to have borrowed it.

XIII. The ancient interpreters, which I cite as witneſſes againſt him, are chiefly the authors of the ancient vulgar Latin, of the Syriac, and the Æthiopic verſions. For as he tells us, that the Latins omitted the teſtimony of "the Three in heaven" in their verſion before his time, ſo in the Syriac and Æthiopic verſions (both which, from biſhop Walton's account of them, are much ancienter than Jerome's time, being the verſions which the Oriental and Æthiopic nations received from the beginning, and generally uſed, as the Latins did the vulgar Latin) that ſame teſtimony is wanting to this day; and the authors of theſe Three

(k) Sæpe numero violentus, parumque pudens, ſæpe varius, parumque ſibi conſtans. *Eraſmi Annotation. in Johan. v. 7.*

Vide etiam, quæ Eraſmus contra Leum in hunc locum de Hieronymo fuſius dixit.

* *Jerom complains not of any accuſation raiſed upon what he had done in this, or any other particular text of Scripture. He affirms, that this text was unfaithfully rendered in the Latin bibles, which were current in his time before his own edition. That his edition in this, as well as in other paſſages, faithfully repreſented the original Greek; and he expreſſes an apprehenſion, that the number of his emendations, which the infidelity of former tranſlators had rendered neceſſary, might furniſh his enemies with a pretence for abuſe.*

RECORD OF moſt ancient, moſt famous, and moſt received verſions by omitting it are concurrent witneſſes, that they found it wanting in the original Greek manuſcripts of their own times. It is wanting alſo in other ancient verſions; as in the Egyptian Arabick, publiſhed in Walton's Polyglot; in the Armenian verſion (l), uſed, ever ſince Chryſoſtom's age, by the Armenian nations; and in the Illyrican (m) of Cyrillus, uſed in Raſcia, Bulgaria, Moldavia, Ruſſia, Muſcovy, and other countries, which uſe the Sclavonic tongue. In a copy of this verſion (m), printed at Oſtrobe (Oſtrow) in Volhinia, in the year 1581, I have ſeen it wanting; and one Camillus (n) relates the ſame thing out of ancient manuſcripts of this verſion ſeen by him. Father Simon notes it wanting alſo in a certain verſion of the French church, which, ſaith he, is at leaſt 1000 years old, and which was publiſhed by father Mabillon, a Benedictine monk. Nor do I know of any verſion wherein it is extant, except the modern vulgar Latin, and ſuch modern verſions, of the Weſtern nations, as have been influenced by it. So then, by the unanimous conſent of all the ancient and faithful interpreters, which we have hitherto met with (who doubtleſs made uſe of the beſt manuſcripts they could get) the teſtimony of "the Three in heaven" was not anciently in the Greek.

XIV. And that it was neither in the ancient verſions nor in the Greek, but was wholly unknown to the firſt churches, is moſt certain by an argument hinted above; namely, that in all that vehement, univerſal, and laſting controverſy about the Trinity in Jerome's time, and both before, and long enough after it, this text of "the Three in heaven" was never once thought of. It is now in every body's mouth, and accounted the main text for the buſineſs, and would aſſuredly have been ſo too with them, had it been in their books. And yet it is not once to be met with in all the diſputes, epiſtles, orations, and other writings of the Greeks and Latins (Alexander of Alexandria, Athanaſius, the council of Sardica, Baſil, Nazianzen, Nyſſen, Epiphanius, Chryſoſtom,

(l) Codex Armeniacus ante 400 annos exaratus, quem vidi apud Epiſcopum Eccleſiæ Armeniacæ, quæ Amſtelodami colligitur, locum illum non legit. *Sandius Append. Interpret. Paradox. in b. l.*

(m) The printed Sclavonic verſion runs thus: "Quia Tres ſunt, qui teſtificantur, Spiritus, "et Aqua, et Sanguis; et Tres in Unum ſunt. Si teſtimonium, &c."

THE THREE IN HEAVEN.

ſoſtom, Cyril, Theodoret, Hilary, Ambroſe, Auſtin, Victorinus Afer, Philaſtrius Brixienſis, Phæbedius Agennenſis, Gregorius Bæticus, Fauſtinus Diaconus, Paſchaſius, Arnobius Junior, Cerealis, and others) in the times of thoſe controverſies; no, not in Jerome himſelf; if his verſion and preface to the canonical epiſtles be excepted. The writings of thoſe times were very many, and copious; and there is no argument, or text of Scripture, which they do not urge again and again. That of St. John's goſpel, "I, and the Father, am One," is every where inculcated, but this of "the Three in heaven, and their being One," is no where to be met with, till at length, when the ignorant ages came on, it began by degrees to creep into the Latin copies out of Jerome's verſion. So far are they from citing the teſtimony of "the Three in heaven," that, on the contrary, as often as they have occaſion to mention the place, they omit it, and that too, as well after Jerome's age, as in, and before it. For Heſychius (o) cites the place thus: "*Audi Johannem dicentem, Tria* "*ſunt, qui teſtimonium præbent, et Tres Unum ſunt, Spiritus, et* "*ſanguis et aqua.*" The words, *in terrâ*, he omits, which is never done, but in copies where "the Three in heaven" is wanting. Caſſiodorus, or whoever was the author of the Latin verſion of the diſcourſe of Clemens Alexandrinus on theſe epiſtles of St. John, reads it thus: "*Quia tres ſunt, qui teſtificantur, Spi-* "*ritus, et aqua, et ſanguis, et hi Tres Unum ſunt* (p)." Beda, in his commentary on the place, reads it thus: "*Et ſpiritus eſt, qui* "*teſtificatur, quoniam Chriſtus eſt veritas. Quoniam Tres ſunt,* "*qui teſtimonium dant in terrâ, ſpiritus, aqua, et ſanguis, et Tres* "*Unum ſunt. Si teſtimonium, &c.*" But here the words, *in terrâ*, ſo far as I can gather from his commentary on this text, have been inſerted by ſome latter hand. The author of the firſt epiſtle, aſcribed to pope Euſebius, reads it, as Beda doth, omitting only the words, *in terrâ.* And if the authority of popes

(n) Teſtimonium trium in Cœlo non eſt in antiquiſſimis Illyricorum et Ruthenorum codicibus; quorum unum exemplar, à ſexcentis fere annis manuſcriptum, jampridem apud illuſtriſſimum Gabrielem Chineum, terræ Bactricæ Dominum vidi, et legi: alterum manibus noſtris teritur, fide et antiquitate ſuâ nobile. *Camillus de Antichriſto. Lib. ii. cap. 2. pag.* 156.

(o) Heſych. in Levit. lib. 2. c. 8. poſt med.

(p) Caſſiodor. in Bibl. S. Patr. edit. Paris, 1589.

RECORD OF

be valuable, pope Leo the Great, in his tenth epiſtle, thus cites the place: "*Et ſpiritus eſt, qui teſtificatur, quoniam ſpiritus* "*eſt veritas*; *quia Tres ſunt, qui teſtimonium dant, ſpiritus, et* "*aqua, et ſanguis*; *et hi Tres Unum ſunt.*" St. Ambroſe, in the ſixth chapter of his firſt book, *De Spiritu Sancto*, diſputing for the Unity of the Three Perſons, ſays, "*Hi Tres Unum ſunt,* "*Johannes dixit, aqua, ſanguis et ſpiritus: Unum in myſterio*; "*non in naturâ.*" This is all he could find of the text, while he was diſputing about the Trinity, and therefore he proves the Unity of the Perſons by the myſtical Unity of the Spirit, Water, and Blood: interpreting theſe of the Trinity with Cyprian and others. Yea, in the eleventh chapter of his third book, he fully recites the text thus: "*Per aquam et ſanguinem venit Chriſ-* "*tus Jeſus, non ſolum in aquâ, ſed in aquâ et ſanguine; et ſpiri-* "*tus teſtimonium dat, quoniam ſpiritus eſt veritas. Quia Tres* "*ſunt teſtes, ſpiritus, aqua, et ſanguis; et hi Tres Unum ſunt in* "*Chriſto Jeſu* (q)." The like reading of Facundus, Eucherius, and St. Auſtin, you have in the places cited above. Theſe are Latins as late, or later, than Jerome. For Jerome did not prevail with the churches of his own time to receive the teſtimony of "the Three in heaven." And for them to know his verſion, and not receive his teſtimony, was in effect to condemn it.

XV. And as for the Greeks, Cyril of Alexandria reads the text without this teſtimony in the xivth book of his Theſaurus, cap. 5; and again in his firſt book *De fide ad Reginas*, a little after the middle. And ſo does Oecumenius, a later Greek, in his commentary on this place of St. John's epiſtle. Alſo Didymus Alexandrinus, in his commentary on the ſame paſſage, reads, "the Spirit, Water, and Blood," without mentioning "the "Three in heaven:" and ſo he doth in his book of the Holy Ghoſt, where he ſeems to omit nothing that he could find for his purpoſe: and ſo doth Gregory Nazianzen in his xxxviith oration concerning the Holy Ghoſt; and alſo Nicetas in his commentary on Gregory Nazianzen's xlivth oration. And here it is farther obſervable, that, as the Euſebians had contended, that "the "Father, Son, and Holy Ghoſt" were not to be connumerated,

(q) See alſo Ambroſe in Luc. xxii. 10, and in his book, De iis qui myſteriis initiantur, cap. 4.

becauſe they were things of a different kind; Nazianzen and Nicetas anſwer, that they might be connumerated, becauſe St. John connumerates three things not ſubſtantial, namely, "the "Spirit, the Water, and the Blood." By the objection of the Euſebians, it then appears that the teſtimony of "the Three in "heaven" was not in their books; and by the anſwer of the Catholicks it is as evident, that it was not in theirs. For while they anſwer by inſtancing the "the Spirit, Water, and Blood," they could not have miſſed of "the Father, the Word, and the Holy "Ghoſt;" had they been connumerated, and called one in the words immediately before; and to anſwer by inſtancing in theſe, would have been far more to their purpoſe, becauſe it was the very thing in queſtion. In like manner the Eunomians, in diſputing againſt the Catholicks, had objected, that the Holy Ghoſt is no where in Scripture conjoined with the Father and the Son, except in the form of baptiſm: which is as much as to ſay, that the teſtimony of "the Three in heaven" was not in their books: and yet St. Baſil (r), whilſt he is very diligent in returning an anſwer to them, and perplexes himſelf in citing places, which are nothing to the purpoſe, does not produce this text of "the "Three in heaven," though it be the moſt obvious, and the only proper paſſage, had it been then in the Scriptures; and therefore he knew nothing of it. The objection of the Eunomians, and the anſwer of the Catholicks, ſufficiently ſhew that it was in the books of neither party. Beſides all this, the tenth epiſtle of pope Leo, mentioned above, was that very famous epiſtle to Flavian, patriarch of Conſtantinople, againſt Eutyches, which went about through all the churches, both Eaſtern and Weſtern, being tranſlated into Greek, and ſent about in the Eaſt by Flavian. It was generally applauded in the Weſt, and read in the council of Chalcedon, and there ſolemnly approved and ſubſcribed by all the biſhops; and in this epiſtle the text was thus cited: "*Et ſpiritus eſt, qui teſtificatur, quoniam Chriſtus eſt ve-* "*ritas: quia Tres ſunt, qui teſtimonium dant, ſpiritus, aqua, et* "*ſanguis*; *et hi Tres Unum ſunt.*" And by putting πνευμα (according to the Greek reading) for *Chriſtus*, which is ſtill the vul-

(r) Lib. 5. adverſus Eunomium ſub finem.

RECORD OF gar Latin, it was thus tranſlated by the Greeks: "και το πνευμα εσιν το μαρτυρουν· επειδη το πνευμα εσιν η αληθεια· τρεις γαρ εισιν "οι μαρτυρουντες, το πνευμα, και το ὑδωρ, και το αἱμα· και οι τρεις το "ἑν εισι." So then we have the reading, quoted by the pope, owned in the Weſt, and ſolemnly ſubſcribed in the Eaſt by the fourth general council, and therefore it continued the publick received reading in both the Eaſt and Weſt, till after the age of that council.

XVI. So then the teſtimony of "the Three in heaven," which, in the times of theſe controverſies, would have been in every body's mouth, had it been in their books, was wholly unknown to the churches of thoſe ages. All that they could find in their books was the teſtimony of "the Water, the Spirit, and the "Blood." Will you now ſay, that the teſtimony of "the Three "in heaven" was razed out of their books by the prevailing Arians? Yes, truly, thoſe Arians were crafty knaves, that could conſpire ſo cunningly and ſlily all the world over at once (as at the word of a Mithridates) in the latter end of the reign of the emperor Conſtantius, to get all men's books in their hands, and correct them without being perceived: ay, and conjurors too, to do it without leaving any blot or chaſm in their books, whereby the knavery might be ſuſpected and diſcovered; and to wipe away the memory of it out of all men's brains; ſo that neither Athanaſius, or any body elſe, could afterwards remember that they had ever ſeen it in their books before; and out of their own books too; ſo that when they turned to the con-ſubſtantial faith, as they generally did in the Weſt, ſoon after the death of Conſtantius, they could then remember no more of it than any body elſe. Well, then, it was out of their books in Jerome's age, when he pretended it was in; which is the point we are to prove; and when any body can ſhew, that it was in their books before, it may be pertinent to conſider that point alſo: but till then we are only to enquire how, ſince it was out, it came into the copies that are now extant. For they that, without proof, accuſe the Hereticks of corrupting books, and upon that pretence correct them at their pleaſure without the authority of ancient manuſcripts, as ſome learned men of the fourth and fifth centuries

THE THREE IN HEAVEN.

centuries uſed to do, are falſaries by their own confeſſion, and certainly need no other confutation. And therefore if this reading was once out, we are bound in juſtice to believe, that it was out from the beginning; unleſs the razing of it out can be proved by ſome better argument, than that of pretence and clamour.

XVII. Will you now ſay, that Jerome followed ſome copy different from any which the Greeks were acquainted with? This is to overthrow the authority of his verſion by making him depart from the received Greeks; and beſides, it is contrary to what he himſelf ſeems to repreſent. For in his blaming not the vulgar Greek copies, but the Latin interpreters only, which were before his time, as if they had varied from the received Greek, he repreſents, that he himſelf followed it. He does not excuſe, and juſtify himſelf for reading differently from the received Greek, to follow a private copy, but accuſes former interpreters, as if, in leaving out the teſtimony of "the Three in "heaven," they had not followed the received Greek, as he did. And therefore ſince the Greeks knew nothing of this teſtimony, the authority of his verſion ſinks; and that the rather, becauſe he was then accuſed of corrupting the text, and could not perſuade either the Greeks or the Latins of thoſe times to receive his reading. For the Latins received it not till many years after his death; and the Greeks not till this preſent age, when the Venetians ſent it amongſt them in printed books: and their not receiving it was plainly to approve the accuſation.

XVIII. The authority of this verſion being thus far diſcuſſed, it remains, that we conſider the authority of the manuſcripts, wherein we now read the teſtimony of "the Three in heaven." And by the beſt inquiry that I have been able to make, it is wanting in the manuſcripts of all languages but the Latin. For, as we have ſhewn, that the Æthiopick, Syriac, Arabick, Armenian and Sclavonian verſions, ſtill in uſe in the ſeveral Eaſtern nations, Ethiopia, Egypt, Syria, Meſopotamia, Armenia, Muſcovy, and ſome others, are ſtrangers to this reading, and that it was antiently wanting alſo in the French: ſo I am told by thoſe who have been in Turkey, that it is wanting to this day in the Greek

RECORD OF

Greek manuſcripts, which have been brought from thoſe parts into the Weſt; and that the Greeks, now that they have got it in print from the Venetians, when their manuſcripts are objected againſt it, pretend that the Arians razed it out. A reading to be found in no manuſcripts but the Latin, and not in the Latin before Jerome's age, as Jerome himſelf confeſſes, can be but of little authority: and this authority ſinks, becauſe we have already proved the reading ſpurious by ſhewing, that it was heretofore unknown, both to the Weſtern and the Eaſtern churches, in the times of the great controverſy about the Trinity. But, however, for further ſatisfaction, we ſhall now give you an account of the Latin and Greek manuſcripts; and ſhew, firſt, how, in the dark ages, it crept into the Latin manuſcripts out of Jerome's verſion; and then how it lately crept out of the Latin into the printed Greek without the authority of MSS; thoſe, who firſt publiſhed it in Greek, having never yet ſo much as ſeen it in any Greek manuſcript.

XIX. That the vulgar Latin, now in uſe, is a mixture of the old vulgar Latin, and of Jerome's verſion together, is the received opinion. Few of theſe manuſcripts are above four or five hundred years old. The lateſt generally have the teſtimony of "the "Three in heaven:" the oldeſt of all uſually want it; which ſhews, that it has crept in by degrees. Eraſmus notes it to be wanting in three very ancient ones; one of which was in the pope's library at Rome; the other two were at Bruges; and he adds, that in another manuſcript belonging to the library of the Minorites in Antwerp, the teſtimony of "the Three in heaven" was noted in the margin in a newer hand. Peter Cholinus notes in the margin of his Latin edition of the Scriptures, printed anno Chriſti 1543 and 1544, that it was wanting in the moſt ancient manuſcript of the Tugurine library. Dr. Gilbert Burnet has lately, in the firſt letter of his travels, noted it wanting in five other ones kept at Straſburg, Zurich, and Baſil: one of which MSS. he reckons about 1000 years old, and the other four about 800. F. Simon has noted it wanting in five others in the libraries of the king of France, Monſ. Colbert, and the Benedictines of the abby of St. German's. An ancient and diligent collator

THE THREE IN HEAVEN.

collator of manuſcripts, cited by Lucas Brugenſis by the name of Epanorthotes, notes in general, that it was wanting in the ancient Latin manuſcripts. Lucas himſelf, collating many Latin ones, notes it to be wanting in only *five*, that is, in the few old ones he had, his manuſcripts being almoſt all of them new ones. For he praiſes (f) the Codex Lobienſis written anno Chriſti 1084, and the Codex Tornacenſis written anno Chriſti 1105, as moſt ancient and venerable for their antiquity, and uſed others much more new, of which a great number was eaſily had; ſuch as was the Codex Buſlidianus, written anno Chriſti 1432, that is, but eight years before the invention of printing. The Lateran council, collected under Innocent the Third, anno Chriſti 1215, canon 2, mentions Joachim, the abbot, quoting the text in theſe words: "*Quoniam in canonicâ* "*Johannis epiſtolâ, quia Tres ſunt, qui teſtimonium dant in Cœla,* "*Pater, et Verbum, et Spiritus; et hi Tres Unum ſunt: ſtatimque* "*ſubjungitur. Et Tres ſunt, qui teſtimonium dant in terrâ, Spi-* "*ritus, Aqua, et Sanguis, et Tres Unum ſunt: ſicut in codicibus* "*quibuſdam invenitur.*" This was written by Joachim (t) in the papacy of Alexander the Third, that is, in or before the year 1180, and therefore this reading was then got but into ſome books. For the words, "*ſicut in codicibus quibuſdam invenitur,*" refer as well to the firſt words of Joachim, "*Quoniam in cano-* "*nicâ Johannis epiſtolâ legitur,*" as to the text, "*ſtatimque ſubjun-* "*gitur*;" and more to the firſt, than the text; becauſe the firſt part of the citation was then but in ſome books, as appears by ancient manuſcripts; but the ſecond part was in almoſt all: the words "*Tres Unum ſunt,*" being in all the books which wanted the teſtimony of "the Three in heaven;" and in moſt of thoſe which had it; though afterwards left out in many, when branded by the ſchoolmen for Arian.

XX. But to go to the original of the corruption. Gregory the Great (u) writes, that Jerome's verſion was in uſe in his time; and therefore no wonder if the teſtimony of "the Three in hea-

(f) Lucas Brug. in calce annot.
(t) Vide Math. Paris Hiſtor. Angl. A. D. 1179.
(u) Vide Walton's Prolegomena x. 5.

"ven"

RECORD OF "ven" began to be cited out of it before. Eugenius, biſhop of Carthage, in the ſeventh year of Hunneric, king of the Vandals, anno Chriſti 484, in the ſummary of his faith exhibited to the king, cited it the firſt of any man, ſo far as I can find. A while after Fulgentius, another African biſhop, diſputing againſt the ſame Vandals, cited it again, and backed it with the fore-mentioned place of Cyprian, applied to the teſtimony of "the Three in heaven." And ſo it is probable, that by that abuſed authority of Cyprian it began firſt in Afric, in the diſputes with the ignorant Vandals, to get ſome credit; and thence at length crept into uſe. It occurs alſo frequently in Vigilius Tapſenſis, another African biſhop, contemporary to Fulgentius. In its defence, ſome alledge earlier writers; namely, the firſt epiſtle of pope Hyginus, the firſt epiſtle of pope John II. the book of Idacius Clarus againſt Varimadus; and the book, *De unitâ Deitate Trinitatis*, aſcribed to Athanaſius. But Chiffletius, who publiſhed the works of Victor Vitenſis, and Vigilius Tapſenſis, ſufficiently proves the book againſt Varimadus to be this Vigilius's, and erroneouſly aſcribed to Idacius. To the ſame Vigilius he aſſerts alſo the book, *De unitâ Deitate Trinitatis*. Certainly Athanaſius was not its author. All the epiſtles of Hyginus, except the beginning and the end, and the firſt part of the epiſtle of pope John, wherein the teſtimony of "the Three in "heaven" is cited, are nothing elſe than fragments of the book againſt Varimadus, deſcribed word by word by ſome forger of decretal epiſtles, as may appear by comparing them. So then Eugenius is the firſt upon record that quotes it.

XXI. But though he ſet it on foot among the Africans, yet I cannot find that it became of authority in Europe before the revival of learning in the twelfth and thirteenth centuries. In thoſe ages St. Barnard, the Schoolmen, Joachim, and the Lateran council ſpread it abroad, and Scribes began generally to inſert it into the text: but in ſuch Latin manuſcripts and European writers, as are ancienter than thoſe times, it is ſcarce to be met with.

XXII. Now that it was inſerted into the vulgar Latin out of Jerome's verſion is manifeſt by the manner, how the vulgar Latin and

and that verſion came to be mixed. For it is agreed that the Latines, after Jerome's verſion began to be of uſe, noted out of it his corrections of the vulgar Latin in the margin of their books. And theſe the tranſcribers afterwards inſerted into the text. By this means, the old Latin has been ſo generally corrected, that it is no where to be found ſincere. It is Jerome that we now read, and not the old vulgar Latin; and what wonder, if in Jerome we read the teſtimony of "the Three in heaven?" For who, that inſerted the reſt of Jerome into the text, would leave out ſuch a paſſage for the Trinity, as this hath been taken to be? THE THREE IN HEAVEN.

XXIII. But to put the queſtion out of diſpute, there are footſteps of the inſertion ſtill remaining. For in ſome old manuſcripts, it has been found noted in the margin; in others, the various readings are ſuch as ought to ariſe, by tranſcribing it out of the margin into the text. I ſhall only mention the three following varieties. Of the manuſcripts which have not the teſtimony of "the Three in heaven;" ſome have the words *in terrâ*, in the eighth verſe, but the moſt want it; which ſeems to proceed from hence, that ſome, before they allowed ſo great an addition to the text, as the teſtimony of "the Three in heaven" noted only *in terrâ*, in the margin of their books, to be inſerted into the teſtimony of the Spirit, Water and Blood. Of the manuſcripts which have the teſtimony of "the Three in heaven," ſome in the eighth verſe have "*hi Tres Unum ſunt*." Others not. The reaſon of this ſeems to be, that of thoſe who noted this teſtimony in the margin, ſome blotted out "*Et hi Tres* "*Unum ſunt*" in the eighth verſe, according to Jerome; and others did not. And, laſtly, the teſtimony of "the Three in "heaven" is in moſt books ſet before the teſtimony of "the "Three in earth;" in ſome, it is ſet after. So Eraſmus notes two old books, in which it is ſet after; Lucas Brugenſis a third; and Heſſelius (if I miſremember not) a fourth; and ſo Vigilius Tapſenſis (x) ſets it after: which ſeems to proceed from hence, that it was ſometimes ſo noted in the margin, that the reader or

(x) Vigilius libr. adverſ. Varimadum. cap. 5.

RECORD OF transcriber knew not whether it were to come before or after. Now these discords in the Latin manuscripts, as they detract from the authority of the manuscripts, so they confirm to us, that the old vulgar Latin has in these things been tampered with, and corrected by Jerome's version.

XXIV. In the next place, I am to shew how, and when, the testimony of "the Three in heaven" crept out of the Latin into the Greek. Those, who first printed the Greek Testament, did generally, in following their manuscripts, omit the testimony of "the Three in heaven," except in *Spain*. For it was omitted in the first and second edition of Erasmus, anno Christi 1516 and 1519: in the edition of Francis Asulan, printed at Venice by Aldus, anno Christi 1518: in that of Nicholas Gerbelius, printed at Haganau, anno Christi 1521: and a little after, in that of Wolfius Cephalius, printed at Strasbourg, anno Christi 1524: and again in 1526, in the Badian edition, as Erasmus notes; and in that of Simon Colinæus at Paris, anno Christi 1534 (y). At the same time it was omitted in some editions of other Western languages, as in the Saxon and German editions of Luther; and in the Latin Tugurine editions of Peter Cholins, anno Christi 1543 and 1544. The first edition in Greek, which has the testimony of "the Three in heaven," was that of cardinal Ximenes, printed at Complutum in Spain in 1515; but not published before the year 1521. The cardinal, in his edition, used the assistance of several divines, which he called together to Complutum, there founding an university, anno Christi 1517, or a little before. Two of those divines were Antonius Nebrissensis and Stunica. For Stunica then resided at Complutum; and in the preface (z) to a treatise he wrote against Erasmus, gives this testimony of himself; "That he had spent "some years in reading the holy Scriptures in Hebrew, Greek "and Latin; and had diligently collated the Hebrew and Greek "exemplars

(y) "In editis exemplaribus nonnullis non legit ut in Aldinâ et Badianâ editione.—Addo, "nec in Græco Testamento Gerbelii Haganoæ, 1521; nec in Colinæi, Parisiis edito." *Gomarus in h.*

(z) "Cùm præsertim, si quisquam alius; et nos quoque his de rebus, nostro quodam jure, "judicium ferre possumus. [Quippe] qui non paucos annos in sanctis Scripturis veteris et Novi "Testamenti,

"exemplars with the Latin copies." This book, displeasing the cardinal, was not printed till after his death; and then it came forth at Complutum, anno Christi 1520. The year before one Lee, an Englishman, writ also against Erasmus; and both Stunica and Lee, amongst other things, reprehended him for omitting the testimony of "the Three in heaven." Afterwards Erasmus, finding the Spaniards, and some others of the Roman church, in a heat against him, printed this testimony in his third edition, anno Christi 1522; representing, "That in his former "editions he had printed the text, as he found it in his manu-"scripts; but now there being found in England one manuscript "which had the testimony of *the Three in heaven*, he had in-"serted it, according to that manuscript; for avoiding the ca-"lumnies raised against him." And so it continued in his two following editions. And at length Robert Stephens, anno Christi 1550, reprinted Erasmus's edition, with some few alterations, and various lections, taken out of the Complutensian edition, and fifteen Greek manuscripts, which he named after the numeral letters, α, ε, γ, δ, ε, &c. putting α for the Complutensian edition, and ε, γ, δ, ε, &c. for the manuscripts in order; and noting in the margin, that the testimony of "the Three in heaven" was wanting in the seven manuscripts, δ, ε, ζ, θ, ι, ια, ιγ. Whence Beza (aa) tells us, that he had read it in the rest. His words are, "*Legit Hieronymus, legit Erasmus in Britannico codice, et in Com-*"*plutensi editione. Legimus et nos in nonnullis Roberti nostri vete-*"*ribus libris.*" And this is the original and authority of the printed editions. For these are the editions ever since followed by all the West; and of late years propagated by the Venetian presses into Greece; and nothing further, that I know of, has been discovered in any manuscripts in favour of these editions. THE THREE IN HEAVEN.

XXV. Now to pull off the vizard, I cannot but, in the first place, extremely complain of Beza's want of modesty and cau-

"Testamenti, Hebraicè, Græcè, et Latinè perlegendis consumpserimus; ac Hebraica, Græcique "ipsa divinarum literarum exemplaria cum Latinis codicibus diligentissimè contulerimus. Longâ "igitur lectione ac experientiâ jampridem edocti, quantum tralationi huic ecclesiasticæ Novi "Testamenti deferendum sit, ni fallor, optimè novi." *Hæc Stunica in prom. libri sui.*

(aa) Beza in hunc locum.

RECORD OF tion in expreſſing himſelf. ([bb]) In the preface to his annotations, deſcribing what helps he had in compoſing his firſt edition, he tells us, "That he had the annotations of Valla, Stapulenſis, "and Eraſmus, and the writings of the ancients and moderns "collated by himſelf; and out of Stephens's library, the exem- "plar, which Stephens had collated with about twenty-five ma- "nuſcripts, almoſt all of which were printed." He ſhould have ſaid ſeventeen; for that number he puts in other places, and in his annotations cites no more. So then he had the collations of two more manuſcripts, than Stephens has given us in print. And this was all his furniture. The original manuſcripts he does not here pretend to have; nor could he have them: for they were not Stephens's manuſcripts; but belonged to ſeveral libraries in France and Italy. The manuſcript ε, Stephens himſelf never ſaw; but had only various lections collected out of it by his friends in Italy. The manuſcripts γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, ι, ιε, were not Stephens's, but belonged to the library of the king of France, to whom Stephens was printer. The other ſix books, θ, ια, ιε, ιγ, ιδ, ις, Stephens had not out of his own library, but borrowed them for a time from ſeveral places to collate, his friends ſtudying to promote the deſign of his edition. And yet Beza in his annotations, when he would favour any text, cites the collations of Stephens in ſuch a manner, as if he had the very original manuſcripts at Geneva before his eyes. And where Stephens does not cite various lections, there he reckons, that in the text of Stephens's collated books he read all the manuſcripts. So in Mark vi. 11, where Stephens notes a certain period to be wanting in the manuſcript copies ε and η; Beza ſaith, "*Hæc periodus* "*in omnibus exemplaribus Græcis legitur, exceptis ſecundo et* "*octavo.*" In the Acts xiii. 33, becauſe Stephens had noted no various lections, Beza affirms of the Greek text, "*Ita ſcriptum* "*invenimus in omnibus vetuſtis codicibus.*" In 1 John iv. 3, where Stephens is ſilent, Beza ſpeaks, "*Sic legitur in omnibus* "*Græcis exemplaribus, quæ quidem mihi inſpicere licuit.*" In James i. 22,

([bb]) "Non deſunt, qui Bezam nimis audacem fuiſſe judicant, dum à receptâ lectione ſæpius "ſine neceſſitate recedit; et unius, interdum nullius, codicis authoritate fretus, prætoriam ex- "ercet

i. 22, where Stephens is again ſilent, Beza tells us of the word μονον, "*Ego in omnibus noſtris vetuſtis libris inveni.*" And ſo, where Stephens in the margin had noted the teſtimony of "the "Three in heaven" to be wanting in ſeven manuſcripts, he thinks that, in reading the text of Stephens's collated book, he reads it in the reſt; and ſo tells us, "*Legimus et nos in nonnullis* "*Roberti Stephani codicibus.*" This he did in the firſt edition of his annotations. Afterwards, when he had got two real manuſcripts, the Claromontan, and that, which at length he preſented to the Univerſity of Cambridge (in both which the canonical epiſtles are wanting); in the epiſtle to his fourth edition, in reckoning up the books he then uſed, he puts only theſe two, and the ſeventeen of Stephens; and, in his fifth edition, he writes ſummarily, that he uſed nineteen manuſcripts, joining with thoſe two real ones the collations of Stephens, as if in thoſe he had ſeventeen others; which ſufficiently explains his way of ſpeaking in his annotations. But whilſt he had not the manuſcripts themſelves to read with his own eyes, it was too hard and unwarrantable a way of ſpeaking to tell us, "*Legimus et nos in nonnullis* "*Roberti Stephani codicibus*;" and therefore, in his later editions, he corrects himſelf, and tells us only, that the reading doth "*Extare in nonnullis Stephani veteribus libris.*" Thus Beza argues from Stephens's book of collations; and the ſame inference has been made by Lucas Brugenſis, and others, ever ſince from Stephens's forementioned edition of that book. "For," ſay they, "Stephens had fifteen manuſcripts in all, and found the teſtimo- "ny of *the Three in heaven* wanting but in ſeven; and therefore "it was in the other eight; and ſo being found in the greater "part of his manuſcripts, has the authority and manuſcripts on "its ſide." Thus they argue; and this is the great argument by which the printed Greek has hitherto been juſtified. THE THREE IN HEAVEN.

XXVI. But if they pleaſe to conſider the buſineſs a little better, they will find themſelves very much miſtaken. For though Stephens had fifteen manuſcripts in all, yet all of them did not contain all the Greek Teſtament. Four of them noted γ, ϛ, ιε, ιδ,

"ercet poteſtatem, ex conjecturis mutando et interpolando textum ſacrum pro lubitu." *Walton Prolegom. IV. Sect.* 15. *in Bibl. Polyglott.*

RECORD OF had each of them the four goſpels only. Two, noted ε, η, contained only the goſpels, and the Acts of the apoſtles. One, noted ις, contained the Apocalypſe only. One, noted ιε, had only the Apocalypſe, with St. Paul's epiſtles to the Corinthians, Galatians, Epheſians, Philippians and Coloſſians. The other ſeven, noted δ, ε, ζ, θ, ι, ια, ιγ, contained both St. Paul's epiſtles and the canonical ones, beſides ſome other books; namely, the manuſcript ζ, contained the epiſtles and goſpels; the manuſcripts ι, ια, ιγ, the epiſtles and acts of the apoſtles; and the manuſcripts δ, ε, θ, the epiſtles, goſpels and acts. And this any one may gather, by noting what manuſcripts the various lections are cited out of, in every book of the New Teſtament. For in the various lections of the canonical epiſtles, and thoſe to the Theſſalonians, Timothy, Titus, and the Hebrews, are found theſe ſeven manuſcripts, δ, ε, ζ, θ, ι, ια, ιγ, every where cited, and no more than theſe. The ſame alſo, and no more, are cited in the epiſtles to the Theſſalonians, Timothy, Titus, and the Hebrews; one numeral error (whether of the ſcribe or typographer) excepted. Stephens therefore did collect various lections of the epiſtles out of only theſe ſeven manuſcripts, δ, ε, ζ, θ, ι, ια, ιγ; and in all theſe ſeven, he found the teſtimony of "the Three in heaven" to be wanting; as you may ſee noted in the margin of his edition.

XXVII. And that this teſtimony was wanting in all Stephens's manuſcripts, is apparent alſo by its being generally wanting in the manuſcripts which are now extant in France. For father Simon (cc) tells us, "That after a diligent ſearch in the library of the "king of France, and in that alſo of Monſieur Colbert, he could "not find it in any one manuſcript; though he conſulted ſeven "manuſcripts in the king's library, and one in Colbert's." And becauſe Stephens had ſome of his various lections from Italy, I will add, that a gentleman, who, in his travels, had conſulted

(cc) Simon's Critic. Hiſtory of the New Teſt. chap. 18.

(dd) "Dicam mihi diverſis temporibus plura fuiſſe exemplaria, quam ſeptem; [ſcilicet Græca] "nec in ullo horum repertum, quod in noſtris [ſcilicet Latinis] legitur. Quod ſi contigiſſet "unum exemplar, in quo fuiſſet, quod nos legimus, nimirum illinc adjeciſſem, quod in cæteris "aberat. Id quia non contigit, quod ſolum licuit, feci; indicavi quid in Græcis codicibus mi-"nus eſſet." *Hæc Eraſmus contra Lucum, in hunc locum.*

twelve

twelve MSS. in ſeveral libraries in Italy, aſſured me that he found THE THREE IN HEAVEN. it wanting in them all. One of the twelve, was that moſt ancient and moſt famous MS. in the pope's library, written in capital letters.

XXVIII. So then the authority of the printed books reſts only upon the authority of the editions of Eraſmus, and cardinal Ximenes. But ſeeing that Eraſmus omitted it in his two firſt editions, and inſerted it unwillingly, againſt the authority of his manuſcripts, in his three laſt; the authority of theſe three can be none at all. When Lee, upon Eraſmus's putting forth his ſecond edition, fell foul upon him for leaving out the teſtimony of "the Three in heaven," Eraſmus (dd) anſwered, "That he had conſulted more "than ſeven Greek manuſcripts, and found it wanting in them "all; and that if he could have found it in any one manuſcript, "he would have followed that in favour of the Latin." Hence notice was ſent to Eraſmus out of England, that it was in a manuſcript there, and thereupon to avoid (ee) their calumnies (as he ſaith), he printed it in his following editions; notwithſtanding that, he ſuſpected that manuſcript to be a new one, corrected by the Latin. But ſince, upon enquiry, I cannot learn that they in England ever heard of any ſuch manuſcript, but from Eraſmus; and ſince he was only told of ſuch a manuſcript in the time of the controverſy between him and Lee, and never ſaw it himſelf; I cannot forbear to ſuſpect, that it was nothing but a trick put upon him by ſome of the popiſh clergy, to try if he would make good what he had offered, the printing of the teſtimony of "the Three in heaven" by the authority of one Greek copy, and thereby to get it into his edition (ff). Greek manuſcripts of the Scriptures are things of value, and do not uſe to be thrown away; and ſuch a manuſcript, for the teſtimony of "the Three in heaven," would have made a greater noiſe than

(ee) "Ex hoc igitur codice Britannico repoſuimus, quod in noſtris dicebatur deeſſe; ne cui ſit "anſa calumniandi. Quanquam et hunc ſuſpicor, et Latinorum codices, fuiſſe caſtigatum. "Poſteaquam enim concordiam inierunt cum eccleſiâ Romanâ, ſtuduerunt et hâc in parte cum "Romanis conſentire." *Eraſmi Annotation. in hunc locum Editio tertia et ſequen.*

(ff) "Verſiculus 1. Joan. v. 7. in Syriacâ, ut et vetuſtiſſimis Græcis exemplaribus, noſtro "Alexandrino, aliis manuſcriptis Græcis, quos contulimus, non reperitur." *Walton. Prolegomena. xix. 23. in bibli. Polyglot.*

the

RECORD OF

the reſt have done againſt it. Let thoſe who have ſuch a manuſcript, at length tell us where it is.

XXIX. So alſo let them, who inſiſt upon the edition of cardinal Ximenes, tell us by what manuſcript he printed this teſtimony; or, at leaſt, where any ſuch manuſcript of good note is to be ſeen. For till then I muſt take the liberty to believe, that he printed nothing elſe than a tranſlation out of the Latin, and that for theſe reaſons.

Firſt: Becauſe in the preface to his edition of the New Teſtament we are told, that this teſtament was printed after manuſcripts taken out of the pope's library; and theſe the cardinal only borrowed (gg) thence, and therefore returned them back ſo ſoon as his edition was finiſhed. And Caryophilus ſome time after, by the pope's command, collating the Vatican manuſcripts, found the teſtimony of "the Three in heaven," wanting in them all. I do not ſay but that the cardinal had other manuſcripts; but theſe were the chief, and the only ones he thought worth while to tell his reader of.

Secondly: I ſtartle at the marginal note in this place of the cardinal's edition. For it is beſide the uſe of this edition, to put notes in the margin of the Greek text. I have not found it done above thrice in all this edition of the New Teſtament; and therefore there muſt be ſomething extraordinary; and that, in reſpect of the Greek, becauſe it is in the margin of this text. In 1 Corinth. xv. there is noted in this margin a notable variation in the Greek reading. In Matthew vi. 13, where they, in their edition, recede from the Greek copies, and correct it by the Latin, they make a marginal note, to juſtify their doing ſo. And ſo here, where the teſtimony of "the Three in heaven" is generally wanting in the Greek copies, they make a third marginal note, to ſecure themſelves from being blamed for printing it.

(gg) "Accivit è Vaticanâ Romæ Bibliothecâ, bonâ cum Leonis X. pontificis maximi veniâ." As Gaſpar Bellerus, in his epiſtle prefixed to the Quinquagena of Antonius Nabriſſenſis, expreſſes it.

(hh) The marginal note is this: "Sanctus Thomas, in expoſitione ſecundæ decretalis de ſummâ "Trinitate et Fide Catholicâ, tractans iſtum paſſum contra Abbatem Joachim, viz. 'Tres ſunt, "qui teſtimonium dant in Cœlo, Pater, Verbum, et Spiritus Sanctus" dicit ad literam verba ſequentia. "Et ad inſinuendam Unitatem Trium Perſonarum ſubditur, et 'Hi Tres Unum ſunt;'

THE THREE IN HEAVEN.

it. Now in ſuch a caſe as this, there is no queſtion but they would make the beſt defence they could; and yet they do not tell of any various lections in the Greek manuſcripts, nor produce any one Greek manuſcript on their ſide, but run to the authority of Thomas Aquinas (hh). The Greek manuſcripts have the text thus, "For there are Three that bear record, the Spirit, the "Water and the Blood; and theſe Three are One." In many of the Latin manuſcripts, the words "theſe Three are One" are here omitted, and put only at the end of the teſtimony of "the "Three in heaven," before that of "the Spirit, Water and "Blood:" in others, they are put after both teſtimonies. In the Complutenſian edition, they follow the former copies, and juſtify their doing ſo, by the authority of Thomas Aquinas (hh); "Thomas, ſay they, in treating of the Three which bear wit-"neſs in heaven, teaches, that the words 'theſe Three are One' "are ſubjoined for inſinuating the Unity of the eſſence of the "Three Perſons. And whereas one Joachim interpreted this "Unity to be only in *love*, and *conſent*, it being thus ſaid of the "Spirit, Water and Blood in ſome copies, that 'theſe Three are "One':" Thomas replied, "That this laſt clauſe is not extant "in the true copies; but was added by the Arians for pervert-"ing the ſenſe." Thus far this annotation. Now this plainly reſpects the Latin copies (for Thomas underſtood not Greek) and therefore part of the deſign of this annotation is to ſet right the Latin reading. But this is not the main deſign. For ſo the annotation ſhould have been ſet in the margin of the Latin verſion. Its being ſet in the margin of the Greek text ſhews, that its main deſign is to juſtify the Greek by the Latin thus rectified and confirmed. Now to make Thomas thus, in a few words, do all the work, was very artificial; and in Spain, where Thomas is of apoſtolic authority, might paſs for a very judicious and

"ſunt;" quandoquidem dicitur propter eſſentiæ Unitatem. Sed hoc Joachim perverſè trahere "volens ad Unitatem charitatis et conſenſûs, inducebat conſequentem auctoritatem. Nam ſub-"ditur ibidem, 'Et Tres ſunt, qui teſtimonium dant in terrâ, Spiritus Sanctus, Aqua et "Sanguis:' et in quibuſdam libris additur, 'Et hi Tres Unum ſunt.' Sed hoc in veris exem-"plaribus non habetur; ſed dicitur eſſe appoſitum ab Hæreticis Arianis ad pervertendum intel-"lectum ſanum auctoritatis præmiſſæ de Unitate eſſentiæ Trium Perſonarum." Hæc Beatus Thomas, ubi ſupra.

RECORD OF

ſubſtantial defence of the printed Greek. But to us, Thomas Aquinas is no apoſtle. We are ſeeking for the authority of Greek manuſcripts.

A third reaſon why I conceive the Complutenſian Greek to have been in this place a tranſlation from the Latin, is, becauſe Stunica (who, as I told you, was one of the divines employed by the cardinal in this edition; and at that very time wrote againſt Eraſmus), when, in his objections, he comes to this text of the teſtimony of "the Three in heaven," he cites not one Greek manuſcript for it againſt Eraſmus; but argues wholly from the authority of the Latin. On the contrary, he ſets down, by way of conceſſion, the common reading of the Greek manuſcripts (as well as his own, and that of others) in theſe words; "ὁτι τρεις εισιν οἱ μαρτυρουντες· το πνευμα, και το ὑδωρ, "και το αἱμα· και οἱ τρεις εις το ἑν εισι": and then condemns them all together without exception; and juſtifies the Latin againſt them by the authority of Jerome. "(ii) Know, ſaith he, "that in this place the Greek manuſcripts are moſt evidently cor-"rupted; but ours (that is, the Latin ones) contain the truth it-"ſelf, as they are tranſlated from the firſt original: which is ma-"nifeſt by the prologue of St. Jerome upon the epiſtles, &c." And this prologue (which he goes on to cite at length, and of which we gave you an account above) is all he argues in favour of the teſtimony of "the Three in heaven." In other places of Scripture, where he had Greek manuſcripts on his ſide, he produces them readily. So 1 Theſſalonians ii. 7, "*Ita quidem le-*"*gitur*," ſays he, "*in Græcis codicibus, quos ego viderim.*" In James i. 11, he ſaith, "*Sciendum in omnibus Græcis codicibus* "*πορειαις hîc legi per ει diphthongum.*" In 1 Theſſalonians v. 23, he ſaith, "*Cum in Græcis exemplaribus, quotquot ſunt,* ολοκληρον, "*et in Latinis* integer *hîc legatur pernemine diſcrepante, neſcio,* "*cur Eraſmus dixerit, &c.*" In Philipp. iv. 9, "*Si quidem in* "*omnibus*," ſaith he, "*Græcis codicibus*; ταυτα λογιζεσθε *hîc le-*"*gitur: neque Græci ſunt libri, qui* πραασετε *hoc loco, neque La-*"*tini,*

(ii) "Sciendum eſt, hoc loco codices apertiſſimè eſſe corruptos; noſtros verò veritatem ipſam, "ut à primâ origine traducti ſunt, continere; quod ex prologo B. Hieronymi ſuper epiſtolas ma-"niſeſtè

THE THREE IN HEAVEN.

"*tini, qui* agite; *niſi mendoſos utriuſque linguæ codices, cùm hæc* "*commentaretur Eraſmus, perlegit.*" After this manner does Stunica produce the manuſcripts uſed in the Complutenſian edition, when they make for him: and here he prŏduces them too, but it is for Eraſmus againſt himſelf. "Know," ſaith he, "that "in this place the Greek manuſcripts are moſt evidently corrupt-"ed." In other places, if he hath but one manuſcript on his ſide, he produces it magnificently enough; as the Codex Rhodienſis in his diſcourſes upon 2 Corinthians ii. 3. James i. 22. 2 Peter ii. 2. and other texts. Here he produces all the manuſcripts againſt himſelf, without excepting ſo much as one. And hence Eraſmus, in his anſwer to Stunica, gloried in the conſent of the Spaniſh manuſcripts with his own; and Sanctius Caranza, another of the Complutenſian divines, in his defence of Stunica, written preſently after, had nothing to reply in this point. Neither could Sepulveda, or the Spaniſh monks who next undertook the controverſy, find one Greek manuſcript, which here made againſt Eraſmus. Neither had Marchio Valeſius better ſucceſs, though, on that occaſion, he collated ſixteen Greek manuſcripts, eight whereof belonged to the king of Spain's library; and the other eight to other libraries of Spain: and he did it on purpoſe, to collect out of them whatever he could meet with in favour of the preſent vulgar Latin. Neither did the reprinting of the Complutenſian Bible by Arias Montanus, produce the notice of any ſuch manuſcript; though, on that occaſion, many manuſcripts, as well Greek as Latin, fetched from Complutum and other places, were collated by Arias, Lucas Brugenſis, Canter, and others.

XXX. So then, to ſum up the argument, the Complutenſian divines did ſometimes correct the Greek by the Latin, without the authority of any Greek manuſcript; as appears by their practice in Matthew vi. 13, and therefore their printing the teſtimony of "the Three in heaven" is no evidence that they did it by a manuſcript; but, on the contrary, for want of one, they

"niſeſtè apparet." Ait enim, "Quæ ſi ſicut ab eis digeſtæ ſunt; ita quoque ab interpretibus "fideliter in Latinum verterentur eloquium, &c."—*Hæc Stunica in h. locum. Ejus Liber exſtat in Criticor. vol. IX.*

RECORD OF contented themſelves with the authority of Thomas Aquinas: and Stunica confeſſed that they had none. Nor has all the zeal for this text been able ſince to diſcover one either in Spain, or any where elſe.

XXXI. And now you may underſtand whence it is, that the Complutenſian edition, and the reading of the pretended Engliſh manuſcript, ſet down by Eraſmus in his annotations, differ ſo much from one another. For the Complutenſian edition has the text thus: "Οτι τρεις εισιν οἱ μαρτυρουντες εν τῳ ουρανῳ, ὁ πατηρ, ὁ "λογος, και το ἁγιον πνευμα· και οἱ τρεις εις το ἑν εισι· και τρεις εισιν "οἱ μαρτυρουντες επι της γης, το πνευμα, και το ὑδωρ, και το αἱμα." The pretended Engliſh manuſcript thus: "Οτι τρεις εισιν οἱ μαρ- "τυρουντες εν τῳ ουρανῳ, πατηρ, λογος, και πνευμα· και ουτοι οἱ τρεις "ἑν εισιν· και τρεις μαρτυρουντες εν τῃ γῃ, πνευμα, και ὑδωρ, και "αἱμα." The differences are too great to ſpring from the bare errors of ſcribes, and ariſe rather from the various tranſlations of the place, out of Latin into Greek, by two ſeveral perſons.

XXXII. But whilſt theſe two readings, by their diſcord, confute one another; the readings of the real Greek manuſcripts by their agreement confirm one another as much. For Caryophilus, who, by the command of pope Urban the Eighth, collated the Vatican, and other manuſcripts, borrowed out of the principal libraries in Rome, found one common reading in them all, without the teſtimony of "the Three in heaven;" as you may ſee in thoſe his collations, printed in 1673, by Peter Poſſinus, in the end of his Catena of the Greek fathers upon Mark. He met with eight manuſcripts in all upon the epiſtles, and notes their reading thus: "1 Joan. v. 7. Manuſcripti octo (omnes nempe) "legunt, Οτι τρεις εισιν οἱ μαρτυρουντες, το πνευμα, και το ὑδωρ, και "το αἱμα; και οἱ τρεις εις το ἑν εισι." "*Porro totus ſeptimus ver-* "*ſus hujus capitis deſideratur in octo manuſcriptis codicibus Græcis,* "*&c.*" Thus Caryophilus.

XXXIII. The very ſame reading Eraſmus, in his annotations on this place, gives us of all his manuſcripts, which were more than ſeven; and ſo doth Stephens of all his ſeven, without noting any various

(kk) "Habuimus ab Hunnæo——id quod maximi facimus, MS. Bibl. correctorium ab incerto "auctore,

THE THREE IN HEAVEN.

various lections in them. Only the comma, which in Stephens's edition is (ſurely by miſtake) ſet after ουρανῳ, is to be put in its right place. The very ſame reading does Stunica alſo, in his book againſt Eraſmus, note out of the manuſcript, he had ſeen in Spain, as was ſeen above. Nor does Valeſius, in his collection of the ſixteen Spaniſh manuſcripts, note any various lections in this text. The ſame reading exactly have alſo the manuſcripts in England; namely, that moſt ancient and famous one in the king's library, which was conveyed thither from Ægypt through Greece, and publiſhed in Walton's Polyglott Bible; and the four at Oxford, viz, that in New College, and that in Magdalen College (both very old), and two in Lincoln College: and four or five other ancient ones lately collated at Oxford, in order to a new impreſſion of the Greek teſtament, as I am informed. The very ſame reading have alſo the three manuſcripts of Monſieur Petavius Gachon, a ſenator of Paris, whoſe various lections, collected by his ſon, John Gachon, were printed in the Oxford edition of the New Teſtament, anno Chriſti 1675. The ſame reading, without any variation, is publiſhed by Francis Aſulan in his edition, printed anno Chriſti 1518, by Aldus at Venice, out of the manuſcripts of thoſe parts. The ſame reading Oecumenius, ſix hundred years ago, found in the manuſcripts of Greece; as you may ſee in the text of his commentary on this epiſtle of St. John. The ſame reading alſo Cyril of Alexandria met with in the manuſcripts of Egypt, above eleven hundred years ago; as you may ſee in his citations of the text; both in his Theſaurus, lib. xiv. cap. 5. And in his firſt book *De Fide ad Reginas*, excepting that in the latter of theſe two citations, the particle "εις" is omitted; and "μαρτυρουσι" written for "οἱ μαρτυρουντες." And that the very ſame reading was alſo in the manuſcripts of the firſt ages, may be gathered from the conformity of this reading to all the ancient verſions.

XXXIV. It may ſeem by what has been hitherto ſaid, that this teſtimony is not to be found in the Greek manuſcripts. Epanorthotes (kk), whom Lucas Brugenſis deſcribes to be an ancient, accurate,

"auctore, quem Epanorthotem, aut correctorem fere vocamus, magnâ diligentiâ, ac fide contex- "tum

RECORD OF curate, full, and induſtrious collator of manuſcripts, found it wanting in all thoſe he met with. "*Epanorthotes*," ſaith Lucas, "*deeſſe hæc eadem Græcis libris, et antiquis Latinis annotat.*" Nor have other collators made a further diſcovery to this day. Lee, Stunica, and the reſt in England, Spain, Flanders, France and Italy, who conſpired againſt Eraſmus, could find nothing in the manuſcripts of thoſe parts againſt him; if that Phœnix be excepted, which once appeared to ſomebody ſomewhere in England, but could never ſince be ſeen. Heſſelius ([ll]), about the year 1565, profeſſor of divinity at Lovain, in his commentary on this place, ingenuouſly confeſſes it wanting in all the Greek manuſcripts then known, except two; the one in Spain, the other in England; meaning thoſe, by which the Complutenſian divines and Eraſmus printed it. Which two we have ſhewn to be none at all; unleſs one Annius dug up one in England. Since that time nothing further has been produced, beſides the imaginary books of dreaming Beza. And yet I will not ſay, but that it may hereafter be found in ſome Greek copies. For in the times of the holy war, the Latins had much to do in the Eaſt. They were long united to the Greek church: they made Latin patriarchs of Jeruſalem and Antioch: they reigned at Conſtantinople over the Greeks from the year 1204, for above fifty years together: and during this their kingdom, in the year 1215, was aſſembled the Lateran council, conſiſting of four hundred and fifteen biſhops, Greeks and Latins together; and therein the teſtimony of "the Three in heaven" was quoted out of ſome of the Latin manuſcripts, as we told you above. All which might occaſion ſome Greeks, as well as Latins, to note it in the margins of their books; and hence inſert it into the text in tranſcribing. For

" tum, ſecuto uti oportet antiquos noſtræ editionis codices, eoſque cum Hæbræis, Græcis, et vete-
" rum patrum commentariis ſedulo collatos: qui liber ad Geneſin viii. 7: latius à nobis deſcriptus
" eſt." Hæc Lucas; qui ad Geneſin viii. 7. dixit hunc librum multis annis ſcriptum, et pluribus forte compoſitum. Dein loco ex eo citato pergit. " Ad quæ dici quid poſſit? An
" quod libro fidendum non ſit? Non hoc dicet, qui evolverit; quæ namque à noſtri ſeculi ſcrip-
" toribus ex MSS. codicibus collectæ ſunt variæ lectiones, omnes propemodum in eo comperimus;
" et ad fontes fideliter examinatas deprehendimus.——*Scripſit hæc Lucas*, anno 1579: unde ſe-
" quitur correctorium ante diſputationes Eraſmicas de Teſtibus in Cœlo elaboratum eſſe."

([ll]) Heſſelius in hunc locum ait, " Manuſcripti Græci fere omnes ſic ſe habent. 'Quoniam
" Tres ſunt, qui teſtimonium dant in terrâ, Spiritus, Aqua et Sanguis, et hi Tres Unum ſunt,'
" nullâ

THE THREE IN HEAVEN.

For this is moſt certain, that ſome Greek manuſcripts have been corrected by the Latin ones. Such a book Eraſmus ([mm]) tells us, that he "once met with, and that there was ſuch another in "the pope's library." He ſuſpected alſo that book in England, out of which he printed the teſtimony of "the Three in hea-"ven," to be of the ſame kind; though I rather think it was none at all; unleſs ſome falſary of that age were at the pains to tranſcribe one or two of St. Paul's epiſtles. Such another book was one of thoſe, out of which Valeſius collected his various lections. Whence Mariana, into whoſe hands the manuſcript book of thoſe lections fell, tells us, that for that reaſon, in his annotations on the New Teſtament, he uſed thoſe lections but ſparingly and cautiouſly. And that Valeſius did meet with ſuch a corrected manuſcript, appears by the lections themſelves. For in the Apocalypſe xviii. 17, where the Greek reads "επι τοπον;" and the Latin tranſlates *in locum*, and by the error of one letter *in lacum*, as the books now have it; ſome Grecian has here corrected this book by the Latin, and written "επι λιμνην;" as it is in the lections of Valeſius, taken out of this. Again in the Apocalypſe ix. 11, where the Latin tranſlation, in expounding the names *Abaddon et Apollyon*, adds, "*Et Latinè habens nomen* "*exterminans*;" Valeſius notes the reading in his Greek copy to be "ρωμαιϛι εχων ονομα εξτερμινανς;" which certainly is a tranſlation of the Latin. Again, in the Apocalypſe xxi. 12, where the Greek has "αγγελους;" and ſome ancient Latin copies, *angelos*; but the far greater part of the Latin copies at preſent have *angulos*; Valeſius, in his manuſcript, reads "γωνιας." So in the Apocalypſe xix. 6, where the Greek is "οχλου πολλου;" the Latin, *turbæ magnæ*; and in the later copies, *tubæ magnæ*; Valeſius, in his manuſcript, reads "σαλπιγγος μεγαλης." In He-

" nullâ factâ mentione triplicis teſtimonii de Cœlo, 'Patris, Verbi et Spiritûs Sancti'." Dein codices aliter legentes deſcribendo ſic pergit: " Noſtro tempore duo Græci codices manuſcripti
" reperti ſunt; unus in Angliâ, et alter in Hiſpaniâ: quorum uterque hoc loco teſtimonium habet
" 'Patris, Verbi et Spiritûs Sancti'."

([mm]) " Hic obiter illud incidit admonendum, eſſe Græcorum quoſdam Novi Teſtamenti codices
" ad Latina exemplaria emendatos. Id factum eſt in fœdere Græcorum cum Romanâ eccleſia:
" quod fœdus teſtatur Bullâ, quæ dicitur Aurea: viſum eſt enim et hoc ad firmandam concor-
" diam pertinere. Et nos olim in hujuſmodi codicem indicimus; et talis adhuc dicitur aſſervari
" in Bibliothecâ Pontif. Verum ex his corrigere noſtros eſt Leſbiam, ut aiunt, admovere regu-
" lam."——*Eraſmus ad Lectorem. Editio 5ta Novi Teſtamenti.*

brews

RECORD OF

brews xiii. 2, for "ελαθον," *latuerunt*; and in later copies, *placuerunt*, Valeſius reads "ηρεσαν:" and in 1 Peter iii. 8, for "το δε "τελος," *in fine*; and by an error *in fide*, Valeſius reads "εν τη "πιςει δε." Theſe, and ſuch like inſtances, put the thing out of diſpute. Now, though Valeſius found not the teſtimony of "the "Three in heaven" in this manuſcript; and Eraſmus tells us, that he never ſaw it in any Greek manuſcript; and, by conſequence, not in that corrected one which fell into his hands, yet it may have crept out of the Latin into ſome other books, not yet taken notice of; and even in ſome manuſcripts, which, in other places, have not been corrected by the Latin, it may poſſibly have been inſerted by ſome of the Greek biſhops of the Lateran council, where the teſtimony of "the Three in heaven" was read. And therefore he, that ſhall hereafter meet with it in any book, ought firſt, before he inſiſt upon the authority of that book, to examine whether it has not been corrected by the Latin; and whether it be ancienter than the Lateran council, and empire of the Latins in Greece; for, if it be liable to either of theſe two exceptions, it can ſignify nothing to produce it.

XXXV. HAVING given you the hiſtory of the controverſy, I ſhall now confirm all that I have ſaid from the ſenſe of the text itſelf. For, without the teſtimony of "the Three in heaven," the ſenſe is good and eaſy, as you may ſee by the following paraphraſe inſerted in the text in a different character.

"WHO IS HE THAT OVERCOMETH THE WORLD, BUT HE THAT "BELIEVETH THAT JESUS IS THE SON OF GOD, that Son ſpo-"ken of in the Pſalms, where he ſaith, 'Thou art my Son; "this day have I begotten thee.' THIS IS HE THAT, after the "Jews had long expected him, CAME, firſt in a mortal body, BY "baptiſm of WATER, AND then in an immortal one by ſhed-"ding his BLOOD upon the Croſs, and riſing again from the "dead; NOT BY WATER ONLY, BUT BY WATER AND BLOOD; "being the Son of God, as well by his reſurrection from the "dead (Acts xiii. 33.) as by his ſupernatural birth of the Virgin "(Luke i. 35.) AND IT IS THE SPIRIT alſo, THAT, together "with

"with the Water and Blood, BEARETH WITNESS of the truth of THE THREE IN HEAVEN.
"his coming; BECAUSE THE SPIRIT IS TRUTH; and ſo a fit and "unexceptionable witneſs. FOR THERE ARE THREE THAT BEAR "RECORD of his coming; THE SPIRIT, which he promiſed to "ſend; and which was ſince ſhed forth upon us in the form of "cloven tongues, and in various gifts; THE baptiſm of WATER, "wherein God teſtified, 'This is my beloved Son;' AND THE "ſhedding of his BLOOD, accompanied with his reſurrection, "whereby he became the moſt faithful martyr, or witneſs, of "this truth. AND THESE THREE, the Spirit, the baptiſm, and "paſſion of Chriſt, AGREE IN witneſſing ONE, and the ſame "thing (namely, that the Son of God is come); and, therefore, "their evidence is ſtrong: for the law requires but two conſent-"ing witneſſes, and here we have three: AND IF WE RECEIVE "THE WITNESS OF MEN, THE threefold WITNESS OF GOD, "which he bare of his Son, by declaring at his baptiſm, 'This "is my beloved Son;' by raiſing him from the dead, and by "pouring out his Spirit on us, IS GREATER; and therefore ought "to be more readily received."

XXXII. This is the ſenſe plain and natural, and the argument full and ſtrong: but, if you inſert the teſtimony of "the Three "in heaven," you interrupt and ſpoil it. For the whole deſign of the apoſtle being here to prove to men by witneſs the truth of Chriſt's coming, I would aſk how the teſtimony of "the Three "in heaven" makes to this purpoſe. If their teſtimony be not given to men, how does it prove to them the truth of Chriſt's coming? If it be, how is the teſtimony in heaven diſtinguiſhed from that on earth? It is the ſame Spirit which witneſſes in heaven and in earth. If in both caſes it witneſſes to us men, wherein lies the difference between its witneſſing in heaven, and its witneſſing in earth? If, in the firſt caſe, it does not witneſs to men, to whom doth it witneſs? And to what purpoſe? And how does its witneſſing make to the deſign of St. John's diſcourſe? Let them make good ſenſe of it, who are able. For my part, I can make none. If it be ſaid that we are not to determine what is ſcripture, and what not, by our private judgments; I confeſs it in places not controverted: but in diſputable places, I love to

RECORD OF take up with what I can beſt underſtand. It is the temper of the hot and ſuperſtitious part of mankind, in matters of religion, ever to be fond of myſteries; and for that reaſon, to like beſt what they underſtand leaſt. Such men may uſe the apoſtle John as they pleaſe; but I have that honour for him, as to believe that he wrote good ſenſe; and therefore take that ſenſe to be *his*, which is the beſt: eſpecially ſince I am defended in it by ſo great authority. For I have on my ſide the authority of the Fourth General Council, and (ſo far as I know) of all the churches in all ages, except the modern Latin, and ſuch others as have lately been influenced by them; and that alſo of all the old verſions, and Greek manuſcripts, and ancient Latin ones: and nothing againſt me, but the authority of Jerome, and the credulity and heat of his followers. For to tell us of other manuſcripts, without ever letting us know, in what libraries they were to be ſeen: to pretend manuſcripts which, ſince their firſt diſcovery, could never be heard of; nor were then ſeen by perſons whoſe names and credit we know; is plainly to impoſe upon the learned world, and ought not to paſs any longer for plain dealing. The Spaniards tell us plainly that they followed the Latin, and by the authority of Thomas left out the clauſe, "And theſe "Three are One," in the eighth verſe, as inſerted by the Arians. And yet St. Ambroſe, St. Auſtin, Eucherius and other Latins, in the Arian age, gathered the Unity of the Deity from this clauſe; and the omiſſion of it is now, by printing it, acknowledged to be an erroneous correction. The manuſcript in England wanted the ſame clauſe, and therefore if there was any ſuch MS. it was a corrected one, like the Spaniſh edition, and the manuſcript of Valeſius. Eraſmus, who printed the triple teſtimony in heaven by that Engliſh manuſcript, never ſaw it; tells us it was a new one; ſuſpected its ſincerity; and accuſed it publicly in his writings on ſeveral occaſions, for ſeveral years together: and yet his adverſaries in England never anſwered his accuſation; never endeavoured to ſatisfy him; and the world about it; did not ſo much as let us know, where the record might be conſulted for confuting him; but, on the contrary, when they had got the Trinity into his edition, threw by their manuſcript (if

(if they had one), as an almanack out of date. And can ſuch ſhuffling dealings ſatisfy conſidering men? Let manuſcripts at length be produced, and freely expoſed to the ſight of the learned world; but let ſuch manuſcripts be produced as are of authority; or elſe let it be confeſſed, that whilſt Jerome pretended to correct the Latin by the Greek, the Latins have corrected both the Latin and the Greek by the ſole authority of Jerome. THE THREE IN HEAVEN.

I. WHAT the Latins have done to this text, the Greeks have done to that of St. Paul (Timothy iii. 16). For by changing ὁ into ΘC, the abbreviation of Θεος, they now read, "Great is the "myſtery of godlineſs: GOD manifeſted in the fleſh." Whereas all the churches for the firſt four or five hundred years, and the authors of all the ancient verſions, Jerome, as well as the reſt, read, "Great is the myſtery of godlineſs, which was ma"nifeſted in the fleſh." For this is the common reading of the Ethiopic, Syriac, and Latin verſions to this day; Jerome's manuſcripts having given him no occaſion to correct the old vulgar Latin in this place. Grotius adds the Arabic, but the Egyptian Arabic verſion has Θεος; and ſo has the above-mentioned Sclavonian verſion of Cyrillus: for theſe two verſions were made long after the ſixth century, wherein the corruption began. With the ancienter verſions agree the writers of the firſt five centuries, both Greeks and Latins. For they, in all their diſcourſes to prove the Deity of the Son, never alledge this text (that I can find) as they would all have done; (and ſome of them frequently) had they read "God manifeſted in the fleſh," and therefore they read ὁ. Tertullian *(adverſus Praxeam)* and Cyprian *(adverſus Judæos)* induſtriouſly cite all the places where Chriſt is called God, but have nothing of this. Alexander of Alexandria, Athanaſius, the biſhops of the council of Sardica, Epiphanius, Baſil, Gregory Nazianzen, Gregory Nyſſen, Chryſoſtom, Cyril of Jeruſalem, Cyril of Alexandria, Caſſian, alſo Hilary, Lucifer, Jerome, Ambroſe, Auſtin, Phœbadius, Victorinus Afer, Fauſtinus Diaconus, pope Leo the Great, Arnobius junior, Cerealis, Vigilius Tapſenſis, Fulgentius, wrote all of them in the fourth and fifth centuries for the Deity of the Son, and incarnation of GOD MANIFESTED IN THE FLESH.

GOD MANIFESTED

God; and ſome of them largely, and in ſeveral tracts; and yet I cannot find that they ever alledge this text to prove it, excepting that Gregory Nyſſen (nn) once urges it, if the paſſage crept not into him out of ſome marginal annotation. In all the times of the hot and laſting Arian controverſy, it never came into play; though now thoſe diſputes are over, they that read "God manifeſted in the fleſh," think it one of the moſt obvious and pertinent texts for the buſineſs.

II. The churches therefore of thoſe ages were abſolute ſtrangers to this reading. For, on the contrary, their writers, as often as they have any occaſion to cite the reading then in uſe, diſcover that it was ὁ. For though they cite it not to prove the Deity of the Son, yet in their commentaries, and ſometimes in other diſcourſes, they produce it. And particularly Hilary (lib. 2. *de Trinitate*) and Ambroſe, or whoever of his contemporaries was the author of the commentary on the epiſtles, reads ὁ; and ſo doth St. Auſtin *in Geneſin ad literam*, lib. 5. And Beda in his commentary on this text, where he cites the reading of St. Auſtin, and the author of the commentary on the epiſtles aſcribed to Jerome. So alſo do Primaſius and Sedulius in their commentaries on this text; and Victorinus Afer, lib. 1. *adverſus Arium*; and Idacius Clarus, or rather Vigilius Tapſenſis, lib. 3. *adverſus Varimadum*, cap. 12. And Fulgentius, c. 2. *de Incarnatione*; and ſo did pope Leo the Great, epiſt. 20. *ad Flavianum*; and pope Gregory the Great, *lib.* 34. *Moral. cap.* 7. Theſe ancient Latins all cite the text after this manner, "Great is the myſtery of godlineſs, which was manifeſted in the fleſh;" as the Latin manuſcripts of St. Paul's epiſtles generally have it to this day: and therefore it cannot be doubted, but that this hath been the

(nn) Orat. xi. contra Eunom.

* —— *nor expounds it as they do, who read* Θεος.] *They who read* Θεος *cannot expound the paſſage otherwiſe than Chryſoſtom expounds it. His words,* "*For God was made Man, and Man* "*God,*" *are not particularly expoſitive of* ὁ, *as our author imagines, but declarative of the myſtery which the apoſtle calls the great myſtery of godlineſs, and they will not decide for either reading.* "*Obſerve,*" *ſays Chryſoſtom,* "*how the apoſtle calls the diſpenſation for our ſakes* [*the ſcheme of redemption*] *a myſtery in all its branches. With good reaſon. For it is not known to all men.* "*Nay, rather it was* [*formerly*] *not known to angels. How ſhould it? ſince it has been diſcovered* "*through the church. Therefore, he ſays, without controverſy it is great. And great indeed it is,* "*For God has been made Man, and Man God. A Man was ſeen without ſin. A Man has been* "*received*

IN THE FLESH.

the conſtant publick reading of the Latin churches from the beginning. So alſo one of the Arians in a homily, printed in Fulgentius's works, reads ὁ, and interprets it of the Son of God, who was born of the Father *ante ſecula*; and of the Virgin, *in noviſſimo tempore*. And Fulgentius, in his anſwer to this homily, found no fault with the citation; but on the contrary, in his firſt book *ad Traſimundum, cap.* 6. ſeems to have read and underſtood the text after the ſame manner with other Latins.

III. Now for the Greeks, I find indeed that they have changed the ancient reading of the text, not only in the manuſcripts of St. Paul's epiſtles, but alſo in other authors; and yet there are ſtill remaining ſufficient inſtances among them of what the reading was at firſt. So in Chryſoſtom's commentary on this epiſtle, they have now gotten Θεος into the text; and yet by conſidering the commentary itſelf, I am ſatisfied that he read ὁ. For he neither in this commentary, nor any where elſe, infers the Deity of Chriſt from this text; nor expounds it, as they do who read Θεος *; but with the Latins, who read ὁ, underſtands by it Chriſt incarnate; or, as he expreſſes it, "Man made God, and "God made man;" and ſo leaves it at liberty to be taken for either God or man. And accordingly in one place of his commentary he ſaith, "Εφανερωθη εν σαρκι ὁ δημιυργος †." In another place: "Ανθρωπος ωφθη αναμαρτητος, ανθρωπος αναληφθη, εκηρυχθη "εν κοσμῳ, μεθ ἡμων ειδον αυτον οἱ αγγελοι." "Man appeared without ſin; Man was received up; Man was preached in the world; "was ſeen amongſt us by angels." Inſtead of "ὁ εφανερωθη εν "σαρκι, εδικαιωθη εν πνευματι," &c. he ſaith, "Man appeared "without ſin;" making Man the nominative caſe to theſe, and all the verbs which follow; which certainly he would not have done, had θεος been their nominative caſe expreſsly in the text.

"*received up—preached in the world—angels ſaw him with us—truly this is myſtery.*" *The deſign of this paraphraſe of St. Chryſoſtom's, is to ſhew that the ſcheme of redemption involves myſtery in every diſtinct branch mentioned by the apoſtle: and our author's concluſion, that the ſubject of the verb* εφανερωθη *in Chryſoſtom's bible, was ſomething that might be taken either for God or man, is at beſt precarious. The more natural concluſion would be, that the common ſubject of the verbs* εφανερωθη, εδικαιωθη, ωφθη, εκηρυχθη, *&c. was ſome word that might denote a living perſon; and is not likely to have been the neuter relative* ὁ.

† *Chryſoſtom's words are* —— λεγων, "Θεος εφανερωθη εν σαρκι," τουτεστιν, ὁ δημιυργος. *Subſtitute* ὁ *for* Θεος *in the text of Chryſoſtom, and the expoſition* τουτ' ἐστιν ὁ δημιυργος, *will be rank nonſenſe.*

He

GOD MANIFESTED

He might properly put man for ὁ, but not for θεος. Neither could he have put αναμαρτητος for εδικαιωθη; if he had read in his text θεος εδικαιωθη. For what man of common ſenſe would ſay, that God was made ſinleſs in and through the Spirit? But what I have ſaid of Chryſoſtom will be more evident, when I ſhall have ſhewn you how afterwards, in the time of the Neſtorian controverſy, all parties read ὁ or ὁς without any diſpute raiſed about the reading; and how the Greeks have ſince corrupted the text in Cyril's writings, and changed ὁ and ὁς into θεος, as they have done in Chryſoſtom's.

IV. And, firſt, that the Neſtorians read ὁ is evident by ſome fragments of the orations or homilies of Neſtorius ſent by him to the pope, and cited by Arnobius Junior, in the ſecond book of his conflict with Serapion. For there, in order to ſhew what was the opinion of Neſtorius, and how he defended it, he cites two of his orations in theſe words: "*Non peperit ſanctiſſima Ma-*
"*ria Deitatem; nam quod natum eſt de carne, caro eſt. Non*
"*peperit creatura Creatorem; ſed peperit hominem Deitatis miniſ-*
"*trum. Non ædificavit Deum verbum, Spiritus Sanctus; quod ex*
"*ipſâ natum eſt, de Spiritu Sancto eſt. Deo itaque virgo templum*
"*ex virgine ædificavit.*" *Et paulo poſt,* "*Qui per ſe natus eſt Deus*
"*in utero (ſcilicet ante Luciphorum) Deus eſt.*" *Et paulo poſt;*
"Θεοτοκα *formam in Deo honoramus.*" *Et in aliâ prædicatione;*
"*Spiritum divina ſeparat natura, qui humanitatem ejus creavit.*
"*Quicquid ex Mariâ natum eſt, de Spiritu Sancto eſt, qui et ſecun-*
"*dum juſtitiam replevit, quod creatum eſt; hoc quod manifeſtum*
"*eſt in carne, juſtificatum eſt in Spiritu.*" Which laſt words in the language, wherein Neſtorius wrote thoſe homilies, are, "ὁ
"εφανερωθη εν σαρκι, εδικαιωθη εν πνευματι."

V. Here you ſee that Neſtorius reads ὁ expreſsly; not only ſo, but abſolutely excludes God from being underſtood by it; arguing, that the Virgin was not θεοτοκος, becauſe that thing which was manifeſted in the fleſh, was juſtified in the Spirit; or (as he expounds it) repleniſhed by the Spirit in righteouſneſs, and calling that thing which was manifeſted in the fleſh, a creature: "*Spiritus*," ſaith he, "*ſecundum juſtitiam replevit* [*hoc*] *quod crea-*
"*tum eſt*; [*nempe*] *hoc quod manifeſtum eſt in carne, juſtificatum*
"*eſt in Spiritu.*"

IN THE FLESH.

VI. And now whilſt he read the text after this manner, and urged it thus againſt the Deity of Chriſt, one would ſuſpect, that if this had not been the received publick reading in the Greek churches, his adverſaries would have fallen foul upon him, and exclaimed againſt him for falſifying the text, and blaſphemouſly ſaying it was a created thing, which the Scripture calls "God "manifeſted in the fleſh." And ſuch an accuſation as this, would ſurely have made as great a noiſe as any thing elſe in the controverſy: and yet I meet with nothing of this kind in hiſtory. His adverſaries do not ſo much as tell him, that θεος was in the text. They were ſo far from raiſing any controverſy about the reading, that they do not in the leaſt correct him for it; but, on the contrary, they themſelves, in their anſwers to his writings, read ὁ, as he did; and only laboured by various diſputations to put another ſenſe upon the text, as I find by Caſſian and Cyril, the two principal who at that time wrote againſt him.

VII. John Caſſian was Chryſoſtom's ſcholar, and his deacon and legate to the pope; and after the baniſhment of Chryſoſtom, retired from Conſtantinople into Syria and Egypt, where he lived a monkiſh life for ſome time, and then ended his days in France. At that time, therefore, when Neſtorius, who was patriarch of Conſtantinople, broached his opinion, and Cyril, the patriarch of Alexandria, oppoſed him; Neſtorius ſent a legacy to Rome with copies of his orations, to let the pope underſtand the controverſy: and thereupon Leo the Great, who was then archdeacon of the church of Rome, and afterwards pope, put Caſſian (then in France) upon writing this book, *De Incarnatione Domini*, againſt Neſtorius. He wrote it therefore in the year 430, as Baronius alſo reckons. For he wrote it before the condemnation of Neſtorius in the council of Epheſus; as appears by the book itſelf. This book is now extant only in Latin; but, conſidering that his deſign in writing was to ſtir up the Greek church againſt Neſtorius, and that for the making great impreſſion upon them, he quotes Greek fathers at the end of his book, and concludes with an exhortation to the citizens of Conſtantinople, telling them, that

GOD MANIFESTED

that what he wrote for, he had received from his maſter Chryſoſtom: I am ſatisfied that he wrote it originally in Greek. His other books were in both languages. For Photius ſaw them in eloquent Greek; and it is more likely that they had their author's eloquent language from their author, and the Latin from one of the Latins, where he lived; than that the contrary ſhould be true. Now in this treatiſe (oo) when he comes to conſider the paſſage of Neſtorius about this text, of which we gave you an account above out of Arnobius, he returns this anſwer to it: "*Jam primum enim hoc ais Neſtori, quia juſtitiâ repleverit, quod creatum eſt; et hoc apoſtolico vis teſtimonio comprobare, quod dicat,* apparuit in carne; juſtificatus eſt in Spiritu; *utrumque falſo ſenſu, et furioſo Spiritu loqueris. Quia et hoc, quod à Spiritu vis eum repletum eſſe juſtitiâ, ideo ponis, ut oſtendas ejus vacuitatem, cui præſtitam eſſe aſſeras juſtitiæ adimpletionem. Et hoc, quod ſuper hâc re apoſtolico teſtimonio uteris, divini teſtimonii ordinem rationemque furaris. Non enim ita ab apoſtolo poſitum eſt, ut tu id truncatum, vitiatumque poſuiſti. Quid enim apoſtolus ait? 'Et manifeſtè magnum eſt pietatis ſacramentum, quod manifeſtum eſt in carne, juſtificatum eſt in Spiritu.' Vides ergo, quòd myſterium pietatis, vel ſacramentum juſtificatum apoſtolus prædicavit.*" Thus far Caſſian not only reading ὁ, but confuting Neſtorius by that reading. For whereas Neſtorius ſaid it was a creature which was juſtified, Caſſian tells him, that if he had read the whole text, he would have found that it was "the myſtery of godlineſs." "*Vides ergo,*" ſaith he, "*quod myſterium pietatis juſtificatum apoſtolus prædicavit.*" He does not ſay, "*Deum juſtificatum apoſtolus prædicavit*;" (as he would certainly have done, had that been in his bible) but *myſterium*; and ſo makes *myſterium*, or, which is all one, its relative *quod*, the nominative caſe to the verbs which follow. In another part of this treatiſe, lib. 5. cap. 12. Caſſian cites and interprets the text as follows: "*Et manifeſtè magnum eſt pietatis ſacramentum, quod manifeſtatum eſt in carne, &c. Quod ergo magnum eſt illud ſacramentum, quod manifeſtatum eſt in carne? Deus, ſcilicet, natus in carne, Deus viſus in corpore, qui utique ſicut palam eſt aſ-*

(oo) Libro ſeptimo, cap. 18.

"*ſumptus in gloriâ.*" So you ſee Neſtorius and Caſſian agree in reading ὁ, but differ in interpreting it; the one reſtraining it to a creature, by reaſon of its being juſtified; the other reſtraining it to God, by reaſon of its being a great myſtery, and aſſumed in glory. IN THE FLESH.

VIII. In like manner Cyril, the grand adverſary of Neſtorius, in his three books, *De Fide ad Imperatorem et Reginas*, written againſt him in the beginning of that controverſy, did not reprehend him, as if he had cited the text falſely, but only complained of his miſinterpreting it; telling him, that he did not underſtand the great myſtery of godlineſs, and that it was not a created thing (as he thought), but the Word or Son of God; and arguing for this interpretation from the circumſtances of the text. And, firſt, in his book *De Fide ad Imperatorem*, ſect. 7. he has this paſſage: "Πλαναθε, μη ειδοτες τας γραφας· μητε μεν το μεγα της ευσεβειας μυστηριον, τυτεστι Χριστον, ὃς εφανερωθη εν σαρκι, εδικαιωθη εν πνευματι, &c." "Ye err," ſaith he, "not knowing the Scriptures, nor the great myſtery of godlineſs, that is, Chriſt; who was manifeſted in the fleſh, juſtified in the Spirit." By this citation, it is plain that he read ὃς, uſing one of theſe MSS. which, by underſtanding Χριστον for μυστηριον, turned ὁ into ὃς; and, by way of interpretation, inſerting τυτεστι Χριστον, which in thoſe MSS. was to be underſtood; unleſs you will ſay that he turns θεος into ὃς, which is very hard. For had Θεος been in this text, he would not have ſaid μυστηριον, τυτεστι Χριστον, ὃς εφανερωθη; but μυστηριον, Θεος, τυτεστι Χριστος εφανερωθη, putting Χριστος not for μυστηριον, but for Θεος. For Χριστος and Θεος are more plainly equipollent than Χριστος and μυστηριον. And making Χριστος and μυστηριον equipollent, he makes μυστηριον the nominative caſe to εφανερωθη; and therefore read them joined in this text by the article ὃς. Had he read Θεος, he would never have left out that authentick and demonſtrative word, and by way of interpretation for μυστηριον Θεος, written Χριστον ὃς. For this was not to argue againſt Neſtorius, but to ſpoil the argument which lay before him. Neither would he have gone on, as he does, within a few lines, to recite the ſame text, putting λογος by way of interpretation for μυστηριον; and after to propound it as his bare

GOD MANIFESTED

opinion, that the Word, or Son of God, was here to be understood by this myſtery, and to diſpute for this his opinion, as needing proof out of other texts of Scripture, as he does after this manner: "(PP) Moreover," ſaith he, "in my opinion, that myſ-"tery of godlineſs is nothing elſe than he who came to us from "God the Father; the Word, who was manifeſted in the fleſh. "For in taking the form of a ſervant, he was born of the "holy God-bearing Virgin, &c." And then after many other things he at length, in Sect. 23 and 24, concludes, that "this "divine myſtery is above our underſtanding; and that the Only-"begotten, who is God, and, according to the Scriptures, the "Lord of all things, appeared to us, was ſeen on earth, and "became a Man." This he makes not the text itſelf, but the interpretation thereof; and from the preceding diſputation, concludes it to be genuine.

IX. Again, in the firſt of his two treatiſes, *De Fide ad Reginas*, near the end, he cites the text, and argues thus againſt the interpretation of Neſtorius. "Who is he," ſaith he, "that is "manifeſted in the fleſh? Is it not fully evident, that it is no "other than the Word of God the Father? For ſo will that be a "great myſtery of godlineſs (which was (QQ) manifeſted in the "fleſh): he was ſeen of angels, aſcending into heaven; he was "preached to the Gentiles by the holy apoſtles; he was believed "on in the world; but this not as a mere man; but as God born "in the fleſh, and after our manner."

X. So alſo in his ſecond book, *De Fide ad Reginas* (RR), he cites the place again; and then argues upon it againſt the opinion of Neſtorius after this manner: "If the Word, being God, "is ſaid to become a Man, and yet continue what he was before, "without loſing his Deity, the myſtery of godlineſs is without "doubt a very great one: but if Chriſt be a mere man, joined "with God only in the parity of dignity and power (for this is "maintained by ſome unlearned men) how is he manifeſted in "the fleſh? Is it not plain, that every man is in the fleſh, and

(PP) "Ειη γαρ αν ουχ ἑτερον οιμαι τι το της ευσεβειας μυστηριον, η αυτος ημιν ὁ εκ θεου πατρος λογος, ὁς εφα-"νερωθη εν σαρκι. Γεγενηται γαρ δια της αγιας παρθενου και Θεοτοκου, μορφην δουλου λαβων."—*Cyril de Fide ad Imperatorem*, Sect. 8.

"cannot

"cannot otherwiſe be ſeen by any body; how then was he ſaid IN THE FLESH. "to be ſeen of the holy angels? For do they not alſo ſee us? "What was there therefore new or extraordinary in Chriſt, if "the angels ſaw him ſuch a Man as we are, and nothing more, "&c." Thus Cyril goes on to give his reaſons why that, which was manifeſted in the fleſh, was not a mere created Man, as Neſtorius interpreted, but the eternal Word, or Son of God; all which would have been very ſuperfluous and impertinent, if God had then been expreſsly in the text.

XI. Seeing therefore Neſtorius alledged the text to prove, that it was a created thing which was manifeſted in the fleſh; and Cyril, in confuting him, did not anſwer that it was God expreſsly in the text, nor raiſe any debate about the reading, but only put another interpretation upon the text than Neſtorius had done; arguing with Caſſian, that in the text it was not a mere Man, as Neſtorius contended, but a great myſtery of godlineſs; and by conſequence Chriſt, or God the Son, which was manifeſted in the fleſh; and labouring by divers other arguments to prove this interpretation, it is evident beyond all cavil, that Cyril was a ſtranger to Θεος, now got into the text; and read ὁς or ὁ, as Neſtorius and Caſſian did.

XII. And all this is further confirmed by Photius, who in his commentary on the epiſtles not yet publiſhed, relates that Cyril, in the 12th chapter of his Scholiums, read ὁς εφανερωθη, &c. and conſonant to this reading is Cyril's commentary upon the text in his explanation of the ſecond of the twelve Anathematiſms, where he puts the queſtion, "*Quid eſt igitur quod dicit, apparuit* "*in carne?*" And explains it by ſaying, "*Hoc eſt Dei patris ver-*"*bum Caro factum eſt:*" and concludes, that it is hence that we call him God and Man. Whereas had Θεος been in the text, it would have needed no interpretation; nor would he have put λογος for Θεος, in order to prove that God was manifeſted in the fleſh. And yet in his books *ad Reginas*, and his other writings, wherever he quotes this text, the Greeks have ſince corrected it by their corrected manuſcripts of St. Paul's epiſtles, and written

(QQ) Codex Græcus hoc loco jam legit ΘC pro ὁς ſenſu perturbato.
(RR) Section 33.

GOD MANIFESTED

Θεος inſtead of ὁ: whence, if you would truly underſtand the Neſtorian hiſtory, you muſt read ὁ or ὅς for Θεος in all Cyril's citations of this text.

XIII. Now, whilſt Cyril read ὁ or ὅς, and in the explanation of the twelve chapters, or articles, quoted this text in the ſecond article; and this explanation was recited by him in the council of Epheſus, and approved by the council (ss), with an Anathema at the end of every article: it is manifeſt that this council allowed the reading ὅς or ὁ; and by conſequence that ὅς or ὁ was the authentick public uncontroverted reading till after the times of this council. For if Neſtorius and Cyril, the patriarchs of Conſtantinople and Alexandria, and the heads of the two parties in this controverſy, read ὅς or ὁ; and their writings went about amongſt the Eaſtern churches, and were canvaſſed by the biſhops and clergy without any diſpute raiſed about the reading; and if Cyril read ὅς by the approbation of the council itſelf: I think that the concluſion we make, of its being then the general uncontroverted reading, muſt needs be granted us. And if the authority of one of the four firſt general councils make any thing for the truth of the reading, we have that into the bargain.

XIV. Yet whilſt the Neſtorian controverſy brought the text into play, and the two parties ran the interpretation into extremes, the one diſputing that ὁ or ὅς was a creature; the other, that it was the Word of God: the prevalence of the latter party made it paſs for the orthodox opinion, that ὁ or ὅς was God; and ſo gave occaſion to the Greeks henceforward to change the language of Chriſt into that of God; and ſay, in their expoſitions of the text, that God was manifeſted in the fleſh (as I find Theodoret doth), and at length to write God in the text itſelf; the eaſy change of O or OC into ΘC, inviting them to do it: and, if this was become the orthodox authentick reading, to ſet right the text in Chryſoſtom, Cyril, Theodoret, and wherever elſe they found it (in their opinion) corrupted by Hereticks.

XV. And the man that firſt began thus to alter the ſacred text, was Macedonius, the patriarch of Conſtantinople, in the begin-

(ss) Concil. Epheſ. Par. iii. ſub initio.

ning

IN THE FLESH.

ning of the ſixth century. For the emperor Anaſtaſius baniſhed him for corrupting it. At that time, the Greek church had been long divided about the council of Chalcedon. Many, who allowed the condemnation of Eutyches, rejected the council; by reaſon of its decreeing, by the influence of the biſhop of Rome's letter againſt Eutyches, that Chriſt ſubſiſted not only *ex duabus naturis*, which Eutyches allowed, but alſo *in duabus naturis*; which language was new to the Greeks, and by a great part of that church taken for Neſtorianiſm. For they underſtood, that as the body and ſoul made the nature of man, ſo God and Man made the nature of Chriſt; aſſigning the nature to the perſon of Chriſt, as well as to all other things, and not conſidering that in all compounds the ſeveral parts have alſo their ſeveral natures. Hence each party endeavoured to render the other ſuſpected of Hereſy; as if they that were for the council ſecretly favoured the Neſtorians, and they that were againſt it, the Eutychians. For one part, in maintaining two diſtinct natures in Chriſt, were thought to deny the nature of one perſon with Neſtorius; and the other party, in oppoſing two diſtinct natures in him, were thought to deny the truth of one of the natures with Eutyches. Both parties, therefore, to clear themſelves of thoſe imputations, anathematiſed both thoſe Hereſies; and therefore whilſt they thus differed in their modes of ſpeaking, they agreed in their ſenſe, as Evagrius well obſerves. But the biſhops of Rome and Alexandria being engaged againſt one another, and for a long time diſtracting the Eaſt by theſe diſputes; at length the emperor Zeno, to quiet his empire, and perhaps to ſecure it from the encroachment of the biſhop of Rome, who, by this verbal conteſt (tt), aſpired to the name and authority of univerſal biſhop, ſent about an *henoticum*, or pacificatory decree; wherein he anathematiſed both Neſtorius and Eutyches with their followers on the one hand, and abrogated the pope's letter and the council on the other: and his ſucceſſor Anaſtaſius, for the ſame end, laboured for to have this decree ſigned by all the biſhops. And Macedonius at firſt ſubſcribed it; but afterwards heading thoſe

(tt) Vide Baronium, anno 451. Sect. 149, 150, 151.

who

GOD MANIFESTED

who ſtood up for the council (uu), was, for corrupting the Scriptures in favour of his opinion, and ſuch other things as were laid to his charge, depoſed and baniſhed, ann. C. 512 (xx). But his own party (which at length prevailed) defended him, as if oppreſſed by calumnies; and ſo received that reading for genuine, which he had put about among them. For how ready are all parties to receive what they reckon on their ſide, Jerome well knew, when he recommended the teſtimony of "the Three in "heaven" by its uſefulneſs; and we have a notable inſtance of it in the laſt age, when the churches, both Eaſtern and Weſtern, received this teſtimony in a moment in their Greek teſtaments, and ſtill continue with great zeal and paſſion to defend it for the ancient reading againſt the authority of all the Greek manuſcripts.

XVI. But now I have told you the original of the corruption, I muſt tell you my author; and he is Liberatus, archdeacon of the church of Carthage, who lived in that very age. For in his Breviary, which he wrote in the year 535, or ſoon after, and collected (as he ſaith in his preface) out of Greek records, he delivers it in theſe words (yy): "*Hoc tempore Macedonius Conſtanti-*"*nopolitanus epiſcopus ab imperatore Anaſtaſio dicitur expulſus, tan-*"*quam evangelia falſaret; et maximè illud apoſtoli dictum,* Quia "apparuit in carne, juſtificatum in Spiritu. *Hunc enim mutaſſe,*"*ubi habet* qui ..... *hoc eſt* ..... *monoſyllabum Græcum, literâ*"*mutatâ in* .....*vertiſſe et feciſſe* ..... *id eſt, ut eſſet Deus,*"*apparuit per carnem. Tanquam Neſtorianus ergo culpatus ex-*"*pellitur per ſeverum Monachum* (zz)." The Greek letters here omitted are, in the ſecond edition of Sunius, and in thoſe of the councils, thus inſerted: "*Ubi habet* ὃς, *hoc eſt* qui; *monoſyllabum*"*Græcum, literâ mutatâ* ο *in* ω, *vertiſſe, et feciſſe,* ὡς; *id eſt, ut*"*eſſet, Deus apparuit per carnem.*" But this interpolation was ſurely made by conjecture: for if Θεος was in the ſacred text before

(uu) Evagrius, lib. iii. cap. xxi. 44.——Theodorus lector, lib. ii. and Marcellini Chronicon.

(xx) Flavian was baniſhed in the year of Antioch 561, as Evagrius notes; and Macedonius was baniſhed the ſame year, or the year before.

(yy) Liberati Brev. cap. xix.

(zz) Vide Baronii Annal. 510. Sect. 9.

(a) N. B. In Hincmari opuſc. xxxiii. cap. 22. the words "ut eſſet" are in like manner referred

fore the corruption, then ὃς or ὁ was not in, and ſo could not be changed into ὡς: but if Θεος was not in, it could not be brought in by this change. The interpolation therefore is inconſiſtent and ſpurious, and ſeems to have been occaſioned by ſtraining to make out Neſtorianiſm here; the Scribes for that end (α), referring the words *ut eſſet* to the ſacred text; and then the interpolator writing ὡς for *ut*. Whereas they ſhould have referred *ut eſſet* to the words of Liberatus, thus diſtinguiſhed from the ſacred text; "*Id eſt, ut eſſet,* Deus apparuit per carnem." I had rather, therefore, wave the conjecture of this interpolator, and fill up the *lacunæ* by the authority of an ancient author, Hincmarus; who above eight hundred years ago (β) related the fact out of Liberatus after this manner: "*Quidam ipſas ſcripturas*"*verbis illicitis impoſturaverunt; ſicut Macedonius Conſtantinopoli-*"*tanus epiſcopus, qui ab Anaſtaſio Imperatore, ideo à civitate ex-*"*pulſus legitur, quoniam falſavit evangelia; et illum apoſtoli lo-*"*cum,* quod apparuit in carne, juſtificatum eſt in Spiritu; *per*"*cognationem Græcarum literarum* O *et* Θ *hoc modo mutando fal-*"*ſavit. Ubi enim habuit,* qui, *hoc eſt* OC, *monoſyllabum Græcum,*"*literâ mutatâ* O *in* Θ, *mutavit, et fecit* ΘC, *id eſt, ut eſſet, Deus*"*apparuit per carnem, quâpropter tanquam Neſtorianus fuit ex-*"*pulſus.*" He was baniſhed therefore for changing the ancient reading (which in ſome MSS. was OC, as theſe authors have it, and in others O) into ΘC. But whereas he is here repreſented a Neſtorian, for doing this, the meaning is, that he was baniſhed for corrupting the text in favour of the doctrine of two natures in Chriſt; which his enemies accounted Neſtorianiſm, though it was not really ſo. Neſtorius held only a human nature in Chriſt; and that God, *the Word*, dwelt in this nature, as the Spirit in a holy man; and therefore interpreted ὁ of the human nature. This doctrine Macedonius anathematiſed, and maintained two natures in Chriſt; and, for proving this, corrupted the text, and made it God *manifeſted in the fleſh*. This diſtinguiſhing Chriſt

IN THE FLESH.

ferred to the ſacred text; and ſomebody, to make out the ſenſe, has in their ſtead added "ut "appareret" to the words of Liberatus, and written "ut appareret, ut eſſet Deus, &c." But the words "ut appareret" not being in Liberatus muſt be ſtruck out, and ſupplied by ſetting the comma after "ut eſſet," to part theſe words from the ſacred text.

(β) Hincmari opuſcul. artic. xxxiii. cap. 18.

into

GOD MANIFESTED

into two natures was, by the enemies of Macedonius, accounted Neſtorianiſm in another language; and in this reſpect the hiſtorian ſaith, that they baniſhed him as a Neſtorian for corrupting the text, though he was not really of that opinion.

XVII. But whilſt he is ſaid to be baniſhed as a Neſtorian for this, without explaining what is here meant by a Neſtorian, it looks like a trickiſh way of ſpeaking, uſed by his friends to ridicule the proceedings againſt him as inconſiſtent; perhaps to invert the crime of falſation; as if a Neſtorian would rather change ΘC into O. For they that read hiſtory with judgment, will too often meet with ſuch trickiſh reports; and even in the very ſtory of Macedonius, I meet with ſome other reports of the ſame kind. For Macedonius having in his keeping the original acts of the council of Chalcedon, ſigned by that emperor, under whom it was called, and refuſing to deliver up this book to the emperor Anaſtaſius; ſome, to make this emperor prejured, diſtorted the ſtory; as if, at his coming to the crown, he had promiſed under his hand and oath, that he would not act againſt the council of Chalcedon; and repreſented his ſubſcribed promiſe to be the book, which Macedonius refuſed to deliver back to him. Macedonius had got his biſhoprick by being againſt the council of Chalcedon, and had ſubſcribed the *henoticum* (γ) of Zeno, in which that council was anathematiſed; and this being objected againſt him, his friends, to ſtifle the accuſation, make a contrary ſtory of the emperor; as if, when he came to the crown, he had done as much as that in behalf of the council. Another report was (δ), "That the people of Alexandria and all Egypt, great and ſmall, "bond and free, prieſts and monks, excepting only ſtrangers, "became about this time poſſeſſed with evil ſpirits, and being "deprived of human ſpeech, barked day and night like dogs; "ſo that they were afterwards bound with iron chains, and drawn "to the church, that they might recover their health. For they "all ate their hands and arms. And then an angel appeared to "ſome of the people, ſaying, that this happened to them, be-"cauſe they anathematiſed the council of Chalcedon, and threat-

(γ) Vide Annotationes Valeſii in Evagr. &c. lib. iii. cap. 31.
(δ) Victor Turonenſis in Chronico.

ened

"ened that they ſhould do ſo no more." Again, we are told in hiſtory (ε), "That the adverſaries of Macedonius produced cer-"tain boys in judgment, to accuſe both him and themſelves of "ſodomy; but that when they found his genitals were cut off, "they betook themſelves to other arts for depoſing him." Now if you can believe that a eunuch had the beard and voice of another man; and that in a ſolemn council, the great patriarch of the Eaſt was thus accuſed and thus acquitted, and yet depoſed; you muſt acknowledge, that there were many biſhops among the Greeks who would not ſtick at as ill and ſhameleſs things, as corrupting the Scriptures. But if all this be a ſham, invented to diſcredit the council, the need of ſuch ſhams adds credit to their proceedings, in condemning him for a falſary.

IN THE FLESH.

XVIII. This council (if I miſtake not) ſat firſt at Conſtantinople, being that council which Theodorus calls "a company "of mercenary wretches." And Nicephorus, "a convention of "Hereticks, aſſembled againſt Macedonius." Upon their adding to the (ζ) "thrice holy" theſe words, "who art crucified for "us," the people fell into a tumult: and afterwards, when Macedonius came to be accuſed, they fell into a greater tumult, crying out, "The time of perſecution is at hand. Let no man "deſert the father;" meaning Macedonius. In this tumult (which was ſaid to be ſtirred up by the clergy of Conſtantinople) many parts of the city were burnt, and the nobles and emperor brought into the greateſt danger; inſomuch, that the emperor was forced to proffer the reſignation of his empire, before he could quiet the multitude. Then ſeeing that if Macedonius were judged, the people would defend him, he cauſed him to be carried by force in the night to Chalcedon; and thence into baniſhment, as Theodorus writes. Whence I gather, that the council removed alſo to Chalcedon to avoid the tumult, and finiſh their proceeding there. For the ſtory of his being accuſed in judgment by boys, Nicephorus places after this tumult; and all agree that he was condemned: and the monks of Paleſtine, in an epiſtle recorded by Evagrius, ſay that Xenaias and Dioſco-

(ε) Evagrius, lib. iii. cap. 32.
(ζ) Theodor. lib. ii.——Nicephor. lib. xvi. cap. 26.——Evagr. lib. iii. cap. 44.

GOD MANIFESTED

rus, joined with many biſhops, baniſhed him. When his condemnation was ſent him, ſigned by the emperor; he aſked, whether they, that had condemned him, received the council of Chalcedon; and when they that brought him the ſentence denied it, he replied, "If Arians and Macedonians had ſent me a book of "condemnation, could I receive it?" So that it ſeems he ſtood upon the illegality of the council. The next day one Timothy was made biſhop of Conſtantinople; and he ſent about the condemnation of Macedonius to all the abſent biſhops to be ſubſcribed (η). Whence I think it will eaſily be granted, that he was condemned as a falſary by the greateſt part of the Eaſtern empire; and by conſequence, that the genuine reading was till then, by the churches of that empire, accounted ὁ. For had not the publick reading then been ὁ, there could have been no colour for pretending that he changed it into ΘC.

XIX. About ſix years after Anaſtaſius died; and his ſucceſſors, Juſtin and Juſtinian, ſet up the authority of the council of Chalcedon again, together with that of the pope over the Eaſtern churches, as univerſal biſhop; and from that time the friends of Macedonius prevailing, it is probable, that in oppoſition to the Hereticks, which condemned him, and for promoting and eſtabliſhing the doctrine of two natures in Chriſt, they received and ſpread abroad the reading ΘC. But as for the authority of the pope, that fell again with Rome in the Gothick wars, and ſlept till Phocas revived it.

XX. I told you of ſeveral ſhams put about by the friends of Macedonius, to diſcredit the proceedings of the council againſt him. There is one which notably confirms what has hitherto been ſaid, and makes it plain that his friends received his corruptions as genuine Scripture. For whereas Macedonius was baniſhed for corrupting the New Teſtament, his friends retorted the crime upon the council; as if they had taken upon them, under colour of purging the Scriptures from the corruptions of Macedonius, to correct in them whatever they thought the apoſtles, as unſkilfull men and idiots, had written amiſs. For this I gather

(η) Theophanes, pag. 135.

from

IN THE FLESH.

from an ironical report of this kind put about in the Weſt, and thus recorded by Victor Turonenſis. "*Meſſala. V. C. conſulibus, "Conſtantinopoli, jubente Anaſtaſio Imperatore, ſancta evangelia, "tanquam ab idiotis compoſita reprehenduntur, et emendantur*;" that is, "In the conſulſhip of Meſſala, the holy goſpels, by the "command of the emperor Anaſtaſius, were cenſured and cor-"rected at Conſtantinople; as if written by evangeliſts that were "idiots." Here Victor errs in the year. For Meſſala was conſul anno Chriſti 506; that is, ſix years before the baniſhment of Macedonius. But Victor is very uncertain in dates of the years. For he places the baniſhment of Macedonius in the conſulſhip of Avienus 502; and the above-mentioned tumult about the *Triſagium* in the conſulſhip of Probus, anno Chriſti 513; whereas all theſe things happened in the ſame year. For it is plain by this chronicle, that the Scriptures were examined and corrected about this time by a council at Conſtantinople, by the order of Anaſtaſius; and I meet with no other council to which this character can agree, beſides that which depoſed Macedonius. Now that they ſhould cenſure and correct the goſpels, as if written by idiots, is too plainly ironical to be true hiſtory; and therefore it muſt be an abuſive report invented and put about to ridicule and ſhame the council, and to propagate the corruptions of Macedonius as the genuine apoſtolic reading of the Scriptures, which the council had raſhly corrected.

XXI. So then the falſation was ſet on foot in the beginning of the fifth century, and is now of about twelve hundred years ſtanding; and therefore ſince it lay but in a letter, and ſo was more eaſily ſpread abroad in the Greek manuſcripts, then the teſtimony of "the Three in heaven" in the Latin ones; we need not wonder if the old reading be ſcarce to be met with in any Greek manuſcripts now extant, and yet it is in ſome.

XXII. For though Beza tells us, that all the Greek manuſcripts read Θεος; yet I muſt tell Beza's readers, that all his manuſcripts read ὁ. For he had no other manuſcripts of the epiſtles beſides the Claromontan; and in this manuſcript, as Morinus by ocular inſpection has ſince informed us, the ancient reading

GOD MANIFESTED

was ὃ (θ); but yet in another hand, and with other ink, the letter Θ has been written out of the line; and the letters O thickened to make a C, appears: which inſtance ſhews ſufficiently by whom the ancient reading has been changed. Valeſius alſo read ὁ in one of the Spaniſh manuſcripts; and ſo did the author of the Oxford edition of the New Teſtament, ann. Ch. 1675, in the manuſcript of Lincoln College library, which is the oldeſt of the Oxford manuſcripts. The Alexandrian MS (ι). and one of Colbert's and Cyril, c. 12. Scholiorum (teſte Photio MS. com. in epiſt.) read OC. So then there are ſome ancient Greek manuſcripts which read ὅ, and others ὅς; but I do not hear of any Latin ones, either ancient or modern, which read Θεος.

XXIII. And beſides, to read Θεος, makes the ſenſe obſcure and difficult. For how can it properly be ſaid, "that God was "juſtified in the Spirit*?" But to read ὁ, and interpret it of Chriſt, as the ancient Chriſtians did, without reſtraining it to his divinity, makes the ſenſe very eaſy. For the promiſed and long-expected Meſſias, the hope of Iſrael, is to us "the great myſtery "of godlineſs." And this myſtery was at length manifeſted to the Jews from the time of his baptiſm, and juſtified to be the perſon whom they expected.

XXIV. I have now given you an account of the corruption of the text, the ſum of which is this: the difference between the Greek and the ancient verſions puts it paſt diſpute, that either the Greeks have corrupted their MSS. or the Latins, Syrians, and Ethiopians, their verſions: and it is more reaſonable to lay the fault upon the Greeks than upon the other three for theſe conſiderations. It was eaſier for one nation to do it than for three to conſpire.

(θ) "Aliâ manu et atramento, extra lineæ ſeriem, addita eſt litera Θ, et ambeſa paululum O, "ut appareret figma. Sed præpoſtera emendatio facilè conſpicitur." Hæc Morinus in exercitationibus Biblicis, lib. 1. Exercitat. ii. cap. 4.——At Bezæ nobis aliqua invidit, ut ex ejus epiſtolâ ad Academiam Cantabrigienſem à Waltono editam liquet; ubi variantes aliquas lectiones celandas eſſe admonet.

(ι) Alio atramento jam ducta cernitur tam lineolâ per medium literæ O, quàm virgula ſuperna; ut jam legatur ΘC. Putat autem Millius, lineolas illas olim tenues fuiſſe et prope evanidas, et novo dein atramento incraſſatas fuiſſe; eo quod perluſtrato attentius loco, lineolæ per medium Θ ductæ, quæ primam aciem fugerat, ductus quoſdam ac veſtigia ſatis certa deprehendere viſus eſſet; præſertim ad partem ſiniſtram, quæ peripheriam literæ pertingit: luculentiora multo habiturus niſi obſtante liturâ quam dixit hodiernâ lineolæ ipſi ſuperinductâ. Verum ſi lineola antiquitus

conſpire. It was eaſier to change a letter or two in the Greek, than ſix words in the Latin. In the Greek, the ſenſe is obſcure; in the verſions, clear. It was agreeable to the intereſt of the Greeks, to make the change, but againſt the intereſt of other nations to do it; and men are never falſe to their intereſt. The Greek reading was unknown in the times of the Arian controverſy; but that of the verſions, then in uſe amongſt both Greeks and Latins. Some Greek MSS. render the Greek reading dubious; but thoſe of the verſions hitherto collated agree. There are no ſigns of corruption in the verſions, hitherto diſcovered; but in the Greek we have ſhewed you particularly when, on what occaſion, and by whom the text was corrupted. IN THE FLESH.

XXV. I know not whether it be worth the while to tell you, that in the printed works of Athanaſius, there is an epiſtle, *De incarnatione verbi*, which reads Θεος. For this epiſtle relates to the Neſtorian Hereſy, and ſo was written by a much later author than Athanaſius, and may alſo poſſibly have been ſince corrected (like the works of Chryſoſtom and Cyril) by the corrected texts of St. Paul's epiſtles. I have had ſo ſhort a time to run my eye over authors, that I cannot tell whether, upon further ſearch, more paſſages about this falſation may not hereafter occur pertinent to the argument. But if there ſhould, I preſume it will not be difficult, now the falſation is thus far laid open, to know what conſtruction to put upon them, and how to apply them.

XXVI. You ſee what freedom I have uſed in this diſcourſe, and I hope you will interpret it candidly. For if the ancient churches, in debating and deciding the greateſt myſteries of religion, knew nothing of theſe two texts; I underſtand not, why

quitus tam conſpicua eſſet, ut uſque nunc per medium lineæ craſſioris, alio atramento ſuperinductæ, cerni poſſit; quid opus eſſet, ut à lineâ illâ ſuperinductâ incraſſaretur. Sin olim tam evanida eſſet, ut cerni vix poſſet; mirum eſt, quod ejus ductus et veſtigia ſatis certa, per medium literæ illius ſuperinductæ, etiamnum appareant. Doceant verba evanida aliis in locis atramento novo incraſſata fuiſſe, vel fateantur OC hic mutatum in ΘC.

* *How is it ſaid in St. Luke, that "publicans juſtified God" by receiving John's baptiſm? If to read* Θεος *gives a difficult ſenſe in this clauſe, to read* ὁ, *will it give an eaſy ſenſe in others? Are the propoſitions, that a myſtery was manifeſted in the fleſh, a myſtery was received up into glory, both which ariſe from the reading* ὁ, *very eaſily intelligible? Is it eaſy to underſtand what myſtery was manifeſted in the fleſh, if our Lord's divinity is ſet out of the queſtion? If it be allowed that his divinity makes the myſtery, the two readings will be equivalent in ſenſe, but* Θεος *makes the beſt conſtruction.*

GOD MANIFESTED

we ſhould be ſo fond of them now the debates are over. And whilſt it is the character of an honeſt man to be pleaſed, and of a man of intereſt to be troubled at the detection of frauds, and of both to run moſt into thoſe paſſions when the detection is made plaineſt; I hope this letter will, to one of your integrity, prove ſo much the more acceptable, as it makes a further diſcovery than you have hitherto met with in commentators.

FINIS.

UNIVERSITÀ CATTOLICA S. CUORE
BRESCIA
— BIBLIOTECA —
numero 1005321
dono
cambio
data