

# Berechnung von Rahmenkonstruktionen und statisch unbestimmten Systemen des Eisen- und Eisenbetonbaues

von

**P. Ernst Glaser**

Ingenieur

Mit 112 Textabbildungen



Berlin  
Verlag von Julius Springer  
1919

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,  
vorbehalten.**

**Copyright 1919 by Julius Springer in Berlin.**

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1919

ISBN-13: 978-3-642-89750-4

e-ISBN-13: 978-3-642-91607-6

DOI: 10.1007/978-3-642-91607-6

## Vorwort.

In der Entwicklung der Bautechnik der letzten Jahre zeigt sich offenbar das Bestreben ihrer Vertreter, bei dem Entwurfe und der Ausführung von Neubauten, sei es nun ein reiner Eisenbau oder ein Eisenbetonbau, die neuesten Methoden der Baustatik und ihre feinsten Hilfsmittel zur Anwendung zu bringen. Im Gegensatz zu den früher üblichen Rechnungsverfahren, bei denen oftmals Voraussetzungen getroffen wurden, die mit der wirklichen Ausführung nichts gemein hatten, wird heute allgemein bei der Berechnung eines neuen Bauwerkes mit aller Sorgfalt und Feinheit vorgegangen, damit möglichst genaue, der wirklichen Ausführung entsprechende Resultate erhalten werden, um wirtschaftlich konstruieren zu können. Dieses bedingt aber nun häufig sehr umfangreiche und zeitraubende Berechnungen, weil die vorkommenden Systeme der Konstruktionen oftmals statisch unbestimmte sind, und es ist daher dem Konstrukteur vom Vorteil, für oft vorkommende Grundformen gebrauchsfertige Formeln für die verschiedenen Belastungsfälle zur Hand zu haben.

In der vorliegenden Arbeit sind nun von dem Verfasser nach den Erfahrungen des Konstruktionsbüros eine Reihe von Beispielen über Rahmenkonstruktionen und andere statisch unbestimmte Systeme durchgerechnet worden und ermöglicht das hier gebotene Verfahren dem in der Praxis tätigen Ingenieur, ohne großen Zeitaufwand die Bemessung von Konstruktionen der hier behandelten Art durchzuführen.

Es wurde davon Abstand genommen, den dreiseitigen eingespannten Rahmen und den vierseitigen Rahmen in die vorliegende Arbeit aufzunehmen, da diese Systeme in der Literatur bereits mehrfach ausführlich behandelt worden sind.

Ilmenau, im April 1919.

**P. E. Glaser.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>I. Der Dreigelenkrahmen mit Zugband . . . . .</b>	<b>1</b>
1. Erklärungen . . . . .	1
<b>A. Der Einfluß lotrechter Lasten . . . . .</b>	<b>2</b>
2. Die Verschiebung $\delta_o$ . . . . .	2
3. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	3
4. Vollbelastung einer gleichmäßig verteilten Last $Q$ . . . . .	4
5. Belastung einer gleichmäßig verteilten Last $Q$ auf die Strecke $\frac{l}{2}$ . . . . .	6
<b>B. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .</b>	<b>8</b>
6. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ auf die Strecke $f$ . . . . .	8
7. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ auf die Strecke $b$ . . . . .	11
8. Wagerecht wirkende Einzellast $W$ . . . . .	13
9. Die Einflußlinie für $H$ . . . . .	15
10. Die Einflußlinie für das Moment $M_c$ im Ständer. . . . .	19
11. Die Einflußlinie für das Moment $M_x$ im Riegel. . . . .	21
<b>II. Der Dreigelenkrahmen mit Pendelstütze . . . . .</b>	<b>22</b>
1. Erklärungen . . . . .	22
2. Die Verschiebung $\delta_{rr}$ . . . . .	22
<b>A. Der Einfluß lotrechter Lasten . . . . .</b>	<b>24</b>
3. Die Einflußlinie $X_r$ für die Riegel . . . . .	24
4. Vollbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ . . . . .	28
5. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ auf die Strecke $a$ . . . . .	29
6. Die $A$ -Linie . . . . .	30
7. Die Einflußlinie für den Horizontalschub $H$ . . . . .	31
8. Die Einflußlinie für das Moment $M_k$ im Ständer . . . . .	32
9. Die Einflußlinie für das Moment $M_x$ im Riegel. . . . .	32
<b>B. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .</b>	<b>34</b>
10. Belastung durch wagerecht wirkende Einzellast $W$ am Ständer. . . . .	34
11. Belastung durch wagerecht wirkende Einzellast $W$ am Riegel . . . . .	38
12. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ auf die Strecke $h_2$ . . . . .	40
13. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ auf die Strecke $h_1$ . . . . .	43

	Seite
<b>III. Der Dreigelenkrahmen mit wagerechter Balkenachse und Pendelstütze</b> . . . . .	46
1. Erklärungen . . . . .	46
A. Der Einfluß lotrechter Lasten . . . . .	46
2. Die Einflußlinie für $X_a$ . . . . .	46
3. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ auf die Strecke $l_1$ . . . . .	52
4. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ auf die Strecke $l_2$ . . . . .	52
5. Vollbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ . . . . .	53
6. Die $A$ -Linie . . . . .	53
7. Die Einflußlinie für den Horizontalschub $H$ . . . . .	54
8. Die Einflußlinie für das Moment $M_c$ im Ständer . . . . .	54
9. Die Einflußlinie für das Moment $M_m$ im Riegel . . . . .	55
B. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .	56
10. Wagerecht wirkende Einzellast $W$ am Ständer . . . . .	56
11. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ am Ständer auf die Strecke $h$ . . . . .	60
<b>IV. Der Zweigelenkrahmen mit Pendelstütze</b> . . . . .	62
1. Erklärungen . . . . .	62
A. Die Verschiebungen $\delta_{aa}$ ; $\delta_{bb}$ und $\delta_{ab}$ . . . . .	64
2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	64
3. Die Verschiebung $\delta_{bb}$ . . . . .	65
4. Die Verschiebung $\delta_{ab}$ . . . . .	65
B. Der Einfluß lotrechter Lasten . . . . .	66
5. Die $\delta_{ma}$ -Linie. . . . .	66
6. Die $\delta_{mb}$ -Linie. . . . .	67
7. Die Einflußlinien für $X_a$ und $X_b$ . . . . .	68
8. Die Einflußlinien für die Biegemomente. . . . .	70
9. Vollbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ . . . . .	71
C. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .	73
10. Wagerecht wirkende Einzellast $W$ am Ständer . . . . .	73
11. Wagerechte Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $W$ am Ständer . . . . .	76
<b>V. Der dreiseitige Zweigelenkrahmen mit schiefer Balkenachse.</b> . . . .	78
1. Erklärungen . . . . .	78
2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	79
A. Der Einfluß lotrechter Lasten . . . . .	80
3. Die $\delta_{ma}$ -Linie. . . . .	80
4. Belastung durch Einzellast $P$ . . . . .	82
5. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ . . . . .	83
B. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .	84
6. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $W$ auf den Pfosten $h_1$ . . . . .	84
7. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last auf den Pfosten $h_2$ . . . . .	86
8. Einzellast $W$ an dem Pfosten $h_2$ . . . . .	88

	Seite
<b>VI. Der Dreieckrahmen</b> . . . . .	90
1. Erklärungen. . . . .	90
2. Die Verschiebung $\delta_{rr}$ . . . . .	91
A. Der Einfluß lotrechter Lasten . . . . .	91
3. Die $\delta_{mr}$ - und die $H$ -Linie . . . . .	91
4. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ . . . . .	92
5. Belastung durch lotrechte Einzellast $P$ . . . . .	93
6. Die Einflußlinie für das Moment $M_x$ . . . . .	94
7. Die Einflußlinie für die Normalkraft $N$ . . . . .	95
B. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .	96
8. Belastung durch wagerechte Einzellast $W$ . . . . .	96
9. Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ . . . . .	99
<b>VII. Der versteifte Dreieckrahmen</b> . . . . .	100
1. Erklärungen. . . . .	100
A. Die Verschiebungen $\delta_{aa}$ ; $\delta_{bb}$ ; $\delta_{ab}$ . . . . .	101
2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	101
3. Die Verschiebung $\delta_{bb}$ . . . . .	101
4. Die Verschiebung $\delta_{ab}$ . . . . .	102
B. Der Einfluß lotrechter Lasten. . . . .	102
5. Die $\delta_{ma}$ -Linie . . . . .	102
6. Die $\delta_{mb}$ -Linie . . . . .	102
7. Vollbelastung durch gleichmäßig verteilte Last $Q$ . . . . .	104
C. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .	107
8. Belastung durch wagerechte gleichmäßig verteilte Last $Q$ . . . . .	107
<b>VIII. Der Dreieckrahmen mit Pendelstütze</b> . . . . .	109
1. Erklärungen. . . . .	109
2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	110
A. Der Einfluß lotrechter Lasten . . . . .	111
3. Die Verschiebung $\delta_{ma}$ . . . . .	111
4. Die Einflußlinie für $X_a$ . . . . .	113
5. Die Einflußlinie für den Horizontalschub $H$ . . . . .	114
B. Der Einfluß wagerechter Lasten . . . . .	114
6. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ . . . . .	114
<b>IV. Zwei durch Gelenkstab verbundene eingespannte Ständer</b> . . . . .	117
1. Erklärungen. . . . .	117
2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	117
3. Die Verschiebung $\delta_{ma}$ . . . . .	117
4. Die $H$ -Linie . . . . .	118

	Seite
<b>X. Der durch Zugband verspannte einfache Balken . . . . .</b>	<b>120</b>
1. Erklärungen . . . . .	120
2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	121
3. Die Verschiebung $\delta_{ma}$ . . . . .	122
4. Die Einflußlinie für $H$ . . . . .	123
<b>XI. Der Eingelenkbalken auf 4 Stützen . . . . .</b>	<b>125</b>
1. Erklärungen . . . . .	125
2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ . . . . .	126
3. Die $\delta_{ma}$ -Linie . . . . .	127
4. Die Einflußlinie für $X_a$ . . . . .	128
5. Belastung durch gleichmäßig verteilte Last . . . . .	129
6. Die Einflußlinie für das Moment $M_m$ in der Öffnung $l$ . . . . .	129
7. Die Einflußlinie für die Auflagereaktion $A$ . . . . .	130
<b>XII. Der Einfluß der Wärmeänderung . . . . .</b>	<b>131</b>
Erklärungen . . . . .	131

---

# I. Der Dreigelenkrahmen mit Zugband.

## 1. Erklärungen.

Die Grundform des in der Abb. 1 gezeichneten Systems ist der Dreigelenkrahmen und wird dieser durch das die Punkte  $a—a$  verbindende Zugband ein einfach statisch unbestimmtes Tragorgan.

Zur Berechnung der statisch unbestimmten Spannkraft  $H$  im Zugband dienen folgende Betrachtungen:

Durch die Belastung beliebiger äußerer Kräfte würde der Punkt  $a$  des statisch bestimmten Dreigelenkrahmens in horizontaler

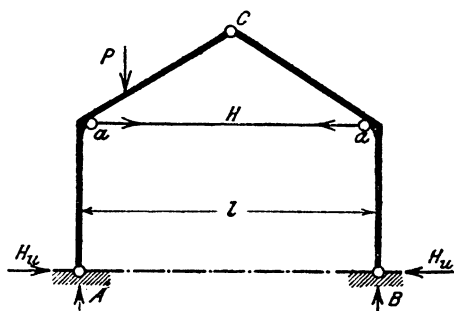


Abb. 1.

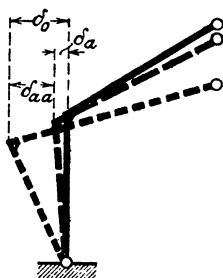


Abb. 2.

Richtung eine Verschiebung von der Größe  $\delta_o$  zurücklegen. Diese Bewegung wird im statisch unbestimmten System durch das Zugband verhindert, und zwar so, daß die wirkliche Verschiebung des Punktes  $a$  nur die Größe von  $\delta_a$  erreichen kann. Somit ergibt sich, bezeichnet man die Spannkraft im Zugband mit  $H$ ,

$$\delta_o - \delta_a = H \cdot \delta_{aa},$$

worin  $\delta_{aa}$  die Verschiebung des Punktes  $a$  in Richtung der Kraft  $H$  bedeutet, wenn  $H$  die Größe „Eins“ annimmt.

Die Verschiebungen  $\delta_o$ ,  $\delta_a$  und  $\delta_{aa}$  berechnen sich nun nach bekannten Gesetzen der Elastizitätstheorie aus den Beziehungen



$$\delta_o = \int M_o M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_o N_a \frac{ds}{EF}$$

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{ds}{EJ} + \int N_a^2 \frac{ds}{EF} \text{ und}$$

$$\delta_a = \frac{Hl}{EF_a},$$

worin  $M_o$  das Moment der äußeren Kräfte im statisch bestimmten Grundsystem, dem Dreigelenkrahmen, ist und  $M_a$  das Moment aus der Kraft  $H$  gleich „Eins“ bedeutet; hierbei ist die Kraft  $H=1$  im Sinne der Verschiebung wirkend gedacht.

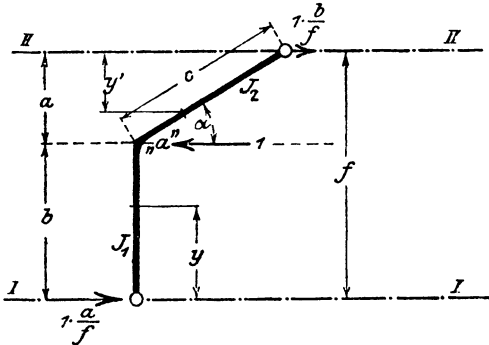
Im weiteren Verlaufe der Untersuchung soll der Einfluß der Normalkräfte, da dieser unwesentlich ist, vernachlässigt werden, und es ergibt sich somit aus den vorher angeschriebenen Bedingungen die Bestimmungsgleichung

$$H = \frac{\int M_o \cdot M_a \frac{ds}{EJ}}{\frac{l}{EF_a} + \int M_a^2 \frac{ds}{EJ}} \dots \dots \dots 1)$$

### A. Der Einfluß lotrechter Lasten.

#### 2. Die Verschiebung $\delta_o$ .

Es bezeichnet  $J_1$  und  $J_2$  die Trägheitsmomente des Ständers und Riegels und ist nach Abb. 3 das Moment für den Belastungszustand  $H=1$



$$M_a = -\frac{a}{f} \cdot y$$

und

$$M'_a = -\frac{b}{f} \cdot y',$$

wobei noch die Voraussetzung gelten möge, daß Momente, welche

in den äußeren Fasern des Ständers und Riegels Zugspannungen hervorrufen, das negative Vorzeichen erhalten sollen.

Abb. 3.

Es ist nun für den Ständer mit

$$M_a = -\frac{a}{f} \cdot y$$

$$\int_0^b M_o M_a \frac{dy}{EJ_1} = -\frac{a}{f} \cdot \int_0^b M_o \cdot y \frac{dy}{EJ_1}$$

In dem letzten Ausdruck bedeutet  $\int M_o y \cdot \frac{dy}{EJ_1}$  das statische Moment der durch  $EJ_1$  dividierten Momentenfläche  $M_o$  im Bereiche des Ständers, bezogen auf die Achse  $I \div I$ .

Bezeichnet man nun dieses statische Moment mit  $S_I$  und setzt ein konstantes Trägheitsmoment  $J_1$  voraus, dann ist der Einfluß der Ständer

$$\int M_o M_a \frac{dy}{EJ_1} = -\frac{a}{f} \cdot \frac{S_I}{EJ_1}$$

Für den Riegel wird, mit

$$M'_a = -\frac{b}{f} \cdot y'$$

$$\int M_o M'_a \frac{dc}{EJ_2} = -\frac{b}{f} \cdot \int_0^c M_o y' \frac{dc}{EJ_2} = -\frac{b}{f} \cdot \frac{S_{II}}{EJ_2}$$

Hierbei bedeutet  $S_{II}$  das statische Moment der Momentenfläche des Riegels, bezogen auf die Achse  $II \div II$ .

### 3. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ .

Für den Ständer  $b$  wird mit

$$M_a = -\frac{a}{f} \cdot y$$

$$M_a^2 = \frac{a^2}{f^2} \cdot y^2$$

und somit

$$\int_0^b M_a^2 \frac{dy}{EJ_1} = \frac{a^2}{f^2} \frac{b^3}{3EJ_1}$$

Für den Riegel  $c$  wird mit

$$M'_a = -\frac{b}{f} \cdot y'$$

$$M'^2_a = \frac{b^2}{f^2} \cdot y'^2$$

und weiter

$$\int_0^a M' a^2 \frac{d y'}{E J_2 \sin \alpha} = \frac{b^2 a^2 c}{f^2 3 E J_2}$$

Mit diesen Werten erhält man für  $\delta_{aa}$

$$\delta_{aa} = \frac{2 \cdot a^2 b^2}{3 f^2 E} \left( \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right)$$

Mit Einsetzung der unter 2. und 3. gefundenen Ausdrücke für  $\delta_o$  und  $\delta_{aa}$  in die Gleichung 1) erhält man mit

$$H = \frac{-a \cdot \Sigma \frac{S_I}{J_1} - b \cdot \Sigma \frac{S_{II}}{J_2}}{\frac{l f}{E a} + \frac{2 \cdot a^2 b^2}{3 f} \left[ \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right]} \dots \dots \dots 2)$$

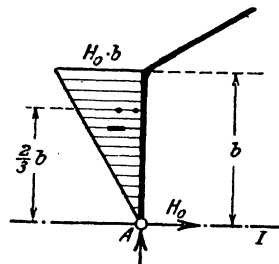
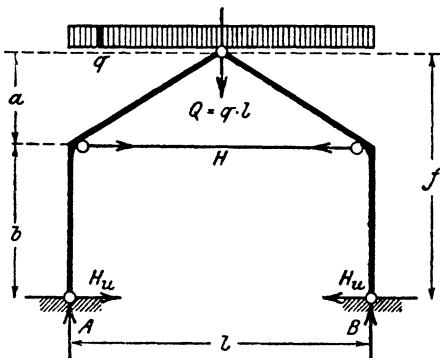
die Bestimmungsgleichung zur Berechnung der Spannkraft  $H$ . Im folgenden soll nun der Endwert von  $H$  für einige der gewöhnlichen Belastungsfälle berechnet werden.

**4. Vollbelastung einer gleichmäßig verteilten Last  $Q$ .**

Für diesen Belastungszustand ist im Grundsystem, dem Dreigelenkrahmen

$$A = B = \frac{Q}{2} \text{ und } H_o = \frac{Ql}{8f}$$

Mit diesen Werten ergeben sich die in den Abbildungen 4 ÷ 4c gezeichneten Momentenflächen des Grundsystems. Die statischen Momente dieser Momentenflächen, bezogen auf die Achsen I ÷ I und II ÷ II, berechnen sich nun mit



$$\Sigma S_I = -2 \cdot H_o \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \frac{2}{3} b = -\frac{2}{3} H_o \cdot b^3$$

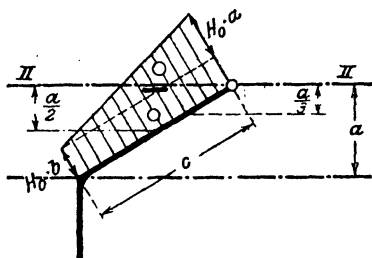


Abb. 4b.

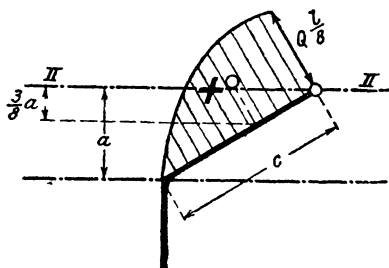


Abb. 4c.

$$\Sigma S_{II} = -2 \left[ H_o \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2} + H_o \cdot a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} - \frac{2}{3} \frac{Ql}{8} \cdot c \cdot \frac{3}{8} \cdot a \right]$$

$$\Sigma S_{II} = -H_o \cdot \frac{a \cdot c}{6} (3b - a)$$

Diese Werte in die Gleichung 2) eingesetzt ergibt

$$H = \frac{\frac{2}{3} H_o \frac{a b^3}{J_1} + \frac{1}{6} H_o \cdot a \cdot b \cdot c \frac{3b - a}{J_2}}{\frac{f \cdot l}{F_a} + \frac{2 \cdot a^2 \cdot b^3}{3 f} \left( \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right)}$$

oder

$$H = H_o \frac{\frac{2b}{J_1} + \frac{c}{2J_2} \left( 3 - \frac{a}{b} \right)}{\frac{3 \cdot f \cdot l}{a \cdot b^2 F_a} + \frac{2a}{f} \left( \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right)} \dots \dots \dots 3)$$

Bei Anwendung der Formel 3) müssen nun, soweit es sich um Neukonstruktionen handelt, die Trägheitsmomente  $J_1$  und  $J_2$  sowie der Zugstangenquerschnitt  $F_a$  schätzungsweise auf Grund praktischer Erfahrung bestimmt werden; man kann aber die Formel 3) für den praktischen Gebrauch vereinfachen, indem man die Trägheitsmomente  $J_1$  und  $J_2$  gleich  $J$  setzt und den Einfluß der Verschiebung  $\delta_a$  vernachlässigt.

Dann erhält man

$$H = \frac{Q \cdot l}{8} \cdot \frac{b + \frac{c}{4} \left( 3 - \frac{a}{b} \right)}{a \cdot (b + c)}$$

Weiter ist nach den Abbildungen 4 und 4<sup>a</sup>

$$H_u = H_o - H \cdot \frac{a}{f}.$$

Der Querschnitt, für welchen bei dem vorliegenden Belastungsfall das Biegemoment im Riegel seinen größten Wert erreicht, findet sich aus bekannten Beziehungen wie folgt:

Das Moment im Riegel ist

$$M_x = \frac{Q}{2} \cdot x - \frac{q x^2}{2} - H_u (b + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) - H \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

und aus

$$\frac{d M_x}{d x} = 0 \text{ ergibt sich}$$

$$x_o = \frac{l}{2} - \frac{2 \cdot a}{Q} (H_u + H). \quad 4)$$

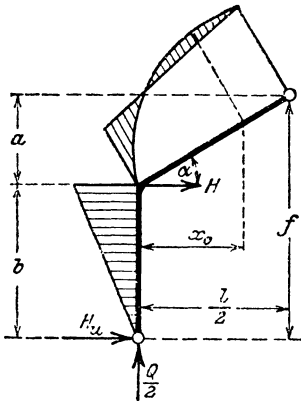


Abb. 5.

Für zusammengesetzte Belastungsfälle ist es zur Bestimmung des größten Biegemomentes besser, das zeichnerische Verfahren in Anwendung zu bringen. Zur Querschnittsberechnung bestimmt man am zweckmäßigsten die Kernpunktsmomente  $M^o$  und  $M^u$  und ist dann das Verfahren wie bei allen Rahmen- und Bogenkonstruktionen.

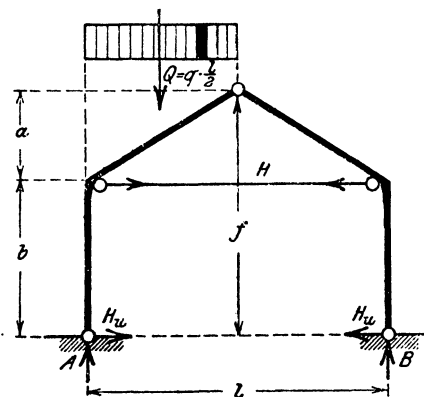


Abb. 6.

### 5. Belastung einer gleichmäßig verteilten Last $Q$ auf die Strecke $\frac{l}{2}$ .

Dieser Belastungsfall ist in der Abb. 6 gezeichnet. Die Auflagerreaktionen im Dreigelenkrahmen sind

$$A = \frac{3}{4} Q; \quad B = \frac{Q}{4}$$

und

$$H_o = \frac{Ql}{8f}.$$

5. Belastung einer gleichmäßig verteilten Last  $Q$  auf die Strecke  $\frac{l}{2}$ . 7

Dann ist

$$\Sigma S_I = -\frac{2}{3} H_0 \cdot b^3.$$

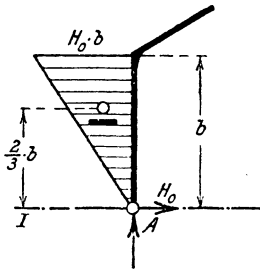


Abb. 6a.

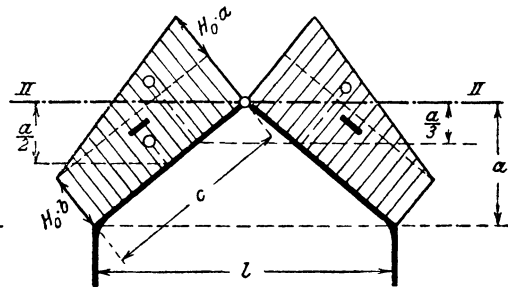


Abb. 6b.

Der Wert für  $S_{II}$  berechnet sich zu

$$\Sigma S_{II} = -2 \left[ H_0 b \cdot c \cdot \frac{a}{2} + H_0 \cdot a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \right] + \frac{5}{48} Q \cdot l \cdot c \cdot \frac{2}{5} a + \frac{Ql}{8} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3}$$

$$\Sigma S_{II} = -H_0 \cdot \frac{a \cdot c}{6} (3b - a).$$

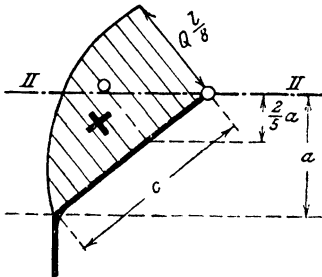


Abb. 6c.

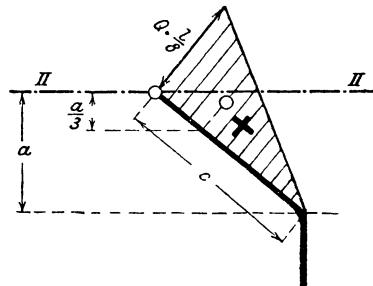


Abb. 6d.

Diese Werte für  $S_I$  und  $S_{II}$  haben die gleiche Form wie die unter 4. berechneten und lauten somit auch die Gleichung für  $H$  wie im vorigen berechnet; hierbei ist aber zu beachten, daß jetzt  $H_0$  nur halb so groß ist wie bei dem vorigen Belastungsfall. Es ist also mit Rücksicht auf die Abb. 6

$$H = H_0 \frac{\frac{2b}{J_1} + \frac{c}{2J_2} \left(3 - \frac{a}{b}\right)}{\frac{3fl}{a \cdot b^2 \cdot F_a} + \frac{2a}{f} \left(\frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2}\right)} \dots 5)$$

Das unter 4. bezüglich Anwendung der Formel 3) Gesagte gilt sinngemäß auch für diesen Ausdruck, und kann man somit die Formel 5) in derselben Weise vereinfachen.

### B. Der Einfluß wagerechter Lasten.

#### 6. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ auf der Strecke $f$ .

In den Abbildungen 7 bis 7<sup>f</sup> ist dieser Belastungszustand und die Momentenverteilung im Dreigelenrahmen dargestellt. Bei

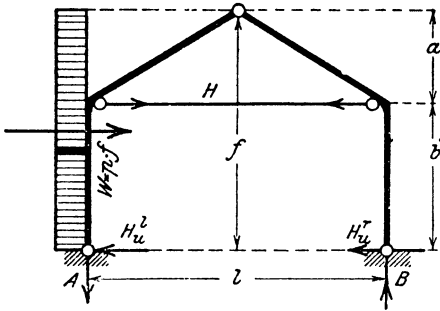


Abb. 7.

der Aufzeichnung der Momentenflächen ist der Einfluß einer jeden Kraft getrennt untersucht; die Wirkung der lotrechten Auflagerkräfte  $A$  und  $B$  ist in den Abbildungen nicht mit berücksichtigt worden, weil der Einfluß dieser Momentenflächen, da diese unter sich gleich groß sind, aber verschiedene Vorzeichen besitzen, auf den Wert von  $S_{II}$  gleich Null ist.

Nach Abb. 7 ist nun

$$A = B = \pm \frac{W \cdot f}{2l}$$

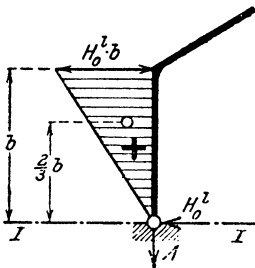


Abb. 7a.

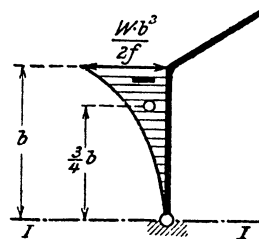


Abb. 7b.

und

$$H_o^l = \frac{3}{4} W$$

$$H_o^r = \frac{W}{4}.$$

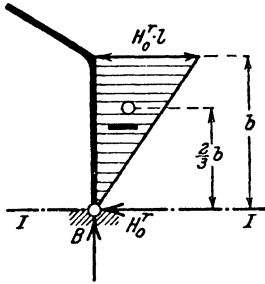


Abb. 7c.

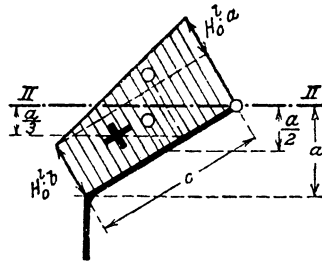


Abb. 7d.

Hiermit berechnet sich für  $S_I$

$$S_I = H_o^l b \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} b - H_o^r b \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} b - \frac{1}{3} \frac{W \cdot b^3}{2f} \cdot b \cdot \frac{3}{4} b$$

$$S_I = -\frac{W b^3}{24f} \cdot (3b - 4f).$$

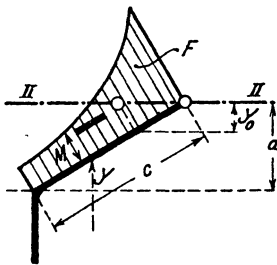


Abb. 7e.

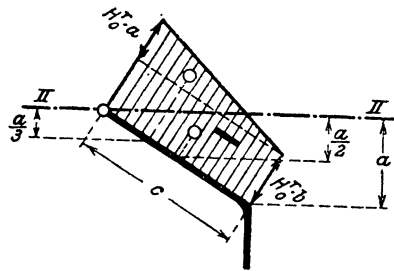


Abb. 7f.

Für die statischen Momente der Momentenflächen, auf die Achse  $II \div II$  bezogen, ergibt sich

$$S_{II} = H_o^l \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2} + H_o^l \cdot a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} - H_o^r b \cdot c \cdot \frac{a}{2} - H_o^r a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} - F \cdot y_o.$$



Nach Abb. 7<sup>e</sup> ist nun  $F$  die Momentenfläche aus dem Einfluß der Last  $W$  im Riegel  $c$  und  $y_0$  der Schwerpunktsabstand dieser Fläche von der Achse  $II \div II$ . Der Flächeninhalt und Schwerpunktsabstand dieser Momentenfläche berechnet sich aus

$$F = \int M \cdot dc \quad \text{und} \quad y_0 = f - \frac{\int M \cdot y \cdot dc}{\int M dc}.$$

Es ist nun

$$M = \frac{W}{f} \cdot \frac{y^2}{2}$$

und somit ist

$$F = \frac{W}{6f} \cdot \frac{c}{a} \cdot (f^3 - b^3)$$

hiermit folgt

$$y_0 = f - \frac{3}{4} \frac{f^4 - b^4}{f^3 - b^3}.$$

Setzt man nun diese Werte in den vorstehenden Ausdruck für  $S_{II}$  ein, so ergibt sich

$$S_{II} = - \frac{W \cdot c}{24} \left[ \frac{f^3 - 4b^3 + \frac{3b^4}{f}}{a} - 2a(3b + a) \right]$$

Mit diesen Werten für  $S_I$  und  $S_{II}$  erhält man aus Gleichung 2)

$$H = \frac{W}{8} \cdot \frac{\frac{b}{f} \cdot \frac{3b - 4f}{J_1} + \frac{c}{bJ_2} \left[ \frac{f^3 - 4b^3}{a^2} + \frac{3b^4}{fa^2} - 2(3b + a) \right]}{\frac{3 \cdot fl}{ab^2 F_a} + \frac{2a}{f} \left( \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right)}. \quad . \quad 6)$$

Aus dem Aufbau der Formel 6) ist zu ersehen, daß der Wert für  $H$  negativ wird, das heißt die Spannkraft in der Stange ist für diesen Belastungsfall eine Druckkraft. Da man nun aber in der praktischen Ausführung die Stange nur als Zugorgan ausbilden wird, so muß bei der Untersuchung und Berechnung von Bauwerken der vorliegenden Art besonders darauf geachtet werden, ob kein Belastungsfall eintreten kann, wobei die resultierende Spannkraft  $H$  eine Druckkraft ist. Für einen solchen Fall verhält sich dann das System wie der statisch bestimmte Dreigelenkrahmen.

**7. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last  $W$  auf die Strecke  $b$ .**

In den Abbildungen 8 bis 8<sup>f</sup> ist dieser Belastungsfall und die aus diesem sich ergebenden Momentenflächen dargestellt.

Es ist im Dreigelenkrahn

$$A = B = \pm \frac{W \cdot b}{2l}$$

und

$$H_o^l = W \cdot \frac{4f - b}{4f};$$

$$H_o^r = \frac{W \cdot b}{4f}.$$

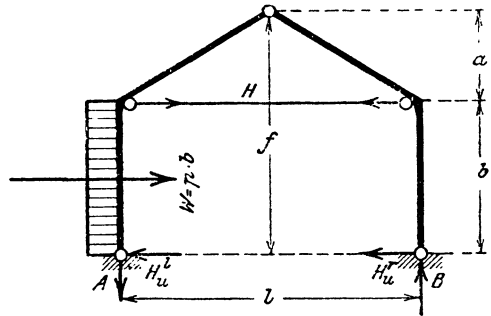


Abb. 8.

Die statischen Momente der Momentflächen, auf die Achse  $I-I$  berechnet, ergibt

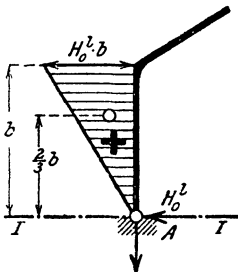


Abb. 8a.

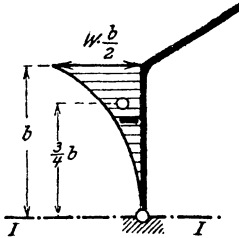


Abb. 8b.

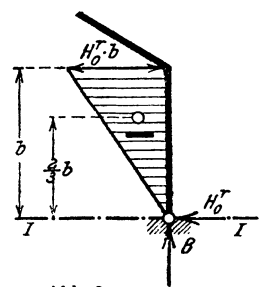


Abb. 8c.

$$\left. \begin{aligned} S_I &= - \frac{W \cdot b}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{3}{4} b \\ &+ H_o^l b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} b \\ &- H_o^r b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} b \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} &- \frac{W b^3}{8} \\ &+ H_o^l \frac{b^3}{3} \\ &- H_o^r \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

$$S_I = - \frac{W b^3}{8} + \frac{b^3}{3} (H_o^l - H_o^r).$$

Setzt man die Werte für  $H_o^l$  und  $H_o^r$  in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$S_I = \frac{W b^2}{24 \cdot f} (5 a + b).$$

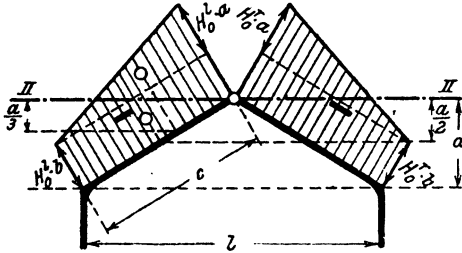


Abb. 8d.

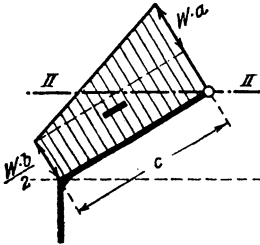


Abb. 8e.

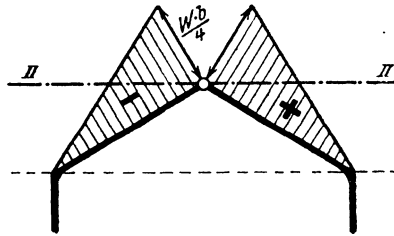


Abb. 8f.

Aus den Abbildungen 8d bis 8f berechnet sich

$$\left. \begin{aligned} S_{II} &= H_o^l \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2} + H_o^l a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &- H_o^r b \cdot c \cdot \frac{a}{2} - H_o^r a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &- W \frac{b}{2} \cdot c \cdot \frac{a}{2} - W \cdot a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} &H_o^l \frac{a \cdot c}{2} \left( b + \frac{a}{3} \right) \\ &- H_o^r \cdot \frac{a c}{2} \left( b + \frac{a}{3} \right) \\ &- W \cdot \frac{a \cdot c}{2} \left( \frac{b}{2} + \frac{a}{3} \right) \end{aligned}$$

$$S_{II} = (H_o^l - H_o^r) \frac{a \cdot c}{2} \left( b + \frac{a}{3} \right) - W \cdot \frac{a c}{2} \left( \frac{b}{2} + \frac{a}{3} \right).$$

Es ist nun aber

$$H_o^l - H_o^r = \frac{W}{2f} (2a + b)$$

und so erhält man diesem Ausdruck für  $S_{II}$  den Wert

$$S_{II} = \frac{W \cdot a^2 b c}{6f}.$$



Da nun aber

$$H_o^l - H_o^r = \frac{W}{f} \cdot (f - z) = W \cdot \frac{k}{f}$$

ist, so wird

$$S_I = \frac{W \cdot k b^3}{3f}.$$

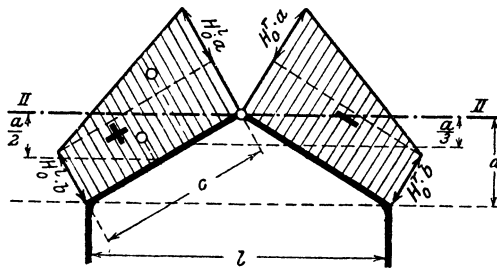


Abb. 9c.

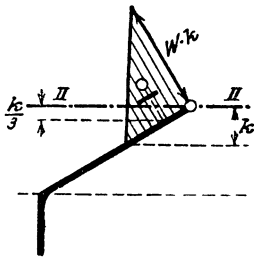


Abb. 9d.

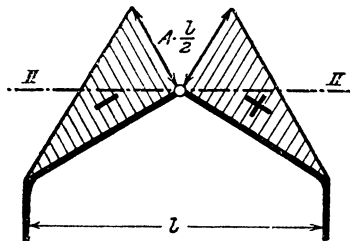


Abb. 9e.

Aus den Abbildungen 9c bis 9e folgt

$$\left. \begin{aligned} S_{II} &= H_o^l b \cdot c \cdot \frac{a}{2} + H_o^l \cdot a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &- H_o^r b \cdot c \cdot \frac{a}{2} - H_o^r \cdot a \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &+ W \cdot k \cdot \frac{k \cdot c}{2a} \cdot \frac{k}{3} \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} &H_o^l \frac{ac}{2} \left( b + \frac{a}{3} \right) \\ &- H_o^r \cdot \frac{ac}{2} \left( b + \frac{a}{3} \right) \\ &- W \frac{k^3 c}{6a} \end{aligned}$$

$$S_{II} = \frac{W \cdot a \cdot c \cdot k}{6f} \left( 3b + a - k^3 \frac{f}{a^3} \right).$$

Mit diesen Werten von  $S_I$  und  $S_{II}$  erhält man aus der Gleichung 2)

$$H = -W \cdot k \cdot \frac{\frac{b}{J_1} + \frac{c}{2bJ_2} \left( 3b + a - k^2 \frac{f}{a^2} \right)}{\frac{3f^2 l}{ab^2 F_a} + 2a \left( \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right)} \quad \dots \quad 8)$$

Diese vorstehenden Untersuchungen umfassen die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle, und wird man zur Berechnung eines Tragorgans der vorliegenden Art bei den meisten Fällen mit den hier entwickelten Formeln auskommen. Es wäre nun noch der Einfluß einer lotrechten Einzellast  $P$  auf das System zu untersuchen und soll zu diesem Zwecke die Einflußlinie für die Stangenkraft  $H$  berechnet werden, denn mit Kenntnis der Einflußlinie läßt sich die Berechnung des ganzen Systems auf die einfachste Form bringen.

### 9. Die Einflußlinie für $H$ .

Nach den Gesetzen aus der Elastizitätslehre ist

$$\int M_o M_a \frac{ds}{EJ} = \Sigma P_m \delta_{ma}$$

Auf den vorliegenden Fall angewendet, bedeutet  $\delta_{ma}$  die Verschiebung eines Punktes  $m$  im Sinne der Kraft  $P$ , wenn die Stangenkraft  $H$  die Größe  $-1$  annimmt; die Gleichung 1) nimmt mit Beachtung des oben Gesagten die allgemeine Form

$$H = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{l} + \delta_{aa} \quad \text{an.}$$

Die  $\delta_{ma}$ -Linie ist somit die Biegelinie für den Belastungszustand  $H = -1$  und soll im folgenden zuerst berechnet werden.

In den Abbildungen 10 und 11 ist der Belastungszustand  $H = -1$  und  $P = 1$  in einem Querschnitt mit der Entfernung  $m$  vom linken Auflager des Dreigelenkrahmens dargestellt. Nach diesen Abbildungen ist

$$A = \frac{l-m}{l}; \quad B = \frac{m}{l} \quad \text{und} \quad H_o = \frac{m}{2f}.$$

Weiter ist

$$M_a = -\frac{a}{f} \cdot y.$$

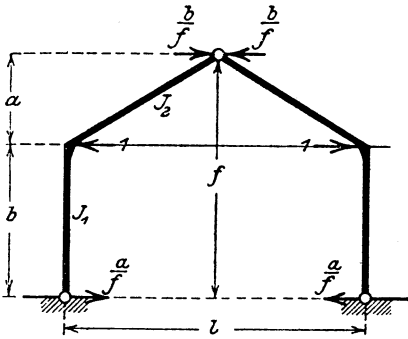


Abb. 10.

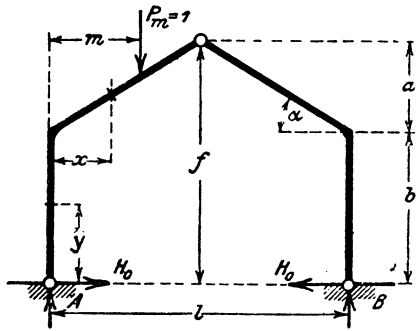


Abb. 11.

Im folgenden soll nun der Einfluß der einzelnen Rahmenteile auf den Wert von  $\sum P_m \delta_{ma} = \int M_o M_a \frac{ds}{EJ}$  untersucht werden.

Für die Ständer gilt:

$$M_o = -\frac{m}{2f} \cdot y$$

und es ist weiter

$$M_o M_a = \frac{a \cdot m}{2f^2} \cdot y^2,$$

somit wird

$$\int M_o M_a \frac{ds}{EJ} = 2 \cdot \frac{a \cdot m}{2f^2} \int_0^b y^2 \frac{dy}{EJ_1} = \frac{a \cdot m \cdot b^3}{3f^2 EJ_1}.$$

Für den rechten Riegel ist:

$$M_o = \frac{m}{l} \cdot x - \frac{m}{2f} \cdot y$$

mit

$$y = b + x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

wird

$$M_o = x \left( \frac{m}{l} - \frac{m \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2f} \right) - \frac{m \cdot b}{2f}.$$

Weiter ist

$$M_a = -\frac{a}{f} \cdot y + 1 \cdot x \operatorname{tg} \alpha$$

und mit

$$y = b + x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

wird

$$M_a = x \frac{b}{f} \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{ab}{f},$$

dann erhält man

$$M_o M_a = \left[ x \left( \frac{m}{l} - \frac{m \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2f} \right) - \frac{mb}{2f} \right] \cdot \left[ x \frac{b}{f} \operatorname{tg} \alpha - \frac{ab}{f} \right]$$

und es ist

$$\int_0^{\frac{l}{2}} M_o M_a \cdot \frac{dx}{E J_2 \cos \alpha} = m \cdot \frac{ab^2 l}{12 f^2 E J_2 \cos \alpha}.$$

Für den linken Riegel ist:

a) in den Grenzen  $x = 0$  und  $x = m$

$$M_o = \frac{l-m}{l} \cdot x - \frac{m}{2f} \cdot y$$

und mit

$$y = b + x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

erhält man

$$M_o = x \left( 1 - \frac{m}{l} - \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{2f} \right) - \frac{m \cdot b}{2f}.$$

Weiter ist

$$M_a = x \frac{b}{f} \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{ab}{f}$$

und es folgt für

$$\begin{aligned} \int_0^m M_o M_a \frac{dx}{E J_2 \cos \alpha} &= -m^4 \frac{2ab(2a+b)}{3f^2 l^2 E J_2 \cos \alpha} \\ &+ m^3 \frac{ab(5a+2b)}{3f^2 l E J_2 \cos \alpha} \\ &- m^2 \frac{a^2 b}{2f^2 E J_2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$



Weiter ist

b) in den Grenzen  $x = \frac{l}{2}$  und  $x = m$

$$M_o = m \left( 1 - \frac{b}{2f} \right) - x \left( \frac{m}{l} + \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{2f} \right)$$

und es folgt aus  $M_o M_a$  für

$$\begin{aligned} \int_m^{\frac{l}{2}} M_o M_a \frac{dx}{E J_2 \cos \alpha} &= m^4 \frac{2ab(2a+b)}{3 \cdot f^2 l^2 E J_2 \cos \alpha} \\ &- m^3 \frac{ab(2a+b)}{f^2 l E J_2 \cos \alpha} \\ &+ m^2 \frac{ab(2a+b)}{2f^2 E J_2 \cos \alpha} \\ &- m \frac{ab \cdot l(2a+b)}{12f^2 E J_2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Der Einfluß des linken Riegels beträgt somit

$$\begin{aligned} \int M_o M_a \frac{ds}{E J} &= -m^3 \frac{ab(a+b)}{3f^2 l E J_2 \cos \alpha} + m^3 \frac{ab(a+b)}{2f^2 E J_2 \cos \alpha} \\ &- m \frac{ab \cdot l(2a+b)}{12f^2 E J_2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Die Summe dieser einzelnen Werte ergibt nun die Gleichung zur Berechnung der Ordinaten für die  $\delta_{ma}$ -Linie, und es ist der  $E$ fache Wert

$$E \cdot \delta_{ma} = m \left( \frac{ab^3}{3f^2 J_1} - \frac{a^2bc}{3f^2 J_2} \right) + m^2 \frac{abc}{fl J_2} - m^3 \frac{2 \cdot a \cdot bc}{3fl^2 J_2}.$$

Der Ausdruck im Nenner der Gleichung für  $H$  lautete

$$\delta_{aa} + \frac{l}{EF_a} = \frac{l}{EF_a} + \frac{2}{3} \frac{a^2 b^2}{E f^2} \left( \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right)$$

und erhält man somit aus vorstehendem die Gleichung der Einflußlinie für  $H$  mit

$$H = \frac{m \left( \frac{b^2}{J_1} - \frac{a \cdot c}{J_2} \right) + m^2 \frac{3cf}{l J_2} - m^3 \frac{2cf}{l^2 J_2}}{\frac{3f^2 l}{ab F_a} + 2 \cdot a \cdot b \left( \frac{b}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right)}. \quad . \quad . \quad 9)$$

Zur schnellen und überschlägigen Berechnung des Systems kann man die Trägheitsmomente  $J_1 = J_2 = J$  setzen und den Einfluß des Zugstangenquerschnitts  $F_a$  vernachlässigen. Dann erhält man für die Ordinaten der Einflußlinie die Gleichung

$$H = \frac{m(b^2 - a \cdot c) + m^2 \frac{3cf}{l} - m^3 \frac{2cf}{l^2}}{2ab(b+c)} \quad 10)$$

Aus der Gleichung 10) berechnet sich die von der Einflußlinie begrenzte Fläche zu

$$F = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{b + \frac{c}{4} \left(3 - \frac{a}{b}\right)}{a(b+c)}$$

Damit berechnet man angenähert unter den oben getroffenen Voraussetzungen die Spannkraft  $H$  für eine gleichmäßig verteilte Einheitslast  $q$  auf die Strecke  $l$  zu

$$H = q \frac{l^2}{8} \cdot \frac{b + \frac{c}{4} \left(3 - \frac{a}{b}\right)}{a(b+c)}$$

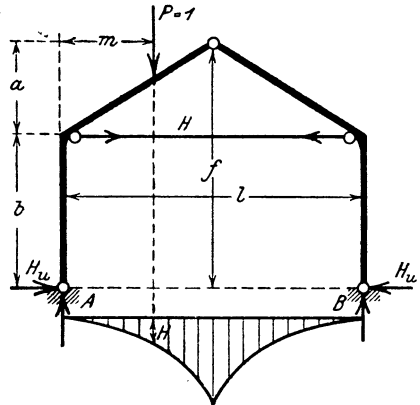


Abb. 12.

Dieser Wert stimmt mit den unter 4. gefundenen genau überein.

Nachdem nun die Einflußlinie für  $H$  bestimmt ist, können damit auch alle anderen Einflußlinien des Systems berechnet oder konstruiert werden. Im weiteren Verlaufe der Untersuchung sollen einige der wichtigsten dieser Linien dargestellt werden.

### 10. Die Einflußlinie für das Moment $M_c$ im Ständer.

Unter dem Einfluß lotrechter äußerer Kräfte  $P$  erleidet der Ständer im Abstände  $y$  von dem Auflager ein Moment von der Größe

$$M_c = M_o - M_a \cdot H.$$

Hierin bedeutet  $M_o$  das Moment im statisch bestimmten System und ist

$$M_o = - H_o \cdot y.$$

Für den Ständer war

$$M_a = -\frac{a}{f} \cdot y$$

und wird somit

$$M_c = -H_0 y + \frac{a}{f} \cdot H \cdot y = \frac{a}{f} \cdot y \left( H - \frac{f}{a} \cdot H_0 \right)$$

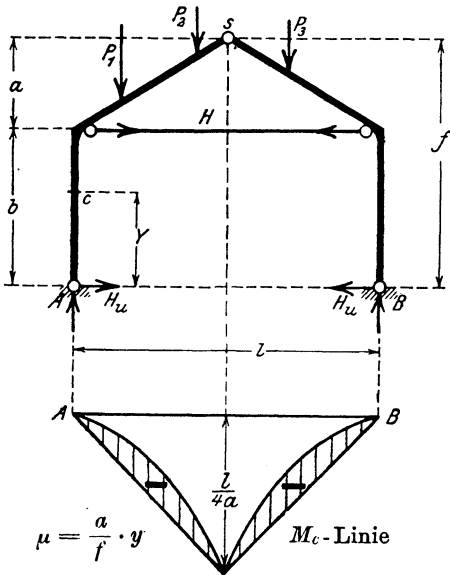


Abb. 13.

Der Horizontalschub des Dreigelenkrahmens berechnet sich aus

$$H_0 = \frac{M_{os}}{f}$$

wo  $M_{os}$  das Moment des einfachen Balkens mit der Stützweite  $l$  im Querschnitt des Scheitelgelenkes bedeutet. Die Einflußlinie für den Horizontalschub  $H_0$  ergibt sich, indem man die  $M_{os}$ -Linie durch  $f$  dividiert.

Aus dem Vorstehenden folgt die Konstruktion der Einflußlinie für das Moment  $M_c$ .

Man trägt auf einer Geraden  $\overline{AB} = l$  im Punkte  $\frac{l}{2}$  die Ordinate der

$\frac{f}{a} \cdot H_0$ -Linie, also  $\eta = \frac{f}{a} \cdot \frac{l}{4 \cdot f} = \frac{l}{4 \cdot a}$  auf und verbindet den Endpunkt derselben mit  $A$  und  $B$ . Diese so erhaltene Einflußlinie wird von der  $H$ -Linie subtrahiert. Der Multiplikator der hiermit gefundenen  $M_c$ -Linie ist  $\mu = \frac{a}{f} \cdot y$ .

Mit der Annahme, daß  $J_1 = J_2 = J$  und  $F_a = 0$  ist, erhält man für  $H$  im Querschnitt  $\frac{l}{2}$  den Wert  $Z = \frac{l}{4a}$  und ist für diesen Fall in der Abb. 13 die Konstruktion der  $M_c$ -Linie dargestellt.

**11. Die Einflußlinie für das Moment  $M_x$  im Riegel.**

Das Moment im Querschnitt  $x$  des Riegels ist

$$M_x = M_o - M_a \cdot H.$$

Es ist nun

$$M_o = M_{ox} - H_o y.$$

das Moment im Dreieckrahmen, und bedeutet  $M_{ox}$  das Moment des einfachen Balkens von der Stützweite  $l$ .

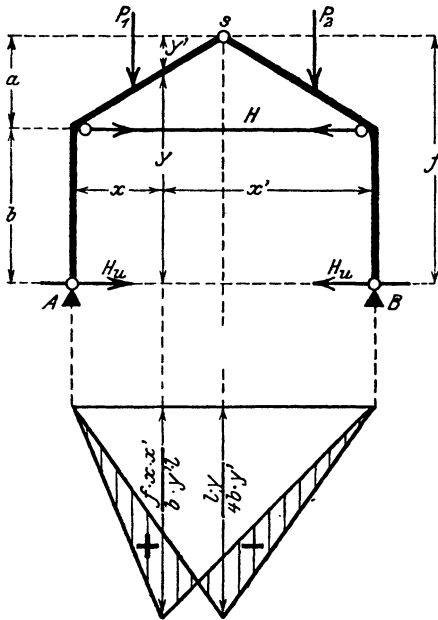


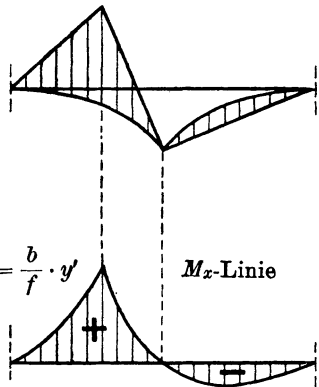
Abb. 14 und 14a

Für den Riegel war

$$M_a = -\frac{b}{f} \cdot y'$$

und erhält man somit

$$M_x = M_{ox} - H_o y + \frac{b}{f} \cdot H \cdot y'$$



14b und 14c.

oder

$$M_x = \frac{b}{f} \cdot y' \left( \frac{f}{b \cdot y'} M_{ox} - \frac{f}{b} \cdot \frac{y}{y'} \cdot H_o + H \right).$$

Aus vorstehendem folgt die Konstruktion der  $M_x$ -Linie. Es wird von der  $\frac{f}{b \cdot y'} M_{ox}$ -Linie die  $\frac{f \cdot y}{b \cdot y'} H_o$ -Linie subtrahiert und zu der so entstandenen Differenz die  $H$ -Linie addiert; der Multiplikator der  $M_x$ -Linie ist  $\mu = \frac{b}{f} \cdot y'$ .

In den Abbildungen 14 bis 14<sup>c</sup> ist die Konstruktion der Einflußlinie für das Moment  $M_x$  im Riegel gezeichnet.

Es empfiehlt sich, bei praktischen Anwendungen gleich die Einflußlinie für die Kernpunktmomente  $M_x^o$  und  $M_x^*$  zu zeichnen; denn mit Kenntnis der Kernpunktmomente sind auch die resultierenden Spannungen im Querschnitt bekannt.

Die übrigen Linien, welche zur Berechnung des Systems noch gebraucht werden, sind in ganz ähnlicher Weise, wie unter 10. und 11. gezeigt worden ist, schnell hergeleitet.

## II. Der Dreigelenkrahmen mit Pendelstütze.

### 1. Erklärungen.

Das in der Abb. 15 gezeichnete System ist ein Dreigelenkrahmen mit einer Pendelstütze. Die Konstruktion ist einfach statisch unbestimmt und wird als unbekannte Kraft die Spannkraft  $X_r$  in der Pendelstütze angesehen und diese aus der Beziehung

$$\delta_r = \sum P_m \delta_{mr} - X_r \cdot \delta_{rr}$$

berechnet.

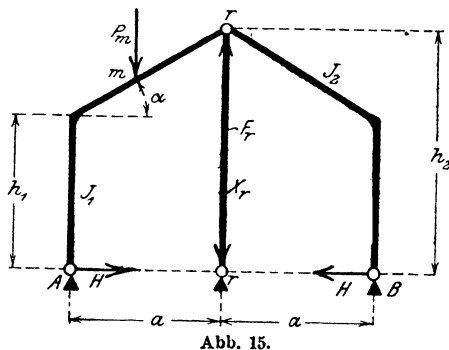


Abb. 15.

Hieraus folgt mit

$$\delta_r = \frac{X_r h_2}{E F_r}$$

$$X_r = \frac{\sum P_m \cdot \delta_{mr}}{\frac{h_2}{E F_r} + \delta_{rr}}$$

### 2. Die Verschiebung $\delta_{rr}$ .

Der Wert  $\delta_{rr}$ , das ist die Verschiebung des Scheitelgelenkes  $r$  im statisch bestimmten System unter dem Einfluß einer Last  $X_r = -1$ , soll in folgendem zuerst berechnet werden, wobei die Normalkräfte wieder als unwesentlich vernachlässigt werden.

Nach Abb. 16 ist für den Belastungszustand  $\sum P_m = 0$  und  $X_r = -1$

$$A_r = \frac{1}{2} \text{ und } H_r = \frac{a}{2 h_2}.$$

Dann ist für den Ständer

$$M_r = -\frac{a}{2h_2} y$$

und

$$M_r^2 = \frac{a^2}{4h_2^2} \cdot y^2.$$

Der Einfluß der Ständer auf den Wert

$$\delta_{rr} = \int M_r^2 \frac{ds}{EJ}$$

ist dann

$$\int M_r^2 \frac{dy}{EJ} = 2 \cdot \frac{a^2}{4h_2^2} \int_0^{h_1} y^2 dy = \frac{a^2 h_1^3}{6 \cdot h_2^2 EJ_1}.$$

Für den Riegel wird

$$M_r = \frac{1}{2} x - \frac{a}{2h_2} y'$$

es ist aber nun

$$y' = h_1 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

und man erhält hiermit

$$M_r = \frac{1}{2} x - \frac{a}{2h_2} (h_1 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) = \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{h_2 - h_1}{h_2} \right) - \frac{a h_1}{2h_2}$$

oder

$$M_r = \frac{h_1}{2h_2} (x - a).$$

Es ist dann weiter

$$M_r^2 = \frac{h_1^2}{4h_2^2} (x - a)^2$$

und man erhält

$$\int M_r^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{a^3 h_1^3}{6 h_2^3 EJ_2 \cos \alpha}.$$

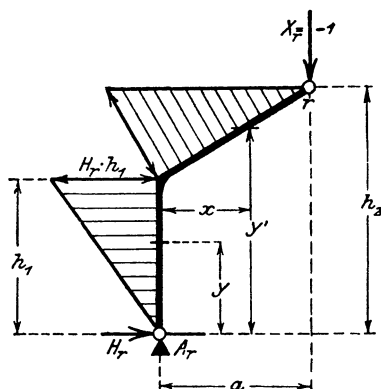


Abb. 16.

Der Ausdruck für  $\delta_{rr}$  lautet somit

$$\delta_{rr} = \frac{a^3 h_1^3}{6 h_2^2 \cdot E J_1} + \frac{a^3 h_1^3}{6 h_2^2 \cdot E J_2 \cos \alpha}$$

oder

$$\delta_{rr} = \frac{a^3 h_1^3}{6 h_2^2 \cdot E J_1} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right) \dots \dots \dots 11)$$

Der Wert für  $\delta_{rr}$  ist von den Belastungen unabhängig und für jedes System der vorstehenden Art schnell zu berechnen.

Zur Berechnung des Wertes  $\Sigma P_m \delta_{mr}$  sollen im weiteren Verlaufe der Untersuchung die Einflußlinien für die einzelnen Teile des Systems berechnet werden, denn mit Kenntnis der Einflußlinien ist die Berechnung des Systems für fast alle Belastungsfälle sehr vereinfacht. Im folgenden soll nun zuerst die  $X_r$ -Linie für die Riegel berechnet werden.

### A. Der Einfluß lotrechter Lasten.

#### 3. Die Einflußlinie $X_r$ für die Riegel.

Zur Berechnung dieser Einflußlinie dient die Beziehung

$$\Sigma P_m \delta_{mr} = \int M_o M_r \frac{ds}{EJ} + \int N_o N_r \frac{ds}{EF}$$

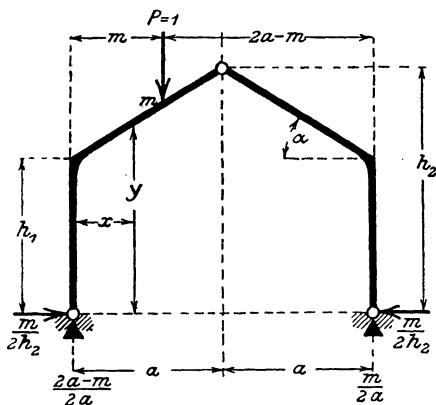


Abb. 17.

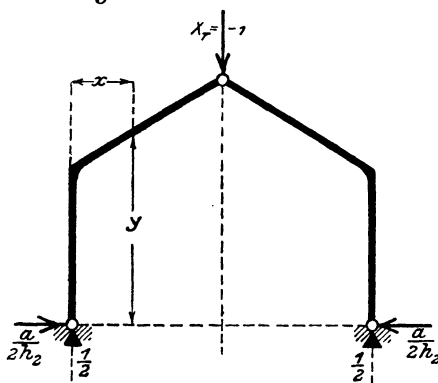


Abb. 18.

Der Einfluß der Normalkräfte wird vernachlässigt, dann ist nach den Abbildungen 17 und 18 für den Belastungszustand  $X_r = -1$  und  $P = 1$  im Abstand  $m$  vom linken Auflager

a) für die Ständer

$$M_o = - \frac{m}{2 h_2} \cdot y$$

und

$$M_r = - \frac{a}{2 h_2} \cdot y.$$

Somit ist

$$\dot{M}_o M_r = \frac{a m}{4 h_2^2} y^2$$

und weiter

$$\int M_o M_r \frac{ds}{EJ} = 2 \cdot \frac{a \cdot m}{4 h_2^2} \int_0^{h_1} y^2 \frac{dy}{EJ_1}$$

oder

$$= \frac{a \cdot m \cdot h_1^3}{6 h_2^2 EJ_1}.$$

Dieses ist der Einfluß der beiden Ständer.

b) Der linke Riegel.

Es ist

$$M_o = \frac{2 a - m}{2 a} \cdot x - \frac{m}{2 h_2} \cdot y$$

und mit

$$y = h_1 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

wird

$$M_o = x - \frac{m}{2 a} \cdot x - \frac{m}{2 h_2} h_1 - \frac{m}{2 h_2} x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

oder

$$M_o = x \left( 1 - \frac{m}{2 a} - \frac{m}{2 h_2} \operatorname{tg} \alpha \right) - \frac{m h_1}{2 h_2}.$$

Es war

$$M_r = \frac{h_1}{2 h_2} (x - a)$$



und man erhält

$$\int_0^m M_o M_r \frac{ds}{EJ_2} = \frac{h_1}{2 h_2 EJ_2 \cos \alpha} \left[ m^4 \left( \frac{h_1}{6 a h_2} - \frac{1}{3 a} \right) + m^3 \left( \frac{5}{6} - \frac{h_1}{2 h_2} \right) + m^2 \left( \frac{a h_1}{2 h_2} - \frac{a}{2} \right) \right]$$

Weiter ist für den linken Riegel in den Grenzen  $x = a$  und  $x = m$

$$\begin{aligned} M_o &= \frac{2 a - m}{2 a} \cdot x - \frac{m}{2 h_2} y - (x - m) \\ &= m \left( 1 - \frac{h_1}{2 h_2} \right) - x \left( \frac{m}{2 a} + \frac{m \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2 h_2} \right). \end{aligned}$$

Diesen letzten Ausdruck mit  $M_r = \frac{h_1}{2 h_2} (x - a)$  multipliziert und in den Grenzen  $a \div m$  integriert, ergibt

$$\int_m^a M_o M_r \frac{ds}{EJ_2} = \frac{h_1}{2 h_2 EJ_2 \cos \alpha} \left[ m^4 \left( \frac{1}{3 a} - \frac{h_1}{6 a \cdot h_2} \right) + m^3 \left( \frac{h_1}{2 h_2} - 1 \right) + m^2 \left( a - \frac{a h_1}{2 h_2} \right) + m \left( \frac{a^2 h_1}{6 h_2} - \frac{a^2}{3} \right) \right]$$

Der Einfluß des linken Riegels ist somit

$$\int M_o M_r \frac{ds}{EJ_2} = \frac{h_1}{2 h_2 EJ_2 \cos \alpha} \left[ m \cdot a^2 \left( \frac{h_1}{6 h_2} - \frac{1}{3} \right) + m^2 \frac{a}{2} - m^3 \cdot \frac{1}{6} \right].$$

c) Der rechte Riegel.

Es ist

$$M_o = \frac{m}{2 a} \cdot x - \frac{m}{2 h_2} (h_1 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha) = \frac{m x}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{h_2} \right) - \frac{m h_1}{2 h_2}.$$

Mit

$$M_r = \frac{h_1}{2 h_2} (x - a)$$

wird

$$\int M_o M_r \frac{ds}{E J_2} = \frac{m \cdot a^2 h_1^2}{12 h_2^2 E J_2 \cos \alpha}.$$

Die Zusammenstellung der unter a), b) und c) berechneten Werte für  $\int M_o M_r \frac{ds}{E J_2}$  ergibt die Gleichung zur Bestimmung der  $\delta_{mr}$ -Linie für lotrechte Lasten.

Es ist

$$\begin{aligned} \delta_{mr} = m \left[ \frac{a h_1^3}{6 h_2^2 E J_1} + \frac{a^2 h_1^2}{6 h_2^2 E J_2} \cdot \frac{h_1 - h_2}{h_1 \cos \alpha} \right] \\ + m^2 \frac{a h_1}{4 h_2 E J_2 \cos \alpha} - m^3 \frac{h_1}{12 h_2 E J_2 \cos \alpha} \quad . \quad 12) \end{aligned}$$

Aus

$$\eta = \frac{\delta_{mr}}{\frac{h_2}{E F_r} + \delta_{rr}}$$

ergibt sich die Gleichung der Einflußlinie für  $X_r$  und ist dieselbe in der Abb. 19 dargestellt.

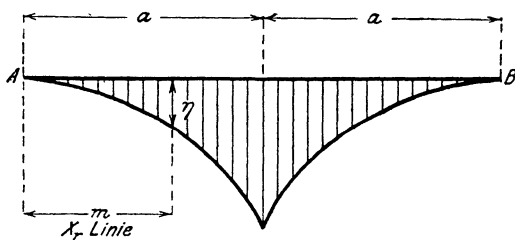


Abb. 19.

Der Inhalt der durch die  $\delta_{mr}$ -Linie begrenzten Fläche berechnet sich aus

$$F_m = 2 \int_0^a \delta_{mr} d_m$$

und es ist nach vorstehendem

$$F_m = \frac{a^4 h_1^2}{6 h_2^2 E J_1} \left[ \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2} \frac{h_1 - h_2}{h_1 \cos \alpha} + \frac{3}{4} \cdot \frac{J_1}{J_2} \frac{h_2}{h_1 \cos \alpha} \right] \quad . \quad 13)$$

Mit diesem Werte können zwei der am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle berechnet werden und sind diese die Belastung von  $Q$  auf die Strecke  $2a$  und  $Q$  auf die Strecke  $a$ .

#### 4. Vollbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ .

Für die Belastung mit  $Q = g \cdot 2a$  wird

$$X_r = \frac{q \int_0^{2a} \delta_{mr} \cdot dm}{\frac{h_2}{EF_r} + \delta_{rr}} = \frac{q F_m}{\frac{h_2}{EF_r} + \delta_{rr}}$$

Mit den Werten aus den Formeln 11) und 13) erhält man für die Spannkraft  $X_r$  aus der in Abb. 20 gezeichneten Belastung

$$X_r = q \cdot a \frac{\frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2} \frac{h_1 - h_2}{h_1 \cos \alpha} + \frac{3}{4} \frac{J_1}{J_2} \frac{h_2}{h_1 \cos \alpha}}{\frac{6 h_2^3 J_1}{a^3 h_1^2 F_r} + \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha}}$$

oder

$$X_r = \frac{Q}{2} \frac{\frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{h_1 - h_2}{h_1 \cos \alpha} + \frac{3}{4} \cdot \frac{J_1}{J_2} \frac{h_2}{h_1 \cos \alpha}}{\frac{6 h_2^3 J_1}{a^3 h_1^2 F_r} + \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha}} \quad . \quad 14)$$

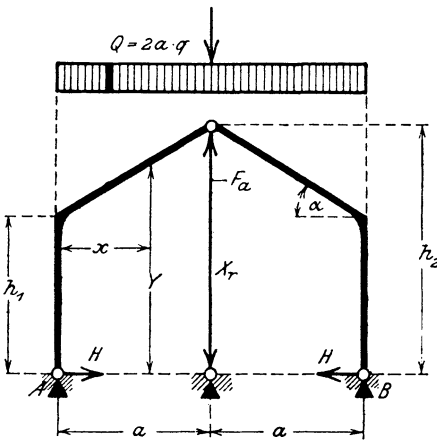


Abb. 20.

Das Moment in einem Querschnitt  $x$  des Riegels ist

$$M_x = M_0 - M_r X_r$$

und bedeutet hierin  $M_0$  das Moment im statisch bestimmten System.

Es war

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{h_1}{2h_2} \cdot (x - a) \\ &= - \frac{h_1}{2h_2} (a - x) \end{aligned}$$

und es ist

$$M_0 = \frac{Q}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} - H_0 \cdot y,$$

mit

$$H_0 = \frac{Q \cdot a}{4 \cdot h_2}$$

wird

$$M_x = \frac{Q}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} - \frac{Q \cdot a}{4h_2} \cdot y + \frac{h_1}{2h_2} (a - x) X_r.$$

5. Belastung durch gleichmäßig verteilte Last  $Q$  auf die Strecke  $a$ . 29

Der Querschnitt des Riegels, in welchem das Moment  $M_x$  seinen größten Wert erreicht, bestimmt sich aus der Beziehung

$$\frac{dM_x}{dx} = 0,$$

Mit

$$y = h_1 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dx} = \frac{Q}{2} - qx - \frac{Q \cdot a}{4h_2} \operatorname{tg} \alpha \\ - \frac{h_1}{2h_2} X_r \end{aligned}$$

und hieraus

$$x_o = a \left( \frac{1}{2} + \frac{h_1}{2h_2} - \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{X_r}{Q} \right) \dots \dots \dots 15)$$

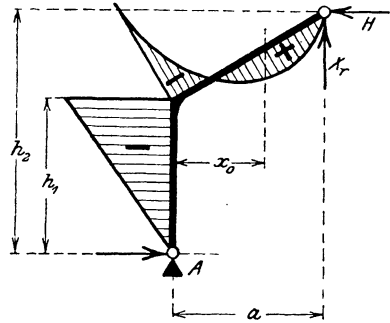


Abb. 21.

5. Belastung durch gleichmäßig verteilte Last  $Q$  auf die Strecke  $a$ .

Es ist wieder

$$\begin{aligned} X_r &= \frac{q \cdot \sum \delta_{mr}}{\frac{h_2}{EF_r} + \delta_{rr}} \\ &= \frac{1}{2} q \cdot \frac{F_m}{\frac{h_2}{EF_r} + \delta_{rr}} \end{aligned}$$

und erhält die Gleichung für  $X_r$  genau dieselbe Form wie die Formel 14), nur ist bei der Anwendung dieser zu beachten, daß für den vorliegenden Belastungsfall  $Q$  einen anderen Wert haben wird als wie im vorhergehenden Abschnitt.

Für andere Belastungszustände durch lotrechte Lasten verwendet man zur Berechnung von  $X_r$  zweckmäßig Einfluß-

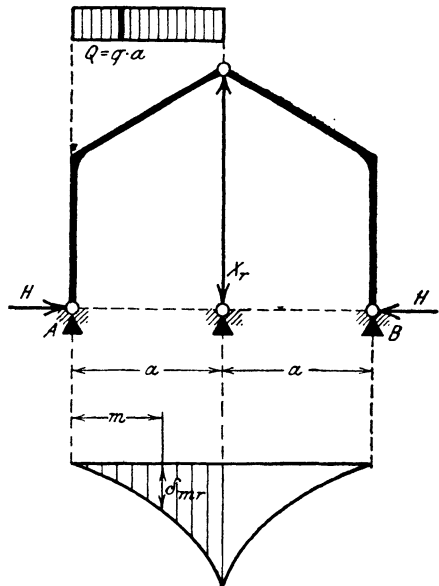


Abb. 22.

linien und ermittelt mit Hilfe derselben die Momente und Auflagerreaktionen des Systems. Im folgenden sollen nun einige der wichtigsten dieser Einflußlinien hergeleitet werden.

### 6. Die *A*-Linie.

Die Auflagerreaktion  $A_0$  im statisch bestimmten System, dem Dreigelenkrahmen, ermittelt sich wie bei dem einfachen Balken von der gleichen Stützweite. Die Einflußlinie für  $A_0$  ist also eine Gerade, welche im Auflagerpunkt  $A$  den Wert  $z = 1$  hat und im Auflagerpunkt  $B$  den Wert  $z' = 0$ .

Es ist nun

$$A = A_0 - A_r X_r$$

und bedeutet  $A_r = \frac{1}{2}$  den Wert für  $X_r$  im Belastungszustand  $\Sigma P = 0$  und  $X_r = -1$ .

Somit ist

$$A = A_0 - \frac{1}{2} X_r$$

oder

$$A = \frac{1}{2} (2A_0 - X_r) \dots \dots \dots 16)$$

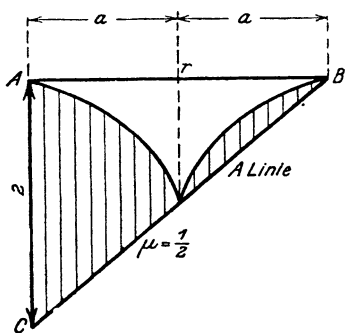


Abb. 23.

Aus der Formel 16) folgt die Konstruktion der Einflußlinie für die Auflagerreaktion  $A$  des Dreigelenkrahmens mit einer Pendelstütze.

Man trägt im Punkt  $A$  der Abszissenachse  $\overline{AB} = 2a$  den Wert  $\overline{AC} = 2$  auf und verbindet  $C$  mit  $B$  durch eine gerade Linie. Von dieser mit 2 multiplizierten  $A_0$ -Linie wird dann die  $X_r$ -Linie subtrahiert, und man erhält als Differenz die Einflußlinie für  $A$ . Diese Konstruktion ist

in der Abb. 23 dargestellt. Der Multiplikator der  $A$ -Linie ist  $\mu = \frac{1}{2}$ .

### 7. Die Einflußlinie für den Horizontalschub $H$ .

Der Horizontalschub  $H$  berechnet sich aus

$$H = H_0 - H_r X_r$$

und bedeutet

$H_0$  den Horizontalschub im Dreigelenkrahmen,

$H_r$  den Horizontalschub im Dreigelenkrahmen für den Belastungszustand  $\Sigma P = 0$  und  $X_r = -1$ .

Es ist

$$H_0 = \frac{M_{0r}}{h_2}$$

und

$$H_r = \frac{a}{2h_2}$$

somit erhält man

$$H = \frac{M_{0r}}{h_2} - \frac{a}{2h_2} X_r$$

oder

$$H = \frac{a}{2h_2} \left( \frac{2M_{0r}}{a} - X_r \right) \quad (17)$$

In der Formel 17) ist  $M_{0r}$  das 'Moment eines einfachen Balkens von der Stützweite  $2a$  und auf den Querschnitt  $r$  bezogen, in welchem das Scheitelgelenk des Dreigelenkrahmens liegt. Aus der Formel 17) folgt die Konstruktion der  $H$ -Linie.

Man trägt auf der Abszissenachse im Punkte  $r$  den Wert  $z_r = \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{2} = 1$  auf und verbindet den Endpunkt  $A$  und  $B$ . Von dieser  $\frac{2}{a} \cdot M_{0r}$ -Linie wird die  $X_r$ -Linie subtrahiert, um die  $H$ -Linie zu erhalten. Der Multiplikator ist  $\mu = \frac{a}{2h_2}$ . Die  $H$ -Linie ist in der Abb. 24<sup>a</sup> gezeichnet.

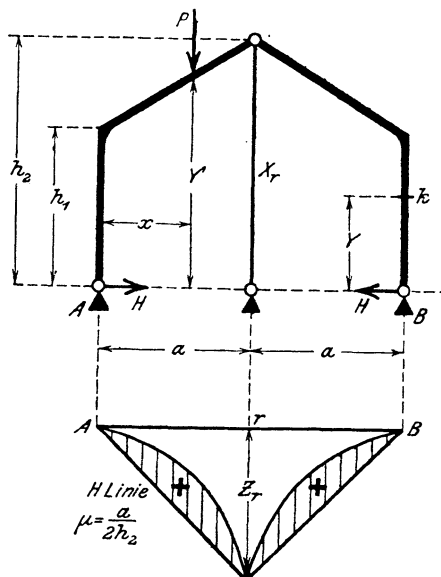


Abb. 24 und 24a.

### 8. Die Einflußlinie für das Moment $M_k$ im Ständer.

Aus der  $H$ -Linie läßt sich leicht durch Veränderung des Multiplikators die Einflußlinie für das Moment  $M_k$  im Querschnitt  $k$  des Ständers herleiten.

Es ist

$$M_k = -H \cdot y. \quad (\text{s. Abb. 24.})$$

oder

$$M_k = -\frac{a}{2h_2} \cdot y \left( \frac{2M_{or}}{a} - X_r \right) \dots \dots 18)$$

Die  $M_k$ -Linie erhält man somit aus der  $H$ -Linie mit dem Multiplikator  $\mu = -y$ .

### 9. Die Einflußlinie für das Moment $M_x$ im Riegel.

Für einen Querschnitt  $x$  im Riegel ist das Moment

$$M_x = M_{ox} - M_r X_r$$

und bedeutet hierin

$$M_{ox} = M_o - H_o y'$$

das Moment im Dreigelenkrahmen, wobei  $M_o$  das Moment im einfachen Balken von der Stützweite  $2a$  ist. Es war

$$M_r = -\frac{h_1}{2h_2} \cdot (a - x)$$

und man erhält somit

$$M_x = M_o - H_o \cdot y' + \frac{h_1}{2h_2} (a - x) X_r$$

oder

$$M_x = \frac{h_1}{2h_2} (a - x) \left[ \frac{2h_2}{(a - x)h_1} \cdot M_o - \frac{2h_2 y'}{(a - x) \cdot h_1} H_o + X_r \right] \dots 19)$$

Aus der Formel 19) ergibt sich die in der Abb. 25 gezeichnete Konstruktion der Einflußlinie für das Moment  $M_x$  im Riegel.

Auf der Abszissenachse  $\overline{AB} = 2a$  trägt man in  $x$  den Wert

$$z_x = \frac{2h_2}{(a - x) \cdot h_1} M_o = \frac{2h_2}{(a - x)h_1} \cdot \frac{x \cdot (2a - x)}{2a} = x \frac{2a - x}{a - x} \cdot \frac{h_2}{a \cdot h_1}$$

das ist die mit  $\frac{2h_2}{h_1(a - x)}$  multiplizierte Ordinate der  $M_o$ -Linie für den Querschnitt  $x$ , auf und verbindet deren Endpunkt mit  $A$  und  $B$ . Im Punkt  $r$  trägt man

$$z_r = \frac{2h_2 y'}{(a-x) \cdot h_1} \cdot H_0 = \frac{2h_2 y'}{(a-x) \cdot h_1} \cdot \frac{a}{2h_2} = \frac{a \cdot y'}{h_1 (a-x)}$$

auf; das ist die mit

$$\frac{2h_2 y'}{(a-x) \cdot h_1}$$

multiplizierte Ordinate der  $H_0$ -Linie und verbindet wieder den Endpunkt derselben mit  $A$  und  $B$ . Zu der Differenz dieser beiden Linien wird die  $X_r$ -Linie addiert, und man erhält somit die Einflußlinie für das Moment  $M_x$  im Riegel. Der Multiplikator ist

$$\mu = \frac{h_1}{2h_2} (a-x).$$

Für den Querschnitt  $r$  wird

$$\mu_r = \frac{h_1}{2h_2} \cdot (a-a) = 0,$$

also auch  $M_r = 0$ .

Zur Untersuchung der resultierenden Spannungen im Querschnitt empfiehlt es sich stets, die Kernpunktsmomente

$$M_x^o \text{ und } M_x^u$$

zu ermitteln und die Spannungen aus

$$\sigma_x^o = - \frac{M_x^o}{W^o}$$

und

$$\sigma_x^u = + \frac{M_x^u}{W^u}$$

zu berechnen.

Es tritt dann an die Stelle von  $y'$  der Wert

$$y^o = y' + k_0 = y' + \frac{W^u}{F}$$

Glaser, Berechnung.

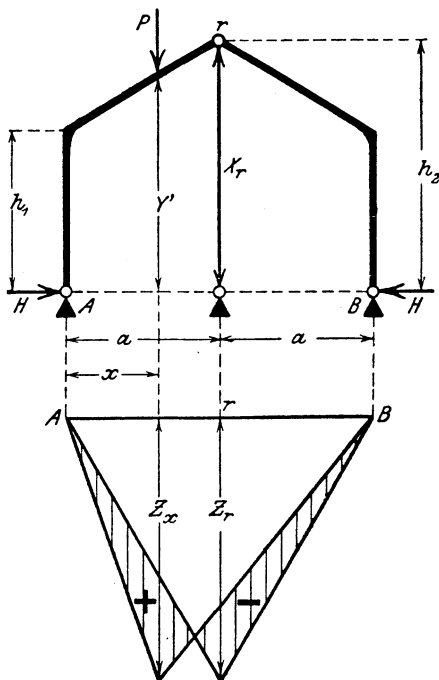


Abb. 25 und 25 a.

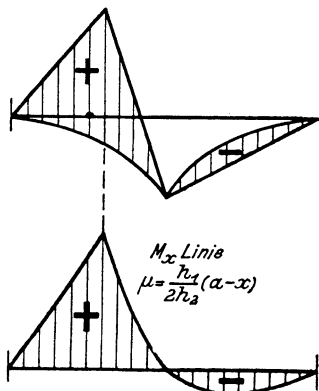


Abb. 25 b und 25 c.



und

$$y'' = y' - k_u = y' - \frac{W_0}{F}$$

worin  $F$  der Querschnitt und  $W$  das Widerstandsmoment des Riegels ist.

Bei der Konstruktion der Einflußlinie für  $M_x$  ist es am zweckmäßigsten, die resultierenden Ordinaten von einer Abszissenachse aus abzutragen, wie es in der Abb. 25<sup>e</sup> gezeichnet ist.

## B. Der Einfluß wagerechter Lasten.

### 10. Belastung durch wagerecht wirkende Einzellast $W$ am Ständer.

Für die wagerecht wirkenden Belastungen sollen im folgenden die Formeln zur Berechnung von  $X_r$  abgeleitet werden, da es sich

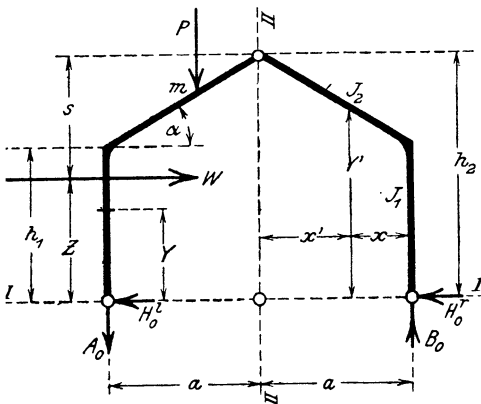


Abb. 26.

für solche Belastungen in den seltensten Fällen rechtfertigt, zuerst eine Einflußlinie zu berechnen. Das Auftreten von wagerechten Lasten ist im Hochbau bei dem vorliegenden System eigentlich nur durch Windbelastung gegeben, seltener noch durch Schrägzug aus einem Kran, für welchen die Kranlaufbahn an dem Ständer befestigt ist. Für diese Belastungszustände ist

es aber vorteilhafter, fertige Formeln zum Gebrauche zu haben, als zuerst die Einflußlinie auszurechnen.

Es war

$$X_r = \frac{\sum P_m \delta_{mr}}{\frac{h_2}{EF_r} + \delta_{rr}} = \frac{\int M_0 M_r \frac{ds}{EJ}}{\frac{h_2}{EF_r} + \delta_{rr}}$$

und weiter für die Ständer

$$M_r = -\frac{a}{2h_2} \cdot y$$

und für die Riegel

$$M_r = \frac{1}{2} x - \frac{a}{2h_2} \cdot y'.$$

Diesen letzten Wert kann man auch umformen, wenn man für  $y'$  den Ausdruck

$$y' = h_1 + x \operatorname{tg} \alpha$$

einsetzt, dann ist

$$M_r = \frac{1}{2} x - \frac{a}{2h_2} (h_1 + x \operatorname{tg} \alpha) = \frac{h_1}{2h_2} x - \frac{ah_1}{2h_2}$$

oder

$$M_r = -\frac{h_1}{2h_2} (a - x) = -\frac{h_1}{2h_2} x'.$$

Zur Berechnung von  $X_r$  erhält man aus vorstehendem

$$X_r = \frac{-\frac{a}{2h_2} \int M_o y \frac{ds}{EJ_1} - \frac{h_1}{2h_2} \int M_o x' \frac{ds}{EJ_2}}{\frac{h_2}{EF_r} + \delta_{rr}}.$$

Die Werte

$$\int M_o y \frac{ds}{EJ_1} \text{ und } \int M_o x' \frac{ds}{EJ_2}$$

kann man als die statischen Momente der reduzierten Momentenflächen des statisch bestimmten Systems, bezogen auf die Achsen  $I \div I$  und  $II \div II$  deuten. S. Abb. 26. Bezeichnet man nun diese Momente mit  $S_I$  und  $S_{II}$  und setzt in obige Gleichung noch den Wert für  $\delta_{rr}$  aus der Formel 11) ein, so erhält man

$$X_r = \frac{-\frac{a}{2h_2} \Sigma \frac{S_I}{J_1} - \frac{h_1}{2h_2} \Sigma \frac{S_{II}}{J_2}}{\frac{h_2}{EF_r} + \frac{a^3 h_1^2}{6h_2^2 EJ_1} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)}$$

oder

$$X_r = \frac{-a \Sigma \frac{S_I}{J_1} - h_1 \Sigma \frac{S_{II}}{J_2}}{\frac{2h_2^2}{F_r} + \frac{a^3 h_1^2}{3h_2 J_1} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)} \quad \dots \quad 19)$$

Für den in der Abb. 26 gezeichneten Belastungsfall ist

$$A_o = B_o = \pm \frac{W \cdot z}{2a},$$

die wagerechten Auflagerreaktionen bestimmen sich aus

$$H_o^l = W \frac{2h_2 - z}{2h_2} \quad \text{und} \quad H_o^r = W \frac{z}{2h_2}.$$

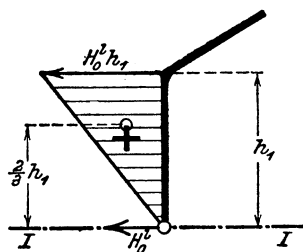


Abb. 26 a.

Zur Berechnung der statischen Momente  $S_I$  und  $S_{II}$  werden die Einflüsse der äußeren Kräfte auf die Biegemomente getrennt untersucht und sind in den Abbildungen 26 a ÷ 26 e diese Momentenflächen aufgezeichnet.

Das auf die Achse  $I \div I$  bezogene statische Moment dieser Flächen berechnet sich zu

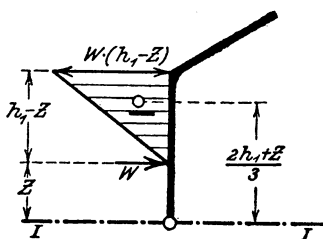


Abb. 26 b.

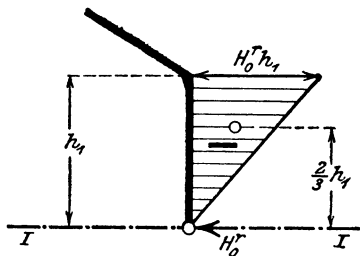


Abb. 26 c.

$$\left. \begin{aligned} S_I &= H_o^l h_1 \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{2}{3} h_1 \\ &- H_o^r h_1 \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{2}{3} h_1 \\ &- W \cdot (h_1 - z) \cdot \frac{h_1 - z}{2} \cdot \frac{2h_1 + z}{3} \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} &(H_o^l - H_o^r) \cdot \frac{h_1^3}{3} \\ &- \frac{W}{6} (2h_1^3 - 3h_1^2 z + z^3) \end{aligned}$$

Setzt man für

$$H_o^l - H_o^r = W \cdot \frac{h_2 - z}{h_2},$$

so ergibt sich

$$S_I = W \cdot \frac{h_1^2 z}{6} \left( 3 - 2 \frac{h_1}{h_2} - \frac{z^2}{h_1^2} \right).$$

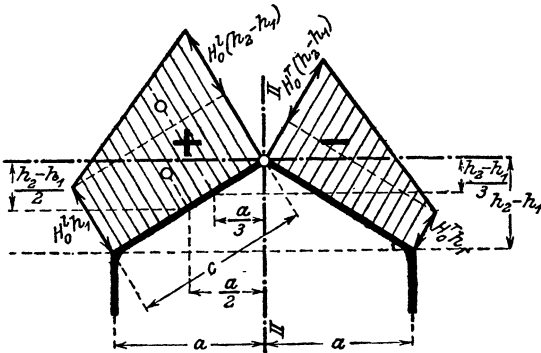


Abb. 26d.

Für  $S_{II}$  ergibt sich aus Abb. 26d ÷ Abb. 26e

$$\begin{aligned} S_{II} &= H_0' \cdot h_1 \cdot c \cdot \frac{a}{2} + H_0' (h_2 - h_1) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &\quad - H_0^r h_1 c \cdot \frac{a}{2} - H_0^r (h_2 - h_1) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &= W \cdot (h_1 - z) \cdot c \cdot \frac{a}{2} - W \cdot (h_2 - h_1) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} S_{II} &= \frac{ac}{6} (2h_1 + h_2) (H_0' - H_0^r) \\ &= W \cdot \frac{ac}{6} (2h_1 + h_2 - 3z). \end{aligned}$$

Setzt man wieder für

$$H_0' - H_0^r = W \cdot \frac{h_2 - z}{h_2}$$

ein, so erhält man

$$S_{II} = W \cdot \frac{a \cdot c z}{3} \cdot \frac{h_2 - h_1}{h_2}.$$

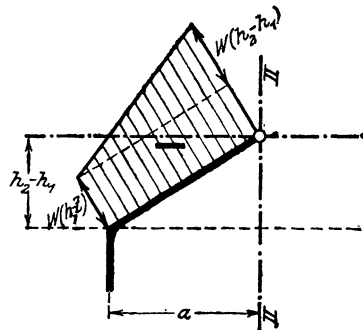


Abb. 26e.

Setzt man nun diese für  $S_I$  und  $S_{II}$  gefundenen Werte in die Formel 19) ein, so ergibt sich

$$X_r = \frac{-W \cdot \frac{a \cdot h_1^2 z}{6 J_1} \left( 3 - 2 \frac{h_1}{h_2} - \frac{z^2}{h_1^2} \right) - W \cdot \frac{a \cdot c h_1 z}{3 J_2} \cdot \frac{h_2 - h_1}{h_2}}{\frac{2 h_2^2}{F_r} + \frac{a^2 h_1^2}{3 h_2 J_1} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)}$$

$$X_r = -W \cdot \frac{\frac{3}{2} - \frac{h_1}{h_2} - \frac{z^2}{2 h_1^2} + \frac{J_1}{J_2} \frac{c}{h_1} \cdot \frac{h_2 - h_1}{h_2}}{\frac{6 \cdot h_2^2 J_1}{a \cdot z h_1^2 F_r} + \frac{a^2}{h_2 z} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)} \quad . \quad . \quad 20)$$

**11. Belastung durch eine wagerecht wirkende Einzellast  $W$  am Riegel.**

Dieser Belastungszustand ist in der Abb. 27 dargestellt, und es sind die Werte für  $A_o$ ;  $B_o$ ;  $H_o^l$  und  $H_o^r$  gleich den unter 10. berechneten.

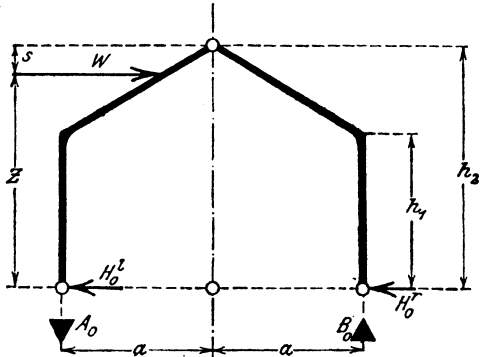


Abb. 27.

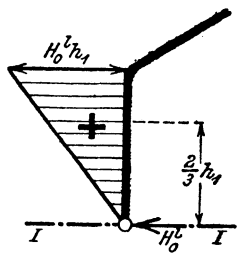


Abb. 27 a.

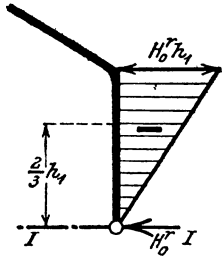


Abb. 27 b.

Nach den Abbildungen 27<sup>a</sup> und 27<sup>b</sup> ist

$$\left. \begin{aligned} S_I &= H_o^l \cdot h_1 \frac{h_1}{2} \frac{2}{3} h_1 \\ &- H_o^r \cdot h_1 \frac{h_1}{2} \frac{2}{3} h_1 \end{aligned} \right\} = (H_o^l - H_o^r) \frac{h_1^3}{3}$$

oder

$$S_I = W \cdot \frac{h_2 - z}{h_2} \cdot \frac{h_1^3}{3} = W \cdot \frac{h_1^3}{3} \cdot \frac{s}{h_2}$$

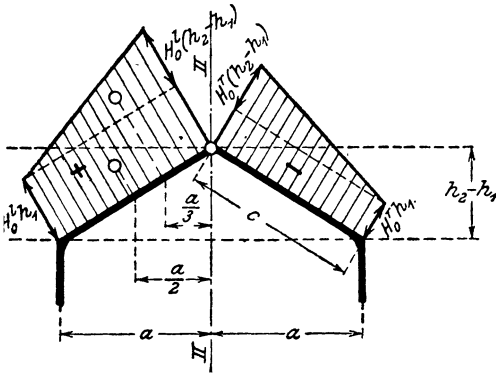


Abb. 27c.

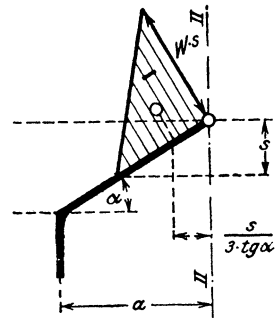


Abb. 27d.

Der Wert für  $S_{II}$  berechnet sich nach den Abb. 27c ÷ 27d zu

$$\begin{aligned} S_{II} &= H_o^l h_1 \cdot c \cdot \frac{a}{2} + H_o^l (h_2 - h_1) \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &- H_o^r h_1 c \cdot \frac{a}{2} - H_o^r (h_2 - h_1) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\ &- W \cdot s \cdot \frac{s}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{s}{3 \cdot \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} S_{II} &= (H_o^l - H_o^r) \cdot \frac{ac}{6} (2h_1 + h_2) \\ &- W \cdot \frac{s^3 ac}{6(h_2 - h_1)^2} \end{aligned}$$

und mit

$$H_o^l - H_o^r = W \cdot \frac{h_2 - z}{h_2} = W \cdot \frac{s}{h_2}$$

ergibt sich

$$S_{II} = W \cdot \frac{a \cdot c \cdot s}{6 h_2} \left[ 2 h_1 + h_2 - \frac{s^2 h_2}{(h_2 - h_1)^2} \right].$$

Setzt man diese Werte für  $S_I$  und  $S_{II}$  in die Formel 19) ein, so erhält man

$$X_r = \frac{-W \cdot \frac{a \cdot h_1^3}{3 J_1} \cdot \frac{s}{h_2} - W \cdot \frac{a \cdot c s}{6 J_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \left[ 2 h_1 + h_2 - \frac{s^2 h_2}{(h_2 - h_1)^2} \right]}{\frac{2 h_2^3}{E_r} + \frac{\alpha^3 h_1^2}{3 h_2 J_1} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)}$$

oder

$$X_r = -W \cdot \frac{h_1^2 + \frac{c}{2} \cdot \frac{J_1}{J_2} \left[ 2 h_1 + h_2 - \frac{s^2 h_2}{(h_2 - h_1)^2} \right]}{\frac{6 h_2^3 J_1}{a \cdot h_1 s \cdot E_r} + \frac{\alpha^3 h_1}{s} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)} \quad \dots \quad 21)$$

## 12. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ auf die Strecke $h_2$ .

Die Auflagerreaktionen für den in der Abb. 28 gezeichneten Belastungsfall sind

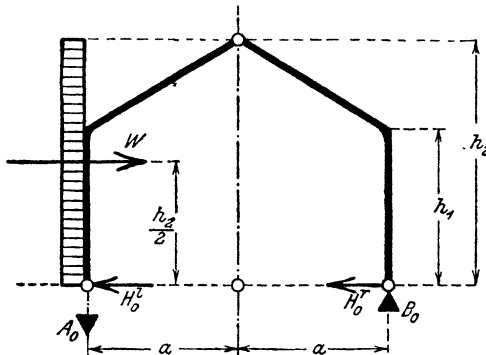


Abb. 28.

$$A_0 = B_0 = \pm \frac{W \cdot h_2}{4 a};$$

$$H_0^l = \frac{3}{4} W \quad \text{und} \quad H_0^r = \frac{1}{4} W.$$





Weiter ist

$$\begin{aligned} S_{II} &= H_o' h_1 c \frac{a}{2} + H_o' (h_2 - h_1) \frac{c}{2} \frac{a}{3} \\ &\quad - H_o'' h_1 c \cdot \frac{a}{2} - H_o'' (h_2 - h_1) \frac{c}{2} \frac{a}{3} \\ &\quad - F_q \cdot x_o. \end{aligned}$$

Es ist nun

$$F_q = \int M_q ds$$

und

$$x_o = \frac{\int M_q x \cdot ds}{\int M_q ds}.$$

Es ist weiter

$$F_q = \frac{W}{6 h_2} \cdot \frac{c}{h_2 - h_1} \cdot (h_2^3 - h_1^3)$$

und

$$x_o = \frac{a}{h_2 - h_1} \cdot \left( h_2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{h_2^4 - h_1^4}{h_2^3 - h_1^3} \right),$$

somit wird

$$F_q \cdot x_o = \frac{W \cdot a \cdot c}{6 \cdot (h_2 - h_1)^2} \left( \frac{h_2^3}{4} - h_1^3 + \frac{3}{4} \frac{h_1^4}{h_2} \right)$$

mit diesem letzten Ausdruck erhält man

$$S_{II} = \frac{W \cdot a \cdot c}{24 h_2} \frac{h_2^3 + 3 h_1^3 + h_1 h_2^2 - 5 h_1^2 h_2}{h_2 - h_1}.$$

Aus der Formel 19) folgt mit den vorstehenden Werten

$$X_r = \left. \begin{aligned} &\frac{W \cdot a \cdot h_1^3}{24 J_1} \cdot \frac{4 h_2 - 3 h_1}{h_2} - \frac{W \cdot a \cdot c \cdot h_1}{24 \cdot h_2 J_2} \\ &\frac{2 h_2^2}{F_r} + \frac{a^3 h_1^2}{3 h_2 J_1} \\ &\frac{h_2^3 + 3 h_1^3 + h_1 h_2^2 - 5 h_1^2 h_2}{h_2 - h_1} \\ &\left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right) \end{aligned} \right\}$$

oder

$$X_r = -W \cdot \left. \begin{aligned} & \frac{h_1^2(4h_2 - 3h_1) + c \frac{J_1}{J_2}}{\frac{48 \cdot h_2^3 J_1}{a \cdot h_1 F_r} + 8 \cdot a^2 h_1} \\ & \cdot \frac{h_2^3 + 3h_1^3 + h_1 h_2^2 - 5h_1^2 h_2}{h_2 - h_1} \\ & \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \dots 22)$$

**13. Wagerechte Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last  $W$  auf der Strecke  $h_1$ .**

Dieser Belastungsfall ist in der Abb. 29 im statisch bestimmten Grundsystem dargestellt; die Auflagerreaktionen desselben sind

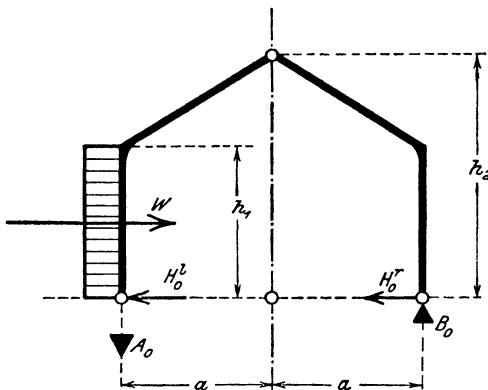


Abb. 29.

$$A_0 = B_0 = \pm \frac{W \cdot h_1}{4a},$$

weiter ist

$$H_0^l = W \cdot \frac{4h_2 - h_1}{4h_2} \quad \text{und} \quad H_0^r = W \cdot \frac{h_1}{4h_2}.$$

Der in der weiteren Entwicklung auftretende Wert

$$H_0^l - H_0^r \text{ ist } = W \cdot \frac{2h_2 - h_1}{2h_2}.$$

In den Abbildungen 29<sup>a</sup> bis 29<sup>e</sup> sind die Momentenflächen des Grundsystems gezeichnet.

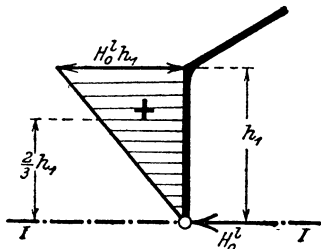


Abb. 29 a.

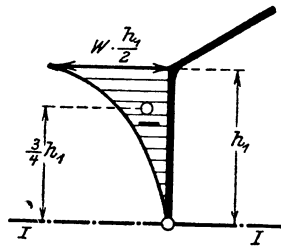


Abb. 29 b.

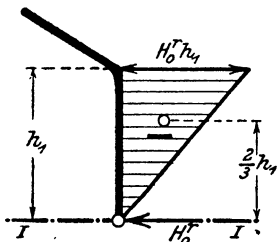


Abb. 29 c.

Es ist

$$\begin{aligned}
 S_I &= H_0^l h_1 \frac{h_1}{2} \cdot \frac{2}{3} h_1 - H_0^r h_1 \frac{h_1}{2} \\
 &\quad \cdot \frac{2}{3} h_1 - \frac{1}{3} \cdot W \cdot \frac{h_1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{3}{4} h_1 \\
 &= W \cdot \frac{h_1^3}{3} \frac{2h_2 - h_1}{2h_2} - W \cdot \frac{h_1^3}{8}
 \end{aligned}$$

oder

$$S_I = \frac{W \cdot h_1^3}{24} \cdot \frac{5h_2 - 4h_1}{h_2}.$$

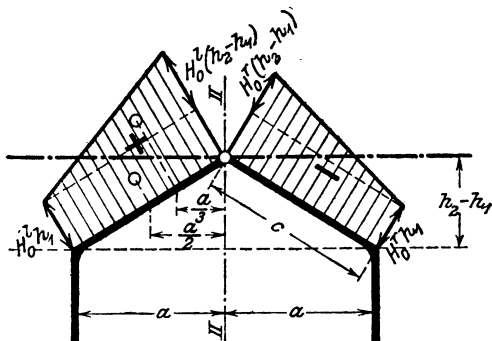


Abb. 29 d.

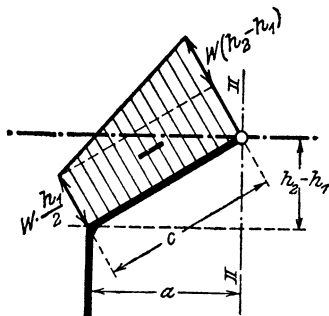


Abb. 29 e.

Das statische Moment der Momentenflächen auf die Achse  $II \div II$  bezogen ist

$$\begin{aligned}
 S_{II} &= H_o^l h_1 c \cdot \frac{a}{2} + H_o^l \cdot (h_2 - h_1) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\
 &\quad - H_o^r h_1 c \cdot \frac{a}{2} - H_o^r (h_2 - h_1) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3} \\
 &\quad - W \cdot \frac{h_1}{2} \cdot c \cdot \frac{a}{2} - W \cdot (h_2 - h_1) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{3}
 \end{aligned}$$

oder

$$S_{II} = W \cdot \frac{a \cdot c h_1}{6 h_2} (h_2 - h_1)$$

Mit diesen Werten für  $S_I$  und  $S_{II}$  ergibt sich aus Formel 19)

$$X_r = \frac{-W \cdot \frac{a h_1^3}{24 J_1} \cdot \frac{5 h_2 - 4 h_1}{h_2} - W \cdot \frac{a \cdot c h_1^2}{6 h_2 J_2} (h_2 - h_1)}{\frac{2 h_2^3}{F_r} + \frac{a^3 h_1^2}{3 h_2 J_1} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)}$$

oder

$$X_r = -W \cdot \frac{5 h_2 - 4 h_1 + \frac{4 c}{h_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} (h_2 - h_1)}{\frac{48 \cdot h_2^3 J_1}{a h_1^3 F_r} + \frac{8 a^2}{h_1} \left( \frac{h_1}{a} + \frac{J_1}{J_2 \cos \alpha} \right)} \quad \cdot \quad \cdot \quad 23)$$

Mit den im vorstehenden abgeleiteten Formeln zur Berechnung der Spannkraft  $X_r$  in der Pendelstütze unter dem Einfluße wagerechter Lasten wird man die meisten der in der Praxis vorkommenden Aufgaben lösen können. Es ist davon Abstand genommen worden, noch den Belastungszustand zu untersuchen, bei welchem eine gleichmäßig verteilte wagerechte Last auf die Strecke  $h_2 - h_1$  wirkt; denn bei den weitaus meisten der neuzeitlichen Hallenbauten wird man die Dachneigung so gering wählen, damit eine Windbelastung auf das Dach nicht mehr in Frage kommt. Sollte das Dach nun doch durch Windkräfte so stark belastet werden, daß der Einfluß dieser untersucht werden muß, so wird man, da die Windübertragung auf die Binder doch meistens zuerst durch die Pfetten erfolgt, diese Windkräfte in Einzellasten, senkrecht und wagerecht, zerlegen und die Kraft in der Pendelstütze nach Formel 21) und mit der Einflußlinie berechnen. In vielen Fällen rechtfertigt sich auch die Annahme von  $\delta_r = 0$  und  $J_1 = J_2$ , wodurch die Rechnung sehr vereinfacht wird.

### III. Der Dreigelenkrahmen mit wagerechter Balkenachse und Pendelstütze.

#### 1. Erklärungen.

Die in der Abb. 30 gezeichnete Konstruktion unterscheidet sich von dem in dem vorhergehenden Kapitel behandelten System durch die wagerechte Balkenachse und die verschiedenen Feldweiten.

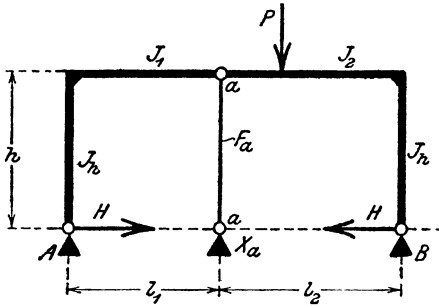


Abb. 30.

Die unbekannte Kraft in der Pendelstütze wird mit  $X_a$  bezeichnet und aus der Beziehung

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta'_a + \delta_{aa}}$$

berechnet, worin  $\sum P_m \delta_{ma}$ ,  $\delta'_a$  und  $\delta_{aa}$  die bekannten Bedeutungen haben.

#### A. Der Einfluß lotrechter Lasten.

##### 2. Die Einflußlinie für $X_a$ .

Unter dem Belastungszustand  $\sum P = 0$  und  $X_a = -1$  entstehen die Auflagerreaktionen im statisch bestimmten Grundsystem, dem Dreigelenkrahmen, wie diese in der Abb. 31 dargestellt sind.

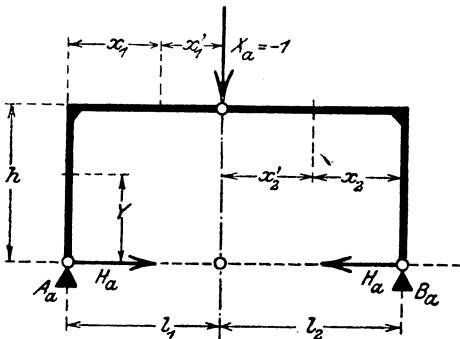


Abb. 31.

Es ist

$$A_a = \frac{l_2}{l_1 + l_2};$$

$$B_a = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

und

$$H_a = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{1}{h}.$$

Die Biegemomente im Dreigelenrahmen sind für den vorstehenden Belastungszustand

$$M_a = -H_a \cdot y = -\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{y}{h}$$

im linken sowie rechten Ständer, und für die Riegel  $l_1$  und  $l_2$  ist

$$M_{a_1} = A_a \cdot x_1 - H_a \cdot h = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot x_1 - \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$$

oder

$$M_{a_1} = -\frac{l_2}{l_1 + l_2} x_1'$$

Ebenso findet man für den Riegel  $l_2$

$$M_{a_2} = -\frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x_2'$$

Mit den vorstehenden Werten berechnet sich die Verschiebung

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{ds}{EJ}$$

und wird hier weiter der Einfluß der Normalkräfte vernachlässigt.

Es ist für die Ständer

$$M_a^2 = \frac{l_1^2 l_2^2}{(l_1 + l_2)^2} \cdot \frac{y^2}{h^2}$$

und somit

$$\int M_a^2 \frac{ds}{EJ_h} = \frac{2}{EJ_h} \frac{l_1^2 l_2^2}{h^2 (l_1 + l_2)^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3} \frac{l_1^2 l_2^2 h}{(l_1 + l_2)^2 EJ_h}$$

Für den linken Riegel ist

$$M_{a_1}^2 = \frac{l_2^2}{(l_1 + l_2)^2} x_1'^2$$

und somit

$$\int_0^{l_1} M_{a_1}^2 \frac{ds}{EJ_1} = \frac{l_2^2}{(l_1 + l_2)^2} \cdot \frac{l_1^3}{3 \cdot EJ_1} = \frac{1}{3EJ_1} \cdot \frac{l_1^3 l_2^2}{(l_1 + l_2)^2},$$

weiter wird für den rechten Riegel

$$\int_0^{l_2} M_{a_2}^2 \frac{ds}{EJ_2} = \frac{1}{3EJ_2} \cdot \frac{l_1^2 l_2^3}{(l_1 + l_2)^2}$$

Somit ergibt sich

$$\delta_{aa} = \frac{2}{3 E J_h} \cdot \frac{l_1^2 l_2^2 h}{(l_1 + l_2)^2} + \frac{1}{3 E J_1} \cdot \frac{l_1^3 l_2^2}{(l_1 + l_2)^2} + \frac{1}{3 E J_2} \cdot \frac{l_1^2 l_2^3}{(l_1 + l_2)^2}$$

oder

$$\delta_{aa} = \frac{l_1^2 l_2^2}{3 E J_h (l_1 + l_2)^2} \left[ 2h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2} \right] \quad \dots \quad 23)$$

Die  $\delta_{ma}$ -Linie berechnet sich aus der Beziehung

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \int M_o M_a \frac{ds}{EJ}$$

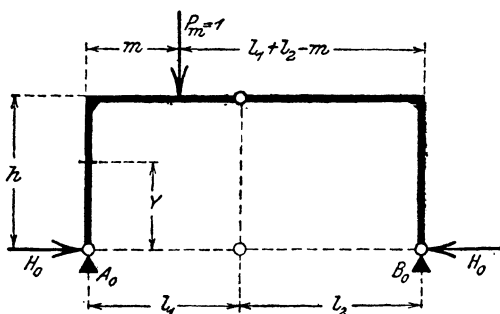


Abb. 32.

und es ist nach der Abb. 32 für den Belastungszustand

$$P_m = 1$$

$$A_o = \frac{l_1 + l_2 - m}{l_1 + l_2}$$

$$B_o = \frac{m}{l_1 + l_2}$$

und

$$H_o = \frac{1}{h} \cdot \frac{m \cdot l_2}{l_1 + l_2}$$

Es wird nun

a) für die Ständer

$$M_o M_a = m \cdot \frac{l_1 l_2^2}{(l_1 + l_2)^2} \cdot \frac{y^2}{h^2}$$

und somit

$$\int M_o M_a \frac{ds}{EJ_h} = \frac{2m}{h^2 E J_h} \cdot \frac{l_1 l_2^2}{(l_1 + l_2)^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{2mh}{3 E J_h} \cdot \frac{l_1 l_2^2}{(l_1 + l_2)^2}$$

b) Für den linken Riegel ist

$$M_o = \frac{l_1 + l_2 - m}{l_1 + l_2} \cdot x_1 - \frac{m \cdot l_2}{l_1 + l_2}$$

es war

$$M_{a1} = \frac{l_2}{(l_1 + l_2)} (x_1 - l_1)$$

und somit wird

$$M_o M_a = \left. \begin{aligned} & \frac{l_2}{(l_1 + l_2)^2} [x_1^2 (l_1 + l_2 - m) - x_1 (m \cdot l_2)] \\ & + l_1^2 + l_1 l_2 - l_1 m + m l_1 l_2 \end{aligned} \right\}$$

und es ist

$$\begin{aligned} \int_0^m M_o M_{a_1} \frac{dx_1}{EJ_1} &= - \frac{m^4}{EJ_1} \cdot \frac{l_2}{3(l_1 + l_2)^2} \\ &+ \frac{m^3}{EJ_1} \cdot \frac{l_2(5l_1 - l_2)}{6(l_1 + l_2)^2} \\ &- \frac{m^2}{EJ_1} \cdot \frac{l_2(l_1^2 - l_1 l_2)}{2(l_1 + l_2)^2}. \end{aligned}$$

Für einen Querschnitt in den Grenzen  $x_1 = m \div l_1$  ist

$$M_o = \frac{l_1 + l_2 - m}{l_1 + l_2} \cdot x_1 - x_1 + m - \frac{m l_2}{l_1 + l_2} = \frac{m}{l_1 + l_2} (l_1 - x_1)$$

und es wird

$$\begin{aligned} M_o M_{a_1} &= \frac{m l_2}{(l_1 + l_2)^2} (l_1 - x_1)(x_1 - l_1) \\ &= - \frac{m l_2}{(l_1 + l_2)^2} (l_1^2 - 2l_1 x_1 + x_1^2), \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} \int_m^{l_1} M_o M_{a_1} \frac{dx_1}{EJ_1} &= - \frac{m l_2}{(l_1 + l_2)^2} \left[ l_1^2 \int_m^{l_1} \frac{dx_1}{EJ_1} - 2l_1 \int_m^{l_1} x_1 \frac{dx_1}{EJ_1} \right. \\ &+ \left. \int_m^{l_1} x_1^2 \frac{dx_1}{EJ_1} \right] = + \frac{m^4}{EJ_1} \cdot \frac{l_2}{3(l_1 + l_2)^2} \\ &- \frac{m^3}{EJ_1} \cdot \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^2} \\ &+ \frac{m^2}{EJ_1} \cdot \frac{l_1^2 l_2}{(l_1 + l_2)^2} \\ &- \frac{m}{EJ_1} \cdot \frac{l_1^3 l_2}{3(l_1 + l_2)^2}. \end{aligned}$$



Der Einfluß des linken Riegels ist

$$\int_0^{l_1} M_o M_{a_1} \frac{dx_1}{EJ_1} = - \frac{m^3}{EJ_1} \cdot \frac{l_2}{6(l_1 + l_2)} + \frac{m^2}{EJ_1} \cdot \frac{l_1 l_2}{2(l_1 + l_2)} - \frac{m}{EJ_1} \frac{l_1^3 l_2}{3(l_1 + l_2)^2} \quad \left. \vphantom{\int_0^{l_1}} \right\}$$

c) Für den rechten Riegel ist

$$M_o = \frac{m}{l_1 + l_2} x_2 - \frac{m l_2}{l_1 + l_2} = \frac{m}{l_1 + l_2} \cdot (x_2 - l_2)$$

und mit

$$M_{a_2} = \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot (x_2 - l_2)$$

wird

$$M_o M_{a_2} = \frac{m \cdot l_1}{(l_1 + l_2)^2} (x_2 - l_2)^2.$$

Weiter ist

$$\int_0^{l_2} M_o M_{a_2} \frac{dx_2}{EJ_2} = \frac{m \cdot l_1 l_2^3}{3(l_1 + l_2)^2 \cdot EJ_2}.$$

Die Zusammenstellung dieser einzelnen Werte ergibt nun die Gleichung zur Berechnung der  $\delta_{ma}$ -Linie für das Feld  $l_1$ . Bezeichnet man noch ordnungsgemäß für  $l_1$  die Abszissen mit  $m_1$  und für das Feld  $l_2$  diese mit  $m_2$ , so erhält man

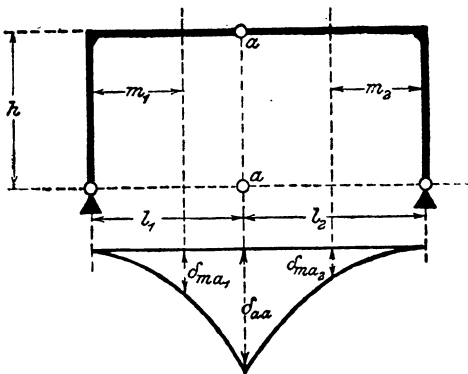


Abb. 33.



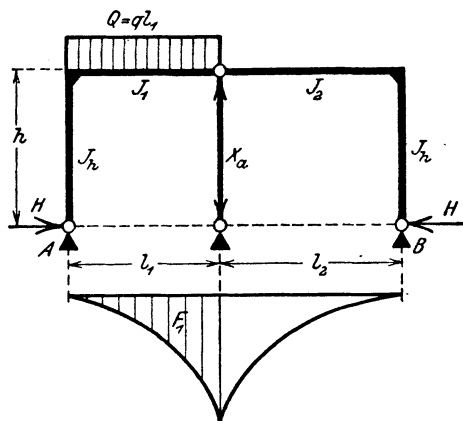


Abb. 34.

### 3. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ auf die Strecke $l_1$ .

Für den in der Abb. 34 gezeichneten Belastungszustand ist

$$X_a = \frac{q \cdot F_1}{\delta'_a + \delta_{aa}}$$

Mit  $\delta'_a = \frac{h}{EF_a}$  und den Werten aus Formel 23) und 28) erhält man

$$X_a = q \cdot \frac{8h l_2 \frac{J_1}{J_h} - l_1^2 + 4l_2^2 \frac{J_1}{J_2} + 3l_1 l_2}{\frac{24h \cdot (l_1 + l_2)^2 J_1}{F_a \cdot l_1^3 l_2} + 8 \frac{l_2}{l_1} \left( 2h \frac{J_1}{J_h} + l_1 + l_2 \frac{J_1}{J_2} \right)} \quad \cdot 30)$$

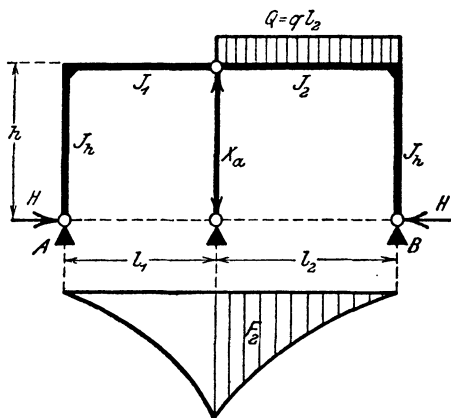


Abb. 35.

### 4. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ auf die Strecke $l_2$ .

Es wird für den in der Abb. 35 dargestellten Belastungsfall

$$X_a = \frac{q \cdot F_2}{\delta'_a + \delta_{aa}}$$

Setzt man die Werte aus den Formeln 23) und 29) in diese Gleichung ein, so wird

$$X_a = q \cdot \frac{8h l_2 \frac{J_2}{J_h} - l_2^2 + 4l_1^2 \frac{J_2}{J_1} + 3l_1 l_2}{\frac{24 \cdot h \cdot (l_1 + l_2)^2 J_2}{F_a l_2^3 l_1} + 8 \frac{l_1}{l_2} \left( 2h \frac{J_2}{J_h} + l_1 \frac{J_2}{J_1} + l_2 \right)} \quad \cdot 31)$$

### 5. Vollbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ .

Wird das System auf die Länge  $(l_1 + l_2)$  durch  $q \cdot (l_1 + l_2) = Q$  belastet, so berechnet man die Spannkraft  $X_a$  zweckmäßig aus den Formeln 30) und 31).

Macht man bei Entwurfsberechnungen die vorläufige Annahme, daß  $J_1 = J_2 = J_h$  und  $\delta'_a = 0$ , so erhält man für Vollbelastung zur Berechnung von  $X_a$  die Gleichung

$$X_a = \frac{q \cdot l_1 l_2}{8(2h + l_1 + l_2)} \left[ \frac{8hl_2 - l_2^2 + 4l_1^2 + 3l_1 l_2}{l_1^2} + \frac{8hl_2 - l_1^2 + 4l_2^2 + 3l_1 l_2}{l_2^2} \right]$$

und für den Fall, daß  $l_1 = l_2 = l$  wird, ist

$$X_a = \frac{Q}{8} \cdot \frac{4h + 3l}{h + l},$$

worin

$$Q = 2l \cdot q \text{ ist.}$$

Für andere lotrechte Belastungen als wie unter 3., 4. und 5. angegeben, benutzt man am besten die Einflußlinien, deren wichtigsten im folgenden abgeleitet werden sollen.

### 6. Die A-Linie.

Im statisch bestimmten Grundsystem, dem Dreigelenrahmen, stimmt die  $A_o$ -Linie mit der des einfachen Balkens von der Stützweite  $l_1 + l_2$  überein, und es ist somit

$$A = A_o - A_a \cdot X_a = A_o - \frac{l_2}{l_1 + l_2} X_a$$

oder 
$$A = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \left( \frac{l_1 + l_2}{l_2} A_o - X_a \right) \dots \dots \dots 32)$$

Nach Formel 32) erhält man die A-Linie, indem man die  $X_a$ -Linie von der  $\frac{l_1 + l_2}{l_2} \cdot A_o$ -Linie subtrahiert. Der Multiplikator der A-Linie ist

$$\mu = \frac{l_2}{l_1 + l_2}.$$

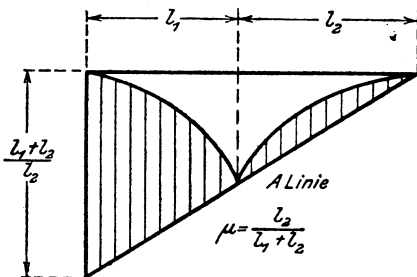


Abb. 36.

### 7. Die Einflußlinie für den Horizontalschub $H$ .

Der Horizontalschub  $H$  in dem Dreigelenkrahmen mit Pendelstütze berechnet sich aus

$$H = H_0 - H_a \cdot X_a = H_0 - \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{1}{h} \cdot X_a$$

oder

$$H = \frac{1}{h} \cdot \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \left[ \frac{h \cdot (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \cdot H_0 - X_a \right] \dots 33)$$

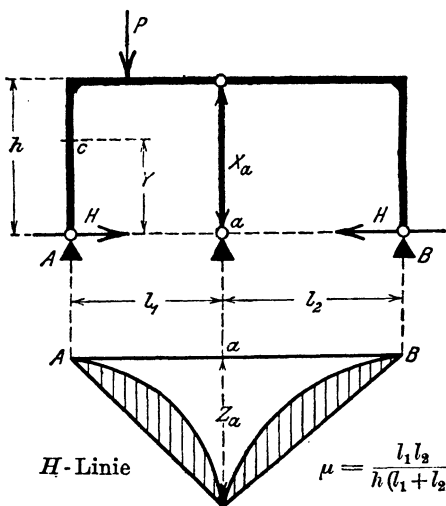


Abb. 37.

Aus der Formel 33) folgt die Konstruktion der Einflußlinie für  $H$ ; man subtrahiert die  $X_a$ -Linie von der  $\frac{h \cdot (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \cdot H_0$ -Linie.

Der Multiplikator ist  $\mu = \frac{l_1 l_2}{h (l_1 + l_2)}$ .

Auf der Abszissenachse trägt man im Punkte  $\alpha$  die Ordinate

$$\begin{aligned} z_\alpha &= \frac{h \cdot (l_1 + l_2)}{l_1 \cdot l_2} \cdot H_0 \\ &= \frac{h \cdot (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \cdot \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_2)} \\ &\cdot \frac{1}{h} = 1 \end{aligned}$$

auf, verbindet den Endpunkt derselben mit  $A$  und  $B$  durch gerade Linien und subtrahiert von dieser Linie die  $X_a$ -Linie. Diese Konstruktion ist in der Abb. 37 dargestellt.

### 8. Die Einflußlinie für das Moment $M_c$ im Ständer.

In einem Querschnitt  $c$  im Ständer in der Entfernung  $y$  vom Gelenkpunkte aus ist das Moment

$$M_c = - H \cdot y$$

Die  $M_c$ -Linie ist somit eine  $H$ -Linie mit dem Multiplikator  $\mu = - y$ .

### 9. Die Einflußlinie für das Moment $M_m$ im Riegel.

Für einen Querschnitt  $m_1$  im Riegel des Feldes  $l_1$  ist das Moment

$$M_{m_1} = M_{o m_1} - M_{a_1} X_a.$$

Das Moment  $M_{o m_1}$  im Dreigelenkrahn ist gleich

$$M_{o m_1} = M_0 - H_0 h$$

und weiter war

$$M_{a_1} = - \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot x'_1.$$

Somit ist

$$M_{m_1} = M_0 - H_0 h \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{l_2}{l_1 + l_2} x'_1 X_a \end{array} \right\}$$

oder

$$M_{m_1} = \frac{x'_1 l_2}{l_1 + l_2} \left[ \frac{l_1 + l_2}{x'_1 l_2} M_0 - \frac{(l_1 + l_2) h}{x'_1 l_2} H_0 + X_a \right] \quad 34)$$

Die Konstruktion der Einflußlinie für das Moment  $M_{m_1}$  im Riegel geht aus der Formel 34) hervor.

Man subtrahiert von der

$$\frac{l_1 + l_2}{x'_1 l_2} \cdot M_0\text{-Linie}$$

die

$$\frac{(l_1 + l_2) h}{x'_1 l_2} \cdot H_0\text{-Linie}$$

und addiert zu der so erhaltenen Differenz die  $X_a$ -Linie. Der Multiplikator ist

$$\mu = \frac{x'_1 l_2}{l_1 + l_2}.$$

In ganz ähnlicher Weise erhält man die Einflußlinien für das Feld  $l_2$ . Die Konstruktion

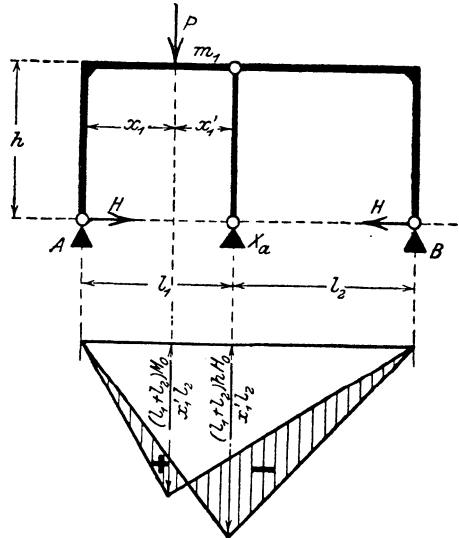


Abb. 38 und 38a.

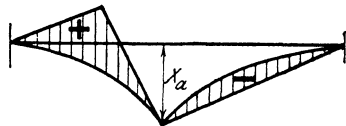


Abb. 38b.



$M_{m_1}$ -Linie

Abb. 38c.

der  $M_{m_1}$ -Linie ist in den Abbildungen 38<sup>a</sup> ÷ 38<sup>c</sup> dargestellt. Bei der praktischen Anwendung wird man in dem Faktor  $\frac{l_1 + l_2}{x'_1 l_2} \cdot h$  an Stelle von  $h$  die Werte  $h^o$  oder  $h^u$ , welche sich auf die Kernpunkte beziehen, setzen.

## B. Der Einfluß wagerechter Lasten.

### 10. Wagerecht wirkende Einzellast $W$ am Ständer.

Für den Einfluß wagerechter Kräfte sollen im folgenden die Endwerte für  $X_a$  berechnet werden. Es ist

$$X_a = \frac{\int M_o M_a \frac{ds}{EJ}}{\delta'_a + \delta_{aa}}.$$

Für den Ständer war

$$M_a = - \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{y}{h}$$

und für die Riegel

$$M_{a_1} = - \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot x'_1$$

und

$$M_{a_2} = - \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot x'_2$$

somit wird

$$X_a = \frac{\left. \begin{aligned} & - \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h M_o y \frac{dy}{EJ_h} - \frac{l_2}{l_1 + l_2} \int_0^{l_1} M_o x'_1 \frac{dx'_1}{EJ_1} \\ & - \frac{l_1}{l_1 + l_2} \int_0^{l_2} M_o x'_2 \frac{dx'_2}{EJ_2} \end{aligned} \right\}}{\frac{h}{EF_a} + \frac{l_1^2 l_2^2}{3EJ_h(l_1 + l_2)^2} + \frac{2h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2}}$$

oder

$$X_a = \frac{-\frac{l_1 l_2}{h} \sum \frac{S_I}{J_h} - l_2 \sum \frac{S_{II}}{J_1} - l_1 \sum \frac{S_{II}}{J_2}}{\frac{h \cdot (l_1 + l_2)}{F_a} + \frac{l_1^2 l_2^2}{(l_1 + l_2)} \cdot \frac{1}{3 J_h} \left[ 2h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2} \right]} \quad (35)$$

In der Formel 35) bedeuten  $S_I$  und  $S_{II}$  die statischen Momente der Momentenflächen, bezogen auf die Achsen  $I \div I$  und  $II \div II$  der Abb. 39.

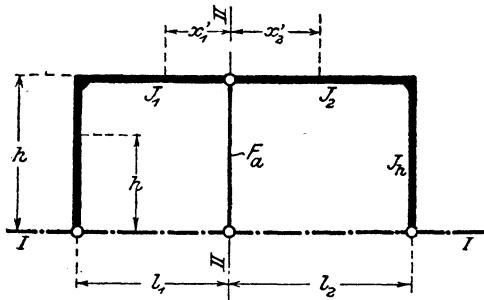


Abb. 39.

Für den in der Abb. 40 dargestellten Belastungsfall ist

$$A_o = B_o = \pm \frac{W \cdot z}{l_1 + l_2};$$

$$H_o^l = W \cdot \frac{h(l_1 + l_2) - z \cdot l_2}{h(l_1 + l_2)}$$

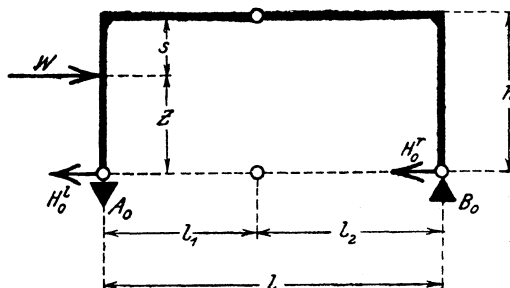


Abb. 40.



und

$$H_o^r = W \cdot \frac{z \cdot l_2}{h(l_1 + l_2)}$$

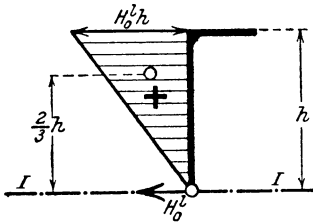


Abb. 41 a.

Weiter ist

$$H_o^l - H_o^r = W \cdot \frac{h(l_1 + l_2) - 2z \cdot l_2}{h(l_1 + l_2)}$$

Die aus dem vorstehendem Belastungsfall sich ergebenden Momentenflächen sind in den Abbildungen 41 ÷ 41 f gezeichnet.

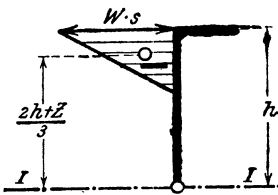


Abb. 41 b.

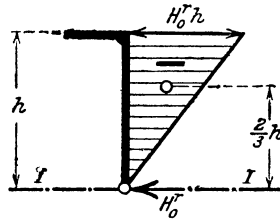


Abb. 41 c.

Hiernach ist

$$\left. \begin{aligned} S_I &= H_o^l h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} h \\ &- H_o^r h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} h \\ &- W \cdot s \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{2h+z}{3} \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} &(H_o^l - H_o^r) \cdot \frac{h^3}{3} \\ &- W \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \frac{2h+z}{3} \end{aligned}$$

und mit  $l_1 + l_2 = l$  wird

$$S_I = W \cdot \left[ \frac{h^3}{3} \cdot \frac{hl - 2z \cdot l_2}{l} - \frac{2h+z}{6} \cdot s^2 \right]$$

Weiter wird nach den Abbildungen 41 d ÷ 41 f für die Achsen II ÷ II.

$$S_{II_1} = H_o^l h \cdot \frac{l_1^2}{2} - Ws \frac{l_1^2}{2} = W \frac{l_1^2}{2} \left( \frac{hl - z l_2}{l} - s \right)$$

Für das Feld  $l_2$  ist

$$S_{II_2} = -H_o' r h \cdot \frac{l_2^2}{2} = -W \cdot \frac{z \cdot l_2^3}{2 \cdot (l_1 + l_2)}$$

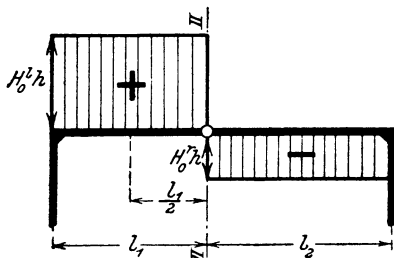


Abb. 41 d.

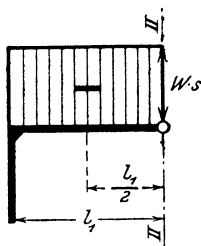


Abb. 41 e.

Die Auflagerreaktionen  $A_o$  und  $B_o$  vergrößern die Werte  $S_{II}$  um

$$-A_o l_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} = -\frac{l_1^3}{6} \cdot \frac{W \cdot z}{l}$$

und

$$+\frac{l_2^3}{6} \cdot \frac{W \cdot z}{l}.$$

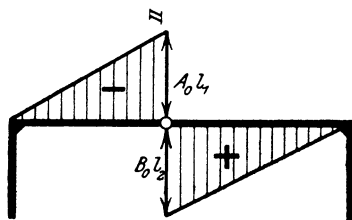


Abb. 41 f.

Somit wird  
im Feld  $l_1$

$$S_{II_1} = W \cdot \frac{l_1^2}{2} \left[ \frac{hl - z \cdot l_2}{l} - s - \frac{l_1 z}{3l} \right]$$

und im Feld  $l_2$

$$S_{II_2} = -W \cdot \frac{l_2^3 z}{3l}.$$

Setzt man nun diese Werte für  $S_I$  und  $S_{II}$  in die Gleichung 35) ein, so wird

$$X_a = \frac{-\frac{l_1 l_2}{h} \cdot \frac{W}{J_h} \left( \frac{h^2}{3} \frac{hl - 2l_2 z}{l} - \frac{2h + z}{6} s^2 \right) + \frac{l_1}{J_2} \cdot W \frac{l_2^3 z}{3l}}{\frac{hl}{F_a} + \frac{l_1^2 l_2^2}{l} \cdot \frac{1}{3J_h} \left( 2h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2} \right)} - \frac{\frac{l_2}{J_1} \cdot \frac{W \cdot l_1^2}{2} \left( \frac{hl - z l_2}{l} - s - \frac{l_1 z}{3l} \right)}{\frac{hl}{F_a} + \frac{l_1^2 l_2^2}{l} \cdot \frac{1}{3J_h} \left( 2h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2} \right)}$$

oder

$$X_a = -W \cdot \left. \begin{aligned} & \left[ \frac{h^2}{3} \frac{hl - 2l_2z}{l} - \frac{2h+z}{6} \cdot s^2 \right] + \frac{l_1 h}{2} \cdot \frac{J_h}{J_1} \\ & \frac{h^2 l}{l_1 l_2} \cdot \frac{J_h}{F_a} + \frac{l_1 l_2 \cdot h}{3 l} \\ & \left[ \frac{hl - l_2 z}{l} - s - \frac{l_1 z}{3 l} \right] - \frac{l_2^2 h z}{3 l} \cdot \frac{J_h}{J_2} \\ & \left[ 2h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2} \right] \end{aligned} \right\} \cdot 36)$$

**11. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last  $W$  am Ständer auf die Strecke  $h$ .**

Dieser Belastungsfall ist in der Abb. 42 gezeichnet.

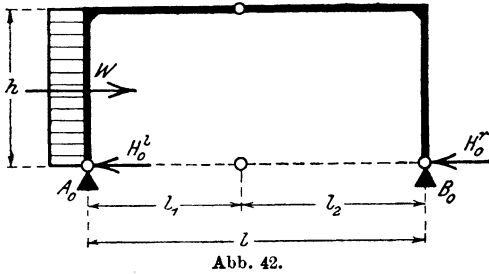


Abb. 42.

Es ist

$$A_o = B_o = \pm W \frac{h}{2 l}$$

und

$$H_o^l = W \frac{2 l_1 + l_2}{2 l};$$

$$H_o^r = W \frac{l_2}{2 l}.$$

Weiter ist

$$H_o^l - H_o^r = W \cdot \frac{l_1}{l}.$$

In den Abbildungen 42a ÷ 42f sind die Momentenflächen des statisch bestimmten Grundsystems für diesen Belastungsfall gezeichnet.

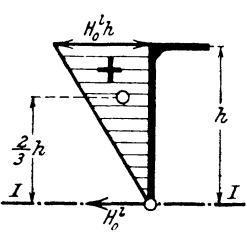


Abb. 42a.

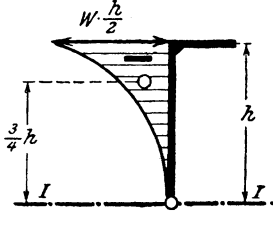


Abb. 42b.

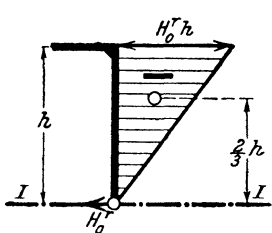
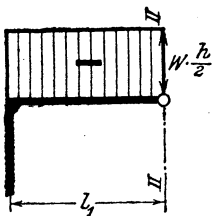


Abb. 42c.

Für die Achse  $I \div I$  berechnet sich

$$\left. \begin{aligned} S_I &= H_o^l h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} h \\ &- H_o^r h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} h \\ &- W \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{3}{4} h \end{aligned} \right\} = (H_o^l - H_o^r) \frac{h^3}{3} - W \cdot \frac{h^3}{8}$$



Lbb. 42d.

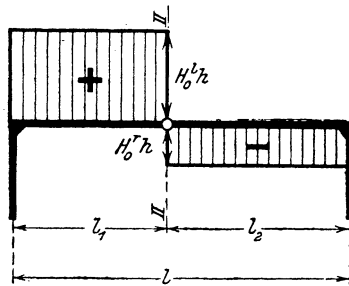


Abb. 42e.

oder

$$S_I = \frac{Wh^3}{24} \frac{5l_1 - 3l_2}{l}$$

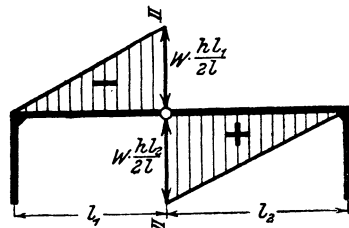


Abb. 42f.

Für die Achse  $II \div II$  wird  
im Feld  $l_1$

$$\begin{aligned} S_{II_1} &= H_o^l h l_1 \frac{l_1}{2} - W \frac{h}{2} l_1 \frac{l_1}{2} - W \frac{h l_1}{2l} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} \\ &= W \frac{2l_1 + l_2}{2l} \cdot \frac{h l_1^3}{2} - W \cdot \frac{h l_1^3}{4} - W \cdot \frac{h l_1^3}{12l} \end{aligned}$$

oder

$$S_{II_1} = W \cdot \frac{h l_1^3}{6l}$$

Im Feld  $l_2$  wird

$$\begin{aligned} S_{II_2} &= -H_0^r h \cdot l_2 \frac{l_2}{2} + W \cdot \frac{h l_2}{2l} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \frac{l_2}{3} \\ &= -W \cdot \frac{l_2}{2l} \cdot \frac{h \cdot l_2^2}{2} + W \frac{h l_2^3}{12l} \end{aligned}$$

oder

$$S_{II_2} = -W \cdot \frac{h l_2^3}{6l}.$$

Setzt man nun diese Werte von  $S_I$  und  $S_{II}$  in die Gleichung 35) ein, so erhält man zur Berechnung von  $X_a$  den Ausdruck

$$X_a = \frac{-\frac{l_1 l_2}{h} \cdot \frac{W \cdot h^3}{24} \cdot \frac{5 l_1 - 3 l_2}{l \cdot J_h} - l_2 \frac{W \cdot h l_1^3}{6 l J_1} + l_1 \frac{W \cdot h l_2^3}{6 l J_2}}{\frac{h l}{F_a} + \frac{l_1^2 l_2^2}{l} \frac{1}{3 J_h} \left( 2 h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2} \right)}$$

oder

$$X_a = -W \cdot \frac{\frac{h}{4} (5 l_1 - 3 l_2) + l_1^3 \cdot \frac{J_h}{J_1} - l_2^3 \cdot \frac{J_h}{J_2}}{\frac{6 \cdot l^2 J_h}{F_a l_1 l_2} + \frac{2 \cdot l_1 l_2}{h} \left( 2 h + l_1 \frac{J_h}{J_1} + l_2 \frac{J_h}{J_2} \right)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 37)$$

Mit Kenntnis der Einflußlinien und der Bestimmungsgleichungen von  $X_a$  zu den beiden letzten Belastungsfällen kann man das vorliegende System genau genug berechnen.

## IV. Der Zweigelenkrahmen mit Pendelstütze.

### 1. Erklärungen.

Beseitigt man bei dem im vorhergehenden Abschnitt behandelten System das Scheitelgelenk, so entsteht der in Abb. 43 gezeichnete Zweigelenkrahmen mit Pendelstütze. Das System ist zweifach statisch unbestimmt, und es werden als unbekannte Kräfte der Horizontalschub  $X_a$  und die Spannkraft in der Pendelstütze, welche mit  $X_b$  bezeichnet wird, angesehen. Bei der Untersuchung der Konstruktion werden noch die folgenden besonderen Annahmen festgelegt.

Die Trägheitsmomente der Ständer sind einander gleich  $J_1$  und konstant; das Trägheitsmoment des Riegels ist konstant und wird mit  $J_2$  bezeichnet. Die Kämpfergelenke sind unverschieblich gedacht, und die Verkürzung der Pendelstütze wird gleich Null gesetzt.

Mit diesen Annahmen erhält man aus den allgemeinen Elastizitätsgleichungen die Beziehungen

$$0 = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma} - X_a \cdot \delta_{aa} - X_b \cdot \delta_{ab}$$

und

$$0 = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb} - X_a \cdot \delta_{ba} - X_b \cdot \delta_{bb}.$$

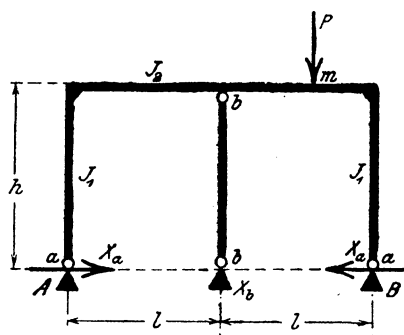


Abb. 43.

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den beiden Unbekannten ergibt

$$X_a = \frac{\delta_{bb} \cdot \Sigma P_m \cdot \delta_{ma} - \delta_{ab} \Sigma P_m \delta_{mb}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} \dots \dots \dots 38)$$

und

$$X_b = \frac{\delta_{aa} \cdot \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} \Sigma P_m \cdot \delta_{ma}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} \dots \dots \dots 39)$$

denn es ist nach bekannten Gesetzen  $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ .

In den beiden Bestimmungsgleichungen 38) und 39) haben die Beziehungen  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{bb}$  und  $\delta_{ab}$  die bekannten Bedeutungen und beziehen sich immer nur auf Belastungszustände in dem statisch bestimmten Grundsystem. So bedeutet zum Beispiel  $\delta_{ab}$  die Verschiebung des Punktes  $a$  im statisch bestimmten Grundsystem, wenn im Punkte  $b$  die Kraft  $X_b = -1$  als Belastung wirkt und alle anderen äußeren Kräfte ( $X_a$ ;  $\Sigma P$ ) gleich Null sind. Bei den mit zwei Beizahlen versehenen Verschiebungen  $\delta$  bezieht sich die erste Zahl immer auf den Ort der Verschiebung und die zweite Beizahl immer auf die Ursache der Verschiebung.

Diese von den äußeren Belastungen unabhängigen Verschiebungen sollen nun im folgenden zuerst berechnet werden.

## A. Die Verschiebungen $\delta_{aa}$ ; $\delta_{bb}$ und $\delta_{ab}$ .

### 2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ .

Als Grundsystem wird der einfache, in den Punkten  $A$  und  $B$  gestützte Balken eingeführt. Nach der Abb. 43 ist bei dem Belastungszustand  $\Sigma P = 0$ ;  $X_b = 0$  und  $X_a = -1$  das Biegemoment im Ständer gleich

$$M_a = y \text{ und } M_a^2 = y^2.$$

Es war nach bekannten Beziehungen

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{ds}{EJ} + \int N_a^2 \frac{ds}{EF}$$

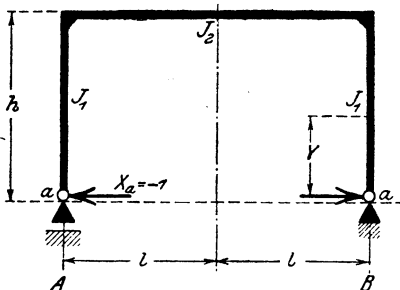


Abb. 44.

und soll im folgenden wieder der geringfügige Einfluß der Normalkräfte  $N_a$  vernachlässigt werden. Für den vorliegenden Fall wird somit

$$\delta_{aa} = \frac{1}{EJ} \int y^2 ds.$$

Der Ausdruck  $\int y^2 ds$  stellt nun das statische Moment der aus dem Belastungszustand  $X_a = -1$  sich ergebenden Momentenflächen, bezogen auf die Achse  $I \div I$  dar. Nach der Abb. 45 erhält man

$$\delta_{aa} = \frac{2}{E} \left( \frac{h \cdot h}{2J_1} \cdot \frac{2}{3} h + \frac{hl}{J_2} \cdot h \right)$$

oder

$$\delta_{aa} = \frac{h^3}{EJ_1} \left( \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right).$$

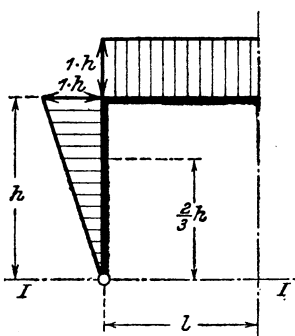


Abb. 45.

### 3. Die Verschiebung $\delta_{bb}$ .

Für den Belastungszustand  $\Sigma P=0$ ;  $X_a=0$  und  $X_b=-1$  wird in dem Grundsystem wie es in den Abbildungen 46 und 47 dargestellt

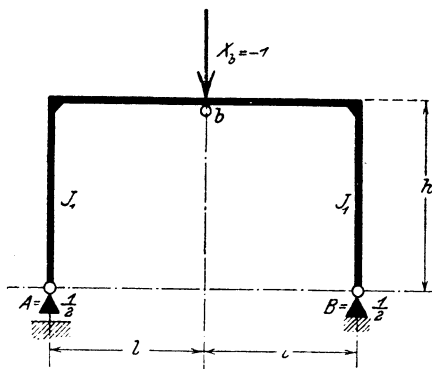


Abb. 46.

$$M_b = \frac{1}{2} x; \quad M_b^2 = \frac{x^2}{4}$$

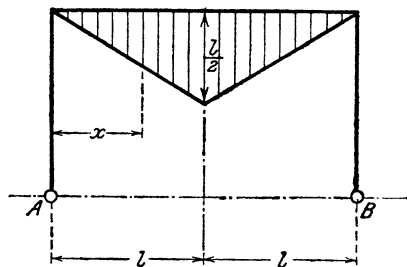


Abb. 47.

und es ist somit

$$\int M_b^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{2}{EJ_2} \int_0^l \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{2EJ_2} \int_0^l x^2 dx,$$

oder

$$\delta_{bb} = \frac{l^3}{6EJ_2}.$$

### 4. Die Verschiebung $\delta_{ab}$ .

Es ist nach der Abb. 48

$$\delta_{ab} = 2 \cdot \alpha \cdot h.$$

Die Abb. 48 stellt den Belastungszustand von 3. dar, und es ist weiter

$$\alpha = \int_0^l M_b \frac{dx}{EJ_2} = \frac{1}{EJ_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4EJ_2}$$

und somit

$$\delta_{ab} = \frac{hl^2}{2EJ_2}.$$



Der in den Gleichungen 38) und 39) gleichlautende Nenner erhält mit den unter 2. ÷ 4. gefundenen Werten den Ausdruck

$$\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2 = \frac{h^3 l^3}{6 E^2 J_1 J_2} \left( \frac{2}{3} + 2 \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right) - \frac{h^2 l^4}{4 E^2 J_2^2}$$

oder

$$\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2 = \frac{h^3 l^3}{12 E^2 J_1 J_2} \left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \frac{J_1}{J_2} \right) \quad \dots \quad 40)$$

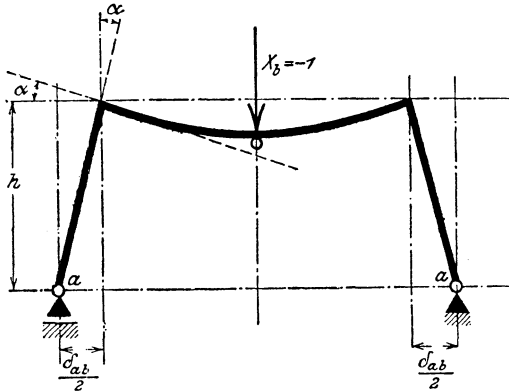


Abb. 48.

In den Gleichungen 38 und 39 stellen die Glieder  $\Sigma P_m \delta_{ma}$  und  $\Sigma P_m \delta_{mb}$  den Einfluß der äußeren Belastungen dar. Für den Einfluß von lotrechten Lasten sollen nun in der weiteren Untersuchung die Einflußlinien berechnet und für wagerechte Belastungen die Formeln zur Bestimmung von  $X_a$  und  $X_b$  aufgestellt werden.

## B. Der Einfluß lotrechter Lasten.

### 5. Die $\delta_{ma}$ -Linie.

Die  $\delta_{ma}$ -Linie ist die Biegelinie des Riegels im statisch bestimmten Grundsystem für den Belastungszustand  $X_a = -1$ ;  $\Sigma P = 0$  und  $X_b = 0$ . Für den vorliegenden Fall berechnet sich die  $\delta_{ma}$ -Linie als die Momentenkurve des mit der Momentenfläche aus dem Belastungszustand  $X_a = -1$  belasteten einfachen Balkens von der Stützweite  $2l$ .

In einem Querschnitt  $m$  in der Entfernung  $x$  vom linken Auflager ist daher

$$\delta_{ma} = \left( h l x - \frac{h x^2}{2} \right) \frac{1}{E J_2}$$

oder

$$\delta_{ma} = \frac{h l^2}{2 E J_2} \left( 2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \dots \dots \dots 41)$$

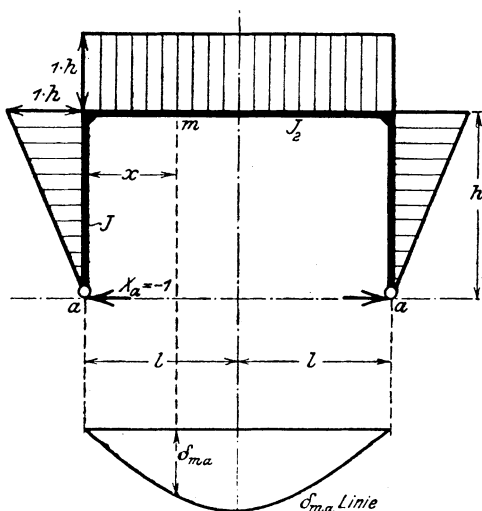


Abb. 49.

Der Inhalt der von der  $\delta_{ma}$ -Linie begrenzten Fläche ist

$$F_a = 2 \int_0^l \delta_{ma} dx = \frac{2}{3} \frac{h l^3}{E J_2}.$$

## 6. Die $\delta_{mb}$ -Linie.

Unter  $\delta_{mb}$  versteht man die Verschiebung eines Punktes  $m$  unter dem Einfluß einer Kraft  $X_b = -1$  und in Richtung dieser Belastung. Die  $\delta_{mb}$ -Linie ist also die Biegelinie des Riegels im Grundsystem für den Belastungszustand  $X_b = -1$ ; sie berechnet sich als die Momentenkurve des mit der Momentenfläche



oder

$$X_a = \frac{\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}}{\frac{2 \cdot h^2}{l^2} \cdot \frac{J_2}{J_1} \left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)} \dots \dots \dots 43)$$

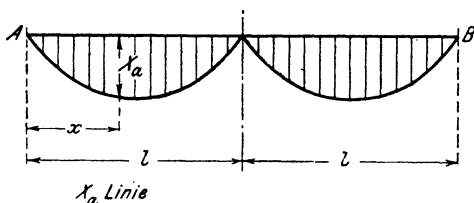
In der Abb. 51 ist die  $X_a$ -Linie gezeichnet.

Abb. 51.

Für die  $X_b$ -Linie ermittelt sich

$$X_b = \left. \begin{aligned} & \frac{h^3}{EJ_1} \left( \frac{2}{3} + 2 \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right) \cdot \frac{l^3}{12EJ_2} \left( 3 \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) \\ & - \frac{h l^2}{2EJ_2} \cdot \frac{h l^2}{2EJ_2} \left( 2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \\ & \frac{\left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)}{h^3 l^3} \end{aligned} \right\} \frac{1}{12E^2 J_1 J_2}$$

oder

$$X_b = \frac{2 \frac{x}{l} + 3 \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \left( \frac{2}{3} + 2 \frac{l}{h} \frac{J_1}{J_2} \right)}{\frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2}} \dots \dots \dots 44)$$

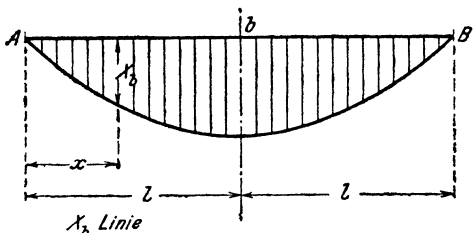


Abb. 52.



oder

$$M_x = \frac{x}{2} \left( \frac{2}{x} \cdot M_0 - \frac{2h}{x} \cdot X_a - X_b \right) \quad \dots \quad 45)$$

Aus der Gleichung 45) folgt die Konstruktion der Einflußlinie für das Moment  $M_x$  im Riegel.

Von der Abszissenachse  $A \div B$  trägt man im Querschnitt  $x$  die mit  $\frac{2}{x}$  multiplizierte Ordinate der Einflußlinie für  $M_0$  des einfachen Balkens von der Stützweite  $2l$ . Diese Ordinate hat die Größe

$$z = \frac{2 \cdot x \cdot x'}{x \cdot 2l} = \frac{x'}{l}$$

und man verbindet den Endpunkt der Ordinate mit den Punkten  $A$  und  $B$ . Von dieser mit  $\frac{2}{x}$  multiplizierten Einflußlinie des einfachen Balkens wird die

$$\frac{2h}{x} \cdot X_a + X_b \text{-Linie}$$

subtrahiert.

Der Multiplikator der  $M_x$ -

$$\text{Linie ist } \mu = \frac{x}{2}.$$

In den Abbildungen 54  $\div$  54c ist die  $M_a$ -Linie gezeichnet.

### 9. Vollbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ .

Dieser Belastungsfall ist in der Abb. 55 gezeichnet.

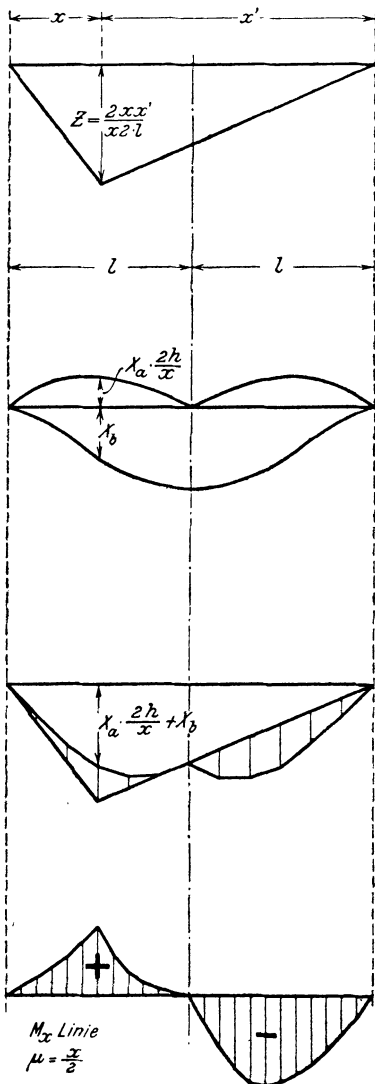


Abb. 54, 54 a-c.

Bedeutet

$\eta_a$  und  $\eta_b$

die Ordinaten der Einflußlinien von  $X_a$  und  $X_b$ , so ist

$$X_a = \Sigma q \cdot \eta_a dx \quad \text{und} \quad X_b = \Sigma q \cdot \eta_b \cdot dx.$$

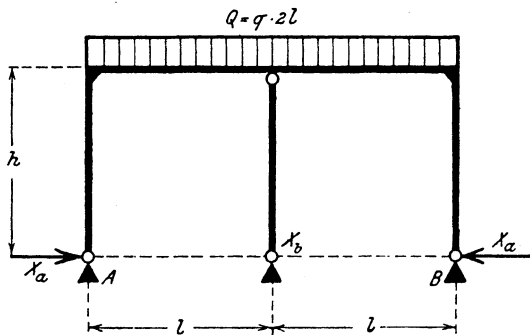


Abb. 55.

Es ist nun aber

$$F_a = \int \eta_a \cdot dx$$

der Inhalt der von der  $X_a$ -Linie begrenzten Fläche;

$$\int_0^l \eta_a dx = \frac{l}{12} \cdot \frac{l^2}{h^2 \frac{J_2}{J_1} \left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)}$$

und es wird

$$X_a = \frac{Q}{24} \cdot \frac{l^2}{h^2 \frac{J_2}{J_1} \left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)} \dots \dots \dots 46)$$

Der Inhalt der von der  $X_b$ -Linie begrenzten Fläche ist

$$F_b = \int \eta_b dx = 2l \cdot \frac{\frac{5}{6} + \frac{l}{2h} \cdot \frac{J_1}{J_2}}{\frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2}}$$

und somit

$$X_b = Q \cdot \frac{\frac{5}{6} + \frac{l}{2h} \cdot \frac{J_1}{J_2}}{\frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2}} \dots \dots \dots 47)$$

Das Biegemoment in einem Querschnitt  $x$  ist allgemein

$$M_x = \frac{Q}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} - X_a \cdot h - X_b \cdot \frac{x}{2}$$

und es liegt der Querschnitt, in welchem das größte positive Biegemoment auftritt, in der Entfernung  $x_0$  vom linken bew. rechten Auflager. Der Wert für  $x_0$  findet sich aus bekannten Beziehungen mit

$$x_0 = l \cdot \frac{Q - X_b}{Q} \dots \dots \dots 48)$$

Bei der Bemessung der Konstruktion sind neben den größten positiven Momenten auch die größten negativen Biegemomente festzustellen. Das Moment im Querschnitt  $l$  unter der Pendelstütze ist

$$M_l = \frac{Ql}{4} - X_a \cdot h - X_b \cdot \frac{l}{2}$$

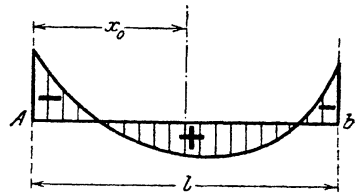


Abb. 56.

### C. Der Einfluß wagerechter Lasten.

#### 10. Wagerecht wirkende Einzellast $W$ am Ständer.

In der Abb. 57 ist die Kraftverteilung für diesen Belastungs-

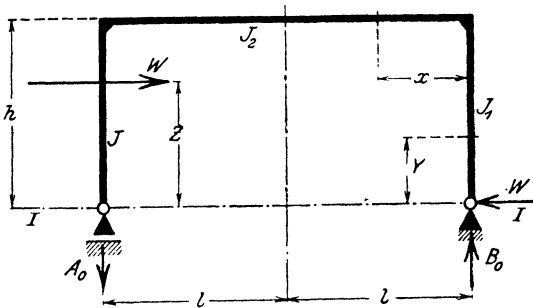


Abb. 57.

fall im statisch bestimmten Grundsystem dargestellt. Es ist

$$A_0 = B_0 = \pm \frac{W \cdot z}{2l}$$



Weiter ist

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \int M_o M_a \frac{ds}{EJ}$$

Für die Ständer war  $M_a = y$  und  
für den Riegel  $M_a = h$ .

Es ist somit

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \frac{1}{EJ_1} \int_0^h M_o y dy \quad \text{für die Ständer und}$$

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \frac{2}{EJ_2} \int_0^l M_o h \cdot dx \quad \text{für den Riegel.}$$

Diese Werte bedeuten die statischen Momente der mit  $\frac{1}{EJ}$  multiplizierten Momentenflächen  $M_o$ , bezogen auf die Achse  $I \div I$ .

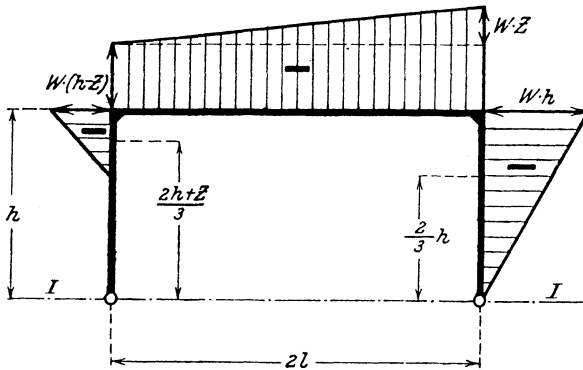


Abb. 58.

In der Abb. 58 sind diese  $M_o$ -Flächen aufgezeichnet.

Es ist

$$\begin{aligned} E \cdot \Sigma P_m \delta_{ma} &= -W \cdot (h - z) \cdot \frac{h - z}{2} \cdot \frac{2h + z}{3J_1} \\ &\quad - W \cdot h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{h}{J_1} \\ &\quad - W \cdot \frac{2h - z}{2} \cdot \frac{2l}{J_2} \cdot h \end{aligned}$$

oder

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = - \frac{W}{E J_1} \left[ \frac{(h-z)^2}{6} \cdot (2h+z) + \frac{h^3}{3} + hl \cdot \frac{J_1}{J_2} (2h-z) \right]$$

Weiter ist

$$\Sigma P_m \delta_{mb} = \int M_o M_b \frac{ds}{E J}$$

und es war  $M_b = \frac{1}{2} x$  und wird somit

$$\int M_o M_b \cdot \frac{ds}{E J} = \frac{1}{2 E J_2} \int M_o x dx.$$

Nach diesem Ausdruck berechnet sich nunmehr

$$\Sigma P_m \delta_{mb} = - \frac{W}{2 E J_2} \left[ 2(h-z)l \cdot \frac{l}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{z}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} \right]$$

oder

$$\Sigma P_m \delta_{mb} = - \frac{W \cdot l^2}{4 \cdot E \cdot J_2} (2h-z).$$

Führt man nun diese Werte in die Gleichungen 38) und 39) ein, so erhält man

$$X_a = \left. \begin{aligned} & - \frac{l^3}{6 E J_2} \cdot \frac{W}{E J_1} \left[ \frac{(h-z)^2}{6} (2h+z) + \frac{h^3}{3} + hl \frac{J_1}{J_2} (2h-z) \right] \\ & \frac{h^3 l^2}{12 \cdot E^2 J_1 J_2} \\ & + \frac{h l^2}{2 E J_2} \cdot \frac{W \cdot l^2}{4 \cdot E J_2} (2h-z) \\ & \left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right) \end{aligned} \right\}$$

oder

$$X_a = - W \cdot \left. \begin{aligned} & \left[ \frac{(h-z)^2}{3} (2h+z) + \frac{2}{3} h^3 + 2hl (2h-z) \frac{J_1}{J_2} \right] \\ & h^3 \left( \frac{4}{3} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} h \cdot l \frac{J_1}{J_2} (2h-z) \right. \\ & \left. + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right) \end{aligned} \right\} \cdot 49)$$

und für die Spannkraft in der Pendelstütze ergibt sich

$$X_b = \frac{-\frac{h^3}{EJ_1} \left( \frac{2}{3} + 2 \frac{l}{h} \frac{J_1}{J_2} \right) \cdot \frac{W \cdot l^3}{4 \cdot EJ_2} (2h - z) + \frac{h l^3}{2 EJ_2} \cdot \frac{W}{EJ_1}}{\frac{h^3 l^3}{12 E^3 J_1 J_2}} \left. \vphantom{\frac{-\frac{h^3}{EJ_1} \left( \frac{2}{3} + 2 \frac{l}{h} \frac{J_1}{J_2} \right) \cdot \frac{W \cdot l^3}{4 \cdot EJ_2} (2h - z) + \frac{h l^3}{2 EJ_2} \cdot \frac{W}{EJ_1}}}{\frac{h^3 l^3}{12 E^3 J_1 J_2}}} \right\}$$

$$\frac{\left[ \frac{(h - z)^3}{6} (2h + z) + \frac{h^3}{3} + hl (2h - z) \frac{J_1}{J_2} \right]}{\left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)}$$

oder

$$X_b = -W \cdot \frac{2h - z \left( 2 + 6 \frac{l}{h} \frac{J_1}{J_2} \right) - \frac{1}{h^2 l} \left[ (h - z)^3 (2h + z) \right]}{\left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)} \cdot 50$$

$$\frac{+ 2h^3 + 6hl (2h - z) \frac{J_1}{J_2}}{+ \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2}}$$

Greift die Kraft  $W$  den Rahmen in Riegelhöhe an, also  $z = h$ , so wird  $X_b = 0$  und  $X_a = -\frac{W}{2}$ , das System verhält sich hier wie ein einfacher Balken.

### 11. Wagerechte Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $W$ am Ständer.

In der Abb. 59 ist dieser Belastungsfall gezeichnet. Die Auflagerreaktionen im statisch bestimmten Grundsystem sind

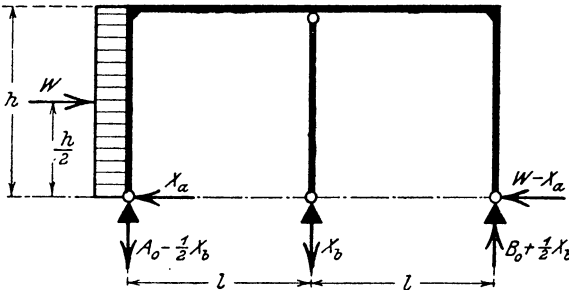


Abb. 59.



Dann wird

$$X_a = -W \cdot \frac{\frac{11}{12} + \frac{3}{4} \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2}}{\frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2}} \dots \dots \dots 51)$$

und die Spannkraft in der Pendelstütze ist

$$X_b = -\frac{W}{4} \cdot \frac{h}{l \left( \frac{4}{3} + \frac{l}{h} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)} \dots \dots \dots 52)$$

Mit diesen beiden Belastungsfällen hat man bei der Bemessung von Konstruktionen der im vorstehenden behandelten Art am häufigsten zu rechnen. Bei der Bestimmung der Biegemomente wird man wieder zweckmäßig die Kernpunktmomente  $M^o$  und  $M^u$  bestimmen. Die größten Materialbeanspruchungen berechnen sich dann aus

$$\sigma^o = -\frac{M^o}{W^o} \quad \text{und} \quad \sigma^u = +\frac{M^u}{W^u}.$$

## V. Der dreiseitige Zweigelenkrahmen mit schiefer Balkenachse.

### 1. Erklärungen.

Das in der Abb. 61 gezeichnete System ist die allgemeine Form des dreiseitigen Zweigelenkrahmens. Wenn nun auch diese Rahmenform im Hochbau nicht oft vorkommt, so ist doch die Berechnung derselben von besonderem Interesse, da man von den Rechnungsergebnissen dieses Systems leicht die Formeln für den dreiseitigen Zweigelenkrahmen mit gerader Balkenachse ableiten kann.

Das System ist einfach statisch unbestimmt und wird als unbekannte Kraft der Horizontalschub  $X_a$  gewählt und aus der Beziehung

$$\delta_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \cdot \delta_{aa}$$

berechnet.

Es werden die Voraussetzungen getroffen, daß die Verschiebungen der Gelenkpunkte  $a$  gleich Null sind, und daß die einzelnen Teile des Systems verschiedene, aber konstante Trägheits-

momente besitzen; der Einfluß der Normalkräfte wird vernachlässigt, und es wird

$$X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{\int M_o M_a \frac{ds}{J}}{\int M_a^2 \frac{ds}{J}}$$

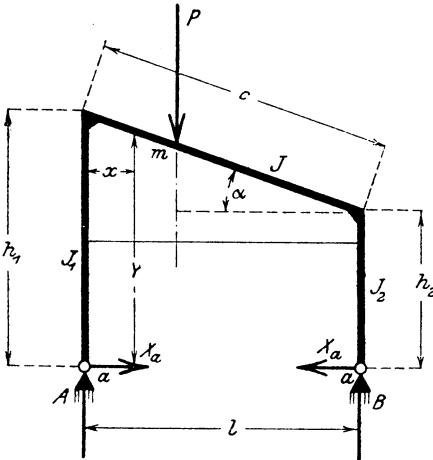


Abb. 61.

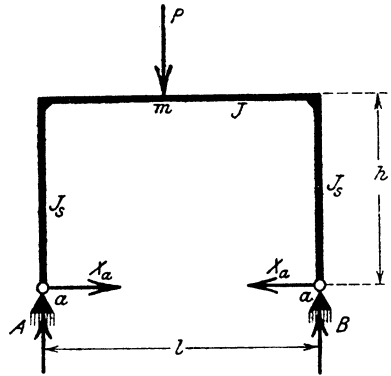


Abb. 62.

Im folgenden soll nun zuerst die Verschiebung  $\delta_{aa}$  berechnet werden.

## 2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ .

Es ist

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{ds}{J}$$

und mit

$$M_a = y$$

wird

$$\delta_{aa} = \frac{h_1^3}{3J_1} + \frac{h_2^3}{3J_2} + \int_0^l (h_2 + x \operatorname{tg} \alpha)^2 \frac{dx}{\cos \alpha J}$$

oder

$$\delta_{aa} = \frac{h_1^3}{3J_1} + \frac{h_2^3}{3J_2} + \frac{c}{3J} (3h_2^2 + 3h_2 c \cdot \sin \alpha + c^2 \sin^2 \alpha).$$

Setzt man für  $c \cdot \sin \alpha = h_1 - h_2$ , so wird

$$\delta_{aa} = \frac{1}{3J} \left[ h_1^3 \frac{J}{J_1} + h_2^3 \frac{J}{J_2} + c (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \right] \quad 53)$$

Für den symmetrischen Rahmen, wie in Abb. 62, wird

$$\delta_{aa} = \frac{lh^2}{3J} \left( 3 + 2 \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_S} \right).$$

Setzt man für  $\frac{h}{l} \cdot \frac{J}{J_S} = \Phi$ , so erhält man

$$\delta_{aa} = \frac{lh^2}{3J} (3 + 2\Phi) \quad \dots \quad 53^a)$$

## A. Der Einfluß lotrechter Lasten.

### 3. Die $\delta_{ma}$ -Linie.

Der Einfluß lotrechter Lasten auf den Riegel wird am einfachsten mit Hilfe der Einflußlinie untersucht. Für eine lotrechte Einzellast  $P$  im Punkte  $m$  des Riegels ist

$$X_a = P_m \cdot \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{\int M_o M_a \frac{ds}{J}}{\delta_{aa}}$$

und es wird im folgenden zuerst die  $\delta_{ma}$ -Linie berechnet.

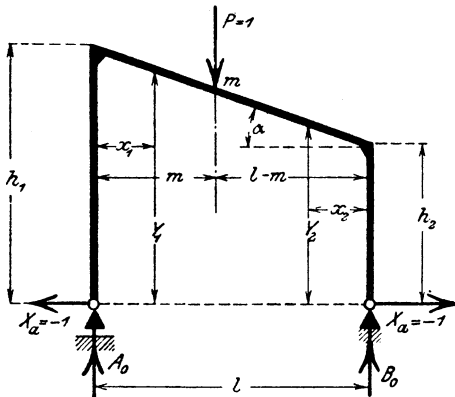


Abb. 63.

Für den Belastungszustand  $P_m = 1$  und  $X_a = -1$  ist mit Rücksicht auf die Abbildung 63

$$A_o = \frac{l - m}{l}$$

und

$$B_o = \frac{m}{l};$$

weiter ist

$$M_a = y.$$

Setzt man nun

$$y_1 = h_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$y_2 = h_2 + x_2 \operatorname{tg} \alpha$$

so erhält man für  $x_1$  in den Grenzen  $0 \div m$

$$M_o = \frac{l-m}{l} \cdot x_1$$

und

$$\begin{aligned} M_o M_a &= \frac{l-m}{l} \cdot x_1 (h_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha) \\ &= x_1 \left( h_1 - h_1 \frac{m}{l} \right) + x_1^2 \left( \frac{m}{l} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \right). \end{aligned}$$

Folglich wird

$$\int M_o M_a \frac{ds}{J} = \frac{1}{J \cdot \cos \alpha} \left[ m^4 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3l} - m^3 \left( \frac{h_1}{2l} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3} \right) + m^2 \frac{h_1}{2} \right].$$

Für  $x_2$  in den Grenzen  $0 \div l-m$  wird

$$M_o = \frac{m}{l} \cdot x_2$$

und

$$M_o M_a = \frac{m}{l} \cdot x_2 (h_2 + x_2 \operatorname{tg} \alpha) = \frac{m}{l} h_2 x_2 + \frac{m}{l} \operatorname{tg} \alpha \cdot x_2^2;$$

somit wird

$$\begin{aligned} \int M_o M_a \frac{ds}{J} &= \frac{1}{J \cdot \cos \alpha} \left[ -m^4 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3l} + m^3 \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{h_2}{2l} \right) - m^2 (\operatorname{tg} \alpha \cdot l \right. \\ &\quad \left. + h_2) + m \left( \frac{h_2 l}{2} + \operatorname{tg} \alpha \frac{l^2}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Summe dieser Werte für  $\int M_o M_a \frac{ds}{J}$  ergibt die Gleichung für die  $\delta_{ma}$ -Linie.

Es ist somit

$$\delta_{ma} = \frac{1}{J \cdot \cos \alpha} \left[ m^3 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{6} - m^2 \frac{h_1}{2} + m \cdot \frac{l}{6} (2h_1 + h_2) \right]. \quad 54)$$

Für den symmetrischen Rahmen wird

$$\delta_{ma} = \frac{h l^2}{2 \cdot J} \left( \frac{m}{l} - \frac{m^2}{l^2} \right) \dots \quad 54a)$$

Der Inhalt der von der  $\delta_{ma}$ -Linie begrenzten Fläche ist

$$F_a = \int \delta_{ma} \cdot dm$$

und nach Formel 54) wird

Glaser, Berechnung.

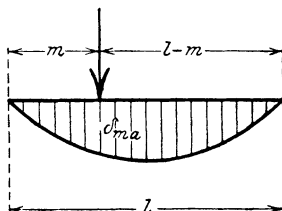


Abb. 64.



$$F_a = \frac{1}{J \cdot \cos \alpha} \left[ l^4 \cdot \frac{\text{tg } \alpha}{192} + l^3 \frac{h_1 + h_2}{24} \right] \dots \dots \dots 55)$$

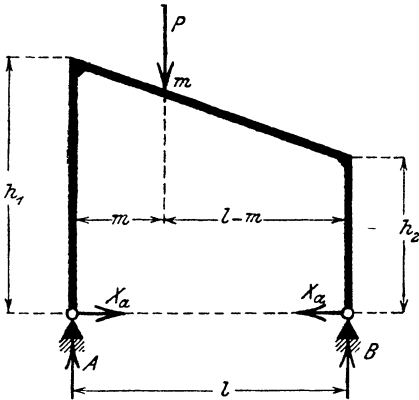


Abb. 65.

Für den symmetrischen Rahmen erhält man

$$F_a = \frac{h l^3}{12 \cdot J} \dots \dots \dots 55a)$$

**4. Belastung durch Einzellast P.**

Es ist

$$X_a = P_m \cdot \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

Mit Formel 53) und 54) wird

$$X_a = P \cdot \frac{m^3 \frac{\text{tg } \alpha}{2} - m^2 \frac{3}{2} h_1 + m \frac{l}{2} (2 h_1 + h_2)}{h_1^3 \frac{J}{J_1} \cos \alpha + h_2^3 \frac{J}{J_2} \cos \alpha + l (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)} \dots \dots \dots 56)$$

Für den Rahmen mit wagerechter Balkenachse erhält man

$$X_a = P \cdot \frac{3 \cdot l}{2 \cdot h} \cdot \frac{\frac{m}{l} - \frac{m^2}{l^2}}{3 + 2 \Phi} \dots \dots \dots 56a)$$

Greift an dem symmetrischen Rahmen die Einzellast P in Balkenmitte an, so wird

$$X_a = \frac{Pl}{8 h} \cdot \frac{3}{3 + 2 \Phi}$$

Das Moment in der Rahmenecke bei A und B wird

$$M_A = M_B = - X_a h = - \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{3}{6 + 4 \Phi}$$

und das Moment in Balkenmitte ist

$$M_m = \frac{Pl}{4} - X_a \cdot h = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{8} \cdot \frac{3}{3 + 2 \Phi}$$

oder

$$M_m = \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{3 + 4 \Phi}{6 + 4 \Phi}.$$

**5. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last  $Q$ .**

Es ist

$$X_a = \frac{\sum q \cdot dx \cdot \delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

oder, da  $\sum \delta_{ma} dx = F_a$

$$X_a = q \cdot \frac{F_a}{\delta_{aa}}.$$

Der Wert für  $F_a$  ist in Gleichung 55) berechnet, und somit wird

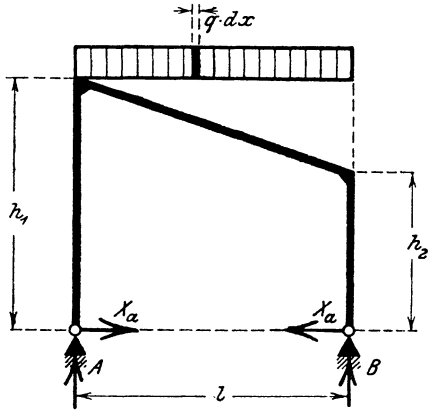


Abb. 66.

$$X_a = Q \cdot \frac{l^3 \frac{\text{tg } \alpha}{64} + l^3 \frac{h_1 + h_2}{8}}{h_1^3 \frac{J}{J_1} \cos \alpha + h_2^3 \frac{J}{J_2} \cos \alpha + l (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)} \quad 57)$$

Für den symmetrischen Rahmen ist nach Gleichung 53\*) und 55\*)

$$X_a = \frac{Ql}{8h} \cdot \frac{2}{3 + 2 \Phi} \quad \dots \quad 57^a)$$

Die Momente in den Rahmenecken bei  $A$  und  $B$  sind

$$M_A = M_B = - \frac{Ql}{8} \cdot \frac{2}{3 + 2 \Phi}.$$

Das Moment in Balkenmitte wird

$$M_m = \frac{Ql}{8} - X_a h = \frac{Ql}{8} - \frac{Ql}{8} \cdot \frac{2}{3 + 2 \Phi}$$

oder

$$M_m = \frac{Ql}{8} \cdot \frac{1 + 2 \Phi}{3 + 2 \Phi}.$$

## B. Der Einfluß wagerechter Lasten.

### 6. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $W$ auf den Pfosten $h_1$ .

Dieser Belastungsfall ist in der Abb. 67 dargestellt.

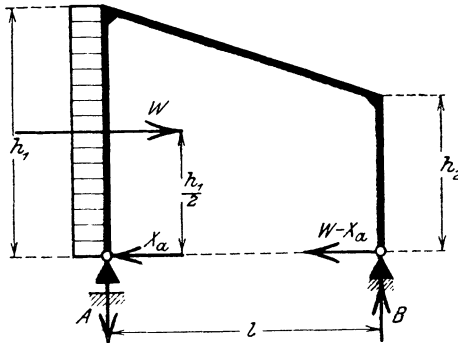


Abb. 67.

Es ist

$$X_a = \frac{\int M_o M_a \frac{ds}{J}}{\int M_a^2 \frac{ds}{J}}$$

und kann man den Ausdruck

$$\int M_o M_a \frac{ds}{J}$$

als das statische Moment der durch  $J$  dividierten Momentenflächen  $M_o$ , bezogen auf die Auflagerachse, deuten. Zur Aufzeichnung der  $M_o$ -Momente, das sind die Momente im statisch bestimmten Grundsystem, wurde bei  $A$  das bewegliche Auflager angenommen. Dann ist

$$A_o = B_o = \pm \frac{W h_1}{2 l}.$$

In den Abbildungen 68 bis 68<sup>d</sup> sind die  $M_o$ -Flächen gezeichnet.

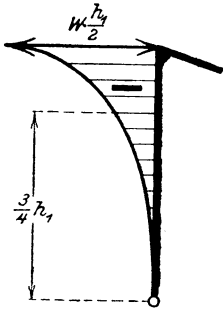


Abb. 68.

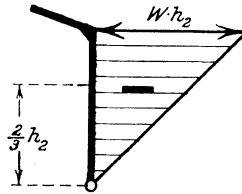


Abb. 68 a.

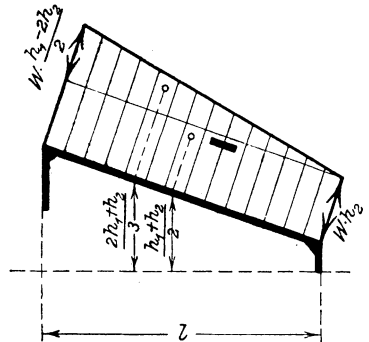


Abb. 68 b.

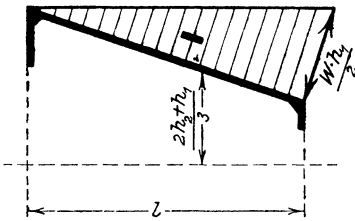


Abb. 68 c.

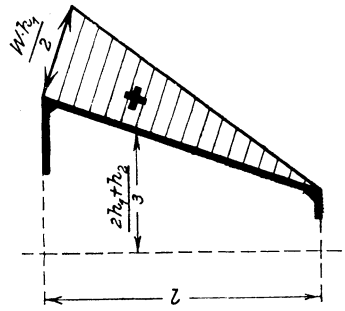


Abb. 68 d.

Die statischen Momente dieser Momentenflächen berechnen sich nun mit Hilfe der vorstehenden Abbildungen zu

$$\int M_o \cdot y \cdot \frac{ds}{J} = -\frac{1}{3} \frac{W \cdot h_1}{2 J_1} \cdot h_1 \frac{3}{4} h_1$$

$$- \frac{W \cdot h_2}{J_2} \cdot \frac{h_2}{2} \cdot \frac{2}{3} h_2$$

$$- \frac{W \cdot h_2}{J} \cdot c \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$$

$$- W \cdot \frac{h_1 - 2 h_2}{2 J} \cdot \frac{c}{2} \frac{2 h_1 + h_2}{3}$$

$$- \frac{W \cdot h_1}{2 J} \cdot \frac{c}{2} \frac{2 h_2 + h_1}{3}$$

$$+ \frac{W \cdot h_1}{2 J} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{2 h_1 + h_2}{3}$$

oder es ist

$$-\int M_o y \cdot \frac{ds}{J} = \frac{W}{24 \cdot J} \left[ 3 h_1^3 \frac{J}{J_1} + 8 h_2^3 \frac{J}{J_2} + 2 c (h_1 + 2 h_2)^2 \right].$$

Somit wird

$$X_a = -\frac{W}{8} \frac{3 h_1^3 \frac{J}{J_1} + 8 h_2^3 \frac{J}{J_2} + 2 c (h_1 + 2 h_2)^2}{h_1^3 \frac{J}{J_1} + h_2^3 \frac{J}{J_2} + c (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)} \quad \dots \quad 58)$$

Für den regelmäßigen Rahmen erhält man aus der Gleichung 58)

$$X_a = -\frac{W}{8} \cdot \frac{18 + 11 \Phi}{3 + 2 \Phi} \quad \dots \quad 58^a)$$

Das Moment in der Ecke bei *A* des symmetrischen Rahmens ist

$$M_A = X_a \cdot h - W \frac{h}{2} = h \cdot \left( X_a - \frac{W}{2} \right)$$

oder

$$M_A = h \left[ \frac{W}{8} \cdot \frac{18 + 11 \Phi}{3 + 2 \Phi} - \frac{W}{2} \right] = \frac{W \cdot h}{8} \cdot \frac{6 + 3 \Phi}{3 + 2 \Phi}.$$

In der Ecke *B* ist das Biegemoment

$$M_B = - (W - X_a) h$$

oder

$$M_B = - \left[ W - \frac{W}{8} \cdot \frac{18 + 11 \Phi}{3 + 2 \Phi} \right] \cdot h$$

$$M_B = - \frac{W h}{8} \cdot \frac{6 + 5 \Phi}{3 + 2 \Phi}.$$

## 7. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last *W* auf den Pfosten *h*<sub>2</sub>.

Wird der Pfosten *h*<sub>2</sub> belastet, so entstehen im Grundsystem die Auflagerkräfte

$$A_o = B_o = \pm \frac{W \cdot h_2}{2l}.$$

Im Zweigelenkrahmen sind die Auflagerkräfte

$$A = \frac{W h_2}{2l}; \quad H_A = X_a;$$

$$B = -\frac{Wh_2}{2l} \quad \text{und} \quad H_B = W - X_a.$$

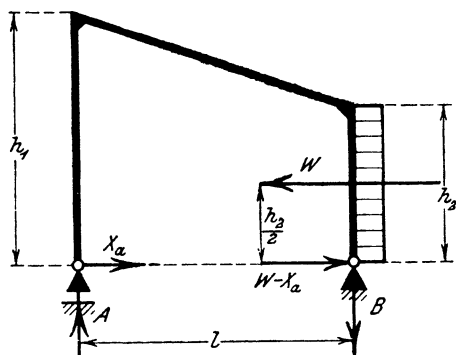


Abb. 69.

In den Abbildungen 70 bis 70<sup>c</sup> sind die  $M_0$ -Flächen gezeichnet.

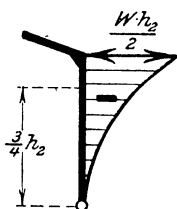


Abb. 70.

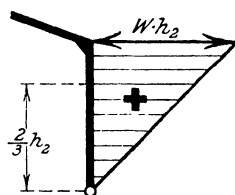


Abb. 70 a.

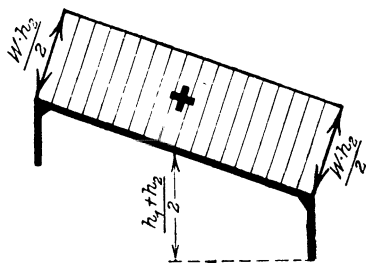


Abb. 70 b.

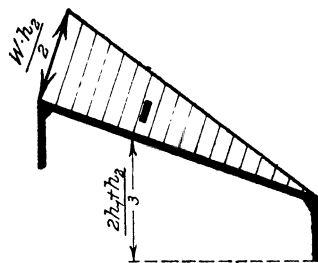


Abb. 70 c.

Das statische Moment der durch  $J$  dividierten  $M_o$ -Flächen ist

$$\int M_o y \cdot \frac{ds}{J} = - \frac{W \cdot h_2}{2J_2} \cdot \frac{1}{3} h_2 \cdot \frac{3}{4} h_2$$

$$+ \frac{W h_2}{J_2} \cdot \frac{h_2}{2} \cdot \frac{2}{3} h_2$$

$$+ \frac{W \cdot h_2}{2J} \cdot \frac{c}{2} \cdot (h_1 + h_2)$$

$$- \frac{W \cdot h_2}{2J} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{2h_1 + h_2}{3}$$

oder

$$\int M_o y \cdot \frac{ds}{J} = \frac{W \cdot h_2}{24 \cdot J} [2c(h_1 + 2h_2) + 5h_2^2 \frac{J_1}{J_2}].$$

Folglich wird

$$X_a = \frac{W \cdot h_2}{8} \frac{2c(h_1 + 2h_2) + 5h_2^2 \frac{J}{J_2}}{h_1^3 \frac{J}{J_1} + h_2^3 \frac{J}{J_2} + c(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)} \quad . \quad 59)$$

Für den regelmäßigen Rahmen ist dann

$$X_a = \frac{W}{8} \cdot \frac{6 + 5\Phi}{3 + 2\Phi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59a)$$

### 8. Einzellast $W$ an dem Pfosten $h_2$ .

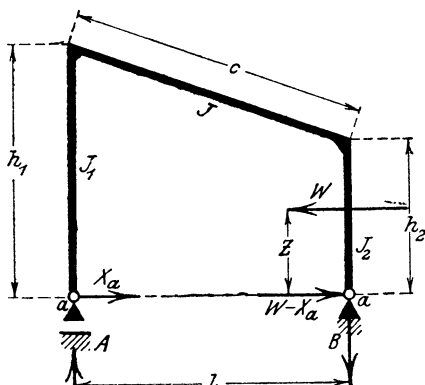


Abb. 71.

Greift an dem Pfosten  $h_2$  eine Einzellast  $W$  in der Entfernung  $z$  vom Gelenkpunkt an, so sind die Auflagerreaktionen

$$A = \frac{W \cdot z}{l}$$

und

$$B = - \frac{W \cdot z}{l}.$$

Weiter ist

$$H_A = X_a$$

und

$$H_B = W - X_a.$$

Im statisch bestimmten Grundsystem sind die Auflagerkräfte

$$A_0 = B_0 = \pm \frac{Wz}{l} \quad \text{und} \quad H_B = W.$$

In den Abbildungen 72 ÷ 72<sup>b</sup> ist die Verteilung der Momente  $M_0$  im Grundsystem gezeichnet.

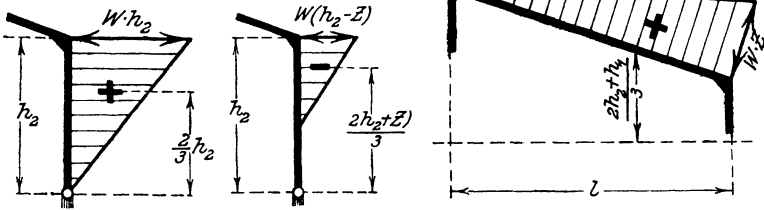


Abb. 72.

Abb. 72 a.

Abb. 72 b.

Nach diesen Abbildungen berechnet sich nun der Wert von

$$\int M_0 M_a \frac{ds}{J} \text{ zu}$$

$$\int M_0 y \cdot \frac{ds}{J} = -W(h_2 - z) \cdot \frac{h_2 - z}{2J_2} \cdot \frac{2h_2 + z}{3}$$

$$+ W \cdot h_2 \frac{h_2}{2J_2} \cdot \frac{2}{3} h_2$$

$$+ W \cdot z \frac{c}{2J} \cdot \frac{2h_2 + h_1}{3}$$

oder

$$\int M_0 M_a \frac{ds}{J} = \frac{W \cdot z}{6J} \left[ (3h_2^2 - z^2) \frac{J}{J_2} + c(2h_2 + h_1) \right].$$

Mit diesem Wert und der Gleichung 53) erhält man

$$X_a = \frac{\int M_0 M_a \frac{ds}{J}}{\delta_{aa}} = \frac{W \cdot z}{2} \frac{(3h_2^2 - z^2) \frac{J}{J_2} + c(2h_2 + h_1)}{h_1^3 \frac{J}{J_1} + h_2^3 \frac{J}{J_2} + c(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)} \quad (60)$$

Für den regelmäßigen Rahmen ergibt sich aus Gleichung 60)

$$X_a = \frac{W \cdot z}{2h} \cdot \frac{3 + \left(3 - \frac{z^2}{h^2}\right) \Phi}{3 + 2\Phi} \dots \dots \dots 60 a)$$



Das Biegemoment in der Ecke  $A$  des regelmäßigen Rahmens ist

$$M_A = -X_a h = -\frac{W \cdot z}{2} \cdot \frac{3 + \left(3 - \frac{z^2}{h^2}\right) \Phi}{3 + 2\Phi}.$$

In der Ecke  $B$  wird das Moment

$$M_B = (W - X_a) h - W \cdot (h - z).$$

Setzt man den für  $X_a$  berechneten Wert ein, so wird

$$M_B = \frac{W \cdot z}{2} \cdot \frac{3 + \left(1 + \frac{z^2}{h^2}\right) \Phi}{3 + 2\Phi}.$$

## VI. Der Dreieckrahmen.

### 1. Erklärungen.

Das in der Abb. 73 gezeichnete System stellt eine im Hochbau häufig vorkommende Rahmenform dar. Mit der Annahme

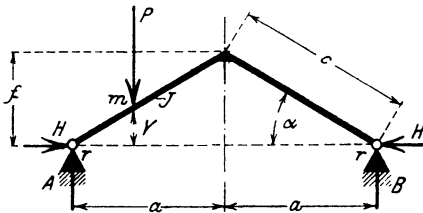


Abb. 73.

eines konstanten Trägheitsmomentes  $J$  vereinfacht sich die Berechnung dieses einfach statisch unbestimmten Systems, bei welcher die Unbekannte, der Horizontalschub, hier mit  $H$  bezeichnet wird. Es wird die Verschiebung  $\delta_r$  der Auflager gleich

Null gesetzt und der Einfluß der Längskräfte vernachlässigt; dann ist

$$H = \frac{\sum I_m \delta_{mr}}{\delta_{rr}} = \frac{\int M_o M_r ds}{\int M_r^2 ds}.$$

Die Verschiebung  $\delta_{rr} = \int M_r^2 \frac{ds}{EJ}$  soll nun zuerst berechnet werden.

### 2. Die Verschiebung $\delta_{rr}$ .

Für den Belastungszustand  $\Sigma P_m \rightarrow 0$  und  $H = -1$  im statisch bestimmten Grundsystem, dem einfachen Balken, ist

$$M_r = y$$

und es wird

$$\delta_{rr} = \int y^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{2}{EJ} \int_0^a y^2 \frac{dx}{\cos \alpha}$$

oder

$$\delta_{rr} = \frac{2}{3} \cdot \frac{f^2 c}{EJ} \dots \dots \dots 61)$$

### A. Der Einfluß lotrechter Lasten.

#### 3. Die $\delta_{mr}$ - und die $H$ -Linie.

Es ist  $\delta_{mr}$  die Verschiebung eines Punktes  $m$  des Rahmens in Richtung einer Kraft  $P$  in  $m$  unter dem Einflusse einer Kraft  $H = -1$  im Grundsystem. Die  $\delta_{mr}$ -Linie ist also die Biegelinie des einfachen Balkens mit der Stützweite  $2a$ , welcher mit den Kräften

$$p = \frac{M_r ds}{EJ}$$

belastet ist.

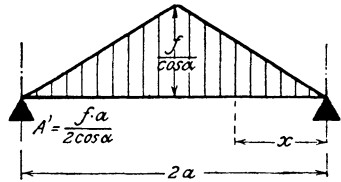


Abb. 74.

Nach der Abb. 74 wird dann

$$\delta_{mr} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{f \cdot a}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot x - x \cdot \frac{x \cdot f}{2 \cdot a \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{x}{3} \right]$$

oder

$$\delta_{mr} = \frac{f \cdot a \cdot c}{2EJ} \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{a^3} \right) \dots \dots \dots 62)$$

Die Einflußlinie für den Horizontalschub  $H$  erhält man somit aus

$$H = \frac{\delta_{mr}}{\delta_{rr}} = \frac{\frac{f \cdot a \cdot c}{2EJ} \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{a^3} \right)}{\frac{2}{3} \cdot \frac{f^2 c}{EJ}}$$

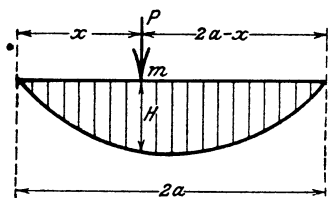


Abb. 75.

und es ist

$$H = \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{f} \cdot \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{a^3} \right) \quad (63)$$

Der Inhalt der von der Einflußlinie begrenzten Fläche ist

$$F_H = 2 \int_0^a H \cdot dx = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{f} \int_0^a \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{a^3} \right) dx;$$

$$F_H = \frac{5}{8} \frac{a^2}{f} \quad \dots \quad (64)$$

#### 4. Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last $Q$ .

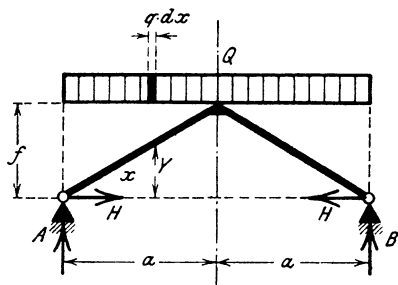


Abb. 76.

Der Horizontalschub berechnet sich aus

$$H = \Sigma q \cdot dx \cdot \frac{\delta_{mr}}{\delta_{rr}} = q \cdot F_H$$

oder

$$H = \frac{5}{16} \cdot Q \cdot \frac{a}{f} \quad (65)$$

Das Biegemoment in einem Querschnitt  $x$  wird

$$M_x = \frac{Q}{2} \cdot x - q \frac{x^2}{2} - \frac{5}{16} \cdot Q \cdot \frac{a}{f} \cdot y$$

oder

$$M_x = \frac{Q}{16} \left( 3x - \frac{4 \cdot x^2}{a} \right).$$

Der Querschnitt, in welchem das Biegemoment ein Maximum erreicht, findet sich aus der Beziehung

$$\frac{dM_x}{dx} = 3 - \frac{8 \cdot x}{a} = 0.$$

Hieraus folgt

$$x_0 = \frac{3}{8} \cdot a.$$

In dem Querschnitt  $x_0 = \frac{3}{8} a$  ist das größte positive Moment

$$M_{\max} = \frac{9}{256} \cdot Q \cdot a.$$

Das Moment in Rahmenmitte ist

$$M_{\max} = - \frac{Q \cdot a}{16}.$$

Dieses letzte Moment, welches man auch als das Konstruktionsmoment bezeichnen kann, da nach diesen bei kleineren Stützweiten der Träger bemessen wird, hat denselben Wert wie das größte Moment in dem Dreigelenrahmen der gleichen Form, wie sie das vorliegende System besitzt. In dem Dreigelenrahmen liegt aber das größte positive Moment in der Entfernung  $x = \frac{a}{2}$  und der Horizontalschub hat die Größe  $H = \frac{Q \cdot a}{4f}$ , ist also kleiner als wie im Zweigelenrahmen, während die Konstruktionsmomente mit  $\frac{Qa}{16}$  übereinstimmen.

### 5. Belastung durch lotrechte Einzellast $P$ .

Es ist nach Abbildung 77 und Formel 63)

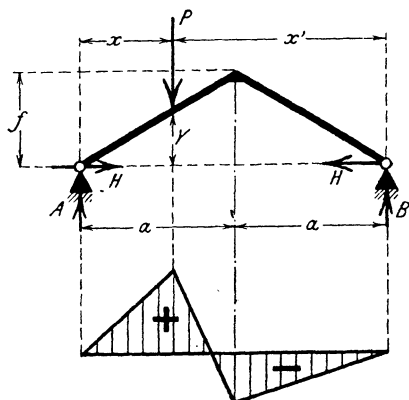


Abb. 77.

$$H = \frac{3}{4} \cdot \frac{P \cdot a}{f} \left( \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} \right)$$

Hiernach ist das Biegemoment im Querschnitt  $x$

$$M_x = \frac{P \cdot x'}{2 \cdot a} \cdot x - \frac{3}{4} \cdot \frac{P \cdot a}{f} \left( \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} \cdot y \right)$$

oder

$$M_x = P \cdot \left( x - \frac{5}{4} \cdot \frac{x^2}{a} + \frac{x^4}{4 \cdot a^3} \right)$$

In Rahmenmitte ist das Biegemoment

$$M_m = \frac{P \cdot x}{2a} \cdot a - \frac{3}{4} P \cdot \frac{a}{f} \left( \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} \right) \cdot f$$

oder

$$M_m = \frac{P}{4} \cdot \left( \frac{x^3}{a^3} - x \right).$$

In der Abb. 77 ist die Momentenfläche für diesen Belastungszustand gezeichnet.

Greift die Kraft  $P$  in der Rahmenmitte an, so wird

$$H = \frac{3}{4} \cdot \frac{P \cdot a}{f} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = P \cdot \frac{a}{2f}$$

und es ist

$$M_m = P \cdot \frac{a}{2} - P \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

### 6. Die Einflußlinie für das Moment $M_x$ .

Das Moment in einem Querschnitt  $x$  ist allgemein

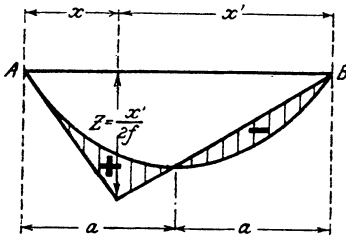
$$M_x = M_{ox} - M_r \cdot H.$$

Setzt man nun für  $M_r = y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{a} \cdot x$ , so wird

$$M_x = M_{ox} - \frac{f}{a} \cdot x \cdot H$$

oder

$$M_x = \frac{f}{a} \cdot x \left( \frac{a}{f \cdot x} M_{ox} - H \right). \dots \dots \dots 66)$$



$M_x$ -Linie  $\mu = \frac{f \cdot x}{a}$

Abb. 78.

Aus der Gleichung 66) folgt die Konstruktion der Einflußlinie für das Biegemoment  $M_x$ . Es wird von der  $\frac{a}{f \cdot x} \cdot M_{ox}$ -Linie die  $H$ -Linie subtrahiert, der Multiplikator ist  $\mu = \frac{f \cdot x}{a}$ , und es ist  $M_{ox}$  das Moment im einfachen Balken mit der Stützweite  $2a$ . Die Ordinate

der  $\frac{a}{f \cdot x} \cdot M_{ox}$ -Linie im Querschnitt  $x$  ist  $z = \frac{a}{f \cdot x} \cdot \frac{x \cdot x'}{2a}$ ;  
 $z = \frac{x'}{2f}$ . In der Abb. 78 ist die Einflußlinie für  $M_x$  gezeichnet.

Die Einflußlinie nach dieser Abb. 78 wird man aber nur dann anwenden, wenn der Querschnitt des zu untersuchenden Systems unbekannt ist, weil zur Spannungsberechnung auch noch die Normalkräfte bestimmt werden müssen. Die resultierende Spannung in dem Querschnitt  $x$  ist

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W} \pm \frac{N}{F}$$

wo  $N$  die Normalkraft und  $F$  der Querschnitt bedeutet. Ist dagegen der Querschnitt schon bekannt, oder kann man denselben schätzungsweise bestimmen, so berechnet man zweckmäßig die Kernpunktsmomente und bestimmt aus diesen die resultierenden Spannungen im Querschnitt aus

$$\sigma_o = -\frac{M_x^o}{W^o} \quad \text{und} \quad \sigma_u = +\frac{M_x^u}{W^u}.$$

Es ist

$$M_x^u = M_{ox} - H \cdot y^u$$

wobei

$$y^u = y - \frac{W^o}{F}$$

und

$$y^o = y + \frac{W^u}{F}$$

bedeutet.

Die Beizahlen  $o$  und  $u$  beziehen sich auf die oberen bzw. unteren Fasern des Querschnitts.

## 7. Die Einflußlinie für die Normalkraft $N$ .

Die Normalkraft  $N_x$  in einem Querschnitt  $x$  ist nach der Abb. 79

$$N_x = Q_{ox} \sin \alpha + H \cdot \cos \alpha$$

oder

$$N_x = \cos \alpha \left( Q_{ox} \cdot \frac{f}{a} + H \right) \quad \dots \quad 67)$$

Die  $N_x$ -Linie setzt sich zusammen aus der  $\frac{f}{a} \cdot Q_{ox}$ -Linie und der  $H$ -Linie. Der Multiplikator ist  $\mu = \cos \alpha$ .

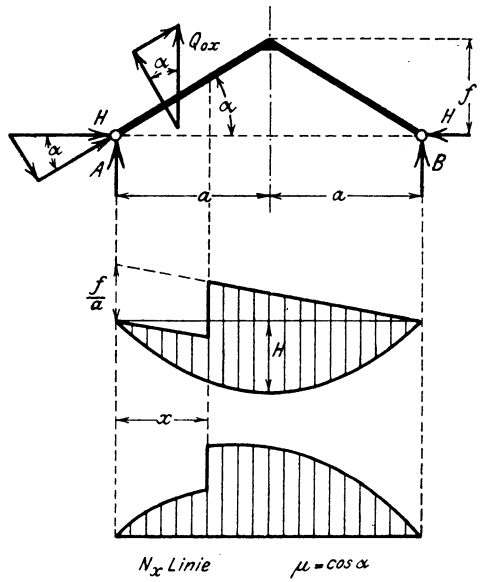


Abb. 79.

Die  $Q_{ox}$ -Linie ist die Einflußlinie für die Querkraft im einfachen Balken, wie es in der Abb. 79 gezeichnet ist.

## B. Der Einfluß wagerechter Lasten.

### 8. Belastung durch wagerechte Einzellast $W$ .

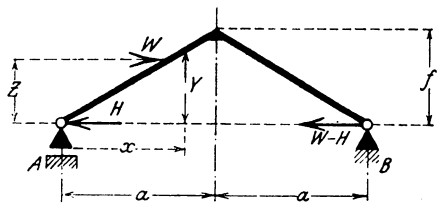


Abb. 80.

Der Belastungszustand ist in der Abb. 80 gezeichnet. Der unbekannte Horizontalschub bestimmt sich aus

$$H = \frac{\int M_o M_r \frac{ds}{EJ}}{\delta_{rr}}$$

Es ist weiter

$$A = B = \pm \frac{W \cdot z}{2 a}$$

und

$$M_r = y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{a} \cdot x$$

somit ergibt sich für den rechten Rahmenteil

$$M_o = \frac{W \cdot z}{2 a} \cdot x - W \cdot y$$

oder

$$M_o = \frac{W \cdot x}{a} \left( \frac{z}{2} - f \right)$$

und es wird

$$\begin{aligned} \int M_o M_r \frac{ds}{EJ} &= \int_0^a \frac{W \cdot x}{a} \left( \frac{z}{2} - f \right) \frac{f}{a} \cdot x \cdot \frac{dx}{EJ \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{W \cdot a \cdot f \cdot (z - 2f)}{6 EJ \cdot \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Für den linken Rahmenteil ist

$$M_o = - \frac{W \cdot z}{2 a} \cdot x$$

und es wird für  $x$  in den Grenzen 0 bis  $z \cdot \frac{a}{f}$

$$\begin{aligned} \int M_o M_r \frac{ds}{EJ} &= - \int_0^{z \frac{a}{f}} \frac{W \cdot z}{2 a} \cdot x \cdot x \cdot \frac{f}{a} \cdot \frac{dx}{EJ \cdot \cos \alpha} \\ &= - \frac{W \cdot z^2 \cdot a}{6 f^2 EJ \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Weiter ist für  $x$  in den Grenzen  $a$  bis  $z \cdot \frac{a}{f}$

$$M_o = - \frac{Wz}{2 a} \cdot x - W \cdot (y - z)$$

oder

$$M_o = W \cdot z - \frac{W \cdot x}{2 a} (z + 2f)$$



dann wird

$$\int M_o M_r \frac{ds}{EJ} = \frac{W \cdot z \cdot f}{a \cdot EJ \cdot \cos \alpha} \int_x^a x \cdot dx - \frac{W \cdot (z+f) \cdot f}{2 a^2 EJ \cdot \cos \alpha} \int_x^a x^2 dx$$

$$= \frac{W \cdot a \cdot z^2}{6 f^2 EJ \cdot \cos \alpha} - \frac{W \cdot a \cdot z^3}{6 f \cdot EJ \cdot \cos \alpha} + \frac{W \cdot a \cdot f \cdot z}{3 EJ \cdot \cos \alpha} + \frac{W \cdot a \cdot f^2}{3 EJ \cdot \cos \alpha}$$

Aus den vorstehenden Werten erhält man für  $\int M_o M_r \frac{ds}{EJ}$

$$\int M_o M_r \frac{ds}{EJ} = - \frac{W \cdot a \cdot f^2}{EJ \cdot \cos \alpha} \left( \frac{2}{3} - \frac{z}{2f} + \frac{z^3}{6f^3} \right)$$

somit wird

$$H = \frac{\int M_o M_r \frac{ds}{EJ}}{\delta_{rr}} = - \frac{W \cdot a \cdot f^2 \cdot 3 \cdot EJ \cdot \cos \alpha}{2 \cdot a \cdot f^2 \cdot EJ \cdot \cos \alpha} \left( \frac{2}{3} - \frac{z}{2f} + \frac{z^3}{6f^3} \right)$$

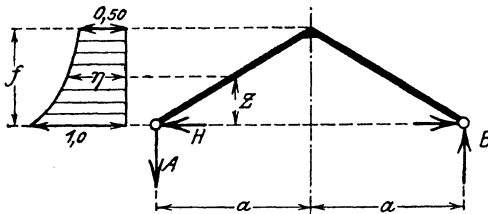
oder

$$H = - \frac{3}{2} W \left( \frac{2}{3} - \frac{z}{2f} + \frac{z^3}{6f^3} \right) \dots \dots \dots 68)$$

Die Formel 68) ist auch die Gleichung für die Einflußlinie von  $H$  unter dem Einfluß einer wagerechten Belastung. Setzt man in obiger Formel  $W = 1$ , so erhält man mit Beachtung der Abb. 81

$$- \eta = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{f} + \frac{z^3}{4f^3} \dots \dots \dots 69)$$

aus Formel 69) die Einflußlinie für  $H$  aus dem Belastungszustand wagerecht wirkender Lasten. Das Minuszeichen in Gleichung 69)



-Abb. 81.

deutet darauf hin, daß die Kraft  $H$  im entgegengesetzten Sinne wirkt, als wie bei dem Belastungszustand  $M_r$  angenommen wurde, also so wie es in den Abbildungen 80 und 81 angegeben ist. Für

$z = 0$  wird  $H = -W$  und für  $z = f$  ist  $H = -\frac{1}{2}W$ ; in der Abb. 69 ist die Einflußlinie gezeichnet.

Der Inhalt der von dieser  $H$ -Linie begrenzten Fläche ist

$$F = \int_0^f \eta \, dz = - \int_0^f \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{z}{f} + \frac{z^3}{4f^3} \right) dz$$

und hieraus

$$F = - \frac{11}{16} f.$$

### 9. Belastung durch gleichmäßig verteilte Last $W$ .

Der Horizontalschub ist

$$H = \Sigma q \cdot dz \cdot \eta$$

und es wird nach Gleichung 69)

$$H = - q \cdot f \cdot \frac{11}{16} = - \frac{11}{16} W.$$

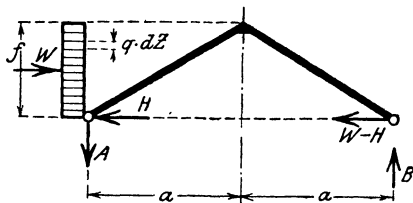


Abb. 82.

Der Horizontalschub wirkt in dem Sinn, wie es in der Abb. 82 gezeichnet ist. Die Auflagerreaktionen sind:

wagrecht bei  $A = H = \frac{11}{16} W$

bei  $B = W - H = \frac{5}{16} W,$

lotrecht bei  $A$  und  $B = \pm \frac{W \cdot f}{4 \cdot a}.$

Das größte Biegemoment aus dieser Belastung tritt in Rahmenmitte auf und ist

$$M_{\max} = \frac{W \cdot f}{4 \cdot a} \cdot a - \frac{5}{16} W \cdot f$$

oder

$$M_{\max} = - \frac{W \cdot f}{16} \dots \dots \dots 70)$$

Wird an Stelle der festen Auflager bei dieser Konstruktion eine die beiden Auflager verbindende Spannstange angeordnet, so muß, weil diese Spannstange in den meisten Fällen als Zugorgan ausgebildet ist, besonders darauf geachtet werden, ob die Spann-



nahme ist für  $\delta_a$  in den meisten Fällen auch zutreffend. Setzt man nun für  $\delta_a$  und  $\delta_b$  Null, dann erhält man für  $X_a$  und  $X_b$  die Gleichungen in der Form, wie diese unter IV., Gleichung 38) und 39) angeführt sind. Nach Durchführung dieser vereinfachten Rechnung kann man dann mit  $\delta_b = \frac{X_b l_b}{EF_b}$  den Einfluß dieser Verschiebung auf die Größe der unbekanntenen Kräfte  $X_a$  und  $X_b$  leicht prüfen und diese Werte richtigstellen.

### A. Die Verschiebungen $\delta_{aa}$ , $\delta_{bb}$ und $\delta_{ab}$ .

#### 2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ .

Es ist  $\delta_{aa}$  die Verschiebung des Angriffspunktes von  $X_a$  für den Belastungszustand  $X_a = -1$  und  $\Sigma P = 0$  im statisch bestimmten Grundsystem, als welches für den vorliegenden Fall der einfache Balken gewählt ist, wie es in der Abb. 84 gezeichnet ist. Mit der Annahme eines überall konstanten Trägheitsmomentes  $J$  und mit Vernachlässigung der Normalkräfte ist

$$\delta_{aa} = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \frac{h \cdot c}{2} \cdot \frac{2}{3} h$$

$$\delta_{aa} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h^2 c}{EJ} \dots \dots \dots 73)$$

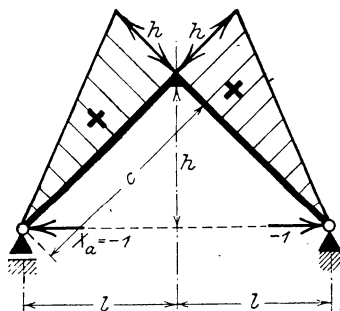


Abb. 84.

#### 3. Die Verschiebung $\delta_{bb}$ .

Die Verschiebung  $\delta_{bb}$  ist nach der Abb. 85 die Verschiebung des Angriffspunktes von  $X_b$  im Sinne einer Kraft  $X_b = -1$  und berechnet sich zu

$$\delta_{bb} = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \frac{b \cdot s_2}{2} \cdot \frac{2}{3} b$$

$$\delta_{bb} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b^2 s_2}{EJ} \dots \dots \dots 74)$$

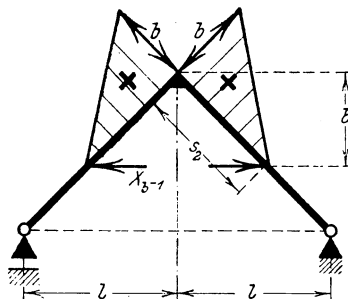


Abb. 85.

**4. Die Verschiebung  $\delta_{ab}$ .**

Es ist  $\delta_{ab}$  die Verschiebung des Angriffspunktes von  $X_a$  unter dem Belastungszustand  $X_b = -1$  und  $\Sigma P = 0$ . Bezugnehmend auf die Abb. 85 berechnet sich

$$\delta_{ab} = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \frac{b \cdot s_2}{2} \cdot \left( a + \frac{2}{3} b \right)$$

$$\delta_{ab} = \frac{b s_2}{3 \cdot EJ} (3a + 2b) \quad . . . . . 75)$$

Der in den Gleichungen 71) und 72) auftretende Nenner ist nach vorstehendem

$$\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2 = \frac{b^2 s_2}{9 \cdot E^2 J^2} [4h^2 c - s_2 (3a + 2b)^2] \quad . 76)$$

**B. Der Einfluß lotrechter Lasten.**

**5. Die  $\delta_{ma}$ -Linie.**

Für die Untersuchung von Belastungsfällen, bei welchen mehrere Einzellasten in unsymmetrischer Anordnung auftreten, eignen sich am besten die Einflußlinien, die man mit Hilfe der  $\delta_{ma}$ - und  $\delta_{mb}$ -Linien konstruieren kann. Die  $\delta_{ma}$ -Linie berechnet sich nach IV. 2. zu

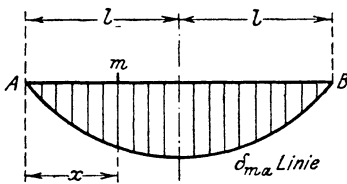


Abb. 86.

$$\delta_{ma} = \frac{h l c}{2 E J} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{3 l^3} \right) \quad 77)$$

Der Inhalt der von der  $\delta_{ma}$ -Linie begrenzten Fläche ist

$$F_m = \frac{5}{12} \frac{h l \cdot c}{E J}.$$

**6. Die  $\delta_{mb}$ -Linie.**

Unter  $\delta_{mb}$  versteht man die Verschiebung eines Punktes  $m$  in Richtung einer Kraft  $P$  in  $m$  unter dem Einfluß einer Kraft  $X_b = -1$ . Die  $\delta_{mb}$ -Linie ist also die Biegelinie für den Belastungszustand  $X_b = -1$ .

In der Abb. 87 ist die Momentenfläche aus diesem Belastungszustand gezeichnet, und es ergibt sich nach dem Verfahren von Mohr

$$\delta_{x_1 b} = \frac{b \cdot s_2}{2 \cdot EJ} \cdot x_1 \quad (78)$$

Nach der Abb. 87 ist

$$r_1 = s_1 \cos \alpha$$

und der Inhalt der  $\delta_{mb}$ -Fläche in den Grenzen  $x_1 \doteq r_1 \div 0$ , somit

$$F_{b_1} = \frac{b \cdot l^2 s_1^2 s_2}{2 \cdot c^2 \cdot EJ}$$

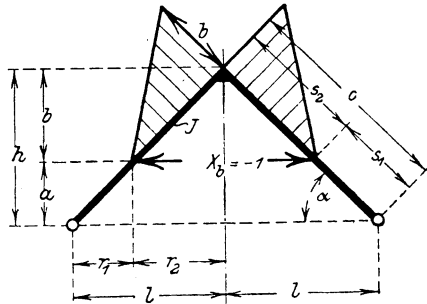


Abb. 87.

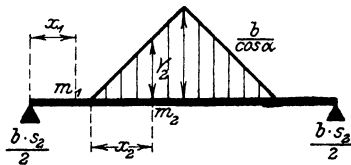


Abb. 87 a.

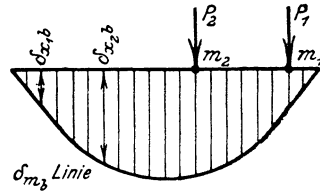


Abb. 87 b.

Weiter ist für die Abszissen  $x_2$

$$\delta_{x_2 b} = \frac{b \cdot s_2}{2 EJ} (r_1 + x_2) - \frac{x_2 y_2}{2 EJ} \cdot \frac{x_2}{3}$$

Es ist nun

$$y_2 = \frac{x_2 b}{r_2 \cos \alpha}$$

$$r_1 = l - s_2 \cos \alpha$$

$$r_2 = s_2 \cdot \cos \alpha$$

und somit

$$\delta_{x_2 b} = \frac{b s_2}{2 EJ} \left( l - \frac{s_2 l}{c} + x_2 - \frac{c^2}{3 \cdot l^2 s_2^3} x_2^3 \right) \quad (79)$$

Der Inhalt der von der  $\delta_{x_2 b}$ -Linie begrenzten Fläche ist

$$F_{b_2} = \frac{b l^2 s_2}{EJ} \left( \frac{s_2}{c} - \frac{7}{12} \frac{s_2^2}{c^2} \right)$$

Der ganze Inhalt der von der  $\delta_{mb}$ -Linie begrenzten Fläche ist nach vorstehendem

$$F_b = \frac{bl^2 s_2}{2EJ} \left(1 - \frac{s_2^2}{6c^2}\right).$$

Setzt man für das Verhältnis  $\frac{s_2}{c}$  den Wert  $\frac{b}{h}$ , so wird

$$F_b = \frac{bl^2 s_2}{2EJ} \left(1 - \frac{b^2}{6h^2}\right). \dots \dots \dots 80)$$

Mit Hilfe der  $\delta_{ma}$ - und  $\delta_{mb}$ -Linien kann man die  $X_a$ - und  $X_b$ -Linien konstruieren. Es empfiehlt sich hier nur

$$\delta_{bb} \Sigma P_m \delta_{ma} - \delta_{ab} \Sigma P_m \delta_{mb}$$

und die

$$\delta_{aa} \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} \Sigma P_m \delta_{ma}$$

zu berechnen; der Multiplikator ist dann  $\mu = \frac{1}{\omega}$ , wo

$$\omega = \delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2$$

ist.

Für einfache Belastungsfälle braucht man aber die Einflußlinien von  $X_a$  und  $X_b$  nicht zu berechnen, hier kann man die Werte  $\Sigma P_m \delta_{ma}$  und  $\Sigma P_m \delta_{mb}$  direkt aus  $\int M_o M_a \frac{ds}{EJ}$  und  $\int M_o M_b \frac{ds}{EJ}$  bestimmen.

**7. Vollbelastung durch gleichmäßig verteilte Last Q.**

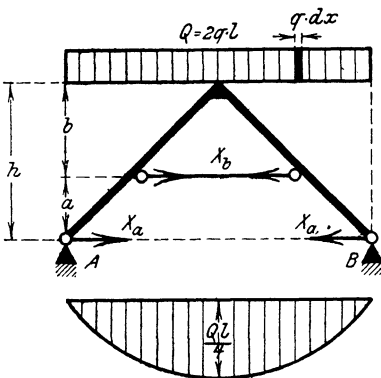


Abb. 88.

Für den in der Abb. 88 gezeichneten Belastungszustand ist für

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \int M_o M_a \frac{ds}{EJ}$$

mit

$$M_a = y$$

$$\int M_o M_a \frac{ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int M_o y ds.$$

Nach der Abb. 88<sup>a</sup> erhält man hierfür

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \frac{2}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \frac{Ql}{4} \cdot c \frac{5}{8} h$$

oder

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \frac{5}{24} \cdot \frac{Qhlc}{EJ} \cdot 81)$$

Weiter ist

$$\Sigma P_m \delta_{mb} = \int M_o M_b \frac{ds}{EJ}$$

und mit

$$M_b = y'$$

wird

$$\Sigma P_m \delta_{mb} = \frac{1}{EJ} \int M_o y' ds$$

Es ist  $\int M_o y' ds$  das statische Moment der Momentenfläche für die Querschnitte oberhalb der Achse  $n \div n$ , bezogen auf diese Achse. Dieses Moment ist

$$S_n = 2 F_n y_b.$$

Der Flächeninhalt der über der  $n \div n$ -Achse liegenden Momentenfläche ist

$$F_n = k s_2 + \frac{2}{3} s_2 f_o = s_2 \left( k + \frac{2}{3} f_o \right)$$

und es berechnet sich der Schwerpunktsabstand  $y_b$  zu

$$y_b = \frac{b}{2} \frac{k + \frac{5}{6} f_o}{k + \frac{2}{3} f_o}.$$

Mit diesen Werten wird

$$S_n = 2 s_2 \left( k + \frac{2}{3} f_o \right) \cdot \frac{b}{2} \frac{k + \frac{5}{6} f_o}{k + \frac{2}{3} f_o}$$

oder

$$S_n = b s_2 \left( k + \frac{5}{6} f_o \right).$$

Es ist nun weiter

$$k = \frac{Ql}{4} \left( 1 - \frac{b^2}{h^2} \right)$$

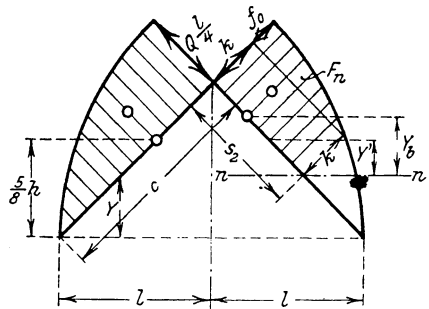


Abb. 88a.



und

$$f_o = \frac{Ql}{4} \frac{b^2}{h^2}$$

und hiermit ergibt sich

$$S_n = \frac{Ql}{4} \cdot b \cdot s_2 \left(1 - \frac{b^2}{6h^2}\right).$$

Mit diesem Wert erhält man

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \frac{Ql}{4 \cdot EJ} b s_2 \left(1 - \frac{b^2}{6h^2}\right) \dots 82)$$

Zur Berechnung von  $X_a$  und  $X_b$  sollen zuerst die Verschiebungen  $\delta_a$  und  $\delta_b$  vernachlässigt und Null gesetzt werden. Nach Gleichung 38) war

$$X_a = \frac{\delta_{bb} \Sigma P_m \delta_{ma} - \delta_{ab} \Sigma P_m \delta_{mb}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

Setzt man die hierzu gehörigen Werte ein, so ist

$$X_a = \frac{\frac{2}{3} \frac{b^2 s_2}{EJ} \cdot \frac{5}{24} \frac{Q \cdot h l c}{EJ} - \frac{b s_2}{3 EJ} (3a + 2b) \frac{Ql}{4 EJ} b s_2 \left(1 - \frac{b^2}{6h^2}\right)}{\frac{b^2 s_2}{9 E^2 J^2} [4h^2 c - s_2 (3a + 2b)^2]}$$

oder

$$X_a = \frac{Ql}{4} \cdot \frac{5hc - 3s_2 (3h - b) \left(1 - \frac{b^2}{6h^2}\right)}{4h^2 c - s_2 (3h - b)^2} \dots 83)$$

Weiter ist

$$X_b = \frac{\delta_{aa} \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} \Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

und somit wird

$$X_b = \frac{\frac{2}{3} \frac{h^2 c}{EJ} \cdot \frac{Ql}{4 EJ} \cdot b s_2 \left(1 - \frac{b^2}{6h^2}\right) - \frac{b s_2}{3 EJ} (3a + 2b) \frac{5}{24} \frac{Qh l c}{EJ}}{\frac{b^2 s_2}{9 E^2 J^2} [4h^2 c - s_2 (3a + 2b)^2]}$$

oder

$$X_b = \frac{Ql}{4} \cdot \frac{c}{2b} \frac{12h^2 \left(1 - \frac{b^2}{6h^2}\right) - 5h (3h - b)}{4h^2 c - s_2 (3h - b)^2} \dots 84)$$

### C. Der Einfluß wagerechter Lasten.

#### 8. Belastung durch wagerechte, gleichmäßig verteilte Last $Q$ .

In der Abb. 89 ist der Belastungszustand gezeichnet. Als Grundsystem wird der einfache Balken mit dem beweglichen Auflager bei  $A$  angenommen. Die Auflagerreaktionen im Grundsystem sind:

lotrecht bei  $A$  und  $B$

$$A_o = B_o = \pm \frac{W \cdot h}{4l}$$

wagerecht bei  $B$

$$H = W.$$

Es war

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \frac{1}{EJ} \int M_o y ds$$

und

$$\Sigma P_m \delta_{mb} = \frac{1}{EJ} \int M_o y' ds$$

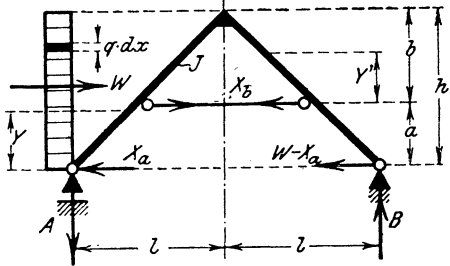


Abb. 89.

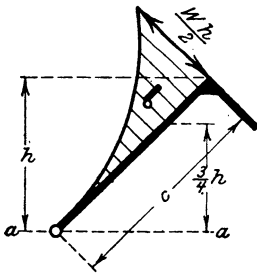


Abb. 90.

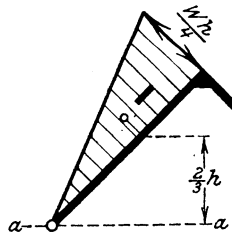


Abb. 90 a.

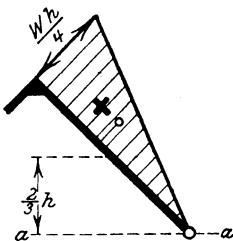


Abb. 90 b.

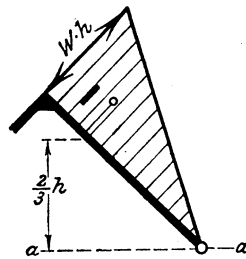


Abb. 90 c.

dieses sind die statischen Momente der  $M_o$ -Flächen, bezogen auf die Achsen der  $X_a$ - und  $X_b$ -Kräfte.

In den Abbildungen 90 und 91 sind die  $M_o$ -Flächen gezeichnet.

Nach den Abbildungen 90 ÷ 90<sup>c</sup> ist

$$\frac{1}{EJ} \int M_o y \cdot ds = - \left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{Wh}{2} \frac{c}{EJ} \cdot \frac{3}{4} h \\ - \frac{W \cdot h}{2} \cdot \frac{c}{EJ} \cdot \frac{2}{3} h \end{array} \right\} = - \frac{11}{24} \cdot \frac{Wh^2 c}{EJ}.$$

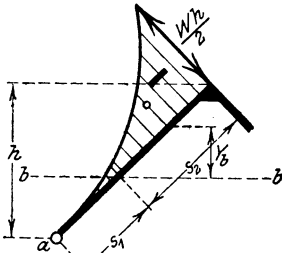


Abb. 91.

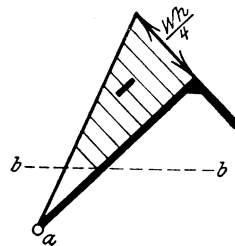


Abb. 91 a.

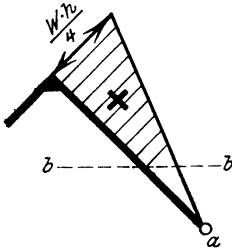


Abb. 91 b.

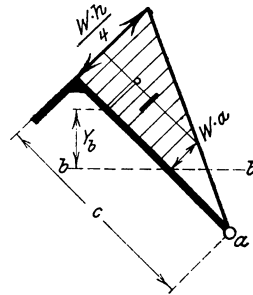


Abb. 91 c.

Nach den Abbildungen 91 ÷ 91<sup>c</sup> ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{EJ} \int M_o y' ds &= - \frac{W}{6 EJ} \cdot \frac{c}{h^2} \cdot (h^3 - a^3) \cdot \frac{3h^4 - 4ah^3 + 4a^4}{4(h^3 - a^3)} \\ &\quad - \frac{W}{EJ} \cdot a \cdot s_2 \frac{b}{2} \\ &\quad - \frac{W}{4 \cdot EJ} (h - 4a) \cdot \frac{s_2}{2} \cdot \frac{2}{3} b \end{aligned}$$

oder

$$\frac{1}{EJ} \int M_o y' ds = - \frac{W \cdot c}{24 \cdot EJ \cdot h^2} (3h^4 - 4ah^3 + 4a^4) - \frac{Whs_2^2}{12 \cdot EJ \cdot c} (h + 2a).$$

Zur Bestimmung der Werte von  $X_a$  und  $X_b$  berechnet man bei der praktischen Anwendung am zweckmäßigsten zuerst die Zahlenwerte von  $\Sigma P_m \delta_{ma}$  und  $\Sigma P_m \delta_{mb}$  und bestimmt danach mit diesen durch Einsetzen in die Bestimmungsgleichungen für  $X_a$  und  $X_b$  die Zahlenwerte für die letzteren. Es muß aber hierbei darauf geachtet werden, daß die Teilwerte genau auf mehrere Dezimalstellen berechnet sind, da sich sonst sehr leicht unrichtige Werte ergeben.

Bei der Berechnung der Momente wird man wieder die Kernpunktsmomente bestimmen. Für alle anderen Belastungsfälle empfiehlt es sich, die Einflußlinien für die statisch unbestimmten Kräfte zu berechnen.

## VIII. Der Dreieckrahmen mit Pendelstütze.

### 1. Erklärungen.

Das in der Abb. 92 gezeichnete System ist ein zweiseitiger Dreigelenkrahmen mit einer Pendelstütze. Die Konstruktion ist einfach statisch unbestimmt und wird als Unbekannte die Spannkraft in der Pendelstütze mit  $X_a$  bezeichnet.

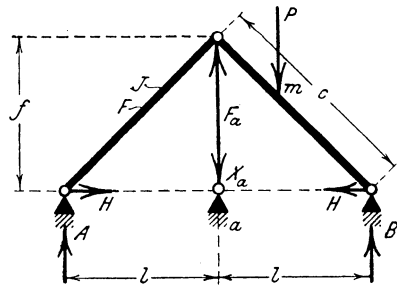


Abb. 92.

Weiter ist  $J$  das Trägheitsmoment des Rahmens,  $F$  der Querschnitt des Rahmens und  $F_a$  der Querschnitt der Pendelstütze.

$$\text{Aus} \quad \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa}$$

$$\text{folgt} \quad X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\frac{f}{EF_a} + \delta_{aa}}.$$

## 2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ .

Entfernt man die Pendelstütze, so erhält man als Grundsystem den Dreigelenrahmen. Für den Belastungszustand  $X_a = -1$  und  $\Sigma P_m = 0$  im Grundsystem wird

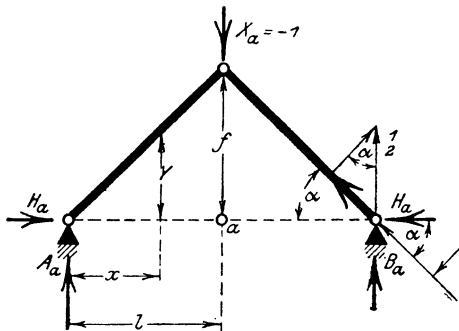


Abb. 93.

$$A_a = B_a = \frac{1}{2}$$

und

$$H_a = \frac{l}{2f}.$$

Das Moment in einem Querschnitt des Rahmens ist dann nach vorstehendem und mit Bezugnahme auf die Abb. 93

$$M_a = \frac{1}{2} x - \frac{l}{2f} \cdot y = \frac{1}{2} x + \frac{l}{2f} \cdot x \cdot \frac{f}{l} = 0.$$

Für den vorliegenden Fall ist es nicht möglich, die Bedingungen

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{ds}{EJ} \quad \text{und} \quad \delta_{ma} = \int M_o M_a \frac{ds}{EJ}$$

anzuwenden und die Normalkräfte zu vernachlässigen, sondern hier kann man die Unbekannte nur mit Hilfe der Normalkräfte bestimmen. Nach Abb. 93 ist

$$N_a = -\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{l}{2f} \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{2} \left( \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$$

oder

$$N_a = -\frac{1}{2 \cdot \sin \alpha}$$

und es ist weiter

$$N_a^2 = \frac{1}{4 \cdot \sin^2 \alpha}.$$

Setzt man für  $\sin \alpha = \frac{f}{c}$ , so wird

$$N_a^2 = \frac{c^2}{4f^2}$$



Es war

$$N_a = -\frac{1}{2 \sin \alpha} = -\frac{c}{2f}$$

und somit wird

$$N_o N_a = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m}{2l} + \frac{ml}{2f^2} \right).$$

Für das Gebiet  $0 \div m$  erhält man

$$\int N_o N_a \frac{ds}{EF} = \frac{c}{2lEF} \left( m - \frac{m^2}{2l} + \frac{m^2 l}{2f^2} \right).$$

In dem Gebiete  $x = l \div$  bis  $x = m$  ist

$$N_o = -A_o \sin \alpha - H_o \cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{2l-m}{2l} \cdot \frac{f}{c} - \frac{m}{2f} \cdot \frac{l}{c} + \frac{f}{c}$$

oder

$$N_o = -\frac{f}{c} \left( \frac{ml}{2f^2} - \frac{m}{2l} \right)$$

und es wird

$$N_o N_a = \frac{1}{2} \left( \frac{ml}{2f^2} - \frac{m}{2l} \right).$$

Hieraus folgt für  $x$  in den Grenzen  $l \div m$ .

$$\int N_o N_a \frac{ds}{EF} = \frac{c \cdot (l-m)}{2lEF} \left( \frac{ml}{2f^2} - \frac{m}{2l} \right)$$

oder

$$\int N_o N_a \frac{ds}{EF} = \frac{c(l^2 - f^2)}{4f^2 EF} \left( \frac{m}{l} - \frac{m^2}{l^2} \right).$$

Für den rechten Rahmenteil ist

$$N_o = -B_o \cdot \sin \alpha - H_o \cos \alpha$$

und es wird

$$N_o = -\frac{f}{c} \left( \frac{m}{2l} + \frac{ml}{2f^2} \right) = -\frac{m}{2l} \frac{c}{f}.$$

Mit

$$N_a = -\frac{c}{2f}$$

wird

$$N_o N_a = \frac{m}{4l} \cdot \frac{c^2}{f^2}$$

und es ist

$$\int_0^l N_o N_a \frac{ds}{EF} = \frac{m}{4l} \cdot \frac{c^3}{f^2 EF}.$$

Die Summen dieser Teilwerte von  $\int N_o N_a \frac{ds}{EJ}$  ergibt die Gleichung der  $\delta_{ma}$ -Linie.

Es wird

$$\delta_{ma} = \frac{c^3}{2f^2 l \cdot EF} \cdot m \cdot \dots \dots \dots 86)$$

#### 4. Die Einflußlinie für $X_a$ .

Es ist

$$X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\frac{f}{EF_a} + \delta_{aa}}$$

und man erhält mit Einsetzung der Werte aus den Gleichungen 85) und 86)

$$X_a = \frac{m \cdot c^3 \cdot EF}{2f^2 l \cdot EF \cdot f \cdot \left( \frac{F'}{F_a} + \frac{c^3}{2f^3} \right)}$$

oder

$$X_a = m \cdot \frac{c^3}{l \left( \frac{2f^3 F'}{F_a} + c^3 \right)} \cdot \dots \dots \dots 87)$$

Die Einflußlinie für  $X_a$  ist eine gerade Linie, wie in der Abb. 95 gezeichnet.

Vernachlässigt man in der Gleichung 87) den Einfluß des Pendelstützenquerschnitts  $F'_a$  und setzt das erste Glied im Nenner gleich Null, so erhält man für  $X_a$  den besonders einfachen Ausdruck von

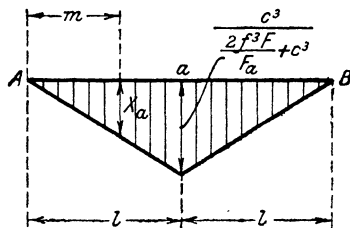


Abb. 95.

$$X_a = \frac{m}{l}.$$



**5. Die Einflußlinie für den Horizontalschub  $H$ .**

Der Horizontalschub  $H$  berechnet sich aus

$$H = H_0 - H_a X_a .$$

und es wird mit

$$H_a = \frac{l}{2f}$$

$$H = H_0 - \frac{l}{2f} \cdot X_a$$

oder

$$H = \frac{l}{2f} \left( \frac{2f}{l} \cdot H_0 - X_a \right) . . . . . 88)$$

Berechnet man  $X_a$  unter Vernachlässigung des Pendelstützenquerschnitts, dann wird, wie aus der Gleichung 88) zu ersehen ist, der Horizontalschub  $H$  gleich Null, und die Rahmenteile werden für lotrechte Lasten als einfache Balken von der Stützweite  $l$  berechnet.

**B. Der Einfluß wagerechter Lasten.**

**6. Wagerechte Belastung durch gleichmäßig verteilte Last  $W$ .**

Im Grundsystem, dem Dreigelenkrahmen, sind die Auflagerreaktionen

$$A_0 = B_0 = \pm \frac{Wf}{4l}$$

und

$$H_0^l = \frac{3}{4} W; \quad H_0^r = \frac{1}{4} W.$$

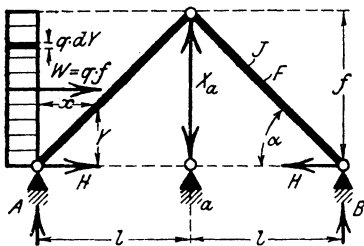


Abb. 96.

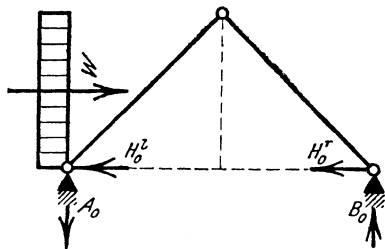


Abb. 97.

Nach der Abb. 97 wird für den linken Rahmenteil

$$\begin{aligned} N_o &= A_o \sin \alpha - q \cdot y \cdot \cos \alpha + H_o^l \cos \alpha \\ &= \frac{Wf}{4l} \cdot \frac{f}{c} - \frac{W}{f} \cdot x \cdot \frac{f}{c} + \frac{3}{4} W \cdot \frac{l}{c} \end{aligned}$$

oder

$$N_o = \frac{W}{c} \left( \frac{f^2}{4l} + \frac{3}{4} l - x \right).$$

Mit

$$N_a = -\frac{c}{2f}$$

wird

$$N_o N_a = -\frac{W}{2f} \left( \frac{f^2}{4l} + \frac{3}{4} l - x \right)$$

und es ist hiernach

$$\int N_o N_a \frac{ds}{EF} = -W \cdot \frac{c^3}{8f \cdot lEF}.$$

Im rechten Rahmenteil ist

$$\begin{aligned} N_o &= -B_o \sin \alpha - H_o^r \cos \alpha \\ &= -\frac{Wf}{4l} \cdot \frac{f}{c} - \frac{W}{4} \cdot \frac{l}{c} \end{aligned}$$

oder

$$N_o = -W \cdot \frac{c}{4l}$$

und es wird

$$N_o N_a = W \cdot \frac{c^2}{8lf}.$$

Damit erhält man

$$\int N_o N_a \frac{ds}{EF} = W \cdot \frac{c^3}{8 \cdot f l E \cdot F}.$$

Die Summe der Werte  $\int N_o N_a \frac{ds}{EF}$  ergibt Null. Für wagerechte Lasten verhält sich das System wie ein Dreigelenkrahmen und muß die Konstruktion für diese Belastungsfälle als solcher berechnet werden.

Für Lasten, die senkrecht zur Rahmenachse wirken, ist es oft von Vorteil, die Auflagerreaktionen rechnerisch genau zu bestimmen.

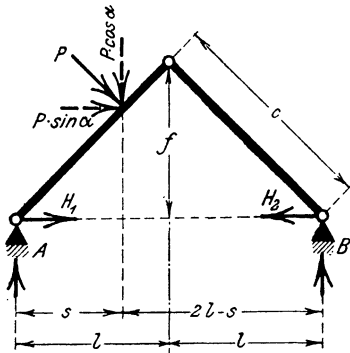


Abb. 98.

Nach Abb. 98 ist  
a) der Einfluß der Komponente  $P \cdot \cos \alpha$ :

$$A_a = \frac{2l - s}{2l} \cdot P \cdot \cos \alpha$$

und

$$B_a = \frac{s}{2l} \cdot P \cdot \cos \alpha$$

$$H_a = P \cdot \cos \alpha \cdot \frac{s}{2f}.$$

b) Der Einfluß der Komponente  $P \cdot \sin \alpha$ :

$$A_b = -P \cdot \sin \alpha \frac{sf}{2l^2}; \quad B_b = +P \cdot \sin \alpha \frac{sf}{2l^2}$$

und

$$H_b^r = P \cdot \sin \alpha \cdot \frac{s}{2l}.$$

Weiter ist

$$H_b^l = P \cdot \sin \alpha - P \cdot \sin \alpha \frac{s}{2l} = P \cdot \sin \alpha \frac{2l - s}{2l}.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} H_1 &= P \cdot \cos \alpha \frac{s}{2f} - P \cdot \sin \alpha \frac{2l - s}{2l} \\ &= P \cdot \frac{f}{2lc} \left( \frac{sl^2}{f^2} - 2l + s \right) \end{aligned}$$

$$H_2 = P \cdot \cos \alpha \frac{s}{2f} + P \cdot \sin \alpha \frac{s}{2l} = P \cdot \frac{sc}{2fl}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2l - s}{2l} \cdot P \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha \frac{sf}{2l^2} \\ &= P \cdot \frac{1}{2l^2c} (2l^3 - sc^2) \end{aligned}$$

$$B = \frac{s}{2l} \cdot P \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha \cdot \frac{sf}{2l^2} = P \cdot \frac{sc}{2l^2}.$$

## IX. Zwei durch Gelenkstab verbundene eingespannte Ständer.

### 1. Erklärungen.

Das in der Abb. 99 gezeichnete System kommt im Hochbau sehr häufig vor, und es ist von Vorteil zu wissen, in welchem Maße sich die beiden Ständer an der Lastübertragung beteiligen, wenn der eine von diesen durch wagerechte Kräfte angegriffen wird. Der hier angeführte Fall tritt bei einschiffigen Hallen auf, wenn die beiden Säulen fest gelagert sind; dann beteiligen sich beide Säulen an einer einseitigen Kraftübertragung.

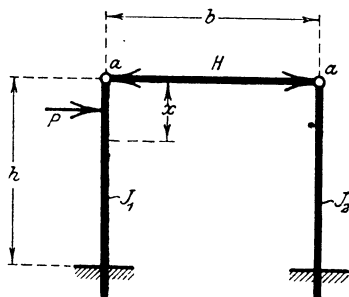


Abb. 99.

Das System ist einfach statisch unbestimmt und wird die Unbekannte, die Spannkraft  $H$  im Gelenkstab, aus der Gleichung

$$H = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

genau genug berechnet.

### 2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ .

Es ist

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{h^3}{3J_1} + \frac{h^3}{3J_2}$$

also

$$\delta_{aa} = \frac{h^3}{3} \frac{J_1 + J_2}{E \cdot J_1 \cdot J_2} \dots \dots \dots 89)$$

### 3. Die Verschiebung $\delta_{ma}$ .

Die  $\delta_{ma}$ -Linie der Ständer berechnet sich als die Biegelinie eines mit der Spitzenlast  $H = 1$  belasteten Freitragers. Hierfür ist allgemein

$$\delta_{ma} = \frac{h^3}{6EJ} \left( 2 - 3 \frac{x}{h} + \frac{x^3}{h^3} \right).$$

### 4. Die *H*-Linie.

Aus vorstehendem folgt für *H* aus

$$H = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

für den linken Ständer

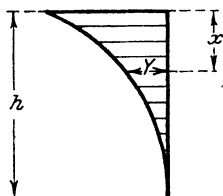
$$H = \frac{h^3 \cdot \left(2 - 3 \frac{x}{h} + \frac{x^3}{h^3}\right) 3 \cdot J_1 J_2}{6 J_1 h^3 (J_1 + J_2)}$$

oder, bezeichnet man für den linken Ständer die Ordinaten der Einflußlinie von *H* mit *y*<sub>1</sub>,

$$y_1 = \frac{J_2}{2(J_1 + J_2)} \cdot \left[2 - 3 \frac{x}{h} + \frac{x^3}{h^3}\right] \dots 90)$$

und für den rechten Ständer ist

$$y_2 = \frac{J_1}{2(J_1 + J_2)} \left[2 - 3 \frac{x}{h} + \frac{x^3}{h^3}\right] \dots 91)$$



*H*-Linie  
Abb. 100.

Für den Fall, daß  $J_1 = J_2 = J$  ist, werden die Ordinaten der *H*-Linie aus

$$y = \frac{1}{4} \left(2 - 3 \frac{x}{h} + \frac{x^3}{h^3}\right)$$

berechnet.

Im folgenden sind für die Verhältnisse  $\frac{x}{h} = 0 \div 1$  die Ordinaten der *H*-Linie unter der Voraussetzung von  $J_1 = J_2 = J$  berechnet.

$\frac{x}{h}$	<i>g</i>	$\frac{x}{h}$	<i>y</i>	$\frac{x}{h}$	<i>y</i>
0	0,5000	0,4	0,2160	0,8	0,0280
0,1	0,4252	0,5	0,1563	0,9	0,0072
0,2	0,3520	0,6	0,1040	1,0	0,0000
0,3	0,2818	0,7	0,0607		

Für die praktische Anwendung braucht man in in den meisten Fällen nur die Ordinate für das Verhältnis  $\frac{x}{h} = 0$  und den Inhalt der von der Einflußlinie begrenzten Fläche.

Dieser ist

$$F_H = \frac{1}{4} \int_0^h \left( 2 - 3 \frac{x}{h} + \frac{x^3}{h^3} \right) dx$$

oder

$$F_H = \frac{3}{16} h.$$

Somit ist für den Fall einer gleichmäßig über den Ständer verteilten Belastung  $Q$  die Spannkraft in dem Gelenkstab

$$H = \frac{3}{16} h \cdot \frac{Q}{h} = \frac{3}{16} Q.$$

Das Biegemoment an der Einspannstelle des Ständers 1 ist dann

$$M_1 = \frac{Qh}{2} - \frac{3}{16} Qh$$

$$M_1 = \frac{5}{16} Qh.$$

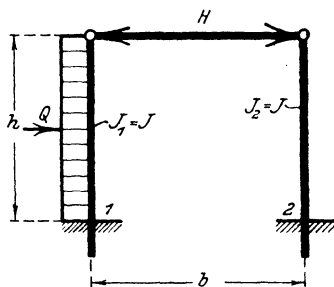


Abb. 101.

Im Ständer 2 ist das Moment an der Einspannstelle

$$M_2 = -\frac{3}{16} Qh.$$

Eine an der Spitze angreifende Einzellast verteilt sich bei gleichen Trägheitsmomenten gleichmäßig auf beide Ständer.

Diese im vorstehenden abgeleiteten Formeln kann man auch noch dann anwenden, wenn die Säulen nicht aus einem Querschnitt, sondern aus mehreren Einzelquerschnitten bestehen, wie dieses bei Gitterwerken der Fall ist.

# X. Der durch Zugband verspannte einfache Balken.

## 1. Erklärungen.

Das in der Abb. 102 gezeichnete System stellt einen biegungsfesten Balken dar, der mittels Zug und Druckglieder verspannt ist. Durch die Anordnung der Verspannung wird das System einfach statisch unbestimmt. Zur Berechnung der Konstruktion wird als unbekannte Spannkraft die wagerechte Kraftkomponente des Zugbandes angesehen und diese mit  $H$  bezeichnet.

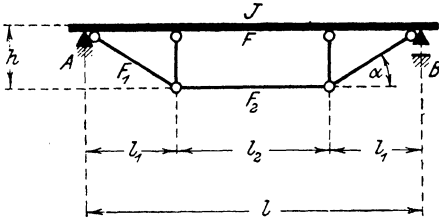


Abb. 102.

Trennt man an dem Punkte  $a$  die Spannstange und läßt die Belastung auf den Träger wirken, so verhält sich die Konstruktion wie ein einfacher Balken.

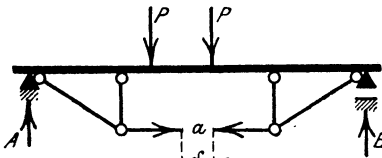


Abb. 103.

Durch die Formänderungen desselben entfernen sich die Punkte  $a$  der Spannstange um einen Betrag  $\delta_0$ . Soll diese Formänderung nicht eintreten, so muß in der Zugstange eine Spannkraft wirken, welche der Kraftwirkung aus den äußeren

Kräften das Gleichgewicht hält; die Spannkraft  $H$  muß also die Punkte  $a$  um die Strecke  $\delta_0$  zurückschieben. Es ist aber die gegenseitige Verschiebung des Punktes  $a$  gleich Null, und so folgt daher aus den vorstehenden Betrachtungen die Bedingung

$$\delta_0 - H\delta_{aa} = 0$$

und bedeutet hierin  $\delta_{aa}$  die gedachte Verschiebung des Punktes  $a$  unter dem Einfluß einer Kraft  $H = 1$ .

Die im vorstehenden angeschriebene Gleichung kann man nach allgemeinen Gesetzen der Elastizitätslehre auch in der Form

$$0 = \sum P_m \delta_{ma} - H \cdot \delta_{aa}$$

schreiben.

Im weiteren Verlaufe der Untersuchung dieses Systems sollen nun die Werte für  $\delta_{aa}$  und  $\delta_{ma}$  berechnet werden.

## 2. Die Verschiebung $\delta_{aa}$ .

Es ist

$$\delta_{aa} = \int M_a^2 \frac{ds}{EJ} + \int N_a^2 \frac{ds}{EF} + \sum S_a^2 \frac{s}{EF}$$

und nach der Abb. 104

$$M_a = y.$$

Für  $x$  in den Grenzen  $l_1$  und 0 gilt

$$y = x \cdot \frac{h}{l_1}$$

und somit

$$M_a^2 = x^2 \frac{h^2}{l_1^2}.$$

Wird  $x > l_1$ , so ist

$$M_a = h \text{ und } M_a^2 = h^2.$$

Weiter ist

$$N_a = 1$$

und somit nach vorstehendem

$$\delta_{aa} = 2 \cdot \frac{h^2}{l_1^2} \int_0^{l_1} x^2 \frac{dx}{EJ} + 2h^2 \int_{l_1}^{l_2} \frac{dx}{EJ} + \int_0^{l_2} \frac{dx}{EF} + \sum S_a^2 \frac{s}{EF}.$$

Der Wert  $\sum S_a^2 \frac{s}{EF}$  berechnet sich genau genug unter Vernachlässigung der Pfosten zu

$$\sum S_a^2 \frac{s}{EF} = \frac{l_2}{EF_2} + 2 \cdot \frac{l_1}{\cos^2 \alpha EF_1}$$

und man erhält somit aus diesen Werten für die Verschiebung  $\delta_{aa}$  den Ausdruck

$$\delta_{aa} = \frac{h^2}{3EJ} (3l - 4l_1) + \frac{l}{EF} + \frac{2l_1}{EF_1 \cos^2 \alpha} + \frac{l_2}{EF_2}. \quad 92)$$

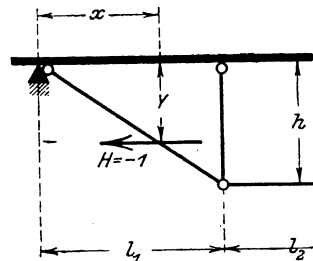


Abb. 104.



### 3. Die Verschiebung $\delta_{ma}$ .

Die  $\delta_{ma}$ -Linie berechnet sich als die Biegelinie des einfachen Balken mit der Stützweite  $l$  für den Belastungszustand  $H = -1$ .

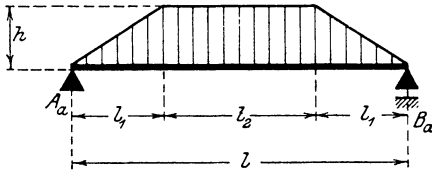


Abb. 105.

In der Abb. 105 ist die Momentenfläche aus diesem Belastungszustand gezeichnet. Die Ordinaten der Biegelinie ermitteln sich nun als die Momente des mit dieser Momentenfläche belasteten einfachen Balkens.

Es ist

$$A_a = B_a = \frac{l_1 h}{2} + \frac{l_2 h}{2} = \frac{h}{2} (l_1 + l_2).$$

Für  $x$  in den Grenzen 0 und  $l_1$  wird nun

$$\delta_{ma}^{x < l_1} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{h}{2} (l_1 + l_2) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \frac{h}{l_1} \cdot \frac{x}{3} \right]$$

oder

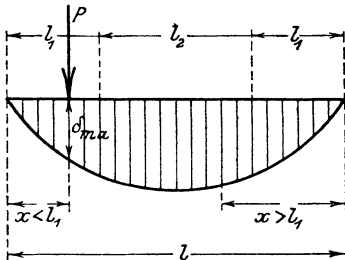
$$\delta_{ma}^{x < l_1} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{x}{l} \frac{hl}{2} (l_1 + l_2) - \frac{x^3}{l^3} \frac{h \cdot l^3}{6 l_1} \right] \dots \dots \dots 93)$$

Für  $x$  in den Grenzen  $l_1$  und  $\frac{l}{2}$  ist

$$\delta_{ma}^{x > l_1} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{h}{2} (l_1 + l_2) x - \frac{l_1 h}{2} \frac{3x - 2l_1}{3} - \frac{h(x - l_1)^2}{2} \right]$$

oder

$$\delta_{ma}^{x > l_1} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{x}{l} \cdot \frac{hl^2}{2} - \frac{x^2}{l^2} \frac{hl^2}{2} - \frac{hl_1^2}{6} \right] \dots \dots \dots 94)$$



$\delta_{ma}$ -Linie.

Abb. 106.

Aus diesen Werten kann man die  $\delta_{ma}$ -Linie berechnen, und es ergibt sich dann aus

$$H = P \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

der Wert für die Spannkraft in der Zugstange.

Die von der  $\delta_{ma}$ -Linie begrenzte Fläche ist

$$F_1 = \int \delta_{ma}^{x < l_1} \cdot dx = \frac{hl^2}{12 EJ} (5 l_1 + 6 l_1)$$

und

$$F_2 = \int \delta_{ma}^{x < l_1} \cdot dx = \frac{hl^3}{12 EJ} \left( 1 - 8 \frac{l_1^2}{l^2} + 8 \frac{l_1^3}{l^3} \right)$$

und somit ist der gesamte Inhalt der  $\delta_{ma}$ -Fläche

$$F_{ma} = \frac{hl^3}{12 EJ} \left( 1 + \frac{l_1^3}{l^3} - 2 \frac{l_1^2}{l^2} \right) \dots \dots \dots 95)$$

#### 4. Die Einflußlinie für $H$ .

In den meisten Fällen der praktischen Aufgaben werden  $l_1$  und  $l_2$  in einem einfachen Verhältnis zur Stützweite  $l$  stehen, und es vereinfachen sich dann die unter 2. und 3. berechneten Formeln sehr wesentlich; für das Verhältnis  $l_1 = l_2 = \frac{l}{3}$  ist z. B.

$$\delta_{ma}^{x < \frac{l}{3}} = \frac{hl^2}{2 EJ} \left( \frac{2}{3} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right)$$

und

$$\delta_{ma}^{x > \frac{l}{3}} = \frac{hl^2}{2 EJ} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{27} \right).$$

Es ist weiter

$$\delta_{aa} = \frac{5}{9} \cdot \frac{h^2 l}{EJ} + \frac{l}{EF} + \frac{2}{3} \frac{l}{\cos^3 \alpha \cdot EF_1} + \frac{l}{3 EF_2}$$

und

$$F_{ma} = \frac{11}{162} \frac{hl^3}{EJ}.$$

Mit diesen Werten erhält man zur Berechnung der  $H$ -Linie einfache Ausdrücke.

Für überschlägige Rechnungen kann man in der Gleichung für  $\delta_{aa}$  den Einfluß der Normalkraft und der Spannstangenkräfte vernachlässigen. Für das Verhältnis  $l_1 = l_2 = \frac{l}{3}$  wird

$$\delta_{aa} = \frac{5}{9} \cdot \frac{h^2 l}{EJ}.$$

Die Ordinaten der  $H$ -Linie berechnen sich dann zu

$$H^{x < \frac{l}{3}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{l}{h} \left( \frac{2}{3} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right)$$

und

$$H^{x > \frac{l}{3}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{l}{h} \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{27} \right).$$

Für dieses Verhältnis  $\frac{l}{3}$  ist der Inhalt der von der  $H$ -Linie begrenzten Fläche

$$F_H = \frac{11 \cdot 9}{162 \cdot 5} \frac{h l^3}{h^2 l} = \frac{11}{90} \cdot \frac{l^2}{h} = \text{rd } \frac{1}{9} \cdot \frac{l^2}{h}.$$

Für das Verhältnis  $l_1 = \frac{l}{4}$ ;  $l_2 = \frac{2}{4} l$  wird

$$F_{ma} = \frac{57}{768} \cdot \frac{h l^3}{EJ}$$

und

$$\delta_{aa} = \frac{2}{3} \frac{h^2 l}{EJ}.$$

Dann ist

$$F_H = \frac{57}{512} \cdot \frac{l^2}{h} = \text{rd } \frac{1}{9} \frac{l^2}{h}.$$

Für die Verhältnisse  $\frac{l_1}{l} = \frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{4}$  ist der Inhalt der von der  $H$ -Linie begrenzten Fläche genau genug mit  $\frac{1}{9} \frac{l^2}{h}$  berechnet.

Diesen Wert kann man für die meisten Konstruktionen dieser Art anwenden.

Für den Fall einer gleichmäßig verteilten Last  $Q$  ist

$$H = \frac{Q}{9} \cdot \frac{l}{h}$$

und das Biegemoment in der Balkenmitte

$$M_m = \frac{Ql}{8} - \frac{Ql}{9} = \frac{Ql}{72}.$$

Hat man mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen die  $H$ -Linie berechnet und aus dieser die Spannkraft  $H$  bestimmt, so müßte man dann mit den auf Grund dieser Rechnung ermittelten Querschnitten der Konstruktion den genauen Wert für  $H$  bestimmen und die wirklichen Beanspruchungen der Querschnitte untersuchen. Diesen zweiten Rechnungsgang kann man vermeiden, indem man die auf Grund der Näherungsformeln bestimmten Werte für  $H$  um etwa  $10 \div 15\%$  ihres Wertes verringert oder genau genug mit  $0,9 \div 0,85$  multipliziert; hierdurch wird der Einfluß der Normalkräfte und Spannstanzenquerschnitte genau genug berücksichtigt. Das Biegemoment in einem Querschnitt des Balkens ist

$$M_x = M_{0x} - H \cdot y$$

oder

$$M_x = M_{0x} - H \cdot h$$

sofern  $x$  innerhalb oder außerhalb von  $l_1$  liegt. Es empfiehlt sich, die Momente auf die Kernpunkte des Balkenquerschnitts zu beziehen. Bei der Bemessung der Konstruktion muß untersucht werden, ob der Balken knicksicher ist.

## XI. Der Eingelenkbalken auf 4 Stützen.

### 1. Erklärungen.

In der Abb. 107 sind zwei Kragträger gezeichnet, welche im Punkte  $a$  durch ein Gelenk miteinander verbunden sind. Durch die Gelenkverbindung der beiden überkragenden Balkenteile  $l_1$  wird das System einfach statisch unbestimmt.

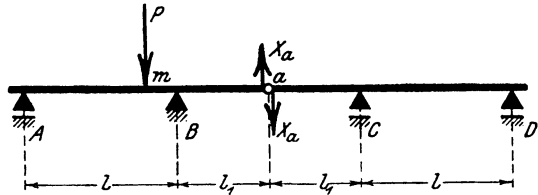


Abb. 107.

Bezeichnet man die Gelenkreaktion mit  $X_a$ , so berechnet sich diese aus

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$



Für das ganze System ist nun

$$\delta_{aa} = 2 \left( \frac{l_1^2 l}{3 EJ} + \frac{l_1^3}{3 EJ} \right)$$

oder

$$\delta_{aa} = \frac{2}{3} \frac{l_1^3}{EJ} \left( 1 + \frac{l}{l_1} \right) \dots \dots \dots 96)$$

### 3. Die $\delta_{ma}$ -Linie.

Die  $\delta_{ma}$ -Linie ist die Biegelinie für den Belastungszustand  $X_a = -1$ , wie in der Abb. 108 gezeichnet. Es ist, bezeichnet man die Durchbiegungen mit  $y$ , im Gebiet  $l_1$

$$y_1 = y' + \alpha (l_1 - x_1)$$

und im Gebiet  $l$

$$y = \alpha (l - x) - y''.$$

Es sind nun aber  $y'$  und  $y''$  die Durchbiegungen von Freitragern mit den Längen  $l_1$  und  $l$ , welche mit den Einzellasten  $X_a = -1$  und  $\frac{l_1}{l}$  belastet sind.

Die Durchbiegungen dieser Freitragere berechnen sich aus

$$y' = \frac{l_1^3}{6 EJ} \left( 2 - 3 \frac{x_1}{l_1} + \frac{x_1^3}{l_1^3} \right)$$

und

$$y'' = \frac{l_1 l^2}{6 EJ} \left( 2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Weiter ist nach Abb. 108

$$\alpha \cdot l - \frac{l_1}{l} \cdot \frac{l^3}{3 EJ} = 0$$

und hieraus folgt

$$\alpha = \frac{l l_1}{3 EJ}.$$

Mit vorstehenden Werten sind die Ordinaten der  $\delta_{ma}$ -Linie bestimmt; es ist

$$\delta_{m_1 a} = \frac{l_1^3}{6 EJ} \left( 2 - 3 \frac{x_1}{l_1} + \frac{x_1^3}{l_1^3} \right) + \frac{l \cdot l_1}{3 EJ} (l_1 - x_1)$$

oder

$$\delta_{m_1 a} = \frac{l_1^3}{6 EJ} \left[ 2 + 2 \frac{l}{l_1} - \frac{x_1}{l_1} \left( 3 + 2 \frac{l}{l_1} \right) + \frac{x_1^3}{l_1^3} \right] \dots 97)$$

und

$$\delta_{ma} = \frac{l_1 l^2}{6 EJ} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) \dots 98)$$

Die  $\delta_{ma}$ -Linie ist in der Abb. 109 gezeichnet.

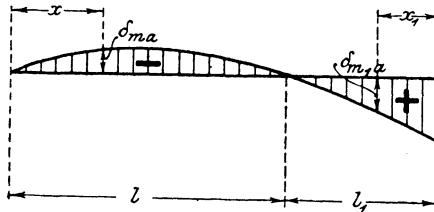


Abb. 109.

#### 4. Die Einflußlinie für $X_a$ .

Aus der Beziehung

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

erhält man Gleichung der Einflußlinie für  $X_a$ , indem man die  $\delta_{ma}$  durch die  $\delta_{aa}$  dividiert. Hieraus erhält man

$$\eta = \frac{l_1}{4(l_1 + l)} \left[ 2 + 2 \frac{l}{l_1} - \frac{x_1}{l_1} \left( 3 + 2 \frac{l}{l_1} \right) + \frac{x_1^3}{l_1^3} \right] \dots 98^a)$$

und

$$\eta = \frac{l^2}{4 l_1 (l_1 + l)} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) \dots 99)$$

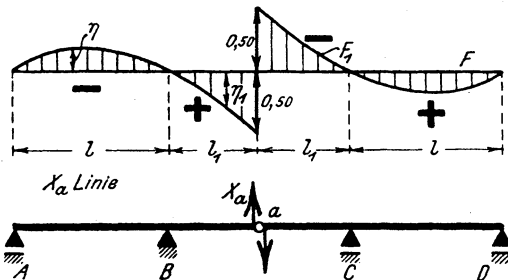


Abb. 110.

Der Inhalt der von der  $X_a$ -Linie begrenzten Fläche ist

$$F = \int_0^l \eta dx = \frac{l^3}{16 l_1 \cdot (l_1 + l)}$$

und

$$F_1 = \int_0^{l_1} \eta_1 dx = l_1 \frac{3l_1 + 4l}{16(l_1 + l)}.$$

**5. Belastung durch gleichmäßig verteilte Last.**

Für eine gleichmäßig verteilte Last  $q$  ist

$$X_a = \int q \eta \cdot dx = q \cdot \int \eta dx.$$

Es ist für die Öffnung  $l$

$$X_a = \pm Q \cdot \frac{l^2}{16 l_1 (l_1 + l)} \dots \dots \dots 100)$$

Wird die Öffnung  $l_1$  belastet, so ist

$$X_a = \pm Q \cdot \frac{3l_1 + 4l}{16(l_1 + l)} \dots \dots \dots 101)$$

Für Vollbelastung wie für jede symmetrische Belastung des Balkens wird  $X_a = 0$ , und die Konstruktion verhält sich wie ein einfacher Balken von der Stützweite  $l$  mit einem überkragenden Teil  $l_1$ .

**6. Die Einflußlinie für das Moment  $M_m$  in der Öffnung  $l$ .**

Das Biegemoment in einem Querschnitt  $m$  der Öffnung  $l$  ist

$$M_m = M_{om} - X_a M_a$$

und mit

$$M_a = - \frac{l_1}{l} \cdot x$$

wird es

$$M_m = M_{om} + \frac{l_1}{l} \cdot x X_a$$

oder

$$M_m = \frac{l_1}{l} \cdot x \left( \frac{l}{l_1 x} \cdot M_{om} + X_a \right) \dots \dots \dots 102)$$

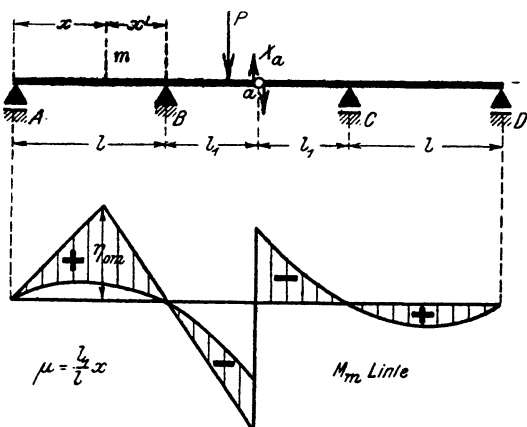


Abb. 111.



Aus der Formel 102) folgt die Konstruktion der Einflußlinie für  $M_m$ .

In der Öffnung  $l$  wird zu der  $\frac{l}{l_1 x} M_{om}$ -Linie des einfachen Balkens die  $X_a$ -Linie addiert. Die Ordinate der  $\frac{l}{l_1 x} M_{om}$ -Linie im Querschnitt  $m$  ist

$$\eta_{om} = \frac{l}{l_1 x} \cdot \frac{x \cdot x^1}{l} = \frac{x^1}{l_1}.$$

Für die linke Öffnung  $l_1$  erhält man die Einflußlinie für  $M_m$ , indem man die  $\frac{l}{l_1} \cdot x \cdot M_{om}$ -Linie über  $l$  hinaus verlängert und wieder die  $X_a$ -Linie dazu addiert. Diese Konstruktion der  $M_m$ -Linie ist in der Abb. 111 ausgeführt. Der Multiplikator der  $M_m$ -Linie ist  $\mu = \frac{l_1}{l} \cdot x$ . In den beiden anderen Öffnungen ist die  $X_a$ -Linie mit dem Multiplikator  $\mu = \frac{l_1}{l} \cdot x$  Einflußlinie für das Moment  $M_m$ .

### 7. Die Einflußlinie für die Auflagerreaktion $A$ .

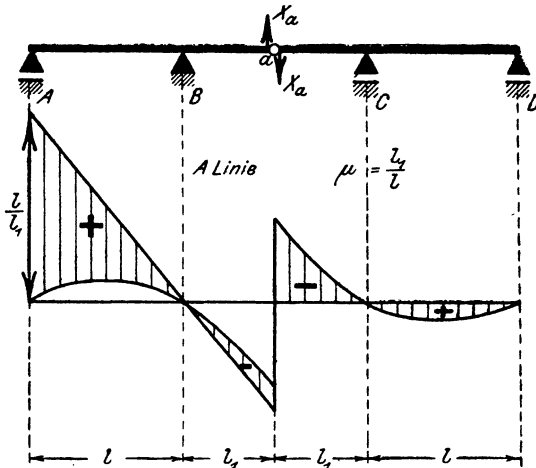


Abb. 112.

Für den linken Träger ist

$$A = A_0 - \frac{l_1}{l} X_a$$

oder

$$A = \frac{l_1}{l} \left( \frac{l}{l_1} \cdot A_0 - X_a \right) \quad . \quad 103)$$

Für Lasten, die sich rechts vom Gelenk befinden, ist

$$A = \pm \frac{l_1}{l} \cdot X_a \quad 104)$$

Aus den Formeln 103) und 104) folgt die Konstruktion der  $A$ -Linie, wie diese in der Abb. 112 dargestellt ist. Für den linken Trägerteil wird von der  $\frac{l_1}{l} \cdot A_0$ -Linie die  $X_a$ -Linie subtrahiert, und ist hierbei die  $X_0$ -Linie die Einflußlinie für die Auflagerreaktion  $A_0$  eines einfachen Balkens von der Stützweite  $l$  und mit dem überkragenden Teil  $l_1$ . Der Multiplikator ist  $\mu = \frac{l_1}{l}$ .

Für den rechten Trägerteil ist die  $\frac{l_1}{l} \cdot X_a$ -Linie Einflußlinie für die Auflagerreaktion  $A$ .

## XII. Der Einfluß der Wärmeänderung.

### Erklärungen.

Bei den Untersuchungen in den vorstehenden Abschnitten wurde bei allen Systemen eine gleichbleibende Anfangstemperatur angenommen.

Während nun bei den statisch bestimmten Konstruktionen eine Wärmeänderung ohne Einfluß auf die äußeren Kräfte bleibt und auch in den meisten Fällen ohne Einfluß auf die inneren Kräfte ist, und zwar so lange, als sich durch Einwirkung der Temperatur die Abmessungen der Konstruktion nicht erheblich ändern, beeinflußt bei den statisch unbestimmten Systemen jede Temperaturänderung auch die statisch unbestimmten Kräfte. Eine Veränderung der statisch unbestimmten Kräfte bewirkt nun aber auch wieder eine Veränderung der ganzen übrigen Kräfte des Systems, und es ist somit notwendig, die durch Wärmeänderung hervorgerufenen Kräfte zu untersuchen und ihren Einfluß auf die Spannungen in den einzelnen Querschnitten eines Systems zu berechnen.

Die Wärmeänderung wirkt bei den statisch unbestimmten Systemen wie eine Belastung, und es ist daher für diesen Belastungszustand, bezeichnet man die gedachte Verschiebung aus der Temperaturänderung mit  $\delta_{at}$ ,

$$1 \cdot \delta_{at} = \int N_a \epsilon t \cdot ds + \int M_a \frac{\Delta t}{v} \epsilon ds + \sum S_a \epsilon t \cdot s.$$

Die allgemeinen Elastizitätsgleichungen haben die Form

$$\delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} \cdot \cdot \cdot + \delta_{at}$$

und so fort.

Setzt man  $\delta_a, \delta_b \cdot \cdot$  gleich Null, so ist für ein einfach statisch unbestimmtes System

$$X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\delta_{ab}}$$

und für ein zweifach unbestimmtes System ist

$$X_{at} = \frac{\delta_{bb} \delta_{at} - \delta_{ab} \delta_{bt}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

und

$$X_{bt} = \frac{\delta_{aa} \delta_{at} - \delta_{ab} \delta_{at}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$