

Veröffentlichungen des Königlich Preussischen Meteorologischen Instituts

Herausgegeben durch dessen Direktor

G. Hellmann

Nr. 236

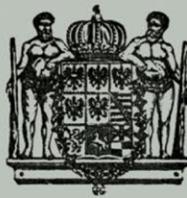
Abhandlungen Bd. IV. Nr. 2.

**Theoretische Betrachtungen über den Bau der
wandernden Zyklonen und über die Strömungs-
linien der Luft in ihnen**

Von

O. Kiewel

Mit vierzehn Abbildungen im Text



Berlin 1911
Behrend & Co.

Preis 3 *M*

Veröffentlichungen des Königlich Preussischen Meteorologischen Instituts

Herausgegeben durch dessen Direktor

G. Hellmann

Nr. 236

Abhandlungen Bd. IV. Nr. 2.

**Theoretische Betrachtungen über den Bau der
wandernden Zyklonen und über die Strömungs-
linien der Luft in ihnen**

Von

O. Kiewel

Mit vierzehn Abbildungen im Text



1911

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Preis 3 *M*

ISBN 978-3-662-22984-2 ISBN 978-3-662-24929-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-24929-1

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	5
I. Geometrische Entwicklung von Differentialgleichungen über die Luftbewegung . . .	6
II. Abhängigkeit der Witterung von horizontaler Luftbewegung	9
III. Integration der Differentialgleichungen	12
IV. Einmaliger und wiederholter Umlauf um das Zyklonenzentrum. Über Luftteilchen, welche die rechte Zyklonenseite nicht verlassen	15
V. Zentrierte Zyklonen	19
VI. Zyklonale Systeme, in denen für die Luftbewegung die 3 Keplerschen Gesetze gelten	20
VII. Zweite Integration. Die Zeit als endliche Funktion der Phase	26
Schlußbemerkungen	34

Einleitung.

Man hat nicht mit Unrecht seit uralten Zeiten die Windfahne schlechtweg als Wetterfahne bezeichnet. Drängt sich doch jedem, der mit offenem Auge die Vorgänge in der Atmosphäre verfolgt, ohne weiteres die Wahrnehmung auf, daß man von seiner Wohnstube aus, ohne ein Fenster zu öffnen, allein aus der Stellung der Windfahne am Hause des Nachbarn erkennen kann, was draußen für Wetter ist. Ja auch die Darstellung des Klimas eines Ortes gestaltet sich besonders übersichtlich, wenn man in eine Windrose für jeden Kompaßstrich die zugehörigen Mittelwerte der einzelnen klimatologischen Elemente einträgt und die Endpunkte verbindet. Man hat auf diese Weise Windrosen für Temperatur, Feuchtigkeit und andere Elemente konstruiert. So ist es eine ganz alltägliche Erfahrung, daß der Nordostwind sich im Winter bei uns durch besondere Kälte und Trockenheit auszeichnet, und man findet das durchaus erklärlich, da er ja die Luft aus den kalten Nordländern herüberbringt. Doch das braucht nicht die einzige Ursache zu sein, denn fürs erste ist nicht anzunehmen, daß diese Luft auf dem kürzesten Wege aus dem Eismeere zu uns kommt. Sie wird vielmehr oft genug, vielleicht auch kontinuierlich, ihre Richtung geändert haben, und man müßte doch erst feststellen, wie lange sie sich in nördlichen Ländern aufgehalten hat und von wo aus sie dorthin gelangt ist. Wir wissen ferner, daß die Luft auf ihrem Wege ihren Zustand fortwährend in mannigfacher Weise verändert, wie dies besonders auffallend an den Föhnerscheinungen hervortritt. Einen hervorragenden Anteil an der Zustandsänderung der Luft nimmt ihre Ausdehnung und Zusammendrückung ein. Denn dadurch ändert sich nicht allein ihre Temperatur, sondern auch ihre relative Feuchtigkeit, und so hängt auch die Wolken- und Niederschlagsbildung hiervon ab. Bei den Föhnerscheinungen handelt es sich hauptsächlich um auf- und abwärts gehende Luftbewegungen, und deshalb beschäftigen sich die thermodynamischen Untersuchungen vorzugsweise mit den vertikalen Luftströmungen und ihrem Einfluß auf die Niederschlagsbildung. Doch auch die horizontale Strömung darf in dieser Hinsicht durchaus nicht vernachlässigt werden. Denn wenn eine Luftmasse aus Gegenden, in denen der Luftdruck 770 mm ist, nach langem Wege an einen Ort gelangt, wo ein niedrigerer Druck von vielleicht 730 mm herrscht, so wird sie dabei eine ebenso große Ausdehnung erfahren, als wenn sie um 450 m in die Höhe steigt. Die Länge des inzwischen zurückgelegten Weges sowohl wie die verbrauchte Zeit ist hierbei ganz gleichgültig. Überdies ist die vertikale Geschwindigkeitskomponente der Luftströmung

so verschwindend klein, daß die Zeit, welche erforderlich ist, um durch horizontale Strömung die gleiche Verdünnung zu erzielen, wie durch vertikale, von derselben Größenordnung sein dürfte. (Siehe ein Beispiel in Sprungs Lehrbuch, S. 149.)

Aus den vorstehenden Erörterungen dürfte zur Genüge erhellen, wie sehr es erwünscht wäre, eine gegebene Luftmasse auch in horizontaler Richtung beliebig weit verfolgen zu können. Trotzdem hat man sich mit dieser Aufgabe bisher so gut wie gar nicht beschäftigt¹⁾. Zwar ist aus den theoretischen Untersuchungen hervorgegangen, und der Anblick fast jeder Wetterkarte bestätigt es, daß in stationären Windsystemen die Luft sich in logarithmischen Spiralen bewegt. Derartige Windsysteme gehören aber zu den Seltenheiten. Vergleicht man vielmehr die Wetterkarten mehrerer aufeinander folgender Beobachtungstermine, so findet man, daß die Zyklonen ihre Lage geändert haben, und es gelingt fast immer, den Weg des Zentrums unzweideutig anzugeben, besonders wenn man außerdem noch die kontinuierlichen Aufzeichnungen einiger Stationen mit Barographen zur Verfügung hat. Es zeigt sich dabei, daß die Geschwindigkeit, mit der die Zyklonen wandern, oft genug der Windgeschwindigkeit in den stärksten Orkanen gleichkommt, und es ist leicht einzusehen, daß, wenn die Windbahnen bei unveränderter Lage der Isobaren den logarithmischen Spiralen ähnlich sind, sie infolge der Verschiebung der Isobaren eine einschneidende Veränderung ihrer Natur und Form erfahren müssen.

Die Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, den wahren Weg der Luftmassen unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen, welche annähernd häufig erfüllt sind, mit Hilfe der mathematischen Analyse zu entwickeln. Im Anschluß hieran sollen die gewonnenen Resultate benutzt werden, einerseits um die Witterungsunterschiede innerhalb wandernder Zyklonen zu erklären, andererseits, um über die Natur zyklonaler Bewegungen einigen Aufschluß zu gewinnen. Das einzuschlagende Verfahren wird darin bestehen, daß zunächst die Differentialgleichungen aufgestellt werden, durch welche die auf das jeweilige Zentrum und die Zugrichtung der Zyklone bezogene Lage, Bewegungs-Richtung und Geschwindigkeit eines Luftteilchens miteinander verknüpft werden. Im Anschluß hieran wird gezeigt werden, inwiefern durch die eine der erhaltenen Differentialgleichungen die Witterungsverhältnisse in den Zyklonen dargestellt werden. Eine erstmalige Integration führt sodann auf eine Gleichung, durch welche die Bahn eines Luftteilchens relativ zum Zentrum und zur Zugrichtung der Zyklone bestimmt wird und mit deren Hilfe wir die Frage nach der Verwandtschaft der zyklonalen Luftbewegung und der Planetenbewegung erörtern können. Durch abermalige Integration dieser letzteren Gleichung wird endlich diejenige Gleichung gewonnen, welche die Bahn eines Luftteilchens relativ zur Erdoberfläche anzugeben gestattet.

I. Geometrische Entwicklung von Differentialgleichungen über die Luftbewegung.

Wir wenden uns nunmehr zur Aufstellung der grundlegenden Differentialgleichungen. Einen Versuch nach dieser Richtung hin hat bereits Ferrel unternommen. Dieser dachte sich die Gesamtbewegung in ihre zwei Komponenten zerlegt, nämlich in die zentripetal rotierende Be-

¹⁾ So sagt auch Werner von Siemens in einer Abhandlung: Über das allgemeine Windsystem der Erde, Met. Zeitschr. September 1890: „Man kann hiernach als wichtigste Aufgabe der Wetterprognose die Erforschung der geographischen Herkunft der Luftströme bezeichnen, die auf ihren Wegen nach den Polen über uns fortziehen“.

wegung innerhalb des zyklonalen Windsystems und in die mit diesem System fortschreitende. Indem er von diesen Komponenten ausgehend durch Konstruktion zur Gesamtbewegung gelangen wollte, entwarf er jene Zeichnung, welche durch Sprungs Lehrbuch weiteren Kreisen bekannt geworden ist¹⁾. Nun ist aber nur die letztgenannte Komponente der direkten Beobachtung zugänglich, indem man nämlich aus den Wetterkarten den Weg des Zentrums ablesen kann. Ferrel mußte also für die andere Komponente willkürliche Annahmen machen, und es darf daher nicht wundernehmen, wenn die aus seiner Konstruktion resultierende Gesamtbewegung mit der beobachteten im Widerspruch steht.

Im Gegensatz zu Ferrel werden wir hier zum Ausgangspunkt unserer Untersuchung die Gesamtbewegung machen. Daraus erwächst uns der Vorteil, daß wir unsere Voraussetzung beliebig genau den beobachteten Tatsachen anpassen können. So wollen wir voraussetzen, daß ein unveränderliches System kreisförmiger, konzentrischer Isobaren mit einwärts gerichteten Gradienten sich geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortpflanze.

Den Ort eines Luftteilchens beziehen wir auf ein System Polarkoordinaten, dessen Pol in der Richtung der Polarachse sich fortschiebt. Wir bezeichnen mit

- r den Radius vector oder den Abstand eines Luftteilchens vom jeweiligen Zentrum der Zyklone,
- β die Neigung dieser Linie gegen die Fortpflanzungsrichtung des Zentrums; dieser Winkel, die Phase der Bewegung, wird auf der nördlichen Halbkugel von rechts nach links, und zwar von $-\infty$ bis $+\infty$ gezählt,
- h die Höhe des Luftteilchens über dem Erdboden,
- ψ den Ablenkungswinkel,
- v die Windgeschwindigkeit,
- c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Zyklone, insbesondere also diejenige ihres Zentrums,
- t die Zeit.

Denken wir uns nun das Zentrum in der Richtung von O nach X fortschreitend (Fig. 1) und verfolgen wir den Weg desjenigen Luftteilchens, welches sich zur Zeit t im Punkte P befindet. Zur selben Zeit liege das Zentrum in C, so daß $\sphericalangle PCX = \beta$. Wir erhalten in P' den Ort desselben Luftteilchens zur Zeit t + dt, wenn wir an den Radius vector CP = r unter dem Winkel ψ nach rechts hin die Strecke PP' = vdt antragen. Während der Zeit dt hat sich das Zentrum um die Strecke CC' = cdt verschoben, so daß zur Zeit t + dt der Radius vector C'P' = r + dr ist. Ferner ist $\sphericalangle P'C'X = \beta + d\beta$. Nun folgt aus dem allgemeinen Pythagoräischen Lehrsatz, daß

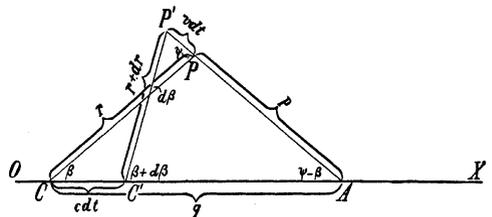


Fig. 1.

¹⁾ S. Sprung, Lehrbuch der Meteorologie, S. 245.

$$\overline{CP}^2 = r^2 + (v dt)^2 - 2 r v dt \cos \psi \dots \dots \dots (1)$$

und andererseits

$$\overline{CP}^2 = (r + dr)^2 + (c dt)^2 + 2 (r + dr) c dt \cos (\beta + d\beta) \dots \dots \dots (2)$$

Setzt man beide Werte für \overline{CP}^2 einander gleich, löst die Klammern auf und vernachlässigt alle Glieder, welche unendlich klein von zweiter oder höherer Ordnung sind, so erhält man

$$r^2 - 2 r v \cos \psi dt = r^2 + 2 r dr + 2 r c \cos \beta dt$$

oder

$$dr = -(v \cos \psi + c \cos \beta) dt \dots \dots \dots (I)$$

welches unsere erste Grundgleichung ist. Die zweite Grundgleichung erhalten wir durch Anwendung des Sinussatzes auf folgende Weise:

Im $\triangle APC'$ ist

$$\frac{p + v dt}{q - c dt} = \frac{\sin (\beta + d\beta)}{\sin (\psi + d\psi)},$$

also

$$\sin (\beta + d\beta) q - \sin (\beta + d\beta) c dt = \sin (\psi + d\psi) p + \sin (\psi + d\psi) v dt \dots \dots (3)$$

Ebenso ist im $\triangle APC$

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin \beta}{\sin \psi},$$

also

$$\sin \beta \cdot q = \sin \psi \cdot p \dots \dots \dots (4)$$

Löst man in (3) die Klammern auf, vernachlässigt die Glieder, welche unendlich klein von zweiter oder höherer Ordnung sind, und subtrahiert (4) von (3), so kommt

$$q \cos \beta d\beta - p \cos \psi d\psi = (v \sin \psi + c \sin \beta) dt \dots \dots \dots (5)$$

Nun ist nach dem Sinussatze noch

$$q = \frac{r \sin \psi}{\sin (\psi - \beta)} \quad \text{und} \quad p = \frac{r \sin \beta}{\sin (\psi - \beta)},$$

also

$$q \cos \beta - p \cos \psi = r.$$

Hiernach erhält man aus (5) die zweite Grundgleichung

$$r d\beta = (v \sin \psi + c \sin \beta) dt \dots \dots \dots (II)$$

Wir haben bei dieser Ableitung vorausgesetzt, daß die Bewegung in einer Ebene vor sich geht, einerseits, weil die so gewonnenen Gleichungen für die Integration besonders geeignet sind, andererseits, weil die Krümmung der Erdoberfläche so klein ist, daß sie für die Luftbewegung in den gewöhnlichen Zyklonen außer Betracht kommt.

Zur Abkürzung werden wir setzen

$$K = v \cos \psi + c \cos \beta$$

$$\Sigma = v \sin \psi + c \sin \beta,$$

unsere Grundgleichungen lauten hiermit

$$\begin{aligned} dr &= -K dt \\ r d\beta &= \Sigma dt. \end{aligned}$$

II. Abhängigkeit der Witterung von horizontaler Luftbewegung.

Die Grundformel (I) kann dazu dienen, die Verschiedenheit der Witterung an der Vorder- und an der Rückseite einer Zyklone in einen näheren Zusammenhang mit der Luftbewegung zu bringen. Diese Verschiedenheit besteht bekanntlich der Hauptsache nach darin, daß das, was wir als „schlechtes Wetter“ bezeichnen, nämlich übernormale relative Feuchtigkeit, bedeckter Himmel und vermehrte Niederschlagsbildung, nicht überall in der Zyklone gleichmäßig auftritt, sondern vorzugsweise auf ihrer vorderen Hälfte, während es bald nach dem Vorüberziehen einer Depression zum Aufklaren kommt und ein allmählicher Übergang zum „schönen Wetter“ stattfindet, oder mit anderen Worten: auf der Vorderseite besteht Neigung zur Kondensation des Wasserdampfes, auf der Rückseite besteht Neigung zur Auflösung der mitgeführten Wassertröpfchen.

Die Ursache der Kondensation ist nun stets in einer Abkühlung zu suchen; aber die Abkühlung der Luftmassen erfolgt nicht bloß, wenn ihnen Wärme entzogen wird, sondern ebensogut durch bloße Ausdehnung der Masse, vorausgesetzt, daß keine oder nicht genügende Wärme von der Umgebung zugeführt wird (adiabatische Ausdehnung). Ein Maß für die Ausdehnung gibt nun der Differentialquotient $\frac{db}{dt}$, wo b den Barometerstand bedeutet.

Dieser Quotient gibt eben die Zunahme des Druckes an, den eine Luftmasse in der Zeiteinheit erfährt. Ein negativer Wert desselben bedeutet, daß die Luftmasse während der Bewegung sich ausdehnt, ein positiver Wert zeigt an, daß die Luft zusammengedrückt wird. Da nun b eine Funktion von r und h ist, so hat man

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial b}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} = -K \frac{\partial b}{\partial r} + v_h \cdot \frac{\partial b}{\partial h}$$

Hierbei ist $\frac{dh}{dt} = v_h$ die vertikale Geschwindigkeitskomponente,

$\frac{\partial b}{\partial h}$ der vertikale barometrische Gradient (stets negativ, sowohl in Zyklonen, als in Antizyklonen).

Das letzte Glied obiger Gleichung, welches sich auf die vertikale Bewegung bezieht, ist also in Zyklonen stets negativ.

$\frac{\partial b}{\partial r}$ stellt den horizontalen barometrischen Gradienten vor (wenn man anstatt eines Äquatorgrades ein Meter als Einheit nimmt, so ist der Gradient $\text{III IIII} \cdot \frac{\partial b}{\partial r}$). Nun findet nicht nur in den unteren und mittleren, sondern nach v. Bezolds Ausführungen¹⁾ auch in den oberen Schichten eines jeden zyklonalen Windsystems eine Abnahme des Luftdrucks nach dem Zentrum hin statt, so daß $\frac{\partial b}{\partial r}$ überall in Zyklonen positiv ist. Daraus folgt, daß das Vorzeichen des vorletzten Gliedes obiger Gleichung, welches sich auf die horizontale Luftbewegung bezieht, nur von dem Faktor K abhängt. Dieser aber, welcher die Geschwindigkeit der Annäherung an das Zentrum angibt, erleidet einen Zeichenwechsel. K ist nämlich nur an denjenigen Stellen positiv, für welche

$$\cos \beta > -\frac{v}{c} \cos \psi.$$

¹⁾ Met. Zeitschr. 1891, Seite 244.

Das geschieht überall, wo $\cos \beta$ positiv ist, d. h. auf der ganzen Vorderseite der Zyklone. Außerdem kann es aber noch auf einem mehr oder weniger großen Teil der Rückseite gesehen, je nach dem Wert des Ablenkungswinkels ψ und des Verhältnisses der Geschwindigkeiten v und c .

In Fig. 2 ist dieses ganze Gebiet durch dunkle Schraffierung hervorgehoben (c die Lage des Zentrums, der Pfeil bezeichnet die Zugrichtung) und es ist $\psi = 60^\circ$, $c = v$ genommen. In diesem schraffierten Gebiet wird also tatsächlich eine Annäherung der Luftmassen an das Zentrum stattfinden, so daß der Quotient $\frac{db}{dt}$ sich aus zwei negativen Gliedern zusammensetzt

und das zyklonale „schlechte Wetter“ hier schon durch die horizontale Luftbewegung allein herbeigeführt wird. In dem nicht schraffierten Gebiete dagegen, nämlich in einem Teile der

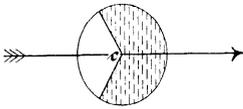


Fig. 2.

Rückseite der Zyklone, sind zwar die Luftmassen in einer nach dem Zentrum hin gerichteten Bewegung begriffen, das Zentrum selbst aber weicht einer Annäherung aus. Wäre also die Luftbewegung rein horizontal, so hätte man überall in dem nicht schraffierten Teile Aufklaren des Himmels zu erwarten. Da nun aber hier sowohl

wie in den übrigen Teilen der Zyklone eine aufwärts gerichtete Bewegungskomponente vorhanden ist, durch welche eine Expansion der Luft hervorgerufen wird, so treffen zwei verschiedene Bewegungsformen zusammen, welche den Zustand der Luft in entgegengesetztem Sinne zu beeinflussen streben. Wenn also die vertikale Bewegungskomponente nicht kräftig genug ist, so kann es in diesem Gebiet nicht mehr zur Niederschlagsbildung kommen.

Ein anschauliches Bild von diesen Verhältnissen gewinnt man mit Hilfe der isobarischen Flächen. Diese haben bekanntlich in Zyklonen die Gestalt flacher Schalen, welche man sich in einander gelegt denken kann, und welche ihre hohle Seite nach oben gerichtet haben. Denkt man sich nun eine Luftmasse sowohl als auch ein System solcher Flächen in einer derartigen Bewegung, daß das Zentrum sich immer weiter von der Luftmasse entfernt, so wird letztere nur dann ihren Zustand beibehalten, wenn sie stets auf derselben Fläche bleibt, also auf dieser Fläche sich in die Höhe hinaufarbeitet. Steigt die Luftmasse zu langsam in die Höhe, so gerät sie in eine darunter liegende Fläche, in welcher stärkerer Luftdruck herrscht, steigt sie aber besonders schnell, so dringt sie in eine weiter nach oben liegende Fläche, in welcher der Druck geringer ist.

Wir wollen nunmehr den Umfang des schraffierten Gebietes genauer bestimmen.

Für die Grenzen beider Gebiete ist:

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

das heißt:

$$\cos \beta = -\frac{v}{c} \cos \psi.$$

Diese Gleichung lehrt, daß, wenn die Luftbewegung in der Richtung der Isobaren geschieht ($\psi = 90^\circ$), von dem nicht schraffierten Gebiet genau die ganze hintere Hälfte der Zyklone eingenommen wird. Denn in diesem Falle ist $\cos \psi = 0$, also auch $\cos \beta = 0$ und $\beta = \pm 90^\circ$. Ist aber der Ablenkungswinkel ψ ein spitzer, die Bewegung also zentripetal, so wird die Grenze zwischen dem schraffierten und dem nicht schraffierten Gebiet durch zwei vom Zentrum

ausgehende Strahlen gebildet, welche symmetrisch zur Zugrichtung der Zyklone liegen. Dabei beschränkt sich das nicht schraffierte Gebiet auf die Rückseite der Zyklone; denn es ist $\cos \psi$ positiv und demzufolge $\cos \beta$ negativ. — Wenn dagegen die Bewegung zentrifugal ist, was in den oberen Schichten der Zyklone die Regel zu sein scheint, so ist ψ ein stumpfer Winkel, $\cos \psi$ negativ, $\cos \beta$ positiv, und es greift demnach das nicht schraffierte Gebiet auch noch auf die Vorderseite der Zyklone hinüber. Die Neigung zur Auflösung der Nebeltröpfchen wird also gerade in den von den Wolken eingenommenen Höhen sich besonders weit nach der Vorderseite der Zyklone hin erstrecken, woraus weiter folgt, daß auch auf der Vorderseite der Zyklone die obere Wolkengrenze über eine gewisse Höhe nicht hinaufsteigen kann.

Eine solche Zerlegung der Zyklone in diese beiden Gebiete ist jedoch nicht möglich, so lange die Geschwindigkeit c klein ist, weil alsdann $\cos \beta > 1$, also β imaginär wird. In diesem Falle hat man entweder, bei spitzem ψ , ringsum schraffiertes Gebiet, oder; bei stumpfem ψ , nirgends schraffiertes Gebiet. Erst, wenn c den Wert $\pm v \cos \psi$ erreicht, wird $\cos \beta = \pm 1$, und es beginnt nun ein schmaler Streifen längs der Bahn des Zentrums sich abzusondern, welcher, wenn ψ spitz ist, die Rückseite einnimmt und nicht schraffiert ist, während er bei stumpfem ψ auf der Vorderseite erscheint und schraffiert ist. Mit wachsendem c verbreitert sich dieser Streifen zu einem erst spitzen, nachher stumpfen Keile, welcher zuletzt, bei unendlich großem c , die ganze Hälfte der Zyklone einnimmt.

Ein Beispiel wird zeigen, welche Größe an manchen Stellen einer Zyklone die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit erreichen muß, bevor Kondensation eintreten kann. Für den Grenzfall nämlich, in welchem weder Verdichtung noch Verdünnung der Luft stattfindet, ist

$$\frac{db}{dt} = 0.$$

Setzt man dies in die Gleichung

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial b}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

ein, und beachtet Gleichung I, so erhält man

$$v_h = \frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial b}{\partial r} : \frac{\partial b}{\partial h} \right) \cdot K.$$

Betrachtet man also den Fall

$$\psi = 90^\circ,$$

so muß

$$v_h = \left(\frac{\partial b}{\partial r} : \frac{\partial b}{\partial h} \right) c \cos \beta$$

werden, welche Größe auf der ganzen Rückseite der Zyklone positiv ist. Nimmt man nun an, daß an der Erdoberfläche die Isobaren von 5 zu 5 mm um zwei Meridiangrade von einander abstehen, so entspricht dies in horizontaler Richtung einer Druckdifferenz von 1 mm auf 44000 m. Aus der barometrischen Höhenformel folgt ferner in vertikaler Richtung 1 mm Druckdifferenz 11 m an der Erdoberfläche. Hieraus folgt, daß in der Nähe der Erdoberfläche

$$\frac{\partial b}{\partial r} : \frac{\partial b}{\partial h} = - \frac{11}{44000} = - \frac{1}{4000}$$

ist. Ferner ist leicht einzusehen, daß der Wert dieses Quotienten mit wachsender Seehöhe sich

nur sehr wenig ändert, indem $\frac{\partial b}{\partial r}$ nach oben fast genau in derselben Weise abnimmt, wie $\frac{\partial b}{\partial h}$. Es ist demnach für jede Höhe annähernd

$$v_h = -\frac{1}{4000} \cdot c \cos \beta.$$

c erreicht bei den Zyklonen Europas durchschnittlich den Wert 8 mps. Daraus folgt, daß für $\beta = 180^\circ$

$$v_h = \frac{8 \text{ m}}{4000} = \frac{8 \text{ mm}}{4} = 2 \text{ mm}$$

ist.

Man sieht also, daß längs der Bahn des Zentrums auf der Rückseite der Zyklone die vertikale Geschwindigkeitskomponente größer sein muß, als 2 mm/s, wenn noch Kondensation des Wasserdampfes oder Wolkenbildung eintreten soll.

III. Integration der Differentialgleichungen.

1. Wir wollen nunmehr die Integration unserer Differentialgleichungen vornehmen. Die Gleichungen (I) und (II) bilden ein System gleichzeitiger Differentialgleichungen zwischen drei unabhängigen veränderlichen Größen β , r und t. Indem wir (I) durch (II) dividieren, erhalten wir eine neue Gleichung:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{k}{\Sigma} d\beta \dots \dots \dots \text{(III)},$$

welche nur die beiden Veränderlichen r und β enthält und in welcher zur Abkürzung

$$\begin{aligned} K &= v \cos \psi + c \cos \beta \\ \Sigma &= v \sin \psi + c \sin \beta \end{aligned}$$

gesetzt ist. Um die Integration zu ermöglichen, setzen wir voraus, daß nicht nur c, sondern auch v und ψ durchaus konstant sind, also weder mit r noch mit β sich ändern. Dabei verdient hervorgehoben zu werden, daß insbesondere v bei der Integration mit vollem Recht als unabhängig von r betrachtet werden darf, obgleich man in der mathematischen Theorie der Zyklonen bisher von der Annahme ausgegangen ist, daß v mit r sich stetig ändert, so zwar, daß es in einer gewissen Entfernung vom Zentrum einen größten Wert erreicht und von hier sowohl nach außen wie nach innen hin abnimmt. Wenn man aber die Wetterkarten darauf hin durchmustert, so wird es schwer, auch nur eine Zyklone zu finden, bei welcher eine allmähliche Änderung der Geschwindigkeit deutlich hervortritt. Auch bei den 4 Zyklonen, welche in Sprungs Lehrbuch ausgewählt sind, um das von Oberbeck berechnete Zahlenbeispiel mit den Tatsachen zu vergleichen, geschieht der Übergang von schwachen zu stürmischen Winden fast plötzlich, so daß der Vergleich auf die Druckverteilung beschränkt bleiben mußte¹⁾. Das Gleiche ergibt sich auch aus einer Arbeit des Herrn Kaßner über kreisähnliche Zyklonen, in welcher 59 Zyklonen untersucht sind, von denen 29 vollständig über dem Lande und 30 gänzlich über dem Meere lagerten. Hierbei hat Herr Kaßner für die einzelnen Zonen folgende Geschwindigkeiten gefunden²⁾:

¹⁾ Sprung, Lehrbuch S. 150; vergl. auch daselbst auf Taf. VI die Zyklone vom 25. Oktober 1882.
²⁾ Kaßner, Über kreisähnliche Zyklonen, Inaugural-Dissertation, S. 16.

Abstand vom Zentrum	0—222 km	222—444 km	444—666 km	666—888 km
Windstärke für Land-Zyklonen .	4.1	3.7	3.8	3.0
» » Meer- » .	7.2	6.9	6.6	6.6

Diese Zahlen sprechen dafür, daß eine beachtenswerte Änderung der Windgeschwindigkeit nur da auftritt, wo ein Übergang der Luft vom Meer auf das Festland oder vom Festland auf das Meer stattfindet, während hingegen der Abstand der Luft vom Zentrum der Zyklone kaum einen Einfluß auf die Windgeschwindigkeit besitzt, selbst wenn das betrachtete Gebiet eine Ausdehnung hat, deren Durchmesser etwa der Luftlinie zwischen Christiania und Genua gleichkommt.

Da wir also die Größen c , v und ψ als konstant voraussetzen dürfen, sind in Gl. (III) die Variablen getrennt und die Integration ist ohne weiteres ausführbar. Wir geben der Gl. (III) die Form:

$$\frac{dr}{r} = - \frac{v \cos \psi d\beta}{\Sigma} - \frac{c \cos \beta d\beta}{\Sigma}$$

oder besser

$$\frac{dr}{r} + \frac{cd(\sin \beta)}{\Sigma} = - \frac{v \cos \psi d\beta}{\Sigma}$$

Das Integral der linken Seite ist $= l(r\Sigma)$.

Um die rechte Seite zu integrieren, setzen wir nach dem üblichen Verfahren

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = x,$$

wodurch

$$d\beta = \frac{2 dx}{1+x^2}$$

und

$$\sin \beta = \frac{2x}{1+x^2},$$

also

$$\Sigma = \frac{v \sin \psi (1+x^2) + 2cx}{1+x^2}$$

und demnach

$$\frac{d\beta}{\Sigma} = \frac{2 dx}{v \sin \psi (1+x^2) + 2cx}$$

wird. Indem wir nun den Nenner in Faktoren zerlegen, finden wir

$$v \sin \psi (1+x^2) + 2cx = \frac{(v \sin \psi \cdot x + c + \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \psi})(v \sin \psi \cdot x + c - \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \psi})}{v \sin \psi}$$

oder kürzer

$$v \sin \psi (1+x^2) + 2cx = \frac{(\Gamma + A)(\Gamma - A)}{v \sin \psi},$$

wenn zur Abkürzung

$$A = \sqrt{c^2 - v^2 \sin^2 \psi},$$

$$\Gamma = v \sin \psi \cdot x + c$$

gesetzt wird. Wir beachten, daß

$$d\Gamma = v \sin \psi dx$$

und

$$\Sigma = \frac{\Gamma^2 - A^2}{v \sin \psi (1+x^2)} = \frac{\Gamma^2 - A^2}{v \sin \psi} \cos^2 \frac{\beta}{2} \dots \dots \dots (6)$$

wird, und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{\Sigma} &= \frac{2 v \sin \psi dx}{(\Gamma + A)(\Gamma - A)} = \frac{2 d\Gamma}{(\Gamma + A)(\Gamma - A)} = \left(-\frac{1}{\Gamma + A} + \frac{1}{\Gamma - A} \right) \frac{d\Gamma}{A} \\ -\frac{d\beta}{\Sigma} &= \left(\frac{1}{\Gamma + A} - \frac{1}{\Gamma - A} \right) \frac{d\Gamma}{A} \\ -\int \frac{d\beta}{\Sigma} &= \frac{1}{A} \ln \left(\frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} \right). \end{aligned}$$

Es ergibt sich nunmehr die folgende Integralgleichung:

$$l(r\Sigma) = \frac{v \cos \psi}{A} l\left(\frac{\Gamma + A}{\Gamma - A}\right) + l(C)$$

oder

$$r\Sigma = C \left(\frac{\Gamma + A}{\Gamma - A}\right)^B \dots \dots \dots (IV),$$

wenn

$$B = \frac{v \cos \psi}{A}$$

gesetzt wird.

2. Ist nun aber

$$c = v \sin \psi, \text{ so wird } A = 0$$

und das vorstehende Integrationsverfahren führt zu keinem Resultat. Alsdann ist aber

$$\frac{d\beta}{\Sigma} = \frac{2 d\Gamma}{\Gamma^2}$$

$$- \int \frac{d\beta}{\Sigma} = \frac{2}{\Gamma} = \frac{2}{v \sin \psi (r+x)} = \frac{2}{c(r+x)}$$

(Es sei bemerkt, daß

$$x = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \beta}{1 + \cos \beta}} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta}$$

und das Integral unserer Differentialgleichung wird in diesem Falle

$$l(r\Sigma) = \frac{2 v \cos \psi}{v \sin \psi (r+x)} + l(C_1)$$

oder

$$r\Sigma = C_1 e^y \dots \dots \dots (V),$$

wenn

$$y = \frac{2}{\operatorname{tg} \psi (r+x)}$$

gesetzt wird. In diesem Falle ist

$$\Sigma = v \sin \psi (r + \sin \beta) = c (r + \sin \beta).$$

3. Wenn

$$c < v \sin \psi,$$

so wird

$$A = \sqrt{-(v^2 \sin^2 \psi - c^2)} = \sqrt{-1} A_1,$$

worin

$$A_1 = \sqrt{v^2 \sin^2 \psi - c^2}$$

gesetzt ist und man hat

$$\frac{d\beta}{\Sigma} = \frac{2 d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} = \frac{2 d\Gamma}{A_1^2 + \Gamma^2} = \frac{2 d\left(\frac{\Gamma}{A_1}\right)}{A_1 \left(1 + \left(\frac{\Gamma}{A_1}\right)^2\right)},$$

also

$$\int \frac{d\beta}{\Sigma} = \frac{2}{A_1} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{A_1}$$

und das Integral unserer Differentialgleichung wird in diesem Falle

$$l(r\Sigma) = -\frac{2 v \cos \psi}{A_1} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{A_1} + l(E)$$

oder kürzer

$$r\Sigma = E e^{Pz}$$

oder allgemein

$$r\Sigma = E e^{Pn \cdot 2\pi e^{Pz}} = E e^{Pz} (e^{2 P \pi})^n \dots \dots \dots (VI),$$

wenn

$$P = -\frac{v \cos \psi}{A_1}$$

$$z = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{A_1}$$

gesetzt wird und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Es mag noch bemerkt werden, daß sich die Gl. (IV) und (VI) leicht in einander überführen lassen, wenn man von den Beziehungen zwischen imaginären Größen Gebrauch macht, sowie auch, daß Gl. (V) sich aus (IV) ableiten läßt, wenn man beachtet, daß $(1 + \frac{u}{m})^m = e^u$ wird, wenn $m = \infty$ wird.

Man kann nämlich Gl. (IV) auch so schreiben:

$$r\Sigma = C \left(1 + \frac{2A}{\Gamma - A}\right)^B = C \left(1 + \frac{2v \cos \psi : B}{\Gamma - v \cos \psi : B}\right)^B$$

oder

$$r\Sigma = C \left(1 + \frac{2v \cos \psi : \Gamma}{B - v \cos \psi : \Gamma}\right)^{(B - v \cos \psi : \Gamma) + v \cos \psi : \Gamma}$$

und diese Gleichung verwandelt sich sofort für $c = v \sin \psi$ in die Gl. (V), weil alsdann $B = \infty$,

also

$$\left(1 + \frac{2v \cos \psi : \Gamma}{B - v \cos \psi : \Gamma}\right)^{B - v \cos \psi : \Gamma} = e^{2v \cos \psi : \Gamma}$$

und

$$\left(1 + \frac{2v \cos \psi : \Gamma}{B - v \cos \psi : \Gamma}\right)^{v \cos \psi : \Gamma} = 1$$

wird.

IV. Einmaliger und wiederholter Umlauf um das Zyklonenzentrum.

Über Luftteilchen, welche die rechte Zyklonenseite nicht verlassen.

Mit Hilfe der Gl. (IV), (V) und (VI), welche die Beziehungen zwischen den Größen r und β darstellen, sind wir imstande, von derjenigen Kurve eine Vorstellung zu gewinnen, welche die Luftmassen um das Zentrum der Zyklone beschreiben. Die Kenntnis dieser Kurve kann weiter dazu benutzt werden, die gegenseitige Bewegung der Luftmassen zueinander zu verfolgen. Es mag aber nochmals hervorgehoben werden, daß wir die Geschwindigkeit v als konstant für jedes Luftteilchen innerhalb seiner Bahn voraussetzen müssen, wenn freilich jedes Teilchen eine andere Geschwindigkeit haben darf, als das Nachbartheilchen.

Da erkennen wir denn zunächst, daß der bei stationären Zyklonen stattfindende wiederholte Umlauf der Luftmassen um das Zentrum auch noch vor sich gehen muß, wenn das Zentrum sich bewegt, sofern nur die Geschwindigkeit des Zentrums nicht zu groß wird, nämlich

$$c < v \sin \psi$$

bleibt. Unter dieser Bedingung ist Gl. (VI) anwendbar und liefert, weil sie eine zyklometrische Funktion enthält, für jeden Wert von β eine Vielheit von Werten für r , welche untereinander eine absteigende geometrische Reihe bilden, und der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder derselben ist

$$q = e^{2P\pi}.$$

Diese Größe ist stets ein echter Bruch, so lange $\cos \psi$ positiv ist. Um diesen Bruch als Faktor verkürzt sich also nach jedesmaligem Umlauf der Radius vector, gleichgültig, von welcher Anfangslage aus der Umlauf gerechnet wird. Der Wert dieses Quotienten richtet sich natürlich nur nach den beiden Größen, von denen P abhängt, nämlich nach ψ und dem Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{c}{v}$. Wenn $c = 0$, die Zyklone also stationär ist, so hat q seinen größten Wert $q = e^{-2\pi \cot \psi}$, das ist jener Betrag, um welchen als Faktor sich bei logarithmischen

Spiralen der Radius vector mit jedem Umlauf verkürzt und welcher für $\psi = \frac{\pi}{2}$ den Wert 1 annimmt, so daß in diesem Falle die Bewegung in einem Kreise geschieht. Je größer c ist, desto kleiner wird q . Für $c = v \sin \psi$ erreicht q den kleinsten Wert 0, und es folgt daraus, daß in diesem Falle die Luftmassen spätestens nach einem einzigen Umlauf das Zentrum erreicht haben. Genauerer für diesen Grenzfall ersehen wir aber aus Gl. (V). Die hier auftretende Größe y nimmt nämlich bei einmaligem Umlauf sämtliche Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ an, und zwar hat sie den größten und zugleich auch den kleinsten Wert bei $\beta = 270^\circ$, und es ist leicht ersichtlich, daß bei dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Zyklone jede Luftmasse das Zentrum erreicht, sobald für sie $\beta = 270^\circ$ wird. Im einzelnen gelten hier folgende zusammengehörigen Werte:

β	0°	90°	180°	270°
r	$\frac{C_1 e^{2/tg \psi}}{c}$	$\frac{C_1 e^{1/tg \psi}}{2c}$	$\frac{C_1}{c}$	∞

In diesem Falle hört also die Kurve auf periodisch zu sein: zu jedem β gehört nur ein Wert von r und dasselbe gilt auch, wenn $c > v \sin \psi$ ist.

Alsdann kommt nämlich Gl. (IV) zur Anwendung. Bevor wir jedoch die hierbei auftretenden eigenartigen Bewegungsformen charakterisieren, wollen wir eine kurze Erörterung der Gl. (II) vorausschicken.

Da nämlich $\frac{d\beta}{dt}$ den Winkel bezeichnet, um den sich die Bewegungsrichtung der Luft in der Zeiteinheit dreht (Krümmung der Windbahn), so folgt aus Gl. (II), daß der Sinn der Drehung nur von dem Vorzeichen der Größe Σ bestimmt wird, denn r ist stets positiv. Nun findet man aber, daß Σ stets positiv bleibt, so lange $c < v \sin \psi$. Wenn aber $c = v \sin \psi$ ist, so wird $\Sigma = 0$ für $\beta = 270^\circ$ und wenn $c > v \sin \psi$ ist, so gibt es zwei Werte von β , für welche $\Sigma = 0$ wird; diese sind durch die Gleichung $\sin \beta = -\frac{v \sin \psi}{c}$ bestimmt und sind also beide $> 180^\circ$. Ihre Radien vectoren liegen symmetrisch zu demjenigen von 270° , der eine im dritten, der andere im vierten Quadranten. Im Grenzfall $c = \infty$ liegen beide in einer geraden Linie, indem β die Werte 0° und 180° annimmt.

Aus dieser Betrachtung der Größe Σ ergibt sich, daß für den Fall $c > v \sin \psi$ das ganze von der Zyklone eingenommene Gebiet in 2 getrennte Felder geschieden wird, welche die in

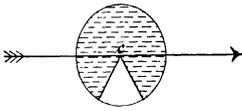


Fig. 3.

Fig. 3 angedeutete Lage haben. Das eine Feld nimmt die linke Seite der Zyklone vollständig ein und greift noch an der Vorder- und Rückseite auf ihre rechte Seite hinüber. Das andere Feld ist auf den übrig bleibenden Teil der rechten Seite beschränkt. In jenem großen Felde ist Σ überall positiv und der Radius vector dreht sich

nach links herum. In dem kleinen Felde dagegen ist Σ stets negativ und der Radius vector dreht sich nach rechts herum.

Ein Übertritt der Luft aus dem einen Felde in das andere ist nicht möglich; vielmehr müssen diejenigen Luftteilchen, welche sich zu einer bestimmten Zeit in dem einen dieser beiden Felder befinden, in diesem so lange verbleiben, bis sie den Bereich der Zyklone verlassen.

Wenden wir uns nunmehr zur Erörterung der Gl. (IV), so sehen wir wieder, daß es zweierlei verschiedene Bewegungsformen gibt. Der Ausgangspunkt für beide Bewegungsformen liegt auf der rechten Vorderseite der Zyklone, der Endpunkt auf der rechten Rückseite. Während aber diejenigen Luftmassen, welche dem kleinen Felde angehören, von der rechten Vorderseite auf die rechte Rückseite gelangen, müssen die übrigen Luftmassen, welche dem großen Felde angehören, einen Umweg machen, indem sie von der rechten Vorderseite zuerst auf die linke Vorderseite, von hier aus auf die linke Rückseite übertreten und von da aus erst die rechte Rückseite erreichen.

Wenn wir ferner Gl. (6) (S. 13) berücksichtigen, können wir Gl. (IV) in folgender Form schreiben:

$$r \frac{(\Gamma^2 - A^2)}{v \sin \psi} \cos^2 \frac{\beta}{2} = C \left(\frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} \right)^B$$

oder

$$r = \frac{C v \sin \psi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{(\Gamma + A)^{B-1}}{(\Gamma - A)^{B+1}}$$

Zugleich ersehen wir aus Gl. (6), daß, wenn $\Sigma = 0$ ist, gleichzeitig auch entweder $\Gamma + A$ oder $\Gamma - A = 0$ wird (nicht aber auch $\cos^2 \frac{\beta}{2}$; denn wenn dieser Faktor $= 0$ wird, werden beide anderen gleichzeitig $= \infty$), und man überzeugt sich leicht, daß $\Gamma - A = 0$ für den Radius vector r_a am Anfang der Bewegung und $\Gamma + A = 0$ für den Radius vector r_e am Ende der Bewegung gilt.

Der Ausgangspunkt der Bewegung wird also unter allen Umständen im Unendlichen liegen; denn da, so lange ψ ein spitzer Winkel ist, B stets positiv ist, so muß, wenn $\Gamma - A = 0$ wird, auch $(\Gamma - A)^{B+1} = 0$ werden. Für das Ende der Bewegung ist es ebenfalls gleichgültig, ob die Bewegung im großen oder im kleinen Felde stattfindet; dagegen sind je nach der Größe von c drei Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn $c > v \sin \psi$, aber $< v$ ist, wird $r_0 = 0$ und die Luftmassen nähern sich zuletzt asymptotisch immer mehr dem Zentrum, weil in diesem Falle $B - 1$ positiv und somit für $\Gamma + A = 0$ auch $(\Gamma + A)^{B-1} = 0$ wird.

2. Wenn $c = v$ ist, nimmt r_0 in der Regel einen endlichen Wert an, welcher je nach dem Werte von ψ verschieden ausfällt. Es ist nämlich für diesen Fall

$$\begin{aligned} B - 1 &= 0 & \cos \beta_e &= -\cos \psi \\ A &= v \cos \psi & \sin \beta_e &= -\sin \psi, \end{aligned}$$

also

$$r = \frac{C v \sin \psi}{\cos^2 \frac{\beta}{2} (\Gamma - A)^2},$$

demnach

$$r = \frac{C v \sin \psi}{\sin^2 \frac{\psi}{2} \cdot 4 v^2 \cos^2 \psi}.$$

Es ist zweckmäßig, hier C durch eine andere Konstante zu ersetzen. Setzt man nämlich in Gl. (IV) $\beta = \pi$ und bezeichnet den entsprechenden Radius vector mit r_π , so wird $\Gamma = \infty$ und $\Sigma = v \sin \psi$, mithin

$$r_\pi v \sin \psi = C$$

und hiermit erhält man

$$r_e = \frac{v^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \frac{\psi}{2} \cdot 4 v^2 \cos^2 \psi} r_\pi = \frac{4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \cos^2 \psi} r_\pi$$

$$r_e : r_\pi = \left(\cos \frac{\psi}{2} : \cos \psi \right)^2.$$

Hiernach ergeben sich für verschiedene Ablenkungswinkel folgende Werte des letzten Radius vectors:

ψ	0°	10°	20°	30°	60°	70°	80°	90°
$r_e : r_\pi$	1	1.023	1.098	1.244	3.000	5.736	19.461	∞

Diese Werte, welche zunächst für die Bewegung im großen Felde berechnet sind, gelten ohne weiteres auch für die Bewegung im kleinen Felde, wenn man nur an Stelle von r_π denjenigen Radius vector treten läßt, für welchen $\Gamma = 0$, also $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{\sin \psi}$ ist.

3. Wenn aber $c > v$ ist, wird $B - 1$ negativ und somit $r_e = \infty$, die Luftmassen kommen also nur einmal in die Nähe des Zentrums der Zyklone und entfernen sich alsdann wieder für immer von ihm.

Die Integrationskonstanten C, C_1 und E werden durch den Maßstab bestimmt, mit welchem die Radien vectoren gemessen werden. Für jedes Luftteilchen haben diese Konstanten ihren besonderen Wert. Nur diejenigen Teilchen haben die gleiche Konstante, welche für gleiches β auch r gleich haben. Diese Luftteilchen haben auch in bezug auf das Zentrum der Zyklone die gleiche Bahn und folgen einander in derselben. Es ist wünschenswert, eine Beziehung zwischen den 3 Konstanten zu finden, um zu erkennen, wie die verschiedenen Formen der Luftbahnen ineinander übergehen, wenn die Geschwindigkeit c oder der Ablenkungswinkel sich plötzlich ändert. Zu diesem Zweck ersetzen wir die Integrationskonstante durch die Länge des Radius vectors für ein passend gewähltes β . Setzen wir in Gl. (IV), (V) und (VI) $\beta = \pi$, so erhalten wir $\Gamma = \infty$, $\frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} = 1$, $\Sigma = v \sin \psi$, $y = 0$, $z = \pi$ und demnach

$$C = r_\pi v \sin \psi \qquad C_1 = r_\pi v \sin \psi \qquad E = \frac{r_\pi v \sin \psi}{e^{P \cdot \pi}},$$

es ist also

$$C = C_1 = E e^{P \cdot \pi} \dots \dots \dots (a).$$

Setzen wir aber für β denjenigen Wert, für welchen $\Gamma = 0$ wird, und bezeichnen die entsprechenden Größen durch den Index p, so erhalten wir

$$x_p = -\frac{c}{v \sin \psi}, \quad \frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} = -1,$$

$$\Sigma_p = v \sin \psi \frac{v^2 \sin^2 \psi - c^2}{v^2 \sin^2 \psi + c^2}, \quad \sin \beta = -\frac{2 c v \sin \psi}{v^2 \sin^2 \psi + c^2}, \quad z = 0$$

und demnach

$$C = r_p \Sigma_p : (-1)^B \qquad E = r_p \Sigma_p,$$

also

$$C = E : (-1)^B \text{ oder } C = E (-1)^B \dots \dots \dots (b).$$

Die Gl. (a) und (b) stimmen miteinander überein, da $B = P \cdot \sqrt{-1}$ und nach einem bekannten arithmetischen Satze $e^{-\pi i} = -1$, also $e^{-B \pi i} = (-1)^B$ ist.

V. Zentrierte Zyklonen.

Wir wenden uns jetzt zu einer Gruppe von Zyklonen, welche sich durch besondere Einfachheit der in ihnen obwaltenden Verhältnisse auszeichnen und deshalb schon mehrfach zum Gegenstand eingehenderer theoretischer Forschung gemacht worden sind. Es sind dies diejenigen Zyklonen, welchen W. v. Bezold den Namen „zentrierte Zyklonen“ gegeben hat¹⁾, und deren charakteristisches Merkmal darin besteht, daß in ihnen die Isobaren konzentrische Kreise bilden und die Bewegung in der Richtung der Isobaren geschieht. Um letztere Bedingung zu erfüllen, setzen wir $\psi = 90^\circ$. Dadurch wird

$$B = 0, \quad y = 0, \quad P = 0, \quad K = c \cos \beta, \quad \Sigma = v + c \sin \beta$$

und die Gl. (IV), (V) und (VI) verschmelzen in die eine

$$r \Sigma = E \quad \dots \dots \dots \quad (VII^*)$$

oder

$$r = \frac{E}{v + c \sin \beta} \quad \dots \dots \dots \quad (VII).$$

Dies ist bekanntlich die Polargleichung der Linien zweiter Ordnung. Wenn man sie in rechtwinkligen Koordinaten ausdrücken will, und zu diesem Zwecke $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ und $\sin \beta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ setzt, so nimmt sie die Gestalt an

$$v \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + c \eta = E$$

oder

$$v^2 (\xi^2 + \eta^2) = E^2 - 2 E c \eta + c^2 \eta^2$$

oder

$$v^2 \xi^2 + \frac{E^2 c^2}{v^2 - c^2} + 2 E c \eta + (v^2 - c^2) \eta^2 = E^2 + \frac{E^2 c^2}{v^2 - c^2} \quad \dots \dots \dots \quad (I)$$

oder

$$\frac{v^2 \xi^2}{v^2 - c^2} + \left(\frac{E c}{v^2 - c^2} + \eta \right)^2 = \frac{E^2 v^2}{(v^2 - c^2)^2}$$

oder auch

$$\frac{\xi^2}{E^2 / (v^2 - c^2)} + \frac{\left(\frac{E c}{v^2 - c^2} + \eta \right)^2}{E^2 v^2 / (v^2 - c^2)^2} = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (VII).$$

Aus den Gl. (VII) und (VII') lassen sich nun folgende Eigenschaften der Kurven ablesen:

Die Kurve ist eine Ellipse, wenn $c < v$, sie ist eine Parabel, wenn $c = v$, und eine Hyperbel, wenn $c > v$ ist. Die große Achse der Ellipse, die Achse der Parabel und die Hauptachse der Hyperbel stehen senkrecht zur Zugrichtung der Zyklone. Ist die Kurve eine Ellipse, so liegt ihr Mittelpunkt in der Entfernung $\frac{E c}{v^2 - c^2}$ von der Bahn des Zyklonenzentrums auf deren rechter Seite. Die Längen der Halbachsen sind $\frac{E v}{v^2 - c^2}$ und $\frac{E}{\sqrt{v^2 - c^2}}$, die lineare Exzentrizität ist also $\frac{E c}{v^2 - c^2}$, die numerische Exzentrizität $= \frac{c}{v}$. Das Zentrum der Zyklone ist demnach ein Brennpunkt der Ellipse. Die Luftteilchen umkreisen es in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt jenes Zentrum liegt; die Bewegung geschieht daher in dieser Hinsicht genau so, wie nach dem ersten Keplerschen Gesetze sich die Planeten bewegen, und es ist deshalb von Interesse zu untersuchen, ob die Luftbewegung auch noch andere Beziehungen zur Planetenbewegung hat. Wir prüfen zunächst das zweite Keplersche Gesetz, nach welchem jeder Planet

¹⁾ Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 4. Dezember 1890. Meteorologische Zeitschrift 1891, S. 99 und 244.

eine unveränderliche Flächengeschwindigkeit besitzt. Nun ist die vom Radius vector in der Zeit dt durchstrichene Fläche

$$S dt = \frac{1}{2} r^2 d\beta;$$

mit Rücksicht auf Gl. (II) wird hieraus

$$S dt = \frac{1}{2} r \cdot \Sigma dt,$$

und hieraus mit Rücksicht auf Gl. (VII*)

$$S = \frac{1}{2} E.$$

Diese Gleichung lehrt, daß das zweite Keplersche Gesetz tatsächlich von den Luftmassen befolgt wird und zwar ist die Integrationskonstante E gleich der doppelten Flächengeschwindigkeit.

VI. Zyklonale Systeme, in denen für die Luftbewegung die 3 Keplerschen Gesetze gelten.

Wir wollen nun untersuchen, ob auch das dritte Keplersche Gesetz von der angenommenen Luftbewegung befolgt wird, nach welchem die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnen verhalten. Zu diesem Zweck ist es nötig, vorher die Integralformel für die Zeit t aufzustellen. Wir wollen dies zunächst für die in Rede stehende zentrierte Zyklone ausführen, weil für diesen speziellen Fall die Integration besonders einfach sich gestaltet und zwar in folgender Weise:

Aus (II) folgt allgemein:

$$dt = \frac{r}{\Sigma} d\beta.$$

Es ist also im speziellen Falle:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{E}{\Sigma^2} d\beta = \frac{E}{\Sigma} \cdot \frac{d\beta}{\Sigma} = \frac{2E}{\Sigma} \cdot \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} \\ &= \frac{2E v (r + x^2)}{\Gamma^2 - A^2} \cdot \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} = \frac{2E v \left(r + \left[\frac{\Gamma - c}{v} \right]^2 \right) d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} \\ &= \frac{2E (v^2 + \Gamma^2 - 2c\Gamma + c^2) d\Gamma}{v (\Gamma^2 - A^2)^2} \\ &= \frac{2E}{v} \left\{ \frac{v^2 + c^2}{A^2} \left[\frac{\Gamma^2 d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} - \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} \right] + \frac{\Gamma^2 d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^3} - \frac{2c\Gamma d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} \right\} \\ &= \frac{2E}{v} \left\{ \frac{2c^2}{A^2} \frac{\Gamma^2 d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} - \frac{v^2 + c^2}{A^2} \cdot \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} - \frac{2c\Gamma d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} \right\} \\ t &= \frac{2E}{v} \left\{ \frac{2c^2}{A^2} \int \frac{\Gamma^2 d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} - \frac{v^2 + c^2}{A^2} \int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} - 2c \int \frac{\Gamma d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wenn man partiell integriert:

$$\begin{aligned} \int \frac{\Gamma^2 d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} &= \frac{1}{2} \int \Gamma \cdot \frac{d\Gamma^2}{(\Gamma^2 - A^2)^2} = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma \cdot \frac{-1}{\Gamma^2 - A^2} + \int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} - \frac{\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} \right) \end{aligned}$$

und

$$\int \frac{\Gamma d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma^2 - A^2}.$$

Folglich ist

$$t = \frac{2E}{v} \left\{ \frac{c^2}{A^2} \left(\int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} - \frac{\Gamma}{\Gamma^2 - \Gamma^2} \right) - \frac{v^2 + c^2}{A^2} \int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} + \frac{c}{\Gamma^2 - A^2} \right\}$$

$$= \frac{2E}{v} \left\{ -\frac{v^2}{A^2} \int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} + \frac{c}{A^2} \left(\frac{A^2 - c\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} \right) \right\}.$$

Ferner ist

$$\frac{A^2 - c\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} = \frac{c^2 - v^2 - c v x - c^2}{\Gamma^2 - A^2} = \frac{-v^2 - c v x}{\Gamma^2 - A^2}$$

$$= \frac{\cos^2 \beta}{2} (-v - c x) = \frac{-v (\tau + \cos \beta) - c \sin \beta}{2 \Sigma}$$

$$= \frac{-(v + c \sin \beta)}{2 \Sigma} - \frac{v \cos \beta}{2 \Sigma} = -1/2 - \frac{v \cos \beta}{2 \Sigma}.$$

Hiermit wird

$$t = \frac{2E}{v} \left\{ -\frac{v^2}{A^2} \int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} - \frac{c v \cos \beta}{A^2 \cdot 2 \Sigma} \right\}$$

$$t = -\frac{E}{A^2} \left\{ 2 v \int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2} + \frac{c \cos \beta}{\Sigma} \right\} \dots \dots \dots \text{(VIII)},$$

wo für $\int \frac{d\Gamma}{\Gamma^2 - A^2}$ noch einer der Werte $-\frac{\tau}{2A} \ln \left| \frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} \right|$ oder $\frac{\tau}{A_1} \arctg \frac{\Gamma}{A_1}$ zu setzen ist, je nachdem $c \geq v$ ist¹⁾. Den Ausgangspunkt für die Zeit wählen wir allemal so, daß die Integrationskonstante verschwindet. Da wir die Dauer eines Umlaufs um das Zentrum ermitteln wollen, können wir uns auf den Fall beschränken, wo $v > c$ ist, indem nur unter dieser Bedingung eine wiederholte Umkreisung des Zentrums stattfindet. Demnach geben wir der Gl. (VIII) die Form

$$t = \frac{E}{A_1^2} \left\{ \frac{2v}{A_1} \arctg \frac{\Gamma}{A_1} + \frac{c \cos \beta}{2 \Sigma} \right\} \dots \dots \dots \text{(VIIIa)}.$$

Während eines Umlaufs nimmt nun β alle Werte an von β_1 bis $\beta_1 + 2\pi$. Dabei durchläuft $\frac{\Gamma}{A_1}$ einmal alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, indem es zuletzt wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt. $\arctg \frac{\Gamma}{A_1}$ wächst also inzwischen um den Betrag π , während die Größe $\frac{\cos \beta}{\Sigma}$ als goniometrische Funktion bei Beendigung des Umlaufs wieder ihren Anfangswert annimmt. Somit erhalten wir aus (VIIIa) für die Umlaufszeit folgenden Wert:

$$T = \frac{E}{A_1^2} \cdot \frac{2\pi v}{A_1} = \frac{2\pi v E}{A_1^3} = \frac{2\pi v E}{\sqrt{v^2 - c^2} \cdot c^2}.$$

Wenn nun zwei verschiedene dem System angehörende Luftteilchen durch die Indices 1 und 2 gekennzeichnet werden, so spricht das dritte Keplersche Gesetz die Forderung aus, daß

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3,$$

d. h. also, weil die große Halbachse $a = \frac{E v}{v^2 - c^2}$ ist,

$$\text{daß} \quad \frac{4\pi^2 v_1^2 E_1^2}{(v_1^2 - c^2)^3} : \frac{4\pi^2 v_2^2 E_2^2}{(v_2^2 - c^2)^3} = \frac{E_1^3 v_1^3}{(v_1^2 - c^2)^3} : \frac{E_2^3 v_2^3}{(v_2^2 - c^2)^3},$$

$$\text{oder kürzer} \quad v_1^2 E_1^2 : v_2^2 E_2^2 = v_1^3 E_1^3 : v_2^3 E_2^3$$

$$\text{oder} \quad v_1 E_1 = v_2 E_2$$

¹⁾ Wenn $c = v$ ist, wird Formel (VIII) unbrauchbar, weil alsdann das im Nenner als Faktor stehende $A^2 = 0$ wird. Siehe hierüber unten S. 32, Gl. (XIV).

sein, d. h. das Produkt v muß für alle Luftteilchen des Systems denselben Wert haben. Wir bezeichnen diesen mit D und nennen ihn die Konstante des Systems. Es sei nun daran erinnert, daß wir v als konstant ansehen mußten, so lange es sich darum handelte, die Integralgleichung für die Bewegung eines einzelnen Punktes zu ermitteln. Sobald wir aber dazu übergehen, die Bewegung verschiedener Luftteilchen miteinander zu vergleichen, hindert

uns nichts, einem jeden Teilchen seine eigene Geschwindigkeit beizulegen. Ähnliches gilt auch für die Integrationskonstante E . Auch diese Größe ist eine Konstante, so lange es sich um die Bewegung eines bestimmten Punktes handelt, aber für jedes Teilchen kann E einen andern Wert haben. Die obige Bedingungsgleichung

$$vE = D \dots \dots \dots (IX)$$

besagt, daß das dritte Keplersche Gesetz für das zyklonale System erfüllt wird, wenn für alle Massenteilchen das Produkt vE den konstanten Wert D hat. Solche Zyklonen, für welche alle Gesetze der Planetenbewegung gelten, wollen wir kurz Planetarische Zyklonen nennen. Führen wir die Bedingung (IX) in die Gl. (VII) ein, so erhalten wir

$$r = \frac{D}{v \Sigma} \dots \dots \dots (X)$$

oder

$$r = \frac{D}{v(v + c \sin \beta)}$$

als eine für alle Teilchen des Systems zwischen den Variablen β , r und v und der Konstanten D geltende Gleichung, und es läßt sich mit ihrer Hilfe aus zwei Variablen die dritte bestimmen. Ist z. B. die Lage eines Punktes durch die Größen β und r gegeben, so erhält man für die dort herrschende Geschwindigkeit durch Auflösung der quadratischen Gleichung den Wert

$$v = -\frac{c}{2} \sin \beta \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} \sin^2 \beta + \frac{D}{r}} \dots \dots (XI),$$

wo das untere Vorzeichen zu verwerfen ist, da es negative Werte für v liefern würde. Wir sind jetzt also in der Lage, einen Überblick über die in den verschiedenen Teilen des zyklonalen Systems herrschenden Windgeschwindigkeiten gewinnen zu können. Für die verschiedenen Punkte eines Radius vectors ist β konstant, und man sieht sofort, daß v um so kleiner wird, je größer r wird. Für das innere Gebiet der Zyklone ist das Glied $\frac{D}{r}$ bedeutend größer als $\frac{c^2}{4} \sin^2 \beta$, und demnach ist hier die Geschwindigkeit längs eines Radius vectors annähernd umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Entfernung vom Zentrum. Für das äußere Gebiet gibt die Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatz

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{c}{2} \sin \beta} \cdot \frac{D}{r},$$

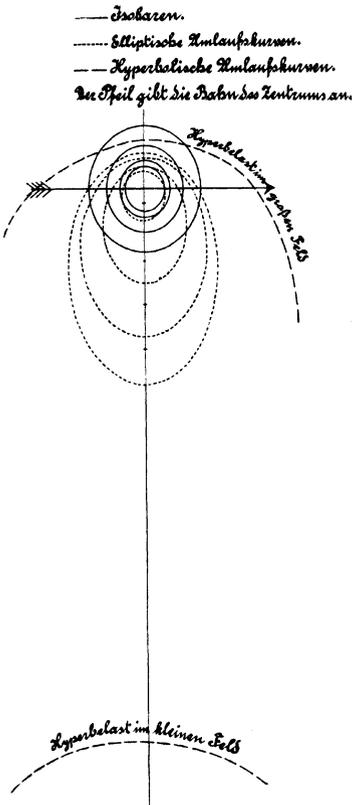


Fig. 4.

hier ist also v umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung vom Zentrum. Für $\beta = 0$ findet man aus (XI)

$$v = \sqrt{\frac{D}{r}};$$

es ist also längs der Bahn des Zentrums der Zyklone die Windgeschwindigkeit genau umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Entfernung vom Zentrum. Auf der rechten Seite der Zyklone ist sie größer, auf der linken Seite kleiner. Zusammenfassend kann man sagen, daß das Gebiet, in welchem die Windgeschwindigkeit umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Entfernung vom Zentrum der Zyklone ist, sich längs der Bahn des Zentrums auf einem Streifen hinzieht, welcher in der Nähe des Zentrums an Breite zunimmt.

Um nun auch die Verschiedenheit der Windgeschwindigkeit in den Teilen einer Isobare übersehen zu können, differenzieren wir die Gl. (X)

$$v \Sigma = \frac{D}{r},$$

wobei r als konstant anzusehen ist. Wir erhalten

$$v d\Sigma + \Sigma dv = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (X)

$$v(dv + c \cos \beta d\beta) + \frac{D}{rv} dv = 0,$$

woraus

$$\frac{dv}{d\beta} = -\frac{c r v^2}{r v^2 + D} \cdot \cos \beta$$

folgt. Längs einer Isobare nimmt also auf der Vorderseite der Zyklone die Geschwindigkeit ab, wenn β zunimmt, weil hier $\cos \beta$ positiv ist; auf der Rückseite der Zyklone wächst v , wenn β wächst. Am größten ist die Geschwindigkeit rechts vom Zentrum, wenn $\beta = -90^\circ$ ist; die kleinste Geschwindigkeit ist links vom Zentrum, da wo $\beta = +90^\circ$ ist.

Zu demselben Resultat gelangt man auch durch folgende Überlegung: Denkt man sich eine Schar jener konfokalen Ellipsen, in denen die Luftmassen das Zentrum umkreisen, so ist in jeder Ellipse die Geschwindigkeit konstant, aber die konstante Geschwindigkeit ist, wie wir oben gesehen haben, in der inneren von je zwei Ellipsen größer als in der äußeren. Umkreist man also das Zentrum in positiver Richtung längs einer Isobare, so gelangt man, so lange man sich auf der Vorderseite der Zyklone befindet, fort und fort in eine weiter nach außen liegende Ellipse, da die Mittelpunkte der Ellipsen auf der rechten Seite der Zyklone liegen; man verspürt also eine Abnahme der Windgeschwindigkeit. Sobald man aber auf die Rückseite gelangt ist, durchsetzt man die Schar der Ellipsen von außen nach innen und verspürt somit eine dauernde Zunahme der Windgeschwindigkeit.

Setzt man in Gl. (XI) für β das eine Mal $-\beta$, das andere Mal $+\beta$ und subtrahiert die beiden so entstandenen Gleichungen voneinander, so erhält man den Betrag ϑ , um welchen die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte auf der rechten Seite der Zyklone größer ist, als in dem symmetrisch dazu gelegenen Punkte der linken Seite. Es ergibt sich

$$v_{-\beta} - v_{+\beta} = \vartheta = c \sin \beta.$$

Hieraus folgt, daß der Unterschied der Windgeschwindigkeit an zwei symmetrisch zur Bahn des Zentrums gelegenen Punkten 1. unabhängig ist von der Länge des Radius

vectors, daß er aber 2. um so größer ist, je mehr der Radius vector gegen die Fortpflanzungsrichtung des Zentrums der Zyklone geneigt ist. Sind aber zwei symmetrische Punkte so gelegen, daß ihre Radien vectoren senkrecht stehen zur Zugrichtung der Zyklone, so ist der Unterschied ihrer Windgeschwindigkeiten gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Zyklone c . Dieser letztgenannte Umstand würde ein bequemes Mittel bieten, um die Zuggeschwindigkeit der Zyklone im voraus aus der Wetterkarte abzulesen, sobald man voraussetzen darf, daß man es mit einer Planetarischen Zyklone zu tun hat.

Fig. 4 wird eine Vorstellung von dem Aufbau einer Planetarischen Zyklone geben. Man sieht darin die inneren elliptischen Umlaufbahnen mit nahezu kreisförmiger Gestalt und die äußeren langgestreckten elliptischen Bahnen mit großer Exzentrizität.

Wir haben die Planetarischen Zyklonen zunächst nur deshalb im vorstehenden genauer untersucht, weil sie sich als ein willkommenes, besonders einfaches Beispiel zur Betrachtung der sonst ziemlich verwickelten Verhältnisse der Zyklonen von selbst darboten. Unsere Untersuchung hat aber doch gezeigt, daß wir es hier mit Bewegungsformen zu tun haben, welche den tatsächlich vorkommenden in allen Hauptzügen auffallend genau entsprechen, nämlich 1. In dem, abgesehen von der unmittelbaren Nähe des Zentrums, überall auftretenden Anwachsen der Windgeschwindigkeit nach dem Zentrum hin und 2. in der Tatsache, daß auf der rechten Seite der Zyklone die Windgeschwindigkeit ungleich größer ist als auf der linken. Letzterer Umstand wird doch schon längst in der praktischen Meteorologie benutzt, den Weg einer Zyklone zu bestimmen, und hat auch bei dem Seefahrer seit alten Zeiten die rechte Vorderseite der Wirbelstürme als den „gefährlichen Quadranten“ in Verruf gebracht.

Die Planetarische Zyklone gibt ein bemerkenswertes Beispiel dafür, wie es möglich ist, daß alle einem Luftsystern angehörenden Teilchen ihre anfängliche Geschwindigkeit unverändert beibehalten, und daß trotzdem die Windgeschwindigkeit sich nicht allein von Ort zu Ort, sondern infolge der Ortsveränderung des Wirbels auch an jedem Ort mit der Zeit beträchtlich ändern kann.

In Übereinstimmung hiermit steht eine interessante Wahrnehmung, welche man vom Turm der Seewarte in Hamburg aus während des großen Sturmes vom 7. bis 12. Februar 1894 gemacht hat. Bei stürmischen Winden kann man bekanntlich nicht von einer gleichmäßigen Windgeschwindigkeit sprechen, sondern es wechseln heftige Windstöße und relative Luftruhe in kurzen Zwischenräumen miteinander ab. Aus den Aufzeichnungen des Schalenkreuzanemometers sowohl als auch des Winddruckapparates hatte man ermittelt, daß in den stärksten Stößen während jenes Sturmes die Windgeschwindigkeit zwischen 36 und 40 m in der Sekunde betrug. Da die Richtung des Windes unveränderlich WSW war, konnte man vom Turm der Seewarte aus die Windstöße über eine längere Strecke auf der hochgestauten Wasserfläche der Elbe durch den glänzenden weißen Gischt, den sie mit sich durch die Luft führten, auf ihrem Wege verfolgen. Es zeigte sich, daß eine Anzahl der schwersten Windstöße zwischen 11 und 12 Uhr gerade 60 Sekunden gebrauchten, um von den letzten Dukdalben bei der Mündung des Köhlbrand bis zur Seewarte zu gelangen; da die Entfernung fast 2000 m beträgt, so pflanzten sie sich also mit einer Geschwindigkeit von 33 m in der Sekunde fort, also mit nahezu der-

selben, welche man für die Luft in ihnen fand — denn es waren dies immerhin noch nicht die allerschwersten Stöße. Es zeigte sich also, daß die Luftmasse in diesen Böen sich wie ein Projektil ohne erkennbare Wirbelung und mit gleichmäßiger konstanter Geschwindigkeit fortbewegte, während gleichzeitig am Beobachtungsorte die größte Schwankung in der Windgeschwindigkeit beobachtet wurde¹⁾.

Die hier angeführten Tatsachen würden dazu ermuntern, die aus den Wetterkarten ausgewerteten Windgeschwindigkeiten mit den durch Gleichung (XI) bestimmten zu vergleichen, doch muß eine solche Untersuchung für eine spätere Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Noch ein anderes Resultat können wir den Betrachtungen über die Planetarischen Wirbel entnehmen, nämlich, daß es an der Erdoberfläche Bewegungserscheinungen gibt, welche ausschließlich einer an keine Materie gebundenen Zentralkraft zu gehorchen scheinen, deren Sitz außerhalb der Erde in der Nähe der Erdoberfläche zu suchen ist, und deren Wirkungsweise genau dieselbe ist, wie die der allgemeinen Gravitation, während die Rotation der Erde um ihre Achse sowie die Anziehungskraft der Erde auf diese Bewegungen scheinbar gar keinen Einfluß ausüben.

Wenn in der zentrierten Zyklone $c = v$ wird, die Luft also in einer Parabel um das Zentrum geht, wird Gl. (1) S. 19

$$c^2 \xi^2 + 2 E c \eta = E^2$$

oder

$$\xi^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - 2 \frac{E}{c} \eta.$$

Die Hauptachse der Parabel fällt in die η -Achse. Der Scheitel der Parabel liegt in der η -Achse, seine Entfernung vom Zyklonenzentrum ist $\eta = \frac{E}{2c}$, die Bahn des Zyklonenzentrums wird von der Parabel geschnitten in den Punkten $\xi = \pm \frac{E}{c}$, die Parabel öffnet sich nach der rechten Seite der Zyklone.

Wenn $v < c$ wird, verwandelt sich die Parabelbahn in einen positiven Hyperbelast, welcher die Parabel sowie die Schar der Ellipsen umschließt. Seine Öffnung liegt nach der rechten Seite, sein Scheitel auf der linken Seite der Zyklone. So lange v nur wenig kleiner ist als c , bleibt der Hyperbelast schmal und schmiegt sich der Parabel an. Mit abnehmendem v verflacht er sich. Sein Abstand von der Parabel wächst immer mehr und zwar am langsamsten in der Nähe der Scheitel und um so schneller, je weiter der Hyperbelpunkt vom Scheitel entfernt ist.

Bei unendlich kleinem v geht der Hyperbelast in eine gerade Linie über, welche der Bahn des Zentrums parallel auf deren linker Seite im Unendlichen läuft. Denn für $v = 0$ wird aus Gl. VII

$$r = \frac{E}{c \sin \beta} \text{ also } r \sin \beta = \frac{E}{c}$$

$r \sin \beta$ ist aber die Entfernung eines Punktes von der Bahn des Zentrums, und $\frac{E}{c}$ ist innerhalb einer Bahn eine konstante Größe, welche die Entfernung eines Punktes von der Bahn des Zentrums angibt. Diese muß für $v = 0$ unendlich werden, weil nach Gl. IX

¹⁾ Vgl. den Bericht von W. Köppen in den Annalen der Hydrographie, März 1894, S. 90.

$$\frac{E}{c} = \frac{D}{v c} = \infty$$

ist. Es ist dies der Fall, in welchem die in unendlicher Entfernung von der Bahn des Zentrums befindlichen Luftteilchen mit Bezug auf die Erdoberfläche unbeweglich sind, während das Zyklonenzentrum mit der Geschwindigkeit c vorüberzieht.

Die ganze Ebene, soweit sie außerhalb der Ellipsenschar und der Parabel liegt, wird also von der Schaar positiver Hyperbeläste eingenommen. Es bleibt in planetarischen Zyklonen kein Raum für negative Hyperbeläste.

Anders ist es bei den nicht planetarischen zentrierten Zyklonen.

Wenn nämlich v für alle Luftteilchen denselben Wert hat, dann haben auch alle Umlaufkurven dieselbe numerische Exzentrizität $\frac{c}{v}$. Die einzelnen Kurven unterscheiden sich also von einander nur durch den Maßstab, mit dem sie konstruiert sind, und wenn eine Kurve eine Hyperbel ist, so sind es alle. Sie umschließen einander und öffnen sich sämtlich nach der rechten Seite der Zyklone. Aber nur ein Teil von ihnen durchschneidet die Bahn des Zentrums und hat seinen Scheitel auf deren linker Seite. Die übrigen bleiben ganz auf der rechten Seite und haben dort auch ihren Scheitel. Jene Hyperbeln bilden die Umlaufbahn für die im „großen Felde“ sich bewegenden Luftteilchen, auf letzteren dagegen bewegen sich die Teilchen des „kleinen Feldes“, von denen auf S. 16 gesprochen ist. Jene Kurven stellen sich als die positiven Hyperbeläste dar, die letzteren als die negativen Äste. Man erhält die letzteren, indem man die aus Gl. VII errechneten Radien vectoren, soweit sie negativ werden, mit positivem Zeichen aufträgt. In Fig. 4 ist ein solcher „Hyperbelast im kleinen Felde“ eingezeichnet.

VII. Zweite Integration. Die Zeit als endliche Funktion der Phase.

Unsere erstmalige Integration, die zu den Gl. (IV), (V) und (VI) führte, hat uns in den Stand gesetzt, die Luftbewegung in bezug auf das Zentrum etwas näher kennen zu lernen und damit einige Aufschlüsse über die Struktur der Zyklonen zu erlangen. Da nun aber eine unserer Hauptaufgaben darin besteht, die Strömungslinien, d. h. die absolute Bewegung der Luft kennen zu lernen, müssen wir zu einer nochmaligen Integration schreiten. Wir werden dadurch eine endliche Gleichung zwischen t und β erhalten. Da die Gl. (IV) und (VI) beliebig ineinander übergeführt werden können und jede von ihnen nur eine andere Form der anderen ist, müssen sie auch beide zu derselben Integralgleichung führen, und es steht uns frei, welche von beiden wir zur Integration heranziehen. Wir wählen Gl. (VI), deren Integration nach einigen Umformungen ausführbar ist.

Wir setzen zunächst den Wert für r aus (VI) in (II) ein und erhalten

$$\frac{E e^{Pz}}{\Sigma} d\beta = \Sigma dt$$

oder

$$dt = \frac{E e^{Pz}}{\Sigma^2} d\beta.$$

Zum Zweck der Integration drücken wir alle Variablen durch z aus. Da wir

$$z = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{A_1} \text{ gesetzt haben,}$$

so ist

$$\Gamma = A_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2}.$$

Setzt man dies in unsere Gl. $\Gamma = v \cdot \sin \psi \cdot x + c$,

so wird

$$x = \frac{A_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} - c}{v \cdot \sin \psi}$$

und hieraus durch Differentiation

$$dx = \frac{A_1}{v \sin \psi} \cdot \frac{dz}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} \Gamma + x^2 &= \left[v^2 \sin^2 \psi + A_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} + c^2 - 2 A_1 c \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right] : v^2 \sin^2 \psi \\ &= \left[v^2 \sin^2 \psi + (v^2 \sin^2 \psi - c^2) \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} + c^2 - 2 A_1 c \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right] : v^2 \sin^2 \psi \\ &= \left[v^2 \sin^2 \psi \left(\Gamma + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} \right) + c^2 \left(\Gamma - \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} \right) - 2 A_1 c \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right] : v^2 \sin^2 \psi \\ &= \left[\frac{v^2 \sin^2 \psi}{\cos^2 \frac{z}{2}} + \frac{c^2 \cos z}{\cos^2 \frac{z}{2}} - \frac{A_1 c \sin z}{\cos^2 \frac{z}{2}} \right] : v^2 \sin^2 \psi \\ &= \frac{v^2 \sin^2 \psi + c^2 \cos z - A_1 c \sin z}{v^2 \sin^2 \psi \cos^2 \frac{z}{2}} \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\Sigma = v \sin \psi + \frac{2 c x}{\Gamma + x^2},$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma (\Gamma + x^2) &= v \sin \psi (\Gamma + x^2) + 2 c x \\ &= \frac{v^2 \sin^2 \psi + A_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} + c^2 - 2 A_1 c \operatorname{tg} \frac{z}{2}}{v \sin \psi} + \frac{2 A_1 c \operatorname{tg} \frac{z}{2} - 2 c^2}{v \sin \psi} \\ &= \frac{v^2 \sin^2 \psi + A_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} - c^2}{v \sin \psi} = \frac{A_1^2 \left(\Gamma + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} \right)}{v \sin \psi} = \frac{A_1^2}{v \sin \psi \cos^2 \frac{z}{2}} \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{A_1^2}{v \sin \psi (\Gamma + x^2) \cos^2 \frac{z}{2}} \\ \frac{\Gamma}{\Sigma^2} &= \frac{v^2 \sin^2 \psi (\Gamma + x^2)^2 \cos^4 \frac{z}{2}}{A_1^4} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$d\beta = \frac{2 dx}{\Gamma + x^2} = \frac{A_1}{v \sin \psi} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma + x^2} \cdot \frac{dz}{\cos^2 \frac{z}{2}}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} dt &= \frac{E e^{Pz}}{\Sigma^2} d\beta = E e^{Pz} \cdot \frac{v^2 \sin^2 \psi (\Gamma + x^2)^2 \cos^4 \frac{z}{2}}{A_1^4} \cdot \frac{A_1}{v \sin \psi} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma + x^2} \cdot \frac{dz}{\cos^2 \frac{z}{2}} \\ &= \frac{E e^{Pz} v \sin \psi (\Gamma + x^2) \cos^2 \frac{z}{2} dz}{A_1^3} \\ &= \frac{E e^{Pz}}{A_1^3 v \sin \psi} [v^2 \sin^2 \psi + c^2 \cos z - A_1 c \sin z] dz \end{aligned}$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichung lassen sich in bekannter Weise integrieren. Man hat

$$\int e^{Pz} dz = \frac{e^{Pz}}{P};$$

ferner, z. B. nach Schlömilch, Übungsbuch, zweiter Teil, 2. Auflage, S. 39 durch zweimalige partielle Integration

$$\int e^{Pz} \cos z dz = \frac{e^{Pz}(P \cos z + \sin z)}{P^2 + 1}$$

$$\int e^{Pz} \sin z dz = \frac{e^{Pz}(P \sin z - \cos z)}{P^2 + 1}$$

Hiermit wird

$$t = \frac{E e^{Pz}}{A_1^3 v \sin \psi} \left[\frac{v^2 \sin^2 \psi}{P} + \frac{c^2 (P \cos z + \sin z)}{P^2 + 1} - \frac{A_1 c (P \sin z - \cos z)}{P^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{E e^{Pz}}{A_1^3 v \sin \psi (P^2 + 1)} \left[\frac{P^2 + 1}{P} v^2 \sin^2 \psi + c \cos z (A_1 + P c) - c \sin z (A_1 P - c) \right].$$

Die gesuchte Integralgleichung für t ist hiermit gefunden, sie muß aber noch umgeformt werden, indem die Variable z durch β zu ersetzen ist. Wir tun dies stufenweise, indem wir zunächst den Quotienten $\frac{\Gamma}{A_1}$, den wir $= u$ setzen, einführen.

Es ist
$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = u,$$

also
$$\cos^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{1 + u^2} \quad \text{und} \quad \sin^2 \frac{z}{2} = \frac{u^2}{1 + u^2}.$$

Hieraus folgt
$$\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \cdot \cos \frac{z}{2} = \frac{2u}{1 + u^2} = \frac{2 A_1 \Gamma}{A_1^2 + \Gamma^2}$$

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \frac{A_1^2 - \Gamma^2}{A_1^2 + \Gamma^2},$$

also
$$\cos z (A_1 + P c) - \sin z (A_1 P - c) = \frac{(A_1^2 - \Gamma^2) (A_1 + P c) - 2 A_1 \Gamma (A_1 P - c)}{A_1^2 + \Gamma^2}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks rechter Hand sei $= Z$, der Nenner $= N$, so kann man folgendermaßen umformen:

$$Z = A_1^2 (A_1 + P c) - \Gamma^2 A_1 - \Gamma^2 P c - 2 A_1 c (A_1 P - c) - 2 A_1 v \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} (A_1 P - c)$$

$$= A_1^2 (A_1 + P c) - \left(c^2 + 2 c v \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + v^2 \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right) A_1$$

$$- \left(c^2 + 2 c v \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + v^2 \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right) P c - 2 A_1 c (A_1 P - c)$$

$$- 2 A_1 v \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} (A_1 P - c)$$

$$= A_1^3 - A_1^2 P c + A_1 c^2 - 2 P v \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} (c^2 + A_1^2) - P c^3 - v^2 \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} (A_1 + P c)$$

$$= - P c (A_1^2 + c^2) + A_1 (A_1^2 + c^2) - 2 P v \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} (A_1 + c^2) - v^2 \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} (A_1 + P c).$$

Da aber $A_1^2 + c^2 = v^2 \sin^2 \psi$, so wird

$$Z = -v^2 \sin^2 \psi \left(P c - A_1 + 2 P v \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} [A_1 + P c] \right)$$

$$= -v^2 \sin^2 \psi \left(P c \left[1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right] - A_1 \left[1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right] + 2 P v \sin \psi \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$= -v^2 \sin^2 \psi \left(\frac{Pc}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} - \frac{A_1 \cos \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{Pv \sin \psi \sin \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \right)$$

$$= -\frac{v^2 \sin^2 \psi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} (Pc - A_1 \cos \beta + Pv \sin \psi \sin \beta),$$

$$N = A_1^2 + I^2 = (v^2 \sin^2 \psi - c^2) + \left(c^2 + 2cv \sin \psi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + v^2 \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$= v^2 \sin^2 \psi \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right) + cv \sin \psi \sin \beta : \cos^2 \frac{\beta}{2}$$

$$= \frac{v^2 \sin^2 \psi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{cv \sin \psi \sin \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{\Sigma v \sin \psi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Mit diesen Werten für Z und N erhalten wir

$$\cos z (A_1 + Pc) - \sin z (A_1 P - c) = -\frac{v \sin \psi}{\Sigma} (Pc - A_1 \cos \beta + Pv \sin \psi \sin \beta).$$

Hiermit wird

$$t = \frac{Ee^{Pz}}{A_1^2 v \sin \psi (P^2 + I)} \left[-\frac{(P^2 + I) v^2 \sin^2 \psi}{v \cos \psi} - \frac{cv \sin \psi}{A_1 \Sigma} (Pc - A_1 \cos \beta + Pv \sin \psi \sin \beta) \right]$$

$$= \frac{Ee^{Pz}}{A_1^2 (P^2 + I)} \left[-\frac{(P^2 + I) \sin \psi}{\cos \psi} - \frac{c}{A_1 \Sigma} (Pc - A_1 \cos \beta + Pv \sin \psi \sin \beta) \right]$$

$$= -\frac{Ee^{Pz}}{\Sigma A_1^2 (P^2 + I)} \left[\frac{(P^2 + I) \sin \psi}{\cos \psi} (v \sin \psi + c \sin \beta) + \frac{c}{A_1} (Pc - A_1 \cos \beta + Pv \sin \psi \sin \beta) \right].$$

Nun ist

$$P^2 + I = \frac{v^2 \cos^2 \psi}{A_1^2} + I = \frac{A_1^2 + v^2 \cos^2 \psi}{A_1^2} = \frac{(v^2 \sin^2 \psi - c^2) + v^2 \cos^2 \psi}{A_1^2} = \frac{v^2 - c^2}{A_1^2}$$

oder

$$A_1^2 (P^2 + I) = v^2 - c^2.$$

Setzt man dies ein und ordnet rechts nach $\sin \beta$ und $\cos \beta$, so kommt

$$t = \frac{Ee^{Pz}}{\Sigma (c^2 - v^2)} \left[\frac{(P^2 + I) v \sin^2 \psi}{\cos \psi} + \frac{P}{A_1} c^2 + \left(\frac{P^2 + I}{\cos \psi} c + \frac{P}{A_1} cv \right) \sin \psi \sin \beta - c \cos \beta \right].$$

Nun ist

$$\frac{(P^2 + I) v \sin^2 \psi}{\cos \psi} + \frac{P}{A_1} c^2 = \frac{v^2 - c^2}{A_1^2} \frac{v \sin^2 \psi}{\cos \psi} - \frac{v \cos \psi}{A_1^2} c^2$$

$$= \frac{(v^2 - c^2) v \sin^2 \psi - v c^2 \cos^2 \psi}{A_1^2 \cos \psi} = \frac{v^3 \sin^2 \psi - v c^2}{A_1^2 \cos \psi}$$

$$= \frac{v (v^2 \sin^2 \psi - c^2)}{A_1^2 \cos \psi} = \frac{v}{\cos \psi}$$

und

$$\frac{(P^2 + I)c}{\cos \psi} + \frac{P}{A_1} cv = \frac{v^2 - c^2}{A_1^2} \cdot \frac{c}{\cos \psi} - \frac{v \cos \psi}{A_1^2} cv = \frac{(v^2 - c^2)c - cv^2 \cos^2 \psi}{A_1^2 \cos \psi}$$

$$= \frac{cv^2 \sin^2 \psi - c^3}{A_1^2 \cos \psi} = \frac{c}{\cos \psi}.$$

Damit wird

$$t = \frac{Ee^{Pz}}{\Sigma (c^2 - v^2)} \left[\frac{v}{\cos \psi} + \frac{c}{\cos \psi} \sin \psi \sin \beta - c \cos \beta \right]$$

$$= \frac{r}{c^2 - v^2} \left[\frac{v}{\cos \psi} + \frac{c}{\cos \psi} \sin \psi \sin \beta - c \cos \beta \right]$$

$$t = \frac{r}{(c^2 - v^2) \cos \psi} [v - c \cos (\psi + \beta)] \dots \dots \dots (XII).$$

Hiermit ist Gl. (VI) und nach unseren Ausführungen zugleich auch Gl. (IV) und (V) integriert. Der Nullpunkt für t wird so gewählt, daß die Integrations-Konstante verschwindet.

Diese Gleichung wird unbrauchbar, wenn der Nenner verschwindet, d. h. 1. wenn $\cos \psi = 0$, 2. wenn $c = v$ ist, und 3. wenn $v = c$ und zugleich $\cos \psi = 0$ ist.

$$1. \cos \psi = 0.$$

Dieser Fall ist bereits oben S. 20—21 behandelt [s. Gl. (VIII)]. Wir wollen aber jetzt diese Gl. (VIII) noch in anderer Weise, im Anschluß an das unmittelbar Vorhergehende, entwickeln.

$$\text{Für} \quad \cos \psi = 0 \text{ ist } \psi = \frac{\pi}{2}, \sin \psi = 1$$

$$A_1 = \sqrt{v^2 - c^2} \quad \Gamma = c + vx \quad P = 0 \quad E^{Pz} = 1$$

$$A_1^2 = v^2 - c^2$$

$$\Gamma^2 = c^2 + 2cvx + v^2x^2$$

$$A_1^2 + \Gamma^2 = v^2(1 + x^2) + 2cvx = \frac{v^2 + cv \sin \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{v \Sigma}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$A_1^2 - \Gamma^2 = v^2(1 - x^2) - 2c^2 - 2cvx = \frac{v^2 \cos \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} - 2c^2 - 2cvx,$$

$$\text{also} \quad dt = \frac{E}{A_1^3 v} [v^2 + c^2 \cos z - A_1 c \sin z] dz,$$

$$\begin{aligned} \text{folglich} \quad t &= \frac{E}{A_1^3 v} [v^2 z + c^2 \sin z + A_1 c \cos z] \\ &= \frac{E}{A_1^3 v} \left[v^2 z + c^2 \cdot \frac{2 A_1 \Gamma}{A_1^2 + \Gamma^2} + A_1 c \frac{A_1^2 - \Gamma^2}{A_1^2 + \Gamma^2} \right] \\ &= \frac{E}{A_1^2 v} \left[\frac{v^2 z}{A_1} + c \frac{2c\Gamma + A_1^2 - \Gamma^2}{A_1^2 + \Gamma^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist} \quad 2c\Gamma + A_1^2 - \Gamma^2 &= 2c^2 + 2cvx + \frac{v^2 \cos \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} - 2c^2 - 2cvx \\ &= \frac{v^2 \cos \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{2c\Gamma + A_1^2 - \Gamma^2}{A_1^2 + \Gamma^2} = \frac{v^2 \cos \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} : \frac{v \Sigma}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{v \cos \beta}{\Sigma},$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad t &= \frac{E}{A_1^2 v} \left[\frac{v^2 z}{A_1} + \frac{cv \cos \beta}{\Sigma} \right] = \frac{E}{A_1^2} \left[\frac{vz}{A_1} + \frac{c \cos \beta}{\Sigma} \right] \\ &= \frac{E}{v^2 - c^2} \left[\frac{2v}{A_1} \arctg \frac{\Gamma}{A_1} + \frac{c \cos \beta}{\Sigma} \right], \text{ wie in Gl. (VII).} \end{aligned}$$

Für $c > v$ geht dieser Ausdruck über in

$$t = - \frac{E}{c^2 - v^2} \left[\frac{v}{A} \left| \frac{A - \Gamma}{A + \Gamma} + \frac{c \cos \beta}{\Sigma} \right| \right].$$

$$2. c = v.$$

In diesem Falle wählen wir zur Integration die Gl. (IV):

$$r\Sigma = C \left(\frac{\Gamma + \Lambda}{\Gamma - \Lambda} \right)^B, \text{ also } dt = \frac{C}{\Sigma^2} \left(\frac{\Gamma + \Lambda}{\Gamma - \Lambda} \right)^B d\beta.$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad \Sigma &= v(\sin \psi + \sin \beta) \quad \Gamma = v + v \sin \psi \cdot x \quad A = v \cos \psi \\ & \quad B = 1, \end{aligned}$$

$$\text{woraus folgt} \quad x = \frac{\Gamma - v}{v \sin \psi} \quad dx = \frac{d\Gamma}{v \sin \psi} \quad d\beta = \frac{2 dx}{1 + x^2}$$

also

$$\begin{aligned} r + x^2 &= \frac{v^2 \sin^2 \psi + (\Gamma - v)^2}{v^2 \sin^2 \psi} & \Sigma &= \frac{\Gamma^2 - A^2}{v \sin \psi (\Gamma + x^2)}, \\ \frac{d\beta}{\Sigma^2} &= \frac{2 dx}{r + x^2} \cdot \frac{v^2 \sin^2 \psi (\Gamma + x^2)^2}{(\Gamma^2 - A^2)^2} = \frac{2 v^2 \sin^2 \psi (\Gamma + x^2) dx}{(\Gamma^2 - A^2)^2} \\ &= \frac{2 v \sin \psi (\Gamma + x^2) d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} = \frac{v^2 \sin^2 \psi + (\Gamma - v)^2}{v^2 \sin^2 \psi} \cdot \frac{2 v \sin \psi}{(\Gamma^2 - A^2)^2} d\Gamma \\ &= \frac{v^2 \sin^2 \psi + (\Gamma - v)^2}{v \sin \psi} \cdot \frac{2 d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} \\ dt &= \frac{v^2 \sin^2 \psi + (\Gamma - v)^2}{v \sin \psi} \cdot \frac{2 C d\Gamma}{(\Gamma^2 - A^2)^2} \cdot \frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} \\ &= \frac{v^2 \sin^2 \psi + (\Gamma - v)^2}{v \sin \psi} \cdot \frac{2 C d\Gamma}{(\Gamma + A)(\Gamma - A)^3}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für dt muß nach dem bekannten Verfahren in Partialbrüche zerlegt werden. Wir setzen deshalb

$$\frac{v^2 \sin^2 \psi + (\Gamma - v)^2}{(\Gamma + A)(\Gamma - A)^3} = \frac{a_1}{\Gamma + A} + \frac{b_1}{(\Gamma - A)^3} + \frac{b_2}{(\Gamma - A)^2} + \frac{b_3}{\Gamma - A},$$

also $v^2 \sin^2 \psi + (\Gamma - v)^2 = a_1 (\Gamma - A)^3 + b_1 (\Gamma + A) + b_2 (\Gamma^2 - A^2) + b_3 (\Gamma^2 - A^2) (\Gamma - A)$ (a).

Zur Bestimmung von a_1, b_1, b_2, b_3 differenzieren wir diese Gleichung wiederholt nach Γ und erhalten

$$2(\Gamma - v) = 3a_1(\Gamma - A)^2 + b_1 + 2b_2\Gamma + b_3(3\Gamma^2 - A^2 - 2A\Gamma) \dots \dots (b)$$

$$2 = 6a_1(\Gamma - A) + 2b_2 + b_3(6\Gamma - 2A) \dots \dots \dots (c)$$

$$0 = 6a_1 + 6b_3 \dots \dots \dots (d)$$

Setzen wir in diesen Gl. (a) bis (c) $\Gamma = +A$, so kommt

$$v^2 \sin^2 \psi + (A - v)^2 = 2b_1 A \dots \dots \dots (e)$$

$$2(A - v) = b_1 + 2b_2 A \dots \dots \dots (f)$$

$$2 = 2b_2 + b_3 \cdot 4A \dots \dots \dots (g)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir wegen $A = v \cos \psi$

aus (d): $a_1 = -b_3$

(e): $v^2 - 2v^2 \cos \psi + v^2 = 2b_1 v \cos \psi$, woraus $b_1 = \frac{v(1 - \cos \psi)}{\cos \psi}$

(f): $2(v \cos \psi - v) = b_1 + 2b_2 v \cos \psi$

$$-2 \cos \psi b_1 = b_1 + 2b_2 v \cos \psi$$

$$-b_1(1 + 2 \cos \psi) = 2b_2 v \cos \psi$$

$$b_2 = -b_1 \frac{1 + 2 \cos \psi}{2v \cos \psi} = \frac{2 \cos^2 \psi - \cos \psi - 1}{2 \cos^2 \psi}$$

aus (g): $2b_3 v \cos \psi = 1 - b_2$

$$b_3 = \frac{1 - b_2}{2v \cos \psi} = \frac{1 + \cos \psi}{4v \cos^3 \psi}$$

Mit diesen Werten von a_1, b_1, b_2, b_3 wird

$$dt = \frac{2C}{v \sin \psi} \left(\frac{a_1}{\Gamma + A} + \frac{b_1}{(\Gamma - A)^3} + \frac{b_2}{(\Gamma - A)^2} - \frac{a_1}{\Gamma - A} \right) d\Gamma,$$

also

$$\begin{aligned} t &= \frac{2C}{v \sin \psi} \left(a_1 l(\Gamma + A) - a_1 l(\Gamma - A) - \frac{b_1}{2(\Gamma - A)^2} - \frac{b_2}{\Gamma - A} \right) \\ &= \frac{2C}{v \sin \psi} \left(a_1 l \frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} - \frac{b_1}{2(\Gamma - A)^2} - \frac{b_2}{\Gamma - A} \right) \dots \dots \dots (XIII) \end{aligned}$$

$$= \frac{2C}{v \sin \psi} \left(a_1 \frac{\Gamma + A}{\Gamma - A} - \frac{b_1 [v \cos \psi - (1 + 2 \cos \psi)(\Gamma - A)]}{2v \cos \psi (\Gamma - A)^2} \right),$$

3. $\cos \psi = 0$ und zugleich $c = v$.

In diesem Falle werden alle bisher entwickelten Ausdrücke für t unbrauchbar. Man hat aber alsdann

$$r = \frac{E}{\Sigma} \text{ nach (VII) und } rd\beta = \Sigma dt \text{ nach (II),}$$

also $dt = \frac{r}{\Sigma} d\beta = \frac{E}{\Sigma^2} \cdot d\beta$. Aber $\Sigma = \frac{v(1+x)^2}{1+x^2}$ und $d\beta = \frac{2dx}{1+x^2}$,

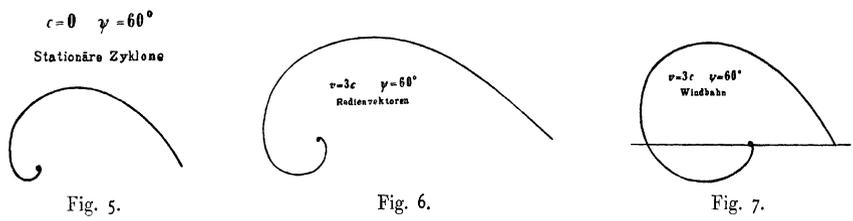
also $dt = \frac{E(1+x)^2}{v^2(1+x)^4} \cdot \frac{2dx}{1+x^2} = \frac{2E(1+x)^2 dx}{v^2(1+x)^4} = \frac{2E}{v^2} \frac{dx}{(1+x)^2} + \frac{2Ex^2 dx}{v^2(1+x)^4}$,

und z. B. nach Schlömilch, Übungsbuch Band 2, S. 4, Zeile 1 für $a = 1, b = 1$

$$\begin{aligned} t &= \frac{2E}{v^2} \cdot \frac{-1}{3(1+x)^3} + \frac{2E}{v^2} \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{3(1+x)^3} \right) \\ &= \frac{2E}{v^2} \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{3(1+x)^3} \right) = \frac{2E}{v^2} \left(-\frac{x}{(1+x)^2} - \frac{2}{3(1+x)^3} \right) \\ &= -\frac{2E}{v^2} \left(\frac{x}{(1+x)^2} + \frac{2}{3(1+x)^3} \right) = -\frac{2E}{v^2} \frac{3x^2 + 3x + 2}{3(1+x)^3} \dots \dots \dots \text{(XIV).} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (XII), VIII), (XIII) und (XIV) sind ausreichend, um für alle vorkommenden Fälle die Windbahnen zu berechnen. Führt man jetzt rechtwinklige Koordinaten ξ und η ein und läßt man die ξ -Achse mit der Bahn des Zentrums der Zyklone zusammenfallen, so erhält man $\xi = ct + r \cos \beta, \eta = r \sin \beta$ als Gleichungen der Windbahn.

Aus den hiermit konstruierten Kurven ist in den Fig. 5—14 eine Auswahl beigefügt, und zwar besonders für den Ablenkungswinkel 60° , welcher für Mitteleuropa als der normale zu bezeichnen ist. Die erste Kurve (Fig. 5) zeigt die logarithmische Spirale der stationären Zyklonen. Fig. 6 und 7 gelten für den Fall, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Zentrums gleich dem dritten Teil der Windgeschwindigkeit ist, und zwar zeigt Fig. 7 die Windbahn, Fig. 6 die



Luftbewegung, wenn man sich das Zentrum als feststehend denkt. Man sieht hieraus, wie infolge der Verschiebung des Zentrums das zyklonale Luftsystem in der Richtung von vorn nach hinten zusammengedrückt, in der Richtung von links nach rechts auseinandergezogen wird. Obgleich diese Kurven dem wiederholten Umlauf um das Zentrum gelten, sehen wir wegen des nicht sehr großen Ablenkungswinkels doch schon die erste Wiederholung in so kleinem Maßstab gegenüber dem vorhergehenden Umlauf, daß sie für die Praxis kaum noch in Betracht kommt. Noch mehr gilt dies von Fig. 8. Den Grenzfall, $c = v \sin \psi$ stellt Fig. 9 dar. Hier ist eine Wiederholung des Umlaufs auch in der Theorie nicht mehr vorhanden und alle Wind-

bahnen des Systems gehen schließlich durch den nämlichen Punkt. Figur 10 gilt für den Fall $c = v$, in welchem die Windbahnen danach streben, eine dem Zentrum parallele Richtung auf der rechten Seite des Systems einzuschlagen. Wenn die Wiederholung der Umläufe sich geltend

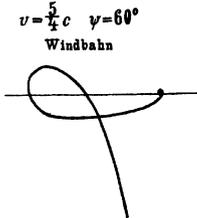


Fig. 8.

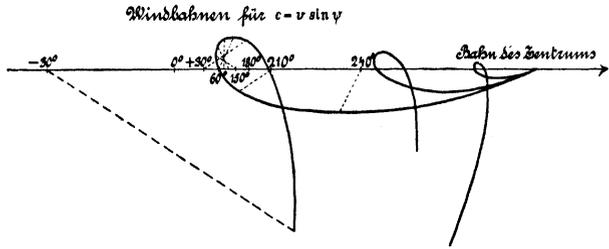


Fig. 9.

machen soll, ist ein beträchtlich größerer Ablenkungswinkel erforderlich. Das sehen wir an Fig. 11, wo $\psi = 75^\circ$, und an Fig. 12, wo $\psi = 90^\circ$, die Zyklone also zentriert ist. Letztere Figur läßt auch erkennen, welche Windbahnen der in Fig. 4, S. 22 dargestellten ellipsenförmigen Umkreisung des Zentrums entsprechen.

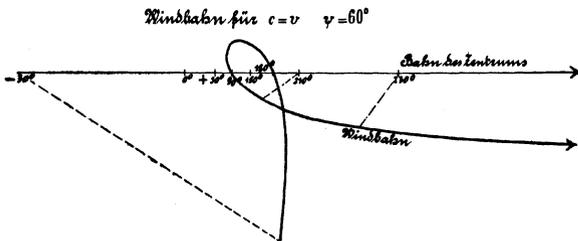


Fig. 10.

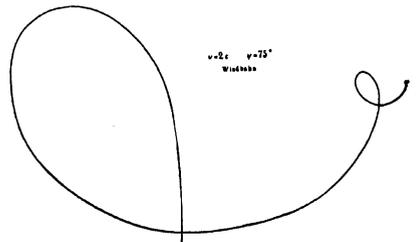


Fig. 11.

Aus den Fig. 13 und 14 endlich, in denen $c = 2v$ genommen ist, ersieht man, wie bei größerem c die Bewegung des großen Feldes zu der des kleinen sich verhält. Innerhalb jeder Figur sind beide Kurven mit gleichem Werte der Integrationskonstante E konstruiert; sie

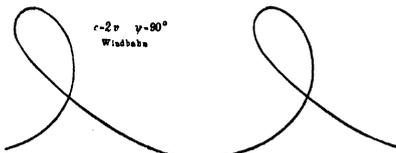


Fig. 12.

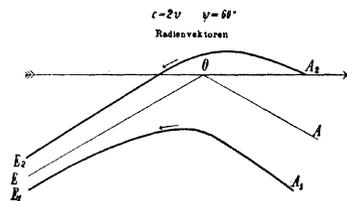


Fig. 13.

unterscheiden sich nur dadurch, daß in der einen Kurve β alle diejenigen Werte hat, die ihm in der anderen fehlen. Durch bloße Veränderung des Maßstabes der von O aus gezogenen Radienvektoren in Fig. 13 erhält man aus $A_1 E_1$ alle Kurven des Systems im kleinen Felde,

aus $A_2 E_2$ alle Kurven im großen Felde. Diese Kurvenschar bietet dasselbe Bild, wie die S. 26 besprochene Hyperbelschar bei überall gleicher Geschwindigkeit v .

Die Windbahn für dasselbe System stellt Fig. 14 dar. Alle Luftteilchen kommen aus dem Unendlichen, aus einem Punkte, der dem Strahl OA angehört. Von hier aus gehen sie entweder an dessen linker Seite bis in die Nähe der Bahn des Zentrums, biegen dort um, durchschneiden OA und nähern sich dem Strahl OE, um ihn im Unendlichen zu erreichen. Diese Luftteilchen, die einen einfachen Bogen auf der rechten Seite der Zyklone beschreiben, gehören dem kleinen Felde an. Diejenigen des großen Feldes gehen dagegen an der rechten Seite von OA bis auf die linke Zyklonenseite, beschreiben hier eine Schleife und nähern sich dann ebenfalls dem Strahl OE, um ihn im Unendlichen zu erreichen. Zieht man von O aus Tangenten an die Kurven in Fig. 14, so begrenzen diese das Gebiet der Zyklone. Alle links davon gelegenen Teile der Ebene liegen außerhalb des Bereichs des Luftwirbels.

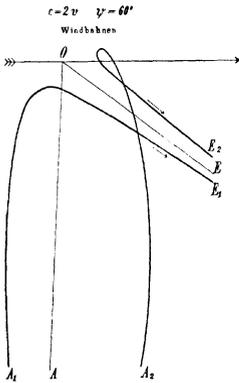


Fig. 14.

Die gewonnenen Resultate lassen deutlich erkennen, daß es ganz unzulässig ist, die Luftbewegung in wandernden Zyklonen in der Weise zu konstruieren, wie es Ferrel versucht hat, indem er die Spiralbewegung der Luftteilchen mit der geradlinigen Fortbewegung der Zyklone nach dem Parallelogramm der Bewegung zusammensetzte. Die Formen der Ellipsen und Hyperbeln in der Fig. 4, S. 22 zeigen vielmehr, daß bei zentrierten Zyklonen eine solche Zusammensetzung nur dann ausführbar wäre, wenn man zuvor die um das Zentrum gehende Bahn der Luftteilchen in der Richtung der Zentrumsbahn zusammendrücken wollte. Dasselbe gilt, wie die nebenstehenden Kurven zeigen, auch für die nicht zentrierten Zyklonen.

Schlußbemerkungen.

Als ich die vorstehenden Untersuchungen in Angriff nahm, war mein Augenmerk zunächst darauf gerichtet, irgend eine Methode zu finden, nach welcher der Aufbau der in der Natur vorkommenden Wirbel, die Bewegungen ihrer Bestandteile und die Druckverhältnisse, aus denen sie hervorgehen, möglichst allgemein mathematisch erfaßt werden können. Ich dachte dabei nicht nur an die atmosphärischen Wirbel, sondern auch an die Planeten, die doch auch im Grunde genommen sich so bewegen, als ob der Äther, in dem sie schwimmen, einen fortschreitenden Wirbel bildet. Ich dachte auch an die Bewegung der Rauchteilchen, die in fortschreitenden Wirbeln den Essen entströmen. Wenn man alle diese Bewegungen unter einem allgemeinen Gesichtspunkt zu betrachten lernt, wird man die eine Bewegungsart in die andere überführen können. In den Strömungslinien des Rauches, die man ja photographisch festhalten kann, wird man ein die Anschauung förderndes Abbild der atmosphärischen Wirbel erkennen. Noch auf eine andere Frage, die hiermit in Zusammenhang steht, sollte die aufzustellende Methode Auskunft geben, nämlich darüber, ob und unter welchen Umständen es sich bei den fortschreitenden atmosphärischen Wirbeln nur um den Transport materieller Luftteilchen oder gleich-

zeitig auch um eine sich fortpflanzende Wellenbewegung handelt. Als ich einen Plan für mein Vorgehen aufstellen wollte, zeigte sich bald, daß es unausführbar sein würde, von der beobachteten Gestalt der Strömungslinien, etwa des Rauches, zu einer Vorstellung über den Bau des Wirbels, über die darin herrschenden Druckverhältnisse und die Größe des etwa vorhandenen Ablenkungswinkels zwischen dem Druckgradienten und der Bewegungsrichtung zu gelangen. Es blieb mir daher nur der umgekehrte Weg übrig, aus den Bewegungselementen die Strömungslinien zu errechnen. Mit den Formeln, zu denen ich so gelangte, kann man durch systematisches Vorgehen eine große Anzahl der verschiedensten Formen von Strömungslinien berechnen. Bringt man diese in übersichtlicher Weise zur Darstellung, wie es in den Fig. 5, 7—12 und 14 für einzelne Beispiele geschehen ist, so wird man eine solche Kurvensammlung benutzen können, um von jeder beliebigen zur Beobachtung gelangenden Strömungslinie anzugeben, wie beschaffen der Wirbel sein muß, dem sie angehört. So erkennen wir in Fig. 11 und 12 für größere Ablenkungswinkel Bewegungsformen, welche mit den Rauchwirbeln Verwandtschaft haben, und wenn wir berücksichtigen, daß die Rauchwirbel bei ihrer Bewegung auseinandergehen, würden wir sie mit solchen Zyklonen vergleichen, in denen ein Ablenkungswinkel besteht, der größer ist als 90° . Denn obgleich im Vorstehenden immer nur von Zyklonen mit einströmender Luftbewegung die Rede ist, sind die Rechnungen dennoch so allgemein gehalten, daß die gewonnenen Formeln ohne weiteres auch für Zyklonen mit ausströmender Bewegung, ja auch für Antizyklonen gelten. Im ersteren Falle würde eben der Ablenkungswinkel ein stumpfer, im letzteren ein überstumpfer Winkel sein. Handelt es sich schließlich aber um eine Bewegung über der südlichen Halbkugel, so braucht man nur den Phasenwinkel β nach der entgegengesetzten Richtung wachsen zu lassen. In gleicher Weise, wie bei den Rauchwirbeln, darf man darauf rechnen, die von einem aerostatischen Luftschiff in der Atmosphäre zurückgelegte Flugbahn in einer solchen Kurvensammlung wiederzufinden und dadurch die Form, die Lage und die allmähliche Verschiebung der Isobaren sowie die Größe des Ablenkungswinkels in derjenigen Luftschicht anzugeben, die der Luftballon durchfahren hat, wobei man sich natürlich auf solche Abschnitte der Fahrt beschränken muß, in denen die Flugbahn horizontal verläuft.

Abgeschlossen am 17. Mai 1911.
