Wittenbauer

Aufgaben
aus der
technischen Mechanik

I. Band. Allgemeiner Teil

Dritte Auflage

ISBN 978-3-662-35836-8 ISBN 978-3-662-36666-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-36666-0
Softcover reprint of the hardcover 3rd edition 1914

Vorwort zur dritten Auflage.

Dieses Buch bringt keine Probleme der Mechanik, sondern leichte Aufgaben, die von jedem Anfänger auf Grund von Vorlesungen über technische Mechanik gelöst werden können. Sie haben den Zweck, dem Studierenden eine Reihe einfacher Anwendungen vorzuführen, die ihm das Studium erleichtern und die Freude an der Arbeit erhöhen werden.

Den größten Teil der hier mitgeteilten Aufgaben habe ich für Unterrichtszwecke ersonnen. Aufgaben, deren ersten Autor ich ermitteln konnte, habe ich mit dem Namen desselben versehen. Insbesondere hatte ich folgenden Werken viel Anregung zu verdanken: W. Walton, Collection of Problems of the Theoretical Mechanics; E. J. Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsche Ausgabe von A. Schepp.

Gegenüber den beiden ersten Auflagen weist vorliegender Band eine Reihe neuer Aufgaben und Verbesserungen der Lösungen auf; für die zahlreichen Zuschriften und Vorschläge, die mir zukamen, sage ich an dieser Stelle besten Dank.

Herr Ingenieur Karl Kriso hat mir bei der Durchsicht dieser Auflage dankenswerte Hilfe geleistet.

Graz, im Jänner 1914.

F. Wittenbauer.

Inhaltsverzeichnis.

* Die mit diesem Zeichen versehenen Aufgaben erfordern die Kenntnis der Elemente der Differential- und Integral-Rechnung.

Bezeichnungen,

welche in diesem Buche verwendet wurden.

A = Mechanische Arbeit.
A_r = Reibungsarbeit.
$A\ B\ C$ = Summen der Teilkräfte nach drei senkrechten Richtungen.
$A\ B\ C$ = Auflagerdrücke.
D = Druck.
D = Durchmesser eines Kreises.
E = Leistung.
E_a = Absolute Leistung.
E_r = Leistung der Reibung.
F = Federkraft.
G = Gewicht.
G = Horizontaldruck, Horizontalzug.
J = Trägheitsmoment einer Fläche.
J_p = Polares Trägheitsmoment einer Fläche.
K = Kraft in besonderen Fällen; auch Dimension der Kraft.
L = Bewegungs-Energie.
L_o = Anfängliche Bewegungs-Energie.
L = Dimension der Länge.
M = Masse eines Körpers; auch Dimension der Masse.
M_1 = Masse des stoßenden Körpers.
M_2 = Masse des gestoßenen Körpers.
N = Anzahl der Pferdestärken.
O = Drehpol, Momentanzentrum.
P = Kraft im allgemeinen.
PS = Pferdestärke.
Q = Last.
Q = Wassermenge in der Sekunde.
R = Mittelkraft, Resultante.
R = Reibung.
R = Halbmesser eines Kreises oder einer Kugel.
S = Schwerpunkt.
S = Spannung eines Stabes, einer Kette oder eines Fadens.
S = Moment eines Kraftpaares in einer Dyname.
T = Zeit für besondere Werte, Schwingungsdauer, auch Dimension der Zeit.
T = Trägheitsmoment eines Körpers.
$U\ V\ W$ = Summe der Momente der Kräfte um drei senkrechte Richtungen.
V = Rauminhalt.
V = Vertikaldruck, Vertikalzug.
W = Widerstand.
$X\ Y\ Z$ = Teilkräfte nach drei senkrechten Richtungen.

a = Konstante des Luftwiderstandes.
a = Parameter der Kettenlinie.
$a\ b\ c$ = Richtungskonstanten einer Geraden.
b = Grundlinie von Dreieck und Rechteck.
b = Halbe Spannweite einer Kette.
c = Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung.
c = Doppelte Flächengeschwindigkeit.
c_1 = Geschwindigkeit des stoßenden Körpers an der Stoßstelle nach dem Stoß.
c_2 = Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers an der Stoßstelle nach dem Stoß.
d = Durchmesser eines Kreises.
e = Basis der natürlichen Logarithmen.
f = Zahl der gleitenden Reibung.

f_1 = Zahl der Zapfenreibung.
g = Beschleunigung der Schwere.
h = Höhe von Dreieck und Rechteck.
h = Ganghöhe der Schraubenlinie.
k = Anziehung der Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung.
k = Stoßzahl.
kg = Kilogramm.
l = Stablänge, Spannweite.
m = Masse eines Punktes.
m = Meter.
mkg = Meterkilogramm.
n = Anzahl der Umdrehungen in der Minute.
p = Druck auf die Flächeneinheit.
p = Halbparameter der Kegelschnittslinie.
q = Gewicht für die Längeneinheit.
r = Halbmesser eines Kreises oder einer Kugel.
s = Weg eines Punktes.
s = Sekunde.
t = Zeit.
t = Tonne.
v = Geschwindigkeit eines Punktes.
v_0 = Anfängliche Geschwindigkeit des Punktes.
v_1 = Geschwindigkeit des stoßenden Körpers an der Stoßstelle vor dem Stoß.
v_2 = Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers an der Stoßstelle vor dem Stoß.
v_r = Relative Geschwindigkeit.
v_s = Geschwindigkeit des Schwerpunkts, Geschwindigkeit des Systems.
x y z = Koordinaten eines Punktes.
x_s y_s z_s = Koordinaten des Schwerpunkts.

$\mathfrak{M}$ = Reduzierte Masse von M.
M = Moment der Kräfte um einen Punkt oder eine Achse.

α, β = Neigung von schiefen Ebenen.
α = Steigungswinkel der Schraubenlinie.
γ = Einheitsgewicht.
γ = Beschleunigung.
γ_a = Absolute Beschleunigung.
γ_n = Normalbeschleunigung.
γ_r = Relative Beschleunigung.
γ_s = Beschleunigung des Schwerpunkts, Beschleunigung des Systems.
γ_t = Tangentialbeschleunigung.
γ_z = Zusatz-Beschleunigung.
δ = Zeichen der virtuellen Verschiebung.
φ = Drehungswinkel.
$\varkappa$ = Widerstandszahl für den Transport auf Rädern.
λ = Winkelbeschleunigung.
μ = Dichte.
ϱ = Reibungswinkel.
ϱ = Trägheitshalbmesser.
ϱ = Krümmungshalbmesser.
τ = Translationsgeschwindigkeit.
τ_r = Relative Translationsgeschwindigkeit.
ξ η = Koordinaten des Stoßmittelpunkts.
ξ = Zahl der Seilsteifheit.
η = Güteverhältnis, Wirkungsgrad.
ζ = Rollenzahl (Zapfenreibung und Seilsteifheit).
ω = Winkelgeschwindigkeit.
ω_r = Relative Winkelgeschwindigkeit.

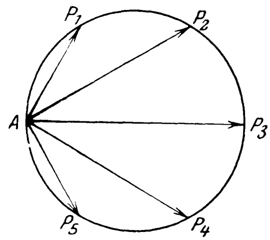
Aufgaben.

I. Kräfte und Gleichgewicht.

1. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt.

1. Fünf Kräfte, die in derselben Ebene liegen und den gleichen Angriffspunkt haben, besitzen folgende Größen und Richtungen: $P_1 = 10\,\text{kg}$, $P_2 = 15\,\text{kg}$, $P_3 = 26\,\text{kg}$, $P_4 = 8\,\text{kg}$, $P_5 = 12\,\text{kg}$; $\sphericalangle(P_2 P_1) = 50^0$, $\sphericalangle(P_3 P_1) = 160^0$, $\sphericalangle(P_4 P_1) = -100^0$, $\sphericalangle(P_5 P_1) = -40^0$. Man suche Größe und Richtung der Mittelkraft (graphisch und analytisch).

2. Es soll die Größe und Richtung der Mittelkraft von fünf Kräften bestimmt werden, die von A nach den Ecken eines regelmäßigen Sechseckes gerichtet sind und deren Größen durch die Längen dieser Linien dargestellt sind (graphisch und analytisch).



3. Eine Kraft $P = 280\,\text{kg}$ soll in zwei Teilkräfte zerlegt werden, deren Differenz $P_1 - P_2 = 100\,\text{kg}$ ist. Die Teilkraft P_1 ist gegen P unter 20^0 geneigt. Wie groß sind P_1 und P_2? Welchen Winkel α schließen sie ein?

4. Sechs Kräfte, die gemeinsamen Angriffspunkt besitzen, sollen durch zwei gleichgroße, aufeinander senkrecht stehende Kräfte ersetzt werden, deren Angriffspunkt von dem früheren eine gegebene Entfernung hat (graphisch).

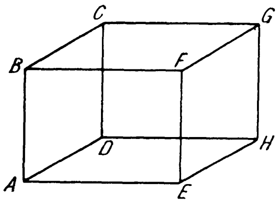
5. Zerlege eine Kraft P in zwei Teilkräfte P_1 und P_2, die im Verhältnis $1:2$ stehen. Suche den geometrischen Ort aller Kraftdreiecke, welche dieser Bedingung genügen.

6. Eine Kraft P soll in zwei Teilkräfte P_1 und P_2 zerlegt werden, für welche die Bedingung gestellt wird: $P_2 = \frac{3}{4} P_1$. Ferner soll P_2 mit P den doppelten Winkel einschließen wie P_1 mit P. Wie groß sind diese Winkel und die Teilkräfte?

7. Bei der Zerlegung einer Kraft P in zwei Teilkräfte P_1 und P_2 sei der Winkel der einen $\sphericalangle (P_1 P) = \alpha_1$ gegeben, hingegen der Winkel der anderen $\sphericalangle (P_2 P) = x$ unbekannt. Welche Beziehung besteht zwischen der Summe $S = P_1 + P_2$ der unbekannten Teilkräfte und dem Winkel x? Welchen größten und welchen kleinsten Wert kann S erreichen und für welche Werte von x?

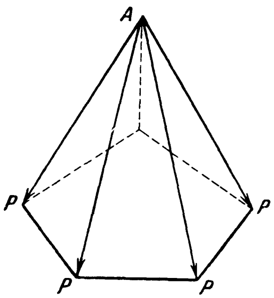
8. Eine Kraft $P = 20$ kg soll in zwei Teilkräfte zerlegt werden, die unter $\alpha = 40^0$ gegeneinander geneigt sind und im Verhältnis $1 : m = 1 : 2{,}5$ stehen. Wie groß sind diese Teilkräfte und welche Winkel α_1 α_2 schließen sie mit P ein?

9. Es sind drei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt gegeben. Sie sollen durch drei andere von gleicher Mittelkraft ersetzt werden, die auf den gegebenen Kräften senkrecht stehen und von denen zwei untereinander gleich groß sind.



Aufg. 10.

10. In den Diagonalen AG, CE und HB eines rechtwinkligen Parallelepipedes wirken drei gleiche Kräfte P. Man suche ihre Mittelkraft.



Aufg. 11.

11. Vier gleich große Kräfte P bilden vier Kanten einer regelmäßigen fünfeckigen Pyramide. Wie groß ist ihre Mittelkraft und wo trifft sie die Grundfläche der Pyramide?

12. Ein System von sechs Kräften mit demselben Angriffspunkt hat, bezogen auf drei zueinander senkrechte Richtungen XYZ folgende Teilkräfte (in Krafteinheiten):

$$\begin{array}{lll}
P_{1x} = 5, & P_{1y} = 4, & P_{1z} = 3; \\
P_{2x} = 4, & P_{2y} = -3, & P_{2z} = 6; \\
P_{3x} = -2, & P_{3y} = 1, & P_{3z} = -7; \\
P_{4x} = -2, & P_{4y} = -3, & P_{4z} = -4; \\
P_{5x} = 1, & P_{5y} = -5, & P_{5z} = -8; \\
P_{6x} = -4, & P_{6y} = -8, & P_{6z} = 3.
\end{array}$$

Wie groß ist die Mittelkraft R dieses Systems und welche Winkel schließt sie mit XYZ ein?

13. Eine Kraft P soll in drei Teilkräfte $P_1 P_2 P_3$ zerlegt werden, für welche folgende Bedingungen zu erfüllen sind:

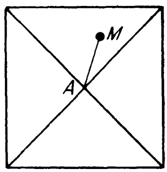
$$\sphericalangle (P_1 P_2) = (P_2 P_3) = (P_3 P_1) = 120^0,\ P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 2 : 3.$$

Wie groß sind diese Teilkräfte und welche Winkel schließen sie mit P ein?

14. Eine Kraft P soll in drei Teilkräfte $P_1 P_2 P_3$ zerlegt werden, die aufeinander senkrecht stehen; ihr Verhältnis ist 1 : 2 : 3. Wie groß sind diese Teilkräfte und welche Winkel schließen sie mit P ein?

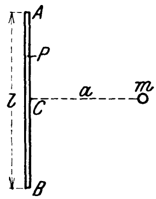
15. Drei Kräfte besitzen gleiche Größe P, gleichen Angriffspunkt und sind untereinander unter gleichen Winkeln α geneigt. Sie sollen durch drei andere Kräfte ersetzt werden, welche dieselbe Mittelkraft besitzen und auf den drei Ebenen der gegebenen Kräfte senkrecht stehen. Wie groß muß jede dieser drei Kräfte sein?

16. In der Mitte A eines Quadrates ruht ein Punkt, der durch vier gleichgespannte elastische Fäden mit den Ecken verbunden ist. Man bringt sodann den Punkt in eine beliebige Lage M und läßt ihn aus. Welche Kraft wirkt auf M ein, wenn die Spannungen der elastischen Fäden ihren Längen proportional sind? (Walton.)



***17.** In der Verlängerung eines homogenen Stabes von der Länge l und der Masse M befindet sich eine Punktmasse m, die von allen Punkten des Stabes nach dem Newtonschen Gesetz angezogen wird. Wie groß ist die Gesamtanziehung, die auf m ausgeübt wird?

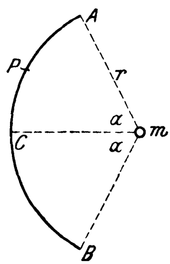
***18.** Ein homogener Stab von der Länge l und der Masse M wird von der symmetrisch gelegenen Punktmasse m nach dem Newtonschen Gesetz angezogen. Wie groß ist die Gesamtanziehung, die auf m ausgeübt wird?



Aufg. 18.

***19.** Ein Kreisbogen, über den die Masse M gleichförmig verteilt ist, wird von einer Punktmasse m im Mittelpunkt nach dem Newtonschen Gesetz angezogen. Wie groß ist die Gesamtanziehung des Bogens auf m?

***20.** Die Oberfläche einer Halbkugel ist homogen mit der Masse M belegt und wird von der Masse m im Mittelpunkt der Kugel nach dem Newtonschen Gesetz angezogen. Man suche Richtung und Größe der Gesamtanziehung.



Aufg. 19.

2. Gleichgewicht des Punktes.

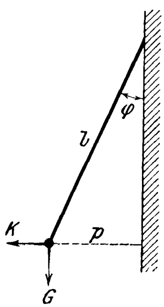
21. An einen vertikal herabhängenden elastischen Faden wird ein Gewicht G gehängt. In welcher Tiefe x unter der Anfangslage bleibt das Gewicht im Gleichgewicht, wenn die Spannung des Fadens proportional der Längenänderung ist?

22. Ein frei beweglicher Punkt m wird von zwei festen Massenpunkten m_1 und m_2 nach dem Newtonschen Gesetz angezogen. In welcher Entfernung x von m_1 bleibt m im Gleichgewicht, wenn a die Entfernung $m_1 m_2$ ist?

23. Ein frei beweglicher Punkt m wird von zwei festen Punkten m_1 m_2 angezogen, und zwar von m_1 verkehrt proportional, hingegen von m_2 direkt proportional der Entfernung. Die anziehenden Kräfte in der Einheit der Entfernung sind k_1 und k_2. An welchen Stellen ist m im Gleichgewicht? Wann ist es unmöglich?

24. Man verbinde den Schwerpunkt S eines Dreiecks mit den drei Ecken A, B, C. Die Strecken SA, SB, SC mögen Kräfte darstellen. Man beweise auf graphischem Weg, daß sie im Gleichgewicht sind.

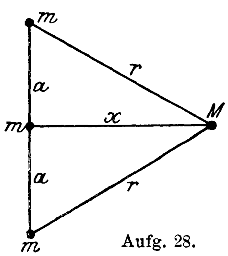
25. Drei Kräfte wirken in den Höhen eines Dreiecks; sie sind den zugehörigen Grundlinien proportional und nach den Ecken gerichtet. Man beweise, daß diese Kräfte im Gleichgewicht sind. (Petersen.)



Aufg. 26.

26. Ein Punkt vom Gewicht G ist an einem Faden von der Länge l aufgehängt und wird mit einer Kraft $K = G\frac{l}{p}$ horizontal abgestoßen. Bei welchem Winkel φ besteht Gleichgewicht? Wie groß ist die Spannung S des Fadens?

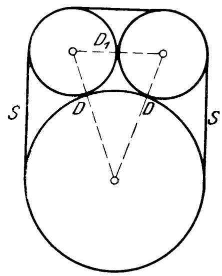
27. Drei feste Massenpunkte $m_1\, m_2\, m_3$ ziehen einen frei beweglichen Punkt m proportional den Massen und den Entfernungen an. Man rechne die Koordinaten der Gleichgewichtslage von m, wenn $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Koordinaten der drei festen Punkte sind.



Aufg. 28.

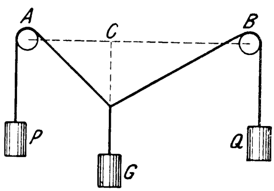
28. Drei gleiche Massenpunkte m liegen in gleichen Entfernungen a auf einer Geraden fest. Ein frei beweglicher Punkt M wird von den beiden äußeren Punkten m mit Kräften angezogen, die den Massen direkt und dem

Quadrat der Entfernung verkehrt proportional sind; von dem mittleren Punkt m wird M nach dem gleichen Gesetz abgestoßen. Bei welcher Entfernung x ist M im Gleichgewicht?

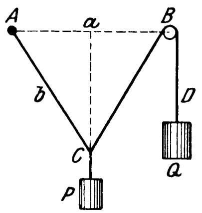


29. Über drei Walzen, von denen die eine den doppelten Durchmesser der andern hat, schlingt sich ein Seil, das mit der bekannten Spannung S angezogen wird. Welche Drücke D und D_1 üben die Walzen aufeinander aus?

30. Über zwei kleine glatte Rollen A und B läuft eine Schnur, die an drei Stellen mit P, G und Q belastet ist. In welchem Verhältnis werden AC und CB stehen?



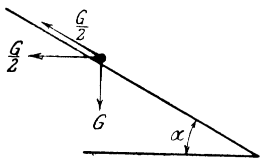
Aufg. 30.

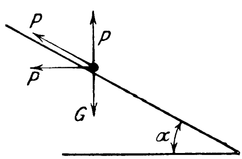


Aufg. 31.

31. Ein Seil ist in A befestigt und geht bei B über eine kleine glatte Rolle. Es trägt bei C und D zwei Gewichte P und Q, deren Verhältnis zu bestimmen ist, wenn die Richtung von P die Strecke $AB = a$ halbieren soll ($AC = b$). (Walton.)

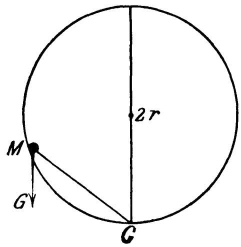
32. Ein schwerer Punkt vom Gewicht G liegt auf einer geneigten Ebene; er wird durch zwei gleiche Kräfte $\frac{G}{2}$, von denen die eine horizontal, die andere in der Ebene aufwärts wirkt, im Gleichgewicht erhalten. Unter welchem Winkel α ist die Ebene geneigt? Wie groß ist der Druck des Punktes auf die Ebene?



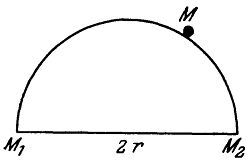


33. Ein Punkt vom Gewicht G wird auf einer schiefen Ebene, die unter α geneigt ist, von drei Kräften P im Gleichgewicht erhalten, die in der gezeichneten Weise wirken. Wie groß muß P sein und wie groß ist der Widerstand D der Ebene?

34. Ein Punkt M vom Gewicht G kann auf einer vertikalen, glatten Kreisbahn gleiten und wird vom tiefsten Punkt C mit einer Kraft abgestoßen, die dem Quadrat der Entfernung verkehrt pro-



portional ist. k ist die Abstoßung in der Einheit der Entfernung. An welchen Stellen des Kreises ist M im Gleichgewicht? Wie groß ist der Widerstand W der Unterstützung?

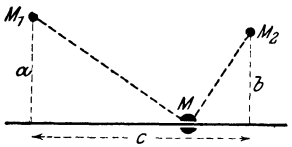


35. Ein frei beweglicher Punkt M, der längs eines glatten Halbkreises gleiten kann, wird von den Endpunkten des Durchmessers $M_1 M_2$ proportional den Entfernungen angezogen. k sei die Anziehung in der Einheit der Entfernung. An welchen Stellen des Halbkreises bleibt M im Gleichgewicht? Wie groß ist der Widerstand der Unterstützung?

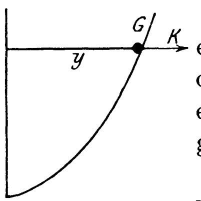
36. Ein Massenpunkt m wird von drei gleichen Massenpunkten, die in den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks liegen, nach dem Newtonschen Gesetz angezogen und befindet sich in dem Halbierungspunkt der Dreieckshöhe im Gleichgewicht. In welchem Verhältnis müssen Grundlinie b und Höhe des Dreiecks h stehen?

37. Ein frei beweglicher Punkt wird von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ proportional den Entfernungen angezogen. Die Anziehungen dieser drei Punkte in der Einheit der Entfernung stehen im Verhältnis $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 2 : 3$. In welchen Entfernungen $r_1 r_2 r_3$ von $m_1 m_2 m_3$ ist der Punkt im Gleichgewicht?

38. Ein Punkt M, der auf einer Geraden gleiten kann, wird von zwei außerhalb der Geraden liegenden Punkten $M_1 M_2$ verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung angezogen. Er befindet



sich im Gleichgewicht, wenn $M_1 M$ senkrecht steht zu $M_2 M$. In welcher Beziehung müssen die Stücke a, b, c stehen? Wie groß ist der Widerstand W der Geraden, wenn k die Anziehung in der Einheit der Entfernung ist?

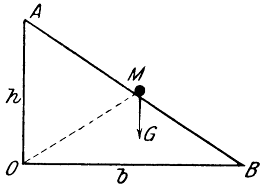


Aufg. 39.

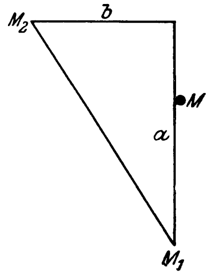
39. Auf einem parabolischen Bogen kann ein schwerer Punkt G gleiten, der von der Achse der Parabel mit einer Kraft K abgestoßen wird; es sei $K = ky$. An welcher Stelle ist G im Gleichgewicht? (Walton.)

40. Ein schwerer Punkt M mit dem Gewicht G liegt auf der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks OAB und wird von O verkehrt proportional dem

Quadrat der Entfernung angezogen. Er befindet sich in der Mitte der Hypothenuse $AB = l$ im Gleichgewicht. Wie groß ist die Anziehung k in der Einheit der Entfernung? Wie groß ist der Widerstand der Hypothenuse? Wann wird das Gleichgewicht unmöglich?

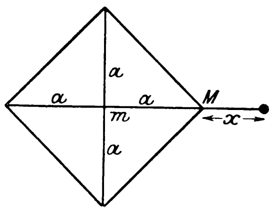


Aufg. 40.



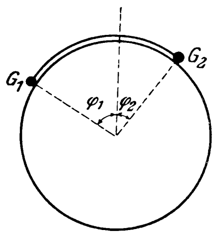
Aufg. 41.

41. Ein beweglicher Punkt M kann längs der Seite a eines rechtwinkligen Dreiecks gleiten und wird von dessen Ecken $M_1 M_2$ proportional den Entfernungen angezogen. k sei die anziehende Kraft in der Einheit der Entfernung. An welcher Stelle ist M im Gleichgewicht? Wie groß ist dort der Widerstand W der Dreieckseite a?



Aufg. 42.

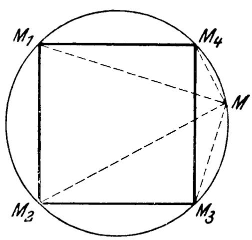
42. Eine kleine Masse m wird durch vier gleichlange, gleichgespannte elastische Fäden a mit vier Punkten verbunden, die in den Ecken eines Quadrates liegen. Wenn einer dieser Punkte um x in der Diagonale des Quadrates verschoben wird, um wieviel (z) verschiebt sich die Gleichgewichtslage von m? Wie groß muß x gemacht werden, damit m nach M kommt? Die Fadenspannung ist der Fadenlänge proportional.

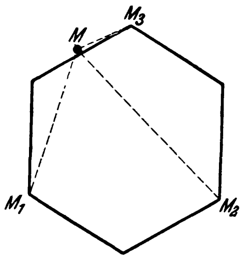


Aufg. 43.

43. Auf einem glatten Kreise sind zwei schwere Punkte G_1 und G_2, die durch einen undehnbaren Faden verbunden sind, im Gleichgewicht. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2?

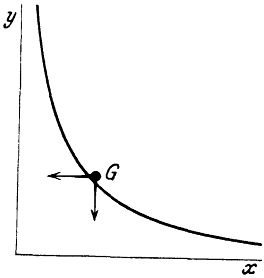
44. Die Eckpunkte eines Quadrates M_1 M_2 M_3 M_4 ziehen einen beweglichen Punkt M proportional den Entfernungen an. Die Anziehungen in der Einheit der Entfernung seien beziehungsweise $k_1 = k$, $k_2 = 2\,k$, $k_3 = 3\,k$, $k_4 = 4\,k$. Der Punkt M kann sich nur auf dem Umfang eines glatten Kreises bewegen, welcher dem Quadrat umschrieben ist. An welchen Stellen des Kreises ist M im Gleich-





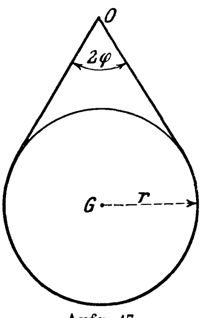
gewicht? Wie groß ist der Widerstand W der Unterstützung an diesen Stellen?

45. Ein frei beweglicher Punkt M kann am glatten Umfang eines regelmäßigen Sechseckes gleiten und wird von den drei Ecken $M_1 M_2 M_3$ proportional den Entfernungen angezogen. An welchen Stellen befindet sich M im Gleichgewicht?

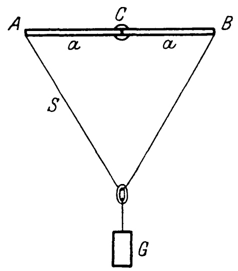


46. Ein schwerer Punkt vom Gewicht G kann auf einer gleichseitigen Hyperbel gleiten. Welche Horizontalkraft H muß auf den Punkt ausgeübt werden, damit er an jeder Stelle der Hyperbel im Gleichgewicht bleibt? Wie groß ist der Druck D zwischen Punkt und Hyperbel?

47. Um eine Walze vom Gewicht G wird ein elastischer Faden geschlungen und geknüpft. Solange seine Länge $l_0 = 2\,r\pi$ ist, bleibt der Faden ungespannt. Nun wird der Faden und mit ihm die Walze in einem Punkt O aufgehoben. Man berechne den Winkel φ für Gleichgewicht.

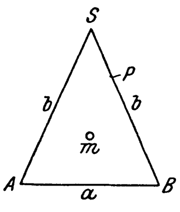


Aufg. 47.



Aufg. 48.

48. An die Enden eines Stabes AB = 2 a, der um seinen Mittelpunkt C drehbar ist, wird ein Seil von der Länge 2 l geknüpft, an dem ein Ring mit dem Gewichte G gleiten kann. Wenn der Stab um den Winkel φ gedreht wird, wie groß ist die Spannung S im Seil?



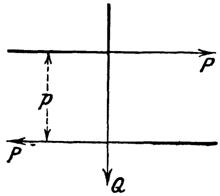
Aufg. 50.

49. Wenn in voriger Aufgabe der Ring, der das Gewicht trägt, in der Mitte des Seiles festgeknüpft ist, wie ändern sich die Seilspannungen S_1 und S_2 bei der Drehung des Stabes um den Winkel φ?

50. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleichförmig mit Masse belegt, die einen Massenpunkt m im Innern des Dreiecks nach dem Newtonschen Gesetz anzieht. An welcher Stelle ist m im Gleichgewicht?

3. Das ebene Kraftsystem.

51. Von den drei Kräften PPQ, deren erste ein Kraftpaar bilden, soll ohne Parallelogramm oder Seileck die Mittelkraft gesucht werden.



Aufg. 51.

52. Man nehme drei Kräfte mit beliebigen Angriffspunkten und drei Kraftpaare an und suche ihre Mittelkraft auf zwei verschiedene Arten. (Graphisch.)

53. Gegeben sind vier Parallelkräfte von verschiedener Richtung; man suche jene Kraft, die mit ihnen ein Kraftpaar von gegebenem Moment bildet. (Graphisch.)

54. Eine gegebene Kraft P soll in vier Parallelkräfte zerlegt werden, deren Lagen gegeben sind; es soll $P_1 : P_2 = 1 : 2$ und $P_3 : P_4 = 3 : 4$ sein. Wie groß sind diese vier Kräfte? (Graphisch.)

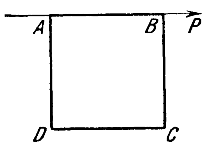
55. Gegeben sind drei parallele Kräfte und zwei zu ihnen parallele Gerade. Welche Kräfte müssen in letzteren wirken, wenn Gleichgewicht bestehen soll? (Graphisch.)

56. Eine gegebene Kraft P soll in drei Parallelkräfte zerlegt werden, deren Lagen gegeben sind; eine von ihnen ist die Summe der beiden andern. (Graphisch.)

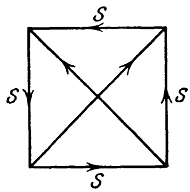
57. Eine gegebene Kraft P soll in drei Parallelkräfte zerlegt werden, die im Verhältnis $P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 2 : 3$ stehen. Von zweien dieser Kräfte ist auch die Lage gegeben. (Graphisch.)

58. Die Seiten eines ebenen Polygons, in derselben Richtung durchlaufen, stellen Kräfte dar. Welches ist ihre Mittelkraft?

59. Längs der Seite AB eines Quadrates ABCD wirke eine Kraft P; man zerlege sie in drei Teilkräfte, welche in den andern Seiten des Quadrates wirken.



Aufg. 59.



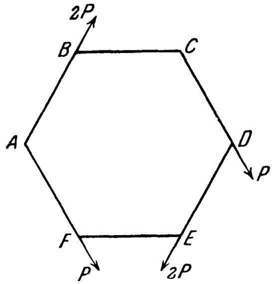
Aufg. 60.

60. In den Seiten und Diagonalen eines Quadrates wirken sechs Kräfte, deren Größen durch die Längen der betreffenden Geraden dargestellt und deren Richtungen durch die Pfeile gegeben sind. Man suche die Mittelkraft.

61. Vier Kräfte $P_1 = 5$ kg, $P_2 = 10$ kg, $P_3 = 4$ kg, $P_4 = 8$ kg besitzen in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P_1 \;.\;.\;.\;.\; & y = 1{,}5x + 2 \\ P_2 \;.\;.\;.\;.\; & y = 2x + 4 \\ P_3 \;.\;.\;.\;.\; & y = 0{,}5x - 6 \\ P_4 \;.\;.\;.\;.\; & x = 3. \end{aligned}$$

P_1 und P_4 drehen im Sinne des Uhrzeigers um den Koordinaten-Mittelpunkt, P_2 und P_3 in entgegengesetztem Sinne. Zu suchen ist die Größe, die Gleichung und der Drehungssinn der Mittelkraft.

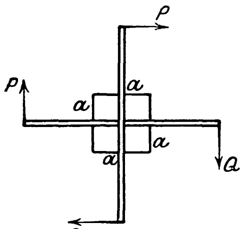


Aufg. 62.

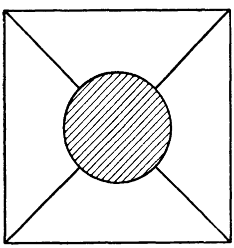
62. In den Seiten eines regelmäßigen Sechsecks wirken vier Kräfte von angegebener Größe und Richtung. Man suche die Mittelkraft.

63. Sechs parallele Kräfte haben folgende Größen: $P_1 = 6$ kg, $P_2 = -8$ kg, $P_3 = 2$ kg, $P_4 = 4$ kg, $P_5 = -3$ kg, $P_6 = -5$ kg; ihre Abstände voneinander sind der Reihe nach: 2 m, 3 m, 1 m, 4 m, 3 m. Wo liegt die Mittelkraft und wie groß ist sie? (Graphisch und rechnerisch.)

64. Die Kraft P soll in drei gleiche Teilkräfte $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{P}{n}$ zerlegt werden, welche in der gleichen Ebene liegen. Die Schnittpunkte $A_1 A_2 A_3$ dieser Teilkräfte mit P liegen in dieser Reihenfolge in der Kraftrichtung, und zwar ist $A_1 A_2 = A_2 A_3$. Welche Winkel $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ werden die Teilkräfte mit P einschließen?



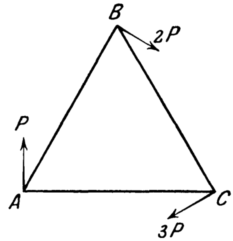
65. Ein Stangenkreuz von vier gleichen Armen a wird an den Enden von vier Kräften P, P, Q, Q senkrecht zu den Armen beansprucht ($P > Q$). In welchem Verhältnis müssen P und Q stehen, wenn die Mittelkraft aller Kräfte vom Mittelpunkt des Stangenkreuzes den Abstand 2a haben soll? Wie groß ist diese Mittelkraft?



66. Eine um ihre Achse drehbare Walze vom Halbmesser r wird von vier gleichgespannten Fäden gehalten, die nach den Ecken eines Quadrates gehen. Die Spannung der Fäden ist deren Länge proportional; sie ist k für die Fadenlänge gleich der Längeneinheit. Die Quadratseite ist doppelt so lang wie der Durchmesser der Walze. Man verdrehe diese um 90°; welche Mittelkraft werden die vier Fäden auf die Walze ausüben?

67. Ein gleichseitiges Dreieck wird von drei Kräften P, 2 P, 3 P angeregt, die senkrecht zu den Seiten des Dreiecks stehen.

Wie groß ist die Mittelkraft R und welche Richtung hat sie? (Graphisch und rechnerisch.)



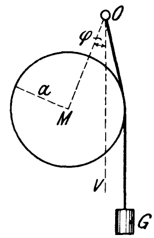
Aufg. 67.

68. In den Ecken des regelmäßigen Fünfecks ABCDE wirken fünf Kräfte, welche sämtlich nach dem Schnittpunkt O der Seiten AB und DE gerichtet und den Entfernungen der fünf Angriffspunkte A, B, C, D, E von O proportional sind. Man suche den Mittelpunkt dieses Kraftsystems.

69. In den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC von der Seitenlänge a wirken drei Kräfte u. zw. $P_1 = 2\,P$ in A, senkrecht zu BC, vom Dreieck abgewendet; $P_2 = P$ in B, parallel zu AC; $P_3 = P$ in C, parallel zu AB. Man suche den Mittelpunkt dieses Kraftsystems.

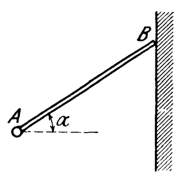
***70.** Zwei gegenüberliegende Seiten eines Rechtecks von der Länge l haben den Abstand a voneinander und sind gleichförmig mit Masse belegt. Die Punkte ziehen einander nach dem Newtonschen Gesetz an. Wie groß ist die Gesamtanziehung der beiden Seiten aufeinander?

4. Gleichgewicht des ebenen Kraftsystems.

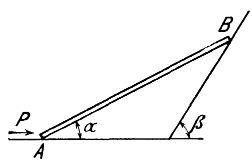


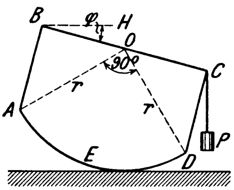
71. In O hängt eine Kugel vom Gewicht Q und ein Gewicht G, dessen Faden die Kugel berührt. Welchen Winkel φ wird OM mit der Vertikalen einschließen, wenn Gleichgewicht besteht? (Walton.)

72. Ein in A gelenkig befestigter Stab AB = a vom Gewicht G lehnt sich bei B an eine vertikale Wand. Der Schwerpunkt der Stange ist um b von A entfernt. Wie groß sind die Drücke in A und B? Welchen Winkel φ schließt der Gelenkdruck mit der Horizontalen ein?

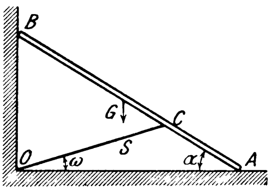


73. Ein Stab von gleicher Art wie in voriger Aufgabe stützt sich bei A an den glatten Boden, bei B an eine unter β geneigte glatte Wand. Welche Horizontalkraft P muß in A angebracht werden, damit der Stab im Gleichgewicht bleibt? Wie groß sind die Drücke in A und B?

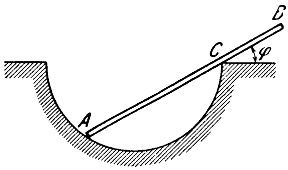




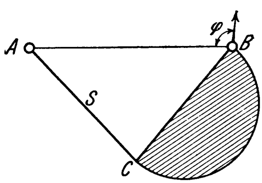
74. Ein prismatischer Körper von der Länge l, dem Querschnitt ABCDE und dem Einheitsgewicht γ ruht auf horizontaler Ebene. Er ist am Rande mit P belastet. Wie groß muß P sein, wenn der Stellungswinkel φ gegeben ist?



75. Eine schwere Stange $AB = 2a$ stützt sich an Wand und Boden und wird in C von einem Seil festgehalten. Bekannt sind das Gewicht G der Stange, sowie die Stellungswinkel α und ω. Wie groß ist die Spannung S im Seil?

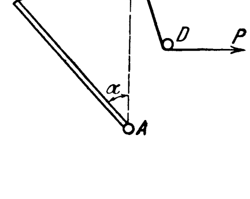


76. In eine glatte Hohlkugel vom Halbmesser r wird ein schwerer Stab $AB = 2a$ vom Gewicht G gelegt. Unter welchem Winkel φ bleibt der Stab im Gleichgewicht? Wie groß sind die Drücke in A und C?

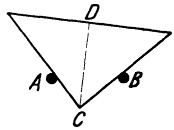


77. Eine Halbkreisfläche vom Gewicht G ist in B drehbar aufgehängt und wird in C durch einen Faden AC gehalten. ABC ist ein bei C rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck. Wie groß ist die Fadenspannung S und der Auflagerdruck in B? Welchen Winkel φ bildet dieser mit BA?

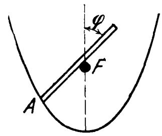
78. Ein schwerer Stab $AB = 2a$ vom Gewicht G ist bei A drehbar befestigt. Das Ende wird durch ein Seil gehalten, das über zwei Rollen C und D läuft. Wie groß muß die Zugkraft P des absolut biegsamen Seiles sein, damit der Stab unter einem bestimmten Winkel α im Gleichgewicht erhalten wird? Wie groß ist der Auflagerdruck in A und welchen Winkel φ schließt er mit der Vertikalen ein? Vorausgesetzt ist $AB = AC$.



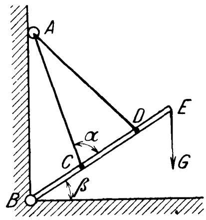
79. Ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck vom Gewicht G ruht mit den gleichen Seiten auf zwei glatten Nägeln A und B, die in gleicher Höhe liegen und den Abstand a besitzen. Welchen Winkel φ schließt die Höhe $CD = h$ des Dreiecks mit der Vertikalen ein, wenn Gleichgewicht besteht? Wie groß sind die Drücke in A und B? (Walton.)



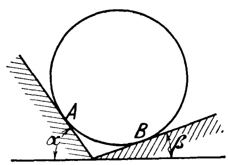
80. Ein schwerer Stab $AB = 2a$ vom Gewicht G stützt sich mit seinem untern Ende A an die Innenseite einer Parabel und liegt auf dem Brennpunkt derselben auf. Welchen Winkel φ schließt der Stab mit der vertikalen Achse der Parabel ein, wenn Gleichgewicht besteht? Wie groß sind die Drücke in A und F? (Walton.)



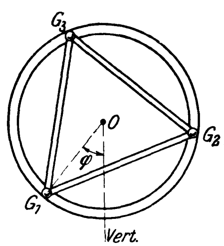
81. Am Ende E eines Stabes BE hängt ein Gewicht G; der Stab ist in B gelenkig befestigt und wird von einem biegsamen Faden CAD gehalten, der bei A durch einen glatten Ring läuft. Es ist $BC = DE$ und $AC = AD$. Wie groß ist die Fadenspannung S? Wie groß ist der Widerstand W im Gelenk und welchen Winkel φ bildet er mit BA? (Walton.)



82. Eine Walze vom Gewicht G liegt auf zwei schiefen Ebenen, die unter den Winkeln α und β geneigt sind. Wie groß sind die Drücke A und B an den Berührungsstellen? (Leibniz.)

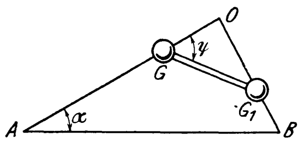


83. Drei kleine Kugeln mit den Gewichten $G_1 : G_2 : G_3 = 3:2:1$ können in einer vertikalen Kreis-Rinne laufen; sie sind durch drei gleichlange Stäbe miteinander verbunden. Man berechne für Gleichgewicht den Winkel φ.



Aufg. 83.

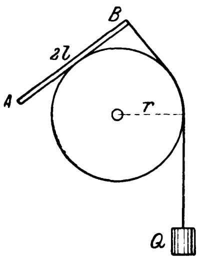
84. Auf zwei glatten Stangen AO, BO, die in einer vertikalen Ebene festliegen und zueinander senkrecht sind, können sich zwei Kugeln von den Gewichten G und G_1 bewegen. Die beiden Kugeln sind fest miteinander verbunden. Man suche den Winkel ψ für Gleichgewicht, wenn α gegeben ist; die beiden Drücke



Aufg. 84.

D, D_1 auf die Stangen; die Spannung S im Stabe GG_1.

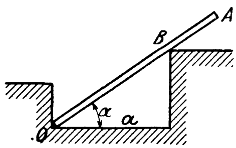
85. Ein Stab vom Gewicht G stützt sich auf eine glatte Walze und wird von einer gespannten Schnur gehalten, an deren Ende ein Gewicht Q hängt. Wie groß muß das Verhältnis $\frac{Q}{G} = z$ gemacht werden, wenn der Stab mit der Vertikalen einen gegebenen Winkel φ einschließen soll?



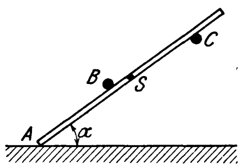
Aufg. 85.

86. Ein Stab $OA = 2l$ vom Gewicht G steckt in einer rechteckigen Grube. Es sollen die Drücke in O und B ermittelt werden.

87. Ein Stab vom Gewicht G stützt sich mit seinem Ende A an einen glatten Boden und wird überdies von zwei horizontalen Stäben B und C gehalten. Wie groß sind die Drücke in A, B und C? Die Entfernungen $AS = a$ (S Schwerpunkt), $BC = b$ und der Winkel α sind gegeben.



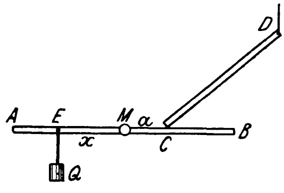
Aufg. 86.



Aufg. 87.

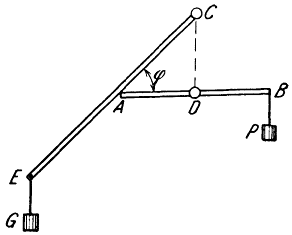
5. Gleichgewicht mehrerer Kraftsysteme in der Ebene.

88. Auf einen Stab AB, der um seinen Mittelpunkt M drehbar ist, stützt sich ein zweiter Stab CD vom Gewicht G, der bei D vertikal aufgehängt ist. An welcher Stelle E darf ein gegebenes Gewicht Q aufgehängt werden, damit AB im Gleichgewicht bleibt? (W a l t o n.)



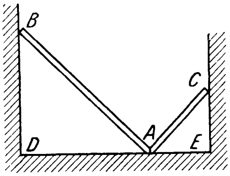
89. Zwei gewichtlose Stäbe AB und CE sind in C und D gelenkig befestigt und an den Enden B und E mit Gewichten P und G belastet. CD ist vertikal und $AD = CD = BD = a$, $CE = b$. Bei welchem Winkel φ bleiben die Stäbe im Gleichgewicht? Wie groß ist der gegenseitige Druck R in A? (W a l t o n.)

90. Zwei schwere Stäbe $AB = a$ und $AC = b$ mit den Gewichten G_1 und G_2 stützen sich bei A aneinander und bei B und C an vertikale Wände. Es soll die Entfernung $DE = x$ derselben so bestimmt werden, daß die Stäbe im Gleichgewicht sind, wenn sie aufeinander senkrecht stehen.

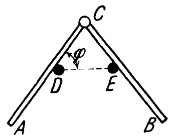


Aufg. 89.

91. Zwei gleich schwere Stäbe $AC = BC = 2l$ sind in C gelenkig verbunden und stützen sich in D und E auf zwei glatte Bolzen symmetrisch. Es ist $DE = a$. Bei welchem Winkel φ besteht Gleichgewicht?

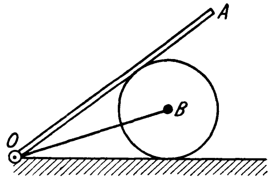


Aufg. 90.

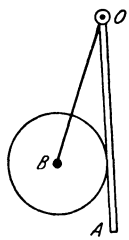


Aufg. 91.

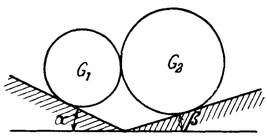
92. Ein schwerer Stab $OA = a$ vom Gewicht G ist bei O gelenkig befestigt und stützt sich an eine glatte Walze vom Halbmesser r, die durch einen Faden $OB = c$ in O festgehalten wird. Wie groß ist die Spannung S des Fadens? (Walton.)

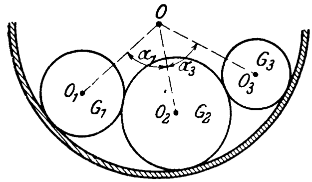


93. In O hängt an einem Faden eine Kugel vom Halbmesser r und vom Gewicht G, an welche sich ein schwerer Stab $OA = 2a$ vom Gewicht Q lehnt, der in O gelenkig befestigt ist. Welchen Winkel φ schließt der Faden $OB = b$ mit der Vertikalen ein, wenn Gleichgewicht besteht? (Walton.)

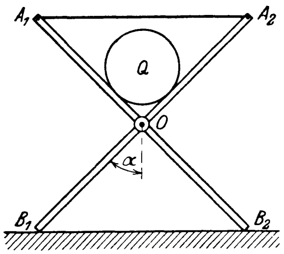


94. Zwei Walzen mit den Gewichten G_1 und G_2 ruhen auf zwei unter den Winkeln α und β geneigten glatten Ebenen. Welchen Winkel φ bildet die durch die Achsen der Walzen gehende Ebene mit der Horizontalebene, wenn Gleichgewicht besteht? (Walton.)

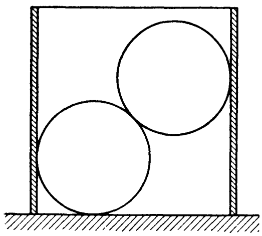


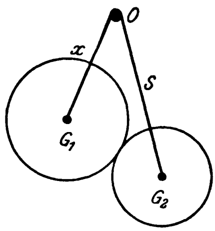


95. Drei Walzen mit den Gewichten $G_1 G_2 G_3$ liegen nebeneinander im Innern eines Hohlzylinders. Welchen Winkel φ schließt $OO_2 = r_2$ mit der Vertikalen ein, wenn Gleichgewicht besteht? Gegeben: $OO_1 = r_1$, $OO_3 = r_3$, $\sphericalangle O_1OO_2 = \alpha_1$, $\sphericalangle O_3OO_2 = \alpha_3$. (Walton.)



96. Zwei gleiche Stäbe $A_1B_2 = A_2B_1 = 2a$ vom Gewicht G sind in ihrer Mitte O gelenkig verbunden, stützen ihre untern Enden auf den horizontalen Boden und sind an den oberen Enden durch einen Faden A_1A_2 verbunden. Zwischen ihnen liegt eine Walze vom Halbmesser r und vom Gewicht Q. Es ist die Spannung des Fadens zu berechnen, wenn $\sphericalangle \alpha$ gegeben ist. (Walton.)

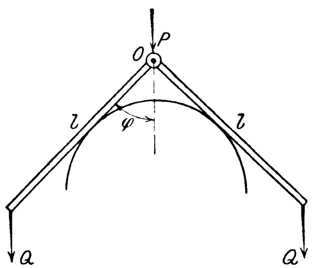

Aufg. 97.



Aufg. 98.

97. Zwei gleiche Kugeln vom Halbmesser r und dem Gewicht G werden in einen unten offenen Zylinder vom Halbmesser R gelegt, der auf horizontaler Fläche ruht. Wie groß muß das Gewicht Q des Zylinders sein, damit er durch die Kugeln nicht umgeworfen wird? (Walton.)

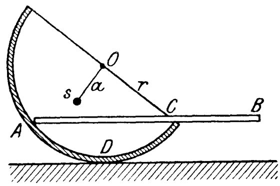
98. Zwei schwere Kugeln mit den Gewichten G_1 und G_2 sind durch einen Faden von der Länge l, der bei O über einen glatten Stift läuft, miteinander verbunden. Wie groß ist das Fadenstück x, wenn die Kugeln einander Gleichgewicht halten? Wie groß ist die Fadenspannung S?



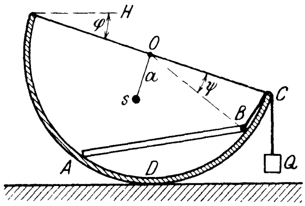
Aufg. 99.

99. Zwei gleich lange Stäbe l, die in O gelenkig verbunden sind, stützen sich auf einen Kreiszylinder vom Halbmesser r und sind in angegebener Weise belastet. Wie groß muß der Winkel φ bei Gleichgewicht sein?

100. Ein Stab $AB = 2l$ stützt sich in A auf das Innere und in C auf den Rand einer hohlen Halbkugel. Der Stab ist horizontal. In welchem Verhältnis steht das Gewicht G der Halbkugel zu jenem G_1 des Stabes? Wie groß sind die Drücke in A, C und D? ($OS = a$ gegeben.)

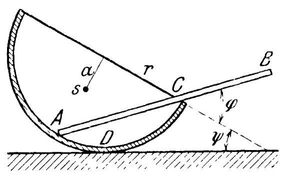


101. In einem hohlen Halbzylinder mit dem Schwerpunkt S und dem Gewicht G, der auf horizontaler Unterlage ruht, liegt ein schwerer Stab AB mit dem Gewicht G_1. In B ist ein Faden befestigt, der über den Rand C des Halbzylinders läuft und am Ende ein Gewicht Q trägt. Es sollen die Winkel φ und ψ ermittelt werden.

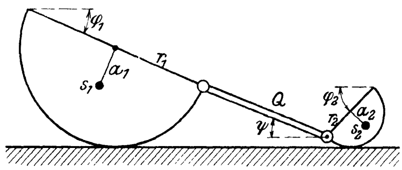


102. Dieselbe Aufgabe wie vorher. Es ist das Gewicht G_1 des Stabes derart zu ermitteln, daß es den Halbzylinder im Gleichgewicht erhält, wenn die Länge des Fadenstückes BC gleich Null ist. Wie groß sind dann der Winkel φ und die Auflagerdrücke in A, B und D?

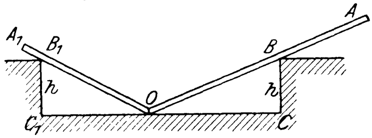
103. In eine hohle Halbkugel vom Gewicht G wird ein Stab $AB = 2l$ vom Gewicht G_1 gelegt. Man berechne für Gleichgewicht die Stellungswinkel φ und ψ des Stabes und der Halbkugel, sowie die Drücke in A, C und D.

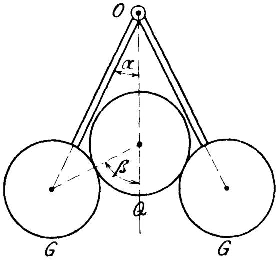


104. Es sind die Winkel $\varphi_1 \varphi_2$ und ψ für die Gleichgewichtsstellung zweier glatten Halbkugeln zu ermitteln, deren Gewichte G_1 und G_2 sind und deren Ränder durch eine Stange von der Länge l und dem Gewicht Q miteinander verbunden sind.

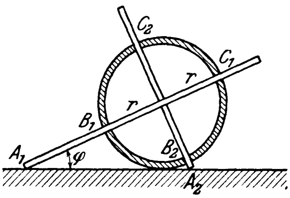


105. Zwei Stäbe $OA = 2l$, $OA_1 = 2l_1$ von den Gewichten G und G_1 stützen sich in einer rechteckigen Grube aneinander. Es ist $BC = B_1C_1 = h$, $CC_1 = a$. Wie groß ist $OC = x$, $OC_1 = x_1$, wenn Gleichgewicht besteht? (Anwendung von Aufgabe 86.)





106. Auf zwei gleichen Walzen vom Gewicht G, die in O drehbar befestigt sind, befindet sich eine dritte Walze Q im Gleichgewicht. In welcher Beziehung müssen die Winkel α und β stehen? (Walton.)

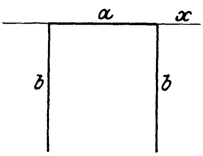


107. Ein dünnwandiger Hohlzylinder besitzt an seinem Umfang vier regelmäßig verteilte Löcher $B_1\,B_2\,C_1\,C_2$, durch die zwei glatte Stäbe (Längen $2\,l_1$, $2\,l_2$, Gewichte $G_1\,G_2$) gesteckt werden. Stäbe und Zylinder stützen sich auf eine glatte horizontale Ebene. Bei welchem Winkel φ wird Gleichgewicht bestehen? Wie groß sind die Drücke in den vier Löchern? (Anwendung von Aufgabe 87.)

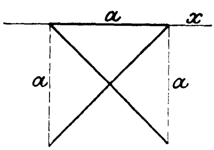
6. Schwerpunkte ebener Linien.

Man bestimme die Schwerpunkts-Koordinaten für folgende gleichförmig mit Masse belegte Linienzüge in bezug auf die angegebenen Achsen:

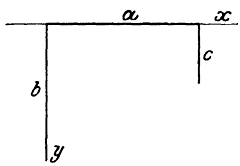
108.



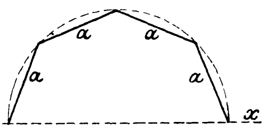
109.



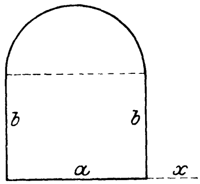
110.



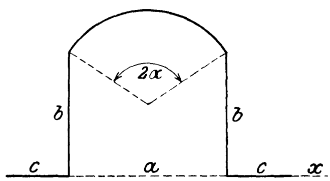
111.



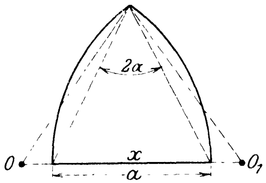
112.



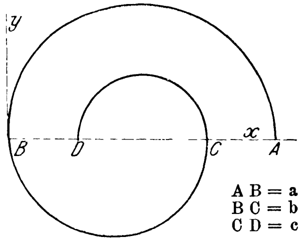
113.



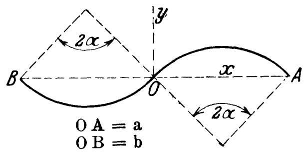
114.



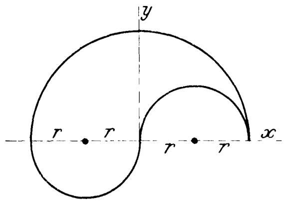
115.



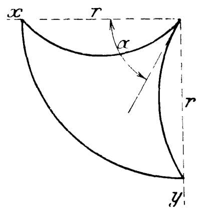
116.



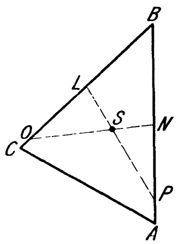
117.



118.



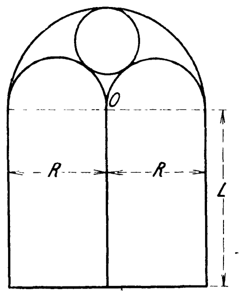
119. Man beweise folgenden Satz: Halbiert man die Seiten eines Dreiecks A B C in den Punkten L M N, so ist der Mittelpunkt des dem Dreieck L M N eingeschriebenen Kreises der Schwerpunkt des Dreiecksumfanges A B C.



Aufg. 120.

120. Sind L und N die Halbierungspunkte der Seiten B C, A B und macht man $LO = NP = \frac{1}{2} AC$, so schneiden sich N O und L P im Schwerpunkt des Dreiecksumfanges A B C (Geusen, Zeitschrift für Mathem. u. Physik, 44. Bd.).

121. In welchem Verhältnis muß L : R = x gewählt werden, wenn der Schwerpunkt dieses Linienzuges nach O fallen soll?

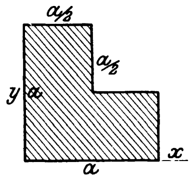


Aufg. 121.

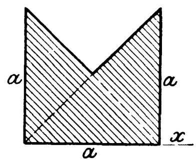
7. Schwerpunkte ebener Flächen.

Man bestimme die Schwerpunkts-Koordinaten für folgende gleichförmig mit Masse belegte Flächen in bezug auf die angegebenen Achsen:

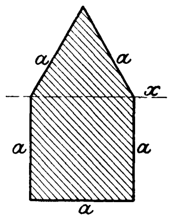
122.



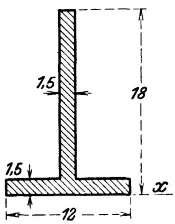
123.



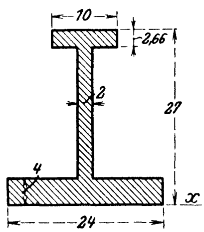
124.



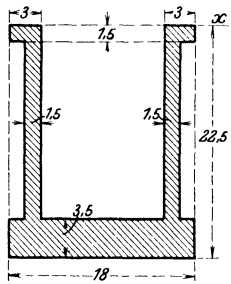
125.



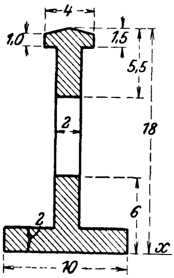
126.



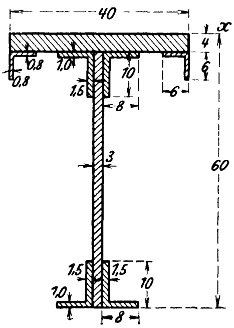
127.



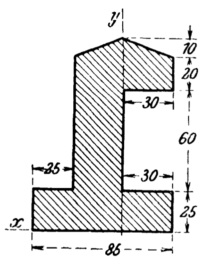
128.



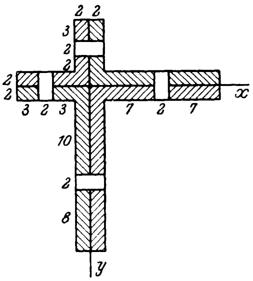
129.



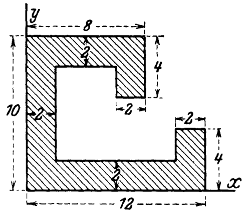
130.



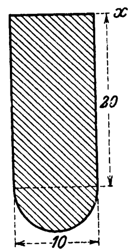
131.



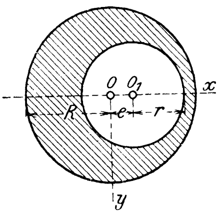
132.



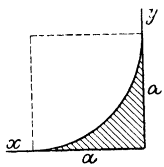
133.



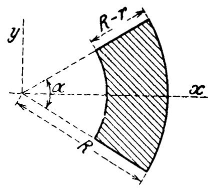
134.



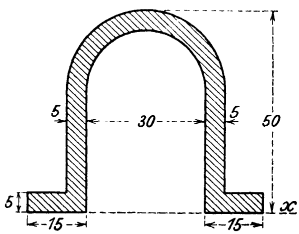
135.



136.

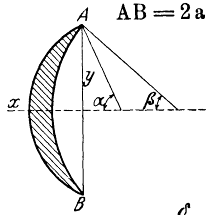


137.

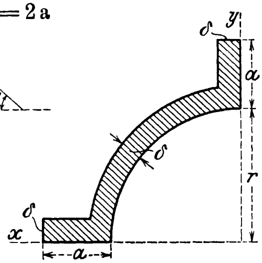


138.

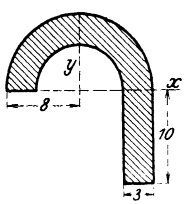
AB = 2a



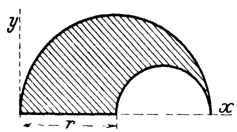
139.



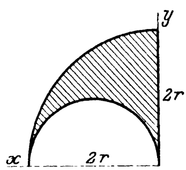
140.



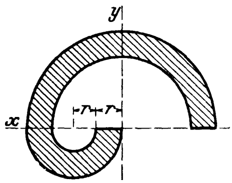
141.



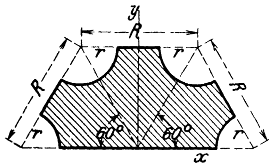
142.



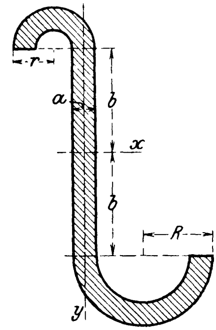
143.



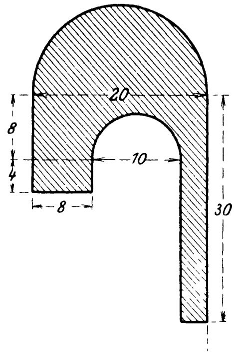
144.



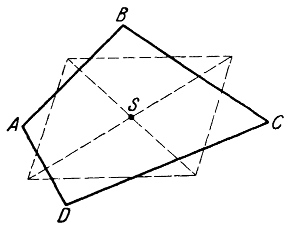
145.



146.



147. Man beweise folgenden Satz: Wenn man die Seiten eines allgemeinen Vierecks ABCD drittelt und die Drittelpunkte verbindet, so erhält man ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich im Schwerpunkt S des Vierecks schneiden.

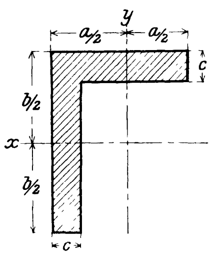


Aufg. 147.

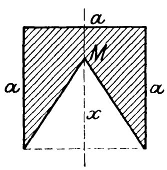
148. Man berechne die Schwerpunkts-Ordinate η der Fläche des in Aufgabe 114 gezeichneten Linienzuges.

149. In der Symmetrale eines Quadrates ist ein Punkt M so zu bestimmen, daß er der Schwerpunkt der schraffierten Fläche ist.

150. Sind x und y die Halbierungslinien eines ungleichschenkligen Winkeleisens a, b von gleicher Dicke c, so hat der Schwerpunkt der Fläche gleiche Abstände von diesen Halbierungslinien.



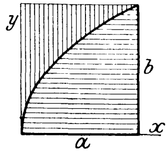
Aufg. 150.



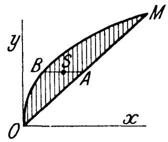
Aufg. 149.

151. Einem Kreis vom Mittelpunkt O werde ein beliebiges unregelmäßiges Polygon umschrieben. S_1 sei der Schwerpunkt des Polygonumfangs, S_2 jener der Polygonfläche. Wie liegen die drei Punkte O, S_1, S_2 zueinander?

*152. Man suche die Koordinaten des Schwerpunkts eines halben Parabel-Segmentes und des Schwerpunkts seiner Ergänzung zu einem Rechteck.



Aufg. 152.



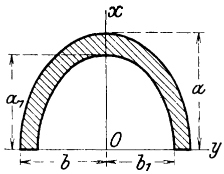
Aufg. 153.

*153. Von einer Parabel wird ein Segment durch eine Scheitelgerade OM abgeschnitten. Man suche eine einfache Konstruktion für den Schwerpunkt S der abgeschnittenen Fläche.

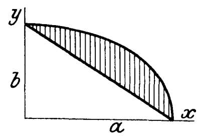
*154. Suche den Schwerpunkt eines Ellipsen-Quadranten.

*155. Suche die Schwerpunkts-Ordinate ξ eines halben elliptischen Ringes von folgenden Abmessungen: $a = 20$ cm, $a_1 = 16$ cm; $b = 15$ cm, $b_1 = 12$ cm.

*156. Suche die Koordinaten des Schwerpunkts von nebenstehendem Ellipsensegment. (Walton.)



Aufg. 155.



Aufg. 156.

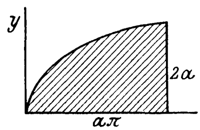
*157. Suche den Schwerpunkt der Fläche eines Quadranten der Kurve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (Walton.)

*158. Suche den Schwerpunkt der Fläche zwischen der Kurve $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ und den Koordinaten-Achsen. (Walton.)

*159. Suche den Schwerpunkt der Fläche einer halben gemeinen Cycloïde, deren Gleichung

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi),$$

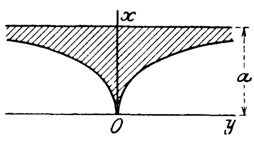
worin φ ein veränderlicher Bogen ist, der zwischen 0 und π schwankt.



*160. Die Cissoïde hat die Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

Man suche den Schwerpunkt der Fläche zwischen der Kurve und ihrer Asymptote.

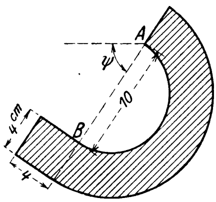


***161.** Es ist der Schwerpunkt der Fläche zwischen der Kurve $y^2 = b^2 \frac{a - x}{x}$ und ihrer Asymptote zu suchen.

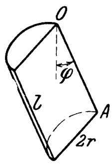
***162.** Man ermittle den Schwerpunkt der Fläche zwischen der Kurve $y = \sin x$ und der X-Achse von $x = 0$ bis $x = \pi$.

8. Stützungen.

163. Die nebenan gezeichnete Fläche wird in ihrem Eckpunkt A aufgehängt und der Schwerkraft überlassen. Wie groß ist der Winkel ψ, den die Gerade AB mit der Horizontalen einschließt, wenn Gleichgewicht besteht?



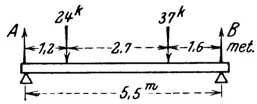
Aufg. 163.



Aufg. 164.

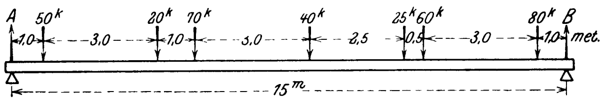
164. Ein schwerer Halbkreis-Zylinder vom Halbmesser r und der Länge l wird in der Ecke O aufgehängt. Welchen Winkel φ schließt die Kante OA mit der Vertikalen ein, wenn Gleichgewicht besteht?

165. Man ermittle auf graphischem und rechnerischem Weg die Auflagerdrücke A und B bei nebenan gezeichnetem Träger.

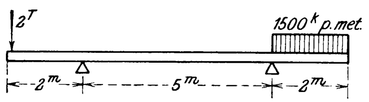


Aufg. 165.

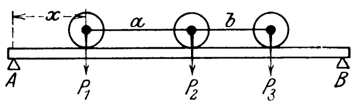
166. Man ermittle die Auflagerdrücke A und B graphisch und rechnerisch bei untenstehendem Träger.



Aufg. 166.

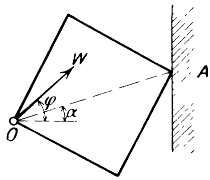


167. Man ermittle die Auflagerdrücke graphisch und rechnerisch bei nebenstehendem Träger.

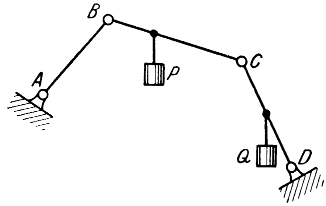


168. Drei Radachsen mit den Drücken $P_1 P_2 P_3$ sind fest miteinander verbunden. Sie sollen derart auf einen Träger $AB = l$ gestellt werden, daß die Auflagerdrücke im Verhältnis $A : B = m : n$ stehen. Wie groß muß x gemacht werden?

169. Eine quadratische Platte vom Gewicht G ist in O drehbar gelagert und stützt sich in A an eine vertikale Wand. Man suche die Größe des Gelenkdruckes W und seine Neigung φ gegen die Horizontale, wenn die Neigung α gegeben ist.

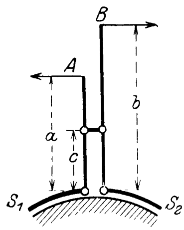


170. Ein gelenkiges System von drei Stäben ist mit zwei Lasten P und Q belastet. Die Last P ist gegeben, von Q nur die Angriffsstelle. Wie groß muß Q sein, damit Gleichgewicht besteht? (Graphisch.)

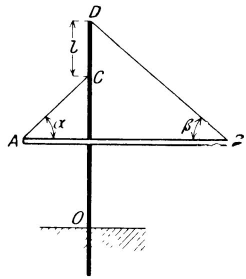


171. Bei der Bandbremse von Ohnesorge werden die Enden des Bremsbandes S_1 S_2 an das nebenan gezeichnete Hebelsystem angeschlossen, an dessen Enden bei A und B die bremsenden Kräfte ausgeübt werden. In welchem Verhältnis stehen die in dem Bremsbande entstehenden Spannungen S_1 und S_2?

(Zeitsch. Ver. deutsch. Ingen. 1913.)

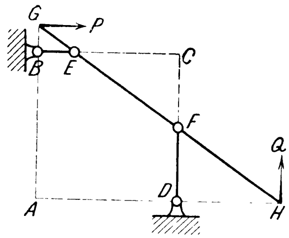


172. Ein in O eingemauerter Mast trägt an zwei Seilen C A und D B einen horizontalen Balken A B, der mit einer Last P belastet werden soll. Wo muß diese Last aufgelegt werden, damit sie im Gleichgewicht bleibt? Wie groß ist dann das Biegungsmoment in O?



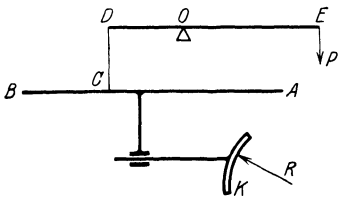
Aufg. 172.

173. In den Ecken B und D eines Quadrates ABCD von der Seitenlänge a sind zwei Stäbe $BE = \frac{a}{4}$ und $DF = \frac{a}{2}$ gelenkig befestigt; ihre Enden E und F sind mit einer Stange GH gelenkig verbunden. In G wirkt eine Kraft $P \parallel BE$, in H eine Kraft $Q \parallel DF$; wie groß muß das Verhältnis $P:Q$ gewählt werden, damit Gleichgewicht besteht? Wie groß sind die Auflagerdrücke in B und D?



174. Dieselbe Aufgabe, nur hat Q eine beliebige Richtung. Wie muß man die Neigung φ von Q gegen AB annehmen, damit Q den kleinsten Wert erhält, und wie groß ist dieser?

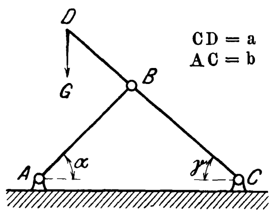
175. Bei der aerodynamischen Wage von Eiffel wird der Luftstrom R unter einem Winkel α gegen die Horizontale gegen eine krumme Platte K gelenkt, die mit der horizontalen Stange AB fest verbunden ist. Diese Stange wird in C an einer Wage DOE aufgehängt. Zuerst sei B frei und A drehbar gelagert, der Apparat durch Gewichte bei P ins Gleichgewicht gesetzt; man läßt den Luftstrom auf K wirken und stellt das Gleichgewicht wieder her, indem man P um P_1 erleichtert. Dasselbe wiederholt man dann, wenn A freigemacht und B gelagert wird; die Gewichtsverminderung bei P wäre jetzt P_2. Man berechne aus den Beobachtungen von P_1 und P_2 die Größe R des Luftdruckes und seine Lage.



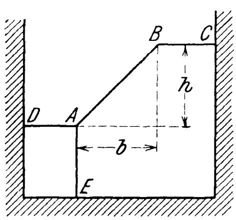
(Zeitsch. f. Flugt. u. Motorluftsch. 1910.)

176. Zwei Stäbe AB und CD, von denen letzterer in D mit einem Gewicht G belastet ist, sind in B gelenkig verbunden und in A und C gelenkig gelagert. Wie groß ist der Druck in B und welchen Winkel φ_1 schließt er mit der Horizontalen ein? Wie groß ist der Druck in C und welchen Winkel φ_2 schließt er mit der Horizontalen ein?

177. Eine Stiege AB, welche q = 20 kg f. d. Längenmeter wiegt, trägt einen Ruheplatz BC, der in der Mitte mit G = 450 kg belastet ist. Sie stützt sich bei A auf eine Säule AE und einen horizontalen Balken AD. Mit welchen Kräften V und H werden letztere beide beansprucht und mit welcher Kraft R wird die Mauer bei C beansprucht? (b = 4 m, h = 3 m.)

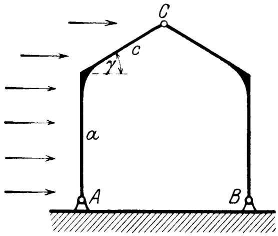


Aufg. 176.

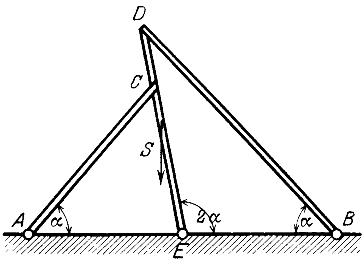


Aufg. 177.

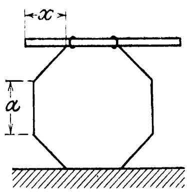
178. Zwei steife Zeltwände AC und CB von der Breite b sind in A und B gelagert und stoßen in C gelenkig zusammen. Die Zeltwand AC wird von horizontalem Winde getroffen, der mit q kg auf die Flächeneinheit drückt. Man suche auf graphischem Wege die Auflagerdrücke in A und B, die vom Winddruck allein herrühren, unter der Annahme, daß der Normaldruck des Windes dem sinus des Neigungswinkels zur gedrückten Fläche proportional ist.



179. Zwei in A und B drehbare, gewichtlose Stangen stützen in C und D eine dritte, schwere Stange, die in E den Boden berührt. Es ist $ES = \frac{1}{2} ED$, $EC = \frac{2}{3} ED$. Man soll den Winkel α ermitteln, wenn die mittlere Stange in E keinen Druck ausüben soll.

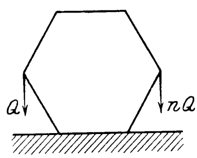


180. Ein Stab von der Länge l und dem Gewicht G_1 läßt sich auf einem Prisma mit regelmäßig achteckigem Querschnitt vom Gewicht G horizontal verschieben. Zwischen welchen Grenzen darf x gewählt werden, wenn das Gleichgewicht nicht gestört werden soll?

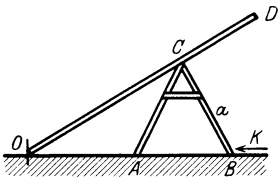


Aufg. 180.

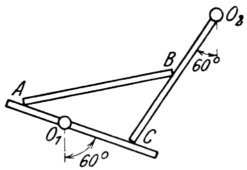
181. Ein Balken von regelmäßig sechseckigem Querschnitt und bekanntem Gewicht G ruht auf horizontaler Unterlage und ist an zwei Kanten mit Q und nQ belastet. Zwischen welchen Grenzen darf n schwanken, wenn der Balken nicht umkippen soll?



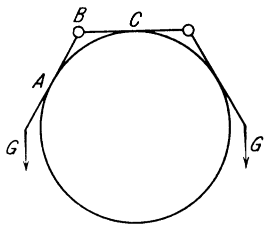
Aufg. 181.



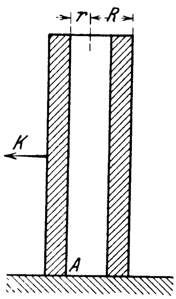
182. Auf einem horizontalen Boden steht ein Bockgerüst ABC, das ein gleichseitiges Dreieck bildet. Über das Gerüst wird eine in O drehbare schwere Stange $OD = 2l$ vom Gewicht G gelegt. Man soll den Bock so anbringen, daß in A kein Auflagerdruck entsteht; wie groß muß dann $x = OA$ sein und wie groß muß die horizontale Kraft K sein?



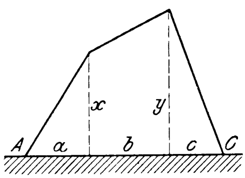
183. Drei Stäbe stützen einander in nebenan gezeichneter Art. Der Stab AC ist um seinen Schwerpunkt O_1 drehbar; der Stab O_2C ist um sein Ende O_2 drehbar und hat seinen Schwerpunkt in der Mitte bei B. Alle Stäbe sind gleich schwer. In welchem Verhältnis müssen AO_1 und O_1C stehen, wenn Gleichgewicht herrschen soll?



184. Drei gleichlange Stäbe, die untereinander gelenkig verbunden sind, werden auf eine Walze gelegt, deren Halbmesser gleich der Stablänge ist. Die Randstäbe werden an den Enden mit G belastet. Wie groß sind die Drücke in A, B und C und welchen Winkel ψ schließt der Druck in B mit der Vertikalen ein?



Aufg. 185,

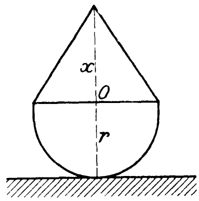


Aufg. 186.

185. Ein zylindrischer Schornstein, dessen innerer Halbmesser r und dessen Einheitsgewicht γ gegeben ist, wird in halber Höhe durch eine Kraft K umzukippen gesucht. Man wünscht, daß die Mittelkraft die Stützfläche des Schornsteines in A trifft. Wie groß muß der äußere Halbmesser R gemacht werden?

186. Eine Mauer hat obenstehenden Querschnitt. In welchem Verhältnis müssen die Höhen x und y stehen, wenn die Standfestigkeit um A und C gleich groß sein soll?

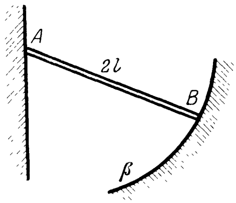
187. Ein zylindrischer Körper von nebenstehendem Querschnitt ruht auf horizontalem Boden und soll im indifferenten Gleichgewicht sein. Wie groß muß x gemacht werden?



Aufg. 187.

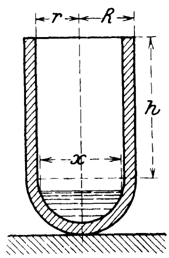
188. Dieselbe Aufgabe, wenn der untere Teil des Körpers eine Halbkugel, der obere ein Kegel ist.

189. Ein Stab AB stützt sich in A an eine glatte vertikale Wand, in B an eine glatte Zylinderfläche mit Erzeugenden senkrecht zur Bildebene. Welchem Gesetze gehorcht der Schnitt β des Zylinders mit der Bildebene, wenn der Stab in jeder Lage im Gleichgewicht sein soll?



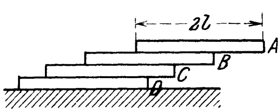
Aufg. 189.

190. Ein zylindrischer Körper von nebenstehendem Querschnitt ruht auf horizontalem Boden; sein Einheitsgewicht ist γ. In das Innere wird Flüssigkeit vom Einheitsgewicht γ_1 gegossen. Wie breit (x) muß die Oberfläche derselben sein, wenn hierdurch das Gleichgewicht des ganzen Körpers indifferent wird?



Aufg. 190.

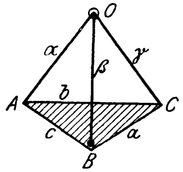
191. Vier gleich lange und gleich schwere Stangen liegen in nebengezeichneter Weise übereinander. Man suche $x_1 = AB$, $x_2 = BC$, $x_3 = CD$ für die äußerste Gleichgewichtslage. (Suche x_n für $n + 1$ gleiche Stangen.)



Aufg. 191.

192. Ein schweres Dreieck ABC wird mit drei Fäden in O derart aufgehängt, daß es horizontal liegt. Welche

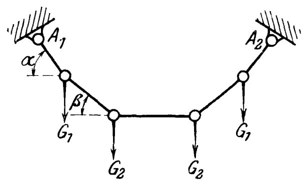
Beziehungen bestehen zwischen den Dreieckseiten und den Fadenlängen?



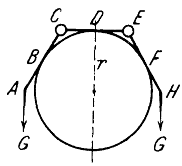
Aufg. 192.

193. Ein aus fünf Stäben bestehendes symmetrisches Stabwerk hängt in A_1 A_2 und ist in den Gelenken belastet. Welche Beziehung besteht bei Gleichgewicht zwischen α und β?

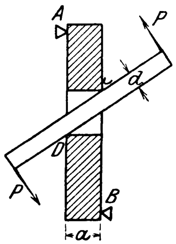
194. Drei gewichtlose, gelenkig verbundene Stäbe, die an den Enden A und H mit gleichen Gewichten belastet sind, werden über eine Walze vom Halbmesser r gelegt. Es ist $CE = r$. Wie groß muß $AC = EH = x$ gemacht werden, wenn der Druck in D Null sein soll? Wie groß ist dann der Druck in B und die Spannung des Stabes CE?



Aufg. 193.

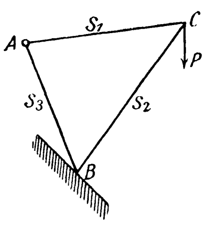


Aufg. 194.



195. In einem Stab AB von der Länge l_1 zwischen den Auflagern und der Dicke a befindet sich eine kreisförmige Öffnung vom Durchmesser d_1, durch die ein runder Stab von der Länge l und dem Durchmesser d gesteckt wird. Wenn an den Enden dieses Stabes und senkrecht zu ihm zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte P wirken, welche Drücke entstehen in A, B, C und D?

9. Statik der Baukonstruktionen.

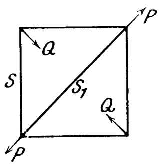


Aufg. 196.

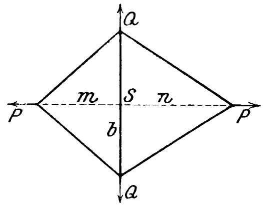
196. Ein starres Dreieck ist in A gelenkig gestützt und ruht in B auf einem glatten Auflager. In C ist es belastet. Man ermittle graphisch die Spannungen S_1 S_2 S_3.

197. Man bestimme graphisch und analytisch die Spannungen S_1 der Diagonale und S der Seite eines Quadrates, welches von vier Kräften P, P, Q, Q diagonal beansprucht wird.

198. Es soll die Spannung S eines symmetrischen Stabwerkes gerechnet werden, wenn die Lasten P und Q und die Längen b, m, n bekannt sind.

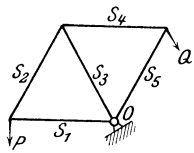


Aufg. 197.

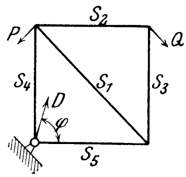


Aufg. 198.

199. An einem aus fünf gleichlangen Stäben bestehenden Stabwerk, das in O festgelagert ist, halten sich zwei Kräfte P und Q Gleichgewicht; erstere wirkt senkrecht zu S_1, letztere parallel zu S_3. Zu berechnen: die Kraft Q, den Widerstand W in O und seinen Winkel φ mit der Horizontalen; endlich die Spannungen der fünf Stäbe.



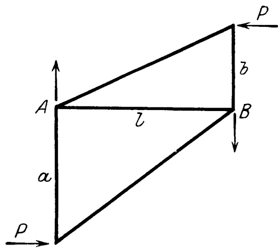
Aufg. 199.



Aufg. 200.

200. Ein starres Quadrat ist in einer Ecke gelenkig befestigt und an zwei anderen Ecken mit P und Q parallel zu den Diagonalen belastet. Wie groß muß P sein für Gleichgewicht? Wie groß ist der Druck D im Gelenk, der Winkel φ und die Spannungen der fünf Stäbe?

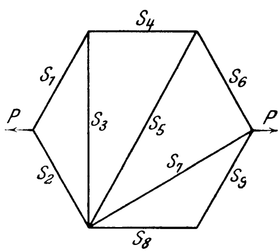
201. Nebenanstehendes Stabwerk besteht aus zwei rechtwinkligen Dreiecken. Man soll die Auflagerdrücke in A und B, sowie die Spannung S im Stabe AB berechnen.



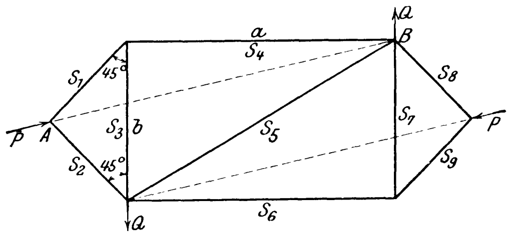
Aufg. 201.

Für alle folgenden Stabwerke und Baukonstruktionen ist die Berechnung der Stabspannungen vorzunehmen und der reziproke Kraftplan der Spannungen zu zeichnen.

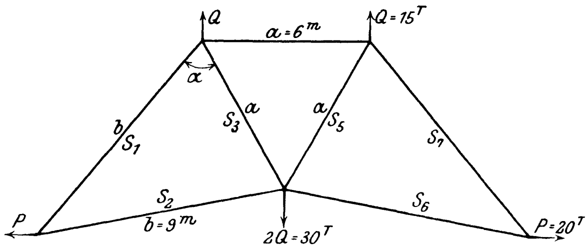
202. Stabwerk ohne Auflager.



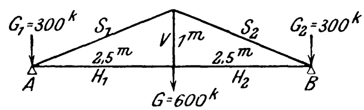
203. Stabwerk ohne Auflager, zwei Kraftpaaren ausgesetzt.



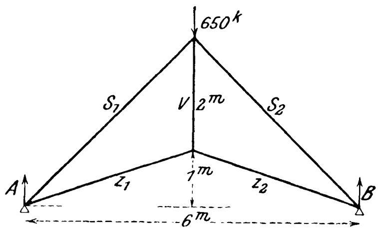
204. Stabwerk ohne Auflager.



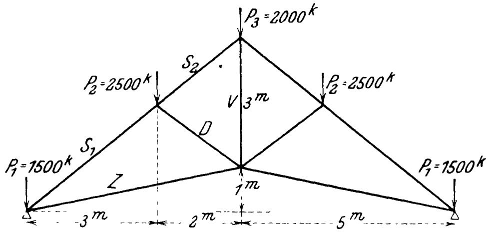
205. Einfaches Hängwerk.



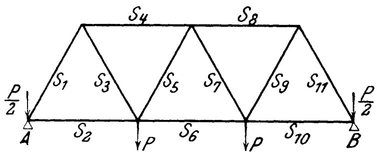
206. Dachbinder.



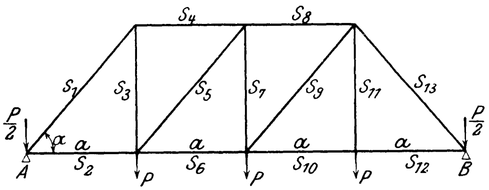
207. Dachbinder.



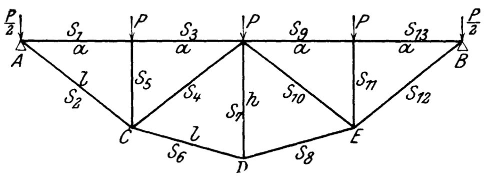
208. Dreieckträger.



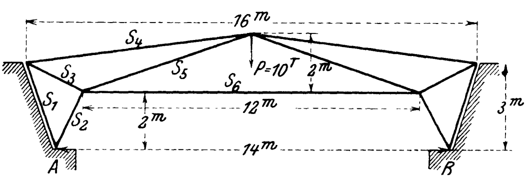
209. Dreieckträger.



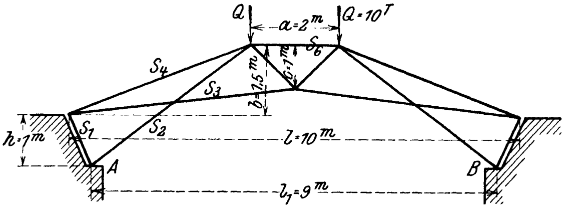
210. Parabelträger. Die Punkte A C D E B liegen in einer Parabel.



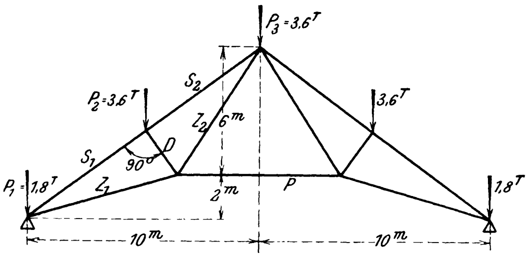
211. Brückensteg.



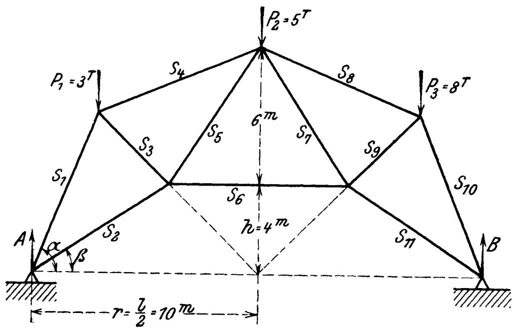
212. Brückensteg.



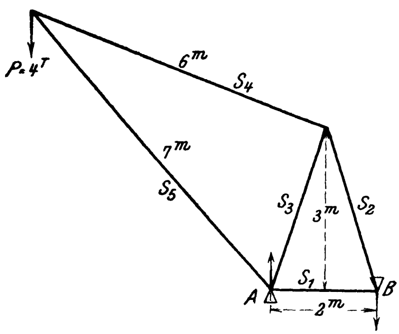
213. Polonceau-Dach.



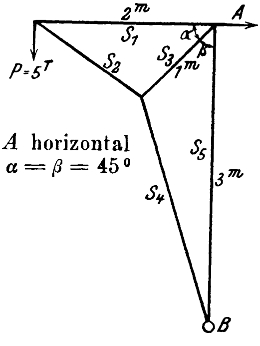
214. Halbkreis-Dach.



215. Kran.

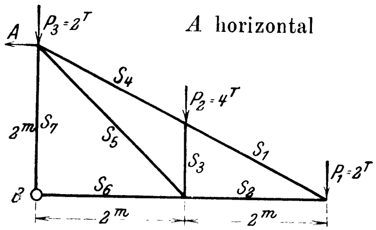


216. Kran.

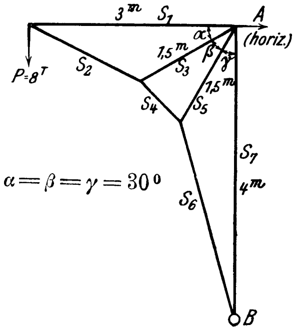


A horizontal
$\alpha = \beta = 45^{0}$

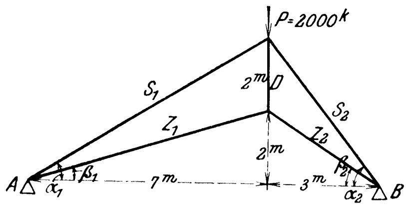
217. Pultdach.



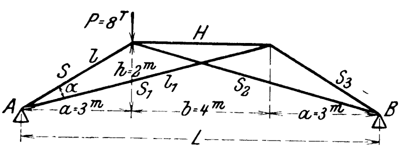
218. Kran.



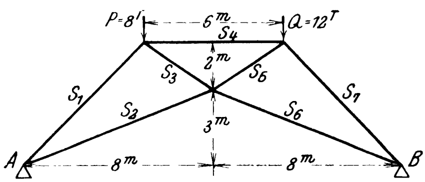
219. Unsymmetrisches Dach.



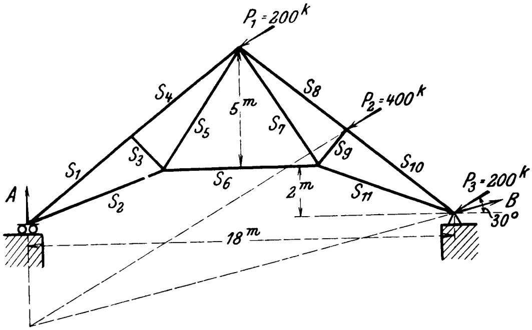
220. Steg mit unsymmetrischer Belastung.



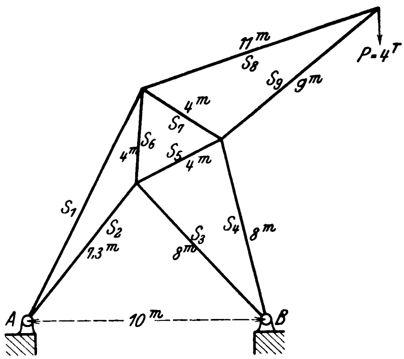
221. Steg mit unsymmetrischer Belastung.



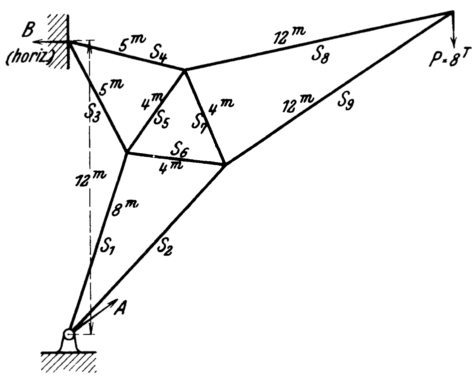
222. Poloncean-Dach mit Winddruck.



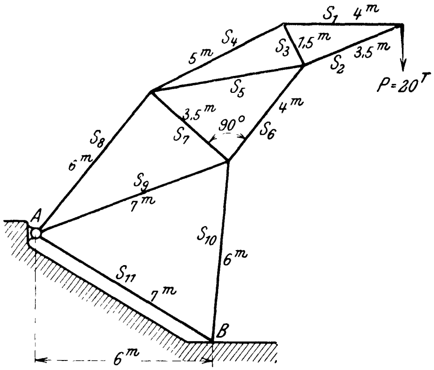
223. Kran.



224. Kran.



225. Kran.



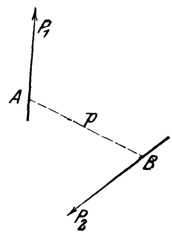
10. Das räumliche Kraftsystem.

226. Drei aufeinander senkrecht stehende Sehnen einer Kugel, die von demselben Punkt ausgehen, stellen Kräfte dar. Man suche ihre Mittelkraft.

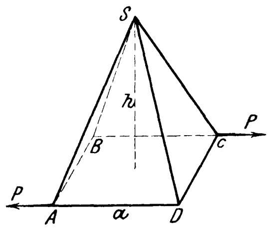
227. Längs drei nicht zusammenstoßenden Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedes wirken drei gleich große Kräfte. Wenn die Gesamtwirkung derselben eine Einzelkraft sein soll, welche Beziehung muß zwischen den Kanten des Parallelepipedes bestehen?

228. Man verbinde die Endpunkte zweier sich kreuzenden Kräfte und halbiere diese Verbindungslinien in A und B. Man beweise, daß AB die Richtung und halbe Größe der resultierenden Einzelkraft besitzt.

229. Gegeben zwei kreuzende Kräfte $P_1 = 8$ kg, $P_2 = 12$ kg, die in der Entfernung $p = 1,3$ m aufeinander senkrecht stehen. Zu suchen die resultierende Dyname und zwar ihre Einzelkraft R, ihr Moment S, ihre Winkel α_1 α_2 mit P_1 P_2 und den Schnittpunkt C mit AB.

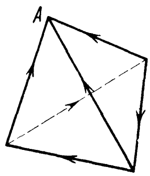


230. In den Kanten DA, BC der quadratischen Grundfläche a^2 einer geraden

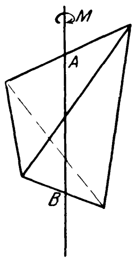


Pyramide von der Höhe h wirken zwei gleiche aber entgegengesetzte Kräfte P. Man soll dieses Kraftpaar in zwei andere zerlegen, die in den Seitenebenen ABS und CDS liegen. Wie groß sind die Momente dieser beiden Kraftpaare?

231. In den Kanten a eines regelmäßigen Tetraëders wirken sechs gleiche Kräfte P. Man suche die resultierende Dyname, und zwar ihre Einzelkraft R, ihr Moment S und ihren Ort.

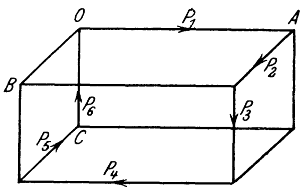


Aufg. 231.



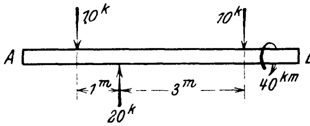
Aufg. 232.

232. A und B sind die Halbierungspunkte zweier Gegenkanten a eines regelmäßigen Tetraëders. Um die Gerade AB wirkt ein Kraftpaar von gegebenem Moment M. Man soll es durch vier Kräfte ersetzen, die in den andern vier Kanten des Tetraëders wirken. Man berechne die Größe dieser Kräfte und zeichne ihre Richtung.

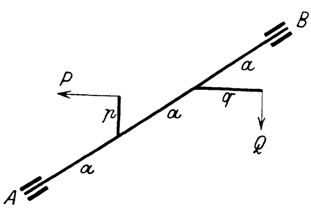


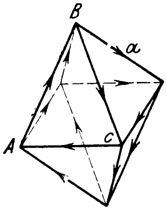
233. In den Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedes wirken sechs Kräfte und zwar: $P_1 = 4$ kg, $P_2 = 6$ kg, $P_3 = 3$ kg, $P_4 = 2$ kg, $P_5 = 6$ kg, $P_6 = 8$ kg; die Kanten sind: $OA = 10$ m, $OB = 4$ m, $OC = 5$ m. Man suche die Einzelkraft R und das Moment S der resultierenden Dyname, ihre Neigungen $\alpha\beta\gamma$ gegen OA, OB, OC und ihren Abstand p von O.

234. Ein Stab AB wird in nebenstehender Weise durch drei zu ihm senkrecht stehende Kräfte und durch ein um die Stabachse drehendes Moment beansprucht. Welche resultierende Wirkung haben diese Kräfte?



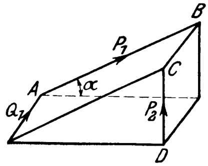
235. Eine in A und B gelagerte Welle wird in ihren Drittelpunkten von zwei an den Armen p und q wirkenden Kräften P und Q im Gleichgewicht erhalten. Man berechne den Winkel δ, den die Auflagerdrücke in A und B miteinander einschließen, wenn die Kräfte senkrecht aufeinander stehen.





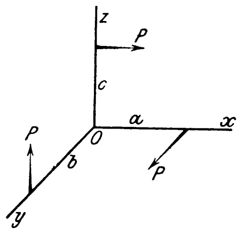
236. In den Kanten a eines regelmäßigen Oktaëders wirken zwölf gleichgroße Kräfte P. Welche resultierende Wirkung haben diese Kräfte?

237. In zwei Kanten eines rechtwinkligen Keiles wirken zwei Kräfte P_1 und P_2. Sie sollen durch zwei andere gleichwertige Kräfte ersetzt werden (Q_1, Q_2), von denen die eine (Q_1) gegeben ist. Die Kräfte P_1 P_2 Q_1 sollen durch die Kanten gemessen werden, in denen sie liegen. Wie groß ist Q_2 und wo wirkt diese Kraft?

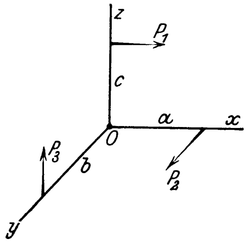


Aufg. 237.

238. Drei gleiche Kräfte sind den Achsen eines Koordinatenkreuzes parallel und liegen in den Koordinatenebenen. Welche Beziehung muß zwischen den Abständen a, b, c bestehen, wenn die drei Kräfte sich auf eine Einzelkraft R zurückführen lassen sollen? Wie groß ist diese? Welche Winkel schließt sie mit den Achsen ein? Welche Entfernung besitzt sie von O?

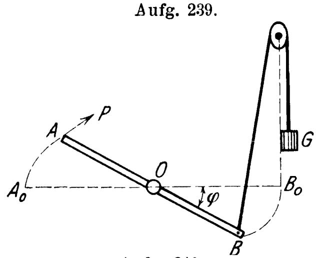


Aufg. 238.



Aufg. 239.

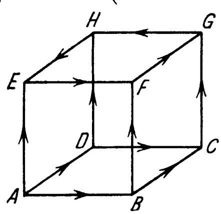
239. Drei Kräfte P_1 P_2 P_3 sind den Achsen eines Koordinatenkreuzes parallel und liegen in den Koordinatenebenen. In welchem Verhältnis müssen sie stehen, wenn ihre resultierende Dyname durch O gehen soll?



Aufg. 240.

240. Ein gleichförmiger Stab von der Länge a kann sich in einer horizontalen Ebene um seinen Mittelpunkt O drehen. An das Ende B ist eine Schnur befestigt, die über eine vertikal über B_0 in der Höhe b angebrachte Rolle läuft und ein Gewicht G trägt. Wie groß muß die Kraft P in A sein für eine beliebige Stellung φ der Stange? Bei welchem φ wird P am größten? (Walton.)

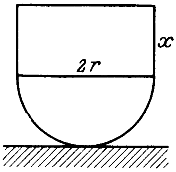
241. In den Kanten des Würfels von der Länge s wirken zwölf gleiche Kräfte P. Man suche ihre resultierende Dyname u. zw. ihre Einzelkraft R, ihr Moment S, die Richtung ihrer Achse und deren Schnittpunkt mit der Grundfläche des Würfels.



11. Gleichgewicht des räumlichen Kraftsystems.

242. Auf jede Seitenfläche eines Polyëders wirkt ein Kraftpaar, gleich dem Inhalt der Seitenfläche u. zw. sind alle, von außen gesehen, positiv. Man beweise das Gleichgewicht dieser Kraftpaare.

243. Ein homogener gerader Kegel ruht in der ihm umschriebenen Kugel. Wie groß ist der Winkel φ an der Kegelspitze, wenn der Kegel in jeder Lage im Gleichgewicht ist?



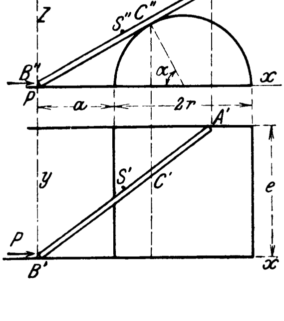
244. Auf einer Halbkugel, die auf horizontaler Unterlage ruht, wird ein Zylinder aus dem gleichen Material befestigt. Welche Länge x darf er bekommen, wenn das Gleichgewicht indifferent sein soll?

245. Vier gleichgroße Kugeln, jede vom Gewicht G, bilden eine Kugelpyramide derart, daß drei von ihnen sich berührend auf einer glatten Tischfläche liegen, die vierte auf jene drei gelegt wird. Welchen Druck D übt die letztere auf jede untere Kugel aus? Welche Horizontalkraft H muß auf jede der unteren Kugeln ausgeübt werden, damit Gleichgewicht besteht? (Walton.)

246. Eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge b und deren drei übrige Kanten a sind, trägt an der Spitze eine Last P derart, daß ihre Richtung durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht. Welche Spannungen S_1 S_2 entstehen in a und b?

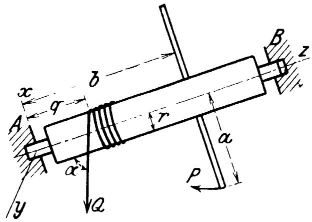
***247.** Eine schwere Kugel stützt sich auf den Rand einer kreisförmigen Öffnung in einer horizontalen Ebene. Welchen Halbmesser muß die Kugel bekommen, wenn ihr Druck auf den Rand ein Minimum werden soll? (Walton.)

248. In eine glatte Halbkugel wird ein homogenes Dreieck gelegt, das zwei gleiche Seiten a besitzt. Welchen Winkel φ schließt die Ebene des Dreiecks mit der horizontalen Randebene der Halbkugel ein, wenn alle drei Ecken in der Innenfläche der Halbkugel liegen? (Walton.)

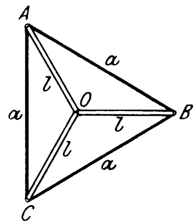


249. Ein schwerer Stab A B von der Länge l stützt sich in A und B an zwei vertikale parallele Wände, in B auch noch an den Boden und liegt in C auf einem Halbzylinder auf. Wie groß muß die Horizontalkraft P in B sein, damit das Gewicht G der Stange im Gleichgewicht verharrt? Wie groß sind die Auflagerdrücke in A, B und C?

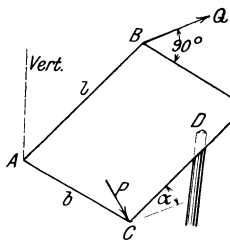
250. Von einem schiefliegenden Wellrad sind gegeben: die Last Q, die Länge $AB = l$, die Halbmesser a und r, die Neigung α, die Abstände b und q. Zu bestimmen: a) die Kraft P für Gleichgewicht; b) die Auflagerdrücke in A und B. (Ohne Berücksichtigung der Zapfenreibung.)



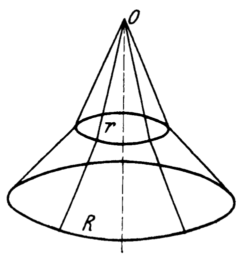
***251.** Drei gleichschwere Stäbe von der Länge l und dem Gewicht G stützen sich in O auf den Boden, während ihre oberen Enden A, B, C, durch drei gleichlange Fäden a verbunden sind. Wie groß ist die Spannung S in jedem dieser Fäden? Wie ändert sie sich, wenn sich a ändert? (Walton.)



252. Eine gewichtlose rechteckige Platte von den Abmessungen $AB = l = 4$ m, $AC = b = 2$ m und der Neigung $\alpha = 30^0$ gegen die Horizontalebene wird in A festgehalten und stützt sich in D an einen Pflock; $AD = e = 3$ m ist gegeben. An der Ecke B zieht ein horizontales, zu BE senkrechtes Seil mit $Q = 5$ kg, in der Ecke C wird normal zur Platte ein Druck $P = 4$ kg ausgeübt. Wie groß müssen die Entfernungen x, y des Punktes D von AB und AC gewählt werden, wenn die Platte im Gleichgewicht bleiben soll? Wie groß sind die Widerstände in A und D?

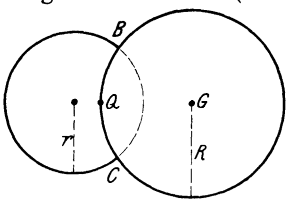


253. Ein Kreisring R sei mittelst einer beliebigen Anzahl undehnbarer Fäden von gleicher Länge in einen Punkt O aufgehängt. Über den so entstehenden Fadenkegel werde ein zweiter kleinerer Ring r von gleichem Gewicht wie R geschoben; es tritt Gleichgewicht ein, wenn der kleinere Ring die Fäden halbiert. In welchem Verhältnis stehen dann die Entfernungen der beiden Ringe von O? (Walton.)

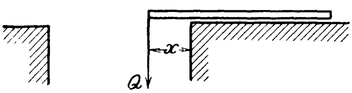


254. Im Innern einer Seifenblase vom Halbmesser R herrscht ein Druck p auf die

Flächeneinheit, außen ein Druck p_0. Man berechne die Oberflächenspannung S der Blase. (Routh.)

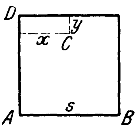


255. Über einer kreisrunden Bodenöffnung liegt eine schwere, kreisrunde Platte vom Gewicht G. Sie wird am Rand mit einem Gewicht Q derart belastet, daß sie sich um die Gerade BC zu drehen beginnt. Wie groß muß der Abstand x gewählt werden, damit Q den kleinsten Wert annimmt? Wie groß wird dieser sein?

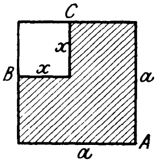


12. Parallelkräfte im Raum.

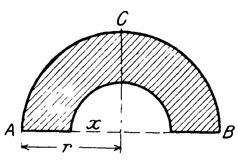
256. Eine horizontal liegende quadratische Platte vom Gewicht G soll in drei Punkten A, B, C so gestützt werden, daß die Eckpunkte A und B die Drücke $\frac{G}{4}$ bezw. $\frac{G}{5}$ erleiden. Zu suchen den Ort x, y des Stützpunktes C und den Druck daselbst.



257. Auf den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes XYZ befindet sich je ein Punkt L, M, N in dem Abstand l, bezw. m, bezw. n, vom Anfangspunkt. Diese drei Punkte sind Angriffspunkte dreier Parallelkräfte P_1 P_2 P_3. In welchem Verhältnis müssen die Richtungskonstanten a, b, c derselben stehen, wenn die Mittelkraft dieser drei Kräfte durch den Anfangspunkt gehen soll?



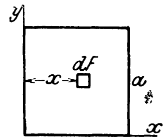
258. Eine horizontale Tischplatte von nebenstehender Form wird in A, B und C unterstützt; die drei Auflagerdrücke stehen im Verhältnis: 18 : 11 : 11. Wie groß muß x gemacht werden?



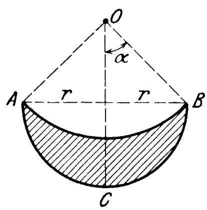
259. Eine Tischplatte von nebenstehender Gestalt soll in A und B halb so große Drücke auf die Tischfüße ausüben wie in C. Wie groß muß x, der innere Halbmesser, gemacht werden?

260. Eine schwere Kreisscheibe soll an drei Punkten ihres Umfanges A, B, C derart gestützt werden, daß sich die Drücke in diesen Punkten wie a : b : c verhalten. In welcher Beziehung stehen dann die Zentriwinkel α, β, γ, welche zu den Bögen BC, CA, AB gehören?

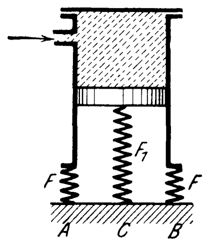
***261.** Ein gleichschenkliges Dreieck von der Höhe h dreht sich gleichförmig um seine vertikale Grundlinie und überwindet den Widerstand der Luft, der dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Welchen Abstand ξ hat der Angriffspunkt des resultierenden Luftwiderstandes von der Drehungsachse?



***262.** Jedes Flächenelement dF eines Quadrates a^2 erleidet einen unendlich kleinen Druck $dP = kx^n dF$, wobei x der Abstand von einer Kante des Quadrates ist. Man suche den Gesamtdruck P auf die Quadratfläche und die Koordinaten ξ, η seines Angriffspunktes.



263. Das Gewicht einer homogenen, horizontalen Tischplatte von nebenstehender Gestalt ist in den drei Punkten A, B und C des halbkreisförmigen Randes unterstützt. Die Auflagerdrücke in diesen Punkten sollen gleich sein. Welcher Gleichung muß der Winkel α genügen?



264. Ein Zylinder ist in A und B auf Federn gelagert, ebenso der Kolben in C. Die Federkräfte sollen $F = k \,.\, \Delta l$, $F_1 = k_1 \,.\, \Delta l_1$ sein, worin Δl und Δl_1 die Längenänderungen der Federn bedeuten.

Nun wird über dem Kolben Luft von der Pressung p (für die Flächeneinheit) einströmen gelassen. Um wieviel heben sich Zylinder und Kolben?

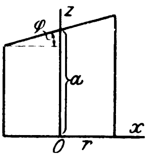
13. Schwerpunkte von Körpern.

265. Beliebig viele Kräfte halten einen Punkt O im Gleichgewicht. Jede Kraft werde als Strecke mit O als Anfangspunkt dargestellt. In die Endpunkte aller dieser Strecken werden Punkte von gleichen Gewichten gesetzt. Man zeige, daß O der Schwerpunkt aller dieser Punkte ist.

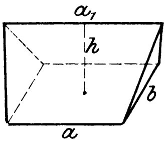
266. Ein Punkt m wird von allen Punkten eines Körpers mit Kräften angezogen, die den Entfernungen und den anziehenden Massen proportional sind. Man beweise, daß die Mittelkraft aller dieser Anziehungen durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht und so groß ist, wie wenn die ganze Körpermasse in diesem Punkt vereinigt wäre.

267. Von einem geraden Kreiskegel wird durch zwei Kugeln, die ihren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels haben, ein Stück ausgeschnitten. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt dieses Stückes von der Spitze?

268. Konstruiere den Schwerpunkt des Raumes zwischen zwei schiefen Kegelflächen mit gleicher Grundfläche und den Höhen h_1 und h_2 ($h_2 > h_1$ vorausgesetzt).



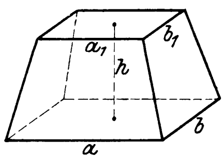
***269.** Ein Kreiszylinder vom Halbmesser r wird durch eine Ebene abgeschnitten, welche gegen die Grundebene um φ geneigt ist und die Achse im Abstand a von der Grundebene trifft. Bestimme die Koordinaten des Schwerpunktes.



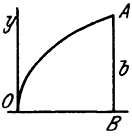
***270.** Welchen Abstand hat der Schwerpunkt eines Keiles von der Grundebene ab?

***271.** Man bestimme den Schwerpunkt eines Körpers, welcher begrenzt ist von der Fläche eines geraden Kreiskegels und jener eines Rotationsparaboloides, wobei die Grundflächen zusammenfallen und der Scheitel des Paraboloides die Spitze des Kegels ist.

***272.** Welchen Abstand hat der Schwerpunkt eines Obelisken von der oberen Grundfläche $a_1 b_1$?



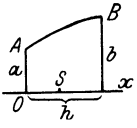
***273.** Es ist die Schwerpunkts-Koordinate x_s eines Körpers zu bestimmen, welcher durch die Umdrehung zweier Parabeln $y^2 = 2p_1 x$ und $y^2 = 2p_2 (a—x)$ um die gemeinsame x-Achse entsteht. (W a l t o n.)



***274.** Suche die Schwerpunkts-Koordinate y_s eines Rotationskörpers, der durch Umdrehung eines halben Parabelsegmentes OAB um Oy entsteht.

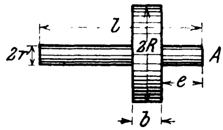
***275.** Suche die Koordinaten des Schwerpunktes eines Oktanten der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

***276.** Suche den Schwerpunkt eines halben Ellipsoides, entstanden durch Umdrehung einer Viertel-Ellipse um ihre Halbachse a.



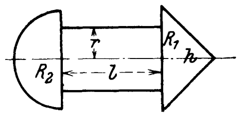
***277.** Ein Parabelbogen AB rotiert um die Achse x der Parabel. Zu bestimmen die Schwerpunkts-Koordinate $OS = x_s$ des Rotationskörpers.

278. Auf einem Zylinder (Länge l, Halbmesser r) läßt sich eine durchlochte Scheibe (Dicke b, Halbmesser R) aus gleichem Material verschieben. Wie groß muß die Entfernung e gemacht werden, damit der gemeinsame Schwerpunkt in der Entfernung $\frac{l}{n}$ von A liegt?



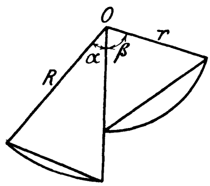
Aufg. 278.

279. Ein Körper besteht aus einem Kegel (Höhe h, Basishalbmesser R_1), einem Zylinder (Länge l, Halbmesser r) und einer Halbkugel (Halbmesser R_2), alle von gleichem Material und gleicher Achse. Zu suchen die Entfernung x_s ihres gemeinsamen Schwerpunktes von der Kegelspitze.

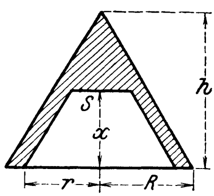


280. Über der vertikal stehenden Seite AB eines Rechtecks ABCD werde senkrecht zur Ebene des Rechtecks ein Kreis beschrieben. Eine Gerade gleite derart, daß sie stets horizontal bleibt und sowohl die Kreislinie, wie die Rechtecksseite CD trifft. Man suche den Schwerpunkt des Raumes, der zwischen der so entstehenden Fläche und dem Kreise liegt.

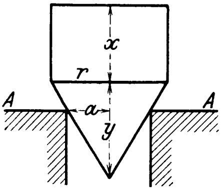
281. Zwei Kugelausschnitte aus gleichem Material von verschiedenen Halbmessern R, r sind in ihrer gemeinsamen Spitze frei aufgehängt. In welcher Beziehung müssen die Winkel α und β stehen, wenn die gemeinsame Gerade beider Ausschnitte vertikal sein soll?



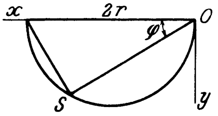
282. In einen geraden Kreiskegel wird eine Aushöhlung in Form eines Kegelstutzes von gleicher Neigung der Mantelfläche gemacht. Gegeben ist das Verhältnis $n = \frac{r}{R}$. Wie groß muß das Verhältnis $z = \frac{x}{h}$ gemacht werden, damit der Schwerpunkt des übrigen Kegelteiles im Mittelpunkt S der oberen Begrenzung des Kegelstutzes liegt?



***283.** Ein Körper von bekanntem Rauminhalt V besteht aus einem geraden Kreiskegel mit gegebenem Basishalbmesser r und aus einem aufgesetzten Zylinder von gleichem Material. Er stecke in



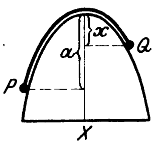
einer kreisförmigen Bodenöffnung vom Halbmesser a. Wie groß müssen die Höhen x und y des Zylinders und des Kegels gemacht werden, damit der Schwerpunkt des Körpers so hoch wie möglich liege? Welche Entfernung y_s hat dann der Schwerpunkt von der Boden-Ebene A A?



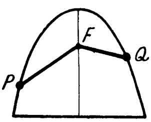
284. In eine Halbkugel vom Halbmesser r ragt ein Kegel, dessen Grundlinie der Rand der Halbkugel ist und dessen Spitze S auf der Halbkugel liegt. Der Schwerpunkt des Raumes zwischen Kegel und Halbkugel soll auf der Mantelfläche des Kegels liegen. Man suche den Winkel φ und die Koordinaten x_s, y_s des Schwerpunkts.

14. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

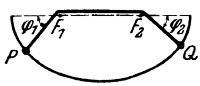
Man benütze dieses Prinzip zur Lösung folgender Gleichgewichtsaufgaben:



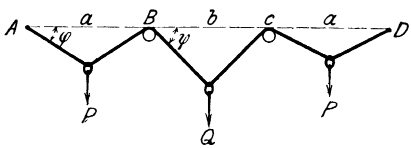
***285.** Über eine Parabel $y^2 = 2px$ mit vertikaler Achse wird ein Faden gelegt, an dessen Enden zwei Gewichte P und Q befestigt sind. Das erstere P liegt in der Tiefe a unter dem Scheitel. Wie groß muß die Tiefe x des zweiten Q sein, wenn Gleichgewicht bestehen soll?



***286.** Zwei schwere Punkte P und Q, welche auf einer Parabel mit vertikaler Achse gleiten können, sind durch eine undehnbare Schnur miteinander verbunden, die durch den Brennpunkt der Parabel geht. An welcher Stelle sind die beiden Punkte im Gleichgewicht?

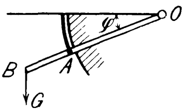


***287.** Zwei schwere Punkte P und Q, welche längs einer Ellipse gleiten können, sind durch einen undehnbaren Faden, der über die Brennpunkte $F_1 F_2$ gelegt wird, miteinander verbunden. Die Ebene der Ellipse ist vertikal, die große Achse horizontal. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2, wenn die Punkte im Gleichgewicht sind?

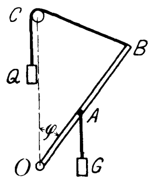


***288.** Ein undehnbarer Faden ist in A und D befestigt und läuft über zwei glatte Rollen B und C. Drei

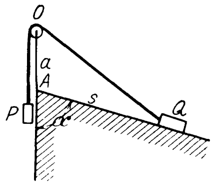
Gewichte P, Q, P hängen in glatten Ringen an dem Faden. In welcher Beziehung stehen die Winkel φ und ψ, wenn Gleichgewicht besteht?



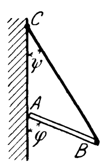
***289.** Ein bei O drehbarer Stab ist in B mit einem Gewicht G belastet und wird in A durch einen elastischen Faden gehalten, der sich an den Rand einer kreisförmigen Scheibe legt. Bei welchem Winkel φ ist der Stab im Gleichgewicht? Die Kraft des Fadens ist seiner Länge proportional und zwar gleich k für die Längeneinheit. (Euler.)



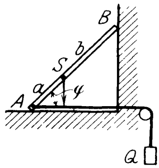
***290.** Ein in A mit dem Gewicht G belasteter Stab OB = b ist in O drehbar befestigt. Von seinem Ende B läuft ein undehnbarer Faden über eine kleine Rolle in C; er trägt ein Gewicht Q. Es ist OA = a, OC = b. Bei welchem Winkel φ besteht Gleichgewicht? Ist es sicher oder unsicher?



***291.** Zwei ungleiche Gewichte P und Q sind an den Enden eines Fadens befestigt, der bei O über eine Rolle läuft. P hängt frei herab, Q liegt auf einer glatten schiefen Ebene, die in A beginnt und um α gegen die Vertikale geneigt ist. In welcher Entfernung s von A bleibt Q im Gleichgewicht?



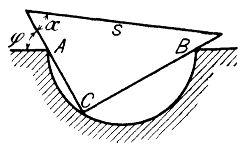
Aufg. 292



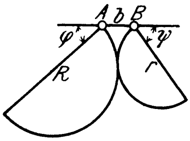
Aufg. 293.

***292.** Ein homogener schwerer Stab von der Länge 2 l stützt sich in A an eine vertikale glatte Wand und wird in B von einem Faden gehalten, der in C befestigt ist. In welcher Beziehung müssen die Winkel φ und ψ stehen, wenn der Stab im Gleichgewicht ist? (St. Germain.)

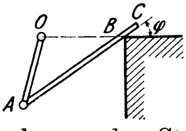
***293.** Ein Stab AB vom Gewicht G stützt sich an den Boden und an die vertikale Wand; beide sind glatt. Das Ende A wird von einem Seil gehalten, an dem das Gewicht Q hängt. Unter welchem Winkel φ bleibt der Stab im Gleichgewicht? Wie groß sind die Drücke in A und B?



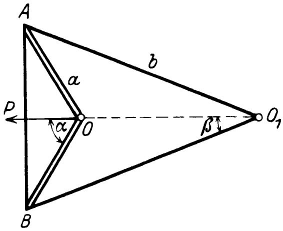
***294.** Ein homogenes rechtwinkliges Dreieck liegt in einer hohlen Halbkugel vom Durchmesser d in nebenstehender Art. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln φ und α für Gleichgewicht? Wie groß sind die Drücke in A, B, C?



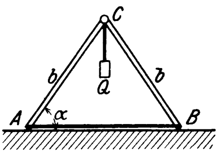
*295. Zwei homogene Halbkreiszylinder mit den Halbmessern R, r und den Gewichten G_1, G_2 sind in A und B aufgehängt und berühren einander. Man suche eine Beziehung für die Winkel φ und ψ für Gleichgewicht.



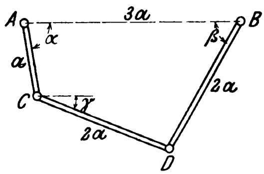
*296. Zwei schwere Stäbe OA und AC, von denen der letzte doppelt so lang und doppelt so schwer ist wie der erste, sind in A gelenkig verbunden. Der Stab OA = r ist in O drehbar gelagert, der Stab AC stützt sich an die Ecke B, wobei OB = r horizontal ist. Wie groß wird der Winkel φ für Gleichgewicht?



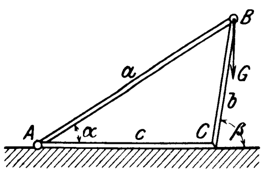
*297. Zwei gleiche Stangen OA und OB haben in O ein bewegliches Gelenk; ihre Enden A und B sind um ein festes Gelenk O_1 drehbar und untereinander durch ein Seil AB verbunden. Wenn das Gelenk O durch die Kraft P nach links gezogen wird, welche Spannung S entsteht in dem Seil?



*298. Zwei gleich lange, gewichtlose Stäbe AC = BC = b sind in C gelenkig verbunden und mit Q belastet. Ihre Enden A und B sind durch ein elastisches Band verbunden, dessen Länge im ungespannten Zustand l_0 und dessen Widerstand der Längenänderung proportional ist. Wie groß muß Q sein, damit für Gleichgewicht der Winkel ACB ein rechter ist?

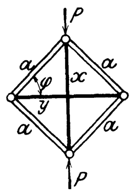


*299. Drei gleich dicke Stäbe aus demselben Material sind gelenkig miteinander verbunden; ihre Enden A und B liegen in derselben Horizontalen. Die Längen der Stäbe und der Linie AB sind in die Abbildung eingeschrieben. Welche Beziehung muß zwischen den Winkeln α, β und γ bestehen, wenn die Stäbe im Gleichgewicht sind?

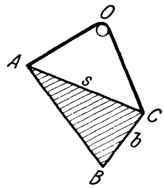


*300. Drei Stangen a, b und c sind in A und B gelenkig verbunden, in C stoßen sie frei aneinander. In B hängt ein Gewicht G. Wie groß ist der Druck D in der Stange AC?

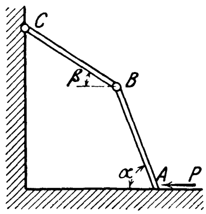
***301.** Vier gleich lange Stäbe a sind gelenkig miteinander verbunden; zwischen den Gelenken sind elastische Fäden gespannt, die im ungespannten Zustand die Länge a besitzen; ihre Spannung ist der Längenänderung proportional. Überdies wirken an zwei gegenüberliegenden Gelenken zwei gleiche Kräfte P; wie groß wird der Winkel φ, sobald Gleichgewicht eingetreten ist?



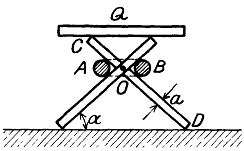
***302.** Ein homogenes gleichschenkliges Dreieck ABC ist in A und C an einer biegsamen Schnur von der Länge l befestigt. Dieselbe läuft in O über eine kleine glatte Rolle. Man bestimme die Differenz x der Schnurstücke OC und AO für Gleichgewicht.



***303.** Zwei gleich lange, gleich schwere, gelenkig verbundene Stäbe sind in C gelenkig gelagert und stützen sich in A an den glatten Boden. Welche Kraft P ist in A horizontal anzubringen, um das Gleichgewicht zu erhalten?

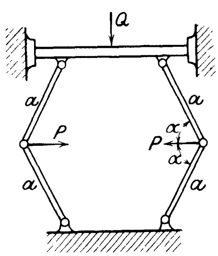


***304.** Zwei in O drehbare Stangen von der Länge $CD = l$ und der Dicke a werden mittelst zweier horizontalen Walzen A und B vom Halbmesser r, um die ein Seil geschlungen wird, im Gleichgewicht erhalten. Wenn die Belastung Q dieser Holzkonstruktion gegeben ist, wie groß wird die Seilspannung sein, wenn von allen Reibungen abgesehen wird?

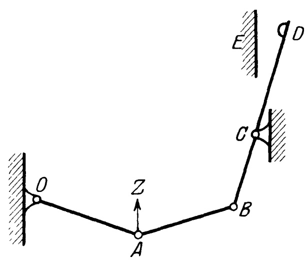


***305.** Es ist an der einfachen Kniehebelpresse das Verhältnis zwischen der Kraft P und der Last Q zu ermitteln.

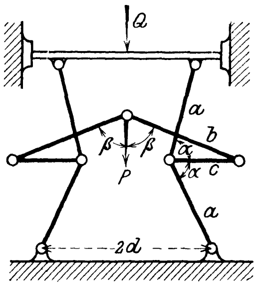
***306.** Bei der Schützensteuerung zum selbsttätigen Anlassen von elektrischen Motoren wird nebenanstehendes Kniegelenk verwendet. Durch eine in A wirkende magnetische Zugkraft



Aufg. 305.



Aufg. 306.

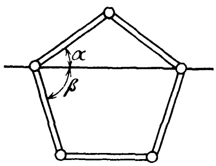


Aufg. 307.

Z wird D nach E gedrückt und der Kontakt hergestellt. Wenn O A = A B, C D = 3 B C und die Größe des Winkels O A B im Augenblicke des Kontaktes 2 β ist, wie groß ist der Druck D in E?

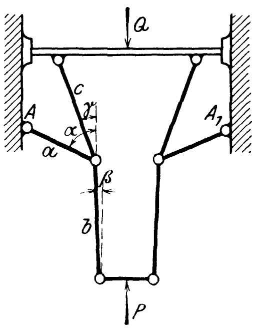
(Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing. 1913.)

***307.** Man soll an der doppelten Kniehebelpresse das Verhältnis zwischen der Kraft P und der Last Q ermitteln.

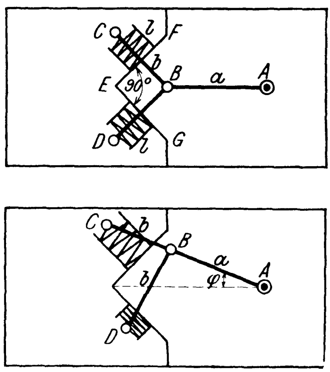


***308.** Fünf gleich lange, gleich schwere Stäbe sind gelenkig miteinander verbunden. Zwei von diesen Gelenken können auf einer horizontalen Geraden gleiten. In welcher Beziehung stehen die Winkel α und β, wenn die fünf Stäbe im Gleichgewicht bleiben? (Walton.)

***309.** Es ist an der Baumwollpresse von Baldwin das Verhältnis der Kraft P zur Last Q durch die drei Winkel α, β, γ auszudrücken.



Aufg. 309.



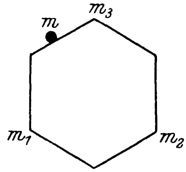
Aufg. 310.

***310.** Die beiden Figuren zeigen das verdrehbare Rahmengestell einer Lokomotive in der Draufsicht und zwar in normalem Zustand und nach einer Verdrehung um den Winkel φ. A ist ein im Gestell fester Drehpunkt, A B = a eine drehbare Kurbel; die Stäbe B C = B D = b sind in C und D an Federn drehbar befestigt, die im normalen Zustand ungespannt sind und eine Länge l haben. Wenn die Verdrehung der Kurbel φ gegeben ist, sollen berechnet werden: a) die Verdrehungen γ und δ von B C und B D; b) die entstehenden

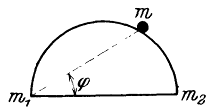
Federdrücke in C und D, wenn k die Federkraft für die Einheit der Längenänderung ist; c) die aufzuwendende Verdrehungskraft P in B. (Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing. 1897, S. 96.)

15. Gleichgewicht mit Berücksichtigung der Reibung.

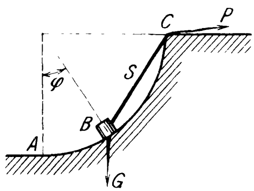
***311.** Ein frei beweglicher Punkt m kann am rauhen Umfang eines regelmäßigen Sechsecks gleiten und wird von den drei Ecken $m_1 m_2 m_3$ proportional den Entfernungen angezogen. k sei die Anziehung in der Einheit der Entfernung. Wie groß muß die Reibungszahl f sein, wenn der Punkt m an allen Stellen des Umfanges im Gleichgewicht sein soll? Wie groß ist der Normalwiderstand W der Unterstützung?



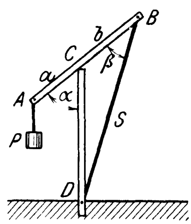
312. Ein frei beweglicher Punkt m, der längs eines rauhen Halbkreises gleiten kann, wird von den Endpunkten des Durchmessers $m_1 m_2$ proportional den Entfernungen angezogen. $k_1 k_2$ seien bezw. die Anziehungen in der Einheit der Entfernung. Für welche Werte von tang φ bleibt m nicht im Gleichgewicht, wenn $k_1 : k_2 = 3 : 2$ und die Reibungszahl $f = 0{,}2$ ist?



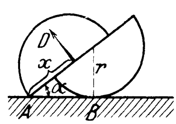
***313.** Ein Gewicht G wird mittelst eines Seiles auf einer rauhen Viertelkreisbahn emporgezogen. Für welchen Winkel φ ist die Seilspannung S am kleinsten, wenn ϱ der Reibungswinkel an der Gleitbahn ist?



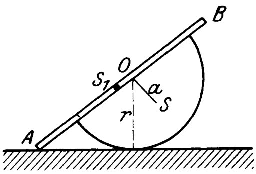
314. Ein gewichtloser Stab $AB = l$ stützt sich bei C auf eine Säule, wird in B von einem in D befestigten Seil gehalten und in A belastet. Gegeben sind die Entfernungen a und b, die Winkel α und β. Wie groß muß die Reibungszahl f in C mindestens sein, damit Gleichgewicht besteht? Wie groß ist die Seilspannung S?



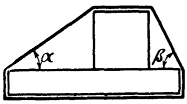
315. Die zwei Hälften eines Kreiszylinders vom Halbmesser r und dem Gesamtgewicht 2 G stützen sich in der gezeichneten Art aneinander; der Boden ist glatt, die Schnittebenen der Halbzylinder rauh. Der Winkel α ist gegeben. Es sind



für Gleichgewicht zu suchen: a) die Reibungszahl f; b) die Drücke in A und B; c) der Druck D zwischen den Halbzylindern; d) die Entfernung x, in welcher D wirkt.

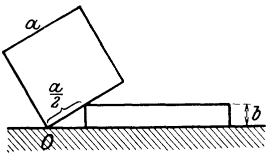


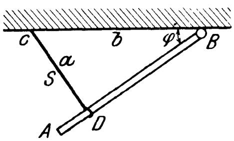
316. Ein Stab $AB = 2l$ vom Gewicht G_1 lehnt sich an eine Halbkugel vom Gewicht G; der Boden ist glatt, die Berührungsfläche zwischen Stab und Halbkugel rauh (Reibungszahl f). Man wünscht, daß die Richtung des Druckes zwischen beiden durch den Schwerpunkt S_1 des Stabes gehen soll. Wie groß muß die Länge l gemacht werden?



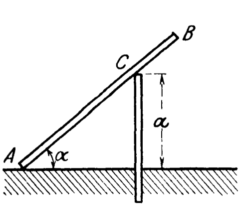
317. Ein Prisma und eine Platte werden von einer gespannten Schnur umschlungen, die mit letzterer die Winkel α und β einschließt. Wie groß muß die Reibungszahl zwischen beiden Körpern sein, damit in dieser Stellung Gleichgewicht besteht? (Die Gewichte sind zu vernachlässigen.)

318. Ein Würfel vom Gewicht G und der Kantenlänge a ist längs der Kante O drehbar befestigt und stützt sich auf eine Platte vom Gewicht G_1 und der Höhe $b = \frac{a}{4}$. Wie groß muß die Reibungszahl zwischen Platte und horizontaler Unterlage sein, wenn in der gezeichneten Stellung Gleichgewicht besteht?

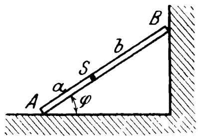




319. Ein Stab $AB = 2l$ vom Gewicht G ist in B drehbar befestigt und wird in C von einer Schnur von der Länge a gehalten, an deren anderem Ende ein Ring befestigt ist. Dieser hat gegen den Stab die Reibungszahl f; $BC = b$ ist gegeben. Wenn Gleichgewicht besteht, zwischen welchen Grenzen können der Winkel φ, der Druck in D und die Spannung S der Schnur schwanken?

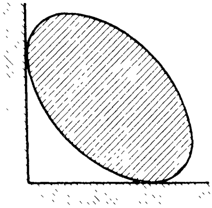


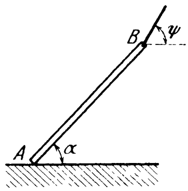
320. Ein Stab $AB = l$ stützt sich in A an den rauhen Boden, in C an einen vertikalen Pfosten von der Länge a. Der Stellungswinkel α des Stabes ist gegeben; wie groß muß die Reibungszahl f am Boden mindestens sein?



321. Eine Stange AB mit dem Schwerpunkt S stützt sich an einen rauhen Boden (f_1) und an eine rauhe vertikale Wand (f_2). Bei welchem Winkel φ mit dem Boden wird die Stange das Gleichgewicht verlieren?

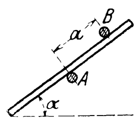
322. Eine elliptische Scheibe ruht derart zwischen einer glatten Wand und dem rauhen Boden, daß ihre Achsen mit beiden 45^0 einschließen. Wie groß muß die Reibungszahl des Bodens sein, wenn die Scheibe in dieser Lage gerade zu gleiten beginnt? (Walton.)


Aufg. 322.

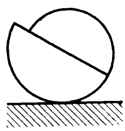


Aufg 323.

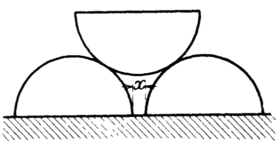
323. Ein Stab AB vom Gewicht G stützt sich bei A an den rauhen horizontalen Boden (Reibungszahl f) und wird in B von einem Seil gehalten. Die Neigung des Stabes ist $\alpha = 45^0$. Bei welcher Neigung ψ der Schnur wird der Stab zu gleiten beginnen? Wie groß ist der Druck in A?



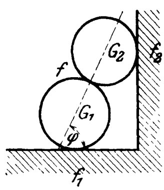
324. Ein schwerer Stab liegt zwischen zwei horizontalen Stäben A und B, an denen er durch Reibung gehalten wird. Wie groß darf die Entfernung des Schwerpunktes des Stabes von A sein, damit der Stab nicht hinabgleitet? (Walton.)



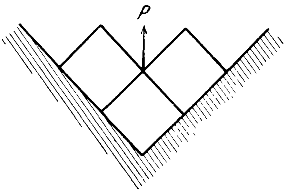
325. Zwei halbe Kreiszylinder mit den Halbmessern r und r_1, den Einheitsgewichten γ und γ_1, von gleicher Länge ruhen mit den rauhen ebenen Flächen aufeinander. Wie groß muß deren Reibungszahl sein, wenn eben noch Gleichgewicht bestehen soll?



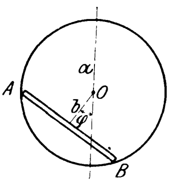
326. Ein halber Kreiszylinder vom Halbmesser r und dem Gewicht G ruht auf zwei anderen vom Halbmesser r_1 und dem Gewicht G_1. Die Mantelflächen sind glatt, der Boden rauh. Bei welcher Entfernung x beginnen die unteren Halbzylinder zu gleiten?



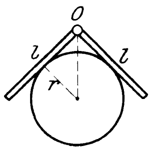
327. Zwei zylindrische Walzen mit den Gewichten G_1 und G_2 stützen sich sowohl aneinander, wie auch an Wand und Boden. Die Zahlen der hierbei auftretenden Reibungen seien f f_1 f_2. Bei einem bestimmten Winkel φ bleiben die Walzen gerade noch im Gleichgewicht. Welche Minimalwerte müssen die Reibungszahlen haben? Wie groß werden die Drücke D D_1 D_2 zwischen den Walzen und an Boden und Wand?



328. Auf zwei unter 45^0 geneigten Ebenen liegen drei Würfel von gleichem Gewicht G; der Reibungswinkel ϱ zwischen den Flächen sei bekannt. Welche Kraft P ist notwendig, um den untersten Würfel empor zu heben?

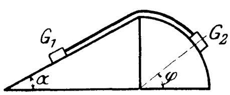


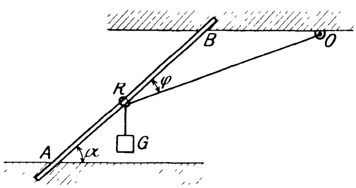
329. Ein Stab AB liegt in einem vertikalen Kreis vom Halbmesser a und ist vom Mittelpunkt um b entfernt. Wie groß wird der Winkel φ im äußersten Fall sein dürfen? (f = Reibungszahl zwischen Stab und Kreis.)



330. Auf einer Walze ruhen zwei in O drehbar verbundene gleich lange Stäbe vom Gewicht G. Zwischen welchen Grenzen wird der Winkel φ zwischen den Stäben schwanken, wenn die Reibung zwischen Stab und Walze berücksichtigt wird? Wie groß ist der Druck D zwischen beiden?

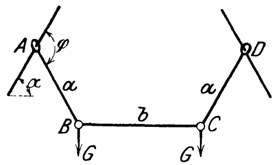
331. Zwei Gewichte G_1 und G_2 sind durch eine biegsame Schnur verbunden; das eine liegt auf einer rauhen schiefen Ebene, das andere auf einer rauhen Viertel-Walze. Zwischen welchen Grenzen wird der Winkel φ schwanken dürfen, wenn Gleichgewicht bestehen soll? Die Reibungswinkel ϱ_1 und ϱ_2 sind bekannt.



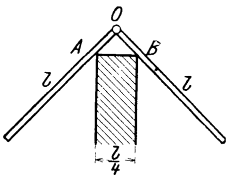


332. An einem Faden, der in O befestigt ist und durch den Ring R geht, ist das Gewicht G befestigt. Der Ring kann an der rauhen Stange AB gleiten. Welchen größten und kleinsten Wert kann der Winkel φ annehmen?

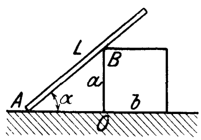
333. Ein Stabwerk, das in den Gelenken B und C mit zwei gleichen Gewichten G belastet ist, hängt in A und D mittelst zweier Ringe an zwei unter α geneigten rauhen Stangen. Zwischen welchen Grenzen kann der Winkel φ schwanken, wenn Gleichgewicht bestehen soll? Wie groß sind die Spannungen S_1 und S_2 der Stäbe AB und BC in den äußersten Stellungen?



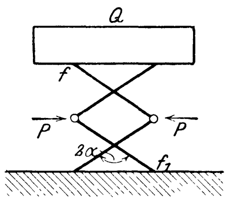
334. Zwei gleiche Stäbe, die gelenkig verbunden sind, werden in angegebener Weise gestützt. Wie groß muß die Reibungszahl bei A und B sein, wenn die Stäbe einen rechten Winkel miteinander einschließen sollen? Wie groß ist dann der Auflagerdruck in A und B?



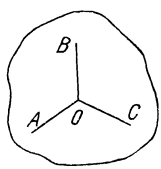
335. An ein horizontal gelagertes Prisma lehnt sich eine Stange vom Gewicht G. Bei B findet Reibung statt. Das Ende A der Stange wird langsam nach links gezogen. Wie groß muß das Gewicht Q des Prismas mindestens sein, damit das Kippen um O nicht eintritt? Bei welchem Winkel α muß Q am größten sein?

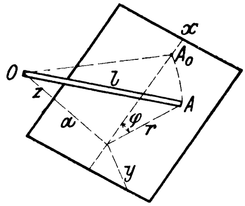


336. Benütze das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zur Lösung folgender Aufgabe: Eine Platte vom Gewicht Q ruht auf einem beweglichen Gestell vom Gewicht G. Welche Kräfte P werden das Gestell im Gleichgewicht erhalten, wenn die Reibungszahlen f und f_1 unter der Platte und an dem Boden berücksichtigt werden?

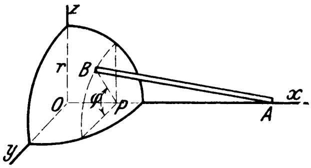


337. Ein schwerer Körper ruht auf drei Stützen A, B, C auf rauher horizontaler Ebene; seine Drücke daselbst sind P, Q, R. Ein Kraftpaar, welches gerade hinreicht, die Reibung zu überwinden, sucht den Körper zu drehen. Um welchen Punkt O wird diese Drehung erfolgen? (Routh.)





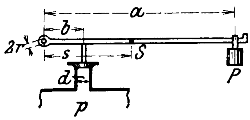
338. Eine schwere Stange $OA = l$ vom Gewicht G wird in O festgehalten und stützt sich in A auf eine rauhe Ebene, die um α gegen den Horizont geneigt ist. Zu suchen den Winkel φ für die äußerste Gleichgewichtslage und die Auflagerdrücke in A und O. a sei die Entfernung des Punktes O von der Ebene, f die Reibungszahl derselben.



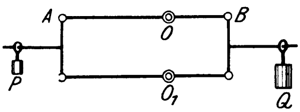
339. Ein homogener schwerer Stab $AB = l$ vom Gewicht G ist in A festgehalten und stützt sich in B auf die Oberfläche einer rauhen Kugel. Wie groß sind für die äußerste Gleichgewichtsstellung des Stabes: a) der Winkel φ; b) der Normalwiderstand D der Kugel; c) der Widerstand A in A?

16. Einfache Maschinen.

340. Mit welchem Gewicht P muß das Sicherheitsventil eines Dampfkessels belastet werden, wenn folgende Größen gegeben sind: $a = 1{,}0$ m, $b = 0{,}2$ m, $r = 1$ cm, $d = 6$ cm; Dampfspannung im Kessel $p = 7$ at, Zahl der Zapfenreibung $f_1 = 0{,}1$; Gewicht des Hebels 8 kg; $s = 45$ cm.

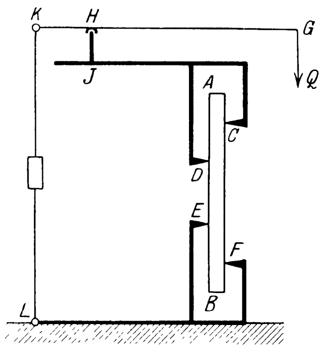


341. Es soll für die nebenan gezeichnete R o b e r v a l sche Wage bewiesen werden, daß $Pa = Qb$ ist, also unabhängig von den Stellen, wo die Gewichte hängen. O und O_1 sind feste Drehpunkte; $OA = a$, $OB = b$.

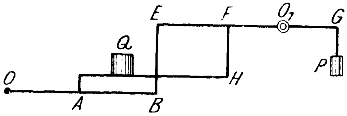


342. Bei dem von der Firma B u c h h e i m e r und H e i ß e r gebauten Reformprüfer für Betonbalken wird der Balken AB zwischen die vier Klauen C, D, E, F eines Gestelles gelegt, das bei J von einem einarmigen Hebel KHG gedrückt wird.

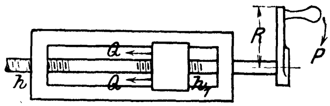
In den vier Angriffspunkten der Klauen drücken gleiche Kräfte P auf den Balken; wie groß sind sie, wenn Q die Belastung bei G ist? (Zeitsch. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 1719.)



343. Die Hebelverbindung einer Brückenwage sei derart angeordnet, daß $\frac{a}{b} = \frac{f}{e}$, wobei $OA = a$, $OB = b$, $O_1E = e$, $O_1F = f$, $O_1G = g$. Man zeige, daß die Beziehung $Pg = Qf$ gilt.



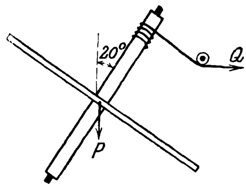
Aufg. 343.



Aufg. 344.

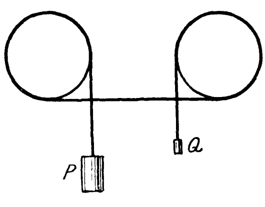
344. Es soll das Verhältnis von Kraft P und Last Q bei einer Differentialschraube bestimmt werden, wenn R die Länge der Kurbel und h, h_1 die Ganghöhen der beiden Schraubengewinde auf derselben Spindel sind. (Ohne Rücksicht auf Reibungen.)

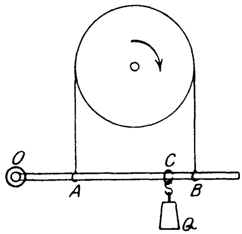
345. Auf einer Tretscheibe, deren Achse um 20° gegen die Vertikale geneigt ist, steht bei P ein Pferd von 280 kg Gewicht in der Entfernung 7 m von der Achse. Die Welle hat 20 cm Durchmesser. Welche Last Q kann mit Hilfe des Seiles überwunden werden, wenn das Pferd die Scheibe durch Treten in Bewegung setzt? Die Nebenwiderstände sind nicht zu berücksichtigen. Der zu P gehörige Halbmesser der Scheibe ist horizontal anzunehmen.



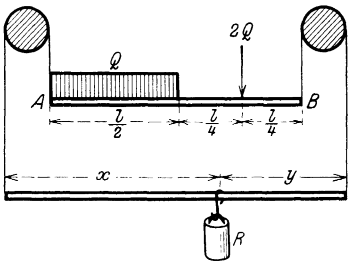
346. Auf einer schiefen Ebene, die unter dem Winkel $\alpha = 50^0$ gegen den Horizont geneigt ist, befindet sich eine Last G, die von einer Kraft P gerade noch im Gleichgewicht erhalten wird; die Richtung von P ist um $\beta = 30^0$ gegen die Vertikale geneigt; die schiefe Ebene ist rauh, der Reibungswinkel beträgt $\varrho = 5^0$. Die schiefe Ebene wird nun um $\gamma = 10^0$ gesenkt; jetzt bleibt dieselbe Last G im Gleichgewicht, wenn die Kraft, deren Neigung gegen die Vertikale sich nicht geändert hat, um $p = 10$ kg vermindert wird. Wie groß sind P und G?

347. Über zwei gleiche feststehende Walzen schlingt sich ein Seil, an dessen Enden zwei Lasten hängen, von denen die eine zehnmal so groß ist wie die andere. Wie groß muß die Reibungszahl zwischen Seil und Walze sein, damit Gleichgewicht besteht?

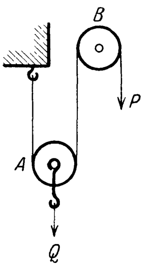




348. Um ein in Drehung begriffenes Rad schlingt sich ein Band, dessen Enden A und B an einem Hebel befestigt sind; dieser ist in O drehbar und trägt in C ein Gewicht Q. Wie groß sind die Bandspannungen in A und B? Wie groß muß OC gemacht werden, wenn der Druck in O Null sein soll?



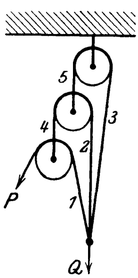
349. Ein Träger AB, der in nebenan gezeichneter Weise belastet ist, wird horizontal an zwei Seilen aufgehängt, die über zwei feststehende, walzenartige Körper laufen und an den anderen Enden einen mit R belasteten horizontalen Stab tragen. Wie groß muß R gemacht werden und in welchem Verhältnis müssen x und y stehen, wenn der Träger mit konstanter Geschwindigkeit herabsinken soll?



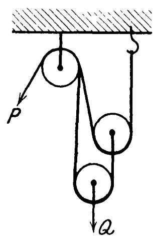
350. Ein Seil läuft über zwei Rollen A und B, von denen B durch irgend einen Umstand stecken geblieben ist. Zwischen welchen Grenzen wird P schwanken dürfen, wenn es Q Gleichgewicht halten soll?

351. Es soll das Kraftverhältnis und das Güteverhältnis für den unten gezeichneten Flaschenzug ermittelt werden. Dabei sind die drei die Last tragenden Seile als angenähert parallel anzusehen, die Rollen gleich und das Seil überall gleich stark anzunehmen.

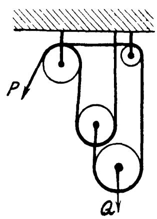
352. Man berechne das Güteverhältnis des unten gezeichneten Flaschenzuges unter denselben Voraussetzungen wie in voriger Aufgabe.



Aufg. 351.



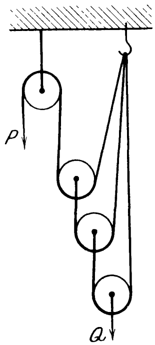
Aufg. 352.



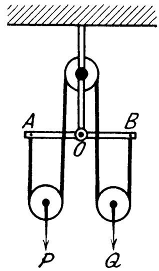
Aufg. 353.

353. Man ermittle das Güteverhältnis des oben gezeichneten Flaschenzuges unter denselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 351.

354. In welchem Verhältnis stehen Kraft und Last bei nebenan gezeichnetem Flaschenzug und wie groß ist das Güteverhältnis? Die Voraussetzungen sind die gleichen wie in Aufgabe 351.



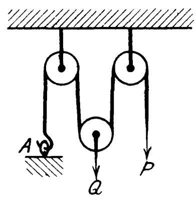
Aufg. 354.



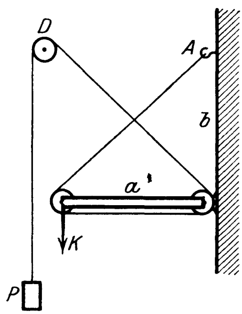
Aufg. 355.

355. Ein Seil schlingt sich über drei gleiche Rollen und ist an den Enden eines in O drehbaren Hebels befestigt. Wie groß muß P mit Rücksicht auf den Rollenwiderstand gemacht werden, damit die linke Rolle sich senkt? In welchem Verhältnis müssen die Arme $OA = a$, $OB = b$ stehen, wenn der Hebel im Gleichgewicht bleiben soll?

356. Ein Seil schlingt sich über drei gleiche Rollen und ist in A befestigt. Wie groß muß P mit Rücksicht auf den Rollenwiderstand gemacht werden, damit Q gehoben wird? Wie groß muß die Rollenzahl ζ gewählt werden, wenn P doppelt so groß sein soll, wie die in A auftretende Seilspannung?

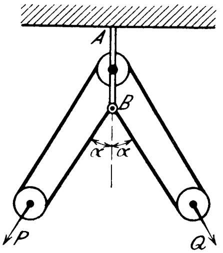


357. Ein Seil, das in A befestigt ist, läuft über drei Rollen und trägt die Last P. Zwischen welchen Grenzen darf die Kraft K schwanken, wenn sie Gleichgewicht halten soll?

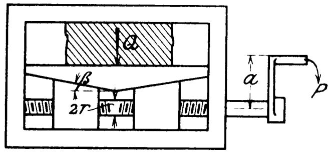


Aufg. 357.

358. Ein Seil schlingt sich über drei gleiche Rollen; seine Enden sind in B befestigt. Wie groß muß P mit Rücksicht auf den Rollenwiderstand gemacht werden, wenn Q gehoben werden soll? Wie groß ist der in A ausgeübte Zug?

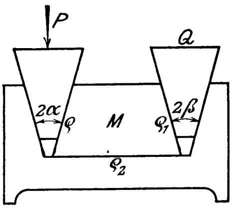


Aufg. 358.

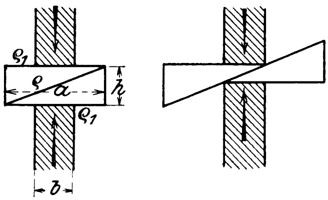


Aufg. 359.

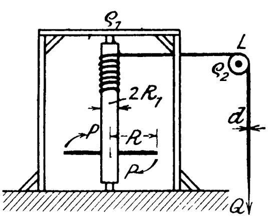
359. An der Kurbel einer Schrauben-Keil-Presse wird mit $P = 10$ kg gearbeitet. Welcher Widerstand Q kann durch die Presse überwunden werden, wenn folgende Widerstände berücksichtigt werden sollen: 1. Die Reibung in den Schraubengewinden $f = 0{,}1$; 2. die Reibung zwischen den Keilen und der Preßplatte, sowie zwischen den Keilen und der Unterlage, $f_1 = 0{,}08$. Wie groß ist das Güteverhältnis? Gegeben sind: $a = 0{,}4$ m, $\beta = 10^0$, α (Steigungswinkel der Schraube) $= 5^0$, $r = 2$ cm.



360. Ein Keil, auf den eine Kraft P wirkt, treibt ein Mittelstück an (gewichtlos), das auf einen zweiten Keil drückt. Welche Last Q kann durch diesen zweiten Keil gehoben werden, wenn 2α, 2β die Keilwinkel, $\varrho\ \varrho_1\ \varrho_2$ die drei Reibungswinkel sind?

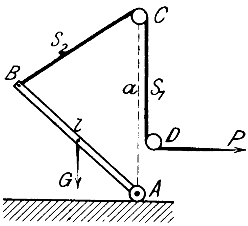


361. Auf ein Prisma von der Breite a und der Höhe h wirken oben und unten gleiche Drücke Q. Das Prisma wird in der Diagonale gespalten. Nach welcher Zeit kommen seine Hälften in die nebenan gezeichnete Lage, wenn ϱ und ϱ_1 die Reibungswinkel der betreffenden Flächen sind? Bei welchem Verhältnis $\frac{h}{a}$ wird die Verschiebung unterbleiben?

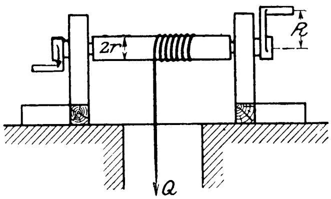


362. An einem Göpel arbeiten vier Mann mit je $P = 10$ kg; welche Last Q kann mit demselben gehoben werden, wenn die Reibung in den beiden Zapfen des Göpels, die Steifheit des Seiles und die Widerstände der Leitrolle L berücksichtigt werden sollen? Wie groß ist das Güteverhältnis? Gegeben sind: $R = 3$ m, $R_1 = 20$ cm, $d = 4$ cm (Seilstärke), $r = 20$ cm (Halbmesser der Leitrolle), $\varrho_1 = \varrho_2 = 4$ cm (Zapfenhalbmesser), Reibungszahl $f_1 = 0{,}08$.

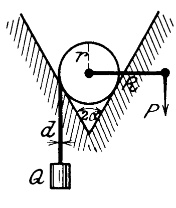
363. Ein Balken AB von der Länge $l = 3$ m und dem Gewicht $G = 400$ kg ist in A drehbar befestigt und wird in B mittelst eines Hanfseiles von der Stärke $d = 3$ cm aufgezogen. Das Seil läuft über zwei feste Rollen C und D, welche den Halbmesser $R = 10$ cm und den Zapfenhalbmesser $\varrho = 2$ cm besitzen; die Entfernung $AC = a$ beträgt 4 m. Man berechne: a) In welcher Stellung des Balkens ist die Seilspannung S_2 am größten? Wie groß ist sie? b) Wie groß ist für diese Stellung die zum Heben notwendige Kraft P bei Berücksichtigung der Rollenwiderstände in C und D? Reibungszahl $f_1 = 0{,}1$.



364. An den beiden Kurbeln eines Haspels arbeiten vier Mann mit je 8 kg; die Kurbellänge ist $R = 0{,}4$ m, der Halbmesser der Welle $r = 8$ cm, die Stärke des Hanfseiles $d = 2$ cm; die Zapfenreibung verzehrt 4 v. H. der Gesamtleistung. Welche Last Q kann mit dem Haspel gehoben werden? Wie groß ist das Güteverhältnis?



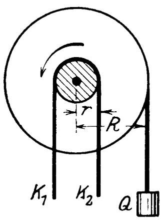
365. Auf einem Haspel (siehe frühere Abbildung), dessen Arme $R = 60$ cm lang sind, dessen Welle $2r = 30$ cm Durchmesser und $\varrho = 2$ cm Zapfenhalbmesser hat, wird ein Hanfseil von $d = 2{,}5$ cm Stärke aufgewunden. Es läuft anfangs horizontal, um dann über eine feste Rolle von $r_1 = 15$ cm Halbmesser und $\varrho_1 = 2$ cm Zapfenhalbmesser zu gehen; endlich hängt es vertikal herab und trägt $Q = 50$ kg. Zapfenreibung ($f_1 = 0{,}08$) und Seilsteifheit sind zu berücksichtigen. Wie groß muß die Kraft P am Arm zum Heben der Last sein? Wie groß ist das Güteverhältnis?



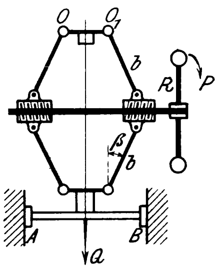
366. Eine Last Q wird mit Hilfe eines Seiles von der Stärke d gehoben, das über eine Walze geschlungen ist. Die Walze ist zwischen zwei rauhen schiefen Ebenen gelagert, deren jede mit der Vertikalen den Winkel α einschließt.

Welche Kraft P ist am Ende des Armes R nötig, um die Last zu heben?

367. In Aufgabe 313 sei $G = 100$ kg, $\varphi = 45^0$, $f = \operatorname{tg}\varrho = 0{,}2$. Bei C würde das Hanfseil (von $d = 2$ cm Stärke) über eine Rolle laufen, deren Halbmesser $R = 12$ cm, Zapfenhalbmesser $\varrho = 2$ cm, Zapfenreibungszahl $f_1 = 0{,}1$ sei. Wie groß muß die Kraft P sein die das Gewicht hebt, und wie groß muß die Kraft P′ sein, die das Gewicht erhält?

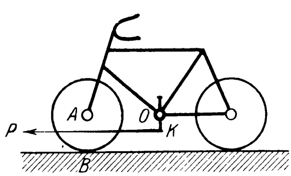


368. Eine Last Q hängt an einem vollkommen biegsamen Faden, der über eine Rolle vom Halbmesser R geschlungen wird. Über den rauhen Zapfen vom Halbmesser r wird ein anderer Faden gelegt und durch Ziehen und Spannen desselben die Rolle im angedeuteten Sinne bewegt. Wie groß müssen die Spannungen K_1 und K_2 des Fadens sein, damit die Last Q gehoben wird?



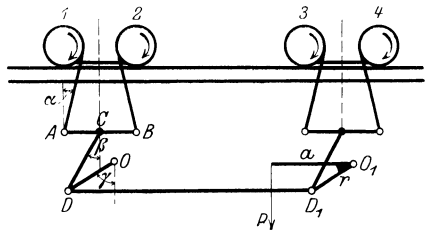
369. Wie ändert sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn auch die Reibung des Zapfens in seinem Lager (Reibungszahl f_1) berücksichtigt wird?

370. Bei der Kniehebelpresse von Marsth wird auf die Preßplatte AB dadurch ein Druck Q ausgeübt, daß ein Handrädchen vom Halbmesser R eine Schraubenspindel dreht, welche bei feststehenden Punkten O und O_1 das Getriebe hinabdrückt. Wie groß muß die Kraft P am Handrädchen sein, wenn auf die Reibung in den Schraubengewinden Rücksicht genommen wird?



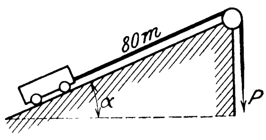
371. Wenn der untere Kurbelpunkt K eines Fahrrades mittelst eines Seiles nach vorwärts gezogen wird, bewegt sich K in einer Richtung, die der ziehenden Kraft P entgegengesetzt ist. Wie erklärt man diese Erscheinung?

372. Bei der Bandbremse für eine Laufkatze werden die Räder 1 bis 4 zu je zweien von einem Bremsband umschlungen, das an den Enden eines gleicharmigen Hebels ACB befestigt ist. Das Gelenk C ist in D an eine Kurbel angeschlossen, die sich um das Gelenk O in der Laufkatze drehen kann. Die Parallelkurbel $O_1 D_1$ ist als Winkelhebel ausgebildet, an dessen Arm a die Zugkette hängt. Welche Gesamtreibung wird an den vier Rädern durch die Kraft P an der Kette ausgeübt?

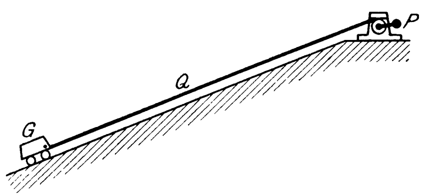


(Zeitsch. Ver. deutsch. Ingen. 1913.)

373. Eine Last Q = 3000 kg wird auf Rädern eine schiefe Ebene hinaufgezogen, welche 80 m lang und 4 m hoch ist. Das Hanfseil ist 2 cm stark und läuft über eine Rolle. Gegeben sind: Raddurchmesser 0,5 m; Radzapfendurchmesser 5 cm; Rollendurchmesser 1 m; Rollenzapfendurchmesser 12 cm; Zapfenreibungszahl 0,08. Wie groß muß die Kraft P am Ende des Seiles sein, wenn a) die Last gehoben und b) die Last gehalten werden soll?



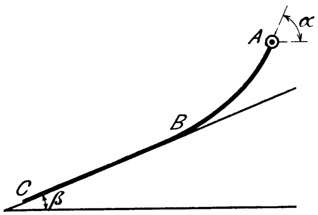
374. Eine Last G wird auf Walzen eine schiefe Ebene von der Neigung $\alpha = 20^0$ emporgezogen. Das Hanfseil ist 1,5 cm stark und läuft oben über die Welle eines Haspels (siehe Aufgabe 364), an dessen Kurbeln zwei Arbeiter mit je 10 kg wirken. Außerdem sind folgende Größen gegeben:
Walzenhalbmesser $R_1 = 5$ cm;
Wellenhalbmesser $r = 10$ cm;
Kurbellänge $R = 40$ cm;
Zapfenhalbmesser $\varrho = 2$ cm;
Zahl der Zapfenreibung $f_1 = 0{,}1$.
Wie groß darf G im äußersten Fall sein?



17. Kettenlinien.

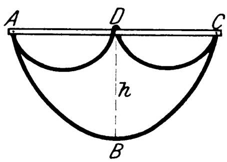
375. Von dem Bogenstück AB einer aufgehängten schweren Kette kennt man den Schwerpunkt S. Wo schneiden sich die Tangenten des Bogens in A und B?

376. Auf eine in zwei Punkten aufgehängte Kette wirken Kräfte, welche sämtlich durch einen festen Punkt O gehen. In welchem Verhältnis stehen die Kettenspannungen an zwei beliebigen Stellen? (Petersen.)



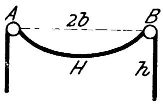
377. Ein homogenes Seil AC $= l$ ist in A aufgehängt und liegt zum Teil auf einer schiefen Ebene. Es ist die Länge BC $= l_1$ zu suchen, wenn die Winkel α und β gegeben sind. (Walton.)

378. Ein schwerer homogener Faden ist an zwei Punkten in derselben Höhe befestigt; die Spannungen in diesen Punkten sind gleich dem Gewicht des Fadens. Welche Neigung φ haben die Tangenten in diesen Punkten gegen die Horizontale und wie groß ist das Verhältnis zwischen der Länge des Fadens und der Entfernung der Aufhängepunkte? (Walton.)

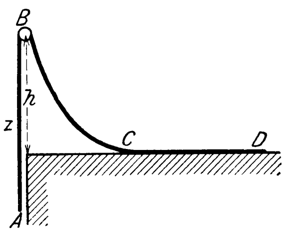


379. Eine homogene Kette ABC von der Länge 2 l, die zwischen zwei gleich hohen Punkten A und C mit der Durchsenkung h herabhängt, wird mit ihrer Mitte bis D gehoben. Wie ändert sich dadurch Richtung und Größe der Spannung in A und C und wie groß ist sie jetzt?

380. Eine homogene Kette von der Länge l und dem Gewicht G ist in einem Endpunkt B befestigt. Das andere Ende A soll so hoch über B gehoben werden, daß die Kette bei B einen gegebenen horizontalen Zug H ausübt. Welche Höhe η über B und welche horizontale Entfernung ξ von B muß A erhalten?

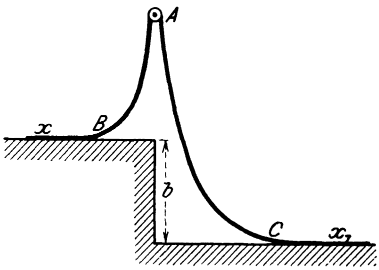


381. Eine homogene Kette von nebenstehender Gestalt ist im Gleichgewicht. Der Horizontalzug sei $H = 2\,q\,l$, wenn $2\,l$ die Länge der Kette zwischen A und B, $2\,q\,l$ ihr Gewicht ist. Wie groß ist h? (Walton.)

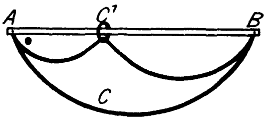


382. Von einer homogenen Kette, deren Länge l ist, liegt ein Stück auf einem rauhen horizontalen Tische. Wie lang darf das frei herabhängende Stück z sein, damit Gleichgewicht besteht?

383. Eine homogene Kette ruht mit ihren Enden auf zwei rauhen horizontalen Ebenen, welche die Entfernung b voneinander haben. Wie groß muß die Differenz $x - x_1$ der beiden horizontalen Stücke der Kette sein, damit Gleichgewicht besteht?

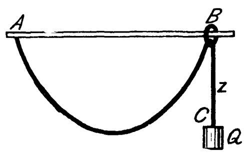


384. Von einer homogenen Kette, deren Enden A und B auf einem horizontalen glatten Stabe festgeklemmt sind, wird ein Glied C auf den Stab gesteckt. Welche Gestalt nehmen nun die beiden Teile der Kette an, wenn ihre Längen $AC = 2\,l_1$, $BC = 2\,l_2$ gegeben sind?

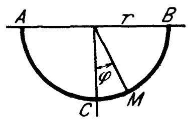


Aufg. 384.

385. Eine homogene Kette vom Gewicht q für die Längeneinheit ist in A befestigt und geht durch einen glatten Ring B, der an jedem Punkt einer horizontalen Stange festgehalten werden kann. Das Ende C der Kette trägt das Gewicht Q. Man suche den Ort der Punkte C für alle möglichen Gleichgewichtslagen.

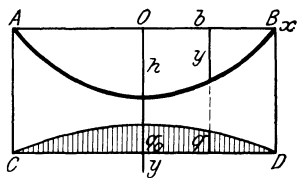


***386.** Wie muß das Gewicht q der Längeneinheit einer Kette sich ändern, wenn die Kettenlinie ein Halbkreis sein soll? Wie groß ist die Spannung in jedem Punkt M? (Joh. Bernoulli.)

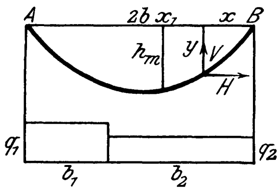


***387.** Zwischen zwei Punkten, die in der gleichen Horizontalen liegen und die Entfernung 2 b voneinander haben, hängt eine Kette von veränderlicher Dicke herab. Die Dicke ist dem Cosinus der Neigung φ der Kette gegen die Horizontale proportional. Welche Gestalt nimmt die Kette an, wenn h ihre Einsenkung ist? (Jakob und Joh. Bernoulli.)

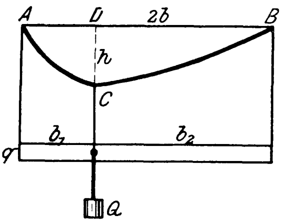
***388.** Zwischen zwei Punkten A und B, die in derselben Horizontalen liegen, hängt eine gewichtlose Kette; sie trägt eine über die Horizontale CD ungleichförmig verteilte Belastung (q für



die Längeneinheit). Wenn die Kette die Form $y = h \cos \frac{\pi x}{2b}$ annimmt, welchem Gesetz muß die Belastung q folgen?



***389.** Eine gewichtlose Kette, die in zwei gleich hoch liegenden Punkten A und B befestigt ist, trägt zwei verschieden große gleichförmig ausgebreitete Belastungen (q_1 und q_2 für die Längeneinheit der Horizontalen). Die hierdurch erzeugte größte Einsenkung der Kette sei h_m und werde gemessen. Wie groß ist der Horizontalzug der Kette?



***390.** Eine zwischen A und B herabhängende gewichtlose Kette trägt einen gleichförmig mit q auf die Längeneinheit belasteten Balken, der an einer Stelle überdies mit Q belastet ist. Wenn die Einsenkung der Kette an der Stelle dieser Last mit h ermittelt wird, wie groß ist der Horizontalzug H der Kette?

***391.** Bei der Belastung einer gewichtlosen Kette wie in voriger Aufgabe kann $AD = z$ geändert werden. Die Einsenkung h_1 der Kette in der Mitte von $AB = 2b$ werde gemessen. Man suche die größte Einsenkung h_m der Kette und die Stelle, wo diese auftritt, ferner die Kettenspannung in A.

II. Bewegung des Punktes.

1. Geradlinige Bewegung.

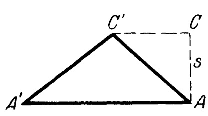
392. Ein Punkt besitzt eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 und eine konstante Verzögerung b_1; nach m Sekunden hört die Verzögerung auf, um nach weiteren n Sekunden mit der Größe b_2 wieder aufzutreten. Nach welchem Weg s kehrt der Punkt um und mit welcher Geschwindigkeit v_1 kommt er in die Anfangslage zurück? Man zeichne das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

393. Ein schwerer Punkt fällt ohne Anfangsgeschwindigkeit frei herab. Ein zweiter schwerer Punkt, der um a tiefer liegt, wird gleichzeitig mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in derselben Vertikalen nach aufwärts geworfen. Nach welcher Zeit T treffen sich die Punkte? Wie weit ist die Stelle des Zusammenstoßes von der Ausgangsstelle des oberen Punktes entfernt?

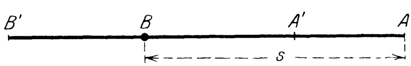
394. Ein schwerer Punkt, der ohne Anfangsgeschwindigkeit einen vertikalen Brunnen hinabfällt, wird nach t Sekunden aufschlagen gehört. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Geschwindigkeit des Schalles a Meter in der Sekunde beträgt und wenn der Widerstand der Luft außer acht gelassen wird?

395. Zwei Punkte bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten c_1 c_2 in einer Geraden hintereinander. Ihre Anfangslagen haben die Entfernung a. Nach welcher Zeit T stoßen sie zusammen? (Auch graphisch zu lösen mit Diagramm.)

396. Von A geht das Licht mit der Geschwindigkeit v nach C in der Entfernung s, während sich sowohl A wie C mit der Geschwindigkeit c in der Richtung senkrecht zu s bewegen. In dem bewegten Punkt C wirft ein Spiegel das Licht nach A zurück, welcher Punkt aber mittlerweile nach A′ gekommen ist. Welche Zeit verfließt zwischen dem Ausgange des Lichtes in A und seinem Eintreffen in A′?



397. Zwei bewegliche Punkte A und B haben anfangs die Entfernung s voneinander. Von A geht das Licht mit der Geschwindigkeit v nach B, während sich dieser Punkt mit der Geschwindigkeit c nach B′ bewegt. In dem bewegten Punkt B wirft ein Spiegel das Licht



nach A zurück, welcher Punkt sich aber mittlerweile mit der Geschwindigkeit c nach A′ bewegt hat.

Welche Zeit verfließt zwischen dem Ausgange des Lichtes von A und seinem Eintreffen in A′?

398. Zwei Punkte mit den Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 und den konstanten Beschleunigungen γ_1 und γ_2 bewegen sich in einer Geraden hintereinander. Ihre Anfangslagen haben die Entfernung a. Nach welcher Zeit T treffen sie zusammen?

399. Ein schwerer Punkt wird in luftleerem Raum mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geworfen; nach t Sekunden wird von derselben Stelle ein zweiter Punkt mit derselben Geschwindigkeit v_0 aufwärts geworfen. Nach welcher Zeit t_1, vom Abgang des zweiten Punktes gerechnet, treffen sich beide Punkte?

400. Zwei Punkte beginnen gleichzeitig ihre Bewegung, legen denselben Weg zurück und kommen gleichzeitig zur Ruhe. Der eine Punkt beginnt seine Bewegung mit der Geschwindigkeit c, er wird gleichförmig verzögert mit b_1 in der Sekunde. Der andere Punkt beginnt seine Bewegung mit $v_0 = 0$; er wird anfänglich mit b_2 gleichförmig beschleunigt und, sobald seine Geschwindigkeit gleich c geworden ist, gleichförmig verzögert mit $\gamma = -x$ bis zur Ruhe. Nach welcher Zeit T kommen beide Punkte zur Ruhe? Wie groß ist ihr gemeinsamer Weg s? Nach welcher Zeit t tritt die Verzögerung x ein? Wie groß ist sie? Man zeichne die Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme.

401. Drei Punkte A, B, C bewegen sich hintereinander in einer Geraden und beginnen ihre Bewegung von derselben Stelle mit derselben Geschwindigkeit $v_0 = 246$ m/s. Zuerst beginnt A seine Bewegung; er erleidet eine Verzögerung $\gamma_1 = 10$ m/s². $\tau_1 = 5$ Sekunden später beginnt B seine Bewegung; er bewegt sich gleichförmig. Wieder $\tau_2 = 3$ Sekunden später beginnt C seine Bewegung und wird mit $\gamma_2 = 4$ m/s² beschleunigt. Nach welcher Zeit t sind die Entfernungen AB und BC einander gleich geworden? Wie groß sind sie dann?

402. Zwei Punkte beginnen ihre Bewegung gleichzeitig in derselben Geraden. Der erste Punkt besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit, jedoch eine Beschleunigung von 1 m/s²; sie dauert 3 Sekunden, hört dann auf und setzt zu Beginn der 9. Sekunde wieder ein. Der zweite Punkt besitzt 8 m/s Anfangsgeschwindigkeit und eine Verzögerung von 0,5 m/s²; sie dauert 5 Sekunden, hört dann auf und setzt zu Beginn der 10. Sekunde wieder ein. Nach welcher Zeit t, vom Beginn der Bewegung gerechnet, haben beide Punkte gleiche Geschwindigkeit? Wie groß ist sie? Man zeichne die Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme.

***403.** Zwei gleiche Punkte werden von einem Zentrum mit der Beschleunigung $\gamma = k x^{-n}$ angezogen; der eine Punkt beginnt seine Bewegung in $x = \infty$, der andere in $x = a$, beide mit $v_0 = 0$. Wenn der erste Punkt nach $x = a$ kommt und der zweite nach $x = \frac{a}{4}$, so besitzen beide gleiche Geschwindigkeit. Wie groß ist n? (Walton.)

***404.** Ein Punkt bewegt sich derart, daß seine Geschwindigkeit $v = a \ln\left(\frac{b}{t}\right)$ ist, worin a und b Konstante, t die Zeit bedeuten. Es soll die Beschleunigung als Funktion der Geschwindigkeit gesucht werden.

***405.** Die Beschleunigung eines Punktes ist $\gamma = \frac{k}{a - s}$, worin k und a konstante Größen, s den Weg des Punktes bedeuten. Man suche den Weg und die Beschleunigung durch die Geschwindigkeit v auszudrücken. Für den Anfang der Bewegung ist $s = 0$, $v = 0$.

***406.** Ein Punkt m wird von einem Fixpunkt m_1 mit einer Kraft angezogen, welche den Massen m m_1 der Punkte direkt und der dritten Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Nach welcher Zeit erreicht der bewegliche Punkt den Fixpunkt, wenn a die anfängliche Entfernung und die Anfangsgeschwindigkeit Null ist? (Walton.)

***407.** Ein Punkt fällt aus einem Abstand a nach einem Fixpunkt mit der Beschleunigung $k^2 r^{-3/2}$, worin k eine Konstante, r die Entfernung der beiden Punkte ist. Wie groß ist die ganze Fallzeit? Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. (Walton.)

***408.** Ein Punkt bewegt sich nach dem Gesetz:

$$s = b v^3 - a,$$

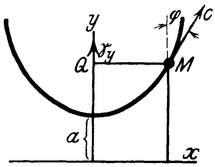
worin s der Weg und v die Geschwindigkeit ist. Man berechne die Zeit, die seit Beginn der Bewegung $(s = 0)$ verflossen ist, bis die Geschwindigkeit doppelt so groß geworden ist.

***409.** Die Zugkraft einer Lokomotive steht zu der Geschwindigkeit in der Beziehung

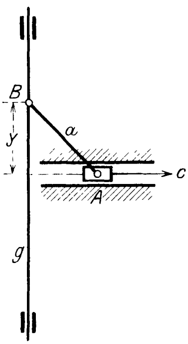
$$P = a - b v,$$

worin a und b konstant sind. Man suche die Zugkraft durch die Zeit der Bewegung auszudrücken.

*410. Ein Massenpunkt m liegt in der Mitte zwischen zwei gleichen Massenpunkten m_1, welche um 2a voneinander entfernt sind und wird von beiden nach dem Newtonschen Gesetz angezogen. Nun wird der Punkt m mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 dem einen der Massenpunkte m_1 genähert. Welche Geschwindigkeit v erreicht er, wenn er diese Annäherung zur Hälfte durchgeführt hat?



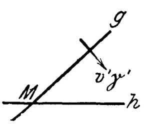
*411. Ein Punkt bewegt sich auf einer Kettenlinie, deren Gleichung $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ ist, mit konstanter Geschwindigkeit c. Man suche die Beschleunigung γ_y, mit der sich die Projektion Q des Punktes in der y-Achse bewegt.



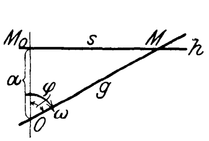
*412. Eine Stange g wird in ihren Lagern hin und her geschoben durch einen Stab AB = a, dessen Ende A eine horizontale Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vollzieht. Man berechne die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Stange als Funktion von y.

*413. Zwischen zwei festen Punkten O_1 O_2, welche die Entfernung a voneinander besitzen, liegt in der Mitte ein beweglicher Punkt anfangs in Ruhe. Er wird von O_1 und O_2 der Entfernung proportional angezogen; k_1 k_2 sind die Anziehungen beziehungsweise in der Einheit der Entfernung. Wie groß muß das Verhältnis k_2/k_1 sein, wenn die nächste Ruhelage des Punktes in O_2 ist?

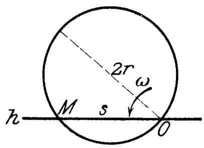
*414. Eine Gerade g verschiebt sich parallel zu sich selbst mit der Geschwindigkeit v' und der Beschleunigung γ'. Sie schneidet eine feste Gerade h, mit der sie den Winkel φ einschließt, in einem Punkt M. Mit welcher Geschwindigkeit v und Beschleunigung γ rückt dieser Schnittpunkt auf h fort?



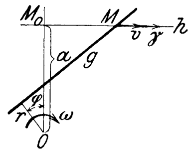
*415. Eine Gerade g dreht sich um den Punkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und schneidet die feste Gerade h in einem Punkt M. Man soll die Beschleunigung γ, mit der der Punkt M auf h fortrückt, durch den Weg $s = M_0 M$ ausdrücken.



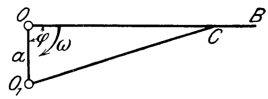
*416. Ein Kreis rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um einen Punkt O seines Umfanges und schneidet dabei eine durch O gehende feste Gerade h in einem Punkt M. Welche Art von Bewegung macht M auf h? Man suche die Geschwindigkeit und Beschleunigung von M als Funktion von s.



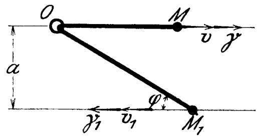
*417. Um einen festen Punkt O dreht sich eine im Abstand r befindliche Gerade g mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Man soll die Geschwindigkeit v und Beschleunigung γ, mit der der Schnittpunkt M auf einer festen Geraden h fortschreitet, durch den Drehungswinkel φ, die Entfernung a des Punktes O von h und durch ω darstellen.



*418. Zwei Türflügel OB und O_1C von gleicher Breite b drehen sich um vertikale Achsen OO_1, deren Entfernung a ist. Der eine Türflügel schleift bei C an dem anderen OB, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gedreht wird. Man suche die Geschwindigkeit v, mit welcher C in OB gleitet, als Funktion von OC = x. Wie groß wird v, wenn C nach B kommt?

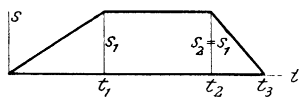


*419. Ein Punkt M beschreibt eine Gerade mit der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung γ. Er ist durch eine Schnur von der Länge l, die durch einen Ring O geht, mit einem zweiten Punkt M_1 verbunden, der eine parallele Gerade beschreibt. Welche Geschwindigkeit v_1 und welche Beschleunigung γ_1 hat M_1?

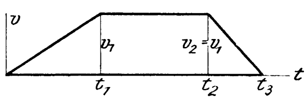


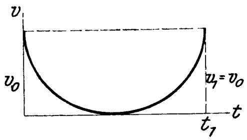
2. Diagramme.

420. Das Weg-Zeit-Diagramm eines Punktes ist nebenan gezeichnetes Trapez. Man zeichne das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.



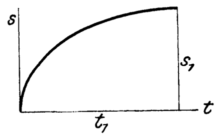
421. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Punktes sei nebenan gezeichnetes Trapez. Man zeichne das Weg-Zeit- und das Beschleunigung-Zeit-Diagramm.

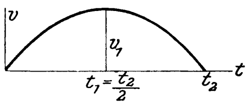




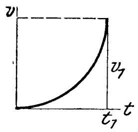
422. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Punktes ist nebenan gezeichnete Halbellipse. Welche Geschwindigkeit c muß dieser Punkt erhalten, wenn er denselben Weg in der gleichen Zeit t_1 gleichförmig zurücklegen soll?

***423.** Das Weg-Zeit-Diagramm eines bewegten Punktes ist eine Viertel-Ellipse. Man ermittle das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm sowie das Beschleunigung-Zeit-Diagramm des Punktes. Zu welcher Zeit hat der Punkt die größte und die kleinste Beschleunigung und wie groß sind diese?

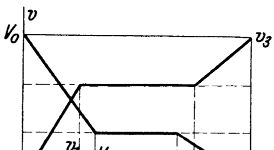




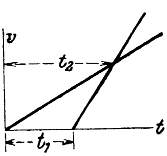
***424.** Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Punktes ist die nebenan gezeichnete Parabel. Man ermittle das Beschleunigung-Zeit-Diagramm und das Weg-Zeit-Diagramm.



425. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Punktes ist nebenan gezeichneter Viertelkreis. Ein anderer gleichförmig beschleunigter Punkt, der seine Bewegung in derselben Geraden, zu gleicher Zeit an derselben Stelle mit der Geschwindigkeit $v_0 = \frac{v_1}{2}$ beginnt, erreicht den ersten Punkt wieder nach der Zeit t_1. Wie groß muß die Beschleunigung γ des zweiten Punktes sein?

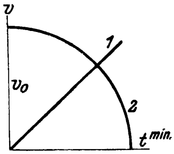


426. Nebenstehende Zeichnung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zweier in derselben Geraden laufenden Punkte. Es ist $t_1 = \frac{t_3}{4}$, $t_2 = \frac{3}{4}\,t_3$; $T_1 = \frac{t_3}{3}$, $T_2 = \frac{2}{3}\,t_3$; $V_0 = v_3$, $v_1 = \frac{2}{3}\,v_3$, $V_1 = \frac{1}{3}\,V_0$. Man ermittle die Zeit t, nach welcher die Punkte wieder zusammentreffen.

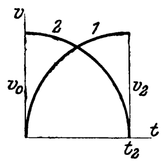


427. Von zwei in derselben Geraden und von der gleichen Anfangslage bewegten Punkten sind nebenan die Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme gegeben. Bekannt sind die Zeiten t_1 und t_2. Nach welcher Zeit t treffen die Punkte zusammen?

428. Zwei Punkte beginnen gleichzeitig aus derselben Anfangslage ihre geradlinige Bewegung. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der einen Bewegung ist eine Gerade, das der andern ein Kreisquadrant. Man soll: a) die Beschleunigung der zweiten Bewegung als Funktion der Zeit darstellen; b) die Beschleunigung der ersten Bewegung berechnen, wenn der erste Punkt den zweiten in dem Augenblick erreicht, in dem letzterer zur Ruhe kommt; c) die Zeit berechnen, nach welcher beide Punkte gleiche Geschwindigkeit besitzen.



429. Zwei Punkte beginnen gleichzeitig aus derselben Anfangslage ihre geradlinige Bewegung. Die Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme sind zwei gleiche Viertelkreise in der gezeichneten Lage. a) Nach welcher Zeit hat die Beschleunigung der beiden Punkte dieselbe absolute Größe und wie groß ist sie? b) Nach welcher Zeit und welchem Weg treffen die Punkte wieder zusammen?

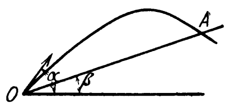


430. Suche für die Bewegung des Punktes 1 (frühere Aufgabe) die Beschleunigung und Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auszudrücken.

3. Krummlinige Bewegung.

431. Ein von A aus im luftleeren Raum geworfener schwerer Punkt trifft den in gleichem Horizont gelegenen Punkt B nach einer Zeit t; ein anderer von A aus unter dem doppelten Winkel geworfener Punkt trifft B nach einer Zeit t_1. Welche Entfernung x besitzen A und B voneinander?

432. Ein unter dem Winkel α geworfener schwerer Punkt geht durch eine Stelle A, welche von O aus mit derselben Anfangsgeschwindigkeit in geradliniger, gleichförmiger Bewegung nach n Sekunden erreicht werden kann. Wie groß ist die Flugzeit des Punktes von O nach A? (Walton.)

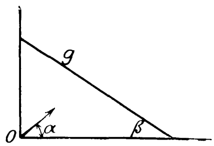


433. Zwei schwere Punkte werden gleichzeitig von derselben Stelle aus mit den Geschwindigkeiten c_1 c_2 unter den Winkeln α_1 α_2 geworfen. In welcher Zeitdifferenz durchlaufen sie hintereinander die Stelle, wo sich ihre Flugbahnen schneiden?

***434.** Ein schwerer Punkt wird von O aus mit gegebener Geschwindigkeit geworfen (Abb. zu 432). Durch O geht eine unter dem Winkel β geneigte Ebene. An welcher Stelle A und nach welcher Zeit T wird diese Ebene getroffen? Unter welchem Winkel α_1 muß der Wurf geschehen, damit O A am größten ist?

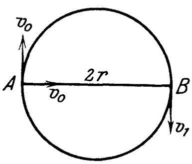
435. Von der Spitze eines Turmes werden zwei schwere Punkte mit derselben Geschwindigkeit v_0 unter den Wurfwinkeln α_1 α_2 geworfen. Es wird beobachtet, daß beide Punkte den Boden an derselben Stelle treffen. Wie hoch ist der Turm?

436. Ein schwerer Punkt wird schief geworfen (Abb. zu 432). Gegeben ist von der Anfangsgeschwindigkeit der Teil c, welcher zur Parabelsehne O A senkrecht steht. Wie groß ist in A der Geschwindigkeits-Teil senkrecht zu O A? (Walton.)

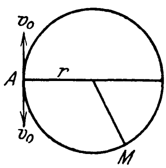


***437.** Unter welchem Winkel α muß man von O aus einen schweren Punkt in luftleerem Raum werfen, damit er die Gerade g in der kürzesten Zeit erreicht?

438. Zwei Punkte beginnen ihre Bewegung gleichzeitig von A aus mit der Geschwindigkeit v_0. Der eine Punkt legt den Durchmesser A B gleichförmig verzögert zurück, der andere den Halbkreis gleichförmig beschleunigt; die Beschleunigungen beider Punkte sind nur durch das Vorzeichen verschieden. Beide Punkte langen gleichzeitig in B an. a) Nach welcher Zeit t geschieht dies? b) Mit welcher Beschleunigung γ_t bewegen sie sich? c) Wie groß ist die gesamte Beschleunigung γ des zweiten Punktes in B und welchen Winkel φ schließt sie mit v_1 ein?

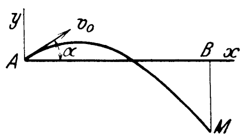


439. Von A ausgehend, bewegen sich zwei Punkte auf dem Kreis mit derselben Anfangsgeschwindigkeit v_0 in entgegengesetzter Richtung. Der eine Punkt wird mit b gleichförmig beschleunigt, der andere mit b gleichförmig verzögert. Die beiden Punkte treffen sich genau an der Stelle M, wo der zweite Punkt seine Bewegung umkehrt. Wie groß muß die Beschleunigung b gewählt werden? Welchen Winkel φ schließen die ganzen Beschleunigungen beider Punkte an der Stelle M miteinander ein?

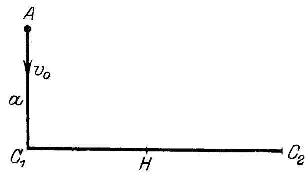


440. Dieselbe Aufgabe, doch ist die Beschleunigung b von beliebig gegebener Größe. Nach welcher Zeit t treffen sich die Punkte? Welchen Winkel φ schließen ihre ganzen Beschleunigungen an der Stelle, wo die Punkte sich treffen, miteinander ein?

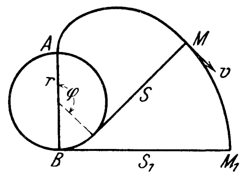
441. Von A wird ein schwerer Punkt im luftleeren Raum mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α schief geworfen. k Sekunden später fällt von B ein schwerer Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit herab. Die beiden Punkte treffen sich in M. Welche Koordinaten hat dieser Punkt?



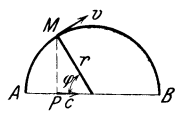
442. Ein beweglicher Punkt, dessen Anfangslage A ist, wird von einem festen Punkt C_1 proportional der Entfernung abgestoßen, von dem Punkt C_2 proportional der Entfernung angezogen. Es ist $A\,C_1 = a$ senkrecht zu C_1C_2. Die Bahn des Punktes soll durch den Halbierungspunkt H dieser Strecke gehen; wie groß muß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sein, wenn angenommen wird, daß in der Einheit der Entfernung Anziehung und Abstoßung gleich k sind?



443. Ein schwerer Punkt vom Gewicht $G = 1$ kg bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = 2{,}8$ m/s in einer horizontalen Ebene und beschreibt dabei eine Kreis-Evolvente. Der Grundkreis habe $r = 2$ m Halbmesser. Wie groß ist die Fadenspannung S an beliebiger Stelle M und wie groß (S_1) ist sie an der Stelle M_1 der Punktbahn, wo $\sphericalangle A B M_1 = 90^0$ ist?



***444.** Ein Punkt beschreibt einen Halbkreis; die Projektion der Bewegung auf den Durchmesser ist eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c. Man suche die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes als Funktionen des Winkels φ und gebe an, welche Richtung die Beschleunigung von M besitzt.



***445.** Ein Punkt beschreibt eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vermöge einer Beschleunigung, welche die Richtung der negativen y-Achse hat. Die Anfangslage des Punktes ist $x = 0$, $y = b$; die Anfangsgeschwindigkeit v_0. Wie groß ist die Beschleunigung an jeder Stelle der Bahn? (Newton, Principia.)

***446.** Ein Punkt, der anfangs in Ruhe ist und die Koordinaten $x = a$, $y = b$ besitzt, beschreibt die Parabel $y^2 = \frac{b^2}{a} x$; von seiner Beschleunigung ist der eine Teil $\gamma_y = -k^2 y$ gegeben, worin k eine Konstante ist. Man suche x, y und die Geschwindigkeit v als Funktionen von t, sowie den andern Teil der Beschleunigung γ_x als Funktion von x. Wo ist die nächste Ruhelage und wie bewegt sich der Punkt zwischen den beiden Ruhelagen? Welche Zeit T braucht der Punkt, um von einer Ruhelage zur nächsten zu kommen?

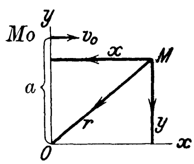
***447.** Ein Punkt beschreibt die Kettenlinie $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ mit konstanter Geschwindigkeit c. Man suche die Teile v_x und v_y der Geschwindigkeit, sowie die Teile γ_x und γ_y der Beschleunigung, endlich die ganze Beschleunigung γ als Funktionen von x und y. Welche Richtung besitzt γ?

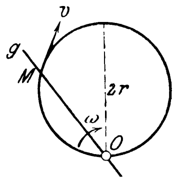
***448.** Ein Punkt, der die Anfangslage $x = 0$, $y = b$ sowie die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Richtung der x-Achse hat, wird senkrecht zu dieser mit einer Kraft angezogen, welche der Entfernung y proportional ist. Für $y = 1$ sei die Beschleunigung dieser Anziehung k^2. Man suche die Gleichung der Bahn des Punktes sowie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit. Wie oft und wann schneidet die Bahn die x-Achse? Wann befindet sie sich am weitesten von dieser Achse? (Riccati.)

***449.** Ein Punkt besitzt in Richtung der x-Achse die konstante Verzögerung $-a$, in Richtung der y-Achse die konstante Beschleunigung $+a$; seine Anfangslage ist $x = 0$, $y = 0$; seine Anfangsgeschwindigkeit v_0 hat die Richtung der positiven x-Achse. Man ermittle die Bahn des Punktes, sowie den Ort und die Größe seiner kleinsten Geschwindigkeit.

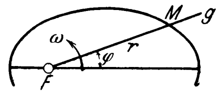
***450.** Ein Punkt, dessen Anfangslage durch $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, dessen Anfangsgeschwindigkeit v_0 durch die Teile v_{0x}, v_{0y} gegeben ist, werde derart beschleunigt, daß $\gamma_x = \frac{a}{v_x}$, $\gamma_y = \frac{b}{v_y}$ sei, worin a und b Konstante sind. Man suche die Geschwindigkeit v an beliebiger Stelle als Funktion der Zeit und die Gleichung der Bahn.

***451.** Ein Punkt M erleidet drei Anziehungsbeschleunigungen: die eine kx senkrecht zur y-Achse, die zweite ky senkrecht zur x-Achse, die dritte mr nach O gerichtet. k und m sind Konstante. Die Anfangslage M_0 ist $x = 0$, $y = a$; die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist parallel zu Ox. Man suche die Bahn des Punktes, die Geschwindigkeit und die Umlaufzeit.

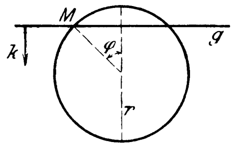




*452. Eine Gerade g dreht sich um den Punkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und schneidet einen durch O gehenden Kreis in einem Punkt M. Welche Bewegung macht M auf dem Kreis? Man berechne die Geschwindigkeit und die Beschleunigung dieses Punktes.

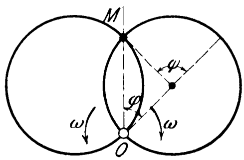


*453. Eine Gerade g dreht sich um den Punkt F mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und schneidet eine feste Ellipse, deren Halbachsen a, b sind und deren einer Brennpunkt F ist. Mit welcher Geschwindigkeit rückt M auf der Ellipse fort?

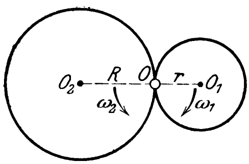


*454. Eine Gerade g bewegt sich parallel zu sich mit der konstanten Geschwindigkeit k. Sie schneidet hierbei einen festen Kreis im Punkt M. Mit welcher Geschwindigkeit v und mit welcher Beschleunigung γ bewegt sich M auf dem Kreis?

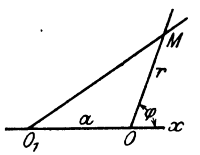
*455. Zwei gleich große Kreise drehen sich um den Punkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω nach entgegengesetzten Seiten. Welche Geschwindigkeit v und Beschleunigung γ besitzt ihr Schnittpunkt M auf jedem der Kreise? Welche Geschwindigkeit v_1 und Beschleunigung γ_1 besitzt M auf der Geraden MO?



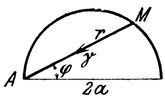
*456. Zwei Kreise, die einen Punkt O gemein haben, drehen sich um diesen nach entgegengesetzten Seiten mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2. Mit welchen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bewegt sich der Schnittpunkt M der beiden Kreise auf jedem derselben?



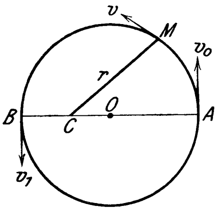
*457. Zwei Gerade drehen sich mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω und ω_1 um die Punkte O und O_1. Sie gehen gleichzeitig durch die Gerade x. Man ermittle die Differentialgleichung der Bahn ihres Schnittpunktes M. Wo schneidet die Bahn die Gerade x?



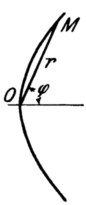
*458. Ein Punkt beschreibt einen Kreis unter einer Anziehung, die von einem Punkt A des Kreises ausgeht. Die Flächengeschwin-



digkeit ist $\frac{c}{2}$. Man ermittle das Gesetz für die Beschleunigung γ der Anziehung und für die Geschwindigkeit v des Punktes M. (Newton, Principia.)



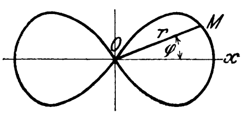
*459. Ein Punkt beschreibt einen Kreis unter dem Einfluß einer Anziehung, die vom festen Punkt C im Innern des Kreises ausgeht. Die Anfangslage ist A, die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist gegeben. Man berechne die Geschwindigkeit v an einer beliebigen Stelle M und an der Stelle B.



*460. Ein Punkt beschreibt eine Parabel infolge einer anziehenden Beschleunigung γ, die ihren Sitz im Scheitel der Parabel hat. Die Flächengeschwindigkeit ist $\frac{c}{2}$. Wie groß ist die Beschleunigung γ?

*461. Ein Punkt beschreibt eine logarithmische Spirale, deren Polargleichung $r = e^{a\varphi}$ ist unter einer Anziehung, deren Sitz der Pol ist. Für den Anfang der Bewegung ist $r = r_0$ und die Geschwindigkeit v_0. Wie groß ist die Beschleunigung der anziehenden Kraft und die Geschwindigkeit an beliebiger Stelle? (Walton.)

*462. Ein Punkt beschreibt eine Lemniskate, deren Polargleichung $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ist, unter einer Anziehung, die von O ausgeht.

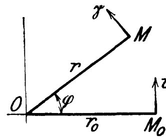


Die Flächengeschwindigkeit ist $\frac{c}{2}$. Man suche die Beschleunigung der Anziehung und die Zeit T, welche der Punkt braucht, um die Kurve zu durchlaufen. (Walton.)

*463. Ein Punkt beschreibt die Kurve $x^4 + y^4 = a^4$; das Anziehungszentrum liegt im Mittelpunkt. Die Flächengeschwindigkeit, die Punktgeschwindigkeit v und die Anziehungsbeschleunigung γ zu suchen, wenn für den Anfang der Bewegung: $x = a$, $y = 0$, $v = v_0$ gegeben sind. (Walton.)

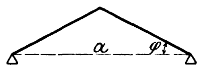
*464. Bei einer Zentralbewegung gilt das Gesetz für die Geschwindigkeit $v = \frac{a}{r}$. Man ermittle den Fahrstrahl r und den Polarwinkel φ als Funktionen der Zeit, die Gleichung der Bahn und die Beschleunigung der Anziehung. Für den Anfangszustand sei $\varphi = 0$, $r = 1$. Die Flächengeschwindigkeit ist $\frac{c}{2}$. (Riccati.)

*465. Ein Punkt bewegt sich derart um einen Fixpunkt O, daß die Beschleunigung γ stets senkrecht zu r bleibt und der Fahrstrahl r sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um O dreht. Wie lautet die Gleichung der Bahn und wie groß ist γ? Für den Anfang sei $r = r_0$, $\varphi = 0$ und $v_0 \perp r_0$ gegeben. (Walton.)

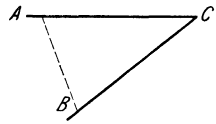


4. Gezwungene Bewegung.

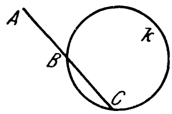
*466. Ein Dach soll so geneigt werden, daß das Regenwasser in der kürzesten Zeit abfließt. Wie groß muß der Winkel φ gemacht werden, wenn angenommen wird, daß das Wasser seine Bewegung an der Spitze des Daches mit der Geschwindigkeit v_0 beginnt?



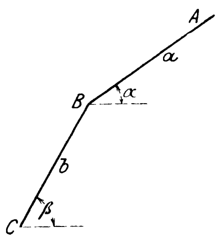
467. Ein schwerer Punkt bewegt sich von A aus auf einer schiefen Ebene AB. Wie muß diese durch A gelegt werden, damit die Gerade CB in der kürzesten Zeit erreicht werde?



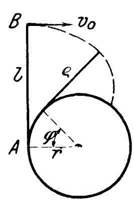
468. Ein schwerer Punkt bewegt sich von A aus auf einer schiefen Ebene AB. Wie muß diese durch A gelegt werden, damit der Kreis k in der kürzesten Zeit erreicht werde?



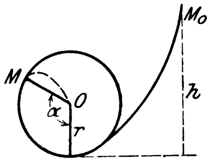
469. Ein schwerer Punkt gleitet auf glatter schiefer Ebene $AB = a$ von A aus ohne Anfangsgeschwindigkeit und springt, in B angelangt, nach C. In welchem Verhältnis müssen a und b stehen?



*470. Ein Faden AB berührt in A einen Kreis; in B befindet sich ein gewichtloser Punkt, der senkrecht zu $AB = l$ eine Geschwindigkeit v_0 erhält. Wie bewegt sich B, wie groß ist seine Geschwindigkeit v an beliebiger Stelle und nach welcher Zeit T erreicht der Punkt den Kreis?

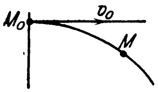


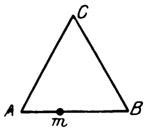
471. Ein schwerer Punkt gleitet ohne Anfangsgeschwindigkeit aus der Lage M_0 auf beliebiger glatter Bahn herab und steigt auf der Innenseite eines



Kreises empor. Man wünscht, daß der Punkt die Kreisbahn verläßt und bei seiner hierauf folgenden freien Bewegung durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Wie groß muß die Fallhöhe h gemacht werden? Bei welchem Winkel α wird der Punkt den Kreis verlassen?

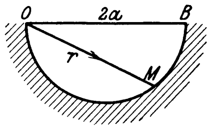
472. In einem glatten parabolischen Rohr von der Gleichung $y^2 = 2px$ wird aus dem Scheitel eine kleine Kugel vom Gewicht G mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfen. Es soll gezeigt werden, daß an jeder Stelle M der Bahn das Produkt aus Bahndruck D und Krümmungshalbmesser ϱ konstant ist. Wie groß ist dieses Produkt?



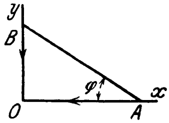


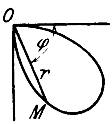
***473.** Ein Punkt von der Masse m, der in der Seite AB eines gleichseitigen Dreiecks gleiten kann, wird von dessen drei Ecken proportional der Entfernung angezogen. Anfangs liegt der Punkt in A in Ruhe; nach welcher Zeit T kommt er nach B?

***474.** Ein Punkt bewegt sich auf der Innenseite eines Halbkreises und wird hierbei von O aus mit einer Kraft abgestoßen, deren Beschleunigung $\gamma = k^2 r$ ist. Der Punkt beginnt seine Bewegung nahe an O ohne Anfangsgeschwindigkeit. Wie groß ist die Geschwindigkeit v und der Bahndruck D an jeder Stelle der Bahn? (Walton.)



***475.** Zwei Punkte A und B, die sich nur auf den Geraden x und y bewegen können, ziehen sich an mit einer Kraft, deren Beschleunigung $\gamma = \frac{a}{r^2}$ ist. Nach welcher Zeit treffen sie in O zusammen, wenn sie anfänglich in Ruhe sind und die Entfernung r_0 voneinander haben?





***476.** Auf einer Lemniskate von der Gleichung $r^2 = 2a^2 \sin 2\varphi$ gleitet von O ein schwerer Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit abwärts. Berechne die Fallzeit von O bis M als Funktion von φ. Vergleiche sie mit der Fallzeit auf der Geraden OM. (L. Euler).

*477. Die Ebene eines Kreises ist unter dem Winkel α gegen die Horizontalebene geneigt; X sei sein horizontaler Durchmesser 2 r. Von einem Punkt A desselben fällt ein schwerer Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einer Geraden s nach dem Umfang des Kreises. In welcher Beziehung besteht die Fallzeit t zum Weg s? Welchen Winkel φ_1 schließt s_1 mit X ein, wenn die Fallzeit am kürzesten ist und wie groß ist dann s_1 und t_{min}?

5. Bewegung mit Widerständen.

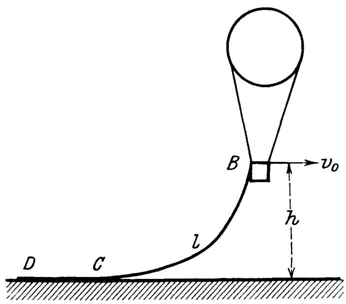
*478. Ein Punkt, der seine Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 beginnt, erfährt in einem ungleichmäßigen Mittel einen Widerstand, dessen Verzögerung durch $\frac{(a-1)\,v^2}{b+s}$ gemessen wird; hierin ist v die Geschwindigkeit des Punktes, s sein zurückgelegter Weg, a und b Konstante. Man soll den Weg s, die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung γ als Funktionen der Zeit ausdrücken.

*479. Ein schwerer Punkt wird vertikal nach aufwärts geworfen. Der Widerstand der Luft ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, die Anfangsgeschwindigkeit v_0. Man ermittle: a) die Geschwindigkeit und den Weg als Funktionen der Zeit; b) den Weg als Funktion der Geschwindigkeit (direkt); c) die ganze Steigzeit; d) die Steighöhe.

*480. Ein Punkt erhält eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 und bewegt sich hierauf in einem Mittel, dessen Widerstand der Quadratwurzel der Geschwindigkeit proportional ist. Wann kommt der Punkt zur Ruhe? (Walton.)

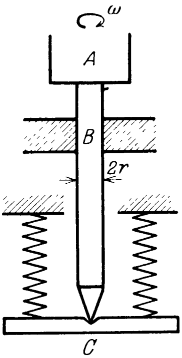
*481. Zwei vertikal übereinander befindliche, um a entfernte schwere Punkte A und B bewegen sich so, daß A ohne Anfangsgeschwindigkeit frei fällt, während B mit der Geschwindigkeit v_0 nach aufwärts geworfen wird. Der Widerstand des Mittels ist der Geschwindigkeit proportional. Nach welcher Zeit treffen sich die beiden Punkte? (Walton.)

*482. Ein Ballon, der in der Höhe h über dem Boden die horizontale Geschwindigkeit v_0 besitzt,



Aufg. 482.

hat ein Schleppseil von der Länge l ausgeworfen, das auf dem Boden (Reibungszahl f) schleift. Welchen Weg legt der Ballon noch zurück und welche Zeit braucht er dazu, wenn der Luftwiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist?



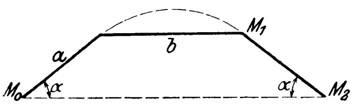
***483.** Eine vertikale Welle ABC vom Gewicht G ist in B gelagert und stützt sich in C auf ein von zwei Federn gehaltenes Querstück. Die Welle ist in B festgebremst in einer Höhenlage, in der die beiden Federn noch ungespannt sind.

Wenn die gebremste Welle mit der Winkelgeschwindigkeit ω in rasche Umdrehungen versetzt, also die Reibung R in der Bremse überwunden wird, nach welchem Gesetze wird sich die Welle nach abwärts bewegen? (Mies, Dingler Polyt. Journal 1913.)

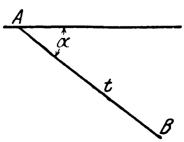
***484.** Ein schwerer Punkt bewegt sich frei in einem Mittel, dessen Widerstand eine Verzögerung $k\delta v^2$ hervorruft, worin k eine Konstante, δ die veränderliche Dichte des Mittels und v die Geschwindigkeit bedeuten. Die Bahn des Punktes ist ein Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Wie groß ist v an jeder Stelle und nach welchem Gesetze muß sich die Dichte verändern? (Newton, Principia.)

***485.** Ein schwerer Punkt wird unter dem Winkel α gegen die Horizontale mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 schief aufwärts geworfen und erfährt bei seiner Bewegung einen Widerstand des umgebenden Mittels, dessen Verzögerung $= kv$ ist. Welche Zeit verfließt, bis der Punkt die größte Höhe erreicht hat?

486. Ein schwerer Punkt wird von M_0 aus auf einer rauhen schiefen Ebene a schief aufwärts geschleudert. Wie groß muß seine



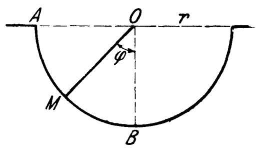
Anfangsgeschwindigkeit v_0 gemacht werden, wenn er, luftleeren Raum vorausgesetzt, nach M_1 gelangen und auch die zweite schiefe rauhe Ebene $M_1 M_2$ beschreiben soll und mit welcher Geschwindigkeit v_2 trifft er in M_2 ein?



487. Von einem Punkt A aus kann ein schwerer Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einer rauhen Geraden gleiten, deren Reibungswinkel gegeben ist. Wenn die Neigung α der Geraden verändert wird, auf welcher Kurve liegen alle Punkte B, die von A aus in gleicher Zeit t erreicht werden?

***488.** Ein schwerer Punkt bewegt sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 eine schiefe Ebene aufwärts, die unter α gegen den Horizont geneigt ist, und erfährt den Widerstand der Reibung (Reibungszahl f) und den Widerstand der Luft. Die Verzögerung durch letzteren sei av^2, wo a eine Konstante ist. Nach welcher Zeit T kommt der Punkt zur Ruhe? Welchen Weg L hat er bis dahin zurückgelegt?

***489.** Ein schwerer Punkt wird ohne Anfangsgeschwindigkeit bei A in eine rauhe Halbkugel fallen gelassen. Mit welcher Geschwindigkeit v_1 durchläuft er ihre tiefste Stelle B?



III. Geometrie der Bewegung.

1. Einfache Bewegungen des Körpers.

490. Eine Lokomotive besitze 15 m Geschwindigkeit in der Sekunde. Auf eine Strecke von 34 m werde Gegendampf gegeben, worauf die Geschwindigkeit auf 5 m gesunken ist. Wie lange wurde Gegendampf gegeben? Wie groß war die durch ihn hervorgerufene Verzögerung γ? Wie sieht das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm aus?

491. Welche Geschwindigkeit besaß ein Wagen, der unter Voraussetzung einer Verzögerung von 0,3 m/s^2 noch 12 m weiter rollt? Wie viel Zeit vergeht, bis der Wagen zur Ruhe kommt? Wie sieht das Weg-Zeit-Diagramm aus?

492. Eine Lokomotive soll einem Zug von 80 t Gewicht binnen einer Minute eine Geschwindigkeit von 12 m/s erteilen. Der Widerstand des Zuges ist $\frac{1}{200}$ seines Gewichtes. Welche Kraft muß die Lokomotive im Durchschnitt ausüben?

493. M sei ein Punkt eines um eine Achse rotierenden Körpers, r sein Abstand von der Achse, γ seine Beschleunigung, δ der Winkel zwischen r und γ. Zwischen welchen Grenzen kann der Wert von δ liegen?

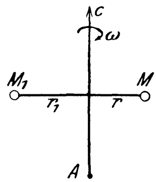
494. Ein sich gleichförmig drehender Körper macht 9500 Umdrehungen in der Stunde. Welche Winkelgeschwindigkeit besitzt er?

495. Ein Körper, der anfangs in Ruhe ist, erhält eine konstante Winkelbeschleunigung $\lambda = a$ um eine Achse. Man soll den Winkel δ, den der Radius eines beliebigen Körperpunktes mit dessen Beschleunigung einschließt, als Funktion der Zeit darstellen. Nach welcher Zeit t_1 wird $\delta = 45^0$?

496. Eine Schraubenbewegung von gleichbleibendem Steigungswinkel σ erhält eine Winkelbeschleunigung λ. Welche Beschleunigung γ erhält ein Punkt des Körpers, der von der Achse den Abstand r hat, in Richtung der Achse?

497. Zwei Körper werden mit gleicher Winkelgeschwindigkeit ω um dieselbe Achse geschraubt. Die Steigungswinkel der beiden Schrauben im Abstand r von der Achse seien σ und σ_1. In welchem Abstand x befinden sich zwei Punkte dieser beiden Körper nach der Zeit t, wenn sie zu Beginn der Bewegung an der gleichen Stelle lagen, r von der Achse entfernt?

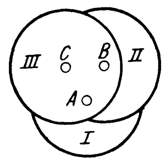
498. Ein Körper macht eine Schraubenbewegung um die Achse A. In welcher Beziehung müssen die Abstände r und r_1 zweier Körperpunkte M und M_1, die auf demselben Radius liegen, stehen, wenn die Bewegungsrichtungen beider Punkte aufeinander senkrecht stehen?



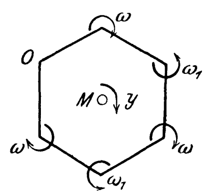
***499.** Ein Körper, der sich um eine Achse dreht und anfangs die Winkelgeschwindigkeit ω_0 besitzt, soll so beschleunigt werden, daß die Beschleunigung γ jedes Punktes während der Bewegung einen unveränderlichen Winkel δ mit dem Radius einschließt, und zwar sei $\operatorname{tang}\delta = a$. Man soll die Winkelbeschleunigung λ als Funktion der Zeit darstellen.

2. Gleichzeitige Bewegungen.

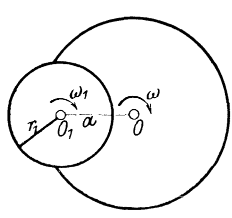
500. Auf einer um A drehbaren Scheibe I ist eine zweite Scheibe II in B drehbar gelagert und auf dieser eine dritte Scheibe III in C ebenfalls drehbar gelagert. Welche resultierende Bewegung macht die Scheibe III im nächsten Augenblick, wenn sich alle drei Scheiben um ihre Drehpunkte A, B, C mit gleichen und gleichgerichteten Winkelgeschwindigkeiten drehen? Wo liegen jene Punkte von III, welche sich im nächsten Augenblick senkrecht zu den Bewegungen der darunter liegenden Punkte der Scheibe I bewegen?



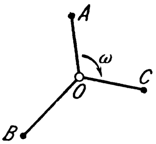
501. Ein Körper hat gleichzeitig sechs Winkelgeschwindigkeiten um parallele Achsen; fünf davon sind gegeben: $+\omega$, $-\omega_1$, $+\omega$, $-\omega_1$, $+\omega$, sie drehen um die Kanten eines regelmäßigen sechseckigen Prismas; die sechste y soll um die Achse drehen. Wie groß muß y sein, damit die resultierende aus allen sechs Drehungen um die Kante O stattfindet? Wie groß ist diese resultierende Winkelgeschwindigkeit x um O?



502. Auf einer Scheibe, welche sich um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist eine zweite kleinere gelagert, welche sich um ihren Mittelpunkt O_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 dreht. Es sollen jene Punkte auf dem Umfang der kleinen

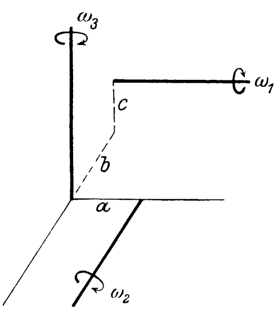


Scheibe bestimmt werden, welche sich in diesem Augenblick parallel zu OO_1 bewegen. Mit welcher Geschwindigkeit v erfolgt diese Bewegung?



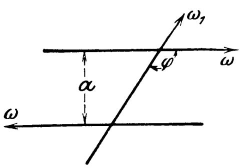
503. Eine Winkelgeschwindigkeit um die Achse O soll in drei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, ω_3 um parallele Achsen A, B, C zerlegt werden. Gegeben sind die Entfernungen $OA = m$, $OB = n$, $OC = p$ und die Winkel $BOC = \alpha$, $COA = \beta$, $AOB = \gamma$. Wie groß sind ω_1, ω_2 und ω_3?

504. Ein Körper erhält gleichzeitig drei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, $\omega_2 = 2\,\omega_1$, $\omega_3 = 3\,\omega_1$ um drei zueinander senkrechte Achsen, die sich in einem Punkt treffen. Welches ist die wirkliche Bewegung des Körpers?

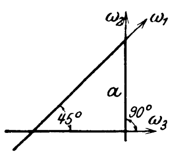


505. Drei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, ω_3 um drei senkrechte Achsen, die sich nicht schneiden, sind in nebenstehender Art angeordnet. Man suche die Winkelgeschwindigkeit ω und die Translationsgeschwindigkeit τ der resultierenden Bewegung.

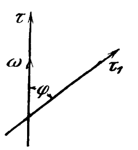
506. Man suche die resultierende Bewegung von drei gleichzeitig stattfindenden Drehungen; zwei von diesen Winkelgeschwindigkeiten ω sind gleich groß und haben entgegengesetzten Drehungssinn, ihre Achsen sind um a entfernt; die dritte ω_1 schneidet beide unter beliebigem Winkel φ.



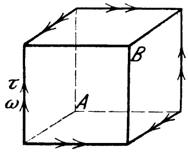
507. Ein Körper dreht sich gleichzeitig um drei Achsen, welche die gezeichnete Lage haben und sich schneiden. Gegeben ist die Entfernung a, die Winkel und die Winkelgeschwindigkeit ω_3. Wie groß müssen die beiden anderen ω_1 und ω_2 gemacht werden, damit die resultierende Bewegung des Körpers eine Translation ist? Wie groß ist deren Geschwindigkeit τ und wie ist sie gerichtet?



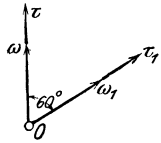
508. Welche Veränderung geschieht mit der Schraubenbewegung τ, ω eines Körpers, wenn eine Translationsgeschwindigkeit τ_1 unter beliebigem Winkel φ hinzutritt?



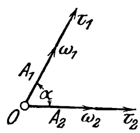
509. Ein Würfel macht gleichzeitig um sechs seiner Kanten sechs gleiche Schraubenbewegungen τ, ω in der nebengezeichneten Weise. Welches ist seine resultierende Bewegung?



510. Ein Körper besitzt eine Schraubenbewegung τ, ω. Sie soll in zwei andere Bewegungen zerlegt werden, von denen die eine gegeben ist; sie ist eine Schraubenbewegung τ_1, ω_1, deren Achse die gegebene Achse unter 60^0 in O schneidet, und zwar ist $\tau_1 = \frac{3}{2}\tau$, $\omega_1 = \frac{1}{3}\omega$. Man suche die andere Teilbewegung.

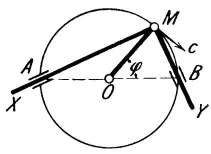


511. Ein Körper besitzt gleichzeitig zwei Schraubenbewegungen um zwei sich unter dem Winkel α schneidende Achsen A_1, A_2, und zwar ist $\tau_1 = 2\,\tau_2$, $\omega_1 = \frac{\omega_2}{2}$. Man suche die resultierende Bewegung.



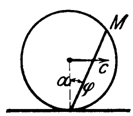
3. Ebene Bewegung.

***512.** Ein rechter Winkel XMY wird so bewegt, daß sein Scheitel M mittelst der Kurbel $OM = r$ in einem Kreis geführt wird, während die Schenkel X und Y stets durch zwei feste Punkte A und B gehen. Wenn die Geschwindigkeit des Punktes M konstant gleich c ist, zu berechnen: die Winkelgeschwindigkeit von X und Y um A und B; die Geschwindigkeiten v_A, v_B, mit denen die Geraden X, Y durch A, B gleiten.

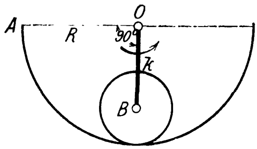


513. Um einen Punkt A dreht sich eine Gerade g. Welche Kurve umhüllen die Bewegungsrichtungen aller Punkte von g?

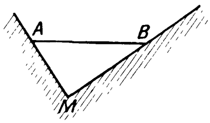
514. Auf einer Geraden rollt ein Kreis vom Halbmesser a; sein Mittelpunkt besitzt die Geschwindigkeit c. Man ermittle die Geschwindigkeitsrichtung eines beliebigen Kreispunktes M und die Größe der Geschwindigkeit als Funktion von φ.



515. In einem Kreis vom Halbmesser R wird durch eine Kurbel r ein kleiner Kreis herumgeführt, der sich auf dem großen

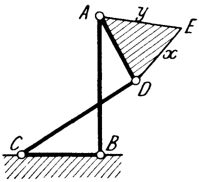


Kreis abwälzt. Die Winkelgeschwindigkeit ω der Kurbel sei gegeben. Man soll auf dem kleinen Kreis jenen Punkt M finden, dessen Geschwindigkeit v durch A geht und sie berechnen ($AO \perp OB$).

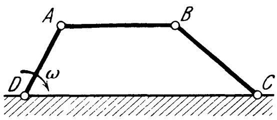


516. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten zwei Ecken eines Dreiecks ABC. Man soll den dritten Eckpunkt C derart annehmen, daß die homogene schwere Dreiecksfläche ABC bei jeder Verschiebung im Gleichgewicht bleibt.

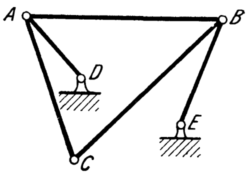
517. Ein aus vier Stäben gelenkig zusammengesetztes Kurbelviereck ABCD dreht sich um B und C, welche Punkte fest sind.



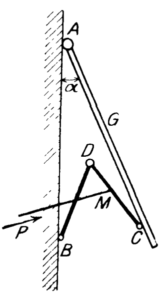
A besitzt gegenwärtig eine Geschwindigkeit v, welche die Richtung von CB hat. Man soll einen Punkt E durch zwei Stäbe x und y derart mit D und A verbinden, daß die Geschwindigkeit von E ebenso groß wie v, aber senkrecht zu CB gerichtet ist. Wie lang müssen x und y gemacht werden? Vorausgesetzt ist: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$.



518. Eine Kurbel AD dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um D, eine andere BC um C. Man ermittle jenen Punkt M der Koppel AB, dessen Bewegungsrichtung in AB hineinfällt und rechne die Geschwindigkeit dieses Punktes.

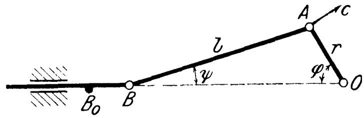


519. Von einem starren Dreieck ABC werden die Ecken A und B durch Kurbeln geführt, die in D und E gelagert sind. Gegeben ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Kurbel AD. Man zeichne die Richtung der Geschwindigkeit v des Punktes C und ermittle ihre Größe.

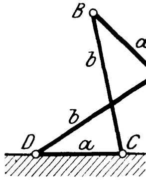


520. Ein Fensterflügel vom Gewicht G ist durch zwei gleiche Stangen BD und CD mit der Wand verbunden. Es ist $AB = AC = a$. An einer beliebigen Stelle M der Stange CD soll eine Kraft P angreifen, die den Flügel öffnet. Man soll die kleinste hierzu nötige Kraft nach Größe und Richtung bestimmen.

***521.** Ein Stab AB (Lenker) bewegt sich derart, daß sich A um O mit konstanter Geschwindigkeit c dreht, während B eine durch O gehende Gerade beschreibt. Zu berechnen die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung γ des Punktes B als Funktionen des Kurbelwinkels φ und des Lenkerwinkels ψ (Schubkurbel-Getriebe).

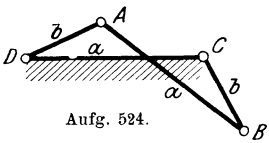


522. Ein gelenkiges Kurbel-Viereck ABCD, worin $AB = CD = a$, $DA = BC = b$ und $b > a$ vorausgesetzt ist, wird bewegt, indem DC festgehalten, A gedreht wird. Man bestimme die Rollkurven des Stabes AB.



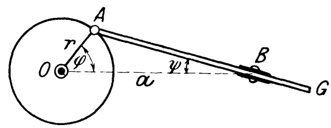
523. In voriger Aufgabe sei $\sphericalangle ADC = 60^0$ und v die bekannte Geschwindigkeit von A. Man berechne die Geschwindigkeit v_1 von B.

524. Ein gelenkiges Kurbel-Viereck ABCD, worin $AB = CD = a$, $DA = BC = b$ und $b < a$ vorausgesetzt ist, wird bewegt, indem DC festgehalten, A gedreht wird. Man bestimme die Rollkurven des Stabes AB.

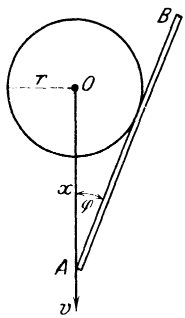


Aufg. 524.

***525.** Ein Stab AG bewegt sich derart, daß der Punkt A mit konstanter Geschwindigkeit c einen Kreis um O beschreibt, während die Gerade G stets durch einen festen Punkt B hindurchgeht (Schubschwinge). Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Geraden G um B? Für welche Stellungen φ der Kurbel ist ω am größten und kleinsten? Mit welcher Geschwindigkeit v gleitet die Gerade G durch den Punkt B?

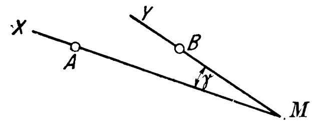


***526.** Eine Stange AB bewegt sich derart, daß sie einen Kreis vom Halbmesser r fortwährend berührt und ihr Endpunkt A in der Geraden durch O bleibt. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Stange, wenn die Geschwindigkeit v von A gegeben ist?



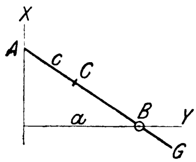
Aufg. 526.

527. Ein starrer Winkel $XMY = \gamma$ bewegt sich in seiner Ebene derart, daß seine Schenkel X, Y stets durch zwei feste Punkte A, B gehen. Man suche die Rollkurven dieser Bewegung. (Abbildg. nächste Seite.)

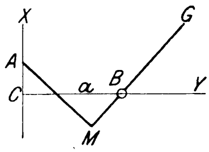


Aufg. 527.

528. Eine Gerade AG bewegt sich derart, daß der Punkt A stets auf einer festen Geraden X bleibt, während die Gerade G stets durch einen festen Punkt B geht. Man suche die Gleichungen der beiden Rollkurven und die Gleichung der Bahn eines Punktes C der Geraden G, der von A um c entfernt ist.



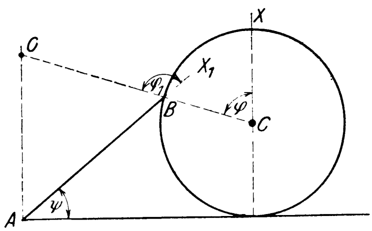
Aufg. 528.

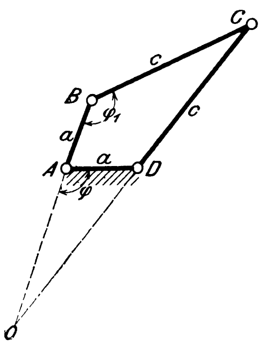


Aufg. 529.

529. Ein rechter Winkel AMG bewegt sich derart, daß der Punkt A des einen Schenkels stets auf einer festen Geraden X bleibt, während der andere Schenkel G stets durch einen festen Punkt B geht. Man suche die beiden Rollkurven des Systems AMG sowie die Gleichung der Bahn des Punktes M. (AM = CB = a.)

530. Eine Gerade AB schleift mit dem Endpunkt A auf einer Geraden, mit dem Endpunkt B auf einem Kreis, den die Gerade berührt. Es ist AB gleich dem Durchmesser des Kreises 2r. Man suche die Polar-Gleichungen der beiden Rollkurven in bezug auf die Achse CX bezw. BX_1 für die feste bezw. bewegliche Rollkurve.

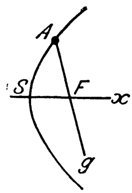




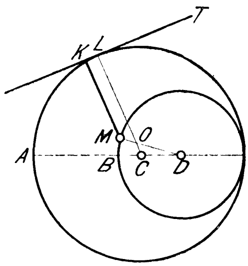
531. Von einer gleichschenkligen Doppelkurbel ABCD wird der Stab AD = a festgehalten. Man suche die Rollkurven der ebenen Bewegung des Stabes BC = c und zwar die Polargleichung der festen Rollkurve in bezug auf die Achse AD und die Polargleichung der beweglichen Rollkurve in bezug auf die Achse BC.

***532.** Bei der gleichschenkligen Doppelkurbel (siehe vorige Aufgabe) seien die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Kurbeln AB und DC ω_a und ω_c. Wie groß ist ihr Verhältnis in dem Augenblick, wenn alle vier Punkte A, B, C, D in eine Gerade fallen?

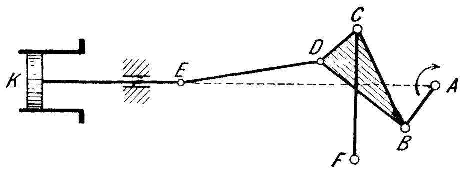
533. Eine Gerade g bewegt sich derart, daß sie stets durch den Brennpunkt F einer Parabel gleitet und ein Punkt A der Geraden auf der Parabel verbleibt, Man suche die Polargleichungen der beiden Rollkurven, und zwar der festen in bezug auf den Pol F und die Polarachse x, der beweglichen in bezug auf den Pol A und die Polarachse g. (Halbparameter der Parabel $= p$.)



534. Ein rechter Winkel bewegt sich derart, daß ein Schenkel KT desselben auf dem Kreis vom Halbmesser $AC = R$ schleift, während ein Punkt M des andern Schenkels auf dem Kreis vom Halbmesser $BD = r$ bleibt. Die Kreise berühren sich; außerdem ist $KM = AB = 2b = 2(R-r)$. Man suche die Polargleichungen der beiden Rollkurven, und zwar der festen in bezug auf den Pol C und die Polarachse CA, der beweglichen in bezug auf den Pol M und die Polarachse MK. Wenn anfangs K in A ist, wo liegt der Drehpol O?

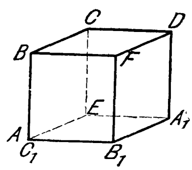


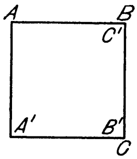
535. Bei dem Kurbelantrieb für Kolbenpumpen von C. P. Holst findet sich folgendes Getriebe: Der Kolben K ist durch die Kolbenstange KE, welche gerade geführt wird, ferner durch die Lenkerstange ED und ein starres Dreieck BCD mit der Kurbel BA gelenkig verbunden. Der Punkt C dreht sich um den Fixpunkt F. Gegeben ist die Geschwindigkeit des Punktes B. Zu rechnen oder zu konstruieren die Translationsgeschwindigkeit des Kolbens.



4. Räumliche Bewegung.

536. Ein Würfel bewegt sich derart, daß drei Punkte A, B, C desselben in die neuen Lagen A_1, B_1, C_1 kommen, welche wieder Ecken des Würfels sind. Durch welche einfachste Bewegung kann das erreicht werden?



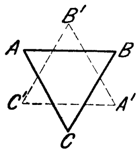


Aufg. 537.

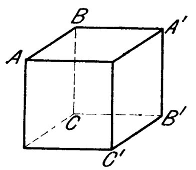
537. Ein Quadrat bewegt sich derart, daß drei seiner Ecken die Anfangslagen A, B, C, die Endlagen A', B', C' haben. Durch welche einfachste Bewegung wird das erreicht?

538. Ein gleichseitiges Dreieck ABC bewegt sich in die neue Lage A'B'C'. Durch welche einfachste Bewegung kann dies erzielt werden, wenn die sechs Punkte ein regelmäßiges Sechseck bilden?

539. Ein Würfel bewegt sich derart, daß drei seiner Ecken, die anfänglich in A, B, C waren, nach A', B', C' kommen. Man suche die einfachste Bewegung, welche das erreicht.

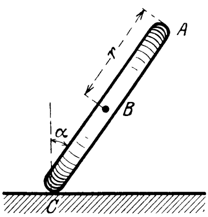


Aufg. 538.



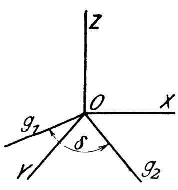
Aufg. 539.

540. Ein unter dem Winkel α gegen die Vertikale geneigtes Rad läuft auf der horizontalen Ebene im Kreise herum und bedarf zu einem Umlaufe die Zeit T. Man berechne die Geschwindigkeit der Punkte A und B des Radumfanges für die gezeichnete Stellung.

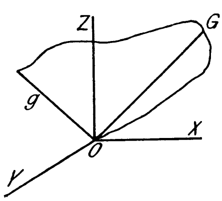


Aufg. 540.

541. Ein Körper bewegt sich derart, daß eine seiner Geraden g_1 stets in der Ebene YZ, eine andere g_2 stets in der Ebene YX bleibt. Die beiden Geraden schneiden sich in dem festen Punkt O und schließen einen Winkel δ miteinander ein. Man bestimme die feste Rollfläche des Körpers in bezug auf XYZ.



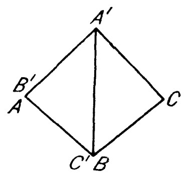
Aufg. 541.



Aufg. 542.

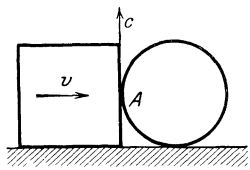
542. Eine Ebene bewegt sich derart, daß eine ihrer Geraden g stets in der Ebene YZ bleibt, während die Ebene selbst stets durch die feste Gerade G geht; die Richtungskonstanten der letzteren sind a, b, c. Ermittle die feste Rollfläche der Bewegung in bezug auf XYZ.

543. Ein regelmäßiger Tetraeder von der Kantenlänge s bewegt sich derart, daß drei seiner Ecken die Anfangslagen A, B, C, die Endlagen A′, B′, C′ haben. Zu suchen jene Schraubenbewegung (Lage der Achse, Translation und Drehung), welche den Tetraeder aus seiner Anfangslage in die Endlage bringt.

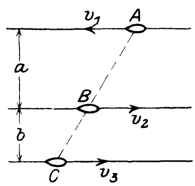


5. Relative Bewegung.

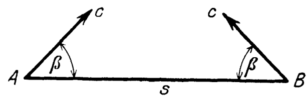
544. Auf einer rauhen horizontalen Ebene bewegt sich ein glattes Prisma mit der Geschwindigkeit v und schiebt eine Walze vor sich her. Mit welcher Geschwindigkeit c gleitet der Punkt A der Walze am Prisma?



545. Drei Schiffe A, B, C fahren in parallelem Kurs; ihre Bahnen haben die Entfernungen a und b voneinander. Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sind bekannt. Wie groß muß die Geschwindigkeit v_3 des Schiffes C gewählt werden, wenn es durch B immer gegen A gedeckt bleiben soll?

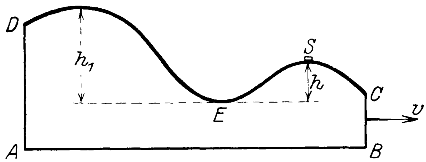


546. Ein Ballon, der Wind von unbekannter Größe und Richtung empfängt, gelangt in der Zeit t_1 geradlinig von A nach B und fährt hiebei horizontal von A unter dem Winkel β gegen A B = s ab. Für die Rückfahrt von B nach A, die unter dem gleichen Winkel erfolgt, bedarf der Ballon der Zeit t_2. Man berechne die horizontale Eigengeschwindigkeit c des Ballons, die Geschwindigkeit w des Windes und dessen Neigung α gegen A B. (Zeitsch. f. Flugtechn. u. Luftschiff. 1913.)

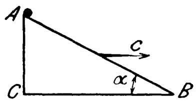


547. Ein Ballon, der die Eigengeschwindigkeit c besitzt, ist der Geschwindigkeit w des Windes ausgesetzt, deren Größe und Richtung bekannt sind. Wenn der Ballon am Ende der Zeit t an die Stelle zurückkehren soll, von der er ausgegangen ist, wie sieht das Gebiet aus, das er erreichen kann? (Aktionsfeld des Ballons.)

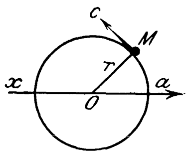
548. Auf dem kleineren Wellenberge des Körpers ABCD ist ein kleiner Schlitten S anfangs in Ruhe. Man erteilt dem Körper plötzlich eine nach rechts gerichtete Translation mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g(h_1 - h)}$. Wohin gelangt der Schlitten?



***549.** Auf einer schiefen Ebene AB gleitet ein schwerer Punkt von A aus ohne Anfangsgeschwindigkeit abwärts. Die schiefe Ebene bewegt sich gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit c horizontal. Welches ist die absolute Bahn des Punktes und mit welcher absoluten Geschwindigkeit erreicht er die Verlängerung der Horizontalen CB? Unter welchem Winkel geschieht dies?

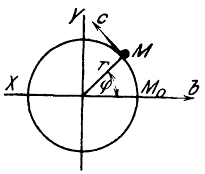


***550.** Auf einer schiefen rauhen Ebene AB gleitet ein schwerer Punkt von A aus ohne Anfangsgeschwindigkeit abwärts (s. frühere Abb.). Die schiefe Ebene bewegt sich gleichzeitig mit der konstanten Beschleunigung b ohne Anfangsgeschwindigkeit horizontal. Welches ist die absolute Bewegung des Punktes? Mit welcher Geschwindigkeit erreicht er die Horizontale CB?

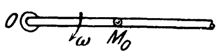


551. Ein Punkt M bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c im Kreis. Hinter dem Kreis wird eine Ebene mit konstanter Geschwindigkeit a vorbeigezogen. Welche Bahn beschreibt der Punkt M in bezug auf diese Ebene?

***552.** Ein Punkt M bewegt sich im Kreis mit konstanter Geschwindigkeit c. M_0 ist seine Anfangslage. Hinter dem Kreis wird eine Ebene mit konstanter Beschleunigung b ohne Anfangsgeschwindigkeit vorbeigezogen. Man berechne bezüglich des Achsenkreuzes XY: die Komponenten der relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung v_r und γ_r, sowie die Gleichung der relativen Bahn des Punktes M in bezug auf die beschleunigte Ebene.

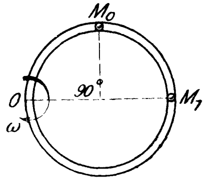


***553.** Ein gerades Rohr von der Länge a dreht sich in horizontaler Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Endpunkt. In der Mitte des Rohres befindet sich eine kleine Kugel anfangs in Ruhe. Welches ist die Gleichung der absoluten Bahn des

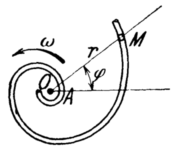


Punktes in Polarkoordinaten bezüglich O? Mit welcher relativen und mit welcher absoluten Geschwindigkeit tritt der Punkt aus dem Rohr? (Joh. Bernoulli.)

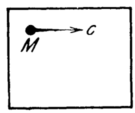
***554.** In einer horizontalen Ebene rotiert eine enge kreisförmige Röhre vom Halbmesser r um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω. In dieser Röhre befindet sich eine kleine glatte Kugel; sie ist anfangs in M_0 in Ruhe. Welche relative und welche absolute Geschwindigkeit besitzt diese Kugel, wenn sie nach M_1 gekommen ist? Welchen Horizontaldruck übt sie an dieser Stelle auf das Rohr aus? (Nach Walton.)



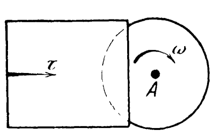
***555.** Eine enge Röhre, welche die Form einer logarithmischen Spirale $r = a e^{m\varphi}$ hat, dreht sich in horizontaler Ebene um den Mittelpunkt O mit der Winkelgeschwindigkeit ω. In der Röhre befindet sich eine kleine glatte Kugel von der Masse M; sie ist anfangs in A in Ruhe, $OA = a$. Welche relative Geschwindigkeit gegen die Röhre wird die Kugel annehmen und welchen Druck wird sie auf die Röhre ausüben?



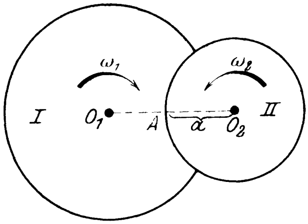
556. Eine Tafel fällt mit der Beschleunigung der Schwere vertikal herab. Ein schweres Stück Kreide M wird mit der Geschwindigkeit c horizontal geschleudert und schreibt seine relative Bahn auf der Tafel an. Wie sieht diese Bahn aus?



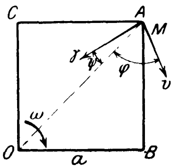
557. Über eine Scheibe, die um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, wird ein ebenes Blatt mit der Geschwindigkeit τ geradlinig hinweggezogen. Wie sind die Rollkurven der relativen Bewegung von Blatt und Scheibe beschaffen?



558. Über eine Scheibe, die um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert (s. frühere Abb.) wird ein ebenes Blatt mit der Geschwindigkeit τ geradlinig hinweggezogen. Es läßt sich zeigen, daß die relative Beschleunigung γ_r jedes beliebigen Punktes M des Blattes in bezug auf die Scheibe durch einen festen Punkt O geht. Wo liegt dieser Punkt und in welcher Beziehung steht γ_r zur Entfernung MO?

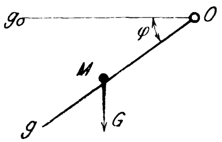


559. Zwei ebene Scheiben, deren Mittelpunkte O_1 und O_2 die Entfernung $2a$ voneinander haben, drehen sich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und $\omega_2 = -\omega_1$ dicht übereinander. Man berechne Größe und Richtung der relativen Geschwindigkeit v_r und der relativen Beschleunigung γ_r des Randpunktes A der Scheibe II in bezug auf die Scheibe I.

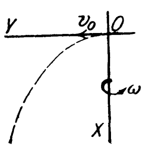


560. Ein Quadrat dreht sich um seine Ecke O in seiner Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω einmal herum. Gleichzeitig bewegt sich ein Punkt M auf der Quadratseite gleichförmig von A nach B. Wie groß ist anfangs die Geschwindigkeit v_a des Punktes M und welchen Winkel φ schließt sie mit OA ein? Wie groß ist anfangs die Beschleunigung γ des Punktes M und welchen Winkel ψ schließt sie mit OA ein?

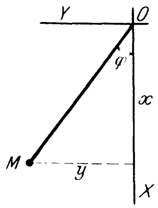
***561.** Eine Gerade g, die anfangs horizontal ist, wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Punkt O in der Vertikalebene gedreht. Auf ihr gleitet ein schwerer Punkt M abwärts, der anfangs in O ruht. Man suche die Polargleichung der absoluten Bahn des Punktes in bezug auf die Achse Og_0, die relative Geschwindigkeit v_r des Punktes auf der Geraden und seinen Druck D auf dieselbe.



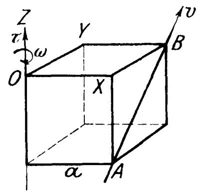
***562.** In einer vertikalen Ebene YOX, welche sich um die vertikale Achse OX mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht, wird von O aus ein schwerer Punkt horizontal geworfen. Welche relative Bahn zeichnet der Punkt in der Ebene? Welches ist die Projektion seiner absoluten Bahn auf die Horizontalebene? Wie groß ist die relative und die absolute Geschwindigkeit an beliebiger Stelle? Wie groß ist der Druck der Ebene auf den Punkt?



***563.** In einer vertikalen Ebene YOX, die sich um die vertikale Achse OX mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist ein Massenpunkt M in O aufgehängt und wird in der Anfangslage $\varphi = \alpha$ seiner Schwere überlassen. Man berechne die Geschwindigkeit dieser Pendelbewegung um O, den Zug Z im Pendelfaden und den Druck D der sich drehenden Ebene auf das Pendel.



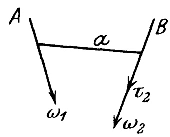
Aufg. 563.



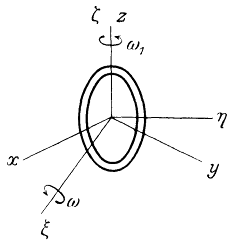
Aufg. 564.

564. Ein Würfel von der Kante a besitzt um eine seiner Kanten eine Schraubenbewegung ω, τ, während ein fremder Punkt die Gerade AB im Raum mit der absoluten Geschwindigkeit v beschreibt. Wenn dieser Punkt sich eben in B befindet, welche Geschwindigkeit v_r und welche Beschleunigung γ_r besitzt er in bezug auf den Würfel? (Suche die Komponenten beider nach XYZ.)

565. Ein Körper besitzt um die Achse A eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1, ein anderer Körper um die Achse B eine Schraubenbewegung ω_2, τ_2. Man suche die augenblickliche relative Bewegung des zweiten Körpers in bezug auf den ersten. Die Achsen A und B stehen senkrecht aufeinander.



***566.** Ein Ring von der Masse M und dem Halbmesser r dreht sich um die Achse ξ mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Gleichzeitig dreht sich die Achse des Ringes um die Achse z mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Die Drehung des Ringes um ξ ist also nur seine relative Bewegung in bezug auf das Achsenkreuz $\xi\eta\zeta$; die absolute Bewegung des Ringes in bezug auf das feste Gestell XYZ erfordert Zusatzkräfte, die auf dieses Gestell ausgeübt werden. Man suche die Resultante dieser Zusatzkräfte.



IV. Dynamik.

1. Arbeit und Leistung.

567. In einer Getreidemühle dreht sich der Läufer zum Zermahlen des Getreides mit 100 Umdrehungen in der Minute; er hat 1 m Durchmesser und soll 2 PS Leistung ausüben. Welche Kraft muß am Umfang des Steines wirken?

568. In einem Bach stürzen in der Sekunde 9 Raummeter durch eine Höhe von 2,5 m herab. Wie viele PS kann das Wasser durch diesen Fall leisten?

569. Eine Dampfmaschine von 26 PS betreibt eine Pumpe, welche bei ununterbrochener Arbeit in der Woche 19,656 Millionen Kilogramm auf 36 m hebt. Wie groß ist der Wirkungsgrad der Maschinenanlage?

570. Eine Mühle bedarf 10 PS zum Betrieb. Das Wasser ihres Mühlganges fällt durch 4 m auf ein Rad; letzteres hat einen Wirkungsgrad von 50 v. H. Wieviel Raummeter muß der Mühlgang in der Sekunde dem Rad zuführen, damit die gewünschte Leistung erzielt wird?

571. Eine Feuerspritze soll in der Sekunde 10 l Wasser auf eine Höhe von 27 m werfen. Sie werde von 20 Mann bedient. Die Nebenhindernisse verzehren ein Drittel der absoluten Leistung. Welche Arbeit hat ein Mann in der Sekunde zu verrichten?

572. Zwei Maschinen fördern in der Minute 5940 l Wasser auf eine Höhe von 25 m. Die eine Maschine leistet 15 PS bei einem Wirkungsgrad von 0,8; die andere leistet doppelt so viel. Wie groß ist ihr Wirkungsgrad?

573. Welchen Widerstand findet ein Dampfschiff, dessen Maschine 6000 PS leistet, wenn es in der Stunde $12\,^1/_2$ Knoten (zu 1850 m) zurücklegt?

574. Es soll eine Fabrik an einem Fluß angelegt werden; durch Legung eines Mühlganges kann ein Gefälle von 1,8 m erzielt werden. Die Fabrik bedarf 45 PS und soll mit einem Rad versehen werden, welches 60 v. H. Nutzleistung liefert. Wieviel Wasser ist in der Sekunde aus dem Fluß in den Kanal zu leiten?

575. Ein Wasserlauf, der in der Stunde 144 hl konstant liefert, wird zu einem Motor geführt und erhält dort 3 m Gefälle. Der Motor, welcher einen Wirkungsgrad von 0,75 hat, soll nur eine Stunde täglich arbeiten; während der übrigen Zeit wird das Wasser gesammelt, um während jener Stunde verwendet zu werden. Welche Leistung ist vom Motor zu erwarten?

576. Ein Automobil von 800 kg Gewicht samt Belastung legt in drei Stunden 30 km Straße mit 40 m Steigung zurück. Die Widerstandszahl der Straße ist $\frac{1}{50}$. Auf die Widerstände der Maschine entfallen 40 v. H. der Maschinenleistung. Wie groß ist diese in PS?

577. Ein Motorwagen, der nach Abzug der Maschinenwiderstände 4 PS Leistung besitzt, läuft mit 4 m/s eine Straße hinauf, die unter 5^0 geneigt ist. Das Gewicht des Wagens beträgt 600 kg. Welche Widerstandszahl wird die Straße haben?

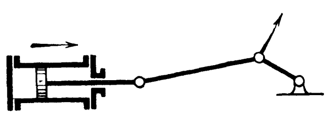
578. Ein Motorwagen vom Gewicht G legt eine unter α geneigte Straße mit einer bestimmten Geschwindigkeit zurück. Auf horizontaler Straße kann noch ein Beiwagen vom Gewicht G_1 angehängt werden, ohne daß die Geschwindigkeit geändert wird. Wie groß darf G_1 sein, wenn $\varkappa$ die Widerstandszahl des Wagens ist?

579. Ein Uhrgewicht von 300 Gramm sinkt in 24 Stunden 120 cm herab. Welche Leistung erfordert die Uhr zu ihrem Betriebe und welche Leistung wird zum Aufziehen in einer halben Minute erforderlich sein, wenn die Widerstände des Uhrwerkes $^1/_3$ der Nutzleistung erfordern?

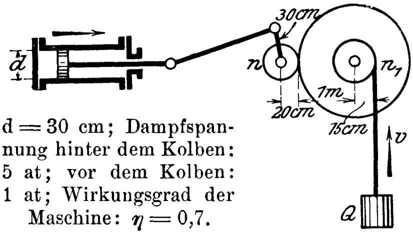
580. Eine Maschine von 4 PS mit 0,8 Wirkungsgrad zieht eine Last von 80 Tonnen eine unter 10^0 geneigte schiefe Ebene hinan. Die Widerstandszahl derselben sei $\frac{1}{40}$. Wieviel Minuten werden vergehen, bis die Last um 5 m höher steht als ihre Anfangslage?

581. Eine Dampfmaschine von 10 PS betreibt eine Pumpe, welche während 12 Stunden 8640 hl Wasser auf eine Höhe von 30 m hebt. Welche Leistung geht für die Widerstände in der Pumpe verloren? Wie groß ist der Wirkungsgrad?

582. Der Dampf in einem Dampfzylinder hat 5 at Überdruck (1 at = 1 kg f. d. cm^2). Der Kolben besitzt 20 cm Durchmesser und 40 cm Hub, die Kurbel macht 100 Umdre-



hungen in der Minute. Welche Leistung hat die Maschine?



d = 30 cm; Dampfspannung hinter dem Kolben: 5 at; vor dem Kolben: 1 at; Wirkungsgrad der Maschine: $\eta = 0{,}7$.

583. Eine Dampfmaschine wird benützt, um eine Last zu heben. Dies soll mit einer Geschwindigkeit v = 0,215 m/s geschehen. Zu berechnen: die Umdrehungszahlen n und n_1 der Kurbel und der Trommel in der Minute; die Gesamtleistung N der Dampfmaschine; die Last Q.

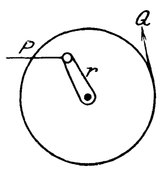
584. Bei einem Bahnbau ist innerhalb eines Tages ein Einschnitt herzustellen, der einen Erdaushub von 600 m^3 erfordert; die Erde muß auf Wägen geworfen werden, deren Rand im Mittel 2 m höher liegt als der Stand der Arbeiter. Wieviel Arbeiter müssen (außer jenen zur Auflockerung des Bodens) zur Verladung der Erde angestellt werden, wenn angenommen wird, daß jeder Arbeiter durchschnittlich 2 mkg in der Sekunde leistet, die Arbeitszeit 10 Stunden beträgt und die Erde ein Einheitsgewicht von 1,5 besitzt?

585. Ein Motor von 80 PS soll zur Hebung einer Last benützt werden; die Fördergeschwindigkeit soll 1 m in der Minute betragen. Welche Last wird gehoben werden können, wenn der Wirkungsgrad der Maschine 0,8 ist?

586. Ein Teich von 5000 m^3 Inhalt soll mit einer Pumpe ausgeschöpft werden, die den Wirkungsgrad von 0,8 besitzt; sie wird von einem zweipferdigen Motor betrieben. Das Wasser muß auf 3 m Höhe gefördert werden. Nach welcher Zeit ist der Teich leer?

587. An dem Göpel in Aufgabe 362 arbeiten vier Mann. Sie haben eine Last Q = 400 kg in 50 Sekunden 3 m hoch zu heben. Abmessungen und Reibungszahlen seien dieselben wie dort. Man berechne: a) die Umdrehungszahl n des Göpels; b) die Leistung, welche auf den Mann entfällt, wenn Seilsteifheit und Zapfenreibung an der Welle und an der Rolle berücksichtigt werden.

588. Ein Rad vom Halbmesser R = 0,8 m, an dessem Umfang berührend der Widerstand Q = 20 kg wirkt, wird durch eine



Kurbel bewegt, deren Länge r = 20 cm ist; die Triebkraft P an der Kurbel wirkt fortwährend horizontal. Der Zapfenhalbmesser des Rades ist ϱ = 4 cm, der ganze Zapfendruck D = 80 kg, die Reibungszahl f_1 = 0,08. Welche konstante Kraft P ist notwendig, wenn der Bewegungszustand nach jeder Umdrehung derselbe sein soll, und wie groß ist der Wirkungsgrad?

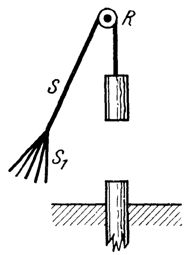
589. Eine Last $Q = 250$ kg soll mit Hilfe einer flachgängigen Schraube um 80 cm gehoben werden; gegeben sind: der Spindelhalbmesser $r = 3$ cm, der Arm der Triebkraft $R = 30$ cm, die Ganghöhe der Schraube $h = 0{,}988$ cm, die Reibungszahl $f = 0{,}06$. Welche Kraft P ist zum Heben der Last nötig? Welche Arbeiten werden von Kraft, Last und Reibung geleistet? Wie groß ist der Wirkungsgrad?

590. Eine Riemenscheibe von $r = 0{,}5$ m Halbmesser macht $n = 40$ Umdrehungen in der Minute; die größte Spannung S_1 des Riemens darf 125 kg betragen. a) Welche Kraft P kann durch den Riemen höchstens übertragen werden? (Reibungszahl $f = 0{,}28$, umspannter Bogen $\alpha = \pi$); b) wieviel Pferdestärken können höchstens übertragen werden; c) wieviel Leistung geht durch die Zapfenreibung verloren, wenn der Zapfenhalbmesser $\varrho = 5$ cm, die Zapfenreibungszahl $f_1 = 0{,}1$ und der Zapfendruck $D = 2\,S_1$ angenommen werden?

591. Eine schmiedeiserne Welle habe 0,2 m Durchmesser, 200 m Länge und mache 30 Umdrehungen in der Minute. Die Reibung in den Lagern betrage 0,05 vom Gewicht der Welle. Welche Leistung nimmt die Reibung in Anspruch? (Einheitsgewicht des Eisens : 7,8.)

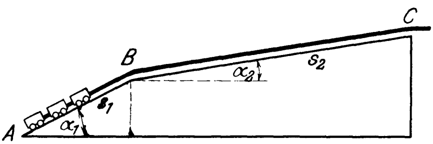
592. Zum Polieren eines Mosaikbodens werde ein Polierstein von 40 kg Gewicht durch einen Arbeiter zehnmal in der Minute hin und her geschoben, jedesmal um 1,2 m hin und ebensoviel zurück. Die Reibungszahl zwischen Boden und Stein beträgt 0,3. Welche Leistung verrichtet der Arbeiter?

593. Aus einem Mühlgang, der in der Sekunde 400 l Wasser führt, stürzt das Wasser 3 m hoch herab. Die Leistung des Wassers wird von einem Rad aufgefangen, das 4000 kg wiegt und 15 Umdrehungen in der Minute macht. Der Zapfen, in dem das Rad gelagert ist, hat 24 cm Durchmesser. Die Zapfenreibung verzehrt 3 v. H. der Leistung des Wassers. Wie groß ist die Reibungszahl des Zapfens?

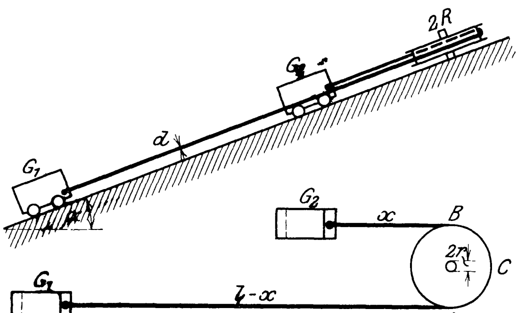


594. Ein Rammklotz von 300 kg Gewicht zum Einschlagen von Pfählen soll jede Minute 8 m hoch gehoben werden. Jeder Arbeiter hebt an einem Seil S_1. Der Arbeitsverlust infolge der Widerstände der Rolle R beträgt 10 v. H. Wieviel Arbeiter sind nötig, wenn die Leistung eines Mannes 8 mkg in der Sekunde ist?

595. Ein in C aufgestelltes Lokomobil von N = 20 PS zieht drei Waggons zu je 4000 kg längs einer Eisenbahn ABC gleichförmig hinauf. Gegeben sind: $s_1 = 100$ m, $s_2 = 300$ m, $\alpha_1 = 30^0$, $\alpha_2 = 15^0$, Widerstandszahl der Waggons: $\varkappa = \frac{1}{200}$. Auf die Seilwiderstände ist keine Rücksicht zu nehmen. In welcher Zeit t wird der Weg ABC zurückgelegt?

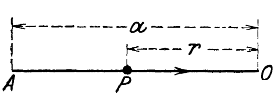


596. Ein Radfahrer hat samt Rad das Gewicht G kg. Wenn er ohne Benützung der Pedale eine unter α geneigte Straße hinabfährt, so kann er Straßen- und Luftwiderstand in gleichförmiger Bewegung überwinden. Derselbe Radfahrer fährt dann eine unter β geneigte Straße empor, hat eine Geschwindigkeit von a Kilometer in der Stunde und tritt die Pedale, deren Kurbel r Meter lang sei, mit n Umdrehungen in der Minute. Welchen Druck P wird der Radfahrer auf die Pedale ausüben und welche Leistung N in Pferdestärken wird er abgeben? (Nach Routh.)



***597.** Von einer Drahtseilbahn sind gegeben: die Neigung α der Bahn, die Gewichte G_1 und G_2 der Wagen, das Gewicht q der Längeneinheit des Drahtseils, der Seildurchmesser d und die Seillänge l (ohne den Teil ACB); ferner der Halbmesser R der Seilscheibe, ihr Zapfenhalbmesser r, endlich sämtliche Reibungs- und Widerstandszahlen. Die Bewegung geht gleichförmig vor sich. Welche Arbeit ist an der Seilscheibe zu leisten, wenn x anfangs Null ist und bis l zunimmt?

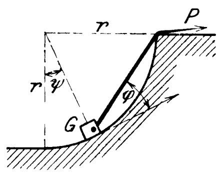
***598.** Ein Punkt P mit der Masse m, dessen Anfangslage A und dessen Anfangsgeschwindigkeit Null ist, werde von einem Punkt O mit einer Kraft $K = c \cdot r$ angezogen, wobei c eine Konstante ist. Welche Arbeit A leistet die veränderliche Kraft, wenn sich der Punkt bis O bewegt hat?



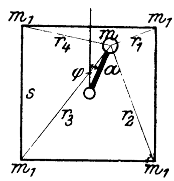
Für welchen Wert von r ist die Leistung der Kraft am größten? Wie groß ist diese größte Leistung E_{max}?

599. Ein geradlinig bewegter Punkt von der Masse m hat die Anfangsgeschwindigkeit v_0; er wird einer Kraft $P = a - bv$ ausgesetzt, worin a und b Konstante sind. Welche Arbeit hat die Kraft von der Anfangslage bis zur Gleichgewichtslage geleistet?

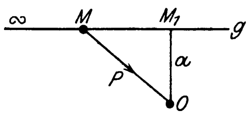
***600.** Eine Last G wird mittelst eines Seiles eine glatte Bahn emporgezogen, welche die Form eines Viertelkreises hat. Man berechne die Gesamtarbeit der hierzu notwendigen Kraft P aus deren Elementar-Arbeit in einer kleinen Zeit.



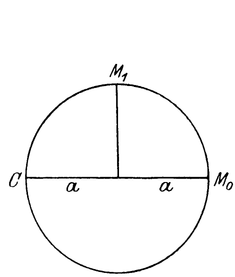
***601.** Eine kleine Masse m am Ende eines Armes a, der um den Mittelpunkt eines Quadrates von der Seitenlänge s drehbar ist, wird von vier gleichen Massen m_1 in den Ecken des Quadrates nach dem Newtonschen Gesetz angezogen. Welche Arbeit muß aufgewendet werden, um den Punkt m aus seiner Gleichgewichtslage für $\varphi = 0$ in die oben gezeichnete Stellung zu bringen, in welcher er von den Ecken die Abstände r_1, r_2, r_3, r_4 hat? Welche Arbeit ist notwendig für eine Drehung um 45^0?



***602.** Ein Punkt M, der sich in einer Geraden g bewegen kann, wird von einem außerhalb gelegenen Punkt O mit einer Kraft $P = \frac{k}{r^2}$ angezogen, wobei $OM = r$ ist. Der Punkt M kommt aus der Unendlichkeit und gelangt bis M_1; welche Arbeit hat P geleistet?



***603.** Ein Punkt, der sich auf einem Kreise bewegt, wird von einem Punkte C des Kreises verkehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angezogen. Wenn der Punkt von M_0 nach M_1 gelangt ist, welche Arbeit hat die Anziehungskraft geleistet?



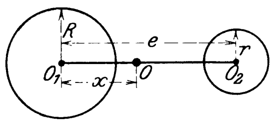
2. Polare Trägheitsmomente.

604. Man berechne das polare Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks von der Grundlinie b und der Höhe h in bezug auf die Spitze.

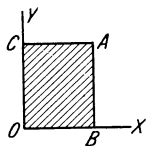
605. Suche das polare Trägheitsmoment einer regelmäßigen Polygonfläche in bezug auf den Mittelpunkt.

606. Suche das polare Trägheitsmoment einer Dreiecksfläche F, deren Seiten a, b, c sind, in bezug auf den Schnittpunkt von b und c.

607. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment einer Kreisfläche in bezug auf einen Punkt des Umfangs?



608. Zwei Kreise von den Halbmessern R, r besitzen die Entfernung e voneinander. Welche Entfernung x besitzt O von O_1, wenn beide Kreisflächen in bezug auf O gleiches polares Trägheitsmoment haben sollen?



609. Ein Rechteck OBAC von veränderlicher Größe steckt in der Ecke O eines Koordinatenkreuzes. Welches ist der Ort der Punkte A, wenn das Rechteck in bezug auf O gleiches polares Trägheitsmoment behalten soll?

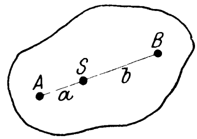
610. Man ermittle das polare Trägheitsmoment eines Kreisbogens vom Halbmesser r und dem Zentriwinkel 2α in bezug auf seinen Halbierungspunkt.

611. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment einer Ellipsenfläche F in bezug auf ihren Mittelpunkt und in bezug auf die Endpunkte der Achsen 2 a und 2 b?

612. Verteile die Masse M eines dünnen prismatischen Stabes derart, daß $\frac{2}{3}$ M in den Schwerpunkt, $\frac{1}{6}$ M an jedes Ende kommt. Beweise, daß das polare Trägheitsmoment des Stabes in bezug auf einen beliebigen Punkt ungeändert bleibt, wenn seine Masse in angegebener Weise auf drei Punkte verteilt wird.

613. Die Masse M einer ebenen Fläche wird derart verteilt, daß auf die Punkte A und B die Massen $m_1 = \frac{J_S}{a l}$, $m_2 = \frac{J_S}{b l}$

und auf den Schwerpunkt der Rest auf M, nämlich $m_S = M - (m_1 + m_2)$ verteilt wird. Hierin ist $l = a + b$ und J_S das polare Trägheitsmoment der Fläche in bezug auf den Schwerpunkt. Man beweise, daß die drei so verteilten Punktmassen m_1, m_2, m_S in bezug auf jeden Punkt O der Ebene das gleiche Trägheitsmoment haben wie die Fläche selbst.



614. Die Masse M einer ebenen Fläche wird in drei beliebig angenommene Punkte A, B, C und in den Schwerpunkt S verteilt. In die ersten kommen die Massen:

$$m_1 = \frac{J_S \sin \alpha}{a l}, \quad m_2 = \frac{J_S \sin \beta}{b l}, \quad m_3 = \frac{J_S \sin \gamma}{c l}.$$

Hierin ist J_S das polare Trägheitsmoment der Fläche in bezug auf den Schwerpunkt, ferner

$\alpha = \sphericalangle CSB$, $\beta = \sphericalangle ASC$, $\gamma = \sphericalangle BSA$

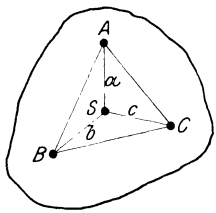
und

$$l = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma.$$

In den Schwerpunkt kommt die Restmasse

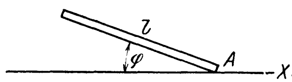
$$m_S = M - (m_1 + m_2 + m_3).$$

Man beweise, daß diese vier Punktmassen m_1, m_2, m_3, m_S in bezug auf jeden Punkt O der Ebene das gleiche Trägheitsmoment haben wie die Fläche selbst.

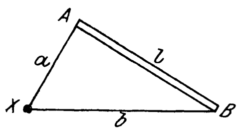


3. Trägheitsmomente von Körpern.

***615.** Berechne das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes von der Masse M und der Länge l für eine Achse X, die unter φ geneigt ist.



***616.** Suche das Trägheitsmoment desselben Stabes für eine Achse X, die zum Stab senkrecht steht und von den Enden des Stabes die Abstände a und b hat.



617. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kanten a, b, c hat das Einheitsgewicht γ. Suche sein Trägheitsmoment bezüglich der Kante c.

618. Rechne das Trägheitsmoment eines geraden, regelmäßigen n-seitigen Prismas in bezug auf die geometrische Achse (T_0) und sodann in bezug auf eine beliebige, zu den Grundflächen parallele Schwerlinie (T_1).

*619. Die Trägheitsmomente einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche a . b und der Höhe h sind zu berechnen in bezug auf folgende Achsen: a) Geometrische Achse der Pyramide (T_0); b) Schwerlinie parallel zur Kante a (T_1); c) Kante a (T_2); d) Parallele zur Kante a durch die Spitze (T_3).

*620. Man berechne die Trägheitsmomente eines geraden Kreiskegels von der Höhe h und dem Halbmesser r der Grundfläche in bezug auf folgende Achsen: a) Geometrische Achse des Kegels (T_1): b) Gerade durch die Spitze, senkrecht zur geometrischen Achse (T_2); c) Gerade durch den Schwerpunkt, senkrecht zur geometrischen Achse (T_0).

*621. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines regelmäßigen Tetraeders von der Kante a in bezug auf diese? (Dichte $= \mu$.)

*622. Welches Trägheitsmoment hat die Mantelfläche eines geraden Kegelstutzes (R, r, Halbmesser der Grundflächen), wenn auf ihr die Masse M gleichförmig ausgebreitet ist?

*623. Suche das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel-Oberfäche bezüglich eines Durchmessers (Masse M, Halbmesser r).

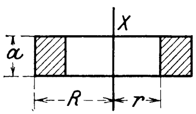
624. Eine Halbkugel-Oberfläche ist gleichförmig mit der Masse M belegt. Welche Gestalt besitzt das Trägheitsellipsoid dieser Masse für den Kugelmittelpunkt? (Kugelhalbmesser r.)

*625. Berechne das Trägheitsmoment eines homogenen geraden Kegelstutzes in bezug auf die Achse (Masse M, Halbmesser R und r).

*626. Wie groß sind die Haupt-Trägheitsmomente eines Umdrehungs-Paraboloides (Höhe h, Grundfläche $a^2\pi$) für den Scheitel?

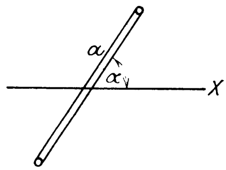
*627. Suche die Haupt-Trägheitsmomente eines Umdrehungs-Ellipsoides in bezug auf den Mittelpunkt. ($2a =$ Drehungsachse.)

628. T_x, T_y, T_z seien die Trägheitsmomente eines Körpers für drei senkrechte Achsen. Beweise, daß jedes kleiner ist wie die Summe der zwei anderen. (Routh.)

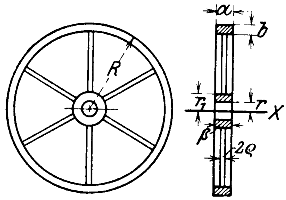


629. Ein Ring von rechteckigem Querschnitt besitzt die aus der Figur ersichtlichen Abmessungen R, r, a. Das Trägheitsmoment dieses Ringes um die Achse X soll durch Vergrößerung von R auf das Doppelte gebracht werden. Wie groß muß R_1 gemacht werden?

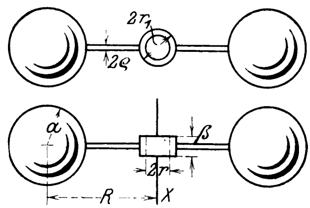
630. Es soll das Trägheitsmoment eines sehr dünnen Ringes vom Halbmesser a und der Masse M in bezug auf eine Achse X gesucht werden, die unter α gegen die Ebene des Ringes geneigt ist.



631. Es soll das Trägheitsmoment eines Schwungrades von folgenden Abmessungen in bezug auf die Achse X ermittelt werden: $R = 2$ m, $a = 0{,}4$ m, $b = 0{,}2$ m, $\varrho = 8$ cm, $r_1 = 0{,}4$ m, $r = 0{,}2$ m, $\beta = 0{,}4$ m; Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}5$.



632. Berechne das Trägheitsmoment zweier eisernen Schwungkugeln, ihrer hölzernen Arme und der hölzernen ringförmigen Nabe um die Mittelachse X. Die Arme sind zylindrisch. Die Abmessungen sind: $R = 58$ cm, $a = 10$ cm, $\beta = 10$ cm, $r_1 = 8$ cm, $r = 5$ cm, $\varrho = 1$ cm; die Einheitsgewichte sind: $\gamma = 7{,}6$ für Eisen, $\gamma_1 = 0{,}5$ für Holz.



***633.** Bestimme das Trägheitsmoment eines dreiachsigen Ellipsoides von den Halbachsen a, b, c in bezug auf die Achse 2a.

***634.** Ermittle das Trägheitsmoment einer unendlich dünnen elliptischen Schale, die zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden eingeschlossen ist, bezüglich der Achse 2a. (Routh.)

635. Man suche ein Ellipsoid, welches bezüglich aller seiner Durchmesser dieselben Trägheitsmomente hat, wie ein massengleicher Körper bezüglich derselben Geraden. (Legendre.)

636. Die Dichte eines Ellipsoides von den Halbachsen A, B, C nimmt dem Abstand vom Mittelpunkt proportional ab; die Schalen gleicher Dichte sind ähnliche Ellipsoide. Wie groß ist das Trägheitsmoment bezüglich der Hauptachse 2 A?

4. Bewegungs-Energie.

637. Welche Bewegungsenergie hat ein Geschoß von 600 kg mit 400 m/s Geschwindigkeit?

638. Zwei Eisenbahnzüge stoßen zusammen. Ihre Gewichte sind 120 t und 300 t, ihre Geschwindigkeiten 25 m/s bezw. 15 m/s. Welche Arbeit wird bei der Zertrümmerung geleistet?

639. Die Umdrehungszahl einer Welle vom Gewicht G und dem Halbmesser r ist n in der Minute; welche Energie besitzt die Welle?

640. Eine Welle vom Gewicht G und dem Halbmesser r macht n Umdrehungen in der Minute. Durch die Reibung in den Lagern sinkt die Umdrehungszahl auf die Hälfte herab. Welche Arbeit hat die Reibung aufgezehrt?

641. Ein zylindrischer Körper macht um seine Achse eine Schraubenbewegung; α ist deren Steigungswinkel in der Mantelfläche des Zylinders. Wie muß α abgeändert werden ($\alpha_1 = ?$), wenn die Energie der Schraubenbewegung auf $\frac{1}{n}$ ihres Wertes herabsinken, an der Winkelgeschwindigkeit aber nichts geändert werden soll?

642. Eine Kugel von 50 cm Halbmesser und dem Einheitsgewicht 7,8 macht $n = 120$ Umdrehungen in der Minute. Sie gibt von ihrer Energie 2464 mkg nach außen ab; wieviel (x) Umdrehungen in der Minute wird sie noch besitzen?

643. Eine Kugel vom Halbmesser r macht n Umdrehungen in der Minute. Wie groß (x) wird die Umdrehungszahl werden, wenn der Halbmesser um δ kleiner wird, ohne daß das Gewicht der Kugel sich ändert?

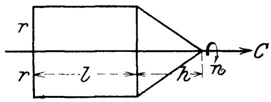
644. Eine dünnwandige Hohlkugel, deren Wandstärke $\delta = \frac{1}{100}$ r, des äußeren Halbmessers ist, dreht sich mit der Umdrehungszahl n um ihren Durchmesser. Das Innere der Hohlkugel wird mit Sand gefüllt, dessen Einheitsgewicht halb so groß wie jenes der Hohlkugel ist. Wie ändert sich hiedurch die Umdrehungszahl?

645. Eine Welle von $l = 4$ m Länge und $d = 10$ cm Durchmesser macht $n = 20$ Umdrehungen in der Minute. Sie wird mit einer anderen Welle aus gleichem Material, welche die Abmessungen $l_1 = 6$ m, $d_1 = 8$ cm besitzt und ruht, ohne Stoß gekuppelt. Wieviel (x) Umdrehungen machen die gekuppelten Wellen in der Minute?

646. Wie groß ist die Bewegungsenergie eines Kreiszylinders mit dem Halbmesser r und dem Gewicht G, wenn er sich um eine Erzeugende dreht und zwar in der Sekunde einmal herum?

647. Ein Holzprisma besitzt drei aufeinander senkrecht stehende Kanten: $a = 30$ cm, $b = 20$ cm, $c = 10$ cm; es dreht sich um die Kante a mit $n = 100$ Umdrehungen in der Minute. Wie groß ist die Bewegungsenergie des Prismas? (Einheitsgewicht $\gamma = 0{,}5$.)

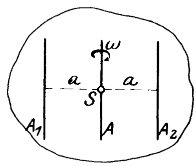
648. Ein Geschoß hat die Gestalt eines Rotationskörpers von nebengezeichnetem Meridian. Es besitzt eine Geschwindigkeit c, ferner macht es n Umdrehungen in der Sekunde. γ ist sein Einheitsgewicht. Wie groß ist seine Bewegungsenergie?



649. Ein Parallelepiped mit den Kanten a, b, c und dem Einheitsgewicht γ dreht sich gleichzeitig um seine vier parallelen Kanten c, um jede mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Welche Bewegungsenergie besitzt der Körper?

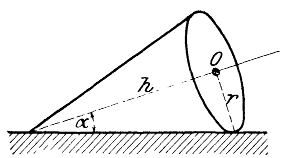
650. Um wieviel ändert sich die Bewegungsenergie in der vorigen Aufgabe, wenn die Drehung um eine der Kanten c aufhört?

651. Die Drehung eines Körpers um seine Schwerlinie A wird ersetzt durch zwei Drehungen um gleichweit von A entfernte Achsen A_1 und A_2. Wie groß muß a gemacht werden, wenn die Bewegungs-Energie des Körpers durch diese Zerlegung keine Änderung erfahren soll?

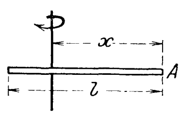


652. Ein gerader Kreiskegel (Masse M, Höhe h, Halbmesser der Grundfläche r) macht um eine seiner Erzeugenden n Umdrehungen in der Minute. Wie groß ist die Bewegungsenergie des Kegels?

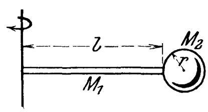
653. Ein gerader Kreiskegel (Masse M, Höhe h, Halbmesser der Grundfläche r) rollt sich auf einer horizontalen Ebene gleichförmig ab. Er braucht n Sekunden, um seine Anfangslage wieder zu erreichen. Wie groß ist die Bewegungsenergie dieses Kegels?



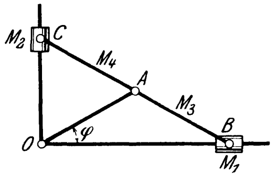
***654.** Die Masse eines Stabes, der um eine senkrechte Achse rotiert, soll an das Ende A reduziert werden. Wo muß die Achse gewählt werden ($x = ?$), wenn die reduzierte Masse des Stabes ein Minimum werden soll und wie groß ist dieses?

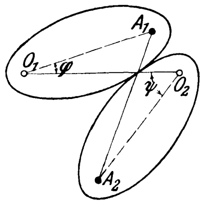


655. Eine Kugel ist durch einen Arm mit einer Achse verbunden, um die sie rotiert. Man reduziert die Massen M_1 und M_2 von Arm und Kugel nach dem Mittelpunkt dieser und findet die reduzierte Masse $\mathfrak{M} = M_1 + M_2$. In welchem Verhältnis müssen l und r stehen?



*656. Die gekoppelte gleichschenklige Schubkurbel besteht aus der Kurbel O A und der Stange B C, deren Mitte A mit der Kurbel drehbar verbunden ist; die Enden B und C schleifen auf einem rechtwinkligen Achsenkreuz. Es ist $OA = AB = AC$. Man soll die vier Massen M_1, M_2, M_3, M_4 der beiden Schieber und der Stange nach A reduzieren. In welcher Beziehung müssen diese vier Massen stehen, wenn die reduzierte Masse in A unveränderlich sein soll?

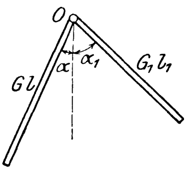




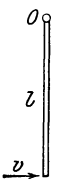
*657. Die Abbildung zeigt zwei kongruente elliptische Scheiben, die sich um ihre Brennpunkte O_1, O_2 drehen und hierbei immer in Berührung bleiben. Man soll die Masse M_2 der zweiten Scheibe nach dem Brennpunkt A_1 der ersten Scheibe reduzieren.

5. Das Prinzip der Bewegungs-Energie.

658. Zwei Stäbe mit den Gewichten G, G_1 und den Längen l, l_1 sind um denselben Punkt O drehbar und fallen aus ihren Ruhelagen α, α_1 herab. Sie sollen in der tiefsten Lage dieselbe Bewegungsenergie erhalten; in welcher Beziehung müssen α und α_1 stehen?



*659. Zwischen zwei festen Punkten O_1, O_2, welche die Entfernung a voneinander besitzen, liegt ein beweglicher Punkt in der Entfernung $\frac{a}{4}$ von O_1 anfangs in Ruhe. Er wird von O_1 und O_2 der Entfernung proportional angezogen. k ist die Anziehung in der Einheit der Entfernung von O_1; die Anziehung von O_2 ist doppelt so stark. Man suche die nächste Ruhelage M des Punktes und die Arbeiten A_1 und A_2 der beiden Anziehungskräfte zwischen den beiden Ruhelagen M_0 und M.

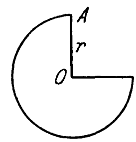


660. Ein Stab von der Länge l ist in O drehbar aufgehängt. Welche Geschwindigkeit v muß man seinem unteren Ende erteilen, damit er bis zur horizontalen Lage emporsteigt?

661. Zwei Scheiben, die sich an ihren rauhen Umfängen berühren, werden in Drehung versetzt, ohne aneinander zu gleiten.

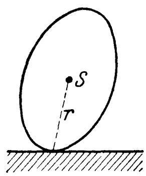
Nachdem $A = 67$ mkg Arbeit verbraucht wurden, werden ihre Umdrehungszahlen n_1 und n_2 in der Minute gemessen. Wie groß werden sie sein, wenn die Gewichte der Scheiben $G_1 = 120$ kg und $G_2 = 30$ kg, ihre Durchmesser $d_1 = 2^m$ und $d_2 = 1^m$ sind?

662. Eine Walze, deren Querschnitt ein Dreiviertelkreis ist, kann sich um die Achse O drehen. Der Halbmesser OA ist anfangs vertikal. Die Walze, die in Ruhe ist, wird ihrem Eigengewicht überlassen; welche größte Geschwindigkeit nimmt der Punkt A an?

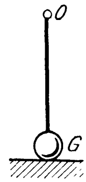


663. Eine ebene Fläche von beliebiger Gestalt, die keinerlei Kraft ausgesetzt ist, rollt, ohne zu gleiten, in vertikaler Ebene auf einer Geraden. Ihre Bewegungsenergie L und ihre Masse M sind gegeben; ebenso ihr Trägheitsmoment Ts bezüglich des Schwerpunktes S und der Abstand r. Man berechne die Geschwindigkeit des Schwerpunkts.

664. Ein Gewicht G wird in O mit einem elastischen Faden aufgehängt; das Gewicht wird unterstützt, der Faden ist infolgedessen spannungslos. Nun wird die Unterstützung fortgenommen. Man suche: Um wieviel (x_1) sinkt das Gewicht? In welcher Tiefe (x_2) bleibt das Gewicht im Gleichgewicht? Die Spannung des Fadens ist der Längenänderung proportional; k ist die Spannung, wenn der Faden sich um die Längeneinheit ausdehnt.

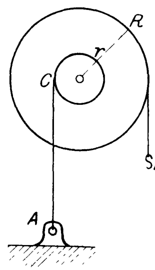


Aufg. 663.

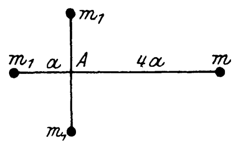


Aufg. 664.

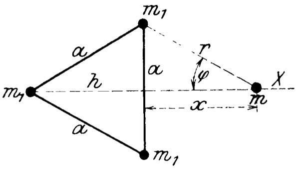
***665.** In A und C ist ein spannungsloser elastischer Faden befestigt. Wenn an den Haken bei B ein Gewicht G gehängt wird, um welchen Winkel φ wird sich die Doppelrolle R, r drehen, bis sie wieder momentan zur Ruhe kommt? Die elastische Kraft des Fadens ist dessen Längenänderung proportional.



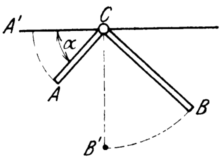
***666.** Drei festliegende gleiche Massenpunkte m_1 ziehen den in der Symmetrale liegenden beweglichen Massenpunkt m mit Kräften an, die den Massen und ihren Entfernungen direkt proportional sind. Für die Einheit der Entfernung und der Massen ist die Anziehung k. Mit welcher Geschwindigkeit v kommt der Punkt m nach A, wenn er anfangs in Ruhe war?



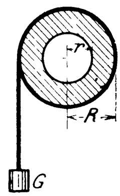
*667. Drei festliegende gleiche Massenpunkte m_1, die in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen, ziehen einen beweglichen Massenpunkt m nach dem **Newton**schen Gesetz an. Die Anfangslage dieses Punktes ist rechts in der Symmetrale X in sehr großer Entfernung ($x = \infty$) in Ruhe. Wie groß ist der Abstand x für die nächste Ruhelage des Punktes m?



668. Ein aus zwei gleich dicken Stäben $AC = 2a$, $BC = 2b$ zusammengesetzter rechter Winkel ist in C drehbar befestigt. Wie groß ist der Winkel α für das Gleichgewicht? Wenn der Winkel in die Lage A′CB′ gebracht und dann sich überlassen wird, welchen größten Winkel φ legt AC zurück? (Walton.)



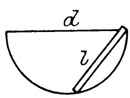
Aufg. 668.



Aufg. 669.

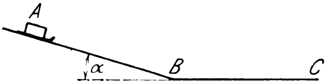
669. Welche anfängliche Winkelgeschwindigkeit muß eine hohle schmiedeiserne Walze von den Halbmessern $R = 20$ cm, $r = 10$ cm und der Länge $l = 3$ m haben, wenn sie imstande ist, ein Gewicht von $G = 10$ kg auf die Höhe $h = 5$ m zu heben? (Einheitsgewicht $\gamma = 7{,}8$.)

670. In einer festen glatten Halbkugelfläche vom Durchmesser d gleitet ein schwerer Stab von der Länge l aus der gezeichneten Anfangslage hinab. Welche Geschwindigkeiten werden seine Enden haben, wenn der Stab die tiefste Lage erreicht? (Walton.)

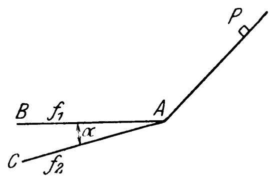


6. Das Prinzip der Bewegungs-Energie mit Widerständen.

671. Ein Schlitten, der anfangs in A ruht, gleitet eine unter α geneigte Straße herab. An welcher Stelle C der horizontalen Strecke wird er zur Ruhe kommen, wenn $AB = s$ und die Reibungszahl f gegeben sind?



672. Ein schwerer Körper gleitet von P eine schiefe Ebene herab. In A angekommen zerfällt er in zwei Teile; der eine Teil geht auf der horizontalen Ebene AB um s_1 weiter, bis er durch die Reibung zur Ruhe kommt; der andere Teil gleitet



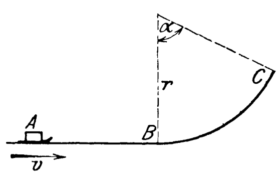
die schiefe Ebene AC um s_2 abwärts, bis er ebenfalls zur Ruhe kommt. Wenn diese Wege s_1 und s_2 gleich sein sollen, in welcher Beziehung müssen die Reibungszahlen f_1 und f_2 stehen?

673. Eine Welle vom Gewicht G und dem Halbmesser r macht n Umdrehungen in der Minute. Durch die Reibung in den Lagern sinkt die Umdrehungszahl auf die Hälfte herab. Welche Arbeit hat die Reibung verbraucht?

674. Eine Welle von $r = 5$ cm Halbmesser, welche $n = 40$ Umdrehungen in der Minute macht, wird von einem bestimmten Augenblick an sich selbst überlassen. Wieviele (x) Umdrehungen macht sie noch, wenn die Zapfenreibungszahl $f_1 = 0{,}08$ beträgt?

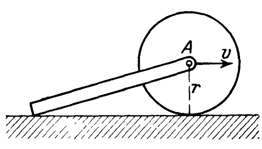
675. Ein Gewicht wird mit der Anfangsgeschwindigkeit von $v = 445$ cm in der Sekunde auf einer horizontalen Bahn vorwärts geschleudert. Die Reibungszahl der Bahn ist $f = \frac{1}{20}$. Welchen Weg wird das Gewicht zurückgelegt haben, wenn seine Energie auf die Hälfte herabgesunken ist?

***676.** Ein Schlitten soll die geradlinige horizontale Bahn $AB = l$ und sodann die Kreisbahn BC (Halbmesser r, Zentriwinkel α) zurücklegen. Die Reibungszahl f ist gegeben. Mit welcher Geschwindigkeit v muß die Bewegung begonnen werden, wenn der Schlitten in C seine Bewegung umkehren soll? (Ohne Rücksicht auf die Fliehkraft des Schlittens.)

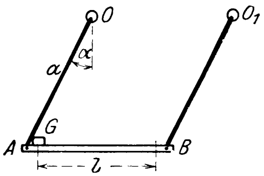


677. Ein Eisenbahnwagen, dessen Räder 40 cm Halbmesser und 4 cm Zapfenhalbmesser haben, besitzt auf horizontaler Strecke 9 m Geschwindigkeit in der Sekunde. Welche Strecke wird dieser Wagen bergan rollen, bis er zur Ruhe kommt, wenn die Steigung der Bahn $\sin\alpha = \frac{1}{20}$ beträgt? (Zapfenreibungszahl 0,06, Zahl der rollenden Reibung 0,5 mm).

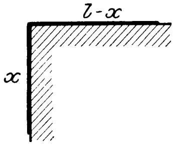
678. Eine Kugel vom Halbmesser r, die auf einer rauhen horizontalen Ebene rollt und deren Mittelpunkt anfangs die Geschwindigkeit v besitzt, schleppt eine gleichschwere Stange hinter sich. Welchen Weg x werden beide bis zum Stillstand zurücklegen, wenn der Zapfen bei A völlig glatt ist?



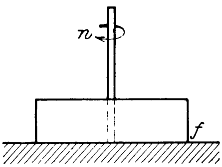
679. Eine in O und O_1 an parallelen Schnüren aufgehängte Stange AB wird aus der bezeichneten anfänglichen Ruhelage schwingen gelassen. Bei A liegt ein kleines Gewicht G. Wenn die Stange in die tiefste Lage kommt, wird sie plötzlich festgehalten; das Gewicht gleitet über die Stange hinweg und kommt in B zur Ruhe. Wie groß ist die Reibungszahl f zwischen Gewicht und Stange?



***680.** Eine Kette von der Länge l ruht zum Teil auf einem rauhen horizontalen Tisch (Reibungszahl f) und hängt zum andern Teil (x) frei herab. Sie beginnt ihre Abwärtsbewegung in jener Stellung, wo sich Gewicht und Reibung gerade noch Gleichgewicht halten. Welche Geschwindigkeit v hat die Kette erreicht, wenn ihr oberes Ende an der Tischkante eingetroffen ist?

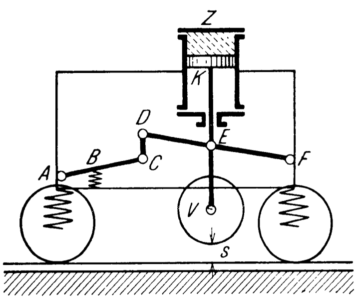


681. Eine Kugel vom Halbmesser r rollt auf horizontaler Ebene; die Zahl der rollenden Reibung sei φ. Welchen Weg x wird die Kugel bis zur Ruhe zurücklegen, wenn c die Anfangsgeschwindigkeit ihres Mittelpunktes ist?



***682.** Ein zylindrischer Körper vom Halbmesser r dreht sich um seine vertikale Achse mit n Umdrehungen in der Minute. Er wird so weit gesenkt, daß seine Unterseite eine rauhe horizontale Fläche berührt. Wieviel Umdrehungen (x) macht er noch, vom Augenblick der Berührung an gezählt?

***683.** Bei der Berechnung der Vorspannachse einer Lokomotive kommt folgende Aufgabe vor: In den Dampfzylinder Z, der mit dem Lokomotivgestell AF fest verbunden ist, wird Dampf von der Pressung $p = 12$ at einströmen gelassen, welcher den Kolben K vom Durchmesser $d = 412$ mm herabpreßt, die Vorspannachse samt Rad V um die Strecke $s = 60$ cm herabschiebt und an die Schiene drückt. Dadurch werden die beiden andern Achsen bei A und F, die auf Federn ruhen, entlastet und das ganze Lokomotivgestell hebt sich



um x mm. Kolben K und Rad V werden gleichzeitig durch einen Hebelzug ACDF mit einer Feder in B nach aufwärts gedrückt. Man berechne die Hebung x, wenn gegeben sind:

Federspannung in B: $F_1 = F_0 + k\,f_1$

Federspannung in A und $F:F = \frac{G}{2} - k\,f$

$F_0 = 5420$ kg, $k = 531$ kg für 1 cm Zusammendrückung,

f bzw. f_1 Ausdehnung bzw. Zusammendrückung der Federn;

G = Lokomotivgewicht,

$AB = a = 300$ mm, $BC = b = 500$ mm,

$DE = c = 445$ mm, $EF = d = 364$ mm.

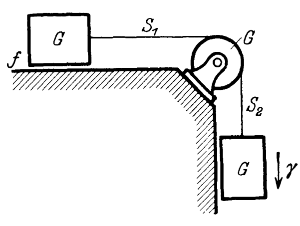
(Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1897, S. 96.)

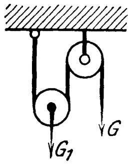
7. Das Prinzip d'Alemberts.

684. Eine ebene Platte fällt mit der Beschleunigung $\gamma = 4$ m in der Sekunde vertikal abwärts. Auf ihr ruht ein Gewicht von 10 kg. Welchen Druck wird es während der Bewegung auf die Platte ausüben?

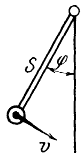
685. Auf zwei schiefen Ebenen liegen zwei schwere Körper, welche durch einen absolut biegsamen Faden miteinander verbunden sind. Mit welcher Beschleunigung γ wird die Abwärtsbewegung erfolgen, wenn die Reibung an beiden Ebenen berücksichtigt wird? (f = Reibungszahl.)

686. Zwei gleiche Gewichte G sind an den Enden einer Schnur befestigt, die über einen rauhen, drehbaren Kreiszylinder von gleichem Gewicht G läuft. Man berechne mit Berücksichtigung der Reibungszahl f der horizontalen Ebene die Beschleunigung γ der Bewegung und die Spannungen S_1 und S_2 in der Schnur.

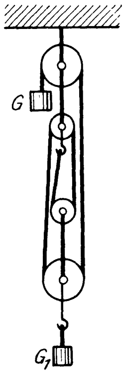




Aufg. 687.



Aufg. 689.

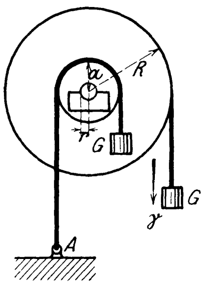


Aufg. 688.

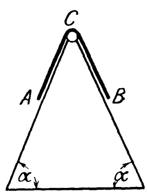
687. An einem Flaschenzug hängen zwei Gewichte G und G_1. Welche Beschleunigung γ wird G bei seiner Bewegung besitzen?

688. Mit welcher Beschleunigung γ sinkt bei nebenstehendem Flaschenzug das Gewicht G, wenn hierbei das Gewicht G_1 gehoben wird?

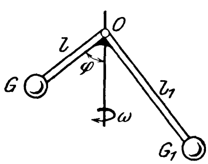
689. Man rechne die Spannung S in der Stange eines Pendels von der Länge l, wenn G das Gewicht des Pendels, v seine augenblickliche Geschwindigkeit und φ der Ausschlagwinkel ist. Auf die Masse der Stange ist keine Rücksicht zu nehmen.



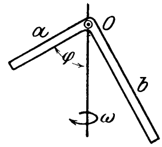
690. Die Bewegung einer Rolle R, um die ein biegsamer Faden mit dem Gewicht G geschlungen ist, wird durch eine Scheibe a gebremst, um deren rauhen Umfang (Reibungszahl f) ebenfalls ein Faden geschlungen wird; dieser ist in A befestigt und wird am andern Ende mit G belastet. Welche Beschleunigung γ erhält das abwärts fallende Gewicht G, wenn $a = \frac{R}{4}$, r (Zapfenhalbmesser) $= \frac{R}{10}$, f_1 (Zapfenreibungszahl) $= 0{,}1$ ist?



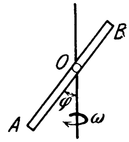
***691.** Eine schwere, sehr biegsame Kette von der Länge $ACB = l$ wird über zwei gleichgeneigte schiefe Ebenen gelegt, deren Spitze C eine kleine Rolle trägt. Die Kette ist anfänglich im Gleichgewicht. Durch eine kleine Erschütterung gleitet sie rechts hinab. Welche Geschwindigkeit besitzt die Kette, wenn ihr Ende A nach C gekommen ist? (Poisson.)



692. Zwei Stäbe l und l_1 sind rechtwinklig miteinander verbunden und tragen an den Enden zwei kleine Kugeln mit den Gewichten G und G_1. Die Stäbe sind in O aufgehängt und drehen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Achse. Man berechne den Ausschlagwinkel φ und das Moment, das bei O den rechten Winkel zu brechen sucht unter der Voraussetzung, daß $l_1 = 2\,l$, $G_1 = \frac{G}{2}$ ist. (Auf die Masse der Stangen ist keine Rücksicht zu nehmen.)

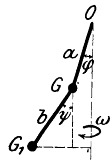


***693.** Zwei schwere Stangen von den Längen a und b und den Gewichten G und G_1 sind zu einem rechten Winkel verbunden. Sie sind in O aufgehängt und drehen sich um eine durch O gehende vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Welche Beziehung besteht zwischen ω und dem Ausschlagwinkel φ?

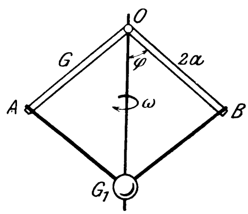


***694.** Ein Stab AB ist in O drehbar gelagert und rotiert um eine durch O gehende vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Welchen Winkel φ wird er dabei mit der Achse einschließen?

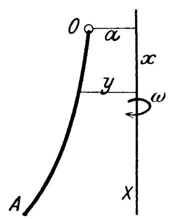
***695.** Wenn in der vorigen Aufgabe D der Gelenkdruck in O ist, welchen Winkel ψ schließt er mit der Vertikalen ein?



696. Zwei schwere Punkte G und G_1 sind durch zwei undehnbare Fäden a und b miteinander und an einem festen Punkt O befestigt. Sie rotieren um eine durch O gehende Vertikale mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Wie groß sind die Winkel φ und ψ? Wie groß sind die Spannungen S_a und S_b in den zwei Fadenstücken?

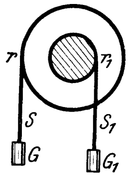


***697.** Zwei gleiche Stäbe von der Länge 2 a und dem Gewicht G sind in einer vertikalen Spindel drehbar gelagert. An den Enden A und B wird ein Faden von der Länge 4 a befestigt, der ein Gewicht G_1 trägt. Wenn die Spindel in Drehung versetzt wird, welche Beziehung besteht zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Winkel φ? (Routh.)



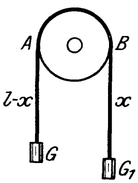
***698.** Eine homogene leicht biegsame Kette OA ist in O aufgehängt. Sie liegt dicht zwischen zwei glatten vertikalen Ebenen, die auch die Achse X einschließen und um sie mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Man bestimme die Gleichung der Kurve, welche die Kette bildet.

699. An den Enden zweier gewichtlosen Seile, welche um Rad und Welle eines Wellrades mit den Halbmessern r und r_1 geschlungen sind, hängen zwei Gewichte G und G_1. Das Wellrad würde sich unter ihrer Einwirkung nach rechts zu drehen beginnen. Welche Winkelbeschleunigung λ entsteht bei dieser Drehung? Welche Zeit t verfließt, bis G_1 durch die Höhe h herabgesunken ist? Welche Spannungen S, S_1 besitzen die beiden Seile? (Ohne Rücksicht auf die Masse des Wellrades.)

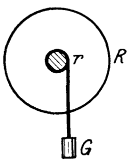


***700.** Wie ändern sich die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn auf die Masse des Wellrades Rücksicht genommen wird?

***701.** Über eine Rolle vom Halbmesser r wird ein biegsamer Faden von der Länge $l + r\pi$ gelegt; er wiegt q für die Längeneinheit. An den Enden des Fadens hängen zwei Gewichte G und G_1. Das größere G_1 befindet sich anfangs in seiner höchsten Lage ($x = 0$) und sinkt sodann bis zu seiner tiefsten ($x = l$) herab, wo es mit der Geschwindigkeit v_1 ankommt. Wie groß ist die Beschleunigung γ dieser Bewegung mit Rücksicht auf das Gewicht des Fadens (ohne Rücksicht auf die Masse der Rolle); wie groß ist v_1? Wie groß sind die Seilspannungen bei A und B für eine beliebige Stellung x des Fadens?



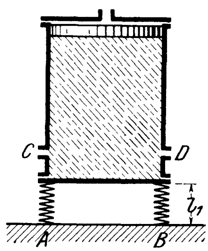
***702.** Um eine zylindrische Welle vom Halbmesser $r = 5$ cm und dem Gewicht $G_1 = 2$ kg ist ein Seil von der Länge $l = 10$ m und dem Gewicht $q = 0{,}14$ kg für 1 m gewickelt. Auf der Welle sitzt ein Rad vom Halbmesser $R = 40$ cm und dem Gewicht $G_2 = 20$ kg. An dem Ende des Seiles hängt ein Gewicht $G = 10$ kg. Mit welcher Geschwindigkeit v erreicht dieses seine tiefste Lage bei der Abwicklung des Seiles?



***703.** Ein Zylinder vom Gewicht G ist bei A und B auf gleichen Federn gelagert, für deren Widerstand die Gleichung gilt

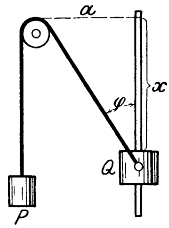
$$F_1 = k\,(l_0 - l_1),$$

worin l_1 die gegenwärtige Länge der Feder, l_0 die Länge in unbelastetem Zustand und k eine Konstante bedeutet. Ein Kolben vom Gewicht G_1 befindet sich anfangs in seiner höchsten Stellung und wird durch die darunter befindliche abgesperrte Luft getragen. Nun werden



bei C und D Hähne geöffnet, die Luft im Zylinder entweicht, der Kolben sinkt mit einer gemessenen Beschleunigung γ_1. Um wieviel hebt sich der Zylinder?

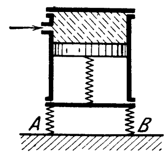
*__704.__ Ein biegsames Seil, das über eine Rolle läuft, trägt an den Enden zwei Gewichte P und Q; das zweite gleitet an einer glatten Stange. Man soll die Geschwindigkeit des Gewichtes Q als Funktion des Weges x darstellen, wenn angenommen wird, daß anfangs $x = 0$ und Q in Ruhe war. Die Rolle ist als sehr klein anzusehen.



8. Die Bewegung des Schwerpunktes.

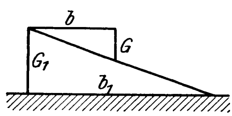
705. Aus einem Kahn, der das Gewicht G_1 hat, springt ein Mann vom Gewicht G ein Stück s weit ans Ufer. Um wieviel (s_1) weicht in derselben Zeit der Kahn zurück, wenn der Widerstand des Wassers vernachlässigt wird?

706. Ein Zylinder ist in A und B auf Federn gelagert, sein Kolben wird durch eine Feder nach oben gepreßt. Über dem Kolben strömt Luft von bekannter Pressung (p für die Flächeneinheit) ein. Um wieviel (x) ändert sich die Höhenlage des Zylinders?



707. Eine Kanone steht auf einer rauhen horizontalen Ebene (Reibungszahl f); das Geschoß verläßt die Kanone mit der relativen Geschwindigkeit v. Um welches Stück läuft die Kanone zurück, wenn M die Masse der Kanone, m jene des Geschosses ist?

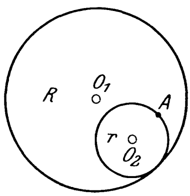
708. Auf glatter Unterlage liegen zwei glatte Prismen von den Gewichten G und G_1, den Breiten b und b_1. Wenn das kleinere Prisma mit seiner vertikalen Kante bis zum Fuß des großen Prismas herabgeglitten ist, um wieviel hat sich dieses verschoben und wohin?



*__709.__ Zwei schwere Punkte mit den Gewichten G und G_1 befinden sich in der Entfernung h vertikal übereinander. G, das höher liegende Gewicht, wird ohne Anfangsgeschwindigkeit frei fallen gelassen, G_1 wird gleichzeitig mit der Geschwindigkeit c aufwärts geschleudert. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 besitzt der Schwerpunkt beider Punkte? Nach welcher Zeit erreicht er die Anfangslage von G_1?

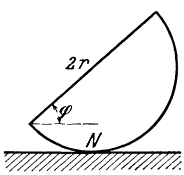
710. Ein Turner vom Gewicht G, der ein Gewicht G_1 bei sich trägt, springt unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit c schief aufwärts. Sobald er die größte Höhe erreicht hat, wirft er das Gewicht G_1 mit der relativen Geschwindigkeit c_1 horizontal nach rückwärts. Welche Geschwindigkeit v hat der Turner, sobald er das Gewicht fortgeschleudert, und um wieviel (x) vergrößert er dadurch seine horizontale Sprungweite?

***711.** Aus einem Kahn, der das Gewicht G_1 hat, springt ein Mann vom Gewicht G ans Ufer, indem er sich durch Abstoßen eine Geschwindigkeit c erteilt. Der Kahn weicht zurück, findet aber den Widerstand des Wassers $W = av^2$, worin a eine Konstante, v die veränderliche Geschwindigkeit des Kahnes ist. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 hat der Kahn und welche Geschwindigkeit hat er nach einer Zeit t?

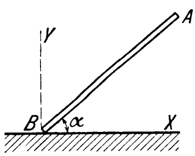


712. In einem festen Kreis vom Halbmesser R befindet sich eine kleinere, schwere Kreisscheibe vom Halbmesser r berührend festgehalten. Reibung ist nicht vorhanden. Man ermittle ohne jede Rechnung die Bahn, welche der Punkt A beschreibt, wenn die kleine Scheibe in der vertikal stehenden Ebene der beiden Kreise losgelassen wird.

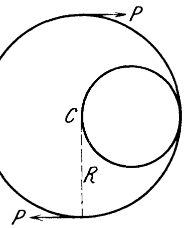
713. Eine homogene schwere Halbkugel wird in gezeichneter Stellung auf eine vollkommen glatte horizontale Ebene gelegt. Wo befindet sich die Momentanachse ihrer ersten Bewegung? (Routh.)



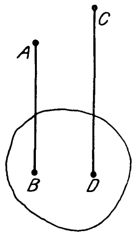
714. Ein homogener Stab AB von der Länge $2l$ stützt sich unter einem Winkel α gegen eine vollkommen glatte horizontale Ebene. Das andere Ende A des Stabes ist frei; der Stab fällt auf die Ebene herab. Man bestimme die Gleichung der Bahn des Punktes A in bezug auf das Koordinatenkreuz XBY und konstruiere die Bewegungsrichtung von A.



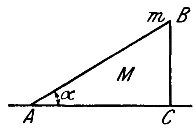
715. Auf einer horizontalen, vollkommen glatten Tischfläche liegt eine glatte Scheibe vom Halbmesser R vollkommen frei; auf ihr ist eine halb so kleine Scheibe befestigt, deren Gewicht ein Viertel des Gewichtes G der großen Scheibe ist. Diese wird am Umfang von einem Kraftpaar angeregt; welche Winkelbeschleunigung λ nimmt sie an und um welchen Punkt?



716. Eine schwere ebene Platte von beliebiger Form ist in zwei Punkten B und D mit vertikalen Fäden an zwei festen Punkten A und C aufgehängt. Der Faden CD wird zerschnitten. Welche Bewegung macht die Platte im ersten Augenblick?



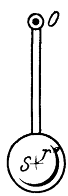
***717.** Ein völlig glatter dreiseitiger Keil ABC von der Masse M ruht auf einer glatten horizontalen Ebene. Von der Spitze B desselben wird eine Punktmasse m herabgleiten gelassen. Man ermittle: a) die Beschleunigung γ, mit welcher der Keil nach rechts ausweicht; b) die absolute Beschleunigung γ_1 der Punktmasse und ihre relative Beschleunigung γ_r gegen den Keil; c) die absolute Bahn der Punktmasse; d) den Druck D zwischen Keil und Punkt; e) den Druck D_1 zwischen Keil und horizontaler Ebene. (Joh. Bernoulli, Euler.)



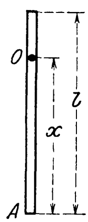
9. Drehung um eine Achse.

718. Von einem Kugelpendel ist bekannt: $OS = a = 40$ cm, $r = 5$ cm. Wie lang muß $OS = x$ gemacht werden, wenn die Dauer einer kleinen Schwingung sich verdoppeln soll? (Auf die Masse der Stange ist keine Rücksicht zu nehmen.)

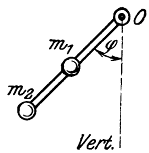
***719.** Eine schwere Stange von der Länge l, die anfangs vertikal hängt, soll um eine horizontale Achse O eine kleine Schwingung machen. Wie groß muß $AO = x$ gemacht werden, damit die Schwingungsdauer den kleinsten Wert erhält?



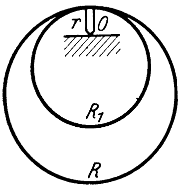
Aufg. 718.



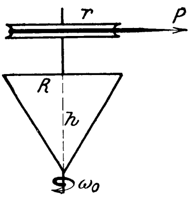
Aufg. 719.



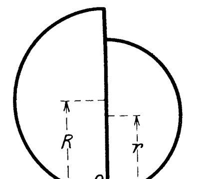
720. Auf einem gewichtlosen Stab, der um O drehbar ist, liegen zwei schwere Massenpunkte m_1, m_2 in den Entfernungen l_1, l_2 von O. Der Stab pendelt um O. Bestimme die Winkelbeschleunigung λ des Stabes und die Länge l des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer.



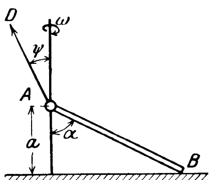
721. Von zwei Ringen aus dünnem Draht mit den Halbmessern R und R_1 trägt jeder einen kurzen Stift r, dessen Spitze O auf einer festen Ebene steht. Die Ringe schwingen pendelartig in kleinen Winkeln um O. In welcher Beziehung müssen R und R_1 stehen, wenn die Schwingungsdauern beider Ringe gleich sind? (Die Masse des Stiftes r ist nicht zu berücksichtigen.)



722. Ein Kegel vom Einheitsgewicht γ rotiert mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω_0 um seine vertikale Achse. Die Drehung wird durch einen Faden behindert, der mit der Spannung P am Umfang der Rolle r zieht. Nach welcher Zeit t kommt der Kegel zur Ruhe?



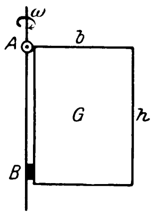
723. Ein homogener Körper von beliebiger Länge und nebenanstehendem Querschnitt, der auf horizontaler Ebene ruht, wird der Schwerkraft überlassen. Wie groß ist seine Winkelbeschleunigung zu Beginn der Bewegung?



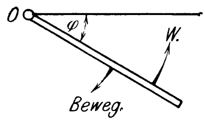
***724.** Ein Stab AB vom Gewicht G ist in A gelenkig befestigt und dreht sich um eine durch A gehende vertikale Spindel. Wie groß muß die Winkelgeschwindigkeit ω sein, wenn der Stab in B keinen Druck auf den Boden ausüben soll? Wie groß ist dann der Gelenkdruck D in A und welchen Winkel ψ schließt er mit der Vertikalen ein?

***725.** Eine rechteckige Platte vom Gewicht G ist in A an einer vertikalen Spindel mit einer horizontalen Drehachse befestigt und stützt sich in B frei an die Spindel. Wenn diese mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht wird, wie groß ist der Druck in B? Es ist $AB = h$.

***726.** Ein Stab von quadratischem Querschnitt b^2 und der Länge l dreht sich um eines seiner Enden in einer horizontalen Ebene und erleidet dabei durch den Widerstand der Luft eine Verzögerung, welche dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Die Größe dieser Verzögerung ist k für die Einheit der Geschwindigkeit und für die Einheit der der Luft entgegenstehenden Fläche. Die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist ω_0. Man suche die Winkelgeschwindigkeit ω als Funktion von φ und den Winkel φ als Funktion der Zeit. (γ = Einheitsgewicht.)

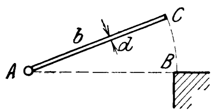


Aufg. 725.

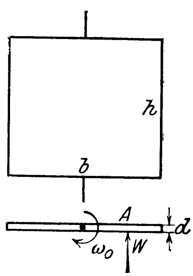


Aufg. 726.

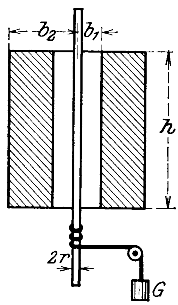
***727.** Ein Türflügel AC mit vertikaler Achse A von der Breite b und der sehr geringen Dicke d (Einheitsgewicht γ) wird von einem horizontalen Luftzug getroffen, der senkrecht zu AB streicht und mit q kg auf die Flächeneinheit drückt. Mit welcher Geschwindigkeit v kommt C nach B, wenn der Türflügel anfänglich in Ruhe ist und nahezu senkrecht zu AB steht?



***728.** Um eine vertikale Achse dreht sich eine dünne Platte von den Abmessungen b, h, d mit einer anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω_0. Die Dicke d der Platte ist sehr klein, ihr Einheitsgewicht γ. Der Drehung widersetzt sich der Widerstand W der Luft, der für jede Stelle A proportional der dort herrschenden Geschwindigkeit im Quadrat und der widerstehenden Fläche anzunehmen ist. Nach welcher Zeit T ist die Winkelgeschwindigkeit auf die Hälfte gesunken?



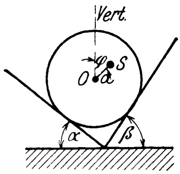
Aufg. 728.



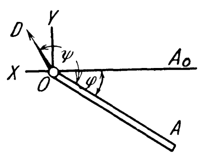
Aufg. 729.

***729.** Man berechne die Winkelgeschwindigkeit ω eines anfangs ruhenden Windflügels von nebenstehender Gestalt, der von einem Gewicht G in Drehung um die vertikale Spindel (Durchmesser 2r) versetzt wird, als Funktion der Zeit. Die Größe des Luftwiderstandes ist wie in voriger Aufgabe anzunehmen; die sehr kleine Dicke des Flügels ist d, die Dichte desselben μ.

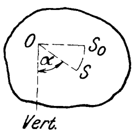
***730.** Wie groß ist die Winkelbeschleunigung λ einer Walze vom Halbmesser r, welche auf zwei unter den Winkeln α und β geneigten schiefen Ebenen liegt und daselbst Reibung mit der Zahl f erfährt? Der Schwerpunkt der Walze S besitzt die Exzentrizität a, das Gewicht der Walze ist G. Mit welcher Geschwindigkeit geht der Schwerpunkt durch seine tiefste Lage, wenn anfänglich $\varphi = \varphi_0$ ist?



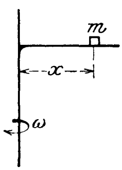
***731.** Ein Stab OA = l vom Gewicht G ist um O drehbar und wird aus der Anfangslage OA_0 ohne Geschwindigkeit fallen gelassen. Man suche seine Winkelbeschleunigung λ und seine Winkelgeschwindigkeit ω als Funktionen von φ. Wie groß sind die Teile X und Y des Druckes in O während der Bewegung? Welchen Winkel ψ schließt der Druck D mit dem Stab ein?



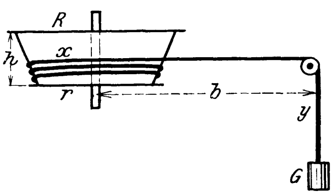
***732.** Ein schwerer Körper kann sich um eine horizontale Hauptachse des Punktes O drehen. Anfangs ist seine Schwer-Ebene OS horizontal, der Körper in Ruhe. Welchen Winkel φ schließt der von den Trägheitskräften herrührende Achsendruck mit der Ebene OS während der Bewegung ein? (Routh.)



***733.** An einer vertikalen Spindel befindet sich ein horizontaler Arm, an dem eine kleine Masse gleiten kann. In welcher Beziehung stehen die Winkelgeschwindigkeit ω der Spindel und die Entfernung der Masse x während der Drehung, wenn die Anfangswerte $\omega = \omega_0$ und x = a sind?



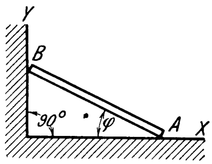
***734.** Ein biegsames Seil, das auf einer konischen Trommel aufgewickelt ist, läuft über eine Rolle und trägt ein Gewicht G. Man soll die Geschwindigkeit v des Gewichtes als Funktion von y darstellen, wenn auf die Dicke d des Seiles und sein Gewicht Rücksicht genommen wird. (Anfangswerte: y = 0, v = 0.)



10. Ebene Bewegung.

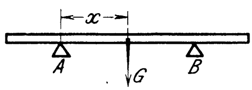
735. Eine schwere Walze vom Halbmesser a, die eine Winkelgeschwindigkeit ω_0 um ihre horizontale Achse besitzt, wird auf horizontaler rauher Unterlage senkrecht zur Achse derart fortgestoßen, daß ihr Schwerpunkt die anfängliche Geschwindigkeit v_0 besitzt. Nach welcher Zeit t_1 beginnt die Walze zu rollen? Nach welcher Zeit t_2 kommt sie zur Ruhe?

***736.** Ein homogener Stab $AB = a$ vom Gewicht G gleitet längs des glatten Bodens X und der glatten Wand Y. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung λ und die Winkelgeschwindigkeit ω des Stabes? Wie groß sind die Drücke in A und B während der Bewegung? (Alles als Funktionen von φ darzustellen.) (Walton.)



737. Bei welchem Winkel φ_1 wird in voriger Aufgabe der herabgleitende Stab die Wand verlassen? (Weston.)

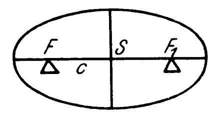
738. Ein homogener Stab von der Länge l ist auf zwei Stützen A und B symmetrisch gelagert. Wenn die Stütze B entfernt wird, soll sich der anfängliche Druck auf die Stütze A nicht ändern. Wie groß muß die Entfernung 2 x der Stützen gewählt werden? (Walton.)

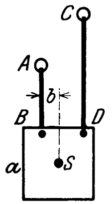


739. Ein homogener Stab vom Gewicht G ist an seinen Enden gelagert. Wenn eine seiner Stützen plötzlich entfernt wird, wie groß wird der Druck auf die andere Stütze?

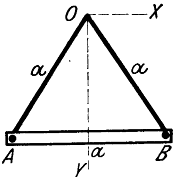
740. Eine kreisrunde horizontale Tischplatte wird an drei gleich verteilten Punkten A, B, C ihres Randes gestützt. Wenn eine dieser Stützen plötzlich entfernt wird, wie groß ist der Druck auf jede der beiden andern Stützen? (Walton.)

741. Eine homogene elliptische Platte, deren große Achse horizontal ist, wird in ihren beiden Brennpunkten gelagert. Wenn die Stütze in F_1 plötzlich entfernt wird, wird sich im allgemeinen der Druck in der übrigbleibenden Stütze F verändern. Welche numerische Exzentrizität muß man der Ellipse geben, damit diese Veränderung des Druckes in F nicht stattfindet? (Walton.)

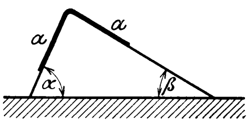




742. Eine schwere quadratische Platte ist in zwei Punkten B und D ihrer horizontalen Kante an zwei vertikalen Fäden aufgehängt. Der Faden CD wird zerschnitten. Wie groß ist im ersten Augenblick die Spannung des Fadens AB? (Walton.)

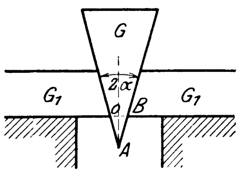


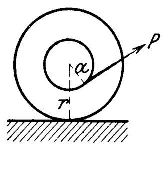
***743.** Ein Balken $AB = a$ vom Gewicht G ist an zwei gleichlangen Seilen in O aufgehängt. Das eine Seil wird durchschnitten; wie groß ist im ersten Augenblick die Spannung des andern Seiles? (Walton.)



744. Auf einem dreiseitigen Prisma liegt eine homogene biegsame Kette derart, daß ihre Mitte über der höchsten Kante des Prismas liegt. Das Prisma befindet sich auf einer glatten horizontalen Ebene. Welche horizontale Beschleunigung muß dem Prisma mitgeteilt werden, wenn die Kette im Gleichgewicht verharren soll?

***745.** Ein glatter Keil vom Gewicht G, dessen Winkel 2α ist, schiebt zwei gleichschwere Platten G_1 auseinander, die auf einem glatten horizontalen Tisch anfangs in Ruhe sind. Welche Bewegung machen der Keil und die Platten, und wie groß ist der Druck D zwischen ihnen?

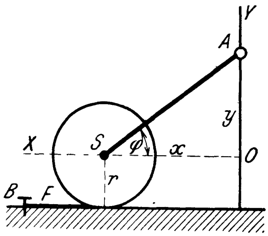




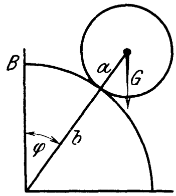
746. Eine schwere Walze vom Halbmesser r, die auf horizontalem rauhen Boden liegt, wird einer konstanten Zugkraft P ausgesetzt, die am Umfang einer Welle vom Halbmesser a wirkt und unter einem konstanten Winkel α gegen den Boden geneigt ist. Man ermittle die Bewegung des Mittelpunkts der Walze. Wie groß muß der Reibungswiderstand mindestens sein? (Budde.)

***747.** Ein homogener Kreiszylinder vom Gewicht G und dem Halbmesser r ist in der Mitte seiner Achse an einen elastischen Faden SA geknüpft, dessen Spannung der Länge proportional ist; sie beträgt k für die Längeneinheit. Um die beiden Enden des Zylinders sind unelastische Fäden gewickelt, die in zwei gleich-liegenden Punkten B des glatten Bodens befestigt sind. Man berechne:

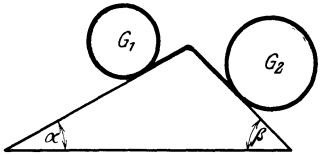
a) die Bewegung des Schwerpunkts S;
b) die Spannung F in jedem der beiden horizontalen Fäden;
c) wie groß muß das Gewicht G mindestens sein, wenn der Zylinder nicht vom Boden abgehoben werden soll? (Budde.)



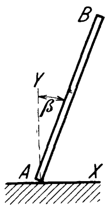
***748.** Auf einer rauhen festen Kugel vom Halbmesser b rollt eine andere vom Halbmesser a, die anfangs sehr nahe bei B in Ruhe ist, herab. Wie groß ist der Druck D und die Reibung R zwischen den beiden Kugeln in der gezeichneten Stellung? Wie groß muß die Reibungszahl f mindestens sein? Bei welchem Winkel φ_1 verläßt die kleine Kugel die große? (Routh.)



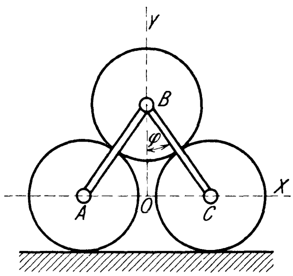
749. Zwei zylindrische Walzen, deren Gewichte G_1 und G_2 gegeben sind, rollen zwei schiefe Ebenen hinab. Um die Walzen schlingt sich ein biegsames, undehnbares Band, das über die Spitze der schiefen Ebenen geht und an jeder der Walzen befestigt ist. Wie groß ist die Spannung S dieses Bandes und mit welcher Beschleunigung γ gleitet es über die schiefen Ebenen? (Walton.)



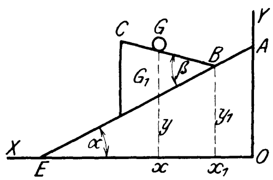
***750.** Ein schwerer Stab AB vom Gewicht G wird in nebenan gezeichneter Art auf eine rauhe horizontale Ebene gestellt und sodann fallen gelassen. Mit welcher Geschwindigkeit v erreicht B die Ebene? Wie groß ist der Druck in A während der Bewegung? Kann der Stab die Ebene verlassen? (Routh.)



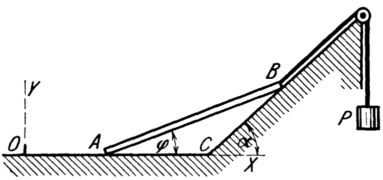
***751.** Drei gleiche glatte Walzen vom Gewicht G ruhen auf einer glatten horizontalen Ebene derart, daß die unteren Walzen sich anfangs berühren. Durch Stäbe AB und BC sind die Walzen miteinander verbunden. Mit welcher Geschwindigkeit erreicht die mittlere Walze die Ebene, wenn sie hinabfällt?



***752.** Auf einer festen glatten schiefen Ebene, die unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist, liegt ein glatter Keil mit dem Winkel β an der Spitze und auf dessen oberer Fläche ein Gewicht G. Anfangs ist B in A und G in C in Ruhe. Wenn das Gewicht und der Keil der Schwere überlassen werden, zu suchen: a) die Bewegung des Keils auf der schiefen Ebene; b) die Bewegung des Gewichtes auf der Keilfläche; c) die absolute Bahn des Punktes G; d) den Druck D zwischen dem Punkt G und dem Keil; e) den Druck D_1 zwischen dem Keil und der schiefen Ebene. (Euler.)



***753.** Ein schwerer Stab $AB = 2a$ vom Gewicht G wird durch ein sinkendes Gewicht P über eine schiefe Ebene gezogen. Anfänglich ist der Stab in OC in Ruhe. Man bestimme die Geschwindigkeit v des fallenden Gewichtes P als Funktion des Winkels φ.



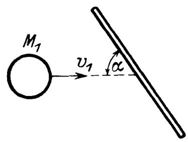
11. Stoß.

754. Eine Kugel von der Masse M_1 stößt eine ruhende von der Masse M_2 zentral. Nach dem Stoß bleibt M_1 in Ruhe. In welchem Verhältnis stehen die Massen M_1 und M_2?

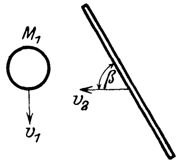
755. Zwei elastische Kugeln laufen mit gleicher Geschwindigkeit gegeneinander; nach dem Stoß bleibt eine der Kugeln in Ruhe. In welchem Verhältnis stehen ihre Massen? (Walton.)

756. Die Mittelpunkte zweier gleichgroßen Kugeln bewegen sich in derselben Geraden. Die Geschwindigkeit der stoßenden Kugel hat nach dem Stoß dieselbe Größe, jedoch entgegengesetzte Richtung. In welchem Verhältnis mußten die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der stoßenden und der gestoßenen Kugel vor dem Stoß gestanden haben?

757. Eine Kugel stößt eine zweite ruhende von doppelter Masse zentral. Die Bewegungsenergie beider Kugeln sinkt nach dem Stoß auf die Hälfte herab. Wie groß ist die Stoßzahl? Welche Geschwindigkeit besitzt die stoßende Kugel nach dem Stoß?



758. Eine Kugel von der Masse M_1 stößt auf eine schiefstehende, große, in Ruhe befindliche Platte. Der Stoß ist vollkommen elastisch. Wie groß ist er?



759. Gegen eine mit der Geschwindigkeit v_1 fallende Masse M_1 stößt eine schiefstehende große Platte, die sich horizontal mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt. Der Stoß ist vollkommen elastisch. Wie groß ist er?

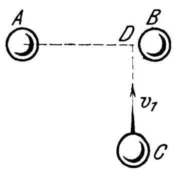
760. Die Mittelpunkte von drei elastischen Kugeln liegen in einer Geraden; ihre Massen sind M_1, M_2 und M_3. Die erste Kugel stößt mit der Geschwindigkeit v_1, die beiden anderen ruhen. Es ist $M_1 = 5\, M_2$. Nach dem Stoß bewegt sich die zweite Kugel mit der Geschwindigkeit $-v_1$. Wie groß ist die Masse M_3 der dritten Kugel gewesen?

761. Vier gleiche Kugeln berühren einander; ihre Mittelpunkte sind durch unelastische Fäden von beliebiger Länge miteinander verbunden. Der ersten Kugel wird eine Geschwindigkeit v_1 erteilt; sie nimmt der Reihe nach die andern Kugeln mit. Mit welchen Geschwindigkeiten werden nach und nach die vier Kugeln laufen?

762. Auf zwei gleiche Wageschalen vom Gewicht G werden zwei ungleiche Gewichte G_1 und G_2 aus den Höhen h_1 und h_2 herabfallen gelassen. Mit welcher Geschwindigkeit c bewegen sich die Schalen nach dem gleichzeitigen Auftreffen der beiden Gewichte? Der Stoß sei unelastisch.

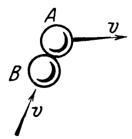
763. Zwischen zwei parallelen Wänden, deren Abstand a ist, stößt ein Ball vom Durchmesser d normal hin und her. Man bebeobachtet, daß in der Zeit t der Ball n mal anschlägt. Welche Geschwindigkeit hat der Ball zuerst gehabt?

***764.** Eine Kugel von der Masse M_1 wird gegen zwei ruhende Kugeln von den Massen M_2 M_3 gestoßen; die Mittelpunkte aller drei Kugeln liegen in einer Geraden. In welcher Beziehung müssen die drei Massen stehen, wenn die letzte Kugel M_3 die größte Geschwindigkeit erhalten soll? (H u y g h e n s.)



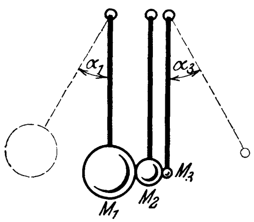
765. Zwei gleiche Kugeln A und B haben die Entfernung a voneinander und sind in Ruhe. Eine dritte gleiche Kugel C wird in normaler Richtung zu A B derart auf B gestoßen, daß sie A zentral trifft. Nach welchem Punkt D muß der Stoß gerichtet sein?

766. Auf eine in Ruhe befindliche Kugel stößt schief eine gleichgroße. In welcher Richtung muß der Stoß erfolgen, wenn die Geschwindigkeit v_1 der stoßenden Kugel nach dem Stoß auf $\frac{1}{n} v_1$ herabsinken soll?



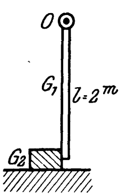
767. Auf einen Ball A, der mit der Geschwindigkeit v läuft, wird ein zweiter B mit gleicher Masse und Geschwindigkeit zentral gestoßen. Welchen Winkel α müssen die beiden Geschwindigkeiten miteinander bilden, wenn der Ball A durch den Stoß um 90^0 aus seiner Richtung gebracht wird?

768. In einer geraden Rinne befinden sich r gleichgroße elastische Kugeln hintereinander, von denen jede n mal soviel Masse hat wie die nachfolgende. Die erste dieser Kugeln stößt mit der Geschwindigkeit v_1 an die Reihe der andern; welche Geschwindigkeit erhält die letzte Kugel? (Ritter.)

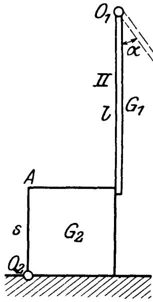


769. Drei Kugeln, die sich in einer Horizontalen berühren, werden in gleicher Höhe aufgehängt. Ihr Massenverhältnis ist $M_1 = 2\,M_2 = 6\,M_3$. Die Kugel M_1 wird um den Winkel $\alpha_1 = 20^0$ erhoben und fallen gelassen; um welche Winkel α_2 und α_3 erheben sich die Kugeln M_2 und M_3, wenn die Stoßzahl $k = 0{,}9$ ist?

770. Ein Eisenstab von 2 m Länge und 1 cm² Querschnitt (Einheitsgewicht 7,8) ist an einem Ende O drehbar befestigt und schwingt aus horizontaler Anfangslage ohne Anfangsgeschwindigkeit in die vertikale Lage, wo er ein Gewicht $G_2 = 300$ g stößt und auf horizontaler rauher Bahn (Reibungszahl $f = 0{,}08$) fortschleudert. Welche Strecke x wird das Gewicht zurücklegen, wenn der Stoß unelastisch ist?

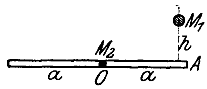


771. Ein Stab vom Gewicht G_1 und der Länge l ist in O_1 drehbar aufgehängt. Man läßt ihn aus der ruhenden Anfangslage I schwingen und in der vertikalen Lage II an den Rand eines Würfels stoßen, der das Gewicht G_2, die Kantenlänge s besitzt und in O_2 drehbar gelagert ist. Die Stoßzahl ist $k = \frac{1}{2}$. Wenn der Würfel durch den Stoß zum Kippen um O_2 gebracht werden soll, wie groß muß α gewählt werden?



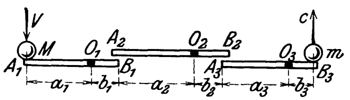
Aufg. 771.

772. Auf einen Balken, der um seine horizontale Schwerlinie O schwingen kann und anfangs in Ruhe ist, fällt am Ende bei A eine Masse M_1 durch die Höhe h herab. Der Stoß ist elastisch. Welche Geschwindigkeit c_1 besitzt die Masse M_1 nach dem Stoß und welche Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Balken? (Routh.)

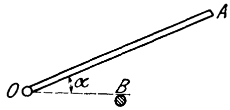


Aufg. 772.

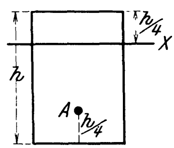
773. Drei Stäbe mit den Massen M_1, M_2, M_3 sind in O_1, O_2, O_3 drehbar gelagert und stützen sich in der nebengezeichneten Art. Auf das Ende des ersten Stabes stößt eine Kugel mit der Masse M und der Geschwindigkeit V; welche Geschwindigkeit c wird eine Kugel von der Masse m auf dem Ende des letzten Stabes erhalten, wenn die Stoßzahl k gegeben ist?



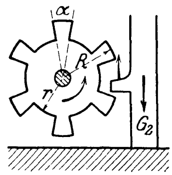
774. Ein Stab OA, der um sein Ende O drehbar ist, fällt aus seiner anfänglichen Ruhelage durch den Winkel α herab und stößt auf einen festen horizontalen Stab B. Er prallt von diesem ab und erhebt sich wieder um den Winkel β. Wie groß ist die Stoßzahl k?

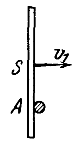


775. Eine dünne rechteckige Platte, die um die Gerade X schwingen kann, wird in A von einer Masse gestoßen, die $^1/_{10}$ von jener der Platte ist. Diese schwingt infolge des Stoßes bis zur horizontalen Lage. Mit welcher Stärke erfolgte der Stoß, wenn er als völlig elastisch vorausgesetzt wird?

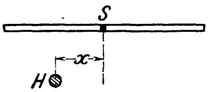


776. Eine gußeiserne Daumenwelle von $d = 10$ cm Dicke den Halbmessern $R = 30$ cm, $r = 20$ cm, mit sechs Daumen von $\alpha = 10^0$ Winkel, macht $n = 10$ Umdrehungen in der Minute und hebt hierbei eine Stampfe von $G_2 = 15$ kg ruckweise. Welche Geschwindigkeit c_2 wird der Stampfe im Augenblick des Anhebens erteilt? Der Stoß tritt in der Mitte des Daumens ein. (Einheitsgewicht des Gußeisens $\gamma = 7{,}5$.)

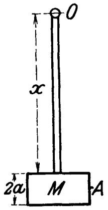




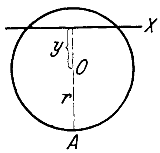
777. Ein in Translation mit der Geschwindigkeit v_1 begriffener Stab stößt an irgend einer Stelle an ein festes Hindernis. Es ist die Geschwindigkeit der Stoß-Stelle A des Stabes nach dem Stoß zu ermitteln, wenn die Stoßzahl k gegeben ist.



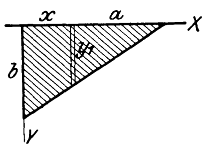
***778.** Eine ebene Platte von beliebiger Form fällt in horizontaler Lage herab und stößt bei H auf eine feste horizontale Querstange. Wie groß muß der Abstand x gemacht werden, wenn die Platte durch den Stoß die größte Winkelgeschwindigkeit erhalten soll? Wie groß ist diese?



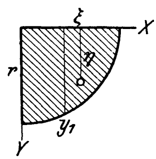
779. Die Masse M eines Hammers ist durch einen Stiel von unbekannter Länge x in O drehbar aufgehängt. Die Masse des Stiels ist μ für die Längeneinheit. Wie lang muß x gemacht werden, wenn ein in der Mitte A von M eintretender Stoß in O keine Erschütterung hervorruft?



780. Eine Kreisscheibe ist um die horizontale Gerade X drehbar. Ein im tiefsten Punkt A ausgeübter Stoß soll in der Achse X keine Erschütterung hervorrufen. In welcher Entfernung von O muß die Achse angenommen werden?



Aufg. 781.

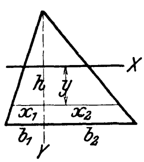


Aufg. 782.

***781.** Man ermittle die Koordinaten des Stoßmittelpunkts eines rechtwinkligen Dreiecks, das sich um die horizontale Seite a drehen kann.

***782.** Es sollen die Koordinaten ξ und η des Stoßmittelpunkts eines Viertelkreises gerechnet werden, der um die Achse X drehbar ist.

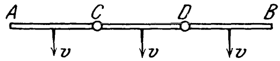
***783.** Eine Dreiecksfläche kann sich um eine Achse X drehen, die zur Grundlinie $b = b_1 + b_2$ parallel ist und die Höhe h halbiert. Wo liegt der Stoßmittelpunkt dieses Dreiecks?



Aufg. 783.

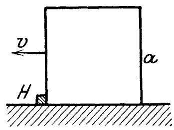
784. Eine quadratische Scheibe dreht sich in einer horizontalen Ebene um ihren Eckpunkt A mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Plötzlich wird der benachbarte Eckpunkt B des Quadrates festgehalten; mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω' dreht sich jetzt die Scheibe um B?

785. Drei gleiche Stäbe von der Länge a sind gelenkig verbunden und bewegen sich in geradliniger Translation mit der Geschwindigkeit v. Plötzlich wird der Mittelpunkt von CD festgehalten. Nach welcher Zeit treffen sich A und B, wenn die Bewegung in einer glatten horizontalen Ebene vor sich geht? (Routh.)

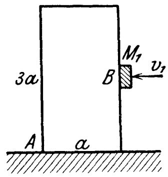


786. Eine quadratische Scheibe dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Diagonale AC. Plötzlich wird die Ecke B des Quadrates festgehalten. Welcher Stoß wird hierdurch in B ausgeübt und mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω' dreht sich nachher das Quadrat um B? (Routh.)

787. Ein Würfel gleitet mit der Geschwindigkeit v auf horizontalem Boden und stößt auf ein Hindernis H. Welche Geschwindigkeit c_s nimmt sein Schwerpunkt nach dem Stoß an? Wie groß muß v mindestens sein, wenn der Würfel überkippen soll?



788. Eine Masse M_1 wird in B an ein Prisma geworfen, das auf rauher Unterlage steht, trifft es in halber Höhe und bleibt haften. Wie groß muß die Geschwindigkeit v_1 der Masse sein, damit das Prisma, dessen Masse dreimal so groß ist, umkippt? (Routh.)



789. Über eine Rolle wird ein geschlossenes Seil gelegt, das frei herab hängt. Zwei Menschen von gleicher Masse hängen sich an das Seil und verharren im Gleichgewicht. Plötzlich beginnt der eine mit der Geschwindigkeit v_0 an dem Seil emporzuklettern; welche wirklichen Geschwindigkeiten werden die beiden Menschen jetzt besitzen?

V. Das Rechnen mit Dimensionen.

790. Die Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges beträgt 60 km in der Stunde; wie groß ist diese Geschwindigkeit in m/s?

791. Wie groß wäre die Beschleunigung der Schwere 9,81 m/s^2, wenn man sie auf den Kilometer und die Stunde beziehen würde?

792. Eine Beschleunigung hat die Größe 80 m/s^2; in einem andern Maßsystem, in dem die Längeneinheit ein Kilometer ist, hätte sie die Größe 288; wie groß ist in diesem System die Zeiteinheit?

793. Wie groß würde der Zahlwert der Beschleunigung der Schwere $g = 9{,}81$ m/s^2 werden, wenn als Zeiteinheit die Neusekunde eingeführt würde? (1 Tag = 20 Stunden, 1 Stunde = 100 Minuten, 1 Minute = 100 Sekunden.)

794. Wie muß das System der Grundeinheiten: Masse, Länge, Zeit verändert werden, damit der Zahlwert einer Winkelbeschleunigung sich verhundertfachen soll?

795. Rechne den Wert einer Pferdestärke in englische Sekunden-Fuß-Pfund um, wenn ein engl. Fuß = 0,305 m, 1 engl. Pfund = 0,454 kg (Krafteinheit) ist.

796. Wieviele m kg/s wäre eine Pferdestärke, wenn das Kilogramm die Masseneinheit wäre, und nicht die Krafteinheit?

797. Das Trägheitsmoment eines Körpers ist T in einem Maßsystem, in dem das Kilogramm die Krafteinheit und der Meter die Längeneinheit ist; wie groß ist dasselbe Trägheitsmoment im C.G.S.-System?

798. Die Bewegungsenergie eines Körpers beträgt 64285,71 Einheiten im Fuß-Pfund-Minuten-System; wie groß ist sie im Meter-Kilog.-Sekunden-System? (1 Fuß = 0,316 m, 1 Pfund = 0,56 kg.)

799. Eine Spannung beträgt 600 kg f. d. cm^2; wie groß ist sie in Pfund f. d. $Zoll^2$? (1 Zoll = 2,63 cm, 1 Pfund = 0,56 kg.)

800. Die Steifheit eines Seiles ist nach der Angabe Grashofs $S = (a\frac{Q}{R} + b)d^2$, worin Q die Last am Seil, R der Krümmungshalbmesser, d die Stärke des Seiles, S der Widerstand ist. Welche Dimensionen haben a und b?

801. Für Hanfseil ist in voriger Aufgabe: $a = 0{,}038$, $b = 0{,}054$, wenn Q in kg, R und d in cm eingesetzt werden. Wie groß werden a und b sein, wenn Q in Wiener Pfund, R und d in Wiener Zoll eingesetzt werden? (1 Zoll = 0,263 cm, 1 Pfund = 0,56 kg.)

802. Der Reibungswiderstand einer Rohrleitung wird nach de Saint-Vénant durch die Gleichung gefunden: $W = \alpha \pi d l v^n$, worin α eine Konstante, d der Durchmesser, l die Länge der Leitung, v die Geschwindigkeit des Wassers, n eine Zahl bedeuten. Welche Dimension besitzt α?

803. Weisbach gibt für den Reibungswiderstand in einer Rohrleitung die Gleichung: $W = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \pi d l v^2$, worin α und β Konstante sind, d, l, v dieselbe Bedeutung wie in Aufgabe 802 haben. Welche Dimensionen besitzen α und β?

804. Baumgarten hat vorgeschlagen, die Geschwindigkeit eines Flusses nach der Gleichung zu rechnen: $v = \alpha u + \sqrt{\beta + \gamma u^2}$, worin u die Anzahl der Umdrehungen eines Flügelrädchens in einer Sekunde, α, β, γ Konstante sind. Welche Dimensionen besitzen diese?

805. Die Geschwindigkeit eines Flusses wird nach Bazin durch die Formel gegeben: $v^{m/s} = \sqrt{\dfrac{RJ}{\alpha + \frac{\beta}{R}}}$, worin R eine Länge, J eine Verhältniszahl und zwar das Gefälle des Flusses, α und β Konstante sind. Für Metermaß seien diese: $\alpha = 0{,}00028$, $\beta = 0{,}00035$; wie groß müssen α und β sein, wenn v in Wiener Fuß gerechnet werden soll? (1 Fuß = 0,316 m.)

806. Harder empfiehlt zur Berechnung der Geschwindigkeit eines Flusses die Gleichung $v^{m/s} = (\alpha + \beta \sqrt{R}) \sqrt{RJ}$, worin die Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie in voriger Aufgabe. Für Meter ist $\alpha = 36{,}27$, $\beta = 7{,}254$; wie ändern sich diese Zahlen für Pariser Fuß? (1 m = 3,0784 Pariser Fuß.)

807. Die vielbenützte Formel der Schweizer Ingenieure Ganguillet und Kutter zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit eines Flusses lautet:

$$v^{m/s} = \frac{a + c/n + b/J}{1 + (a_1 + b_1/J)\dfrac{n}{\sqrt{R}}} \cdot \sqrt{RJ},$$

worin R eine Länge, J eine Verhältniszahl (Gefälle des Flusses), n eine Zahl und a, b, c, a_1, b_1 konstante Werte sind. Für Metermaß sind sie:

$$a = a_1 = 23, \ b = b_1 = 0{,}00155, \ c = 1.$$

Wie groß sind sie, wenn v in Wiener Fuß angegeben werden soll? (1 Fuß = 0,316 m.)

808. Für die Anzahl der zu einer Seiltransmission nötigen Seile gilt die Regel (vgl. K. Keller, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure 1885)

$$A = 1250 \frac{N}{vd^2}$$

worin N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken, v die Geschwindigkeit des Seiles, d seinen Durchmesser bedeutet. Man ermittle die Dimension der Zahl 1250.

809. Die Höhe eines Dampfkessel-Schornsteins wird nach von Reiche (Anlage und Betrieb der Dampfkessel) nach der Gleichung bestimmt:

$$h^{\text{meter}} = 0{,}00277 \left(\frac{B}{R}\right)^2 + 6d.$$

Hierin ist B der verheizte Brennstoff in Kilogramm f. d. Stunde; R die Rostfläche der Kesselanlage in m^2; d der Durchmesser des Schornsteins in m. Wie muß diese Gleichung geändert werden, wenn Wiener Pfund und Fuß der Rechnung zugrunde gelegt sind? (1 Wiener Pfund = 0,56 kg, 1 Wiener Fuß = 0,316 m.)

810. Eine überschlägige Formel für die Höhe eines Dampfkessel-Schornsteins lautet:

$$h^{\text{meter}} = \left(\frac{7B}{40 + B}\right)^2$$

und eine andere für den Durchmesser

$$d^{\text{meter}} = 0{,}06 \sqrt{B},$$

worin B die verzehrte Brennstoffmenge in Kilogramm f. d. Stunde bedeutet. Wie ändern sich diese empirischen Gleichungen, wenn englische Pfund und Fuß der Rechnung zugrunde gelegt sind? (1 engl. Pfund = 0,454 kg, 1 engl. Fuß = 0,305 m.)

811. Nach den Hamburger Normalien für Dampfkessel rechnet man den Durchmesser des Schraubenkerns nach der empirischen Gleichung

$$d^{\text{cm}} = 0{,}045 \sqrt{P} + 0{,}5,$$

worin P den Druck auf den Kern in Kilogramm darstellt. Wie ändert sich diese Gleichung, wenn die Rechnung auf englische Zoll und Pfund bezogen wird? (1 engl. Pfund = 0,454 kg, 1 engl. Zoll = 2,54 cm.)

812. Die Geschwindigkeit der Heizgase in den Heizkanälen für Dampfkessel wird nach der Gleichung gerechnet:

$$v^{m/s} = \frac{B}{R} \frac{r}{3600\,a}.$$

Hierin ist B die verheizte Kohlenmenge in Kilogramm f. d. Stunde, R die Rostfläche in m^2, r die aus einem Kilogramm Kohle gebildete Gasmenge in m^3, a eine Verhältniszahl. Welche Dimension besitzt die Zahl 3600 und wie ändert sie sich, wenn das Wiener Pfund und der Wiener Fuß als Einheiten eingeführt werden?

813. Für die Ermittlung des notwendigen Querschnitts eines Sicherheitsventils dient die Gleichung

$$f = 15\sqrt{\frac{v}{p_0}}.$$

Hier ist: f der Querschnitt des Ventils in mm^2 für 1 m^2 Heizfläche; p_0 der Dampf-Überdruck in Atmosphären; v das Volumen von 1 Kilogramm Wasserdampf in Liter. Wie wird diese Gleichung zu lauten haben, wenn alle Größen auf m bezogen werden, und wie wird sie lauten, wenn alle Größen auf mm bezogen werden?

814. Der Luftwiderstand für die Stirnfläche einer Lokomotive kann nach Versuchen angenommen werden (v. Borries, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1904)

$$W = 0{,}0052\,V^2,$$

wenn W den Widerstand für eine Tonne auf Laufachse und für 1 m^2 Stirnfläche, V die Geschwindigkeit in Kilometer für die Stunde bezeichnet. Wie ändert sich die Zahl, wenn alle Größen der Gleichung in Kilogramm, Meter und Sekunde ausgedrückt werden?

815. Der Widerstand einer Scheibe, die in Luft bewegt wird, ist, abgesehen von einer Erfahrungszahl ξ, von der Fläche der Scheibe, der Dichte der Luft und der Geschwindigkeit abhängig. Man ermittle die Potenzen dieser Abhängigkeit.

816. Die Leistung der Luftschraube eines Aeroplans ist vom Halbmesser der Schraubenflügel, der Winkelgeschwindigkeit der Schraube und der Luftdichte abhängig. Man ermittle die Potenzen dieser Abhängigkeit.

Resultate und Lösungen.

1. Graphisch: Wähle einen Kraftmaßstab (z. B. 2 kg = 1 cm), trage die Kräfte in ihrer Richtung auf und ziehe die Schlußlinie des Kraftzuges.

Analytisch: Wähle ein beliebiges Achsenkreuz (z. B. P_1 als die eine Achse), bilde die Teilkräfte von P_1 bis P_5 nach diesen Achsen und addiere dieselben. Sind diese Summen A und B, dann ist

$R = \sqrt{A^2 + B^2} = 5{,}66$ kg, $\operatorname{tg}(RP_1) = \frac{B}{A}$, $\sphericalangle (RP_1) = 57^0\,50'\,2''$.

2. Graphisch: Zeichnen des Kraftzuges und seiner Schlußlinie (Kraftmaßstab nicht nötig).

Analytisch wie in 1. P_3 ist als Achse zu wählen. Es ist $R = 6\,P_1$ in Richtung von P_3.

3. Aus $P_1 : P_2 : P = \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 : \sin\alpha$ wird

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg}\alpha_1 - \frac{P_1 - P_2}{P} \cdot \frac{1}{\sin\alpha_1};$$

$\alpha = 60^0\,50'\,5''$; $P_1 = 209{,}67$ kg; $P_2 = 109{,}67$ kg.

4. Suche die Mittelkraft der sechs Kräfte mittelst Kraftzug, nehme den neuen Angriffspunkt auf der Mittelkraft an und zeichne über ihr als Hypotenuse ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck.

5. Die Grundlinie aller Kraftdreiecke ist P selbst. Die dritten Ecken erfüllen einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Verlängerung von P liegt und der die Strecke P im inneren und äußeren Verhältnis 1 : 2 teilt.

6. Aus $P_1 : P_2 : P = \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 : \sin\alpha$ folgt $4\sin\alpha_1 = 3\sin\alpha_2$ und sodann aus $\alpha_2 = 2\,\alpha_1$: $\alpha_1 = \sphericalangle(P_1\,P) = 48^0\,11'\,22{,}6''$, $\alpha_2 = \sphericalangle(P_2\,P) = 96^0\,22'\,45{,}2''$. Endlich aus $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$:

$$P_1 = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha}\,P = 1{,}7143\,P$$

und ebenso $P_2 = 1{,}2857\,P$.

7. Aus $P_1 = P\frac{\sin x}{\sin\alpha}$, $P_2 = P\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}$, $\alpha = \alpha_1 + x$ folgt:

$$S = P\frac{\cos\frac{\alpha_1 - x}{2}}{\cos\frac{\alpha_1 + x}{2}}; \; S_{min} = P \text{ für } x = 0; \; S_{max} = \infty \text{ für } x = 180^0 - \alpha_1.$$

8. Aus $P^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos\alpha$ folgt:

$$P_1 = \frac{P}{\sqrt{1 + m^2 + 2\,m\cos\alpha}} = 6 \text{ kg},$$

$$P_2 = \frac{m\,P}{\sqrt{1 + m^2 + 2\,m\cos\alpha}} = 15 \text{ kg},$$

$\alpha_1 = 28^0\,51'\,57''$, $\alpha_2 = 11^0\,8'\,3''$.

10. Mittelkraft $= P$ in der Diagonale DF. [Man füge in DF zwei sich tilgende Kräfte $= P$ hinzu.]

11. Mittelkraft $R = \sqrt{16\,h^2 + r^2}$, $h =$ Höhe der Pyramide, $r =$ Halbmesser des dem Fünfeck umschriebenen Kreises. R trifft die Grundfläche in jener Symmetrale, welche die kraftfreie Kante schneidet, $\frac{5}{4}r$ von der Ecke entfernt. [Füge in der kraftfreien Kante zwei sich tilgende Kräfte $= P$ hinzu.]

12. $R = 15{,}78$, $\sphericalangle(R\,X) = 82^0\,43'\,6{,}5''$, $\sphericalangle(R\,Y) = 152^0\,30'\,31''$, $\sphericalangle(R\,Z) = 116^0\,20'\,3{,}5''$.

13. Die Teilkräfte liegen in einer Ebene.

$$P_1 = \frac{P}{\sqrt{3}},\; P_2 = \frac{2\,P}{\sqrt{3}},\; P_3 = P\sqrt{3};\; \sphericalangle(P_1 P) = 150^0,$$

$$\sphericalangle(P_2 P) = -90^0,\; \sphericalangle(P_3 P) = 30^0.$$

14. $P_1 = 0{,}2673\,P$, $P_2 = 0{,}5346\,P$, $P_3 = 0{,}8019\,P$; $\sphericalangle(P_1 P) = 74^0 29'\,55''$, $\sphericalangle(P_2 P) = 57^0\,41'\,18''$,
$\sphericalangle(P_3 P) = 36^0\,41'57''$.

15. $P_1 = P\,\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}$. [Zeichne das sphärische Dreieck über die drei Kräfte P; die Mittelkraft geht durch den Mittelpunkt dieses gleichseitigen Dreiecks.]

16. Auf M wirkt eine Kraft $= 4\,k\,.\,MA$ in der Richtung nach A, wenn k die Kraft des elastischen Fadens für die Einheit seiner Länge ist. [Wähle M als Mittelpunkt eines Koordinatenkreuzes, dessen Achsen den Seiten des Quadrates parallel sind.]

17. Ist $dM = \mu dx$ ein Massenelement des Stabes, μ die Masse für die Längeneinheit, x der Abstand von m, so ist die gesuchte Gesamtanziehung

$$R = \int_a^{a+1} \frac{k m dM}{x^2} = k\mu m \int_a^{a+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{kMm}{a(a+1)}.$$

Hierin ist k die Anziehung der Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung.

18. Nennt man $dM = \mu dz$ ein Massenelement des Stabes, μ seine Masse für die Längeneinheit, $PC = z$ den Abstand des Massenelementes von der Mitte des Stabes, ferner

$$\sphericalangle PmC = \varphi, \quad Pm = x,$$

so ist die gesuchte Gesamtanziehung

$$R = \int \frac{k m dM}{x^2} \cos\varphi = k m \mu a \int \frac{dz}{x^3},$$

und da
$$x^2 = a^2 + z^2:$$

$$R = 2 k m \mu a \int_0^{l/2} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{kMm}{ab},$$

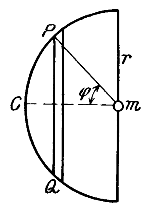
wenn $mA = mB = b$ gesetzt wird.

19. Ist $dM = \mu . r d\varphi$ ein Massenelement in P, die ganze Masse $M = \mu r . 2\alpha$, ferner $\sphericalangle PmC = \varphi$, so wird die gesuchte Gesamtanziehung

$$P = \int \frac{k m dM}{r^2} \cos\varphi = \frac{k m \mu}{r} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\varphi \, d\varphi$$

und
$$P = \frac{kMm}{r^2} . \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

20. Lösung ähnlich wie vorher. Ein unendlich dünner Flächenstreifen PQ der Halbkugel besitzt die Masse



$$dM = \mu . 2 r \sin\varphi\pi . r d\varphi$$

und erleidet von m die Anziehung:

$$dP = \frac{dM}{r^2} m k \cos\varphi$$

in Richtung Cm. Die gesamte Anziehungskraft liegt in Cm und ist:

$$P = \frac{mk}{r^2} \int_0^{\pi/2} dM \cos\varphi = \frac{k}{2r^2} Mm.$$

21. $x = \frac{G}{k}$.

22. $x = \frac{a\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}$.

23. Die beiden Gleichgewichtslagen liegen in $m_1 m_2 = a$ und sind von dem Mittelpunkt dieser Strecke um $\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{k_1}{k_2}}$ entfernt. Das Gleichgewicht ist unmöglich, wenn $a < 2\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$.

26. Es ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{p}$ und $\sin\varphi = \frac{p}{l}$, woraus $\sin^2\varphi = \cos\varphi$, $\varphi = 51^0 50'$; $S = G(1 + \cos\varphi) = 1{,}618\,G$.

27. $x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.
[Projiziere die drei Anziehungskräfte auf die Koordinatenachsen und setze die Summe der Teilkräfte gleich Null.]

28. $2x^3 = r^3$, $r^2 = a^2 + x^2$, woraus $x = 1{,}30a$.

29. $D = \frac{3S}{\sqrt{8}}$, $D_1 = S\left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$.
[Schneide das Seil oben und an den Seiten durch und setze jede Walze für sich ins Gleichgewicht.]

30. $AC : CB = G^2 + Q^2 - P^2 : G^2 + P^2 - Q^2$.

31. $\frac{P}{Q} = \sqrt{4 - \frac{a^2}{b^2}}$ (die Spannung im Seil ist Q).

32. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$, $D = G$. [Projiziere die Kräfte auf D und senkrecht dazu.]

33. $P = G\frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$, $D = G\frac{1 + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$ (wie vorher).

34. Gleichgewicht findet statt, wenn $CM = \sqrt[3]{\frac{kr}{G}}$ und $CM = 2r$; dem entsprechen $W = G$ und $W = \frac{k}{4r^2} - G$. [Projiziere die Kräfte auf die Tangente und Normale von M.]

35. An allen Punkten des Halbkreises; überall ist $W = 2kr$ (Lösung wie vorher).

36. $b:h = 0{,}766$. [Projiziere die drei Kräfte auf die Höhe des Dreiecks.]

37. Ist a die Dreiecksseite, so ist $r_1 = 0{,}7265\,a$, $r_2 = 0{,}6009\,a$, $r_3 = 0{,}4410\,a$.

38. $a^3 + b^3 = abc$, $W = \frac{k}{\sqrt{a^4 + b^4}}$. [Projiziere die Kräfte auf die Gerade und senkrecht dazu.]

39. Hat die Parabel den Halbparameter $p = \frac{G}{k}$, so ist G an allen Stellen im Gleichgewicht; sonst nur im tiefsten Punkt. [Projiziere die Kräfte auf die Tangente in G.]

40. $k = \frac{Ghl^3}{4(b^2 - h^2)}$, $W = \frac{Gbl}{b^2 - h^2}$; unmöglich, wenn $b \leqq h$. [Projiziere die Kräfte auf AB und senkrecht dazu.]

41. Für $MM_1 = \frac{a}{2}$; $W = bk$.

42. $z = \frac{x}{4}$; im besonderen $x = 4a$.

43. $\sin\varphi_1 : \sin\varphi_2 = G_2 : G_1$. [Bringe in jedem Punkt die gleiche Fadenspannung an und projiziere die Kräfte jedes Punktes auf seine Tangente.]

44. Die beiden Gleichgewichtslagen von M liegen in einer Geraden, die durch den Mittelpunkt des Kreises parallel zu $M_1 M_4$ gezogen wird. Die Widerstände an diesen zwei Stellen sind $W = 5{,}071\,ka$ bzw. $W = 9{,}071\,ka$. [Projiziere die Kräfte des Punktes auf die Kreistangente und Kreisnormale.]

45. In den Ecken des Sechsecks und in den Halbierungspunkten seiner Seiten.

46. $H = G\frac{y}{x}$, $D = \frac{G}{x}\sqrt{x^2 + y^2}$. [Projiziere die Kräfte auf Tangente und Normale des Hyperbelpunktes xy.]

47. Ist l die jetzige Länge des Fadens, so ist die in ihm auftretende Spannung der Längenänderung proportional, also

$$S = k(l - l_0),$$

ferner

$$G = 2S\cos\varphi,$$

woraus $$\cos\varphi\left(\varphi + \operatorname{cotg}\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{G}{4kr}.$$

48. $S = \frac{G}{2}\frac{l}{\sqrt{l^2 - a^2\cos^2\varphi}}$. [Die Vertikale wird immer den Seilwinkel halbieren.]

49.
$$S_1 = \frac{Gl}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - a^2}} + \frac{\sin\varphi}{a}\right],$$
$$S_2 = \frac{Gl}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - a^2}} - \frac{\sin\varphi}{a}\right].$$

50. m wird auf der Höhe des Dreiecks im Gleichgewicht sein. Nennt man h_1 und h_2 die Abstände des Punktes m von der Grundlinie und Spitze, so ist zunächst nach Aufgabe 18 die Gesamtanziehung der Grundlinie
$$R = \frac{k m \mu a}{h_1 c},$$
wenn $mB = c$ und μa die Masse der Grundlinie ist.

Bezeichnet man ferner $SP = z$, $Pm = x$, $\sphericalangle PmS = \varphi$, $\sphericalangle PSm = \alpha$, $dM = \mu dz$ das Massenelement in P, so ist die Gesamtanziehung der beiden Seiten b auf m;
$$R_1 = 2\int\frac{k m dM}{x^2}\cos\varphi = 2 k m \mu \int_0^b \frac{dz(h_2 - z\cos\alpha)}{(h_2^2 + z^2 - 2 h_2 z \cos a)^{3/2}},$$
woraus $$R_1 = \frac{2 k m \mu b}{h_2 c}.$$
Setzt man nun $R = R_1$, so wird
$$h_1 : h_2 = a : 2b.$$

51. Die Mittelkraft ist gleich Q, rechts von der gegebenen Kraft Q, ihr parallel im Abstand $\frac{P}{Q}p$. [Drehe das Kraftpaar Pp und verwandle es.]

52. Zuerst behandle man die gegebenen neun Kräfte mit Hilfe des Seilecks. Sodann suche man die Mittelkraft der drei Kräfte und setze sie mit dem resultierenden der drei Kraftpaare zusammen, wie in Aufgabe 51.

54. Suche erst die Lagen von P_{12} und P_{34} aus den gegebenen Verhältnissen, zerlege sodann P in diese beiden, sodann P_{12} in P_1 und P_2, P_{34} in P_3 und P_4.

55. Suche die Mittelkraft der drei gegebenen Kräfte und zerlege sie in die gegebenen Geraden.

56. Ist $P_1 = P_2 + P_3 = \frac{P}{2}$, so kann die Lage der Mittelkraft von P_2 und P_3 gezeichnet werden. Ihre Größe ist $\frac{P}{2}$.

57. Ist z. B. die Lage von P_1 und P_2 gegeben, so ist wegen $P_1 : P_2 = 1 : 2$ auch die Lage ihrer Mittelkraft P_{12} bekannt, und wegen $P_{12} = P_3 = \frac{P}{2}$ auch die Lage von P_3 zu ermitteln.

58. Ein Kraftpaar, dessen Moment gleich der doppelten Polygonfläche ist.

59. Alle drei Teilkräfte sind gleich P; ihre Richtungen sind BC, DC, DA.

60. Die Mittelkraft ist 2 S, vertikal aufwärts, rechts vom Quadrat, um S von dessen Mittelpunkt entfernt.

61. Mittelkraft 7,14 kg, ihre Gleichung: $y = 3{,}67\, x - 5{,}22$; Drehungssinn gegen den Uhrzeiger.

62. Mittelkraft 2 P, Richtung von CD, außerhalb des Sechsecks, $\frac{1}{2}$ AC von CD entfernt.

63. Mittelkraft $= -$ 4 kg, ist 19,25 m von P_1, 6,25 m von P_5 entfernt und ihnen parallel.

64. Entweder $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_3 = \frac{n^2+3}{4\,n}$, $\cos\alpha_2 = \frac{n^2-3}{2\,n}$ oder $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{n^2+3}$, $\cos\alpha_2 = n$. [Projiziere die drei Teilkräfte auf P und senkrecht zu P; bilde überdies die Momente um A_2.]

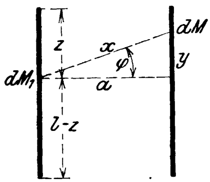
65. $P : Q = 5{,}8284$, Mittelkraft 6,8284 Q.

66. Ein Kraftpaar mit dem Moment $\mathbf{M} = 12{,}0288\ k r^2$. [Rechne die genaue Länge der Fäden nach der Verdrehung; ihre Kräfte wirken dann tangentiell an die Walze.]

67. $R = P\sqrt{3}$, Richtung BA.

68. Der Mittelpunkt liegt zwischen C und O, 0,526 a von C entfernt; a = Fünfeckseite. [Drehe die fünf Kräfte um 90°, suche ihre Mittelkraft und deren Schnitt mit O C.]

69. Der Mittelpunkt liegt außerhalb des Dreiecks auf P_1, um 3,732 a von A entfernt. [Drehe das Kraftsystem nach rechts und nach links, jedesmal um 60^0, suche die beiden Mittelkräfte und bringe sie zum Schnitt.]



70. Die Gesamtanziehung der rechten Seite auf die Punktmasse links dM_1 in Richtung von a ist

$$\int \frac{k\,dM\,dM_1}{x^2}\cos\varphi \qquad \text{oder mit}$$

$$dM = \mu\,dy,\quad \cos\varphi = \frac{a}{x},\quad x^2 = a^2 + y^2:$$

$$a\,k\,\mu\,dM_1 \int\limits_{-z}^{l-z} \frac{dy}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{k\,\mu\,dM_1}{a}\left[\frac{l-z}{\sqrt{a^2+(l-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right].$$

Setzt man $dM_1 = \mu\,dz$ und integriert von $z = 0$ bis $z = l$, so erhält man die Gesamtanziehung

$$R = \frac{2k\mu^2}{a}\int\limits_0^l \frac{z\,dz}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{2kM^2}{a\,l^2}\left(\sqrt{a^2+l^2} - a\right),$$

worin $M = \mu\,l$ die Masse einer Seite ist.

71. $\sin\varphi = \frac{a}{b}\cdot\frac{G}{G+Q}$, $OM = b$, Kugelhalbmesser $= a$.

[Setze die Summe der Momente um O gleich Null.]

72. Druck in $A = G\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{cotg}^2\alpha}$,

Druck in $B = G\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\alpha$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$.

[Löse den Druck im Gelenk in einen vertikalen und horizontalen Teil auf.]

73. $P = G\frac{b\cos\alpha\sin\beta}{a\cos(\beta-\alpha)}$, $A = G\left[1 - \frac{b\cos\alpha\cos\beta}{a\cos(\beta-\alpha)}\right]$,

$$B = G\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}.$$

[Bilde die Momente um A und die Horizontal- und Vertikalprojektionen der Kräfte.]

74. $P = \frac{5}{6} \gamma l r^2 \operatorname{tg} \varphi$. (Bilde die Momente um O.)

75. $S = G \frac{\cos \alpha}{2 \sin (\alpha - \omega)}$. [Zeichne die Drücke in A und B und bilde die Momente der Kräfte um deren Schnittpunkt.]

76. $\cos \varphi = \frac{1}{8r} \left[a + \sqrt{a^2 + 32 r^2} \right]$, $A = G \operatorname{tg} \varphi$, $C = G \frac{a}{2r}$.

77. $S = \frac{G\sqrt{2}}{4} \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right) = 0{,}203\ G$, $B = 0{,}868\ G$.

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{9\pi + 4}{3\pi - 4}.$$

[Zerlege den Druck in B in einen horizontalen und vertikalen Teil.]

78. $P = G \sin \frac{\alpha}{2}$, $A = G \cos \frac{\alpha}{2}$, $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. [Die Spannung in BC ist P; bilde die Momente um A.]

79. Es sind drei Lösungen möglich:

I. $\varphi = 0$, $A = B = \frac{G}{\sqrt{2}}$,

II. und III. $\cos \varphi = \frac{h}{3a}$, $A = \frac{G}{\sqrt{2}} (\cos \varphi \mp \sin \varphi)$,

$$B = \frac{G}{\sqrt{2}} (\cos \varphi \pm \sin \varphi).$$

[Wähle die Druckrichtungen in A und B als Achsenkreuz.]

80. $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{p}{4a}}$, $A = G \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi/_2}$, $F = G \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, p = Halbparameter. [Bilde die Momente um A und benütze die Polargleichung der Parabel $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$, worin $AF = r$.]

81. $S = G \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$, $W = G$, $\varphi = 2\beta$.

82. $A = G \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$, $B = G \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$.

83. $\varphi = 30^0$. [Bilde die Momente um O.]

84. $\operatorname{tg} \psi = \frac{G_1}{G} \operatorname{cotg} \alpha$, $D = (G + G_1) \cos \alpha$, $D_1 = (G + G_1) \sin \alpha$, $S = \sqrt{G^2 \sin^2 \alpha + G_1{}^2 \cos^2 \alpha}$. [Wähle AOB als Achsenkreuz.]

85. Man erhält für z die Gleichung mit $k = \frac{1}{r}$:

$$z^4 - 2z^3(k \sin\varphi + \cos\varphi) + z^2[(k^2 - 1)\sin^2\varphi + k\sin 2\varphi] +$$
$$2z\cos\varphi(k\sin\varphi\cos\varphi + 1) - \cos^2\varphi(k^2\sin^2\varphi + 1 + k\sin 2\varphi) = 0.$$

[Bilde die Momente um den Mittelpunkt der Walze und projiziere die Kräfte auf die Stabrichtung.]

86. Der Druck in B ist senkrecht zum Stab und hat die Größe $G\frac{1}{a}\cos^2\alpha$.

Der Druck in O besteht aus einem horizontalen Teil $G\frac{1}{a}\sin\alpha\cos^2\alpha$ und aus einem vertikalen Teil $G\left[1 - \frac{1}{a}\cos^3\alpha\right]$.

87. Die Kräfte A und G, B und C bilden zwei Kraftpaare, deren Momente sich tilgen. Hieraus folgt bereits:

$$A = G,\quad B = C = G\frac{a}{b}\cos\alpha.$$

88. $x = \frac{Ga}{2Q}$.

89. Es sind zwei Lösungen möglich: I. $\varphi = 0$, $R = 0$. II. $\cos\varphi = \frac{Gb}{4Pa}$, $R = \sqrt{4P^2 - \frac{b^2}{4a^2}G^2}$. [Bringe in A den Druck R nach beiden Seiten normal zu EC an und bilde die Momente um C und D.]

90. $x = \frac{a\sqrt{G_2} + b\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_1 + G_2}}$. [Das Fußende A jedes der beiden Stäbe erhält einen horizontalen und einen vertikalen Druck; die horizontalen Teile müssen einander gleich sein.]

91. $\cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{2l}}$. [In C üben die Stäbe horizontale gleiche Drücke aufeinander aus.]

92. $S = G\frac{ar(c^2 - 2r^2)}{c^3\sqrt{c^2 - r^2}}$.

93. $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{Gb^2}{Qar} + \sqrt{\frac{b^2}{r^2} - 1}$.

94. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{G_2\operatorname{cotg}\alpha - G_1\operatorname{cotg}\beta}{G_2 + G_1}$.

95. $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{G_3 r_3 \cos\alpha_3 + G_2 r_2 + G_1 r_1 \cos\alpha_1}{-G_3 r_3 \sin\alpha_3 + G_1 r_1 \sin\alpha_1}$. [Bilde die Momente um O.]

96. $S = \frac{Q r}{2 a \sin^2\alpha} + \left(G + \frac{Q}{2}\right) \operatorname{tg}\alpha$. [Jeder Stab ist fünf Kräften ausgesetzt: der Fadenspannung, dem Druck der Walze, dem Eigengewicht, dem Bodendruck und dem horizontalen Gelenkdruck in O.]

97. $Q \gtreqless 2 G \left(1 - \frac{r}{R}\right)$. [Bringe die Drücke zwischen den Kugeln und dem Zylinder an und bilde die Momente um den rechten Fußpunkt des Zylinders.]

98. $x = l \frac{G_2}{G_1 + G_2}$, $S = l \sqrt{\frac{G_1 G_2}{l^2 - (R + r)^2}}$, R und r die Kugelhalbmesser. [Bilde die Momente um O.]

99. $\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} = \frac{r}{l}\left(\frac{P}{2Q} + 1\right)$. [Die Stäbe üben in O horizontale Drücke aufeinander aus.]

100. $\frac{G}{G_1} = \frac{l r}{a\sqrt{4 r^2 - l^2}}$; $A = 0$, $C = G_1$, $D = G + G_1$. [Der Schwerpunkt der Stange muß in C sein.]

101. $\cos\frac{\psi}{2} = \frac{G a}{Q r} \sin\varphi - \cos\varphi = \frac{G_1}{Q} \cos\alpha \cos(\alpha + \psi + \varphi)$; $OC = r$, $\sphericalangle AOB = 2\alpha$. [Die Spannung in BC ist Q. Bilde für Stab und Halbzylinder die Momente um O.]

102. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{Q r}{G a}$, $G_1 = \frac{Q}{\cos\alpha \cos(\alpha + \varphi)}$,

$$A = Q \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{2 \cos^2\alpha}, \quad B = Q \left[\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{2 \cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right],$$

$$D = G + G_1 + Q.$$

103. $\cos\varphi = \frac{G_1 r}{G a} \sin\varphi + \frac{2 r}{l} \cos 2\varphi$,

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{2 a G}{G_1 l \cos\varphi} - \operatorname{tg}\varphi,$$

$$A = G_1 \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos\varphi}, \quad C = G_1 \frac{\cos(2\varphi - \psi)}{\cos\varphi}, \quad D = G + G_1.$$

104. $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{Q r_1}{G_1 a_1}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{2}\frac{Q r_2}{G_2 a_2},$

$$\sin\psi = \frac{1}{l}\left[r_1 (1 - \sin\varphi_1) - r_2 (1 - \sin\varphi_2)\right].$$

105. Bezeichnet man $\sphericalangle BOC = \varphi$, $B_1OC_1 = \varphi_1$, so ist $a = h(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi_1)$ und aus der Gleichheit der Horizontaldrücke in O folgt: $G l \sin 2\varphi \sin\varphi = G_1 l_1 \sin 2\varphi_1 \sin\varphi_1$. Hieraus können φ und φ_1 gerechnet werden; es ist dann

$$x = h \operatorname{cotg}\varphi, \quad x_1 = h\operatorname{cotg}\varphi_1.$$

106. $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{2G}{Q}\right).$

107. Zunächst ist aus den in Aufgabe 87 angeführten Gründen:

$$A_1 = G_1, \quad A_2 = G_2, \quad B_1 = C_1, \quad B_2 = C_2.$$

Bildet man die Momente der Kräfte, welche den Zylinder beanspruchen (Eigengewicht, Drücke der Stäbe und der Unterlage) um seinen Mittelpunkt, so folgt überdies

$$B_1 = C_1 = B_2 = C_2.$$

Bildet man die Momente der Kräfte des Stabes A_1C_1 um A_1, so folgt $\quad G_1 . l_1 \cos\varphi = C_1 . 2r$ (Moment des Kraftpaares)
und für den andern Stab

$$G_2 . l_2 \sin\varphi = C_2 . 2r,$$

woraus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{G_1 l_1}{G_2 l_2}$$

und jeder der vier Drücke

$$\frac{1}{2r}\frac{G_1 G_2 l_1 l_2}{\sqrt{G_1 l_1^2 + G_2 l_2^2}}.$$

108. $y_s = \frac{b^2}{a + 2b}.$

109. $y_s = 0{,}369\,a.$

110. $y_s = \frac{b^2 + c^2}{2(a + b + c)}, \quad x_s = \frac{a(a + 2c)}{2(a + b + c)}.$

111. $y_s = 0{,}789\,a.$

112. $y_s = \frac{2b^2 + ab\pi + a^2}{4b + 2a + a\pi}.$

113. $y_s = \frac{2b(b\sin\alpha + a\alpha) + a^2(1 - \alpha\operatorname{cotg}\alpha)}{4(b + c)\sin\alpha + 2a\alpha}.$

114. $y_s = \frac{a}{4(\alpha + \sin^2 \alpha)}$.

115. $x_s = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2bc}{2(a + b + c)}$, $y_s = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{\pi(a + b + c)}$.

116. $y_s = \frac{1}{2}(a - b)\left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{cotg} \alpha\right)$, $x_s = \frac{1}{2}(a - b)$.

117. $x_s = 0$, $y_s = \frac{2r}{\pi}$.

118. $x_s = r \frac{\sin 2\alpha(1 + 2\cos\alpha) - \pi \sin^2 \alpha + 2\alpha}{2N\cos\alpha}$

$y_s = r \frac{\sin 2\alpha(1 + 2\sin\alpha) + \pi \sin^2 \alpha - 2\alpha}{2N\sin\alpha}$

$N = \pi \sin\alpha(1 + \cos\alpha) + 2\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

121. $x^2 + \frac{4}{3}x = 2 + \frac{8\pi}{27}$. [Der Halbmesser des kleinen Kreises ergibt sich gleich $\frac{R}{3}$.]

122. $x_s = y_s = \frac{5}{12}a$.

123. $y_s = \frac{7}{18}a$.

124. $y_s = \frac{3}{26}a(4 - \sqrt{3})$.

125. $y_s = 5{,}95$.

126. $y_s = 8{,}89$.

127. $y_s = 14{,}88$.

128. $y_s = 6{,}19$.

129. $y_s = 19{,}8$.

130. $x_s = 9{,}87$, $y_s = 50{,}15$.

131. $x_s = 2{,}21$, $y_s = 3{,}88$.

132. $x_s = 4{,}86$, $y_s = 4{,}46$.

133. $y_s = 11{,}99$.

134. $x_s = -\frac{e r^2}{R^2 - r^2}$.

135. $x_s = y_s = a\frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi}$.

136. $x_s = \frac{4}{3}\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\,\frac{\sin \alpha/_2}{\alpha}$.

137. $y_s = 23{,}8$.

138.

$$x_s = a\,\frac{\sin^2\alpha \operatorname{cotg}\beta\,(2\beta - \sin 2\beta) - \sin^2\beta \operatorname{cotg}\alpha\,(2\alpha - \sin 2\alpha)}{\sin^2\beta\,(2\alpha - \sin 2\alpha) - \sin^2\alpha\,(2\beta - \sin 2\beta)}.$$

139. $x_s = y_s \doteq \frac{4\,r\,(r + \delta) + 2\,(\alpha - \delta)\,(2\,r + a) + \frac{4}{3}\delta^2}{\pi\,(2\,r + \delta) + 8\,(a - \delta)}$.

[Angenähert, wenn man die Ansätze als Rechtecke behandelt.]

140. $x_s = 2{,}14,\ y_s = 1{,}18$.

141. $x_s = \frac{5}{6}\,r,\ y_s = \frac{14}{9\pi}\,r$.

142. $x_s = r\left(\frac{16}{3\pi} - 1\right),\ y_s = \frac{4\,r}{\pi}$.

143. $x_s = \frac{3}{5}\,r,\ y_s = \frac{4\,r}{\pi}$.

144. $y_s = \frac{6\,R^3 - 8\,R\,r^2\pi + 8\,r^3}{9\sqrt{3}\,R^2 - 12\,r^2\pi}$.

145. $x_s = \frac{\pi\,(R - r)\,(R + r - a)}{2\,b + \pi\,(R + r - a)}$.

$y_s = \frac{(R - r)\,[\pi\,b + 4\,(R + r - a)]}{2\,b + \pi\,(R + r - a)}$.

146. $x_s = 9{,}76,\ y_s = 2{,}54$.

148. $y_s = \frac{2\,a}{3} \cdot \frac{\sin^2\alpha\,(1 + 2\cos^2\alpha)}{4\,\alpha - \sin 4\,\alpha}$.

149. $x = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)$.

150. $x_s = y_s = \frac{1}{2}\,\frac{(a - c)(b - c)}{a + b - c}$.

151. In einer Geraden; es ist $O\,S_2 : OS_1 = 2 : 3$.

152. Parabel-Segment: $x_s = \frac{3}{5}\,a,\ y_s = \frac{3}{8}\,b$.

Ergänzungsfläche: $x_s = \frac{3}{10}\,a,\ y_s = \frac{3}{4}\,b$.

153. Mache $O A = A M$, $A B \| O X$, dann ist $A S = \frac{2}{5} A B$.

154. $x_s = \frac{4a}{3\pi}$, $y_s = \frac{4b}{3\pi}$; a, b Halbachsen der Ellipse.

155. $x_s = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a^2 b - a_1{}^2 b_1}{a b - a_1 b_1} = 11{,}51$ cm.

156. $x_s = \frac{2}{3} \frac{a}{\pi - 2}$, $y_s = \frac{2}{3} \frac{b}{\pi - 2}$.

157. $x_s = y_s = \frac{256}{315} \cdot \frac{a}{\pi}$.

158. $x_s = \frac{a}{5}$, $y_s = \frac{b}{5}$.

159. $x_s = \frac{a\pi}{2} + \frac{8a}{9\pi}$, $y_s = \frac{5}{6} a$.

160. $x_s = \frac{5}{6} a$, $y_s = 0$.

161. $x_s = \frac{a}{4}$, $y_s = 0$,

162. $x_s = \frac{\pi}{2}$, $y_s = \frac{\pi}{8}$.

163. $\psi = 56^0\, 39\, {}^1/{}_2{}'$. [Der Schwerpunkt der Fläche muß vertikal unter A liegen.]

164. $\operatorname{tang} \varphi = 2{,}172 \frac{r}{l}$. [Der Schwerpunkt des Zylinders muß in der Vertikalen durch O liegen.]

165. A = 29,5 kg, B = 31,5 kg.

166. A = 155,5 kg, B = 189,5 kg.

167. A = 2200 kg, B = 2800 kg.

168. $x = \frac{n\, l}{m + n} - \frac{P_2 a + P_3 (a + b)}{P_1 + P_2 + P_3}$.

169. $\operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \alpha$; $W = G \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha}$.

[Bilde die Momente um A, sowie die vertikalen Teilkräfte und setze beide Summen gleich Null.]

170. Suche aus P zuerst den Gelenkdruck in C, sodann aus C die Belastung Q.

171. Nennt man A und B die an den Enden der Hebel ausgeübten Bremskräfte, C die Spannung des kleinen Verbindungsstückes, so bestehen die Gleichungen

$$Aa = Cc = Bb,\ A(a - c) = S_1 c,\ B(b - c) = S_2 c,$$

woraus

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a(b-c)}{b(a-c)}.$$

172. Suche den Schnitt von AC und BD; vertikal darunter muß die Last angebracht werden. Das Biegungsmoment in O ist:

$$\mathsf{M} = Pl\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

173. $P:Q = 9:2$; $B = P$, $D = Q$. [Bilde die Momente um C.]

174. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$, $Q = \frac{2}{15}P$. [Zerlege Q in zwei Teile X in Richtung DH und Y in Richtung DF, bilde die Momente um C, woraus zunächst $2P = 12X + 9Y$; sodann mache $Q^2 = X^2 + Y^2$ zu einem Minimum, d. h. $XdX + YdY = 0$; es wird $X = \frac{8}{75}P$, $Y = \frac{2}{25}P$, woraus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{Y}$ und Q zu rechnen sind.]

175. Nennt man $AB = l$, $OE = p$, $OD = r$, $AC = a$, $BC = b$, ferner x und y die Abstände der Druckrichtung R von A und B, so gelten die Gleichungen:

$$Rx = Q_1 a,\ Q_1 r = P_1 p;\ Ry = Q_2 b,\ Q_2 r = P_2 p,$$

hierin sind Q_1 und Q_2 die Spannungen in CD. Hiezu kommt noch $x + y = l\sin\alpha$. Man erhält:

$$R = \frac{p(P_1 a + P_2 b)}{rl\sin\alpha},\quad x = \frac{P_1 a}{P_1 a + P_2 b} l\sin\alpha$$

und analog y.

176. $B = G\frac{a}{b}\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$, $\varphi_1 = \alpha$;

$$C = G\sqrt{1 - \frac{2a}{b}\cos\gamma + \frac{a^2}{b^2}\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}},$$

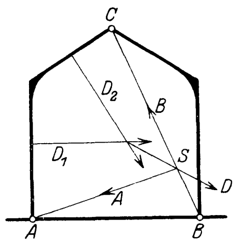
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{b - a\cos\gamma}{a\cos\gamma\operatorname{cotg}\alpha}.$$

177. $V = \frac{G}{2} + q\sqrt{b^2 + h^2} = 325$ kg,

$$H = \frac{b}{2h}[G + q\sqrt{b^2 + h^2}] = 366{,}7 \text{ kg}, \; R = \sqrt{H^2 + \frac{G^2}{4}} = 430{,}2 \text{ kg},$$

Neigung von R gegen die Wand: $\alpha = 58^0\,30'$. [Betrachte A, B und C als Gelenke, bringe die horizontalen und vertikalen Drücke in ihnen an und benütze die Gleichgewichtsbedingungen für AB und BC.]

178. Es sind $D_1 = abq$, $D_2 = bcq \sin\gamma$ die Normal-Drücke des Windes auf die Teile a und c der Zeltwand AC. Ihre Resultante sei D. Da der Auflagerdruck in B die Richtung nach C haben muß, ist der Schnittpunkt S für das Gleichgewichtssystem A, B und D gegeben und das Kraftdreieck kann gezeichnet werden.



179. Wenn der Druck in E null sein soll, muß die Vertikale durch S durch den Schnitt der Stangen AC und BD gehen. Beide Stangen üben gleichen Widerstand W in ihrer Richtung aus; es ist dann das Gewicht der mittleren Stange

$$G = 2\,W \sin\alpha$$

und wenn man die Momente um D bildet:

$$W.\overline{CD}.\sin\alpha = G.\overline{SD}.\sin(2\alpha - 90^0)$$

woraus

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

180. $\frac{1}{2} + \frac{G}{G_1}\frac{a}{2} > x > \frac{1}{2} - \frac{G}{G_1}\frac{a}{2} - a$. [Bilde die Momente um die beiden möglichen Kipp-Punkte des Achtecks am Boden.]

181. $\frac{G}{Q} + 3 > n > \frac{1}{3}\left(1 - \frac{G}{Q}\right)$. [Bilde die Momente um die beiden möglichen Kipp-Punkte des Sechsecks am Boden.]

182. Der Druck W zwischen Bockgerüst und Stange ist zu letzterer senkrecht; er muß durch B gehen, wenn in A kein Druck entstehen soll. Dann ist OCB ein bei C rechtwinkliges Dreieck, daher $x = OA = a$. Das Gleichgewicht der Stange verlangt dann, daß

$G l \cos 30^0 = W . 2 a \cos 30^0$, das Gleichgewicht in B gibt $K = W \cos 60^0$; daraus wird $K = \frac{G l}{4 a}$.

183. $A O_1 : O_1 C = 5 : 2$. [Bringe die Drücke in A, B, C an und bilde die Momente um O_1 und O_2; man findet zunächst $A = B = \frac{G}{\sqrt{3}}$, $C = G \frac{5 \sqrt{3}}{6}$, woraus obiges Verhältnis folgt.]

184. $A = \frac{6}{5} G$, $B = G$, $C = -\frac{14}{25} G$ (der Stab BC drückt nicht auf die Walze, sondern sucht sich von ihr zu entfernen); $\sin \psi = \frac{24}{25}$. [Zerlege B in einen horizontalen und vertikalen Teil und wende auf die Stäbe AB und BC die Gleichgewichtsbedingungen an.]

185. $R = \sqrt{r^2 + \frac{K}{2 \pi r \gamma}}$.

186. $\frac{x}{y} = \frac{(b + c)(3 a + b - c)}{(b + a)(3 c + b - a)}$. Der Schwerpunkt der Mauer muß über der Mitte von $a + b + c$ liegen.]

187. $x = r \sqrt{2}$. [Der Schwerpunkt des Körpers muß in O sein.]

188. $x = r \sqrt{3}$.

189. β ist eine Ellipse; ihre vertikale Halbachse ist l, ihre horizontale $2 l$. [Der Schwerpunkt des Stabes muß eine horizontale Gerade beschreiben.]

190. $x^3 = 4 \frac{\gamma}{\gamma_1} (R - r) [3 h^2 - 2 (R^2 + R r + r^2)]$. [Beachte, daß der untere Teil des Körpers, sowie die Flüssigkeit ein Zylinder ist.]

191. $x_1 = l$, $x_2 = \frac{l}{2}$, $x_3 = \frac{l}{3}$; allgemein $x_n = \frac{l}{n}$. [Beginne mit dem Gleichgewicht der obersten Stange.]

192. $a^2 + 3 \alpha^2 = b^2 + 3 \beta^2 = c^2 + 3 \gamma^2$. [Fälle von O das Perpendikel auf das Dreieck und berechne dasselbe; der Fußpunkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.]

193. $\operatorname{tg} \alpha = \left(1 + \frac{G_1}{G_2}\right) \operatorname{tg} \beta$. [Benütze die Gleichgewichtsbedingungen der Knoten G_1 und G_2 nach Anbringung der unbekannten Stabspannungen; diese sind aus der Rechnung zu entfernen.]

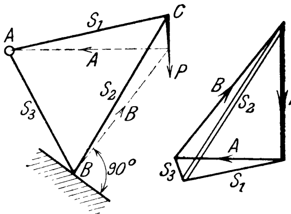
194. $x = \frac{25}{18} r$, $B = \frac{5}{3} G$, $S = \frac{4}{3} G$.

195. In A und B: $P \frac{l}{l_1}$,

in C und D: $P \frac{l}{\sqrt{a^2 + d_1^2 - d^2}}$.

(Sowohl erste wie letzte bilden je ein Kraftpaar, dessen Arm sich aus der Zeichnung ergibt.)

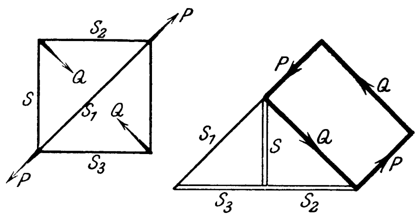
196.



197. $S = S_2 = S_3$

$$= -\frac{Q}{\sqrt{2}}.$$

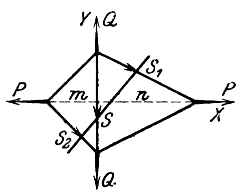
$$S_1 = P + Q.$$



198. Gleichung der Geraden S_1 in bezug auf das Achsenkreuz XY: $\frac{2y}{b} + \frac{x}{n} = 1$.

Gleichung der Geraden S_2:

$$\frac{2y}{b} + \frac{x}{m} = -1.$$



Schnittpunkt M beider Geraden:

$$x_1 = -\frac{2mn}{n-m}, \quad y_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{n+m}{n-m}.$$

Momentengleichung um M:

$$P\,y_1 + (S - Q)\,.\,(-x_1) + S_1\,.\,0 + S_2\,.\,0 = 0,$$

woraus
$$S = Q - P\frac{b}{4}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

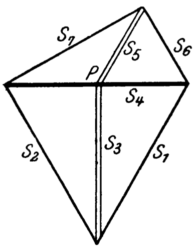
199. $Q = \frac{2\,P}{\sqrt{3}},\ W = P\sqrt{\frac{13}{3}},\ \operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3};$

$$S_1 = -\frac{P}{\sqrt{3}},\ S_2 = S_4 = \frac{2\,P}{\sqrt{3}},\ S_3 = S_5 = -\frac{2\,P}{\sqrt{3}}.$$

200. $P = 2\,Q,\ D = Q\sqrt{5},\ \operatorname{tg}\varphi = 3;$

$$S_1 = Q,\ S_2 = \frac{Q}{\sqrt{2}},\ S_3 = S_5 = -\frac{Q}{\sqrt{2}},\ S_4 = -\frac{3\,Q}{\sqrt{2}}.$$

201. $A = B = P\frac{a+b}{l},\ S = P.$



202. $S_1 = +P.$ $\quad S_2 = +P.$

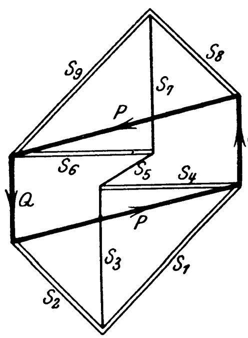
$S_3 = -\frac{P}{2}\sqrt{3}.$ $\quad S_4 = +\frac{P}{2}.$

$S_5 = -\frac{P}{2}.$ $\quad S_6 = +\frac{P}{2}.$

$S_7 = +\frac{P}{2}\sqrt{3}.$ $\quad S_8 = -0.$

$S_9 = 0.$

203. Setzt man $AB = y$, so ist:



$$y^2 = a^2 + \frac{b^2}{2} + a\,b.$$

$$Q = P\frac{b\,(a+b)}{2\,a\,y}.$$

$$S_1 = S_9 = -\frac{P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a+b}{y}.$$

$$S_2 = S_8 = -\frac{P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{y}.$$

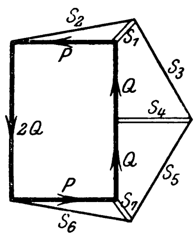
$$S_3 = S_7 = +\frac{P}{2}\cdot\frac{a+b}{y}.$$

$$S_4 = S_6 = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a+b}{y}. \quad S_5 = +P\,\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2ay}.$$

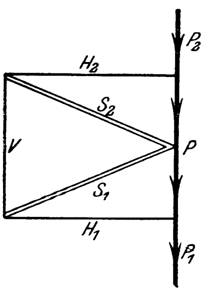
204. $$S_1 = S_7 = -P\,\frac{\sin(\alpha-60)}{\sin 2\alpha} = -\frac{3}{4}P\left(1-\sqrt{\frac{3}{8}}\right) =$$
$$= -5814 \text{ kg.}$$

$$S_2 = S_6 = +P\,\frac{\sin(\alpha+60)}{\sin 2\alpha} = +\frac{3}{4}P\left(1+\sqrt{\frac{3}{8}}\right) =$$
$$= +24186 \text{ kg.}$$

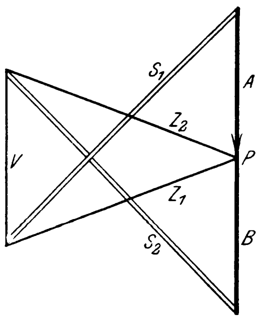
$$S_3 = S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[Q + P\,\frac{\sin(\alpha-60)\sin(\alpha+60)}{\sin 2\alpha}\right] =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[Q + P\,\frac{5}{8\sqrt{8}}\right] = +22424 \text{ kg.}$$
$$S_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left[Q + 2P\,\frac{b}{a}\sin(\alpha-60)\right] =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left[Q + \frac{P}{2}\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\right] =$$
$$= -14990 \text{ kg.}$$



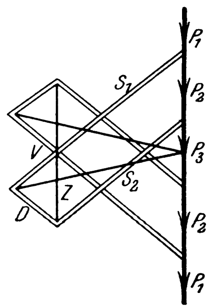
205. Auflagerdrücke:
$A = B = 600$ kg. $\quad S_1 = S_2 = -808$ kg.
$H_1 = H_2 = +750$ kg. $\quad V = P = +600$ kg.



Lösung 205.

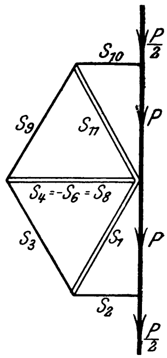


Lösung 206.

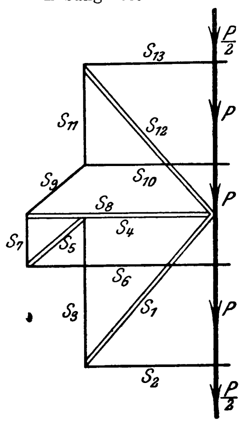


Lösung 207.

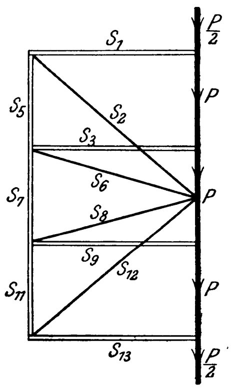
206. $A = B = 325$ kg. $\quad S_1 = S_2 = -689$ kg.
$Z_1 = Z_2 = +514$ kg. $\quad V = +325$ kg.



Lösung 208.



Lösung 209.



Lösung 210.

207. $A = B = 5000$ kg. $\quad S_1 = -7467$ kg.
$S_2 = -5333$ kg. $\quad Z = +5950$ kg.
$D = -2033$ kg. $\quad V = +4666$ kg.

208. $A = B = \frac{3}{2} P.$

$$S_1 = S_4 = S_8 = S_{11} = -\frac{2\,P}{\sqrt{3}}.$$

$$S_2 = S_{10} = +\frac{P}{\sqrt{3}}.$$

$$S_3 = S_6 = S_9 = +\frac{2\,P}{\sqrt{3}}.$$

$$S_5 = S_7 = 0.$$

209. $A = B = 2\,P.$

$$S_1 = S_{13} = -\frac{3\,P}{2 \sin \alpha}.$$

$$S_2 = S_{10} = S_{12} = +\frac{3\,P}{2} \operatorname{cotg} \alpha.$$

$$S_3 = +\frac{3\,P}{2}.$$

$$S_4 = -\frac{3\,P}{2} \operatorname{cotg} \alpha.$$

$$S_5 = -\frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

$$S_6 = +2\,P \operatorname{cotg} \alpha.$$

$$S_7 = +\frac{P}{2}.$$

$$S_8 = -2\,P \operatorname{cotg} \alpha.$$

$$S_9 = +\frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

$$S_{11} = +P.$$

210. $A = B = 2\,P.$

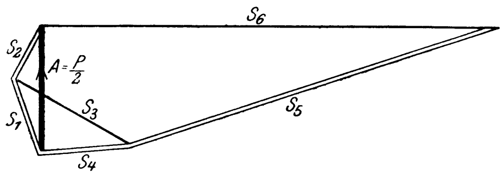
$$S_1 = S_3 = S_9 = S_{13} =$$
$$= -2\,P \frac{a}{h}.$$

$$S_2 = S_{12} = +2\,P \frac{l}{h}.$$

$$S_4 = S_{10} = 0.$$
$$S_5 = S_7 = S_{11} = -P.$$
$$S_6 = S_8 = +2P\frac{l_1}{h}.$$

211. $A = B = \frac{P}{2} = 5$ t.

$S_1 = -3{,}1623$ t. $S_2 = -2{,}2361$ t.



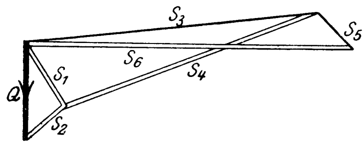
$S_3 = +5{,}5903$ t. $S_4 = -4{,}0312$ t.

$S_5 = -14{,}2304$ t. $S_6 = +17{,}5$ t.

212. $A = B = Q = 10$ t.

$$S_1 = -\frac{7\sqrt{5}}{19}Q = -8{,}238 \text{ t.}$$

$$S_2 = -\frac{\sqrt{74}}{19}Q = -4{,}526 \text{ t.}$$

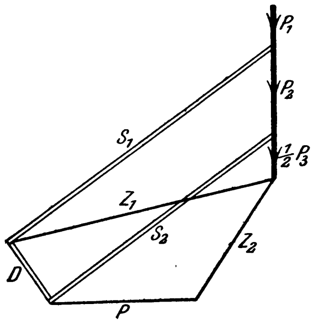


$$S_3 = +\frac{7\sqrt{101}}{22}Q = +31{,}976 \text{ t.}$$

$$S_4 = -\frac{147\sqrt{73}}{418}Q = -30{,}046 \text{ t.}$$

$$S_5 = +\frac{7\sqrt{2}}{22}Q = +4{,}50 \text{ t.}$$

$$S_6 = -3{,}5\,Q = -35 \text{ t.}$$



213. $A = B = 7{,}2$ t.

$S_1 = -\,13{,}915$ t.

$S_2 = -\,11{,}666$ t.

$D = -\,2{,}811$ t.

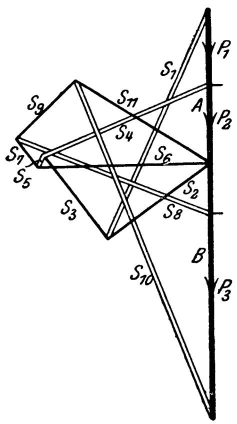
$Z_1 = +\,11{,}354$ t.

$Z_2 = +\,6{,}308$ t.

$P = +\,6{,}000$ t.

214. Rechnung: Für die Winkel findet man:

$$\alpha = 67^0\,30',\ \beta = 33^0\,41'\,24''.$$



Auflagerdrücke:

$$A = 6232 \text{ kg},\ B = 9768 \text{ kg}.$$

Spannungen: $$S_1 = -A \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} = -\,9320 \text{ kg}.$$

$$S_2 = +A \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = +\,4286 \text{ kg}.$$

$$S_3 = -\,2 S_4 \cos\alpha - P_1 (\sqrt{2} - 1) = +\,4133 \text{ kg}.$$

$$S_4 = -\frac{1}{\sin\alpha}\left[A \frac{r - h}{r - h\sqrt{2}} - \frac{P_1\sqrt{2}}{2}\right] = -\,7023 \text{ kg}.$$

$$S_5 = S_2 - S_6 \frac{r - h\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\, r \cos\alpha \sin(\alpha - \beta)} = -\,655 \text{ kg}.$$

$$S_6 = \frac{r}{r - h}\left[A - \frac{P_1\sqrt{2}}{2}\right] = +\,6852 \text{ kg}.$$

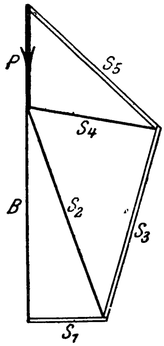
$$S_7 = S_{11} - S_6 \frac{r - h\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\, r \cos\alpha \sin(\alpha - \beta)} = +\,1777 \text{ kg}.$$

$$S_8 = -\frac{1}{\sin\alpha}\left[B \frac{r - h}{r - h\sqrt{2}} - \frac{P_3\sqrt{2}}{2}\right] = -\,8483 \text{ kg}.$$

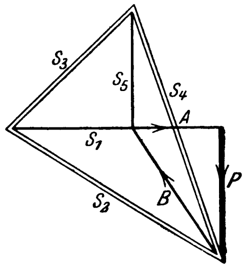
$$S_9 = -2\,S_8 \cos\alpha - P_3(\sqrt{2} - 1) = +3179 \text{ kg.}$$

$$S_{10} = -B\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} = -14\,606 \text{ kg.}$$

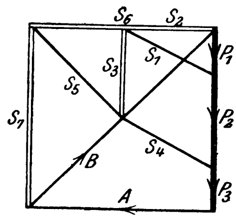
$$S_{11} = +B\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = +6718 \text{ kg.}$$



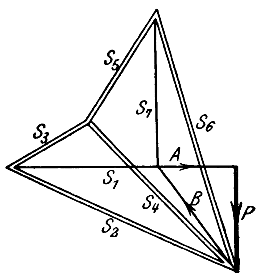
215. $A = 13{,}049$ t.
$B = 9{,}049$ t.
$S_1 = -3{,}016$ t.
$S_2 = +9{,}538$ t.
$S_3 = -7{,}176$ t.
$S_4 = +5{,}742$ t.
$S_5 = -8{,}179$ t.



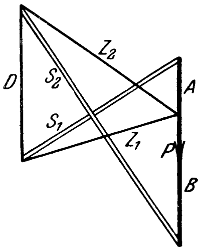
216. $A = 3{,}33$ t.
$B = 6{,}0$ t.
$S_1 = +9{,}14$ t.
$S_2 = -10{,}42$ t.
$S_3 = -8{,}22$ t.
$S_4 = -11{,}30$ t.
$S_5 = +5{,}81$ t.



217. $A = 8$ t.
$B = 11{,}314$ t.
$S_1 = +4{,}472$ t.
$S_2 = -4$ t.
$S_3 = -4$ t.
$S_4 = +4{,}472$ t.
$S_5 = +5{,}657$ t.
$S_6 = -8$ t.
$S_7 = -8$ t.



218. $A = 6$ t.
$B = 10$ t.
$S_1 = +18{,}144$ t.
$S_2 = -19{,}829$ t.
$S_3 = -7{,}453$ t.
$S_4 = -16{,}564$ t.
$S_5 = -9{,}792$ t.
$S_6 = -22{,}400$ t.
$S_7 = +13{,}581$ t.



219. $A = 600$ kg. $B = 1400$ kg.

$$S_1 = -A\frac{\cos\beta_1}{\sin(\alpha_1-\beta_1)} = -2419 \text{ kg.}$$

$$S_2 = -B\frac{\cos\beta_2}{\sin(\alpha_2-\beta_2)} = -3500 \text{ kg.}$$

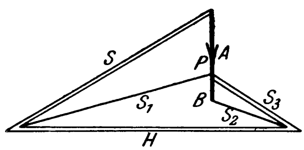
$$Z_1 = +A\frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1-\beta_1)} = +2184 \text{ kg.}$$

$$Z_2 = +B\frac{\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\beta_2)} = +2524 \text{ kg.}$$

$$D = Z_1\sin\beta_1 + Z_2\sin\beta_2 = P = 2000 \text{ kg.}$$

220. $A = P\frac{a+b}{L} = 5{,}6$ t. $B = P\frac{a}{L} = 2{,}4$ t.

$$S = -\frac{P(a+b)^2}{L\,l_1\sin\alpha} = -17{,}667 \text{ t.}$$

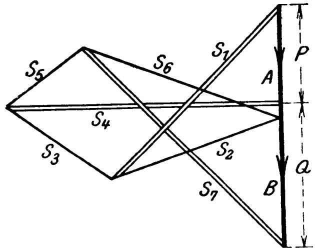


$$S_1 = \frac{P\,a(a+b)}{L\,l\sin\alpha} = +15{,}288 \text{ t.}$$

$$S_2 = \frac{P\,a^2}{L\,l\sin\alpha} = +6{,}552 \text{ t.}$$

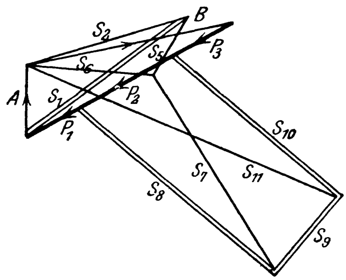
$$S_3 = -\frac{P\,a(a+b)}{L\,l_1\sin\alpha} = -7{,}571 \text{ t.}$$

$$H = -P\frac{a(a+b)}{b\,h} = -21 \text{ t.}$$



221. $A = 9{,}25$ t.
$B = 10{,}75$ t.
$S_1 = -20{,}930$ t.
$S_2 = +15{,}806$ t.
$S_3 = +12{,}259$ t.
$S_4 = -25$ t.
$S_5 = +9{,}375$ t.
$S_6 = +18{,}370$ t.
$S_7 = -24{,}324$ t.

222. Rechnung. Für die Winkel findet man:



$$\alpha = 37^0\,52'\,30''.$$
$$\beta = 19^0\,26'\,24''.$$
$$\varphi = 13^0\,25'\,11''.$$

Auflagerdrücke:

$$A = R\,\frac{\sin(\alpha + 30)}{4\cos\alpha} = 235 \text{ kg}.$$

$$B = \frac{R}{\sin\varphi}\left[\sin 30 - \frac{\sin(\alpha + 30)}{4\cos\alpha}\right] = 712 \text{ kg}.$$
$$R = P_1 + P_2 + P_3 = 800 \text{ kg}.$$

Spannungen:

Schnitt I, Drehpol D: $S_1 = -A\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} = -700$ kg.

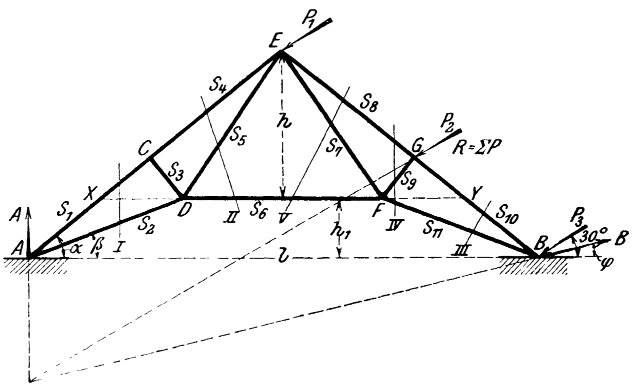
Drehpol C: $S_2 = A\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = +586$ kg.

$S_3 = 0.$

$S_4 = S_1 = -700$ kg.

Schnitt II, Drehpol X: $S_5 = \frac{h_1}{h}\,S_2 = +234$ kg.

Drehpol E: $S_6 = A\,\frac{l}{2\,h} = +422$ kg.



Schnitt III, Drehpol F:

$$S_{10} = -\frac{1}{\sin(\alpha - \beta)}\left[B \sin(\beta + \varphi) - P_3 \sin(\beta + 30)\right] = -741 \text{ kg.}$$

Drehpol G:

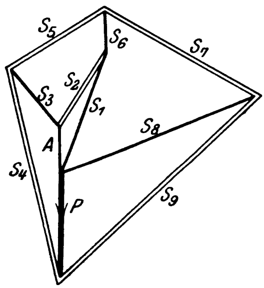
$$S_{11} = +\frac{1}{\sin(\alpha - \beta)}\left[B \sin(\alpha + \varphi) - P_3 \sin(\alpha + 30)\right] = +117 \text{ kg.}$$

Schnitt IV, Drehpol B: $S_9 = -P_2 \sin(\alpha + 30) = -371$ kg,

Drehpol F: $S_8 = S_{10} - P_2 \cos(\alpha + 30) = -892$ kg.

Schnitt V, Drehpol Y:

$$S_7 = \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)}\left[\sin(\alpha + 30)\left(P_2 \frac{h - h_1}{2h} - P_3 \frac{h_1}{h}\right) + B \frac{h_1}{h} \sin(\alpha + \varphi)\right] = +815 \text{ kg.}$$



223. Rechnung. Für die Winkel ergibt die Rechnung folgende Werte:

$\alpha = 52^0\, 17'\, 48''$

$\beta = 46^0\, 13'\, 0''$

$\gamma = 28^0\, 57'\, 18''$

$\delta = 12^0\, 58'\, 58''$

$\varepsilon = 24^0\, 1'\, 35''$

$\mu = 39^0\, 50'\, 5''$

$\psi = 142^0\, 59'\, 27''$ $\qquad \varphi = 50^0\, 28'\, 44''$

$\eta = 60^0$ $\qquad \lambda = 109^0\, 28'\, 16''$

$\xi = 75^0\, 31'\, 21''$ $\qquad \zeta = 70^0\, 12'\, 55''$.

Auflagerdrücke: $p = 4{,}86$ m, $\quad A = P\frac{p}{l} = 1945$ kg.

$$B = P\frac{p + l}{l} = 5945 \text{ kg.}$$

Spannungen:

Schnitt I, Drehpol C: $S_1 = A\frac{\cos\alpha}{\sin\delta} = +5296$ kg.

Drehpol D: $S_2 = -A\frac{\cos(\alpha + \delta)}{\sin\delta} = -3621$ kg.

Schnitt II, Drehpol E: $S_3 = B\frac{\cos(\beta + \gamma)}{\sin\gamma} = +3143$ kg.

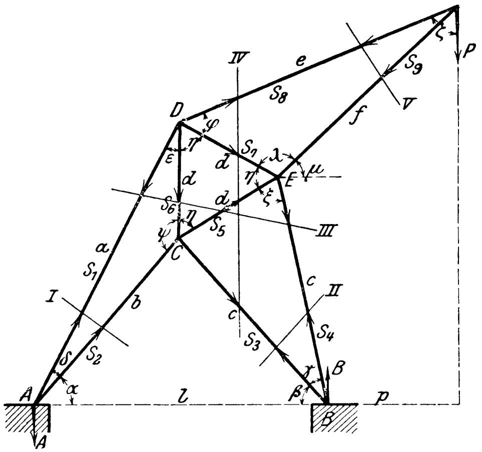
Drehpol C: $S_4 = -B\frac{\cos\beta}{\sin\gamma} = -8498$ kg.

Schnitt III, Drehpol D:

$$S_5 = -P\frac{e\sin\zeta}{d\sin\eta} - S_4\frac{\sin(\eta+\xi)}{\sin\eta} = -5077 \text{ kg.}$$

Drehpol E:

$$S_6 = P\frac{f\cos\mu}{d\sin\eta} - S_1\frac{\sin(\eta+\varepsilon)}{\sin\eta} = +1898 \text{ kg.}$$



Schnitt IV, Drehpol E:

$$S_8 = A\frac{l - c\cos(\beta+\gamma)}{d\sin\varphi} + S_3\frac{c\sin\gamma}{d\sin\varphi} = +8959 \text{ kg.}$$

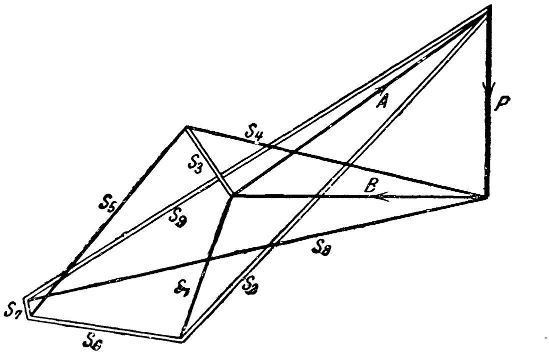
Drehpol C:

$$S_7 = A\frac{b\cos\alpha}{d\sin\eta} - S_8\frac{\sin(\eta+\varphi)}{\sin\eta} = -7184 \text{ kg.}$$

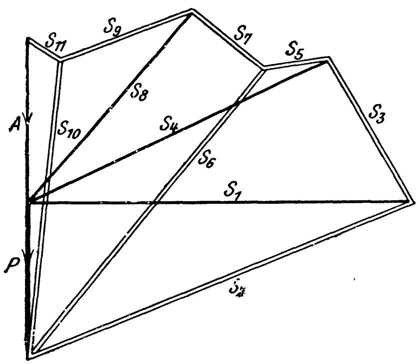
Schnitt V, Drehpol D:

$$S_9 = -P\frac{e\sin\zeta}{d\sin\lambda} = -10978 \text{ kg.}$$

224. $A = 13{,}628$ t. $B = 11{,}033$ t.
$S_1 = +6{,}932$ t. $S_2 = -19{,}641$ t.
$S_3 = -3{,}612$ t. $S_4 = +13{,}166$ t.



$S_5 = + 11,236$ t. $S_6 = - 6,541$ t.
$S_7 = - 1,241$ t. $S_8 = + 20,618$ t. $S_9 = - 23,723$ t.



225. $A = 21,244$ t.
$B = 41,244$ t.
$S_1 = + 50,118$ t.
$S_2 = - 53,886$ t.
$S_3 = - 22,162$ t.
$S_4 = + 43,502$ t.
$S_5 = - 8,535$ t.
$S_6 = - 48,548$ t.
$S_7 = - 12,059$ t.
$S_8 = + 33,063$ t.
$S_9 = - 18,624$ t.
$S_{10} = - 39,128$ t.
$S_{11} = - 4,475$ t.

226. Die Mittelkraft geht durch den Mittelpunkt der Kugel und ist gleich dem Durchmesser.

227. Die eine Kante ist die Summe der beiden anderen. [Nimm eine Ecke des Parallelepipedes als rechtwinkeliges Achsenkreuz an und bilde die Summen A, B, C der Teilkräfte nach den drei Achsen und die Summen der Momente U, V, W um diese Achsen. Wenn eine Einzelkraft übrig bleiben soll, so muß die Bedingung

$$AU + BV + CW = 0$$

erfüllt sein.]

229. $R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2} = 14{,}422$ kg.

$$S = \frac{P_1 P_2}{R} p \sin \alpha = 8{,}653 \text{ mkg.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{3}{2}, \ \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{2}{3}.$$

Nennt man $A\,C = p_1$, $B\,C = p_2$, so ist

$$p_1 : p_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = 9 : 4, \ p_1 + p_2 = p = 1{,}3 \text{ m},$$

woraus $p_1 = 0{,}9$ m, $p_2 = 0{,}4$ m.

230. Beide Kraftpaare haben das Moment

$$P\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

231. Die Zentralachse des Kraftsystems geht durch A und steht senkrecht zur gegenüberliegenden Fläche. Ihre Einzelkraft ist $R = P\sqrt{6}$ (Mittelkraft der in A zusammenstoßenden Kräfte P), ihr Moment ist $S = \frac{P a \sqrt{3}}{2}$ (Mittelkraft der übrigen drei Kräfte P).

232. Alle vier Kräfte sind gleich $\frac{M}{a}$.

233. $R = 5{,}385$ kg, $S = 47{,}538$ mkg; $\alpha = 68^0 12'$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 158^0 12'$; $p = 14{,}054$ m.

234. Ein Kraftpaar vom Moment 44,721 mkg; seine Achse liegt in einer zu A B parallelen, zur Bildfläche senkrechten Ebene und schließt mit A B einen Winkel ein, dessen Tangente gleich $\frac{1}{2}$ ist.

235. Es ist $P\,p = Q\,q$ und $\operatorname{tg} \delta = \frac{3}{2} \frac{p\,q}{p^2 + q^2}$.

236. Ein Kraftpaar vom Moment $2\,P\,a\sqrt{3}$ in einer zu A B C parallelen Ebene. [Gruppiere die zwölf Kräfte nach den drei Quadraten des Oktaëders; die Kräfte jedes dieser Quadrate bilden zwei Kraftpaare vom Moment P a; die Achsen dieser Paare sind die Achsen des Oktaëders.]

237. $Q_2{}^2 = P_1{}^2 + 3\,P_2{}^2 + Q_1{}^2$; die Richtung von Q_2 geht durch C, liegt in der Ebene A C D und schließt mit P_2 einen Winkel ein, dessen Cosinus gleich $2\frac{P_2}{Q_2}$ ist. [Q_2 muß die Mittelkraft von P_1, P_2 und $-Q_1$ sein; um deren Größe zu finden, wähle in A ein rechtwinkeliges Koordinatenkreuz; die Teilkräfte nach den drei Achsen sind: $P_1 \cos\alpha$, $-Q_1$ und $P_2 + P_1 \sin\alpha = 2\,P_2$. Dann ist $Q_2{}^2$ die Quadratsumme dieser drei Größen.]

238. Vergleiche die Bezeichnungen in Aufgabe 227. Aus
$A\,U + B\,V + C\,W = 0$ folgt $a + b + c = 0$;

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = P\sqrt{3};$$

$$\cos(R\,X) = \cos(R\,Y) = \cos(R\,Z) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$S = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} = P\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$r = \frac{S}{R} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

239. Vergleiche die Bezeichnungen in Aufgabe 227. Soll die Dyname durch O gehen, so muß $A : B : C = U : V : W$ sein; nun ist $A = P_1$, $B = P_2$, $C = P_3$; $U = P_3\,b$, $V = P_1\,c$, $W = P_2\,a$, woraus

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sqrt[3]{a\,b^2} : \sqrt[3]{b\,c^2} : \sqrt[3]{c\,a^2}.$$

240. $$P = G \frac{a \sin\varphi}{2\sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 \varphi/_2}};$$

$$\text{für } P_{max} \text{ ist } \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{\frac{b^2}{a^2 + b^2}}.$$

[Die Fadenspannung, welche B zurückzuziehen sucht, hat die Richtung der Sehne $B\,B_0$.]

241. $R = 2\,P\sqrt{6}$, $S = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,P\,s$. Die Achse trifft die Linie B D im ersten Drittel von B entfernt; sie ist der Ebene A C G E parallel und schließt mit B F und A C Winkel $\alpha_1\,\alpha_2$ ein, für welche gilt $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \sqrt{2}$.

242. Das Kraftpaar jeder Seitenfläche des Polyëders kann man durch Kräfte ersetzen, die in den Kanten wirken, durch die halbe Kantenlänge gemessen werden und positiven Umfahrungssinn der Seitenfläche geben. (Vergleiche Aufgabe 58.) Wenn man dies für jede Seitenfläche durchführt, wirken in jeder Kante zwei sich tilgende Kräfte.

243. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [Der Schwerpunkt des Kegels muß in den Kugelmittelpunkt fallen.]

244. $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. [Der Gesamtschwerpunkt des Körpers muß in den Kugelmittelpunkt fallen.]

245. $D = \frac{G}{\sqrt{6}}$, $H = \frac{G}{3\sqrt{2}}$. [Behandle jede Kugel für sich; die obere ist drei Kräften D und dem Gewicht G ausgesetzt; jede untere erleidet den Druck D, den Druck der Tischfläche W, das Gewicht G und die Kraft H.]

246. $S_1 = \frac{P a}{\sqrt{9 a^2 - 3 b^2}}$ Druck; $S_2 = \frac{P b}{3\sqrt{9 a^2 - 3 b^2}}$ Zug. [Behandle die Spitze der Pyramide und eine Ecke für sich wie in der vorhergehenden Aufgabe.]

247. $r = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, a = Halbmesser der Öffnung. [Der Druck D wirkt in den Verbindungslinien der Randpunkte mit dem Kugelmittelpunkt. Nennt man deren Neigung gegen die Vertikale α, so ist

$$D \cos \alpha = G = \frac{4}{3} \gamma r^3 \pi,$$

woraus

$$D = \frac{4 \gamma \pi}{3} \frac{r^4}{\sqrt{r^2 - a^2}},$$

welcher Ausdruck zu einem Minimum zu machen ist.]

248. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2 - a^2}{3\sqrt{r^2(4a^2 - b^2) - a^4}}$, b = Grundlinie des Dreiecks, r = Kugelhalbmesser. [Der Schwerpunkt des Dreiecks muß unter dem Kugelmittelpunkt, die Enden der Grundlinie b in derselben Horizontalebene liegen. Lege eine Vertikalebene durch die Halbierungslinie des Dreiecks.]

249. Wählt man das Achsenkreuz XYZ wie in der Figur angegeben, so haben die fünf Kräfte P, G, A, B, C folgende Teilkräfte:

$$P \begin{cases} P \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad G \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -G \end{cases} \quad A \begin{cases} 0 \\ -A \\ 0 \end{cases} \quad B \begin{cases} 0 \\ Y \\ Z \end{cases} \quad C \begin{cases} -C \cos \alpha \\ 0 \\ C \sin \alpha \end{cases}$$

Ihre Angriffspunkte haben folgende Koordinaten:

$$B\begin{cases}0\\0\\0\end{cases}\qquad S\begin{cases}\frac{1}{2}x_A\\ \frac{1}{2}y_A\\ \frac{1}{2}z_A\end{cases}\qquad A\begin{cases}x_A=\frac{\sqrt{a(a+2r)}}{a+r}\sqrt{l^2-e^2}\\ y_A=e\\ z_A=\frac{r}{a+r}\sqrt{l^2-e^2}\end{cases}$$

$$C\begin{cases}x_c=a\frac{a+2r}{a+r}=a+r-r\cos\alpha\\ y_c=e\frac{\sqrt{a(a+2r)}}{\sqrt{l^2-e^2}}\\ z_c=r\sin\alpha,\end{cases}$$

worin $\cos\alpha=\frac{r}{a+r}$, ferner $l^2=e^2+x_A{}^2+z_A{}^2$,

$$x_A:y_A:z_A=x_c:y_c:z_c.$$

Die sechs Gleichgewichtsbedingungen lauten jetzt:

$$\Sigma X=P-C\cos\alpha=0,\quad \Sigma Y=-A+Y=0$$

$$\Sigma Z=-G+Z+C\sin\alpha=0$$

$$\Sigma(Zy-Yz)=-G\frac{e}{2}+Cy_c\sin\alpha+Az_A=0$$

$$\Sigma(Xz-Zx)=G\frac{x_A}{2}-Cr\cos\alpha\sin\alpha-C\sin\alpha(a+r-r\cos\alpha)=0$$

$$\Sigma(Yx-Xy)=Cy_c\cos\alpha-Ax_A=0,$$

woraus sich ergeben:

$$P=\frac{G}{2}\cdot\frac{r\sqrt{l^2-e^2}}{(a+r)^2},\quad A=\frac{G}{2}\cdot\frac{er}{(a+r)\sqrt{l^2-e^2}}$$

$$B\begin{cases}Y=A\\ Z=\frac{G}{2}\left[2-\frac{\sqrt{a(a+2r)}\sqrt{l^2-e^2}}{(a+r)^2}\right]\end{cases}$$

$$C=\frac{G}{2}\cdot\frac{\sqrt{l^2-e^2}}{a+r}.$$

250. Das Achsenkreuz XZ liegt in einer vertikalen Ebene, Y ist horizontal. Die Kräfte P und Q und die Auflagerdrücke in A und B haben folgende Teilkräfte:

$$P\begin{cases}0\\P\\0\end{cases}\qquad Q\begin{cases}-Q\sin\alpha\\0\\-Q\cos\alpha\end{cases}\qquad A\begin{cases}X_1\\Y_1\\Z_1\end{cases}\qquad B\begin{cases}X_2\\Y_2\\0\end{cases}$$

Ihre Angriffspunkte haben folgende Koordinaten:

$$P\begin{cases}-a\\0\\b\end{cases}\qquad Q\begin{cases}0\\r\\q-\delta\end{cases}\qquad A\begin{cases}0\\0\\0\end{cases}\qquad B\begin{cases}0\\0\\l\end{cases}$$

worin δ eine kleine Strecke bedeutet, die vernachlässigt werden kann, wenn α nicht viel von 90^0 verschieden ist.

Die sechs Gleichgewichtsbedingungen lauten jetzt:

$$\begin{aligned}&\Sigma X = -Q\sin\alpha + X_1 + X_2 = 0,\\ &\Sigma Y = P + Y_1 + Y_2 = 0,\\ &\Sigma Z = -Q\cos\alpha + Z_1 = 0,\\ &\Sigma(Zy - Yz) = -Pb - Qr\cos\alpha - Y_2 l = 0,\\ &\Sigma(Xz - Zx) = -Qq\sin\alpha + X_2 l = 0,\\ &\Sigma(Yx - Xy) = -Pa + Qr\sin\alpha = 0,\end{aligned}$$

woraus sich ergeben:

$$P = Q\frac{r}{a}\sin\alpha$$

$$A\begin{cases}X_1 = Q\dfrac{l-q}{l}\sin\alpha\\[2ex] Y_1 = Q\dfrac{r}{l}\left(\cos\alpha - \dfrac{l-b}{a}\sin\alpha\right)\\[2ex] Z_1 = Q\cos\alpha\end{cases}$$

$$B\begin{cases}X_2 = Q\dfrac{q}{l}\sin\alpha\\[2ex] Y_2 = -Q\dfrac{r}{l}\left(\dfrac{b}{a}\sin\alpha + \cos\alpha\right)\\[2ex] Z_2 = 0.\end{cases}$$

251. $S = \dfrac{G}{2\sqrt{3}}\dfrac{a}{\sqrt{3l^2 - a^2}};\quad dS = \dfrac{G\sqrt{3}\,l^2}{2}\dfrac{da}{(3l^2 - a^2)^{3/2}}.$

[Die beiden Spannungen S in A haben eine Mittelkraft $S_1 = 2S\cos 30^0$; bilde von S_1 und G die Momente um O und setze ihre Summe gleich Null.]

252. Nimm die Ebene der Platte als XY-Ebene an, die Normale in A nach aufwärts als Z-Achse, dann ergeben die Gleichgewichtsbedingungen, wenn man X, Y, Z die Teilkräfte des Widerstandes in A nennt:

$$X = 0,\quad Y + Q\cos\alpha = 0,\quad Z - Q\sin\alpha - P + D = 0$$
$$-Ql\sin\alpha + Dy = 0,\quad Pb - Dx = 0$$

woraus wegen $x^2 + y^2 = e^2$:

$$D = \frac{1}{e}\sqrt{P^2 b^2 + Q^2 l^2 \sin^2\alpha} = 4{,}27 \text{ kg}.$$

$$x = \frac{Pb}{D} = 1{,}87 \text{ m}, \qquad y = \frac{Q l \sin\alpha}{D} = 2{,}34 \text{ m},$$

$$A \begin{cases} X = 0 \\ Y = -Q\cos\alpha = -4{,}33 \text{ kg} \\ Z = P + Q\sin\alpha - D = 2{,}23 \text{ kg}. \end{cases}$$

$$A = \sqrt{Y^2 + Z^2} = 4{,}87 \text{ kg}.$$

253. Im Verhältnis 2 : 3. [Die Spannungen im Faden sind oben und unten die gleichen; rechne daraus die Neigung des oberen und des unteren Fadenstückes gegen die Kegelachse.]

254. Nimmt man auf der Blase ein Flächenelement in Form eines Kreises vom Halbmesser r an, so wirkt am Umfang desselben die Spannung S und es ist für Gleichgewicht

$$(p - p_0)\, r^2 \pi = S \cdot 2 r \pi \cdot \sin\varphi,$$

worin φ die Neigung von S gegen das Flächenelement ist. Es wird

$$S = \frac{p - p_0}{2} \cdot \frac{r}{\sin\varphi}$$

und da der Grenzwert von $\frac{r}{\sin\varphi}$ der Radius R der Kugel ist:

$$S = \frac{1}{2} R (p - p_0).$$

255. Bildet man die Momente aller Kräfte der Platte um die Gerade BC, so wird für Gleichgewicht

$$Q = G \frac{\sqrt{R^2 - s^2}}{R - \sqrt{R^2 - s^2}},$$

wenn s die halbe Sehne BC ist.

Ferner ist $x = R + r - \sqrt{R^2 - s^2} - \sqrt{r^2 - s^2}$.

Q erhält den kleinsten Wert, wenn $s = r$ wird, also für

$$x = R + r - \sqrt{R^2 - r^2}:$$

$$Q_{min} = G \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R - \sqrt{R^2 - r^2}}.$$

256. $x = \frac{6}{11} s$, $y = \frac{1}{11} s$, $C = \frac{11}{20} G$. [Bilde die Momente der Drücke A, B, C und des Gewichtes G um AB und AD.]

257. $a:b:c = P_1 l : P_2 m : P_3 n$. [Bilde die Summe der Momente um die X-Achse: $\Sigma(Zy - Yz) = P_2 cm - P_3 bn = 0$; ebenso für die andern Achsen.]

258. $x = \frac{a}{3}$ oder $\frac{2a}{3}$. [Der Schwerpunkt der Platte hat die Entfernung $\frac{1}{2}\frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2}$ von der oberen Kante. Bilde die Momente um diese.]

259. $x^2 - \left(\frac{3\pi}{8} - 1\right) xr = \left(\frac{3\pi}{8} - 1\right) r^2$, $x = 0{,}288\,r$.
[Bilde die Momente um AB.]

260. $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a:b:c$. [Bilde die Momente um die durch A und B gehenden Halbmesser der Scheibe.]

261. $\xi = \frac{3}{5} h$. [Ist v die Geschwindigkeit eines Punktes des Dreiecks, ω die Winkelgeschwindigkeit, y die Breite des Dreiecks im Abstand x von der Achse, so ist $v = x\omega$ und der gesamte Luftwiderstand $W = \int_0^h v^2 y\,dx$; für die Momente um die Achse findet man $W\xi = \int_0^h v^2 x y\,dx$, worin $y = \frac{b}{h}(h - x)$, b = Grundlinie des Dreiecks.]

262. $P = \frac{k a^{n+2}}{n+1}$, $\xi = \frac{n+1}{n+2} a$, $\eta = \frac{a}{2}$.

263. $\pi \sin^2\alpha = (1 + 3 \operatorname{cotg}\alpha)(2\alpha - \sin 2\alpha)$. [Bilde die Momente um eine durch O gehende, zu AB parallele Gerade. Nennt man x_s den Abstand des Schwerpunkts der Platte von dieser Geraden, so ist

$$\left(\pi - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) x_s = r\pi \operatorname{cotg}\alpha;$$

aus der Gleichheit der Auflagerdrücke ergibt sich außerdem:

$$x_s = \frac{r}{3}(1 + 3\operatorname{cotg}\alpha).$$

Entferne r und x_s aus diesen Gleichungen.]

264. Ist d der Durchmesser des Kolbens, so ist

$$p\frac{\pi d^2}{4} = 2k \,.\, \triangle l = k_1 \,.\, \triangle l_1.$$

Der Kolben senkt sich also um

$$\triangle l_1 = \frac{p}{k_1}\frac{\pi d^2}{4},$$

während sich der Zylinder um

$$\triangle l = \frac{p}{2k}\frac{\pi d^2}{4}$$

hebt.

265. Lege durch O eine beliebige Ebene; sind x die Abstände der gleichen Gewichte von ihr, so müßte $\Sigma x = 0$ sein, was für Gleichgewicht von O zutrifft.

267. $x_s = \frac{3}{8}(1 + \cos\alpha)\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$; R, r Kugelhalbmesser, 2α Winkel an der Spitze des Kegels.

268. Verbinde die Spitzen S_1 und S_2 der beiden Kegelflächen und suche auf dieser Geraden einen Punkt P, der die Strecke $S_1 S_2$ im Verhältnis $h_2 : - h_1$ teilt. Verbinde P mit dem Schwerpunkt s der Grundfläche; der gesuchte Schwerpunkt liegt auf Ps, im ersten Viertelpunkt von Ps, von s aus gezählt.

269. Schneide senkrecht zur X-Achse eine unendlich dünne Scheibe im Abstand x von O heraus; sind x, y, z die Koordinaten ihres Schwerpunkts, so ist der Inhalt der Scheibe

$$dV = 4z\sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

$$z = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}x\,\mathrm{tg}\,\varphi,\quad V = \int_{-r}^{+r} dV = ar^2\pi;$$

für die Koordinaten des Schwerpunkts ist dann

$$V x_s = \int_{-r}^{+r} x \,.\, dV,\quad V y_s = \int_{-r}^{+r} y \,.\, dV,\quad V z_s = \int_{-r}^{+r} z \,.\, dV,$$

woraus:

$$x_s = \frac{r^2}{4a}\,\mathrm{tg}\,\varphi,\quad y_s = 0,\quad z_s = \frac{1}{8a}(4a^2 + r^2\,\mathrm{tg}^2\varphi).$$

270. Schneide in rechteckige Scheiben parallel der Grundfläche. In der Entfernung z von der Grundfläche hat eine solche Scheibe die Abmessungen:

$$x = a + \frac{a_1 - a}{h} z \text{ parallel zu } a,$$

$$y = \frac{b}{h}(h - z) \text{ parallel zu } b.$$

Der Rauminhalt des Keils hat dann die Größe

$$V = \int_0^h x\,y\,d\,z = \frac{b\,h}{6}(a_1 + 2\,a)$$

und der Schwerpunktsabstand z_s von der Grundfläche ergibt sich aus

$$V\,z_s = \int_0^h z\,d\,V \quad \text{mit} \quad z_s = \frac{h}{2}\,\frac{a + a_1}{2\,a + a_1}.$$

271. Der Schwerpunkt halbiert die Höhe. [Rauminhalt des Paraboloides: $\frac{1}{2}\pi r^2 h$, r = Halbmesser der Grundfläche, h = Höhe des Paraboloides. Schwerpunktsabstand des Paraboloides vom Scheitel: $\frac{2}{3} h$.]

272. Schneide in rechteckige Scheiben parallel den Grundflächen. In der Entfernung z von der oberen Grundfläche hat eine solche Scheibe die Abmessungen

$$x = a_1 + \frac{a - a_1}{h} z \text{ parallel zu } a,$$

$$y = b_1 + \frac{b - b_1}{h} z \text{ parallel zu } b.$$

Der Rauminhalt des Obelisken hat dann die Größe

$$V = \int_0^h x\,y\,d\,z = \frac{h}{6}[a\,b + a_1\,b_1 + (a + a_1)(b + b_1)]$$

und der Schwerpunktabstand z_s von der oberen Grundfläche ergibt sich aus

$$V\,z_s = \int_0^h z\,.\,d\,V$$

mit

$$z_s = \frac{h}{2}\,\frac{2\,a\,b + (a + a_1)(b + b_1)}{a\,b + a_1\,b_1 + (a + a_1)(b + b_1)}.$$

273. $x_s = \frac{a}{3}\,\frac{p_1 + 2\,p_2}{p_1 + p_2}.$

274. $y_s = \frac{5}{12}\,b.$

12*

275. $x_s = y_s = z_s = \frac{3}{8} r.$

276. Abstand vom Mittelpunkt $x_s = \frac{3}{8} a.$

277. $x_s = \frac{h}{3} \frac{a^2 + 2 b^2}{a^2 + b^2}.$

278. $e = \frac{1}{n} - \frac{b}{2} + \frac{r^2 l^2}{b (R^2 - r^2)} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right).$

279. $x_s = \frac{1}{4} \frac{3 R_1{}^2 h^2 + 6 r^2 l (2 h + l) + 8 R_2{}^3 (h + l) + 3 R_2{}^4}{R_1{}^2 h + 3 r^2 l + 2 R_2{}^3}.$

280. Der Schwerpunkt liegt im ersten Drittelpunkt der Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem Mittelpunkt der Geraden C D.

281. $\frac{\sin \alpha/2}{\sin \beta/2} = \sqrt[3]{\left(\frac{r}{R}\right)^4}.$ [Sind V_1, V_2 die Rauminhalte, x_1, x_2 die Schwerpunktsabstände der Kugelausschnitte von der Vertikalen durch O, so muß $V_1 x_1 = V_2 x_2$ sein.]

282. $z^4 - 4 n z^3 + 6 n^2 z^2 - 4 z + 1 = 0.$

283. $x = \frac{3 V}{r^2 \pi} \left(\frac{2 a}{r} - 1\right), \; y = \frac{6 V}{r^2 \pi} \left(2 - \frac{3 a}{r}\right),$

$$y_s = \frac{3 V}{r^2 \pi} \left[\frac{3}{2} - \frac{4 a}{r} + \frac{3 a^2}{r^2}\right].$$

284. $\operatorname{tg}^3 \varphi - {}^9/_8 \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg} \varphi - {}^3/_8 = 0,$

woraus $\varphi = 28^0\, 44'\, 28''$,

$$x_s = r - \frac{r}{4} \frac{\cos 2 \varphi \sin 2 \varphi}{2 - \sin 2 \varphi},$$

$$y_s = \frac{r}{4} \frac{3 - \sin^2 2 \varphi}{2 - \sin 2 \varphi}.$$

[Verbinde die Schwerpunkte der Halbkugel und des Kegels; der Schnitt dieser Verbindungslinie mit OS ist der gesuchte Schwerpunkt.]

285. $x = \frac{P^2 p a}{Q^2 p + 2 a (Q^2 - P^2)}.$ [Verrücke P und Q längs der Parabel; die Verrückungen sind gleich groß. Benütze den Satz: die Arbeit eines Gewichtes ist das Produkt aus dem Gewicht in die Änderung seiner Höhe.]

286. An allen Stellen der Parabel, wenn $P = Q$; sonst an keiner. [Verrücke in Richtung der Parabeltangente und weise nach, daß die virtuelle Arbeit $P\,\delta r$ ist, wobei $r = FP$ bedeutet.]

287. $P\dfrac{\varepsilon + \cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} = Q\dfrac{\varepsilon + \cos\varphi_2}{\sin\varphi_2}$, $\varepsilon =$ numerische Exzentrizität der Ellipse. [Sind y_1, y_2 die Ordinaten von P und Q, so muß $P\delta y_1 + Q\delta y_2 = 0$ sein. Es ist

$$y = r\sin\varphi,\quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},\quad r = \text{Fahrstrahl.}]$$

288. $P : Q = \sin\varphi : \sin\psi$. [Sind h und h_1 die Entfernungen der Gewichte von der Horizontalen, so muß bei einer kleinen symmetrischen Verrückung $2P\delta h + Q\delta h_1 = 0$ sein; es ist

$$h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi,\quad h_1 = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\psi,\quad \delta h = \frac{a}{2}\cdot\frac{\delta\varphi}{\cos^2\varphi},\quad \delta h_1 = \frac{b}{2}\cdot\frac{\delta\psi}{\cos^2\psi};$$

ferner die unveränderliche Länge des Fadens $l = \dfrac{2a}{\cos\varphi} + \dfrac{b}{\cos\psi}$,

woraus $\dfrac{\delta\varphi}{\delta\psi} = -\dfrac{b\cos^2\varphi\sin\psi}{2a\cos^2\psi\sin\varphi}$].

289. $\dfrac{\cos\varphi}{\varphi} = \dfrac{ka^2}{Gb}$.

290. Bei $\varphi = 180^0$ und bei $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{Q}{G}\dfrac{b}{2a}$. [Drehe OB um den Winkel $\delta\varphi$. Ist $s = BC$ und h die Höhe von A über einer durch O gehenden Horizontalen, so ist $G\delta h + Q\delta s = 0$; hierin ist $h = a\cos\varphi$, $s = 2b\sin\dfrac{\varphi}{2}$].

291. $s^2 + 2as\cos\alpha = \dfrac{(Q^2 - P^2)a^2\cos^2\alpha}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha}$. [Verschiebe Q auf der schiefen Ebene um δs nach abwärts, dann ist

$$Q\delta(s\cos\alpha) - P\delta x = 0,$$

darin ist $$x^2 = \overline{OQ}^2 = a^2 + s^2 + 2as\cos\alpha.]$$

292. $\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = 2$. [Der Schwerpunkt von AB darf bei einer kleinen Senkung von A seine Höhenlage nicht ändern; rechne seine Höhenlage von einer Horizontalen durch C.]

293. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{G}{Q}\frac{a}{a+b}$. [Verschiebe A nach rechts, B nach aufwärts.]

$A = G$. [Verschiebe den Stab parallel zu sich nach aufwärts.]

$B = Q$. [Verschiebe den Stab parallel zu sich nach links.]

294. $s \cos(\alpha + \varphi) = 3\,d \cos 2\,\varphi$. [Bestimme die Abstände x_1, x_2, x_3 der Ecken des Dreiecks von der Linie AB, dann hat der Schwerpunkt des Dreiecks den Abstand $\xi = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$; mache $\delta\xi = 0$.]

Die Drücke A, B, C sind unbestimmt, da sie sich in einem Punkt der durch den Dreiecksschwerpunkt gehenden Vertikalen schneiden.

295. Sind ζ_1, ζ_2 die Schwerpunktsabstände von AB, so ist

$$\zeta_1 = R\left(\sin\varphi + \frac{4}{3\pi}\cos\varphi\right),$$

$$\zeta_2 = r\left(\sin\psi + \frac{4}{3\pi}\cos\psi\right),$$

ferner $$G_1\,\delta\zeta_1 + G_2\,\delta\zeta_2 = 0.$$

Aus geometrischen Gründen ist:

$$(R + r)^2 = (b + R\cos\varphi + r\cos\psi)^2 + (R\sin\varphi - r\sin\psi)^2.$$

Differenziert man und entfernt aus beiden Gleichungen $\delta\varphi$ und $\delta\psi$, so wird schließlich:

$$\frac{R\sin(\varphi+\psi) + b\sin\psi}{r\sin(\varphi+\psi) + b\sin\varphi} = \frac{G_2}{G_1}\cdot\frac{3\pi\cos\psi - 4\sin\psi}{3\pi\cos\varphi - 4\sin\varphi}.$$

296. $\cos^2\varphi - 0{,}2\cos\varphi = 0{,}5$. [Der Gesamtschwerpunkt von OA und AC ändert bei einer virtuellen Verrückung längs der Ecke B seine Höhenlage nicht. Es muß also

$$G\,.\,\delta\left(\frac{r}{2}\sin 2\,\varphi\right) + 2\,G\,.\,\delta(r\sin 2\,\varphi - r\sin\varphi) = 0$$

sein.]

297. Aus $-2\,S\,.\,\delta(a\sin\alpha) + P\,.\,\delta(b\cos\beta - a\cos\alpha) = 0$ und $\delta(b\sin\beta) = \delta(a\sin\alpha)$ folgt:

$$S = \frac{P}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta).$$

298. Drücke das Gelenk C etwas hinab. Dann ist die Summe der virtuellen Arbeiten

$$Q \,.\, \delta h + k(l - l_0) \,.\, \delta l = 0.$$

Darin ist h die Höhe von C über AB, l die Länge des elastischen Bandes, k eine Elastizitätskonstante. Es wird

$$Q = 2k(b\sqrt{2} - l_0).$$

299. Aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhält man zunächst:

$$a \,.\, \delta\left(\frac{a}{2}\sin\alpha\right) + 2a \,.\, \delta(a\sin\alpha + a\sin\gamma) + 2a \,.\, \delta(a\sin\beta) = 0$$

oder $$5\cos\alpha \,.\, \delta\alpha + 4\cos\beta \,.\, \delta\beta + 4\cos\gamma \,.\, \delta\gamma = 0.$$

Verbindet man damit die beiden geometrischen Beziehungen

$$\cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma = 3,$$
$$\sin\alpha - 2\sin\beta + 2\sin\gamma = 0,$$

so wird $$4\,\mathrm{tg}\,\alpha - 3\,\mathrm{tg}\,\beta - 7\,\mathrm{tg}\,\gamma = 0.$$

300. Verrückt man das Stangen-Ende C um δs nach rechts, so ist

$$-D \,.\, \delta s + G \,.\, \delta h = 0,$$

worin

$$s = a\cos\alpha - b\cos\beta,$$
$$h = a\sin\alpha = b\sin\beta,$$

woraus $$D = G\frac{b}{c}\,\mathrm{cotg}\,\alpha\cos\beta.$$

301. Bei einer kleinen Verkürzung des Fadens 2 x wird die Summe der virtuellen Arbeiten

$$P \,.\, (-2\,\delta x) + k(2x - a)(-2\,\delta x) - k(2y - a) \,.\, 2\,\delta y = 0,$$

worin $x = a\sin\varphi$, $y = a\cos\varphi$, k die elastische Anziehung für die Einheit der Längenänderung ist. Man erhält

$$\mathrm{tg}\,\varphi = 1 - \frac{P}{ka}.$$

302. x ergibt sich aus der Gleichung:

$$4b^2h^2x^2(l^2 - s^2) = (s^2 - x^2)\left[l(4h^2 - 3s^2) - 3xs^2\right]^2,$$

worin s die Seite, b die Grundlinie, h die Höhe des Dreiecks bedeuten. [Rechne die Tiefe z des Schwerpunkts S vertikal unter O aus dem Dreieck A O S und setze $\delta z = 0$; den hier vorkommenden Winkel O A S drücke durch S A C + C A O und letzteren durch die Seiten des Dreiecks A O C aus.]

303. $P = G\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, G Gewicht eines Stabes. [Verschiebe A horizontal nach links und benütze die unveränderte

Höhenlage von C, um eine Beziehung zwischen $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ zu erhalten.]

304. Man denke sich das Seil oben und unten durchgeschnitten, an den Schnittstellen die Spannung S angebracht und dann die Platte mit Q gehoben. Es ist $Q \,.\, \delta h + 2\,S \,.\, \delta x = 0$, wenn $h = l \sin\alpha + a \cos\alpha$ die Entfernung der Platte vom Boden, $x = \frac{a + 2\,r}{\sin\alpha}$ die Entfernung der Mittelpunkte der Walzen ist. Es bleibt:

$$S = Q\,\frac{\sin^2\alpha\,(l \cos\alpha - a \sin\alpha)}{2 \cos\alpha\,(a + 2\,r)}.$$

305. Aus $2\,P \,.\, \delta\,(a \cos\alpha) + Q \,.\, \delta\,(2\,a \sin\alpha) = 0$ findet man:

$$P = Q \operatorname{cotg}\alpha.$$

306. Nennt man $O\,A = A\,B = b$,

$$B\,C = a, \quad \sphericalangle\, D\,C\,E = \alpha \text{ (sehr klein)},$$

so ist
$$D \,.\, 3a \,.\, \delta\alpha + Z \,.\, \delta\,(b \cos\beta) = 0.$$

Außerdem ist der kleine Weg von B:

$$a \,.\, \delta\alpha = \delta\,(2\,b \sin\beta).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach Entfernung von $\delta\alpha$ und $\delta\beta$:

$$D = \frac{1}{6}\,Z \operatorname{tg}\beta.$$

307. Zunächst ist

$$P \,.\, \delta\,(a \sin\alpha + b \cos\beta) + Q \,.\, \delta\,(2\,a \sin\alpha) = 0,$$

woraus

$$\delta\alpha\,[2\,Q\,a \cos\alpha + P\,a \cos\alpha] - \delta\beta \,.\, P\,b \sin\beta = 0.$$

Sodann ist
$$a \cos\alpha + b \sin\beta = c + d,$$

woraus
$$\delta\alpha \,.\, a \sin\alpha - \delta\beta \,.\, b \cos\beta = 0.$$

Durch Entfernen von $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ folgt:

$$P = \frac{2\,Q}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1}.$$

308. $\operatorname{tg}\beta = 2 \operatorname{tg}\alpha$. [Bei einer Vergrößerung der Winkel α und β wird:

$$-2\,G \,.\, \delta\,(a \sin\alpha) + 2\,G \,.\, \delta\,(a \sin\beta) + G \,.\, \delta\,(2\,a \sin\beta) = 0,$$

wenn G das Gewicht und a die Länge eines Stabes ist. Hieraus wird

$$-\cos\alpha \,.\, \delta\alpha + 2 \cos\beta \,.\, \delta\beta = 0.$$

Hierzu kommt die Beziehung

$$2\,a \cos\alpha = 2\,a \cos\beta + 2\,a,$$

woraus

$$\delta\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\delta\alpha.]$$

309. Legt man durch die festbleibenden Gelenke A und A_1 eine Horizontalebene, nennt p und q die Abstände der Angriffsstellen von P und Q von dieser Ebene, so ist

$$P\,.\,\delta p + Q\,.\,\delta q = 0.$$

Aus

$$\begin{aligned}p &= a\cos\alpha + b\cos\beta,\\ q &= -\,a\cos\alpha + c\cos\gamma,\\ a\sin\alpha &+ b\sin\beta = \text{konstant},\\ c\sin\gamma &+ b\sin\beta = \text{konstant},\end{aligned}$$

folgt durch Differenzieren und Entfernen von $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$:

$$P = Q\,\frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$

310. Um die Verdrehung γ von BC zu finden, projiziere den Linienzug ABC vor und nach der Verdrehung auf die Gerade EF und setze die Projektionen gleich; man erhält

$$\sin\gamma = \frac{2a}{b}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und ebenso durch Projektion des Linienzuges ABD auf EG:

$$\sin\delta = \frac{2a}{b}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Nennt man c und d die Längen der Federn nach der Verdrehung, so ist $c = l + b(\sin\delta + \cos\gamma - 1)$, $d = l - b(\sin\gamma - \cos\delta + 1)$ und die entstehenden Federdrücke:

$$\begin{aligned}F_C &= k(c - l) = k\,b\,(\sin\delta + \cos\gamma - 1)\\ F_D &= k(l - d) = k\,b\,(\sin\gamma - \cos\delta + 1).\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist

$$Pa\,.\,\delta\varphi - F_C\,.\,\delta c + F_D\,.\,\delta d = 0$$

und mit

$$\begin{aligned}\delta c &= b(\cos\delta\,.\,\delta\delta - \sin\gamma\,.\,\delta\gamma)\\ \delta d &= -\,b(\cos\gamma\,.\,\delta\gamma + \sin\delta\,.\,\delta\delta)\\ \delta\gamma &= \frac{a}{b}\,\frac{\cos(45 - \varphi)}{\cos\gamma}\,\delta\varphi\\ \delta\delta &= \frac{a}{b}\,\frac{\cos(45 + \varphi)}{\cos\delta}\,\delta\varphi\end{aligned}$$

ergibt sich

$$P = kb\{\cos(45 + \varphi)[\cos\gamma - 1 + tg\delta(1 + \sin\gamma)] + \cos(45 - \varphi)[1 - \cos\delta + tg\gamma(1 - \sin\delta)]\}.$$

311. $f \overline{\overline{>}} 0{,}577$, $W = \frac{3kr\sqrt{3}}{2}$. [W ergibt sich, wenn man die drei Anziehungskräfte auf die Normale in m projiziert und addiert. Ist $mm_3 = x$, so wird die Kraft, welche m nach m_3 treibt: $K = 3k\left(x - \frac{r}{2}\right)$; sie ist am größten für $x = r$, $K = \frac{3}{2}kr$. Nun setze man die Reibung $fW \overline{\overline{>}} K$.]

312. Für alle Werte von $tg\varphi$ zwischen 1 und 1,5. [Sind r_1, r_2 die Entfernungen mm_1 und mm_2, so ist der Normalwiderstand des Kreises

$$W = k_1 r_1 \cos\varphi + k_2 r_2 \sin\varphi$$

und die den Punkt m bewegende Kraft

$$K = k_1 r_1 \sin\varphi - k_2 r_2 \cos\varphi.$$

Man setze $K \overline{\overline{>}} fW$, woraus

$$tg\varphi \overline{\overline{>}} 0{,}6 + 0{,}4\, tg^2\varphi.$$

Nun löse man die Gleichung auf; ihre Wurzeln sind die verlangten Grenzen.]

313. $S = G \dfrac{\sin(\varphi + \varrho)}{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2} - \varrho\right)}$; S_{min} für jenen Winkel φ, welcher der Gleichung $tg\left(45 - \frac{\varphi}{2} - \varrho\right) . tg(\varphi + \varrho) = 2$ genügt.

[Bilde die Projektionen der vier Kräfte in B auf Tangente und Normale und entferne den Druck aus den Gleichungen.]

314. $f = \frac{a}{a+b}\cot g\beta + \frac{b}{a+b}\cot g\alpha$

$$S = P . \frac{a\sin\alpha}{b\sin\beta}.$$

[Um S zu finden, bilde die Momente der Kräfte um C. Ferner ist der Druck in C: $W = S\sin\beta + P\sin\alpha$, die Reibung $R = S\cos\beta + P\cos\alpha$; setze $R = fW$ und bestimme daraus f.]

315. $f = \operatorname{tg}\alpha$, $A = G(1 - \sin\alpha)$, $B = G(1 + \sin\alpha)$,

$$D = G \sin\alpha \cos\alpha, \quad x = r\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{4}{3\pi}\,\frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

[Auf jeden der beiden Halbzylinder wirkt der Druck der Unterlage, das Gewicht, der Druck und die Reibung in der Schnittfläche. Man bilde für jeden Halbzylinder die Gleichgewichtsbedingungen (Momente um A) und erhält:

$$\begin{aligned} G\cos\alpha - A\cos\alpha - D &= 0, \\ G\sin\alpha - A\sin\alpha - fD &= 0, \\ G\cos\alpha - B\cos\alpha + D &= 0, \\ G\sin\alpha - B\sin\alpha + fD &= 0, \end{aligned}$$

$$Dx = Gr\left(\cos\alpha - \frac{4}{3\pi}\sin\alpha\right) =$$

$$= Br\operatorname{cotg}\alpha - Gr\left(\operatorname{cotg}\alpha + \frac{4}{3\pi}\sin\alpha\right).]$$

316. Nennt man D den Druck zwischen Stab und Halbkugel und projiziert die Kräfte der Stange horizontal, so wird

$$D\sin\psi - fD\cos\psi = 0,$$

also die Stellung des Stabes:

$$\operatorname{tg}\psi = f.$$

Nennt man x die Entfernung des Punktes O vom Druck D und bildet die Momente der Kräfte der Halbkugel um O, so ist

$$Ga\sin\psi - Dx = 0.$$

Ebenso, wenn man die Momente der Kräfte des Stabes um A bildet:

$$G_1 l\cos\psi - D\left(\frac{r}{\sin\psi} - x\right) = 0,$$

woraus:

$$x = \frac{Gar}{G_1 l\cos\psi + Ga\sin\psi}.$$

Soll nun die Druckrichtung D durch S_1 gehen, so muß $x = \frac{r}{\sin\psi} - l$ sein, woraus

$$l = r\frac{\sqrt{1 + f^2}}{f} - \frac{G}{G_1}af.$$

317. $f \gtreqless \operatorname{tg}\frac{\beta - \alpha}{2}$.

318. $f = \dfrac{G}{G\sqrt{3} + 2\,G_1(1+\sqrt{3})}$.

319. $\sin\varphi$ schwankt zwischen $\dfrac{a}{b}$ und $\dfrac{a}{b}\cos\varrho$, letzter Wert entspricht den äußersten Gleichgewichtslagen des Ringes. Für diese ist

$$S = G\,\frac{l\cos\varphi}{b\cos(\varphi \pm \varrho)},\quad D = G\,\frac{l\cos\varphi\cos\varrho}{b\cos(\varphi \pm \varrho)}.$$

[S ist die Resultante aus Reibung und Druck in D. Für Reibung, Druck und Gewicht bilde die Momente um B, dessen Widerstand dadurch entfernt wird.]

320. $f = \dfrac{l\sin^2\alpha\cos\alpha}{2\,a - l\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

[Bilde die Momente der Kräfte um A und setze die Summen der horizontalen und vertikalen Teilkräfte gleich Null.]

321. Wenn $\operatorname{tg}\varphi < \dfrac{a - b\,f_1\,f_2}{f_1\,(a+b)}$.

[Führe an den Stützen die Drücke A, B und die Reibungen $f_1\,A$ (nach rechts), $f_2\,B$ (nach aufwärts) ein; rechne für Gleichgewicht das B und setze die Momentensumme um A gleich Null.]

322. $f = \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, ε = numerische Exzentrizität der Ellipse.

323. $\operatorname{tg}\psi = 2 + \dfrac{1}{f}$, $A = \dfrac{G}{2\,(1+f)}$.

[Bilde die Momente um B und setze die Summen der horizontalen und vertikalen Teilkräfte gleich Null.]

324. $x = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{f} - 1\right)$.

325. $f = \dfrac{3\,\pi}{4} \cdot \dfrac{(r - r_1)\,r_1^{\,2}\,\gamma_1}{r^3\,\gamma - r_1^{\,3}\,\gamma_1}$.

[Bilde die Momente um den Mittelpunkt des größeren Halbkreises mit dem Halbmesser r.]

326. $x = \dfrac{2\,f\,(r + r_1)\,(G + 2\,G_1)}{\sqrt{G^2 + f^2\,(G + 2\,G_1)^2}} - 2\,r_1$.

[Setze den oberen und unteren Halbzylinder für sich ins Gleichgewicht und suche den Winkel φ, den die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte mit der Vertikalen einschließt; man findet

$$\operatorname{tg}\varphi = f\left(1 + \frac{2\,G_1}{G}\right) \text{ und } x = 2\,(r + r_1)\sin\varphi - 2\,r_1.]$$

327. $$D = G_2 \frac{1 + \sin\varphi}{1 + \sin\varphi + \cos\varphi},\quad D_1 = G_1 + D,$$

$$D_2 = G_2 \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi + \cos\varphi},\quad f = \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi},$$

$$f_1 = \frac{G_2 \cos\varphi}{G_1\,(1 + \sin\varphi + \cos\varphi) + G_2\,(1 + \sin\varphi)},\quad f_2 = 1.$$

[Aus den Momenten um die Mittelpunkte der Walzen folgt zunächst $f\,D = f_1\,D_1 = f_2\,D_2$. Das Übrige ergibt sich, wenn man die Summen der horizontalen und vertikalen Teilkräfte für jede Walze gleich Null setzt.]

328. $P = G\,(2 + \sin 2\,\varrho)$.

[Der linke Würfel erleidet zwei Reibungen: links $f\,D$ nach abwärts gerichtet, rechts $f\,D_1$ nach aufwärts gerichtet; D und D_1 sind nicht gleich.]

329. $\operatorname{cotg}\varphi = +\left[\frac{b^2}{a^2}\frac{1 + f^2}{f} - f\right]$. [Bilde die Momente um O.]

330. $$\sin\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} \pm \varrho\right) = \frac{2\,r}{l}\cos\varrho$$

$$D = G\frac{\cos\varrho}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi \pm \varrho\right)},\quad \varrho = \text{Reibungswinkel}.$$

[Bilde die Momente um O und projiziere die Kräfte eines Stabes auf die Vertikale. Der Gelenkwiderstand in O ist horizontal.]

331. $\cos(\varphi \pm \varrho_2) = \frac{G_1}{G_2}\sin(\alpha \pm \varrho_1)\frac{\cos\varrho_2}{\cos\varrho_1}$. [Führe auf beiden Seiten die Fadenspannung ein und stelle für jedes der beiden Gewichte zwei Gleichgewichtsbedingungen auf.]

332. $\varphi = 90^0 - \alpha \pm 2\,\varrho$, wenn ϱ der Reibungswinkel bei R ist. Wenn $\alpha \overline{\gtrless} 45^0 + \varrho$ angenommen wird, ist die obere Grenzlage des Fadens O R horizontal. [Setze die Seilspannung, die gleich G ist, den Normalwiderstand der Stange und die Reibung in Richtung der Stange ins Gleichgewicht.]

333. $\varphi = 90 \pm \varrho$, $S_1 = \frac{G}{\cos(\alpha \mp \varrho)}$, $S_2 = G\operatorname{tg}(\alpha \mp \varrho)$.

334. $f = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $D = 2G$, G = Gewicht des Stabes. [Der Gelenkdruck in H muß horizontal gerichtet sein. Bilde die Momente um O und die Projektionen der Kräfte auf die Vertikale.]

335. $Q = G \frac{L}{b} \sin\alpha \cos\alpha \, (f \cos\alpha - \sin\alpha)$. Q_{max} tritt ein für $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg}(\varrho - \alpha)$. Hierin ist $f = \operatorname{tg}\varrho$ die Reibungszahl bei B. [Aus dem Moment um A ergibt sich zunächst der Druck in B: $G \frac{L}{2a} \sin\alpha \cos\alpha$. Sodann nimm die Momente der Kräfte des Prismas um O.]

336. Ist h die Höhe des Gestelles, x seine Breite, so wird, wenn man das Gestell etwas zusammendrückt:

$$- Q \,.\, \delta h - \frac{fQ}{2} \delta x - \frac{f_1 (Q + G)}{2} \delta x$$
$$- P \delta x - G \,.\, \frac{\delta h}{2} = 0,$$
$$h = 2a \cos\alpha, \quad x = a \sin\alpha, \quad a = \text{Stangenlänge},$$

woraus $$P = Q \left[2 \operatorname{tg}\alpha - \frac{f + f_1}{2}\right] + G \left[\operatorname{tg}\alpha - \frac{f_1}{2}\right].$$

337. Die drei entstehenden Reibungen fP, fQ, fR in A, B, C stehen senkrecht zu OA, OB, OC und bilden untereinander ein Kraftpaar, da sie durch ein Kraftpaar hervorgebracht werden. Ihre Projektionssumme muß somit verschwinden, auch nachdem man sie um 90^0 gedreht hat, d. h. denkt man sich die Kräfte P, Q, R in den Richtungen OA, OB, OC wirken, so müssen sie Gleichgewicht halten. O muß also derart liegen, daß

$$\sin(BOC) : \sin(COA) : \sin(AOB) = P : Q : R.$$

338. Die Stange wird von vier Kräften beansprucht. Ihre Teilkräfte nach dem gewählten Achsenkreuz sind:

Widerstand in O: $\quad W \begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases}$

Druck in A: $\quad D \begin{cases} 0 \\ 0 \\ D \end{cases}$

Reibung in A: $R \begin{cases} R\sin\varphi \\ -R\cos\varphi \\ 0 \end{cases}$

Gewicht: $G \begin{cases} -G\sin\alpha \\ 0 \\ -G\cos\alpha. \end{cases}$

Die Angriffspunkte dieser Kräfte haben die Koordinaten:

$$O \begin{cases} 0 \\ 0 \\ a \end{cases} \qquad A \begin{cases} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{cases} \qquad S \begin{cases} \frac{1}{2} r\cos\varphi \\ \frac{1}{2} r\sin\varphi \\ \frac{1}{2} a. \end{cases}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\Sigma X = X + R\sin\varphi - G\sin\alpha = 0,$$
$$\Sigma Y = Y - R\cos\varphi = 0,$$
$$\Sigma Z = Z + D - G\cos\alpha = 0,$$
$$\Sigma(Zy - Yz) = -Ya + Dr\sin\varphi - \frac{1}{2} Gr\cos\alpha\sin\varphi = 0,$$
$$\Sigma(Xz - Zx) = Xa - Dr\cos\varphi - \frac{1}{2} Ga\sin\alpha + $$
$$+ \frac{1}{2} Gr\cos\alpha\cos\varphi = 0,$$
$$\Sigma(Yx - Xy) = -Rr\cos^2\varphi - Rr\sin^2\varphi + $$
$$+ \frac{1}{2} Gr\sin\alpha\sin\varphi = 0.$$

Hierzu kommt die Reibungsgleichung:

$$R = fD.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert:

$$r\sin\varphi - af\cos\varphi = rf\operatorname{cotg}\alpha,$$
$$D = \frac{G}{2f}\sin\alpha\sin\varphi,$$
$$X = \frac{1}{2} G\sin\alpha(2 - \sin^2\varphi),$$
$$Y = \frac{G}{2}\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$Z = \frac{G}{2f}(2f\cos\alpha - \sin\alpha\sin\varphi).$$

339. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{r^2 - x^2}}{f\,r\,(a - x)}$,

worin $x = OP = \frac{1}{2a}(a^2 + r^2 - l^2)$,

$$D = \frac{1}{2f}\,G\cos\varphi,$$

$$A \begin{cases} X = -\frac{1}{2fr}\,G\,x\cos\varphi, \\ Y = \frac{1}{2a}\,G\,x\sin\varphi\cos\varphi, \\ Z = \frac{1}{2}\,G\left(1 + \frac{x}{a}\sin^2\varphi\right). \end{cases}$$

340. $P = (p - 1)\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{b - f_1 r}{a - f_1 r} - G\,\frac{s - f_1 r}{a - f_1 r} = 30{,}2$ kg.

342. $P = \frac{2a(b + c)}{b(d - e)}\,Q$, worin $JA = a$,

$KH = b$, $HG = c$, $CF = d$, $DE = e$ ist.

343. Hat Q von A die Entfernung x, von H die Entfernung y, so erzeugt es in A den Druck $Q\frac{y}{x + y}$, in H den Zug $Q\frac{x}{x + y}$; in E und F wirken also die Lasten $Q\frac{y}{x + y}\cdot\frac{a}{b}$ und $Q\frac{x}{x + y}$, deren Momentensumme um O_1 gleich Qf ist.

344. $P = \frac{h_1 - h}{2R\pi}\,Q$. [Bei einer Umdrehung rückt die Schraubenspindel um h nach links, also die Last Q um $h_1 - h$ nach rechts.]

345. $Q = 670{,}3$ kg. [Aus 280 kg . 7 m . sin 20° = Q . 0,1 m.]

346. $P = \frac{p}{1 - \frac{ad}{bc}}$, $G = \frac{p}{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}$, worin

$a = \sin(\alpha + \beta - \varrho)$, $b = \sin(\alpha - \varrho)$,
$c = \sin(\alpha + \beta - \gamma - \varrho)$, $d = \sin(\alpha - \gamma - \varrho)$.
$P = 73{,}8$ kg, $G = 100{,}8$ kg.

347. $f = \frac{1}{3\pi} \log \left(\frac{P}{Q}\right) = 0{,}244$. [Ist S die Spannung des horizontalen Seilstückes, so ist $P = S\,e^{f\alpha}$, $S = Q\,e^{f\alpha}$, worin $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ der umspannte Bogen ist.]

348. Setzt man $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und nennt f die Reibungszahl zwischen Band und Rad, so ist die Spannung in A:

$$S_1 = Q \frac{c\,e^{f\pi}}{a\,e^{f\pi} + b},$$

und in B:

$$S_2 = Q \frac{c}{a\,e^{f\pi} + b}.$$

Der Druck in O wird Null, wenn

$$c = \frac{a\,e^{f\pi} + b}{e^{f\pi} + 1}.$$

349. Wenn der Träger gleichmäßig herabsinkt, sind die Kräfte im Gleichgewicht und die Reibung an den Walzen wird überwunden. Man erhält

$$R = 3\,Q\,e^{-f\pi}, \quad x : y = 7 : 5.$$

350. Zwischen den Grenzen $Q \cdot \frac{1}{1+\zeta} e^{-f\pi}$ und $Q \frac{\zeta}{1+\zeta} e^{f\pi}$. Darin ist f die Reibungszahl zwischen dem Seil und der Walze; bezüglich ζ siehe nächste Aufgabe.

351. Bezeichnet man mit S_1 bis S_5 die in den Seilstücken 1 bis 5 herrschenden Spannungen, so bestehen die Gleichungen

$$S_1 + S_2 + S_3 = Q, \qquad P = \zeta S_1,$$
$$S_4 = P + S_1 = \zeta S_2, \qquad S_5 = S_4 + S_2 = \zeta S_3.$$

Hierin ist ζ die sogenannte Rollenzahl (Verhältnis von Kraft und Last an der festen Rolle); infolge von Zapfenreibung und Seilsteifheit ist diese Zahl grösser als eins.

Aus obigen Gleichungen erhält man:

$$P = Q \frac{\zeta^3}{(1+\zeta)^3 - \zeta^3}, \quad \eta = \frac{(1+\zeta)^3 - \zeta^3}{7\,\zeta^3}.$$

352. $\eta = \frac{3}{4} \left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)^2 \frac{1}{2+\zeta}.$

353. $\eta = \frac{3}{4} \frac{[1+\zeta]^2}{\zeta^2 (1 + \zeta + \zeta^2)}.$

Bezüglich ζ siehe Aufgabe 351.

354. $P = \frac{\zeta^4}{(1+\zeta)^3} Q; \quad \eta = \frac{(1+\zeta)^3}{8\zeta^4}.$

355. $P = \zeta^2 Q; \quad \frac{b}{a} = \zeta^3.$

356. $P = \frac{\zeta^2}{1+\zeta} Q; \quad \zeta = \sqrt[3]{2}.$

357. Zwischen $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} P \zeta^3$ und $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} P \zeta^{-3}.$

358. $P = \zeta^2 Q, \; Z = Q \cos\alpha \, (1+\zeta^2).$

Bezüglich ζ siehe Aufgabe 351.

359. $Q = P \frac{a}{r} \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\varrho)\,[\operatorname{tg}(\beta+\varrho_1)+f_1]} = 3110$ kg.

$$\eta = 0{,}24, \text{ worin } \operatorname{tg}\varrho = f, \; \operatorname{tg}\varrho_1 = f_1.$$

Ist K die Kraft, die ein Keil in horizontaler Richtung ausübt, so ist

$$P\,a = 2\,K\,r\,\operatorname{tg}(\alpha+\varrho);$$

ferner ist zum Heben von Q notwendig, daß:

$$K = \frac{Q}{2}[\operatorname{tg}(\beta+\varrho_1)+f_1].$$

360. $Q = P \frac{\operatorname{cotg}(\alpha+\varrho) - \operatorname{tg}\varrho_2}{\operatorname{cotg}(\beta-\varrho_1) + \operatorname{tg}\varrho_2}.$ [Der linke Keil übt auf das Mittelstück M eine Kraft $K = \frac{P}{2}\operatorname{cotg}(\alpha+\varrho)$ aus; diese, um die Reibung $\left(\frac{P}{2}+\frac{Q}{2}\right)\operatorname{tg}\varrho_2$ verkleinert, drückt den rechten Keil nach aufwärts.]

361. Nach der Zeit $t = \sqrt{\frac{(a-b)\,M}{P}}$, worin

$$P = Q\,[\operatorname{tg}(\alpha-\varrho) - \operatorname{tg}\varrho_1],$$

M die Masse des halben Prismas, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}$ bedeutet. Die Verschiebung unterbleibt für $\alpha < \varrho + \varrho_1$. [Suche aus dem Gleichgewicht des Keiles die horizontale Kraft P desselben; der Keil wird durch P gleichförmig beschleunigt, der Weg ist $\frac{1}{2}(a-b)$.]

362. Mit Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilsteifheit ist zunächst $\quad 4\,P\,R = Q'\,(R_1 + f_1\,\varrho_1 + \xi),$

weil sich das Seil nur aufwickelt, ferner

$$Q' = Q\left(1 + 2\,f_1\frac{\varrho_2}{r}\cos 45^0 + \frac{2\,\xi}{r}\right),$$

weil sich das Seil auf- und abwickelt. Für Hanfseil soll $\xi = 0{,}06\,d^2$ gesetzt werden. Es folgt:

$$Q = 504 \text{ kg}, \; Q_0 \text{ (ohne Widerstände)} = \frac{4\,P\,R}{R_1} = 600 \text{ kg},$$

$$\text{Güteverhältnis } \eta = \frac{Q}{Q_0} = 0{,}84.$$

363. a) In horizontaler Stellung:

$$\max S_2 = \frac{G}{2\,a}\sqrt{l^2 + a^2} = 250 \text{ kg},$$

b) $\max P = \zeta_1 S_1 = \zeta_1 \zeta_2 S_2 = 325{,}5$ kg.

Die Widerstandszahlen der Rollen sind:

$$\zeta_1 = 1 + 2\,f_1 \cos\frac{C\,D\,P}{2} \cdot \frac{\varrho}{R} + \frac{2\,\xi}{R} = 1{,}136.$$

$$\zeta_2 = 1 + 2\,f_1 \cos\frac{D\,C\,B}{2} \cdot \frac{\varrho}{R} + \frac{2\,\xi}{R} = 1{,}146,$$

$\sphericalangle\, C\,D\,P = 90^0$, $\sphericalangle\, D\,C\,B = 36^0\,50'$.

ξ wie in Aufgabe 362.

364. Es ist $(1 - 0{,}04)\,P\,R = Q\,(r + \xi)$. Hierin ist $P = 4 \times 8$ kg und ξ der Einfluß der Seilsteifheit $= 0{,}06\,d^2$ (vgl. Aufg. 362), woraus $Q = 149{,}1$ kg; ohne Widerstände $Q_0 = \frac{P\,R}{r} = 160$ kg; Güteverhältnis $\eta = \frac{Q}{Q_0} = 0{,}93$.

365. Nennt man Q' die Spannung im horizontalen Seil, so ist

$$Q' = Q\left(1 + 2\,f_1 \frac{\varrho_1}{r_1} \cos 45^0 + \frac{2\,\xi}{r_1}\right) = 1{,}065\,Q,$$

worin $\xi = 0{,}06\,d^2$ (vgl. Aufg. 362);

ferner $$P = \frac{r}{R}\,Q'\left(1 + \frac{\xi}{r}\right) + f_1\,D\,\frac{\varrho}{R},$$

Zapfendruck $D = P + Q'$ im ungünstigsten Fall, woraus $P = 13{,}82$ kg

ferner ohne Widerstände: $P_0 = \frac{r}{R}\,Q = 12{,}5$ kg;

$$\text{Güteverhältnis } \eta = \frac{P_0}{P} = 0{,}90.$$

366. Es ist wegen Seilsteifheit und Reibung der Walze

$$P = \frac{r}{R}\,Q\left(1 + \frac{\xi}{r}\right) + D\,\frac{r}{R}\,\frac{\sin 2\,\varrho}{2\sin\alpha},$$

worin $\xi = 0{,}06\,d^2$ (vergleiche Aufgabe 362), D der Vertikaldruck der Walze, ϱ der Reibungswinkel an den schiefen Ebenen ist. Im ungünstigsten Falle wird

$$D_{max} = P + Q;$$

setzt man
$$\frac{\sin 2\varrho}{2\sin\alpha} = f_1,$$

so wird
$$P = Q\,\frac{r(1+f_1)+\xi}{R - f_1 r}.$$

367. Es ist nach Aufgabe 313 für das Heben von G:

$$S = G\,\frac{\sin(\varphi+\varrho)}{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2} - \varrho\right)} = 84{,}8 \text{ kg},$$

$$P = S\zeta = S\left[1 + 2f_1\frac{\varrho}{R}\cos\frac{PCB}{2} + \frac{2\xi}{R}\right] = 89{,}7 \text{ kg},$$

worin $\xi = 0{,}06\,d^2$ (Seilsteifheit für Hanf) und $\zeta = 1{,}058$ (Rollenzahl); ferner für das Halten von G:

$$S' = G\,\frac{\sin(\varphi-\varrho)}{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2} + \varrho\right)} = 66{,}8 \text{ kg},$$

$$P' = S'.\frac{1}{\zeta} = 63{,}1 \text{ kg}.$$

368. Es ist $K_1 = K_2\,e^{f\pi}$, wenn f die Reibungszahl zwischen Zapfen und Faden ist. Die Reibung beträgt $\mathfrak{R} = K_1 - K_2$. Soll Q gehoben werden, so muß $\mathfrak{R}\,r \geqq Q\,R$ sein; daraus folgt:

$$K_1 \geqq \frac{R}{r}\,Q\,\frac{e^{f\pi}}{e^{f\pi}-1}, \quad K_2 \geqq \frac{R}{r}\,Q\,\frac{1}{e^{f\pi}-1}.$$

369. Es muß $\mathfrak{R}\,r \geqq Q\,R + f_1(K_1 + K_2 + Q)r$ sein; daraus wird $K_2 \geqq \left(\frac{R}{r} + f_1\right)Q\,\frac{1}{e^{f\pi}(1-f_1) - (1+f_1)}$, $K_1 = K_2\,e^{f\pi}$.

370. Nennt man Q_1 den Horizontaldruck in jeder der beiden Schraubenmuttern, so ist

$$P = 2\,Q_1\,\frac{r}{R}\,\mathrm{tg}(\alpha+\varrho),$$

worin r der Halbmesser der Schraubenspindel, α der Steigungswinkel und ϱ der Reibungswinkel der Schraube ist. Ferner wird nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\frac{Q}{2} \cdot \delta\,(2\,b\cos\beta) + Q_1 \cdot \delta\,(b\sin\beta) = 0,$$

woraus
$$P = 2\,Q\,\frac{r}{R}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varrho).$$

371. Reduziert man P nach O, so entsteht ein Kraftpaar Pr (r = Kurbel), welches die Festigkeit der Kurbel beansprucht und eine in O wirkende Kraft P, die, als am Gestell wirkend, auch nach A verlegt werden kann. Reduziert man die in A wirkende Kraft P nach dem Berührungspunkt B, so entsteht ein Kraftpaar PR (R = Radhalbmesser), welches die rollende Reibung des Rades zu überwinden hat, d. h. das Rad bewegt, und eine in B nach vorwärts wirkende Kraft P, welche von der gleitenden Reibung des Bodens getilgt werden muß.

372. Ist S die Spannung in dem bei A befestigten Ende des Bremsbandes, S_2 in dem bei B befestigten Ende und S_1 in dem Bremsbandstücke zwischen den beiden Rädern, dann ist

$$S_1 = S\,e^{f\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}, \qquad S_2 = S_1\,e^{f\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)},$$
$$S_2 = S\,e^{f(3\pi + 2\alpha)},$$

und somit die Reibung an allen vier Rädern

$$R = 2\,[(S_1 - S) + S_2 - S_1] = 2\,S\,(e^{f(3\pi + 2\alpha)} - 1).$$

Wenn vorausgesetzt wird, daß der Hebel A C B sich nur so in der Laufkatze verschieben kann, daß er horizontal bleibt, so wird, wenn S_3 die Spannung in C D bezeichnet:

$$S_3 \cos\beta = (S + S_2)\cos\alpha.$$

Ist endlich Z die Spannung in D D_1, so ist

$$S_3 \sin(\gamma - \beta) = Z\cos\gamma$$

und endlich für das Gleichgewicht des in O_1 drehbaren Winkelhebels:

$$P\,a = 2\,Z\,r\cos\gamma.$$

Man erhält schließlich

$$R = P\,\frac{a\cos\beta}{r\cos\alpha\,\sin(\gamma - \beta)}\,\frac{e^{f(3\pi + 2\alpha)} - 1}{e^{f(3\pi + 2\alpha)} + 1}.$$

373. Zum Heben: P = 184 kg, zum Halten: P′ = 117 kg.
[Es ist
$$P = \zeta\,Q\,(\sin\alpha + \varkappa\cos\alpha),$$
worin
$$\varkappa = \frac{0{,}08\,.\,2{,}5\ \mathrm{cm} + 0{,}05\ \mathrm{cm}}{25\ \mathrm{cm}}$$
die Widerstandszahl der Zapfen- und rollenden Reibung der Räder ist:

$$\zeta = 1 + 2 \,.\, 0{,}08 \,.\, \frac{6 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} \,.\, \cos\left(\frac{90 - \alpha}{2}\right) + \frac{2\,\xi}{50 \text{ cm}}$$

die Widerstandszahl der Rolle, $\xi = 0{,}06\, d^2$ für Hanfseil. (Siehe Aufgabe 362.) Es wird $\varkappa = 0{,}01$, $\zeta = 1{,}024$. Ebenso ist

$$P' = \frac{1}{\zeta}\, Q\, (\sin\alpha - \varkappa \cos\alpha).]$$

374. Nennt man Q die Seilspannung, so wird

$$Q = G\,(\sin\alpha + \varkappa \cos\alpha),$$

$\varkappa =$ Widerstandszahl beim Transport auf Walzen $= \dfrac{0{,}1 \text{ cm}}{2\, R_1} = 0{,}01$,

woraus $$Q = 0{,}351\, G.$$

Ferner wird $P = \dfrac{r}{R}\, Q \left(1 + \dfrac{\xi}{r}\right) + f_1\, D\, \dfrac{\varrho}{R}$,

$\xi = 0{,}06\, d^2$ (Seilsteifheit für Hanf), $D = P + Q$ (im ungünstigsten Fall), woraus mit $P = 20$ kg: $Q = 77$ kg und $G = 219$ kg.

375. In der Vertikale durch S.

376. Im umgekehrten Verhältnis der Abstände der Spannungen von O. [Bringe die Spannungen S und S_1 an den Enden eines Kettenstückes an und bilde die Momente aller Kräfte des Kettenstückes um O.]

377. Die Spannung S_1 in B ist:

$$S_1 = l_1\, q \sin\beta = \frac{q\, a}{\cos\beta}.$$

Nennt man a den Parameter der Kettenlinie, K ihren Scheitel, q das Gewicht des Seiles für die Längeneinheit, so ist

$$\text{Bogen } A K = a \operatorname{tg}\alpha, \qquad B K = a \operatorname{tg}\beta$$

und $$l - l_1 = A K - B K = a\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

woraus mit $a = l_1 \sin\beta \cos\beta$ wird:

$$l_1 = \frac{l \cos\alpha}{\cos\beta \cos(\alpha - \beta)}.$$

378. Nennt man A und B die Aufhängepunkte, K den Scheitel der Kettenlinie, a ihren Parameter, s den Bogen A K, so ist

$$2\, q\, s = q \sqrt{a^2 + s^2},$$

woraus $$3\, s^2 = a^2$$

und $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{s}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nennt man ferner $AB = 2x$, so ist

$$s = \frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$$

und wegen $y^2 = a^2 + s^2 = 4s^2$:

$$s = \frac{y}{2} = \frac{a}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

woraus durch Gleichsetzung das gesuchte Verhältnis

$$\frac{2s}{2x} = \frac{2}{\sqrt{3}\ln 3}.$$

379. Ist a die Höhe von B über der X-Achse, so gilt für den Punkt C der Kettenlinie

$$y^2 = (a + h)^2 = a^2 + l^2,$$

woraus
$$a = \frac{l^2 - h^2}{2h}$$

und die Spannung in C

$$S = qy = q\frac{l^2 + h^2}{2h}.$$

Die Kettenlinie zwischen D und C ist jener zwischen A und C ähnlich: es tritt $\frac{l}{2}$ und $\frac{h}{2}$ an die Stelle von l und h und es ist die neue Spannung in C

$$S_1 = \frac{S}{2}.$$

Die Richtung der Spannung ändert sich nicht.

380. B ist der tiefste Punkt der Kettenlinie. Ist a die Höhe von B über der X-Achse, so ist

$$l^2 + a^2 = (\eta + a)^2,$$

$$l = \frac{a}{2}(e^{\xi/a} - e^{-\xi/a})$$

ferner
$$H = aq, \quad G = lq,$$

woraus
$$\eta = l\left[\sqrt{\frac{H^2}{G^2} + 1} - \frac{H}{G}\right],$$

$$\xi = \frac{Hl}{G}\ln\left[\sqrt{\frac{H^2}{G^2} + 1} + \frac{H}{G}\right].$$

381. Die Horizontale, welche die Enden der Kette verbindet, ist die X-Achse der Kettenlinie; a sei ihre Entfernung vom tiefsten Punkt derselben. Dann ist

$$a^2 + l^2 = h^2, \quad H = aq = 2ql,$$

woraus $$a = 2l, \quad h = l\sqrt{5}.$$
Ferner ist $$h + l = a e^{b/a},$$
woraus $$h = \frac{b\sqrt{5}}{2 \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

382. Bezeichnet man
$$BC = s, \quad CD = x$$
und die Reibungszahl f, so ist C der Scheitel der Kettenlinie, ihr Parameter $a = z - h$; ferner
$$z^2 = a^2 + s^2$$
und für Gleichgewicht zwischen Horizontalzug und Reibung
$$H = aq = fxq \quad \text{oder} \quad a = fx.$$
Endlich ist die Länge der Kette
$$l = z + s + x.$$
Hieraus erhält man:
$$z^2(1+f)^2 - 2z[(1+f)(h+fl) + hf^2] + (h+fl)^2 + f^2h^2 = 0.$$

383. Da die Spannung in einer Kettenlinie $S = qy$ ist und die beiden Kettenlinien bei A gleiche Spannung haben müssen, so ist $y = y_1$, d. h. die X-Achse für beide Linien ist die gleiche und für ihre Parameter gilt die Gleichung $a - a_1 = b$. Nun sind die Horizontalspannungen in B und C:
$$H = aq = fqx, \quad H_1 = a_1 q = fqx_1,$$
woraus $$x - x_1 = \frac{b}{f}.$$

384. Soll das Kettenglied in C′ im Gleichgewicht sein, so müssen beide Kettenlinien gleichen horizontalen Zug ausüben, also
$$H = a_1 q = a_2 q$$
sein, d. h. beide Kettenlinien besitzen denselben Parameter a und somit gleiche Gestalt.

Nennt man y_1, y_2 die Abstände von C′ von den X-Achsen der beiden Kettenlinien, ferner $AC' = 2b_1$, $C'B = 2b_2$, $AB = 2b$, so ist
$$y_1^2 = a^2 + l_1^2, \quad y_1 + l_1 = a e^{b_1/a},$$
$$y_2^2 = a^2 + l_2^2, \quad y_2 + l_2 = a e^{b_2/a},$$
woraus $$\left(l_1 + \sqrt{l_1^2 + a^2}\right)\left(l_2 + \sqrt{l_2^2 + a^2}\right) = a^2 e^{b/a}$$
zur Bestimmung von a folgt.

385. Ersetzt man Q durch ein Kettenstück von der Länge $m = \frac{Q}{q}$, so reicht die Kette bis zur X-Achse der Kettenlinie hinab und es ist $y = z + m;$

ist 2 s die Länge der Kette zwischen A und B, so gilt weiters

$$y^2 = a^2 + s^2, \quad 2s + z = l, \quad y + s = a\,e^{x/2a},$$

wenn a der Parameter der Kettenlinie ist. Entfernt man aus diesen Gleichungen y, s und a, so bleibt für den Ort von C die Gleichung

$$x = \sqrt{(z + l + 2m)(3z - l + 2m)}\ \ln \sqrt{\frac{z + l + 2m}{3z - l + 2m}}.$$

386. Nennt man V und H die Vertikal- und Horizontalspannung der Kette in M, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H} = \frac{1}{H} \int_C^M q\,ds$$

oder

$$q\,ds = H \,.\, d \operatorname{tg} \varphi = H \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$q = \frac{H}{r \cos^2 \varphi}$$

und wenn man q_0 das Gewicht der Einheit der Kette bei C nennt:

$$q = \frac{q_0}{\cos^2 \varphi}.$$

Aus $S^2 = V^2 + H^2$ folgt die Spannung der Kette in M:

$$S = \frac{q_0\, r}{\cos \varphi}.$$

387. Setzt man $q = k \cos \varphi$, so folgt für die Vertikalspannung an irgend einer Stelle x, y

$$V = \int q\,ds = k \int ds \cos \varphi = k\,x$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{kx}{H},$$

woraus

$$y = \frac{k}{2H} x^2$$

und wenn 2 b und h bekannt sind:

$$x^2 = \frac{b^2}{h} y.$$

Die Kette hängt in einer Parabel herab.

388. Es ist $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{h\pi}{2b} \sin \dfrac{\pi x}{2b},$

$$\frac{V}{H} = \frac{\int q\,dx}{H} = \frac{h\pi}{2b} \sin \frac{\pi x}{2b},$$

woraus durch Differenzieren

$$q = H\left(\frac{\pi}{2\,b}\right)^2 y$$

und wenn q_0 die Belastung in der Mitte von C D ist:

$$q = q_0 \frac{y}{h}.$$

389. Für die Kettenlinie des Feldes b_2 ist:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{V}{H} = \frac{B - q_2\,x}{H},\quad B = \text{Vertikalspannung in B},$$

woraus
$$H\,y = B\,x - \frac{1}{2} q_2\,x^2.$$

Für die größte Einsenkung ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 0,\quad x_1 = \frac{B}{q_2}$$

und
$$H\,y_m = \frac{B^2}{2\,q_2}.$$

Sucht man noch die Vertikalspannung B (nach der Regel der Auflagerdrücke), so wird

$$H = \frac{[q_1\,b_1{}^2 + q_2\,b_2\,(2\,b_1 + b_2)]^2}{32\,q_2\,b^2\,h_m}.$$

390. Nennt man A die Vertikalspannung am linken Auflager, so ist (nach der Regel der Auflagerdrücke)

$$A = q\,b + Q\frac{b_2}{2\,b},$$

ferner
$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{V}{H} = \frac{A - q\,x}{H},$$

woraus
$$H\,y = A\,x - \frac{1}{2} q\,x^2$$

und
$$H\,h = A\,b_1 - \frac{1}{2} q\,b_1{}^2,$$

somit
$$H = \frac{b_1\,b_2}{2\,h}\left(q + \frac{Q}{b}\right).$$

391. Solange $z \leqq \dfrac{2\,q\,b^2}{Q + 2\,q\,b}$ ist, wird die größte Einsenkung der Kette

$$h_m = \frac{h_1}{4\,q\,b^2}\,\frac{(Q\,z + 2\,q\,b^2)^2}{Q\,z + q\,b^2}$$

und ihre Entfernung von A

$$x_1 = b - \frac{Qz}{2qb}.$$

Wenn hingegen $z > \dfrac{2qb^2}{Q + 2qb}$ wird, so ist

$$h_m = h_1 \left(q + \frac{Q}{b}\right) \frac{z(2b - z)}{Qz + qb^2}$$

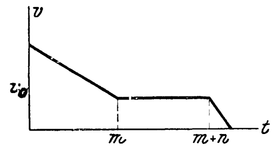
und $\qquad x_1 = z.$

Die Spannungen in A sind:

$$H = \frac{Qz + qb^2}{2h_1} \text{ horizontal}$$

$$A = qb + Q\frac{2b - z}{2b} \text{ vertikal}$$

und die Gesamtspannung $S = \sqrt{H^2 + A^2}$.



Lösung 392.

392. $s = v_0(m + n) - b_1 m\left(\frac{m}{2} + n\right) + \frac{1}{2b_2}(v_0 - b_1 m)^2$

$v_1 = \sqrt{2b_2 s}.$

393. $T = \frac{a}{v_0}, \; x = \frac{g a^2}{2{v_0}^2}.$

394. $x = \frac{a}{g}\left[a + gt - \sqrt{a^2 + 2agt}\right].$

395. $T = \frac{a}{c_1 - c_2}.$

396. $t = \frac{2s}{\sqrt{v^2 - c^2}}.$

397. Die Zeit, die das Licht benötigt, um von A aus den Spiegel in B zu erreichen, ist

$$t_1 = \frac{s + ct_1}{v};$$

die Zeit, die das Licht für den Rückweg nach A′ benötigt, ist

$$t_2 = \frac{ct_1 + s - ct}{v};$$

hieraus erhält man

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2sv}{v^2 - c^2}.$$

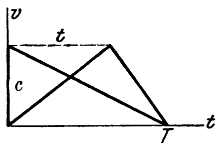
398. $T^2(\gamma_1 - \gamma_2) + 2T(v_1 - v_2) = 2a.$

399. Der erste Punkt erreicht in der Zeit $\frac{v_0}{g}$ die Höhe $\frac{v_0{}^2}{2g}$ und sinkt dann um $\frac{1}{2} g \tau^2 = x$, während der zweite Punkt um $y = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1{}^2$ steigt; es ist

$$\frac{v_0}{g} + \tau = t + t_1, \quad \frac{v_0{}^2}{2g} = x + y$$

woraus

$$t_1 = \frac{v_0}{g} - \frac{t}{2}.$$



400. $T = \frac{c}{b_1}$, $s = \frac{c^2}{2 b_1}$,

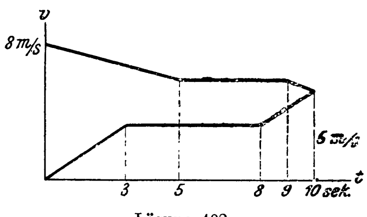
$t = \frac{c}{b_2}$, $x = \frac{b_1 b_2}{b_2 - b_1}$.

401. Man rechne die Wege der drei Punkte von der Anfangsstelle O aus und setze $OA - OB = OB - OC$. Man erhält für t die Gleichung:

$$t^2 (\gamma_1 - \gamma_2) + 2 \gamma_2 t (\tau_1 + \tau_2) = \gamma_2 (\tau_1 + \tau_2)^2 + 2 v_0 (\tau_1 - \tau_2).$$

Im besonderen $t = 10$ sek,

$$AB = AC = v_0 \tau_1 - \frac{1}{2} \gamma_1 t^2 = 730 \text{ m}.$$



Lösung 402.

402. $t = 10$ sek,
$v = 5$ m/s.

403. $n = \frac{3}{2}$.

404. $\gamma = -\frac{a}{b} e^{v/a}$. $\left[\text{Aus } \gamma = \frac{dv}{dt} = -\frac{a}{t}.\right]$

405. $s = a\left[1 - e^{-\frac{v^2}{2k}}\right]$, $\gamma = \frac{k}{a} e^{\frac{v^2}{2k}}$.

$\left[\text{Aus } v\,dv = \gamma\,ds = \frac{k\,ds}{a - s}.\right]$

406. Nach der Zeit $\frac{a^2}{\sqrt{m_1}}$.

407. Nach der Zeit $\frac{3\pi}{8k} a^{5/4}$.

408. Die anfängliche Geschwindigkeit ist

$$v_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Aus $dt = \frac{ds}{v}$ folgt: $\quad dt = 3\,b\,v\,dv$

und nach Integration: $\quad t = \frac{3}{2} b v^2 + C.$

Für $t = 0$ ist $v = v_0$, somit

$$t = \frac{3}{2} b (v^2 - v_0^2).$$

Setzt man nun $v = 2 v_0$, so bleibt

$$t = \frac{9}{2} \sqrt[3]{a^2 b}.$$

409. Ist M die bewegte Masse, so ist die Beschleunigung

$$\gamma = \frac{P}{M} = \frac{a - b v}{M}.$$

Setzt man $\gamma = \frac{dv}{dt}$, so erhält man die Differentialgleichung

$$dt = M \frac{dv}{a - b v},$$

woraus nach Integration

$$t = -\frac{M}{b} \ln (a - b v) + C.$$

Für $t = 0$ sei $v = v_0$, woraus

$$t = \frac{M}{b} \ln \frac{a - b v_0}{a - b v},$$

und somit $\quad P = P_0 e^{-\frac{bt}{M}},$

wenn P_0 die anfängliche Zugkraft ist.

410. $v^2 = v_0^2 + \frac{4 m_1}{3 a}$. [Ist x die Entfernung des Punktes m von der Anfangslage, so ist seine Beschleunigung

$$\gamma = \frac{m_1}{(a-x)^2} - \frac{m_1}{(a+x)^2},$$

Aus $v\,dv = \gamma\,dx$ folgt

$$v^2 = v_0^2 + 4\,m_1\,a\left(\frac{1}{a^2 - x^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

und für $x = \frac{a}{2}$ obiger Wert.]

411. $\gamma_y = \frac{c^2 a^2}{y^3}$. [Es ist $\frac{dx}{dt} = c \sin \varphi$, $\frac{dy}{dt} = c \cos \varphi$,

$\frac{d^2 y}{d t^2} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{d^2 x}{d t^2}$ und durch Differenziation der Gleichung der

Kettenlinie $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right),$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{y c^2}{a^2} \sin^2 \varphi - \operatorname{cotg}^2 \varphi \frac{d^2 y}{d t^2},$$

woraus $$\gamma_y = \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{y c^2}{a^2} \sin^4 \varphi$$

und der oben angegebene Ausdruck.]

412. Nennt man x den Abstand des Punktes A von der Stange, so ist $x^2 + y^2 = a^2$. Differenziert man diese Gleichung zweimal nach der Zeit und setzt

$$\frac{dx}{dt} = c,$$

so bleibt $$v = \frac{dy}{dt} = -c\sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1},$$

$$\gamma = \frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{a^2 c^2}{y^3}.$$

413. $k_2 : k_1 = 3$.

414. $v = \frac{v'}{\sin\varphi}$, $\gamma = \frac{\gamma'}{\sin\varphi}$.

[Zeichne die Nachbarlage von g; ist $d\,s'$ die Verrückung von g, ds jene von M, so ist $d\,s' = d\,s \sin\varphi$.]

415. $\gamma = 2\,s\,\omega^2 \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)$.

[Es ist $s = a \operatorname{tg}\varphi$, $\frac{d\varphi}{d\,t} = \omega$; differenziere die erste Gleichung zweimal nach t.]

416. Der Punkt M macht eine schwingende Bewegung um O. Es ist $v = \omega\sqrt{4\,r^2 - s^2}$, $\gamma = -\omega^2 s$.

[Aus $s = 2\,r \cos\varphi$ durch Differenzieren nach t; dabei ist $-\frac{d\varphi}{d\,t} = \omega$.]

417. $v = \omega\frac{a - r\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, $\gamma = \omega^2\frac{2\,a\cos\varphi - r(1 + \cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi}$.

[Aus $s = a \operatorname{cotg}\varphi - \frac{r}{\sin\varphi}$ durch Differenzieren nach t; dabei ist $-\frac{d\varphi}{d\,t} = \omega$.]

418. $v = \frac{\omega\,x\sqrt{4\,a^2 x^2 - (a^2 + x^2 - b^2)^2}}{x^2 + b^2 - a^2}$;

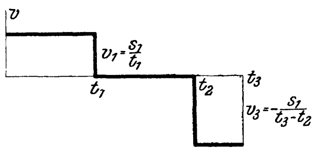
im besondern $x = b : v = \frac{a\,b\,\omega\sqrt{4\,b^2 - a^2}}{2\,b^2 - a^2}$.

[Es ist $b^2 = a^2 + x^2 - 2\,a\,x\cos\varphi$; differenziere nach t, setze $\frac{d\,x}{d\,t} = v$, $-\frac{d\varphi}{d\,t} = \omega$.]

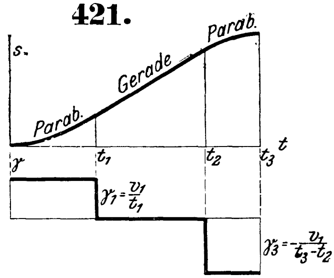
419. $v_1 = \frac{v}{\cos\varphi}$, $\gamma_1 = \frac{\gamma}{\cos\varphi} + \frac{v^2}{a}\operatorname{tg}^3\varphi$.

[Sind M′ und M_1' die Nachbarlagen von M und M_1, nennt man $M\,M' = ds$, $M_1M_1' = ds_1$, so ist $d\,s_1 = \frac{d\,s}{\cos\varphi}$ und $v_1 = \frac{v}{\cos\varphi}$. Differenziere diese Gleichung nach t und benütze die Beziehung $l = \overline{O\,M} + \overline{M_1O} = s + \frac{a}{\sin\varphi}$, woraus $0 = v - \frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\,t}$.]

420.



421.



422. Der Weg des Punktes ist die Fläche zwischen dem Diagramm und der Zeit-Achse.

Daher $$s = v_0\, t_2 - \frac{\pi}{2}\, v_0\, \frac{t_2}{2} = c\, t_2$$

und $$c = v_0\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

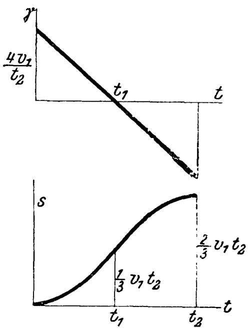
423. Die Gleichung des Weg-Zeit-Diagrammes ist

$$s^2 = \frac{s_1^{\,2}}{t_1^{\,2}}\,(2\,t\,t_1 - t^2).$$

Man erhält durch Differenzieren

$$v = \frac{s_1}{t_1}\,\frac{t_1 - t}{\sqrt{2\,t\,t_1 - t^2}},$$

$$\gamma = -\frac{s_1\,t_1}{\sqrt{(2\,t\,t_1 - t^2)^3}}.$$



Lösung 424.

Versuche, diese beiden Diagramme zu zeichnen.

Für $t = 0$ ist $\gamma_{min} = -\infty$,

für $t = t_1$ ist $\gamma_{max} = -\frac{s_1}{t_1^{\,2}}$.

424. Die Gleichung des Geschwindigkeit-Zeit-Diagrammes ist

$$v = \frac{4\,v_1}{t_2}\left(1 - \frac{t}{t_2}\right)t,$$

woraus durch Differenzieren nach t

$$\gamma = \frac{4\,v_1}{t_2}\left(1 - 2\,\frac{t}{t_2}\right)$$

und aus $$s = \int v \,.\, dt:$$

$$s = \frac{2\,v_1}{t_2}\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{t}{t_2}\right) t^2 \text{ folgt.}$$

425. Setzt man die Flächen zwischen dem Diagramm und der Zeit-Achse einander gleich, so ist der Weg der Punkte

$$s = v_1\,t_1\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = v_0\,t_1 + \frac{1}{2}\,\gamma\,t_1^{\,2},$$

woraus $$\gamma = -\frac{v_1}{t_1}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

426. Lösung ähnlich wie vorher.

$$s = \frac{1}{2}\,v_1\,t_1 + v_1\,t = \frac{1}{2}\,(V_0 + V_1)\,T_1 + V_1\,t,$$

woraus $$t = \frac{7}{12}\,t_3.$$

Versuche die Lösung mit Hilfe des Weg-Zeit-Diagrammes.

427. Lösung wie in 425. Nennt man α und β die Neigungen der beiden Geraden, so ist

$$\frac{1}{2}\,t^2\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}\,(t - t_1)^2\,\mathrm{tg}\,\beta$$

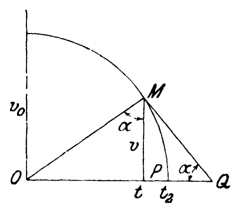
und $$t_2\,\mathrm{tg}\,\alpha = (t_2 - t_1)\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

woraus $$t = t_2 + \sqrt{t_2\,(t_2 - t_1)}.$$

428. a) Aus dem Dreieck OMP folgt:

$$\cos\alpha = \frac{v}{v_0}\,,\quad \sin\alpha = \frac{t}{t_2}\,,$$

weil OM ebensowohl durch v_0 als durch t_2 ersetzt werden kann.



Also ist: $$\frac{v^2}{v_0^{\,2}} + \frac{t^2}{t_2^{\,2}} = 1,$$

woraus die Geschwindigkeit der zweiten Bewegung

$$v = \frac{v_0}{t_2}\sqrt{t_2^{\,2} - t^2}.$$

Die Beschleunigung dieser Bewegung ist

$$\gamma = -\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\,\frac{v}{t_1}\,,$$

wenn $PQ = t_1$ bezeichnet wird. Da $OQ : OM = OM : OP$ oder

$$t + t_1 : t_2 = t_2 : t, \text{ so ist}$$

$$t_1 = \frac{t_2^2 - t^2}{t}$$

und

$$\gamma = - \frac{v\,t}{t_2^2 - t^2} = - \frac{v_0\,t}{t_2\sqrt{t_2^2 - t^2}}.$$

b) Der zweite Punkt kommt zur Ruhe, wenn $v = 0$ ist, oder $t = t_2$. Der zurückgelegte Weg wird durch die Fläche des Viertelkreises gemessen, also

$$s = \frac{\pi}{4} OM \, . \, OM = \frac{\pi}{4} v_0\,t_2$$

(mit Rücksicht auf die Dimensionen).

Der erste Punkt bewegt sich gleichförmig beschleunigt, sein Weg ist also in der Zeit t_2: $\frac{1}{2}\gamma\,t_2^2$. Setzt man

$$\frac{\pi}{4} v_0\,t_2 = \frac{1}{2}\gamma\,t_2^2$$

so folgt

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\frac{v_0}{t_2}$$

für die Beschleunigung des ersten Punktes.

c) Die Geschwindigkeit des ersten Punktes ist γt oder $\frac{\pi}{2}\frac{v_0}{t_2} . t$; die des zweiten Punktes wurde mit $\frac{v_0}{t_2}\sqrt{t_2^2 - t^2}$ ermittelt. Setzt man die beiden gleich, so folgt für die fragliche Zeit $\frac{2\,t_2}{\sqrt{4 + \pi^2}}$.

429. a) Nach $\frac{t_2}{2}$, d. h. im Schnittpunkt der Diagramme; denn hier haben die Tangenten der Kreisbögen gleiche Neigung gegen die Achse (vom Vorzeichen abgesehen), daher haben die Beschleunigungen die gleiche absolute Größe. Für die Beschleunigung des zweiten Punktes wurde in der vorhergehenden Aufgabe gefunden: $\gamma = - \frac{v_0\,t}{t_2\sqrt{t_2^2 - t^2}}$; für $t = \frac{t_2}{2}$ ist also $\frac{v_0}{t_2\sqrt{3}}$ die gemeinsame Größe der Beschleunigung.

b) Die Punkte treffen sich wieder, wenn ihr Weg der gleiche geworden ist. Da die Diagrammfläche den Weg darstellt, so treffen sich die Punkte nach der Zeit t_2; der Weg, d. h. die Diagrammfläche ist dann $\frac{\pi}{4} v_0 t_2$.

430. Lösung analog der Aufgabe 428.

$$v = \frac{v_2}{t_2} \sqrt{2\, t\, t_2 - t^2}, \quad \gamma = \frac{v_2 (t_2 - t)}{t_2 \sqrt{2\, t\, t_2 - t^2}}.$$

431. $x = \frac{g}{2} \frac{t_1 t^2}{\sqrt{t_1^2 - 2\, t^2}}$. [Sind $v_0\, V_0$ die Anfangsgeschwindigkeiten, so setze für B

$$x = v_0 \cos \alpha \,.\, t = V_0 \cos 2\, \alpha \,.\, t_1,$$

$$y = v_0 \sin \alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 = V_0 \sin 2\, \alpha \,.\, t_1 - \frac{1}{2} g\, t_1^2 = 0$$

und entferne $v_0\, V_0$ aus der Rechnung.]

432. $T = n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$.

433. $T = \frac{2}{g} \cdot \frac{c_1 c_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{c_1 \cos \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_2}$.

434. $O A = \frac{2\, v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin (\alpha - \beta) \cos \alpha}{\cos^2 \beta}$, $T = \frac{2\, v_0}{g} \cdot \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta}$.

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2} + 45^0.$$

435. $H = \frac{2\, v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}$.

436. $-$ c. [Nimm O Y senkrecht zu O A an und bilde $\gamma_y = - g \cos \beta$, $v_y = c - g \cos \beta \,.\, t$, $y = c\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \cos \beta$; setze für A: $y = 0$ und suche daraus $v_y = - c$.]

437. Für den geworfenen Punkt gilt:

$$x = v_0 \cos \alpha \,.\, t, \quad y = v_0 \sin \alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g\, t^2,$$

wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist. Die Gleichung der Geraden g kann gesetzt werden:

$$y = a - x \operatorname{tg} \beta.$$

Entfernt man aus diesen Gleichungen x und y, so bleibt

$$v_0\, t (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta) - \frac{g}{2} t^2 - a = 0.$$

Bildet man hier $\frac{d\,t}{d\alpha}$ und setzt diesen Differentialquotienten gleich Null, so bleibt

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$$

oder

$$\alpha = 90 - \beta.$$

438. $t = \frac{r}{v_0}\,\frac{\pi + 2}{2}$, $\gamma_t = \frac{v_0^2}{r}\cdot\frac{4(\pi - 2)}{(\pi + 2)^2}$,

$$v_1 = v_0\,\frac{3\,\pi - 2}{\pi + 2},$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_t^{\,2} + \ldots} \quad \frac{v_0^{\,2}}{r}\cdot\frac{1}{(\pi + 2)^2}\sqrt{16\,(\pi - 2)^2 + (3\,\pi - 2)^4},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(3\,\pi - 2)^2}{4\,(\pi - 2)}.$$

439. $b = \frac{v_0^{\,2}}{r\pi}$, $\operatorname{tg}\varphi = 4\,\pi$. [Die ganze Beschleunigung des zweiten Punktes an der Stelle M hat die Richtung der Tangente, weil die Normalbeschleunigung verschwindet.]

440. $t = \frac{r\,\pi}{v_0}$; $4\,\pi \operatorname{cotg}\varphi = 1 + \pi^2\left[\frac{v_0^{\,2}}{b\,r\,\pi} - \frac{b\,r\,\pi}{v_0^{\,2}}\right]^2$.

441. $x = \frac{k^2\,g\,v_0 \cos\alpha}{2\,(k\,g - v_0 \sin\alpha)}$, $y = -\frac{k^2 g}{8}\left(\frac{2\,v_0 \sin\alpha - k\,g}{k\,g - v_0 \sin\alpha}\right)^2$.

442. Zeichne den bewegten Punkt M in einer beliebigen Lage und suche die Resultante seiner beiden Kräfte. Sie ist parallel zu $C_1\,C_2$ und hat die Größe $k\,.\,C_1\,C_2$, also konstant. Die Bahn ist somit eine Parabel, die in A ihren Scheitel hat und deren Achse parallel zu $C_1\,C_2$ ist. Führt man die Bedingung ein, daß H ein Punkt dieser Parabel sein muß, so folgt

$$v_0 = a\sqrt{\frac{k}{m}},$$

wenn m die Masse des Punktes ist.

443. $S = \frac{G\,v^2}{g\,r\,\varphi}$, $S_1 = 127{,}2$ Dyn.

444. $v = \frac{c}{\sin\varphi}$; $\gamma = \frac{c^2}{r}\cdot\frac{1}{\sin^3\varphi}$, senkrecht zu A B.

[Die Tangentialbeschleunigung ist

$$\gamma_t = \frac{d\,v}{d\,t} = -\frac{c\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\,\varphi}{d\,t}$$

und wegen
$$v = r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{\sin\varphi},$$
$$\gamma_t = -\frac{c^2}{r}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}.$$
Die Normalbeschleunigung ist
$$\gamma_n = \frac{v^2}{r} = \frac{c^2}{r}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi},$$
daraus die ganze Beschleunigung
$$\gamma = \sqrt{\gamma_t{}^2 + \gamma_n{}^2} = \frac{c^2}{r}\cdot\frac{1}{\sin^3\varphi}$$
und
$$\cos(\gamma\gamma_n) = \frac{\gamma_n}{\gamma} = \sin\varphi.]$$

445. Differenziere die Gleichung der Ellipse zweimal nach t und setze $\gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$; es wird
$$\frac{dy}{dt} = -v_0\frac{b^2 x}{a^2 y} \text{ und } \gamma = \gamma_y = -\frac{v_0{}^2 b^4}{a^2 y^3}.$$

446. Aus $v_y . d v_y = \gamma_y . d y = -k^2 y . d y$ folgt
$$v_y = \frac{dy}{dt} = -k\sqrt{b^2 - y^2}$$
und
$$y = b \cos k t.$$
Sodann aus der Parabelgleichung
$$x = a \cos^2 k t$$
und
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a k \sin 2 k t,$$
ferner
$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = k \sin k t \sqrt{b^2 + 4 a^2 \cos^2 k t}$$
$$\gamma_x = \frac{d v_x}{dt} = -2 a k^2 \cos 2 k t = -2 k^2 (2x - a).$$
Die nächste Ruhelage ist aus $v = 0$:
$$\sin k t = 0,\ T = \frac{\pi}{k},\ x = a,\ y = -b.$$
Zwischen den beiden symmetrisch zur X-Achse gelegenen Ruhelagen macht der Punkt eine schwingende Bewegung.

447. Durch Differenzieren der Gleichung der Kettenlinie nach der Zeit erhält man

$$v_x = \frac{a\,c}{y}, \quad v_y = c\,\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{e^{x/a} + e^{-x/a}}$$

$$\gamma_x = -\frac{a^2 c^2}{2\,y^3}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right), \quad \gamma_y = \frac{a^2 c^2}{y^3}$$

$$\gamma = \frac{a\,c^2}{y^2}.$$

Die Beschleunigung ist nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichtet. Der Ausdruck für γ kann auch direkt aus $\gamma = \frac{c^2}{\varrho}$ gefunden werden, worin der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie $\varrho = \frac{y^2}{a}$ ist.

448. $y = b \cos \frac{k\,x}{v_0}$, $v^2 = {v_0}^2 + b^2 k^2 \sin^2 k\,t$. Die Bahn schneidet die X-Achse unendlich oft und zwar nach den Zeiten: $\frac{\pi}{2\,k}$, $\frac{3\,\pi}{2\,k}$, $\frac{5\,\pi}{2\,k}$ u. s. f. Der Punkt befindet sich am weitesten von der Achse nach den Zeiten: 0, $\frac{\pi}{k}$, $\frac{2\,\pi}{k}$, $\frac{3\,\pi}{k}$ u. s. f.

449. Es ist $v_x = v_0 - a\,t$, $v_y = a\,t$;

$$x = v_0\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2, \quad y = \frac{1}{2}\,a\,t^2,$$

woraus die Gleichung der Bahn des Punktes:

$$(x + y)^2 = \frac{2\,{v_0}^2}{a}\,.\,y \quad \text{(Parabel)}$$

und seine Geschwindigkeit

$$v^2 = v^2_0 + 2\,a\,(y - x).$$

Setzt man $\frac{d\,v}{d\,t} = 0$, so folgt

$$v_{min} = \frac{1}{2} v_0 \sqrt{2}$$

an der Stelle $$x_1 = \frac{3}{8}\,\frac{{v_0}^2}{a}, \quad y_1 = \frac{1}{8}\,\frac{{v_0}^2}{a}.$$

450. Aus $\gamma_x = \frac{d\,v_x}{d\,t} = \frac{a}{v_x}$ wird $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2\,a\,t$;

ebenso $$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\,b\,t$$
und $$v^2 = v_0^2 + 2\,(a + b)\,t.$$

Aus $\frac{d\,x}{d\,t} = v_x = \sqrt{v_{0x}^2 + 2\,a\,t}$ wird

$$3\,a\,x + v_{0x}^3 = (v_{0x}^2 + 2\,a\,t)^{3/2},$$
ebenso $$3\,b\,y + v_{0y}^3 = (v_{0y}^2 + 2\,b\,t)^{3/2},$$
und hieraus die Gleichung der Bahn
$$b\,(3\,a\,x + v_{0x}^3)^{2/3} - a\,(3\,b\,y + v_{0y}^3)^{2/3} = b\,v_{0x}^2 - a\,v_{0y}^2.$$

451. Es ist $\gamma_x = -(k + m)\,x$, $\gamma_y = -(k + m)\,y$,
$$v_x^2 = v_0^2 - (k + m)\,x^2,\quad v_y^2 = (k + m)\,(a^2 - y^2),$$
woraus $$v^2 = v_0^2 + (k + m)\,(a^2 - r^2).$$
Die Bahn ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{v_0}{\sqrt{k + m}}$ in O X und a in O Y. Die Umlaufzeit ist $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k + m}}$.

452. Der Punkt M bewegt sich gleichförmig auf dem Kreis mit der Geschwindigkeit $v = 2\,r\,\omega$. Seine Beschleunigung ist
$$\gamma = \gamma_n = \frac{v^2}{r} = 4\,r\,\omega^2,$$
nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet. [Ist $d\varphi$ der unendlich kleine Drehungswinkel der Geraden, so rückt M um $d\,s = 2\,r\,d\varphi$ auf dem Kreis weiter.]

453. Es ist $v^2 = \left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\,t}\right)^2$;
$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},\ \text{Polargleichung der Ellipse;}$$
$$\omega = \frac{d\varphi}{d\,t}.$$
Man erhält $$v = \frac{r\,\omega}{b}\sqrt{r\,(2\,a - r)},$$
worin a, b die Halbachsen der Ellipse sind.

454. $v = \dfrac{k}{\sin\varphi}$, daraus die Tangentialbeschleunigung

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{k^2}{r}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi},$$

$$\left[\text{weil } v = r\frac{d\varphi}{dt}, \text{ also } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{r\sin\varphi}\right];$$

ferner $\gamma_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{k^2}{r}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\varphi}$ die Normalbeschleunigung;

endlich $$\gamma = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2} = \frac{k^2}{r}\cdot\frac{1}{\sin^3\varphi}.$$

Die Richtung von γ liegt in der Geraden g.

455. Es ist $\psi = 2\varphi$, $v = r\dfrac{d\psi}{dt} = 2r\omega$, konstant;

$$\gamma = \frac{v^2}{r} = 4r\omega^2,$$

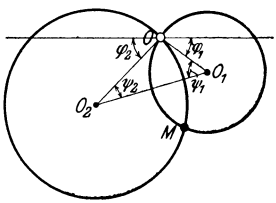
nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet.

Ferner $$OM = x = 2r\cos\varphi,$$

$$v_1 = -\frac{dx}{dt} = 2r\omega\sin\varphi = \omega\sqrt{4r^2 - x^2},\ \gamma_1 = \frac{dv_1}{dt} = x\omega^2.$$

456. Nennt man φ_1, φ_2 die Drehungswinkel der beiden Kreise,

so ist $$v_1 = 2r\frac{d\psi_1}{dt},\ v_2 = 2R\frac{d\psi_2}{dt},$$



$$\psi_1 + \psi_2 = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt},\ \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt},$$

$$R\sin\psi_2 = r\sin\psi_1,$$

woraus die Gleichungen folgen:

$$\frac{v_1}{r} + \frac{v_2}{R} = 2(\omega_1 + \omega_2),\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi_2}$$

und somit $$v_1 = \frac{2Rr(\omega_1 + \omega_2)}{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi}(R + r\cos\varphi)$$

$$v_2 = \frac{2Rr(\omega_1 + \omega_2)}{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi}(r + R\cos\varphi),$$

worin $$\varphi = (\omega_1 + \omega_2)t \quad \text{ist.}$$

457. Bezeichnet man $O_1 M = r_1$, $\sphericalangle M O_1 X = \varphi_1$, so wird

$$r \sin \varphi = r_1 \sin \varphi_1$$
$$r \cos \varphi + a = r_1 \cos \varphi_1$$
$$r \sin (\varphi - \varphi_1) = a \sin \varphi_1.$$

Differenziert man die letzte Gleichung, setzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$$

und entfernt φ_1 mit Hilfe der beiden anderen Gleichungen, so bleibt für die Differentialgleichung der Bahn:

$$\frac{dr}{d\varphi} a \omega \sin \varphi + (\omega - \omega_1) r (r + a \cos \varphi) = a \omega_1 (a + r \cos \varphi).$$

Wenn beide Gerade gleichzeitig durch X gehen, so wird

$$\varphi = 0, \quad \frac{dr}{d\varphi} = 0$$

und

$$r = a \frac{\omega_1}{\omega - \omega_1}$$

der Abstand des Schnittpunkts der Bahn mit X von O. Außerdem geht die Bahn durch O und O_1.

458. Aus den Gleichungen für die Geschwindigkeit

$$v^2 = c^2 \left[u^2 + \left(-\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right] \ldots \quad c = \text{doppelte Flächengeschwindigkeit,}$$

und für die Beschleunigung

$$\gamma = \mp c^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right] \ldots \quad \begin{matrix}\text{Abstoßung}\\ \text{Anziehung,}\end{matrix}$$

worin $u = \frac{1}{r}$ bedeutet.

Es ist hier $r = 2 a \cos \varphi$, woraus

$$v = \frac{2ac}{r^2}, \quad \gamma = \frac{8 a^2 c^2}{r^5}.$$

459. Wie in 458, wobei $r^2 = a^2 - e^2 + 2 r e \cos \varphi$, wenn $OA = a$, $OC = e$ bezeichnet wird.

Man findet

$$v = v_0 \frac{2a(a+e)}{r^2 - e^2 + a^2},$$
$$v_1 = v_0 \frac{a+e}{a-e}.$$

Die Flächengeschwindigkeit $\frac{c}{2}$ wird aus der Anfangsbedingung bestimmt.

460. Wie in 458, wobei $r = 2p \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$,

$p =$ Halbparameter der Parabel.

Man findet: $$\gamma = \frac{c^2}{4p^3} \cdot \frac{\sin^4\varphi}{\cos^5\varphi}.$$

461. Wie in 458. $v = \frac{r_0 v_0}{r}$, $\gamma = \frac{r_0{}^2 v_0{}^2}{r^3}$.

462. Wie in 458. $\gamma = \frac{3a^4c^2}{r^7}$. Ist F die Fläche der rechten Hälfte der Lemniskate, so ist

$$F = \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \frac{1}{2} r^2 . (-d\varphi) = \frac{a^2}{2};$$

die Flächengeschwindigkeit ist $\frac{c}{2}$, die Zeit zum Durchlaufen der Hälfte $\frac{2F}{c} = \frac{a^2}{c}$, die Umlaufzeit $\frac{2a^2}{c}$.

463. Setzt man $v_x = x'$, $v_y = y'$, $\gamma_x = x''$, $\gamma_y = y''$, so ist für die Zentralbewegung allgemein

$$x'y - y'x = c, \quad x''y - y''x = 0.$$

Differenziert man die Gleichung der Bahn, so wird

$$x^3x' + y^3y' = 0,$$

woraus $$x' = \frac{c}{a^4} y^3, \qquad y' = -\frac{c}{a^4} x^3$$

und diese wieder differenziert

$$x'' = -\frac{3c^2}{a^8} y^2 x^3, \qquad y'' = -\frac{3c^2}{a^8} x^2 y^3.$$

Dann wird $$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{c}{a^4}\sqrt{x^6 + y^6}$$

$$\gamma = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \frac{3c^2}{2a^8} r(r^4 - a^4);$$

für den Anfangszustand wird $v_0 = \frac{c}{a}$, somit

$$v = \frac{v_0}{a^3}\sqrt{x^6 + y^6}, \ \gamma = -\frac{3v_0{}^2}{2a^6} r(r^4 - a^4).$$

464. Setzt man in 458: $v^2 = c^2 \left[u^2 + \left(-\frac{d\,u}{d\,\varphi}\right)^2\right]$, $v = a\,u$,

so wird
$$-\frac{d\,u}{d\,\varphi} = \frac{1}{c}\,u\sqrt{a^2 - c^2}$$

und daraus
$$\frac{1}{u} = r = e^{\varphi/c\sqrt{a^2-c^2}};$$

die Bahn ist eine logarithmische Spirale.

Aus $\gamma = c^2\,u^2\left[u + \frac{d^2 u}{d\,\varphi^2}\right]$ wird $\gamma = \frac{a^2}{r^3}$.

Endlich aus der allgemeinen Beziehung $c = r^2\,\frac{d\,\varphi}{d\,t}$

wird
$$\varphi = \frac{c}{2\sqrt{a^2 - c^2}}\ln\left(2\,t\sqrt{a^2 - c^2} + 1\right)$$

und
$$r^2 = 2\,t\sqrt{a^2 - c^2} + 1.$$

465. Es ist $\frac{d\,\varphi}{d\,t} = \omega$ und $\gamma_x \cos\varphi + \gamma_y \sin\varphi = 0$, weil γ senkrecht zu r ist; differenziert man

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$$

zweimal nach t und setzt die Werte für y_x, y_y oben ein, so wird obige Gleichung

$$\frac{d^2 r}{d\,t^2} = r\,\omega^2$$

oder
$$r = a\,e^{\varphi} + b\,e^{-\varphi}.$$

Für den Anfangszustand ist

$$r_0 = a + b,\ \ \frac{d\,r}{d\,t} = 0 = a - b,$$

also
$$a = b = \frac{r_0}{2} \text{ und } r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)$$

die Gleichung der Bahn. Die Beschleunigung wird

$$\gamma = \gamma_y \cos\varphi - \gamma_x \sin\varphi = 2\,\omega\,\frac{d\,r}{d\,t}$$

und mit Hilfe der Bahngleichung

$$\gamma = 2\,\omega^2\sqrt{r^2 - r_0^2}.$$

466. $(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 = \frac{4 v_0^2}{a g} \operatorname{tg} \varphi$.

[Die Länge eines Dachsparrens ist

$$\frac{a}{2 \cos \varphi} = v_0 t + \frac{1}{2} g \sin \varphi \cdot t^2,$$

wenn t die Zeit bedeutet, welche das Wasser zum Abfluß braucht. Differenziere die Gleichung nach φ, setze $\frac{d t}{d \varphi} = 0$ und entferne t aus den Gleichungen.]

467. Es muß $A C = B C$ sein. [Ziehe den Kreis, der in A und B berührt, und zeige mit Hilfe der isochronen Kreissehnen, daß A B von allen durch A gehenden Geraden die kleinste Fallzeit beansprucht.]

468. A B muß durch den tiefsten Punkt C von k gehen. [Ziehe den Kreis, der k berührt und dessen Mittelpunkt unter A liegt; sein Berührungspunkt B liegt in A C. Mit Hilfe der isochronen Kreissehnen kann dann gezeigt werden, daß A B die kleinste Fallzeit erfordert.]

469. $\frac{b}{a} = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha \sin (\beta - \alpha)}{\cos^2 \beta}$.

470. In einer Kreisevolvente; es ist $v = v_0$ und $T = \frac{l^2}{2 r v_0}$.

[Es ist nur die Spannung des Fadens vorhanden, daher die Tangentialbeschleunigung des Punktes $\frac{d v}{d t} = 0$.

Für eine beliebige Stelle ist das Wegelement

$$ds = \varrho \, d \varphi = (l - r \varphi) \, d \varphi,$$

woraus

$$s = \frac{1}{2} \frac{l^2}{r} = v_0 T.]$$

471. $h = r\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

[Die Geschwindigkeit an der Stelle M, wo der Druck zwischen Punkt und Bahn Null wird, ist $v_1^2 = 2 g (h - r + r \cos \alpha)$; wähle M als Anfangspunkt eines schiefen Wurfes, der mit der Geschwindigkeit v_1 beginnt und durch den Mittelpunkt des Kreises geht.]

472. $D\varrho = G\left(p - \frac{v_0^2}{g}\right)$. [Der Druck der Kugel auf das Rohr ist an beliebiger Stelle

$$D = G\cos\psi - \frac{m\,v^2}{\varrho}.$$

ψ ist der Winkel zwischen Normale und Vertikale; benütze die Gleichung $v^2 = v_0^2 + 2\,g\,x$ für die Geschwindigkeit und $\varrho\cos\psi = p + 2\,x$ für den Krümmungshalbmesser der Parabel.]

473. Nennt man a die Dreieckseite, ferner

$$A\,m = x,\ C\,m = r,\ \sphericalangle\,C\,m\,B = \varphi,$$

so ist die Mittelkraft aller auf m wirkenden Anziehungskräfte in Richtung von A B:

$$P = -k\,x + k\,(a - x) + k\,r\cos\varphi$$

oder

$$P = \frac{3\,k}{2}(a - 2\,x).$$

Setzt man

$$v\,d\,v = \gamma\,d\,x = \frac{P}{m}\,d\,x,$$

so wird

$$v\,d\,v = \frac{3\,k}{2\,m}(a - 2\,x)\,d\,x$$

und nach Integration

$$v = \sqrt{\frac{3\,k}{m}}\sqrt{a\,x - x^2},$$

wenn für den Anfang der Bewegung $x = 0$ und $v = 0$ angenommen wird.

Setzt man nun $v = \frac{d\,x}{d\,t}$, so wird

$$\sqrt{\frac{3\,k}{m}}\,.\,d\,t = \frac{d\,x}{\sqrt{a\,x - x^2}}$$

und

$$t = \sqrt{\frac{m}{3\,k}}\int\frac{d\,x}{\sqrt{a\,x - x^2}} = C - \sqrt{\frac{m}{3\,k}}\arcsin\frac{a - 2\,x}{a},$$

oder wenn $t = 0,\ x = 0$ gesetzt wird:

$$t = \sqrt{\frac{m}{3\,k}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a - 2\,x}{a}\right]$$

oder

$$t = \sqrt{\frac{m}{3\,k}}\arccos\frac{a - 2\,x}{a};$$

für $x = a$ wird dann die gewünschte Zeit

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{3\,k}}.$$

474. Nennt man φ den Zentriwinkel, welcher der Sehne $O\,M = r$ entspricht, so ist $r = 2\,a \sin\frac{\varphi}{2}$, das Bogenelement des Kreises $ds = a\,d\varphi$ und

$$v\,dv = \gamma_t \,.\, ds = k^2\, r \cos\frac{\varphi}{2} \,.\, a\,d\varphi$$
$$= a^2\, k^2 \sin\varphi\, d\varphi,$$

woraus mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung

$$v = 2\,ak \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Der Bahndruck wird

$$D = \frac{m\,v^2}{a} + m\,k^2\, r \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{2}\,\frac{m\,k^2\,r^2}{a}.$$

Darin ist m die Masse des Punktes.

475. Denkt man sich einen Punkt M konstruiert, dessen Koordinaten O A, O B sind, so macht dieser Punkt die Bewegung mit; seine Beschleunigungen sind

$$\gamma_x = -\frac{a}{r^2}\cos\varphi \quad \text{und} \quad \gamma_y = -\frac{a}{r^2}\sin\varphi,$$

d. h. er bewegt sich in der Geraden M O mit der Beschleunigung $\gamma = \frac{a}{r^2}$. Nennt man v seine Geschwindigkeit, so wird

$$v\,dv = \frac{a}{r^2}(-\,d\,r),$$

woraus
$$v^2 = 2\,a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Nun ist
$$v = -\frac{d\,r}{d\,t},$$

also wird
$$\sqrt{2\,a}\,d\,t = -\frac{\sqrt{r}\,.\,d\,r}{\sqrt{1 - r/r_0}}$$

und mit $\frac{r}{r_0} = x^2$:

$$\sqrt{2a}\,t = -\int\limits_{r_0}^{0} \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{1 - r/r_0}} = 2\,r_0{}^{3/2} \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

woraus
$$t = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{3/2}.$$

476. Die Geschwindigkeit des gleitenden Punktes ist, wenn er nach M kommt,

$$v = \sqrt{2\,g\,r \sin\varphi} = \frac{d\,s}{d\,t}.$$

Das Bogenelement ds ergibt sich aus

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2$$

mit
$$ds = a\,d\varphi \sqrt{\frac{2}{\sin 2\,\varphi}};$$

also ist
$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \sin^{-5/4}\varphi \cos^{-3/4}\varphi\, d\varphi.$$

Zur Integration setze $\operatorname{cotg}\varphi = x^4$.

Es wird die Fallzeit

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt[4]{\operatorname{cotg}\varphi}.$$

Ebensogroß ist die Fallzeit auf der Geraden O M.

477. Ist O der Mittelpunkt des Kreises, O A = a, so wird allgemein
$$r^2 = a^2 + s^2 + 2\,a\,s \cos\varphi.$$

Nennt man ψ den Winkel zwischen s und der Vertikalen Y, so ist die Beschleunigung des Falles

$$\gamma = g \cos\psi = g \sin\varphi \sin\alpha,$$

letzteres aus dem sphärischen Dreieck s X Y. Es wird also

$$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \sin\varphi \sin\alpha.$$

Nach Entfernung von φ ist mit $\frac{1}{s^2} = x$:

$$[(r^2 - a^2)\,x - 1]^2 - 4\,a^2\,x + \frac{16\,a^2}{g^2 \sin^2\alpha} \cdot \frac{1}{t^4} = 0.$$

Differenziert man nach x und setzt $\frac{d\,t}{d\,x} = 0$, so wird $x = \frac{a^2 + r^2}{(r^2 - a^2)^2}$,

also
$$s_1 = \frac{r^2 - a^2}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

und damit $\quad t_{min}^2 = \dfrac{2(r^2 - a^2)}{g\,r \sin\alpha}, \qquad \sin\varphi_1 = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}.$

478. Es ist $v\,dv = \gamma\,ds = -\dfrac{(a-1)v^2}{b+s}.ds$, woraus $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{(a-1)ds}{b+s}$ und durch Integration und bei Berücksichtigung, daß anfangs $v = v_0$, $s = 0$ ist:

$$v = v_0\left(\frac{b}{b+s}\right)^{a-1}.$$

Setzt man $v = \dfrac{ds}{dt}$, so wird

$$(b+s)^{a-1}ds = v_0\,b^{a-1}dt.$$

Nach Integration und Berücksichtigung, daß anfangs $t = 0$, $s = 0$ ist, folgt:

$$s = b\left[\left(\frac{a\,v_0\,t}{b} + 1\right)^{1/a} - 1\right]$$

und durch Differenziation nach t

$$v = v_0\left(\frac{a\,v_0\,t}{b} + 1\right)^{\frac{1-a}{a}},$$

$$\gamma = -\frac{a-1}{b}\,v_0^2\left(\frac{a\,v_0\,t}{b} + 1\right)^{\frac{1}{a}-2}.$$

479. $v = a.\dfrac{v_0 \cos\dfrac{gt}{a} - a\sin\dfrac{gt}{a}}{a\cos\dfrac{gt}{a} + v_0\sin\dfrac{gt}{a}},$

$$s = \frac{a^2}{g}.\ln\left(\frac{v_0}{a}\sin\frac{gt}{a} + \cos\frac{gt}{a}\right), \quad s = \frac{1}{2k}.\ln\frac{g + k\,v_0^2}{g + k\,v^2},$$

$$\text{Steigzeit } T = \frac{1}{\sqrt{gk}}\,\text{arc tg}\left(v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\right),$$

Steighöhe $H = \dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{g + kv_0^2}{g}$. Darin bedeutet: $a = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$, Verzögerung des Widerstandes $= k\,v^2$.

480. $T = \dfrac{2}{k}\sqrt{v_0}$, k = Konstante.

481. $T = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{v_0}{v_0 - k\,a}$, k = Konstante.

482. Das Stück BC des Schleppseiles nimmt die Form einer Kettenlinie mit dem Scheitel in C an. Es ist dann mit den Bezeichnungen der Aufgabe 382

$$l = s + x, \quad z^2 = a^2 + s^2, \quad a = f x, \quad z = h + a$$

woraus die Länge CD des auf dem Boden schleppenden Seiles:

$$x = l + f h - \sqrt{2 f h l + f^2 h^2 + h^2}.$$

Der Ballon erleidet die Verzögerung des Luftwiderstandes $k v^2$ und die Verzögerung der Reibung $g \frac{f x q}{G + l q} = k_1$, worin q das Gewicht der Längeneinheit des Seiles und G das Gewicht des Ballons samt Gondel ist.

Die Beschleunigung des Ballons ist dann

$$\gamma = -(k v^2 + k_1) \; .$$

und wie in Aufgabe 479 der Weg bis zum Stillstand

$$\frac{1}{2 k} \ln \left(1 + \frac{k}{k_1} v_0^2\right)$$

und die Zeit bis dahin

$$\frac{1}{\sqrt{k k_1}} \operatorname{arc\,tg} \left(v_0 \sqrt{\frac{k}{k_1}}\right).$$

483. Ist $v = r \omega$ die Umfangsgeschwindigkeit der Welle in der Bremse und sinkt sie während der Drehung mit der Geschwindigkeit $v_1 = \frac{d x}{d t}$, so hat ein Punkt am Umfange der Welle die Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{v^2 + v_1^2}$$

und die Reibung in der Bremse ist dieser Geschwindigkeit entgegengesetzt; es ist also

$$R : R_1 = V : v_1$$

wenn R_1 die Reibung der Welle für die Abwärtsbewegung ist. Die Bewegungsgleichung der Welle lautet:

$$\frac{G}{g} \frac{d^2 x}{d t^2} = G - c x - R_1$$

worin x, der Abwärtsweg der Welle, von der genannten Anfangslage gezählt und $c x$ die Federkraft ist. Wenn man v_1 als klein gegen v vernachlässigt, so bleibt

$$\frac{G}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = G - cx - \frac{R}{r\omega}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Setzt man $x = Ce^{\alpha t} + K$ in diese Gleichung ein, so erhält man die Gleichungen:

$$G - cK = 0, \quad \frac{G}{g}\alpha^2 + \frac{R}{r\omega}\alpha + c = 0,$$

woraus die Wurzeln:

$$\alpha_1 = -\frac{Rg}{2Gr\omega} + \sqrt{\left(\frac{Rg}{2Gr\omega}\right)^2 - \frac{gc}{G}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{Rg}{2Gr\omega} - \sqrt{\left(\frac{Rg}{2Gr\omega}\right)^2 - \frac{gc}{G}}$$

und

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{G}{c}.$$

So lange die Reibung $R > 2r\omega\sqrt{\frac{Gc}{g}}$, sind α_1 und α_2 reell und negativ, also nähert sich x asymptotisch dem Werte $\frac{G}{c}$, den es nach unendlich großer Zeit erreicht.

Die Konstanten C_1 und C_2 erhält man aus der Bedingung, daß anfangs $t = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, aus den Gleichungen

$$0 = C_1 + C_2 + \frac{G}{c}$$

$$0 = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2$$

mit:

$$C_1 = \frac{G}{c}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad C_2 = -\frac{G}{c}\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

484. Setzt man die Koordinaten des Punktes

$$x = r\sin\varphi, \quad y = r\cos\varphi$$

so wird die Normalbeschleunigung

$$\gamma_n = \frac{v^2}{r} = g\cos\varphi,$$

also

$$v^2 = gy,$$

ferner die Tangentialbeschleunigung

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = g\sin\varphi - k\delta v^2$$

und wegen $$2\,v\,\frac{d\,v}{d\,t} = g\,.\,\frac{d\,y}{d\,t},$$

$$v_y = \frac{d\,y}{d\,t} = -\,v\sin\varphi$$

wird schließlich $$\delta = \frac{3}{2\,k\,r}\,.\,\frac{x}{y}.$$

485. Es ist die Beschleunigung nach der aufwärts gerichteten Y-Achse $$\gamma_y = -\,g - k\,v\sin\varphi = -\,(g + k\,v_y),$$

woraus $$d\,t = -\,\frac{d\,v_y}{g + k\,v_y}$$

und $$t = \frac{1}{k}\ln\frac{g + k\,v_0\sin\alpha}{g + k\,v_y}.$$

Für die höchste Stelle der Bahn ist $v_y = 0$, also

$$T = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{k}{g}\,v_0\sin\alpha\right).$$

486. $$v_0{}^2 = 2\,a\,g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha) + \frac{b\,g}{\sin 2\,\alpha},$$

$$v_2{}^2 = 2\,a\,g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \frac{b\,g}{\sin 2\,\alpha}.$$

[Nennt man v_1 die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt am Ende von a ankommt, so ist

$$v_1{}^2 = v_0{}^2 - 2\,a\,g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha);$$

ferner die Wurfweite

$$h = \frac{v_1{}^2}{2\,g}\sin 2\,\alpha$$

und endlich $$v_2{}^2 = v_1{}^2 - 2\,a\,g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)].$$

487. Auf einem durch A gehenden Kreis vom Durchmesser $\frac{g\,t^2}{2\cos\varrho}$; seine Tangente in A ist nach rechts um ϱ gegen die Horizontale geneigt.

488. Es ist die Beschleunigung des Punktes

$$\gamma = -\,g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha) - a\,v^2 = -\,(k + a\,v^2),$$

woraus $$d\,t = -\,\frac{d\,v}{k + a\,v^2}$$

und $$t = \frac{1}{\sqrt{ak}}\left(\operatorname{arc\,tg} v_0\sqrt{\frac{a}{k}} - \operatorname{arc\,tg} v\sqrt{\frac{a}{k}}\right);$$

für $v = 0$ wird $\quad T = \frac{1}{\sqrt{ak}} \operatorname{arc\,tg} \left(v_0 \sqrt{\frac{a}{k}} \right).$

Ferner wird aus $v\,dv = \gamma\,ds = -(k + a v^2)\,.\,ds$

$$ds = -\frac{v\,d\,v}{k + a v^2},$$

$$s = \frac{1}{2a} \ln \frac{k + a v_0{}^2}{k + a v^2}$$

und für $v = 0$: $\quad L = \frac{1}{2a} \ln \left(1 + \frac{a}{k} v_0{}^2 \right).$

489. Für irgend eine Mittellage des Punktes in φ ist der Druck D zwischen Punkt und Bahn:

$$D = G \cos\varphi + \frac{G}{g} r\,\omega^2,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit um O ist. Die Tangentialbeschleunigung des Punktes wird

$$\gamma_t = r\,.\,\frac{d\,\omega}{d\,t} = g \sin\varphi - f \frac{D}{m}$$

und die Winkelbeschleunigung

$$\lambda = \frac{d\,\omega}{d\,t} = f\,\omega^2 - \frac{g}{r} (\sin\varphi - f \cos\varphi).$$

Aus $\omega\,d\omega = \lambda\,d\,\varphi$ wird

$$\omega\,d\,\omega = \left[f\,\omega^2 - \frac{g}{r} (\sin\varphi - f\cos\varphi) \right] d\,\varphi.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung liefert

$$\omega^2 = C\,e^{2f\varphi} + \frac{2\,g}{r(1 + 4\,f^2)} [3\,f \sin\varphi + \cos\varphi\,(1 - 2\,f^2)].$$

Aus $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\omega = 0$ wird die Konstante

$$C = -\frac{6\,f\,g}{r(1 + 4\,f^2)} e^{-f\pi}$$

und $\omega^2 = \frac{2\,g}{r(1 + 4\,f^2)} [3\,f \sin\varphi + \cos\varphi\,(1 - 2\,f^2) - 3\,f\,e^{f(2\varphi - \pi)}].$

Endlich für $\varphi = 0$ wird

$$v_1{}^2 = r^2\,\omega_1{}^2 = \frac{2\,g\,r}{1 + 4\,f^2} (1 \quad 2\,f^2 - 3\,f\,e^{-f\pi}).$$

490. $t = 3{,}4$ sek, $\gamma = -2{,}941\ m/s^2$.

491. $v = 2{,}683\ m/s$, $t = 8{,}94$ sek.

492. $P = 2031$ kg. [Es ist $v = \gamma t$ und $\gamma = g \frac{P - W}{G}$, worin $W = \frac{1}{200} G$ ist. Es folgt $P = G \left[\frac{1}{5g} + \frac{1}{200}\right]$.]

493. Zwischen $+90^0$ und -90^0.

494. $\omega = 16{,}58\ \text{sek}^{-1}$.

495. $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{a t^2}$; $t_1 = \sqrt{\frac{1}{a}}$. [Es ist $\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma_t}{\gamma_n}$, $\gamma_t = a r$, $\gamma_n = \frac{v^2}{r} = a^2 r t^2$.]

496. $\gamma = r \lambda \operatorname{tg} \sigma$. [Die Geschwindigkeit in Richtung der Achse ist $r \omega \operatorname{tg} \sigma$.]

497. $x = r \omega t (\operatorname{tg} \sigma - \operatorname{tg} \sigma_1)$.

498. $r r_1 = -\left(\frac{c}{\omega}\right)^2$.

499. $\lambda = \frac{a \omega_0^2}{(1 - a \omega_0 t)^2}$. [Es ist $\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma_t}{\gamma_n} = \frac{r^2 \lambda}{v^2} = a$, $v = r \omega$, woraus $\lambda = \frac{d \omega}{d t} = a \omega^2$, $a\, d t = \frac{d \omega}{\omega^2}$, durch Integration $\omega = \frac{\omega_0}{1 - a t \omega_0}$, woraus durch Differenzieren nach t obiger Ausdruck hervorgeht.]

500. Die Scheibe III dreht sich augenblicklich um den Schwerpunkt S des Dreiecks A B C. Der gesuchte Ort ist ein Kreis mit dem Durchmesser A S.

501. $x = +\omega_1$, $y = 3(\omega_1 - \omega)$.

502. Der Aufgabe entsprechen zwei Punkte A und B, für welche

$$O A = O B = \sqrt{r_1^2 + a^2 \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1 + \omega}}.$$

Ihre Geschwindigkeit parallel zu $O O_1$ ist

$$v = \sqrt{r_1^2 (\omega + \omega_1)^2 - a^2 \omega^2}.$$

503. $\omega_1 = \frac{\omega \sin \alpha}{k\,m}$, $\omega_2 = \frac{\omega \sin \beta}{k\,n}$, $\omega_3 = \frac{\omega \sin \gamma}{k\,p}$,

worin $$k = \frac{\sin \alpha}{m} + \frac{\sin \beta}{n} + \frac{\sin \gamma}{p}.$$

[Behandle O als Schwerpunkt von A, B, C, wenn in diesen Punkten ω_1, ω_2, ω_3 als Gewichte angebracht werden. Bilde die Momente der Gewichte um O A, so wird

$$\omega_3\, p \sin \beta = \omega_2\, n \sin \gamma,$$

woraus $$\frac{\omega_3\, p}{\sin \gamma} = \frac{\omega_2\, n}{\sin \beta} = \frac{\omega_1\, m}{\sin \alpha}.$$

Überdies ist $$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3.]$$

504. Eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 \sqrt{14}$. Ihre Achse schließt mit den drei gegebenen die Winkel ein:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

505. $$\omega^2 = {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 + {\omega_3}^2,$$
$$\omega\, \tau = a\, \omega_2\, \omega_3 + b\, \omega_3\, \omega_1 + c\, \omega_1\, \omega_2.$$

506. Die resultierende Bewegung ist eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Ihre Achse liegt links von der gegebenen ω_1 und ist ihr im Abstand $a \frac{\omega}{\omega_1}$ parallel.

507. $\omega_2 = \omega_3$, $\omega_1 = -\omega_3 \sqrt{2}$; $\tau = a\, \omega_3$. senkrecht in die Bildebene hinein.

508. Die Schraubenachse wird parallel bleiben und senkrecht aus der Bildebene hervortreten um die Strecke $\frac{\tau_1}{\omega} \sin \varphi$. Die neue Schraubenbewegung hat ungeänderte Winkelgeschwindigkeit ω, hingegen die neue Translationsgeschwindigkeit $\tau + \tau_1 \cos \varphi$.

509. Eine Schraubenbewegung um die Diagonale A B mit der Translationsgeschwindigkeit $2\sqrt{3}\,\tau$ und der Winkelgeschwindigkeit $2\sqrt{3}\,\omega$.

510. Die zweite Teilbewegung ist eine Schraubenbewegung mit der Translationsgeschwindigkeit $\frac{\sqrt{7}}{4}\tau$ und der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\sqrt{7}}{3}\omega$. Ihre Achse liegt hinter der Bildebene, ihr parallel und um $\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\tau}{\omega}$ von ihr entfernt. Die Neigung α der resultierenden Achse gegen ω ist $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$, gegen ω_1 um 60^0 größer. Die Projektion der Achse auf die Bildebene geht durch O. [Suche erst die resultierende Translationsgeschwindigkeit τ_2 aus τ und $-\tau_1$; sie ist $\frac{\sqrt{7}}{2}\tau$ und hat gegen τ die Neigung $\sin\varphi = \frac{3\sqrt{21}}{14}$; suche ebenso die resultierende Winkelgeschwindigkeit ω_2 aus ω und $-\omega_1$; sie ist $\frac{\sqrt{7}}{3}\omega$ und hat gegen ω die Neigung $\sin\psi = \frac{\sqrt{21}}{14}$; endlich setze τ_2 und ω_2 zu einer Schraubenbewegung zusammen; ihre Neigung ist $\cos(\varphi - \psi) = \frac{1}{2}$.]

511. Die resultierende Bewegung ist eine Schraubenbewegung mit der Translationsgeschwindigkeit $\frac{\tau_1}{2}\cdot\frac{4+5\cos\alpha}{\sqrt{5+4\cos\alpha}}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1\sqrt{5+4\cos\alpha}$. Die resultierende Schraubenachse A ist parallel der Ebene $A_1\,A_2$; sie ist hinter ihr gelegen, um $\frac{\tau_1}{2\,\omega_1}\cdot\frac{3\sin\alpha}{5+4\cos\alpha}$ von ihr entfernt, und schneidet die in O errichtete Senkrechte zu ihr. Ihre Winkel sind:

$$\operatorname{tg}(A\,A_1) = \frac{2\sin\alpha}{1+2\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}(A\,A_2) = \frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}.$$

512. Die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Stangen X und Y sind gleich $\frac{c}{2r}$. [Jede von ihnen dreht sich um $\frac{d\varphi}{2}$, wenn O M sich um $d\varphi$ dreht.]

$$v_A = c \sin\frac{\varphi}{2}, \quad v_B = c \cos\frac{\varphi}{2}.$$

$$\left[\text{Aus } s = AM = 2r\cos\frac{\varphi}{2}, \quad v_A = -\frac{ds}{dt}.\right]$$

513. Eine Parabel, deren Scheiteltangente g, deren Brennpunkt A ist.

514. Die Richtung der Geschwindigkeit von M geht durch den höchsten Punkt des Kreises; ihre Größe ist $2c\cos\varphi$. [Der Berührungspunkt des Kreises ist Drehpol der ebenen Bewegung.]

515. M liegt im Schnitt von A k mit dem kleinen Kreis. Seine Geschwindigkeit hat die Richtung von A k; ihre Größe ist $v = \frac{2Rr}{\sqrt{R^2 + (2r - R)^2}}\,\omega$. [Der Berührungspunkt beider Kreise ist Drehpol der ebenen Bewegung.]

516. Wenn das Dreieck immer im Gleichgewicht bleiben soll, muß sein Schwerpunkt eine horizontale Gerade beschreiben. Man muß ihn also im Schnitte einer durch M gehenden Horizontalen mit dem Kreise über A B M annehmen. Aus dem Schwerpunkt des Dreiecks kann dann leicht die dritte Ecke C ermittelt werden.

517. Der Schnittpunkt O von A B und C D ist der Drehpol der ebenen Bewegung. Es muß $OA = OE$ sein, letzteres parallel zu C B. Man findet: $OA = \frac{a^2 + b^2}{2a}$, $OD = \frac{a^2 - b^2}{2a}$,

daraus
$$x = \frac{1}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^4 + b^4 - 2ab(a^2 - b^2)},$$
$$y = \frac{a^2 + b^2}{a\sqrt{2}}.$$

518. Der Drehpol O der Stange A B ist der Schnitt von A D mit B C. Fälle von O eine Senkrechte auf A B; ihr Fußpunkt ist der gesuchte Punkt M. Es ist

$$v = \frac{OM \cdot AD}{OA}\,\omega.$$

519. Im Schnitt O von A D mit B E liegt der Drehpol des starren Dreiecks A B C. Ziehe O C; dann ist $v \perp OC$ und seine Größe

$$v = \omega \cdot AD \cdot \frac{OC}{OA}.$$

520. Im Schnitt O von B D mit A C liegt der Drehpol, um den sich die Stange C D augenblicklich dreht; verbindet man M mit O und zieht dazu in M die Senkrechte, so erhält man die Bewegungsrichtung von M und mit ihr die Richtung des kleinsten Kraftaufwandes. Ist C der Druck auf den Fensterflügel in C, normal zum Flügel, so bestehen die Gleichungen

$$P \cdot OM = C \cdot OC,$$

$$G \frac{l}{2} \sin\alpha = C \cdot AC = C a;$$

woraus

$$P = \frac{l \sin\alpha}{2a} \cdot \frac{OC}{OM} \cdot G.$$

521. Rechne zuerst den Weg des Punktes B von der äußersten Lage links, B_0 an gezählt; es ist

$$B_0 B = s = r(1 - \cos\varphi) + l(1 - \cos\psi).$$

Sodann findet man:

$$v = \frac{ds}{dt} = c \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi},$$

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{c^2}{l} \frac{r \cos^2\varphi + l \cos^2\psi \cos(\varphi + \psi)}{r \cos^3\psi}.$$

Hierbei sind die Beziehungen zu benützen:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r}; \quad r \sin\varphi = l \sin\psi; \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{c \cos\varphi}{l \cos\psi}.$$

522. Die Rollkurven sind kongruente Ellipsen; ihre große Achse ist b. Die Brennpunkte der festen Ellipse sind C und D; die der beweglichen A und B. Die Ellipsen berühren sich im Schnittpunkt O von A D und B C (Drehpol der ebenen Bewegung von A B).

523. $$v_1 = v \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 - ab}.$$

524. Die Rollkurven sind kongruente Hyperbeln, deren reelle Achse gleich b ist. Die Brennpunkte der festen Hyperbel sind C und D; die Brennpunkte der beweglichen A und B. Die Hyperbeln berühren sich im Schnittpunkt O von A D und B C (Drehpol der ebenen Bewegung von A B).

525. Es ist $r \sin(\varphi + \psi) = a \sin \psi$;
differenziert man nach t, setzt

$$r \frac{d\varphi}{dt} = c, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega,$$

so wird

$$\omega = \frac{c \cos(\varphi + \psi)}{a \cos \psi - r \cos(\varphi + \psi)}$$

und mit Hilfe obiger Gleichung

$$\omega = \frac{c(a \cos \varphi - r)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}.$$

Für $\cos \varphi = \frac{r}{a}$ ist $\omega = 0$,

„ $\varphi = 0$ „ $\omega_{max} = \frac{c}{a - r}$,

„ $\varphi = 180^0$ „ $\omega_{min} = -\frac{c}{a + r}$.

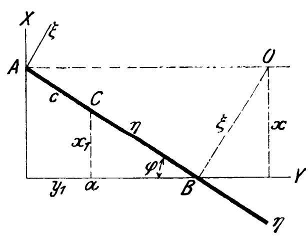
Ferner ist: $AB = x = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}$,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{ac \sin \varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}}.$$

526. Es ist $\sin \varphi = \frac{r}{x}$. Differenziere nach der Zeit und setze
$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, $\frac{dx}{dt} = v$; es wird

$$\omega = -\frac{rv}{x\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

527. Die feste Rollkurve ist ein Kreis über ABM. Die bewegliche Rollkurve ist ein doppelt so großer Kreis mit dem Mittelpunkt M.



528. Es ist:

$$O \begin{cases} x = a \operatorname{tg} \varphi \\ y = a + x \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

woraus

$x^2 = a(y - a)$ . . . feste Rollkurve.

Ferner:

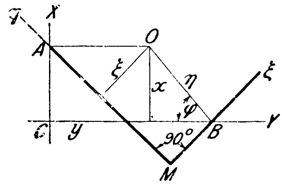
$$\xi = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad \eta = \frac{a}{\cos \varphi},$$

woraus $\eta^4 = a^2(\xi^2 + \eta^2)$ . . . bewegliche Rollkurve.

Endlich: $x_1 = a \operatorname{tg} \varphi - c \sin \varphi, \quad y_1 = c \cos \varphi,$
woraus $x_1^2 y_1^2 = (a - y_1)^2 (c^2 - y_1^2)$
die Gleichung der Bahn von C (Conchoide).

529. Es ist $y + x \operatorname{cotg} \varphi = a = CB,$

$$y \cos \varphi + \frac{x}{\sin \varphi} = a = AM.$$



Entfernt man φ, so erhält man die Gleichung der festen Rollkurve:

$$x^2 = a(2y - a)$$

d. i. eine Parabel mit dem Brennpunkt B.
Ebenso ist

$$\eta + \xi \operatorname{cotg} \varphi = a = AM,$$

$$\eta \cos \varphi + \frac{\xi}{\sin \varphi} = a = CB.$$

Entfernt man φ, so wird ebenso die Gleichung der beweglichen Rollkurve

$$\xi^2 = a(2\eta - a)$$

d. i. eine Parabel mit dem Brennpunkt A.
Setzt man endlich $BM = r$, $\sphericalangle CBM = \psi$ als Polar-Koordinaten von M, so ist

$$a \sin \psi + r \cos \psi = a$$

woraus $$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{a - r}{a + r}$$

die Polargleichung der Bahn von M (Strophoide).

530. Um die Polargleichung der festen Rollkurve zu finden, setze man $CO = \varrho$. Es ist dann

$$2r \cos \psi = (\varrho - r) \sin \varphi,$$
$$2r \sin \psi = r + r \cos \varphi.$$

Durch Entfernung von ψ folgt

$$\varrho(\varrho - 2r) \cos^2 \frac{\varphi}{2} = r^2 \quad . \; . \; . \quad \text{die gesuchte Polargleichung.}$$

Um die Polargleichung der beweglichen Rollkurve zu finden, setze $BO = \varrho_1$. Dann ist: $\varrho = \varrho_1 + r,$
also die letzte Gleichung

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{r^2}{\varrho_1^2 - r^2}.$$

Ferner ist $$\varphi_1 = 90 + \varphi - \psi,$$
$$\cos \varphi_1 = \sin(\psi - \varphi).$$

Benützt man die Gleichungen

$$\cos\psi = \frac{\varrho_1 \sin\varphi}{2\,r}, \quad \sin\psi = \cos^2\frac{\varphi}{2},$$

so kann aus der Gleichung für $\cos^2\frac{\varphi}{2}$ und jener für $\cos\varphi_1$ die neue gebildet werden

$$2\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varrho_1{}^2 - 2\,r^2}{(\varrho_1 - r)^2},$$

d. i. die gesuchte Polargleichung der beweglichen Rollkurve.

531. Nennt man $A\,O = \varrho$, den Winkel $B\,C\,D = 2\,\delta$, $D\,O = z$, so ist aus dem Dreieck $A\,O\,C$

$$z + c : \varrho = \cos\frac{\varphi}{2} : \sin\delta$$

und aus dem Dreieck $A\,B\,C$

$$c : a = \cos\frac{\varphi}{2} : \sin\delta,$$

woraus

$$z = \frac{c}{a}(\varrho - a).$$

Nun ist

$$z^2 = \varrho^2 + a^2 - 2\,a\,\varrho\cos\varphi$$

und nach Entfernung von z

$$\frac{(\varrho - a)^2}{\varrho} = \frac{4\,a^3}{c^2 - a^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

die Polargleichung der festen Rollkurve.

Nennt man ferner $B\,O = \varrho_1$, so ist

$$\varrho = \varrho_1 - a, \quad z + c = (\varrho_1 - a)\frac{c}{a} \qquad \text{nach früher,}$$

ferner

$$(z + c)^2 = \varrho_1{}^2 + c^2 - 2\,c\,\varrho_1\cos\varphi_1$$

und nach Entfernung von $z + c$:

$$\varrho_1 = \frac{2\,a\,c}{c^2 - a^2}(c - a\cos\varphi_1)$$

die Polargleichung der beweglichen Rollkurve.

532. Nennt man v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Punkte B und C, ferner $B\,O = \varrho_1$, $C\,O = \varrho_2$, so ist

$$v_1 : v_2 = a\,\omega_a : c\,\omega_c = \varrho_1 : \varrho_2,$$

also

$$\frac{\omega_c}{\omega_a} = \frac{a\,\varrho_2}{c\,\varrho_1}.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel

$$B\,A\,D = 2\,\alpha, \quad B\,C\,D = 2\,\delta, \quad A\,O\,D = \psi$$

so ist $\psi = \alpha - \delta$, $a \sin \alpha = c \sin \delta$,

$$\varrho_2 : \varrho_1 = \sin(\psi + 2\delta) : \sin 2\delta$$
$$= \sin(\alpha + \delta) : \sin 2\delta.$$

Fallen nun die vier Punkte A B C D in eine Gerade, so werden die Winkel α und δ unendlich klein; obige Gleichungen werden dann

$$a\,\alpha = c\,\delta,$$
$$\varrho_2 : \varrho_1 = \alpha + \delta : 2\delta = a + c : 2a$$

und somit

$$\frac{\omega_c}{\omega_a} = \frac{a + c}{2c}.$$

533. Ist $FA = r$, $\sphericalangle AFS = \psi$, so ist die Polargleichung der Parabel

$$r = \frac{p}{1 + \cos\psi}.$$

Fällt man in F das Perpendikel auf g, so ist sein Schnitt mit der Normale im Punkt A der Drehpol O.

Setzt man $FO = \varrho$, $\sphericalangle OFX = \varphi$, so wird

$$\varrho = \frac{p \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \sin\varphi}.$$

die Gleichung der festen Rollkurve.

Setzt man $AO = \varrho_1$, $\sphericalangle OAF = \varphi_1$, so ist ebenso

$$\varrho_1 = \frac{p}{\cos\varphi_1 (1 + \cos 2\varphi_1)}$$

die Polargleichung der beweglichen Rollkurve.

534. O ist der Drehpol. Setzt man

$CO = \varrho$, $\sphericalangle OCA = \varphi$, $DO = x$, $\sphericalangle COD = \varepsilon$, $CD = b$,

so ist
$$x \cos\varepsilon = \varrho + b \cos\varphi,$$
$$x \sin\varepsilon = b \sin\varphi$$

und
$$CL = CO + OM \,.\, \cos\varepsilon + MK$$

oder
$$R = \varrho + (r - x)\cos\varepsilon + 2b.$$

Entfernt man aus diesen Gleichungen x und ε, so bleibt

$$(b^2 + \varrho^2 + 2b\varrho\cos\varphi)(2r - b + b\cos\varphi) = 2br^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

die Polargleichung der festen Rollkurve.

Setzt man ferner

$$MO = \varrho_1, \quad \sphericalangle OMK = \varphi_1,$$

so ist
$$\varphi_1 + \varepsilon = 180^0, \quad \varrho_1 + x = r.$$

Entfernt man aus diesen und den obigen Gleichungen x und ε, ϱ und φ, so bleibt

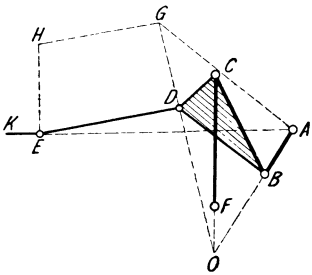
$$\varrho_1 (2 r - \varrho_1) \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = r (r - b),$$

die Polargleichung der beweglichen Rollkurve.

Für die Anfangslage ist $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 180^0$ und

$$\varrho = CO = \sqrt{br} - b, \quad \varrho_1 = MO = r - \sqrt{br}.$$

535. FCBA ist ein Kurbelviereck mit den festen Punkten F und A, somit O der Drehpol von BC, und da D mit BC starr verbunden ist, auch von D. Zieht man $AG \parallel BD$ bis zum Schnitt G mit OD und nimmt AB als Größe der Geschwindigkeit von B an, so ist GD die Größe der Geschwindigkeit v_1 von D, weil



$$v : v_1 = AB : GD = BO : DO.$$

Zieht man endlich $HE \perp KE$ und $GH \parallel DE$, so ist HE die Größe der Geschwindigkeit v_2 von E und auch des Kolbens. Denn die Geraden GD und HE schneiden sich im Drehpol O_1 von ED und es ist

$$v_1 : v_2 = GD : HE = DO_1 : EO_1.$$

536. Durch eine Drehung um 120^0 um die Diagonale EF.

537. Durch eine halbe Umdrehung um eine Achse, die durch den Mittelpunkt des Quadrates geht und zu AB parallel ist.

538. Durch eine halbe Umdrehung um eine Achse, die durch den Mittelpunkt des Dreiecks geht und zu BC parallel ist.

539. Eine Schraubenbewegung, deren Achse durch den Mittelpunkt des Würfels geht und zu BA′ parallel ist. Die Translation der Schraubenbewegung hat die Länge der Würfelkante; die Drehung erfolgt um 90^0.

540. Schneidet die Radachse die horizontale Ebene in O, so ist OC die Momentanachse des Rades. Der Mittelpunkt M des Rades hat die Geschwindigkeit $v_M = \frac{2 \pi r}{T} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$. Die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanachse ist $\omega = \frac{v_M}{r \cos \alpha}$; daraus ergeben sich die Geschwindigkeiten der Umfangspunkte des Rades:

$$v_A = 2\,v_M = \frac{4\,\pi\,r}{T} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},$$

$$v_B = \omega\sqrt{r^2 + r^2\cos^2\alpha} = \frac{2\,\pi\,r}{T}\,\operatorname{cotg}\alpha\,\sqrt{1+\cos^2\alpha}.$$

541. Der Körper dreht sich um O; seine Momentanachse ist der Schnitt der Ebenen $g_1 O X$ und $g_2 O Z$. Sind 0, b_1, c_1 die Richtungskonstanten von g_1; a_2, b_2, 0 jene von g_2, so haben jene zwei Ebenen die Gleichungen

$$b_1\,z = c_1\,y \quad \text{und} \quad a_2\,y = b_2\,x;$$

ferner ist $$b_1^2 + c_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 = 1$$

und $$b_1\,b_2 = \cos\delta.$$

Entfernt man aus diesen Gleichungen $a_2\,b_1\,b_2\,c_1$, so bleibt

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = y^4 \operatorname{tg}^2\delta$$

die Gleichung der gesuchten Rollfläche. (Kegelfläche mit der Spitze in O.)

542. Der Körper dreht sich um O; seine Momentanachse ist der Schnitt der Ebene gX und jener Ebene E, die durch G hindurch geht und zur Ebene Gg normal steht.

Die Gleichung der Ebene gX ist

$$b_1\,z = c_1\,y,$$

wenn 0, b_1, c_1 die Richtungskonstanten von g sind; die Gleichung der Ebene E ist

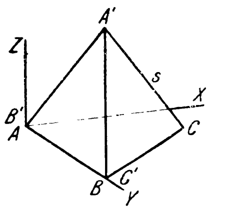
$$a(b\,b_1 + c\,c_1)\,x + (b\,c\,c_1 - a^2 b_1 - b_1 c^2)\,y + \\ + (b\,b_1\,c - b^2 c_1 - a^2 c_1)\,z = 0.$$

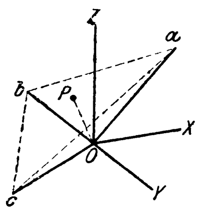
Entfernt man $b_1\,c_1$, so bleibt

$$(c\,y - b\,z)^2 + a\,y\,(a\,y - b\,x) + a\,z\,(a\,z - c\,x) = 0$$

die Gleichung der gesuchten Rollfläche. (Kegelfläche mit der Spitze in O.)

543. Das Koordinatenkreuz XYZ wurde so gewählt, wie es in der Abbildung angedeutet ist.





Zeichnet man nebenan in O ein gleiches Koordinatenkreuz, macht $Oa \# AA'$, $Ob \# BB'$, $Oc \# CC'$, so haben a, b, c die Koordinaten

$$x_1 = \frac{1}{6} s\sqrt{3},\quad y_1 = \frac{1}{2} s,\quad z_1 = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$
$$x_2 = 0,\qquad y_2 = -s,\quad z_2 = 0$$
$$x_3 = -\frac{s\sqrt{3}}{2},\quad y_3 = \frac{1}{2} s,\quad z_3 = 0.$$

Die Ebene abc hat die Gleichung

$$x\sqrt{3} + y - z\sqrt{6} + s = 0$$

und das Perpendikel auf diese Ebene von O aus ist die gesuchte Translation

$$\tau = OP = \frac{s}{\sqrt{10}}.$$

Der Punkt P hat die Koordinaten

$$\xi = -\frac{s\sqrt{3}}{10},\quad \eta = -\frac{s}{10},\quad \zeta = \frac{s\sqrt{6}}{10}.$$

Legt man durch den Halbierungspunkt von AA' eine Ebene, normal zur Verbindungslinie von P mit a, so hat sie die Gleichung

$$8\sqrt{3}\,x + 18y + 7\sqrt{6}\,z - \frac{27}{2} s = 0;$$

legt man ebenso durch den Halbierungspunkt von BB' eine Ebene, normal zur Verbindungslinie von P mit b, so hat sie die Gleichung

$$\sqrt{3}\,x - 9y - \sqrt{6}\,z + \frac{9}{2} s = 0.$$

Diese beiden Ebenen gehen durch die gesuchte Schraubenachse; ihr Schnitt hat die Gleichungen

$$x\sqrt{2} + z = \frac{3\sqrt{6}}{20} s,$$
$$-x + y\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{5} s$$

d. s. die Gleichungen der gesuchten Schraubenachse.

Legt man endlich durch sie zwei Ebenen, welche durch B und B' gehen, so haben diese die Gleichungen

$$3\sqrt{6}\,x + 3\sqrt{2}\,y + 4\sqrt{3}\,z - 3\sqrt{2}\,s = 0,$$
$$11\sqrt{6}\,x - 9\sqrt{2}\,y + 8\sqrt{3}\,z = 0.$$

Der Winkel φ dieser beiden Ebenen ergibt sich mit

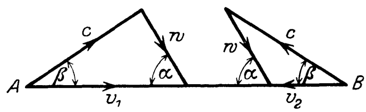
$$\cos\varphi = \frac{2}{3}$$

d. i. die gesuchte Drehung der Schraubenbewegung.

544. $c = v$. [Erteile den beiden Körpern und dem Boden die Geschwindigkeit v nach links.]

545. $v_3 = \frac{b}{a} v_1 + \left(\frac{b}{a} + 1\right) v_2$. [Erteile allen Schiffen die Geschwindigkeit $-v_2$.]

546. Die Geschwindigkeit der Hinfahrt ist $v_1 = c\cos\beta + w\cos\alpha$, die Geschwindigkeit der Rückfahrt $v_2 = c\cos\beta - w\cos\alpha$. Nimmt man noch hinzu:



$w\sin\alpha = c\sin\beta$, $s = v_1 t_1 = v_2 t_2$,

so erhält man

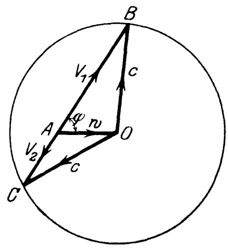
$$c = \frac{s(t_1 + t_2)}{2 t_1 t_2 \cos\beta},$$

$$w = \frac{s}{2 t_1 t_2 \cos\beta}\sqrt{t_1^2 + t_2^2 - 2 t_1 t_2 \cos 2\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1}.$$

547. Ist $OB = OC = c$ die Eigengeschwindigkeit des Ballons, $AO = w$ die Windgeschwindigkeit, so sind v_1 und v_2 die absoluten Geschwindigkeiten des Ballons für die Hin- und Rückfahrt. Sind t_1 und t_2 die zugehörigen Zeiten und entfernt sich hiebei der Ballon in der Richtung AB um r von O, so ist

$$t = t_1 + t_2, \quad r = v_1 t_1 = v_2 t_2.$$



Ferner folgt aus dem Sekantensatz des Kreises

$$v_1 v_2 = (c + w)(c - w)$$

und $$v_1 + v_2 = 2\sqrt{c^2 - w^2\sin^2\varphi}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$4 r^2 (c^2 - w^2 \sin^2\varphi) = t^2 (c^2 - w^2)^2$$

als Polargleichung des Gebietes.

Es ist eine Ellipse mit O als Mittelpunkt und mit den Halbachsen

$$a = \frac{t}{2} \frac{c^2 - w^2}{c} \text{ in Richtung von } w,$$

$$b = \frac{t}{2} \sqrt{c^2 - w^2} \text{ senkrecht zu } w.$$

548. Erteilt man beiden Körpern überdies eine gleiche, nach links gerichtete Translationsgeschwindigkeit v, so kommt ABCD zu Ruhe; der Schlitten S wird das Wellental hinabgleiten und auf der anderen Seite hinaufgleiten. Er besitzt an der tiefsten Stelle E die Geschwindigkeit

$$v_1^2 = v^2 + 2gh = 2gh_1,$$

wird also bis zur Spitze des Wellenberges h_1 emporkommen.

549. Nimmt man A als Anfangspunkt eines Achsenkreuzes an, AX horizontal, AY abwärts, so ist die relative Geschwindigkeit des Punktes $v_r = \sqrt{2gy}$ und die Teile der absoluten Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c + v_r \cos\alpha,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_r \sin\alpha,$$

woraus

$$dx = \frac{c}{\sqrt{2g}\sin\alpha} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y}} + \operatorname{cotg}\alpha \cdot dy$$

und die Gleichung der absoluten Bahn des Punktes:

$$(x \sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = \frac{2c^2}{g} y.$$

Sie ist eine Parabel mit vertikaler Achse; in A ist ihre Tangente horizontal. Die absolute Geschwindigkeit des Punktes ist für $y = h$:

$$v^2 = c^2 + 2gh + 2c\sqrt{2gh}\cos\alpha.$$

Sie schließt mit der Horizontalen durch C den Winkel α_1 ein, für welchen gefunden wird

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{v_x}{v_y} = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{c}{\sqrt{2gh}\sin\alpha}.$$

550. Die relative Beschleunigung des Punktes gegen die schiefe Ebene ist

$$\gamma_r = g(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

wenn f die Reibungszahl ist; die relative Geschwindigkeit

$$v_r = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\, t.$$

Wählt man A als Anfangspunkt eines Achsenkreuzes, A X horizontal, A Y abwärts, so ist

$$v_x = \frac{dx}{dt} = bt + v_r \cos\alpha,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_r \sin\alpha,$$

woraus
$$x = \frac{1}{2}[b + g\cos\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)]\,t^2,$$

$$y = \frac{1}{2}g\sin\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t^2,$$

woraus die Gleichung der absoluten Bahn:

$$x = y\left[\operatorname{cotg}\alpha + \frac{b}{g\sin\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)}\right].$$

Die absolute Bahn ist eine durch A gehende Gerade. Die absolute Beschleunigung des Punktes ist

$$\gamma^2 = b^2 + \gamma_r^2 + 2b\gamma_r\cos\alpha$$

und die Geschwindigkeit, mit der die Horizontale erreicht wird:

$$v = \gamma\sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}.$$

551. Eine Cykloïde, deren Wälzungskreis $\varrho = r\frac{a}{c}$ ist; sein Mittelpunkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit a in der Geraden O X. [Ein Punkt des Wälzungskreises ist vorübergehend in Ruhe, nämlich der Berührungspunkt mit der Wälzungsgeraden. Für ihn muß

$$a = \varrho\frac{c}{r}$$

sein, woraus sich ϱ ergibt.]

552. Es sind die Teile der relativen Beschleunigung

$$\gamma_{rx} = b + \frac{c^2}{r}\cos\varphi = \frac{d v_{rx}}{dt},$$

$$\gamma_{ry} = -\frac{c^2}{r}\sin\varphi = \frac{d v_{ry}}{dt},$$

woraus die Teile der relativen Geschwindigkeit:

$$v_{rx} = bt + c\sin\varphi = \frac{dx}{dt},$$

$$v_{ry} = c\cos\varphi = \frac{dy}{dt},$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß

$$c = r \frac{d\varphi}{dt}, \text{ also } t = \frac{r}{c}\varphi \text{ ist.}$$

Endlich wird

$$x = \frac{1}{2} b t^2 - r \cos\varphi = \frac{b r^2}{2 c^2}\varphi^2 - r\cos\varphi,$$

$$y = r \sin\varphi$$

und nach Entfernung von φ die Gleichung der relativen Bahn des Punktes

$$x = \frac{b r^2}{2 c^2}\left(\arc\sin\frac{y}{r}\right)^2 - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

553. Gleichung der absoluten Bahn:

$$a e^{\varphi} = 2 r + \sqrt{4 r^2 - a^2}.$$

Relative Geschwindigkeit beim Verlassen des Rohres:

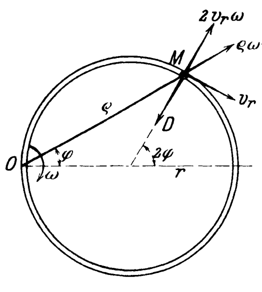
$$v_r = \frac{a\omega}{2}\sqrt{3}.$$

Absolute Geschwindigkeit beim Verlassen des Rohres:

$$v = \frac{a\omega}{2}\sqrt{7}.$$

554. Es ist $\overline{\gamma_r} = \overline{\gamma_a} + \overline{(-\gamma_s)} + \overline{\gamma_z}$, d. h. die relative Beschleunigung γ_r besteht aus den drei Teilen:

1. absolute Beschleunigung des Punktes M (oder der kleinen glatten Kugel); sie ist $\gamma_a = \frac{\text{Druck D}}{\text{Masse M}}$, wenn vom Druck des Eigengewichtes auf die Unterlage abgesehen wird;



2. negative Systembeschleunigung: $-\gamma_s = \varrho\,\omega^2$ nach auswärts;
3. Zusatzbeschleunigung (von Coriolis): $\gamma_z = 2 v_r\,\omega$ nach auswärts.

Der tangentielle Teil von γ_r im Kreisrohr ist dann

$$\gamma_{rt} = \frac{d v_r}{dt} = \varrho\,\omega^2 \sin\varphi,$$

der normale Teil

$$\gamma_{rn} = \frac{v_r^2}{r} = \frac{D}{M} - 2\, v_r\, \omega - \varrho\, \omega^2 \cos \varphi.$$

Aus $$v_r \,.\, d\, v_r = \gamma_{rt} \,.\, d\, s,$$

$$\varrho = 2\, r \cos \varphi,\quad d\, s = -\, r \,.\, d\,(2\, \varphi)$$

folgt mit Rücksicht auf die Anfangslage M_0

$$v_r = r\, \omega \sqrt{2 \cos 2\, \varphi}$$

und für die Stelle M_1:

$$\varphi = 0,\quad v_{r,1} = r\, \omega \sqrt{2}.$$

An dieser Stelle ist die Systemgeschwindigkeit

$$v_{s,1} = 2\, r\, \omega,$$

also die absolute Geschwindigkeit des Punktes

$$v_1 = v_{r,1} + v_{s,1} = r\, \omega\, (2 + \sqrt{2}).$$

Aus der Gleichung für γ_{rn} folgt der Druck

$$D = 2\, M\, r\, \omega^2\, (3 \cos^2 \varphi - 1 + \sqrt{2 \cos 2\, \varphi})$$

und an der Stelle M_1

$$D_1 = 2\, M\, r\, \omega^2\, (2 + \sqrt{2}).$$

555. Lösung analog jener in 554. Es ist

$$\gamma_a = \frac{D}{M},\quad -\gamma_s = r\, \omega^2 \text{ in Richtung } O\, M,$$

$$\gamma_z = 2\, v_r\, \omega \text{ in der Normale von } M, \text{ nach auswärts.}$$

Die beiden Teile der relativen Beschleunigung γ_r sind:

in der Tangente der Spirale;

$$\gamma_{rt} = r\, \omega^2 \sin \alpha,$$

in der Normale der Spirale:

$$\gamma_{rn} = \frac{v_r^2}{\varrho} = \frac{D}{M} - 2\, v_r\, \omega - r\, \omega^2 \cos \alpha.$$

Hierin ist α der Winkel zwischen r und der Normale.

Aus $$v_r \,.\, d\, v_r = \gamma_{rt} \,.\, d\, s$$

folgt wegen $$d\, s = \frac{d\, r}{\sin \alpha}:$$

$$v_r \,.\, d\, v_r = \omega^2\, r\, d\, r$$

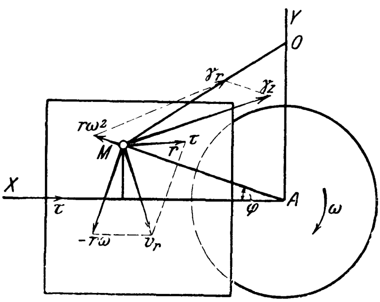
und $$v_r = \omega \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Aus der Gleichung für γ_{rn} folgt, weil der Krümmungshalbmesser der Spirale
$$\varrho = \frac{r}{\cos\alpha}$$
und
$$\operatorname{tg}\alpha = m$$
ist, der Druck
$$D = M\,\omega^2\left[\left(2\,r - \frac{a^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + 2\sqrt{r^2 - a^2}\right].$$

556. Die Kreide schreibt auf der Tafel eine horizontale Gerade mit der unveränderlichen Geschwindigkeit c an.

557. Die Rollkurve ist der Ort aller relativen Drehpole der beiden ebenen Systeme. Der Ort der Drehpole in der Scheibe ist ein Kreis mit dem Halbmesser $\frac{\tau}{\omega}$, Mittelpunkt A; der Ort der Drehpole im Blatt ist eine Gerade parallel zu τ, in der Entfernung $\frac{\tau}{\omega}$ über A.

558. Nimm einen beliebigen Punkt M mit den Koordinaten x, y in bezug auf das Achsenkreuz X A Y an. Die relative Geschwindigkeit von M ist



$$v_r = \overline{\tau} + \overline{(-v_s)} = \overline{\tau} + \overline{(-r\,\omega)}$$
und ihre Teile
$$v_{rx} = -\tau + r\,\omega\sin\varphi = -\tau + y\,\omega,$$
$$v_{ry} = -r\,\omega\cos\varphi = -x\,\omega.$$
Die relative Beschleunigung von M ist (nach Aufgabe 554)
$$\gamma_r = \overline{\gamma_a} + \overline{(-\gamma_s)} + \overline{\gamma_z}$$
worin
$$\gamma_a = 0,\ \gamma_s = r\,\omega^2,\ \gamma_z = 2\,v_r\,\omega.$$
Bildet man die Teile von γ_r, so wird
$$\gamma_{rx} = r\,\omega^2\cos\varphi + 2\,\omega\,v_{ry} = -x\,\omega^2,$$
$$\gamma_{ry} = r\,\omega^2\sin\varphi - 2\,\omega\,v_{rx} = -y\,\omega^2 + 2\,\omega\,\tau$$
und
$$\gamma_r^2 = \omega^4\left[x^2 + \left(\frac{2\,\tau}{\omega} - y\right)^2\right].$$

Macht man $A\,O = \frac{2\,\tau}{\omega}$, so ist also

$$\gamma_r = \omega^2 \,.\, M\,O$$

und geht für alle Punkte M durch O hindurch.

559. Die relative Geschwindigkeit v_r des Punktes A besteht aus dessen absoluter Geschwindigkeit v_a und der negativen Geschwindigkeit v_s des unter A liegenden Systempunktes in I, also

$$v_r = v_a + \overline{(-\,v_s)} = a\,\omega_2 - a\,\omega_1 = a\,\omega_1,$$

von A nach abwärts gerichtet.

Die relative Beschleunigung γ_r besteht (siehe Aufgabe 554) aus den Teilen

$$\gamma_r = \bar{\gamma}_a + \overline{(-\,\gamma_s)} + \bar{\gamma}_z,$$

worin

$$\gamma_a = a\,\omega_2^{\,2},\ \text{Richtung } A\,O_2,$$
$$-\,\gamma_s = a\,\omega_1^{\,2},\ \text{Richtung } A\,O_2,$$
$$\gamma_z = 2\,v_r\,\omega_1,\ \text{Richtung } A\,O_2,$$

woraus

$$\gamma_r = 7\,a\,\omega_1^{\,2},\ \text{Richtung } A\,O_2$$

folgt.

560. Die Geschwindigkeit des Punktes M ist (vgl. Aufgabe 559)

$$v_a = \bar{v}_s + \bar{v}_r,$$

worin die Systemgeschwindigkeit $v_s = a\,\omega\,\sqrt{2}$ senkrecht zu O M, die relative Geschwindigkeit $v_r = \frac{a\,\omega}{2\,\pi}$ in Richtung von A B ist. Man erhält daraus:

$$v_a = \frac{a\,\omega}{2\,\pi}\sqrt{8\,\pi^2 + 4\,\pi + 1},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 4\,\pi + 1.$$

Die Beschleunigung des Punktes M ist (vgl. Aufgabe 554)

$$\gamma_a = \bar{\gamma}_s + \bar{\gamma}_r - \bar{\gamma}_z,$$

worin $\gamma_s = a\,\omega^2\sqrt{2}$ in Richtung von M O, $\gamma_r = 0$ (da sich M gleichförmig in A B bewegt) und $-\,\gamma_z = 2\,v_r\,\omega$ in Richtung von A C ist. Man erhält daraus:

$$\gamma_a = \frac{a\,\omega^2}{\pi}\sqrt{2\,\pi^2 + 2\,\pi + 1},$$

$$\operatorname{cotg}\psi = 2\,\pi + 1.$$

561. Nach Aufgabe 554 ist die relative Beschleunigung des Punktes
$$\overline{\gamma_r} = \overline{\gamma_a} + \overline{(-\gamma_s)} + \overline{\gamma_z}.$$
Die absolute Beschleunigung γ_a rührt her von dem Druck D der schiefen Ebene und dem Gewicht G des Punktes; $-\gamma_s$ ist $r\,\omega^2$, in Richtung der schiefen Ebene abwärts; γ_z ist $2\,v_r\,\omega$, normal zur schiefen Ebene nach aufwärts.

Hieraus folgt zunächst die relative Beschleunigung in Richtung der schiefen Ebene
$$\frac{d\,v_r}{d\,t} = g \sin\varphi + r\,\omega^2,$$
woraus wegen $v_r = \frac{d\,r}{d\,t}$, $\omega = \frac{d\,\varphi}{d\,t}$, $\varphi = \omega\,t$:
$$\frac{d^2 r}{d\,t^2} = g \sin\omega t + r\,\omega^2.$$
Die Integration dieser Differentialgleichung liefert
$$r = \frac{g}{4\,\omega^2}\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi} - 2\sin\varphi\right)$$
und
$$v_r = \frac{d\,r}{d\,t} = \frac{g}{4\,\omega}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi} - 2\cos\varphi\right).$$
Für die Normale der schiefen Ebene ist
$$D + M\,\gamma_z = G\cos\varphi,$$
woraus der Druck
$$D = G\left(2\cos\varphi - \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}\right).$$

562. Nach Aufgabe 554 ist die relative Beschleunigung des Punktes:
$$\overline{\gamma_r} = \overline{\gamma_a} + \overline{(-\gamma_s)} + \overline{\gamma_z}.$$
Die absolute Beschleunigung γ_a besteht aus der Beschleunigung der Schwere und jener des horizontalen Druckes D der Ebene; $-\gamma_s$ ist $y\,\omega^2$ nach auswärts, γ_z ist $2\,v_r'\,\omega$, senkrecht zur Ebene, wenn v_r' die Projektion der relativen Geschwindigkeit v_r auf die Horizontalebene bezeichnet; also
$$\gamma_z = 2\,\omega\,\frac{d\,y}{d\,t}.$$
Hieraus folgt für die relative Bewegung des Punktes in der sich drehenden Ebene:
$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = g, \quad \frac{d^2 y}{d\,t^2} = y\,\omega^2,$$

woraus mit Rücksicht auf den Anfangszustand

$$v_{rx} = g\,t, \quad v_{ry} \,.\, d\,v_{ry} = y\,\omega^2 \,.\, d\,y,$$

$$v_{ry} = \frac{d\,y}{d\,t} = \sqrt{v_0^2 + y^2\,\omega^2}$$

und

$$x = \frac{1}{2}\,g\,t^2, \quad d\,t = \frac{d\,y}{\sqrt{v_0^2 + y^2\,\omega^2}},$$

$$\omega\,t = \ln\left[y + \sqrt{y^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\right] + C,$$

$$v_0\,e^{\omega t} = \omega\,y + \sqrt{v_0^2 + y^2\,\omega^2}$$

und die Gleichung der relativen Bahn

$$v_0\,e^{\omega\sqrt{\frac{2x}{g}}} = \omega\,y + \sqrt{v_0^2 + y^2\,\omega^2}.$$

Setzt man $\varphi = \omega\,t$, worin φ der Drehungswinkel der Ebene ist, so erhält man die Projektion der absoluten Bahn auf die Horizontalebene in Polarkoordinaten $(y = r)$

$$v_0\,e^{\varphi} = \omega\,y + \sqrt{v_0^2 + y^2\,\omega^2}.$$

Ferner ist die relative Geschwindigkeit

$$v_r^2 = v_{rx}^2 + v_{ry}^2 = v_0^2 + g^2\,t^2 + y^2\,\omega^2$$

und die absolute Geschwindigkeit

$$v_a^2 = v_r^2 + v_s^2 = v_0^2 + g^2\,t^2 + 2\,y^2\,\omega^2.$$

Endlich der Druck der schiefen Ebene

$$D = M\,\gamma_z = 2\,M\,\omega\,\frac{d\,y}{d\,t} = 2\,M\,\omega\,\sqrt{v_0^2 + y^2\,\omega^2},$$

worin M die Masse des Punktes ist.

563. Nach Aufgabe 554 ist die relative Beschleunigung des Punktes M in bezug auf die sich drehende Ebene:

$$\overline{\gamma_r} = \overline{\gamma_a} + \overline{(-\gamma_s)} + \overline{\gamma_z}.$$

Die absolute Beschleunigung γ_a besteht aus den Beschleunigungen der Schwere und der Kräfte Z und D; $-\gamma_s$ ist $y\,\omega^2$ in Richtung von Y, $\gamma_z = 2\,v_r'\,\omega$ ist senkrecht zur Ebene XY, $v_r' = v_r \cos\varphi$ die Projektion der Pendelgeschwindigkeit auf die Y-Richtung.

Zunächst ist

$$\frac{D}{M} = \gamma_z = 2\,v_r\,\omega\cos\varphi.$$

Nennt man $\gamma_{r,t}$ die Tangentialbeschleunigung der relativen Bewegung, so ist

$$\gamma_{rt} = \frac{d\,v_r}{d\,t} = l\,\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = l\sin\varphi\cos\varphi\,\omega^2 - g\sin\varphi,$$

woraus nach Multiplikation mit $d\varphi$ und Integration folgt:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{v_r^2}{l^2} = \omega^2 \sin^2\varphi + \frac{2g}{l}\cos\varphi + C.$$

Die Konstante wird aus der Bedingung: $\varphi = \alpha$, $v_r = 0$ zu bestimmen sein. Es ist also die gesuchte Pendelgeschwindigkeit:

$$v_r^2 = l^2\omega^2\sin^2\varphi + 2gl\cos\varphi + Cl^2,$$

und der Druck der Ebene:

$$D = 2M\omega\cos\varphi \,.\, v_r.$$

Nennt man $\gamma_{r,n}$ die Normalbeschleunigung der relativen Bewegung, so ist

$$\gamma_{r,n} = \frac{v_r^2}{l} = \frac{Z}{M} - l\omega^2\sin^2\varphi - g\cos\varphi,$$

woraus der Zug im Pendelfaden:

$$Z = M(2l\omega^2\sin^2\varphi + 3g\cos\varphi + Cl).$$

564. Die relative Geschwindigkeit ist (siehe Aufgabe 559)

$$v_r = \overline{v_a} + \overline{(-v_s)}.$$

Ihre Teile nach den drei Achsen sind:

$$v_{rx} = -a\omega, \quad v_{ry} = a\omega + \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad v_{rz} = \frac{v}{\sqrt{2}} - \tau.$$

Die relative Beschleunigung ist (siehe Aufgabe 554)

$$\gamma_r = \overline{\gamma_a} + \overline{(-\gamma_s)} + \overline{\gamma_z},$$

worin $\gamma_z = 2\omega v_r'$ und $v_r' = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}$ ist.

Ihre Teile nach den drei Achsen sind:

$$\gamma_{rx} = -a\omega^2 - \omega v\sqrt{2}, \quad \gamma_{ry} = -a\omega^2, \quad \gamma_{rz} = 0.$$

565. Man erhält die augenblickliche relative Bewegung des zweiten Körpers, indem man seine Schraubenbewegung $\tau_2\,\omega_2$ mit der entgegengesetzten Drehung von ω_1 zusammensetzt. Die relative Bewegung ist eine Schraubenbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_r = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

und der Translationsgeschwindigkeit

$$\tau_r = \frac{\omega_2}{\omega_r}(\tau_2 + a\omega_1).$$

Die Achse C der relativen Schraubenbewegung schneidet a normal und teilt es im Verhältnis

$$\frac{a\omega_2^2 - \tau_2\,\omega_1}{a\omega_1^2 + \tau_2\,\omega_1}.$$

Ihre Neigungen sind: $\cos(CA) = \frac{\omega_1}{\omega_r}$,

$$\cos(CB) = -\frac{\omega_2}{\omega_r}.$$

566. Ist dM ein Element der Ringmasse, φ der Winkel seines Halbmessers r gegen die η-Achse, so ist die Zusatzbeschleunigung (vgl. Aufgabe 554 und 562)

$\gamma_z = 2\, v_r'\, \omega_1$, worin $v_r' = v_r \sin\varphi$, $v_r = r\,\omega$, also

$$\gamma_z = 2\, r\, \omega\, \omega_1 \sin\varphi, \text{ in Richtung von } -\xi.$$

Da die relative Bewegung des Ringes senkrecht zur Achse ξ vor sich geht, hat die Zusatzbeschleunigung γ_z keinen Einfluß auf sie und muß vom festen Gestelle X Y Z aufgenommen werden. Die Wirkung aller Zusatzkräfte ist also die Resultante aller $dM \,.\, \gamma_z$. Die Summe dieser Kräfte in der Richtung ξ ergibt sich mit Null, ebenso die Summe ihrer Momente um ξ und ζ; es bleibt nur das Moment um die η-Achse:

$$\int_0^{2\pi} dM \,.\, \gamma_z\, r \sin\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{M}{2\,r\,\pi}\, r\, d\varphi \,.\, 2\, r\, \omega\, \omega_1 \sin\varphi \,.\, r \sin\varphi = M\, r^2\, \omega\, \omega_1.$$

567. 28,64 kg [aus $P\,v = 2 \,.\, 75$ mkg/s,

$$v = \frac{r\,n\,\pi}{30} = \frac{0{,}5\text{ m} \,.\, 100 \,.\, \pi}{30\text{ s}}.]$$

568. 300 PS.

569. $\eta = 0{,}6$ $\left[\text{aus } \eta \,.\, 26 \,.\, 75 \text{ mkg/s} = \frac{19\,656\,000 \text{ kg} \,.\, 36 \text{ m}}{7 \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60 \text{ s}}\right].$

570. 0,375 m^3

$$\left[\text{aus } 10 \,.\, 75 \text{ mkg/s} = (Q \,.\, 1000) \text{ kg/s} \,.\, 4 \text{ m} \,.\, \frac{50}{100}\right].$$

571. 20,25 mkg/s

$$\left[\text{absolute Leistung } E_a = 10 \text{ kg/s} \,.\, 27 \text{ m} + \frac{1}{3} E_a\right].$$

572. $\eta = 0{,}7$

$$\left[\frac{5940 \text{ kg} \,.\, 25 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 0{,}8 \,.\, 15 \,.\, 75 \text{ mkg/s} + \eta \,.\, 30 \,.\, 75 \text{ mkg/s}\right].$$

573. W = 70,05 t

$$\left[\mathrm{W\ kg} \cdot \frac{12{,}5 \cdot 1850\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 6000 \cdot 75\ \mathrm{mkg/s}\right].$$

574. $Q = 3{,}125\ \mathrm{m}^3$. $\left[(1000\,Q)\ \mathrm{kg/s} \cdot 1{,}8\ \mathrm{m} \cdot \frac{60}{100} = 45 \cdot 75\ \mathrm{mkg/s}\right]$.

575. N = 2,88 PS. $\left[\frac{14\,400\ \mathrm{kg} \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot 24}{3600\ \mathrm{s}} \cdot 0{,}75 = \mathrm{N} \cdot 75\ \mathrm{mkg/s}\right]$.

576. 1,05 PS.

$$\left[(1 - 0{,}4)\ \mathrm{Leistung} = \frac{800\ \mathrm{kg}\left(40\ \mathrm{m} + \frac{1}{50} \cdot 30\,000\ \mathrm{m}\right)}{3 \cdot 3600\ \mathrm{s}}\right].$$

577. $\varkappa = 0{,}013$. $[4 \cdot 75\ \mathrm{mkg/s} = 600\ \mathrm{kg} \cdot 5\ \mathrm{m/s}\,(\sin 5^0 + \varkappa \cos 5^0)]$.

578. Die notwendige Leistung ist im ersten Fall: $E = (\sin\alpha + \varkappa\cos\alpha)\,G\,v$, im zweiten Fall: $E = \varkappa(G + G_1)\,v$. Setzt man beide gleich, so wird

$$G_1 = G\left(\frac{\sin\alpha}{\varkappa} + \cos\alpha - 1\right).$$

579. Die Leistung des Uhrwerks ist

$$\frac{0{,}3\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m}}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \mathrm{s}} = \frac{1}{240\,000}\,\frac{\mathrm{mkg}}{\mathrm{s}}.$$

Die Leistung zum Aufziehen ist:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{3}\right) 0{,}3\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m}}{30\ \mathrm{s}} = 0{,}016\,\frac{\mathrm{mkg}}{\mathrm{s}}.$$

580. 31,7 Minuten.

581. Verlust 2 PS.; $\eta = 0{,}8$.

582. N = 27,9 PS. $\left[\mathrm{N} = \frac{1}{75} \cdot (10^2\pi : 5)\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}4\ \mathrm{m} \cdot 2 \cdot \frac{100}{60\ \mathrm{s}}\right]$.

583. $n_1 = 13{,}687$ $\left[\mathrm{aus}\ \frac{n_1 \cdot 0{,}15\ \mathrm{m} \cdot \pi}{30\ \mathrm{s}} = 0{,}215\ \mathrm{m/s}\right]$.

$n = 5\,n_1 = 68{,}435$.

N = 51,57 PS. $\left[\mathrm{aus\ N} = \frac{1}{75}(15^2 \cdot \pi \cdot 4)\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}6\ \mathrm{m} \cdot 2 \cdot \frac{n}{60\ \mathrm{s}}\right]$.

Q = 12 592 kg [aus (N . 75) mkg/s . 0,7 = Q kg . 0,215 m/s].

584. $x = 25$ Arbeiter. $\left[x \,.\, 2\ \mathrm{mkg/s} = \frac{(600\,.\,1500)\ \mathrm{kg}}{10\,.\,3600\ \mathrm{s}} \,.\, 2\ \mathrm{m}\right]$.

585. $G = 288$ t. $\left[\text{Aus } 0{,}8 \,.\, 80 \,.\, 75\ \mathrm{mkg/s} = G\ \mathrm{kg} \,.\, \frac{1\ \mathrm{m}}{60\ \mathrm{s}}\right]$.

586. Nach 34 Stunden 43 Minuten.
[5000 . 1000 kg . 3 m = 2 . 75 mkg/s . 0,8 . x s, woraus die Zeit x in Sekunden.]

587. Die Umfangsgeschwindigkeit des Göpels am Halbmesser R_1 ist

$$v = \frac{R_1\, n\, \pi}{30} = \frac{3\ \mathrm{m}}{50\ \mathrm{s}}, \text{ woraus } n = 2{,}86.$$

Die Last erfordert $\frac{400\ \mathrm{kg}\,.\,3\ \mathrm{m}}{50\ \mathrm{s}} = 24$ mkg/s Leistung; nach Aufgabe 362 ist $\eta = 0{,}84$, also ist die Leistung für den Mann

$$\frac{24\ \mathrm{mkg/s}}{4\,.\,0{,}84} = 7{,}15\ \mathrm{mkg/s}.$$

588. Damit der Bewegungszustand nach jeder Umdrehung derselbe sein soll, muß die Summe der Arbeiten während einer Umdrehung gleich Null sein; hieraus folgt:

$$P = \frac{\pi}{2}\left\{Q\frac{R}{r} + f_1\, D\, \frac{\varrho}{r}\right\} = 127{,}7\ \mathrm{kg},$$

$$\eta = 0{,}98.$$

589. $P = \frac{r}{R}\, Q\, \mathrm{tg}\,(\alpha + \varrho) = 2{,}82$ kg, $\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{2\, r\, \pi}$,

$\mathrm{tg}\,\varrho = f.$

Arbeit der Kraft: $+\,429$ mkg,
Arbeit der Last: $-\,200$ mkg,
Arbeit der Reibung: $-\,229$ mkg,
Wirkungsgrad $\eta = \frac{200}{429} = 0{,}47.$

590. a) Es ist die höchstens zu übertragende Umfangskraft

$$P = S_1 - S_2 = S_1 \frac{e^{f\pi} - 1}{e^{f\pi}} = 73{,}1\ \mathrm{kg},$$

worin $e^{f\pi} = 2{,}41$.

b) Die Umfangsgeschwindigkeit der Riemenscheibe ist

$$v = \frac{r\,n\,\pi}{30} = 2{,}09 \text{ m/s}$$

und die größte Leistung $N = \frac{1}{75} P\,v = 2{,}04$ PS.

c) Es ist die Leistung der Reibung in Pferdestärken

$$\frac{1}{75} \cdot f_1\,D\,v\,\frac{\varrho}{r} = 0{,}07 \text{ PS.}$$

591. 10,2 PS. [Es ist die Arbeit der Reibung in der Sekunde

$$R\,v = 0{,}05 \,.\, G\,\frac{r\,n\,\pi}{30} \text{ mkg/s}].$$

592. 4,8 mkg/s $\left[= 0{,}3 \,.\, 40 \text{ kg} \,.\, \frac{10 \,.\, 2 \,.\, 1{,}2 \text{ m}}{60 \text{ s}}\right].$

593. $f_1 = 0{,}048$. [Es ist die Leistung der Reibung
$E_r = 0{,}03$ der absoluten Leistung
$= 0{,}03 \,.\, 400 \text{ kg/s} \,.\, 3 \text{ m} = 36$ mkg/s.

Ferner ist $E_r = f_1 \,.\, 4000 \text{ kg} \,.\, \frac{d\,n\,\pi}{60 \text{ s}}\Big].$

594. 6 Arbeiter. $\left[x \,.\, 8 \text{ mkg/s} \,.\, 0{,}9 = \frac{300 \text{ kg} \,.\, 8 \text{ m}}{60 \text{ s}}.\right]$

595. $t = 17'\ 16''$.
[Für die Strecke s_1 ist

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_1}{75\,N}\,Q\,(\sin\alpha_1 + \varkappa\cos\alpha_1) = 403{,}4 \text{ s}$$

und ebenso für die Strecke s_2

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_2}{75\,N}\,Q\,(\sin\alpha_2 + \varkappa\cos\alpha_2) = 633{,}1 \text{ s.]}$$

596. $P = \frac{100\,a\,G\sin(\alpha+\beta)}{24\,r\,n\cos\alpha}$,

$$N = \frac{10\,a\,G\sin(\alpha+\beta)}{36 \,.\, 75\cos\alpha}.$$

597. Für die gezeichnete Stellung der beiden Wagen sind die Seilspannungen in A und B:

$$S_1 = G_1\,(\sin\alpha + \varkappa\cos\alpha) + q\,(l - x)\sin\alpha,$$
$$S_2 = G_2\,(\sin\alpha - \varkappa\cos\alpha) + q\,x\sin\alpha;$$

hierin ist $\varkappa$ die Widerstandszahl für Räder.

Nennt man P die Umfangskraft an der Scheibe, so ist für Gleichgewicht

$$P + S_2 = S_1\left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) + f_1 \frac{r}{R} D;$$

hierin ist die Zahl der Seilsteifheit $\xi = 0{,}06\, d^2$, f_1 die Zahl der Zapfenreibung, D der Zapfendruck $P + S_1 + S_2$.

Durch Einsetzen wird $P = A - B x$, worin

$$A = \frac{1}{1 - f_1 \frac{r}{R}} \left\{(G_1 - G_2)\left(\sin\alpha + f_1 \varkappa \frac{r}{R}\cos\alpha\right)\right.$$

$$+ (G_1 + G_2)\left(\varkappa\cos\alpha + f_1 \frac{r}{R}\sin\alpha\right)$$

$$+ \frac{2\xi}{R} G_1 (\sin\alpha + \varkappa\cos\alpha)$$

$$\left. + q\, l \sin\alpha\left(1 + f_1 \frac{r}{R} + \frac{2\xi}{R}\right)\right\},$$

$$B = 2\, q \sin\alpha \frac{1 + \frac{\xi}{R}}{1 - f_1 \frac{r}{R}}.$$

Die gewünschte Arbeit ist

$$A = \int_0^l P\, d x = A l - \frac{1}{2} B l^2.$$

598. $A = \frac{1}{2} c\, a^2$; $\max E = c\sqrt{\frac{c}{m}\frac{a^2}{2}}$ für $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

[Es ist $A = \int_0^a K\, d s$, $s = a - r$; ferner aus

$$v\, d v = \gamma\, d s = -\frac{c\, r}{m} . d r \ldots . v^2 = \frac{c}{m}(a^2 - r^2)$$

und

$$E = K v = c\sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{a^2 r^2 - r^4}.]$$

599. Gleichgewicht tritt ein, wenn $P = 0$ oder $v = \frac{a}{b}$ geworden ist. Nach dem Arbeitsprinzip ist dann

$$A = \frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} - v_0^2\right).$$

600. $A = G\,r$. [Es ist $A = \int P\,.\,d\,s\,.\,\cos\varphi$, $G \sin\psi = P \cos\varphi$,

$\psi = \frac{\pi}{2} - 2\,\varphi$, woraus $P = G\,\frac{\cos 2\,\varphi}{\cos\varphi}$; ferner $d\,s = r\,.\,d\,\psi$,

$$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} G\,r \cos 2\,\varphi\,.\,d\,(2\,\varphi).]$$

601. $A = m\,m_1 \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right]$, speziell für $\varphi = 45^0$:

$$A = \frac{4\,m\,m_1\,a}{s^2 - 2\,a^2}.$$

[Für die Arbeit zur Überwindung der Anziehungskraft in r_1 ist

$$A_1 = \int_{r_{01}}^{r_1} \frac{m\,m_1}{r^2}(-\,d\,r) = m\,m_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{01}}\right),$$

ebenso für die Arbeit zur Überwindung der Anziehungskraft in r_4:

$$A_4 = \int_{r_{04}}^{r_4} \frac{m\,m_1}{r^2}\,.\,d\,r = -\,m\,m_1\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_{04}}\right).$$

Nun ist für $\varphi = 0$: $r_{01} = r_{04}$, also

$$A_1 + A_4 = m\,m_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_4}\right);$$

analog für $A_2 + A_3$.]

602. $A = \frac{k}{a}$.

603. Nach $A = \int P\,.\,ds \cos\varphi$.

Die Kraft ist $P = \frac{k}{r^2}$; wenn r und ψ die Polarkoordinaten eines Kreispunktes in bezug auf C als Pol und $C\,M_0$ als Polarachse sind, so ist $r = 2\,a \cos\psi$; ds, das Bahnelement, wird gleich $2\,a\,d\,\psi$ und der Winkel φ zwischen Kraft und Bewegungsrichtung gleich $90^0 - \psi$. Daraus folgt

$$A = \frac{k}{2\,a}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\psi\,d\,\psi}{\cos^2\psi} = \frac{k}{2\,a}\,(\sqrt{2} - 1).$$

604. $J_P = \frac{b\,h}{4}\left(h^2 + \frac{b^2}{12}\right)$. [Aus $J_P = J_x + J_y$, wenn x die Symmetrale des Dreiecks, y die dazu Senkrechte durch die Spitze ist.]

605. $J_P = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)$, F = Polygonfläche, s = Polygonseite, h = Abstand der Seite vom Mittelpunkt.

606. $J_P = \frac{F}{12}(3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2)$.

607. $J_P = \frac{3}{2}\pi\,r^4$.

608. $x = \frac{1}{R^2 - r^2}\left[\sqrt{R^2\,r^2\,e^2 - \frac{1}{2}(R^4 - r^4)(R^2 - r^2)} - r^2\,e\right]$.

609. Nennt man $O\,A = r$, $\sphericalangle\,A\,O\,X = \varphi$, so ist $O\,B = b = r\cos\varphi$, $O\,C = h = r\sin\varphi$ und das polare Trägheitsmoment in bezug auf O: $J_P = \frac{1}{3}(b\,h^3 + b^3\,h)$. Soll J_P konstant bleiben, so ist $r^4 \sin 2\,\varphi$ = konst. der Ort von A.

610. Nennt man J_P das polare Trägheitsmoment in bezug auf den Halbierungspunkt M des Kreisbogens, J_0 jenes in bezug auf seinen Schwerpunkt S, J_1 jenes in bezug auf den Kreismittelpunkt O, so ist mit

$$O\,S = x = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}, \quad L = 2\,r\,\alpha,$$

$$J_1 = L\,r^2, \quad J_0 = J_1 - L\,x^2, \quad J_P = J_0 + L\,(r - x)^2,$$

woraus

$$J_P = 2\,r^2\,L\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right).$$

611. $\frac{F}{4}(a^2 + b^2)$ und $\frac{F}{4}(5\,a^2 + b^2)$ beziehungsweise $\frac{F}{4}(a^2 + 5\,b^2)$.

615. Ist dz ein kleines Stück des Stabes, μ d z seine Masse, z sein Abstand von A, so ist μ d z . $(z \sin \varphi)^2$ sein Trägheitsmoment in bezug auf X und

$$T = \mu \sin^2 \varphi \int_0^l z^2\, dz = \frac{1}{3} M\, l^2 \sin^2 \varphi.$$

616. Nennt man μ d z ein Massenelement des Stabes, z seinen Abstand von A, x seinen Abstand von X, so ist

$$T = \int_0^l x^2 \mu\, dz \qquad \text{und wegen}$$

$$x^2 = a^2 + z^2 - 2\, a\, z \cos \beta,$$

$$b^2 = a^2 + l^2 - 2\, a\, l \cos \beta, \quad \measuredangle\, B A X = \beta:$$

$$T = \frac{M}{6} (3\, a^2 + 3\, b^2 - l^2).$$

617. $T = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g}\, a\, b\, c\, (a^2 + b^2).$

618. $T_0 = \frac{M}{24} s^2 \left(1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{n}\right),$

$$T_1 = \frac{1}{2} T_0 + \frac{1}{12} M\, l^2.$$

619. a) $T_0 = \frac{M}{20} (a^2 + b^2)$. [Zerlege in dünne Scheiben parallel der Grundfläche.]

b) $T_1 = \frac{M}{80} (4\, b^2 + 3\, h^2)$. [Suche zuerst das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Grundfläche gehende, zu a parallele Achse, dann in bezug auf die parallele Schwerlinie der Pyramide.]

c) $T_2 = \frac{M}{10} (3\, b^2 + h^2)$, d) $T_3 = \frac{M}{20} (b^2 + 12\, h^2)$.

620. a) $T_1 = \frac{3}{10} M\, r^2$.

[Zerschneide den Kegel in unendlich dünne Scheiben parallel zur Grundfläche. Ist x der Halbmesser einer

Scheibe, z ihr Abstand von der Spitze, d z ihre Dicke, so ist ihr Trägheitsmoment für die Kegelachse

$$d\,T_1 = \frac{1}{2}\mu\,\pi\,x^4\,d\,z$$

und wegen $\qquad z = x\frac{h}{r},\quad d\,z = d\,x\,.\,\frac{h}{r}$:

$$T_1 = \frac{1}{10}\mu\,\pi\,h\,r^4,$$

woraus mit $M = \frac{1}{3}\mu\,\pi\,h\,r^2$ obiger Ausdruck folgt.]

b) $T_2 = \frac{3}{5}M\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)$.

[Benütze dieselben dünnen Scheiben. Ihr Trägheitsmoment für eine zur Kegelachse senkrechte Schwerlinie ist $\qquad d\,t = \frac{1}{4}\mu\,\pi\,x^4\,d\,z$

und um die parallele Achse durch die Kegelspitze

$$d\,T_2 = d\,t + d\,M\,.\,z^2,\quad d\,M = \mu\,\pi\,x^2\,d\,z,$$

woraus $\qquad T_2 = \frac{1}{5}\mu\,\pi\,h\,r^2\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)$.]

c) $T_0 = \frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right)$. $\left[\text{Aus } T_2 = T_0 + M\left(\frac{3}{4}h\right)^2\right]$.

621. $T = \frac{7\sqrt{2}}{480}\mu\,a^5$. [Suche zuerst das Trägheitsmoment in bezug auf die Höhe des Tetraeders; es ist $T_0 = \frac{\sqrt{2}}{240}\mu\,a^5$. Dasselbe Trägheitsmoment haben dann alle übrigen Schwerlinien, also auch die zur Kante a parallele. Die Kante a und die ihr parallele Schwerlinie haben den Abstand $e = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; die Masse des Tetraeders ist $M = \frac{\mu\,a^3}{6\sqrt{2}}$; es bleibt $T = T_0 + M\,e^2$.]

622. Schneidet man die Fläche in unendlich dünne Ringe von der Höhe d x, so hat einer derselben das Trägheitsmoment

17*

$\frac{2\mu\pi l}{R-r}x^3\,dx$, worin μ die Dichte, l die Länge der Erzeugenden im Mantel ist. Die Masse ist dann

$$M = \mu\pi l(R + r)$$

und das gesuchte Trägheitsmoment

$$T = \frac{M}{2}(R^2 + r^2).$$

623. $T = \frac{2}{3}Mr^2$. [Entweder direkt oder aus dem Trägheitsmoment der vollen Kugel $\frac{8}{15}\mu\pi r^5$ durch Differenzieren nach r, worauf man $\mu \,.\, 4r^2\pi \,.\, dr$ gleich der Masse M zu setzen hat.]

624. Für jede durch den Kugelmittelpunkt gehende Gerade ist das Trägheitsmoment der Halbkugel-Oberfläche $\frac{2}{3}Mr^2$, nämlich die Hälfte des Trägheitsmomentes der Kugel-Oberfläche $\frac{2}{3}(2M).r^2$ (vgl. vorige Aufgabe). Das Trägheitsellipsoid ist somit eine Kugel.

625. $T = \frac{3}{10}M\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$. [Zerschneide den Kegelstutz in Scheiben parallel den Grundflächen von unendlich kleiner Höhe; dann ist $dM = \frac{\mu\pi h}{R-r}x^2\,dx$, $dT = \frac{\mu\pi h}{2(R-r)}x^4\,dx$, worin μ die Dichte, h die Höhe des Kegelstutzes, x den Halbmesser der dünnen Scheibe bezeichnet.]

626. $T_1 = \frac{1}{3}Ma^2$ für die Umdrehungs-Achse;

$$T_2 = T_3 = \frac{1}{6}M(a^2 + 3h^2).$$

627. $T = \frac{2}{5}Mb^2$, $M = \frac{4}{3}\mu\pi ab^2$.

[Sind x und y die Koordinaten eines Meridianpunktes, parallel zu a und b, in bezug auf den Mittelpunkt der Ellipse und zerschneidet man das Ellipsoid in dünne Kreisscheiben, senkrecht zur Achse $2a$, so ist $dM = \mu\pi y^2\,dx$, $dT = \frac{1}{2}\mu\pi y^4\,dx$ und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.]

628. Es ist nämlich $T_x + T_y = T_z + 2\int z^2 \,.\, dm$.

629. $R_1 = \sqrt[4]{2 R^4 - r^4}$. [Es ist das Trägheitsmoment des Ringes $T = \frac{1}{2} \mu \pi a (R^4 - r^4)$ und nach der Vergrößerung

$$T_1 = \frac{1}{2} \mu \pi a (R_1^4 - r^4).]$$

630. Sind $T_1\, T_2\, T_3$ die Hauptträgheitsmomente des Ringes in bezug auf seinen Mittelpunkt, so ist $T_1 = M a^2$ (in bezug auf die Schwerlinie senkrecht zur Ringebene), $T_2 = T_3 = \frac{1}{2} M a^2$ (in bezug auf die Schwerlinien in der Ringebene). Es bleibt für das gesuchte Trägheitsmoment

$$T = T_1 \sin^2 \alpha + T_2 \cos^2 \alpha = \frac{M a^2}{2} (1 + \sin^2 \alpha).$$

631. Trägheitsmoment des Ringes: $T_1 = \frac{\pi \gamma}{2 g} a [R^4 - (R - b)^4]$.

Trägheitsmoment der Nabe: $T_2 = \frac{\pi \gamma}{2 g} \beta (r_1^4 - r^4)$.

Trägheitsmoment der Arme:

$$T_3 = \frac{\pi \gamma}{2 g} \varrho^2 \{3 \varrho^2 (R - b - r_1) + 4 [(R - b)^3 - r_1^3]\}.$$

Zusammen: $T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{\pi \gamma}{2 g} . 235\,839{,}28 \text{ dcm}^5$.

Setzt man $\gamma = 7{,}5 \frac{\text{kg}}{\text{dcm}^3}, \quad g = 98{,}1 \text{ dcm/sek}^2$,

so wird $T = 28\,322$ [Dimension $M L^2$]

in einem Maß-System, in dem das Kilogramm als Krafteinheit, der dcm als Längeneinheit angenommen ist. Also auch $T = 2832{,}2$ in einem Maß-System, in dem das Kilogramm als Krafteinheit, der m als Längeneinheit angenommen ist.

632. Trägheitsmoment der Kugeln:

$$T_1 = \frac{\pi \gamma}{g} . \frac{8}{3} a^3 \left(R^2 + \frac{2}{5} a^2\right) = \frac{\pi \gamma}{g} . 9\,077\,333 \text{ cm}^5.$$

Trägheitsmoment der Nabe:

$$T_2 = \frac{\pi \gamma_1}{g} . \frac{\beta}{2} (r_1^4 - r^4) = \frac{\pi \gamma_1}{g} . 17\,355 \text{ cm}^5.$$

Trägheitsmoment der Arme:

$$T_3 = \frac{\pi\gamma_1}{g} \cdot \frac{\varrho^2}{6} [3\varrho^2 (R - a - r_1) + 4(R - a)^3 - 4 r_1{}^3]$$

$$= \frac{\pi\gamma_1}{g} \cdot 73\,407 \text{ cm}^5.$$

Setzt man

$$\gamma = 0{,}0076 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3},$$

$$\gamma_1 = 0{,}0005 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3},$$

$$g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2},$$

so wird $\frac{\pi\gamma}{g} = 0{,}000024, \quad \frac{\pi\gamma_1}{g} = 0{,}0000016$

und $T_1 = 217{,}856, \quad T_2 + T_3 = 0{,}145$

und das gesamte Trägheitsmoment $T = 218$ [Dimension $M L^2$] in einem Maß-System, in dem das Kilogramm als Krafteinheit, der cm als Längeneinheit angenommen ist.

633. Schneide in unendlich dünne Scheiben senkrecht zur Achse $2a$. Hat eine Scheibe den Abstand x vom Mittelpunkt, so ist sie elliptisch mit den Halbachsen

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{und} \quad p = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ihr Trägheitsmoment bezüglich der Achse $2a$ ist

$$dT = \frac{\mu\pi}{4}(n p^3 + n^3 p) \, . \, dx,$$

woraus

$$T = \frac{\mu\pi}{2} \cdot \frac{bc}{a^4}(b^2 + c^2)\int_0^a (a^2 - x^2)^2 \, dx,$$

$$T = \frac{4}{15}\mu\pi abc(b^2 + c^2).$$

Die Masse des Ellipsoides ist

$$M = \frac{4}{3}\mu\pi abc,$$

also

$$T = \frac{M}{5}(b^2 + c^2).$$

634. Differenziert man das Trägheitsmoment des vollen Ellipsoides aus voriger Aufgabe, so ist

$$dT = \frac{1}{5} dM (b^2 + c^2) + \frac{1}{5} M (2\,b\,db + 2\,c\,dc).$$

Für zwei ähnliche Ellipsoide ist

$$da : db : dc = a : b : c,$$

also
$$db = da \cdot \frac{b}{a}, \quad dc = da \cdot \frac{c}{a}$$

und wegen
$$M = \frac{4}{3} \mu \pi a b c:$$

$$dM = 4 \mu \pi b c \cdot da,$$

woraus
$$dT = \frac{1}{3} dM (b^2 + c^2).$$

635. Man setze (vgl. Aufg. 633) das Trägheitsmoment des Körpers für seine Hauptachse X gleich jenem des Ellipsoides:

$$T_1 = \Sigma m (y^2 + z^2) = \frac{M}{5} (b^2 + c^2)$$

und analog für die andern Hauptachsen. Man erhält daraus a b c, die Halbachsen des gesuchten Ellipsoides, sowie schließlich dessen Gleichung

$$\frac{X^2}{\Sigma m x^2} + \frac{Y^2}{\Sigma m y^2} + \frac{Z^2}{\Sigma m z^2} = \frac{5}{M}.$$

Da für jeden andern Durchmesser von den Richtungswinkeln $\alpha \beta \gamma$

$$T = T_1 \cos^2 \alpha + T_2 \cos^2 \beta + T_3 \cos^2 \gamma$$

ist, so stimmen die Trägheitsmomente T des Körpers für alle Durchmesser mit jenen des Ellipsoides überein.

636. Nach Aufgabe 634 ist das Trägheitsmoment der elliptischen Schale

$$dT = \frac{1}{3} dM (b^2 + c^2)$$

und ihre Masse
$$dM = 4 \mu \pi b c \cdot da.$$

Setzt man $\mu = \frac{k}{a}$, so wird mit $b = a \frac{B}{A}$, $c = a \frac{C}{A}$:

$$M = 2 k \pi B C \text{ und } T = \frac{M}{6} (B^2 + C^2).$$

637. 4,893 Millionen mkg.

638. 7263 mt.

639. $L = \frac{\pi^2}{3600\,g} G\, r^2\, n^2$.

640. $\frac{\pi^2}{4800\,g} G\, r^2\, n^2$. [Es ist die Bewegungsenergie der Welle $L = \frac{1}{2} T\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{G}{g} r^2\right)\left(\frac{n\,\pi}{30}\right)^2$; die Reibung verzehrt $\frac{3}{4}$ L.]

641. $\operatorname{tg}^2 \alpha_1 = \frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$.

[Die Energie der Schraubenbewegung ist

$$L = \frac{1}{2} T\, \omega^2 + \frac{1}{2} M\, c^2 = \frac{1}{2} M\, r^2\, \omega^2 \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{2}\right),$$

weil $c = r\, \omega \operatorname{tg} \alpha$ die Geschwindigkeit in der Schraubenachse ist.]

642. $x = 60$. [Die Energie der Kugel ist

$$L = \frac{1}{2} T\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{15} r^5 \pi \frac{\gamma}{g}\right)\left(\frac{n\,\pi}{30}\right)^2 = \frac{13\,\pi^3}{180\,g} \cdot n^2,$$

wenn $r = 0{,}5$ m, $\gamma = 7800$ kg/m^3 eingesetzt wird. Dann ist

$$L = 2464 \text{ mkg} + \frac{13\,\pi^3}{180\,g} \cdot x^2.]$$

643. $x = n \frac{r}{r - \delta}$. [Die Energie der Kugel ist

$$L = \frac{1}{2} T\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\frac{G}{g} r^2\right)\left(\frac{n\,\pi}{30}\right)^2.$$

Ändert sich die Energie nicht, so ist $r\, n = (r - \delta)\, x$.]

644. $n_1 = n \sqrt{\frac{2}{21}}$. [Da die Energie sich nicht ändert, muß $T\, n^2 = (T + T_1)\, n_1{}^2$ sein; hierin ist

$$T = \frac{8\,\pi}{15}\frac{\gamma}{g}[r^5 - (r - \delta)^5] \doteq \frac{8\,\pi}{3}\frac{\gamma}{g} r^4\, \delta$$

das Trägheitsmoment der Hohlkugel und

$$T_1 = \frac{8\,\pi}{15}\frac{\gamma_1}{g}(r - \delta)^5 \doteq \frac{8\,\pi}{15}\frac{\gamma_1}{g} r^4\,(r - 5\,\delta)$$

jenes des Sandes.]

645. $x = n \sqrt{\frac{d^4\, l}{d^4\, l + d_1{}^4\, l_1}}$.

[Die Energie der Welle ist vor der Kuppelung:

$$L = \frac{1}{2} T \omega^2 = \frac{\pi \gamma}{64 g} . d^4 l . \left(\frac{n \pi}{30}\right)^2,$$

nach der Kuppelung:

$$\frac{\pi \gamma}{64 g} (d^4 l + d_1^4 l_1) . \left(\frac{x \pi}{30}\right)^2;$$

setze die beiden Werte einander gleich.]

646. $L = \frac{3 \pi^2}{g} G r^2.$

647. $L = \frac{1}{5400} \frac{\pi^2}{g} n^2 (b^2 + c^2) a b c \gamma = 0{,}2794$ mkg.

648. Es ist $L = \frac{1}{2} M c^2 + \frac{1}{2} T \omega^2,$

$$M = \frac{\gamma}{g} r^2 \pi \left(1 + \frac{h}{3}\right),$$

$$T = \frac{\gamma}{g} \frac{r^4 \pi}{2} \left(1 + \frac{h}{5}\right),$$

$$\omega = 2 n \pi,$$

woraus $$L = \frac{\gamma}{g} r^2 \pi \left[\frac{c^2}{2}\left(1 + \frac{h}{3}\right) + \pi^2 r^2 n^2 \left(1 + \frac{h}{5}\right)\right].$$

649. $L = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} a b c (a^2 + b^2) \omega^2.$

[Aus $L = \frac{1}{2} T \Omega^2$, $T = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$, $\Omega = 4 \omega$.]

650. $L_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} a b c (a^2 + b^2) \omega^2.$

[Aus $L_1 = \frac{1}{2} T_1 \Omega_1^2$, $T_1 = T + M \frac{a^2 + b^2}{36}$, $\Omega_1 = 3 \omega$.]

Die Änderung der Bewegungsenergie ist

$$L - L_1 = \frac{1}{6} \frac{\gamma}{g} a b c (a^2 + b^2) \omega^2.$$

651. Ist M die Masse des Körpers, $T = M \varrho^2$ sein Trägheitsmoment für die Schwerlinie A, so ist die Bewegungsenergie

$$L = \frac{1}{2} T \omega^2.$$

Zerlegt man die Drehung nach den Achsen A_1 und A_2, so ist die Winkelgeschwindigkeit um jede derselben $\frac{\omega}{2}$ und das Trägheitsmoment für jede dieser Achsen

$$T + M a^2.$$

Dann ist die Bewegungsenergie des Körpers

$$L = 2 \cdot \frac{1}{2} (T + M a^2) \left(\frac{\omega}{2}\right)^2.$$

Durch Vergleich erhält man

$$a = \varrho.$$

652. Ist T_1 das Trägheitsmoment des Kegels für seine geometrische Achse, T_2 hingegen für eine durch die Spitze gehende zur Achse senkrechte Gerade, 2α die Öffnung des Kegels, so ist das Trägheitsmoment für eine Erzeugende

$$T = T_1 \cos^2\alpha + T_2 \sin^2\alpha$$

und mit Benützung der Resultate der Aufgabe 620, ferner aus

$$\cos^2\alpha = \frac{h^2}{h^2 + r^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{r^2}{h^2 + r^2},$$

$$T = \frac{3}{20} M r^2 \frac{r^2 + 6 h^2}{r^2 + h^2},$$

woraus die Bewegungsenergie

$$L = \frac{1}{2} T \omega^2 = \frac{\pi^2 n^2}{12\,000} M r^2 \frac{r^2 + 6 h^2}{r^2 + h^2}.$$

653. Bei einer Abwälzung legt der Punkt O den Weg $2 h \pi \cos\alpha$ gleichförmig zurück, seine Geschwindigkeit ist also $\frac{2 h \pi}{n} \cos\alpha$ und somit die Winkelgeschwindigkeit um die Berührungserzeugende

$$\omega = \frac{2\pi}{n} \operatorname{cotg}\alpha.$$

Mit Benützung der früheren Aufgabe wird

$$L = \frac{1}{2} T \omega^2 = \frac{3\pi^2}{10 n^2} M h^2 \frac{r^2 + 6 h^2}{r^2 + h^2}.$$

654. Das Trägheitsmoment des Stabes für die Achse ist

$$T = \frac{1}{12} M l^2 + M \left(x - \frac{l}{2}\right)^2,$$

die reduzierte Masse in A: $\mathfrak{M} = \frac{T}{x^2}$.

Setzt man
$$\frac{d\,\mathfrak{M}}{d\,x} = 0,$$

so wird
$$x = \frac{2}{3}\,l \text{ und } \mathfrak{M}_{min} = \frac{M}{4}.$$

655. Das Trägheitsmoment für die Drehungsachse ist
$$T = \frac{1}{3}\,M_1\,l^2 + \frac{2}{5}\,M_2\,r^2 + M_2\,(l + r)^2.$$

Setzt man
$$\mathfrak{M} = \frac{T}{(l + r)^2} = M_1 + M_2,$$

so findet man
$$\frac{l}{r} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\,\frac{M_2}{M_1}} - \frac{3}{2}.$$

656. Die Reduktion einer Masse hat nach dem Grundsatz zu erfolgen, daß die Bewegungsenergie durch die Reduktion nicht verändert wird.

Es ist also allgemein die reduzierte Masse
$$\mathfrak{M} = \frac{1}{v^2}\int u^2\,.\,d\,M,$$
wenn v die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes, d M ein Massenelement, u seine Geschwindigkeit bezeichnet.

Nach diesem Grundsatz wird die Reduktion von M_1, M_2, M_3, M_4 nach A liefern:
$$\mathfrak{M}_1 = 4\,M_1 \sin^2 \varphi,$$
$$\mathfrak{M}_2 = 4\,M_2 \cos^2 \varphi,$$
$$\mathfrak{M}_3 = M_3\left(\frac{1}{3} + 2 \sin^2 \varphi\right),$$
$$\mathfrak{M}_4 = M_4\left(\frac{1}{3} + 2 \cos^2 \varphi\right),$$
somit
$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4\\ &= \frac{1}{3}\,(M_3 + M_4) + \sin^2 \varphi\,(4\,M_1 + 2\,M_3)\\ &\qquad + \cos^2 \varphi\,(4\,M_2 + 2\,M_4).\end{aligned}$$

$\mathfrak{M}$ bleibt unveränderlich, wenn
$$2\,M_1 + M_3 = 2\,M_2 + M_4,$$
dann wird nämlich
$$\mathfrak{M} = 2\,(M_1 + M_2) + \frac{4}{3}\,(M_3 + M_4).$$

657. Hinsichtlich des Grundsatzes der Massenreduktion siehe vorige Aufgabe.

Nennt man
$$O_1 O_2 = A_1 A_2 = 2a,$$
$$O_1 A_1 = O_2 A_2 = 2c,$$
ferner $M_2 \varrho^2$ das Trägheitsmoment der Scheibe M_2 für O_2, so ergibt zunächst die Massenreduktion von M_2 nach A_2:
$$\mathfrak{m}_2 = M_2 \left(\frac{\varrho}{2c}\right)^2.$$
Um $\mathfrak{m}_2$ nun nach A_1 zu reduzieren, benütze man die Gleichung
$$\mathfrak{M}_2 \left(2c \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \mathfrak{m}_2 \left(2c \frac{d\psi}{dt}\right)^2$$
oder
$$\mathfrak{M}_2 = M_2 \frac{\varrho^2}{4c^2} \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2.$$
Nennt man die veränderliche Entfernung $A_1 O_2 = x$, so ist
$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{4b^2}{x^2},$$
worin b die kleine Halbachse der Ellipse ist; es wird also
$$\mathfrak{M}_2 = M_2 \frac{4\varrho^2 b^4}{c^2 x^4}.$$

658. $$\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha_1} = \sqrt{\frac{G_1 l_1}{G l}}.$$

[Die Bewegungsenergie jedes Stabes in der tiefsten Lage ist gleich der Arbeit des Gewichtes
$$\frac{1}{2} G l (1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2} G_1 l_1 (1 - \cos\alpha_1).]$$

659. Die nächste Ruhelage hat die Entfernung $\frac{13}{12}$ a von O_1, $\frac{a}{12}$ von O_2; die Arbeiten der beiden Anziehungskräfte sind
$$-\frac{5}{9} k a^2 \text{ für } O_1, \quad +\frac{5}{9} k a^2 \text{ für } O_2.$$

[Ist x die Entfernung des Punktes von O_1, so ist die Arbeit der beiden Anziehungskräfte
$$A = k \int_{a/4}^{x} (2a - 3x)\, dx;$$
für die beiden Ruhelagen muß dieser Ausdruck Null werden.]

660. $\sqrt{3\,g\,l}$.

[Anfangsenergie: $\frac{1}{2} T\, \omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{G}{g} l^2\right)\left(\frac{v}{l}\right)^2$,

Endenergie: Null,

Arbeit des Gewichtes: $-G\frac{l}{2}$.]

661. Aus $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}\left(\frac{d_1}{2}\right)^2\left(\frac{n_1 \pi}{30}\right)^2 +$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\left(\frac{d_2}{2}\right)^2\left(\frac{n_2 \pi}{30}\right)^2$$

und $n_1 : n_2 = d_2 : d_1$ folgt: $n_1 = 40$, $n_2 = 80$.

662. Die Bewegungsenergie der Walze ist

$$L = \frac{1}{2} T\, \omega^2,\quad T = \frac{1}{2}\frac{G}{g} r^2,\quad G = \text{Gewicht der Walze.}$$

Ihr Schwerpunkt S hat von O den Abstand $\frac{4}{9}\frac{r}{\pi}\sqrt{2}$; sobald er in die tiefste Lage kommt, hat das Gewicht die Arbeit geleistet:

$$\frac{4}{9\,\pi} G\, r\,(\sqrt{2} - 1).$$

Es wird für A: $v_{max}^2 = \frac{16}{9\,\pi} g\, r\,(\sqrt{2} - 1)$.

663. $v_s = r\sqrt{\frac{2\,L}{T_s + M r^2}}$.

664. $x_1 = \frac{2\,G}{k}$, $x_2 = \frac{G}{k}$.

665. Ist λ die Längenänderung des Fadens zu irgend einer Zeit, so ist dessen elastische Kraft $K = k\,\lambda$ und deren Arbeit beim Ausdehnen des Fadens

$$-\int_0^l K \,.\, d\lambda = -\frac{1}{2} k\, l^2,$$

wenn $l = r\,\varphi$ die Ausdehnung bei der nächsten momentanen Ruhelage der Rolle ist. Sinkt dabei das Gewicht G um x, so ist dessen Arbeit G x, wobei $x = R\,\varphi$ ist. Da die Bewegungsenergie zu Anfang und zu Ende Null ist, so muß auch die Summe der Arbeiten Null sein:

$$-\frac{1}{2}\,k\,l^2 + G\,x = 0,$$

woraus

$$\varphi = \frac{2\,G\,R}{k\,r^2}.$$

666. Die Arbeit der drei Anziehungskräfte ist

$$A = \int_{4a}^{0} k\,m\,m_1\,(a + x)\,(-\,d\,x) + 2\int_{4a}^{0} k\,m\,m_1\,x\,(-\,d\,x),$$

wenn die Entfernung des bewegten Punktes von A mit x bezeichnet wird.

Setze

$$A = \frac{1}{2}\,m\,v^2,$$

so wird

$$v^2 = 56\,k\,m_1\,a^2.$$

667. Da die Energie des Punktes m in beiden Ruhelagen Null ist, so muß die Arbeit A seiner Kräfte verschwinden.

Es ist

$$d\,A = 2\,\frac{m\,m_1}{r^2}\cos\varphi\,(-\,d\,x) + \frac{m\,m_1}{(h + x)^2}\,(-\,d\,x),$$

woraus:

$$A = m\,m_1\left\{\int\frac{-\,2\,x\,d\,x}{\left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)^{3/2}} + \int\frac{-\,d\,x}{(h + x)^2}\right\}_{\infty}^{x}$$

$$= m\,m_1\left\{\frac{2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}} + \frac{1}{h + x}\right\} = 0,$$

woraus

$$x = -\,\frac{4 - \sqrt{15}}{\sqrt{12}}\,a.$$

668. Für Gleichgewicht ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{b^2}$.

Wenn der Winkel von A′ C B′ bis zur nächsten Ruhelage schwingt, ist die Änderung der Bewegungsenergie Null, also auch die geleistete Arbeit:

$$A = 2\,a\,q\,.\,a\sin\varphi - 2\,b\,q\,.\,b\,(1 - \cos\varphi) = 0,$$

worin q das Gewicht der Längeneinheit ist. Daraus wird

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a^2}{b^2} \text{ und } \varphi = 2\,\alpha.$$

669. Die anfängliche Bewegungsenergie ist

$$L_0 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}R^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}T\,\omega^2,$$

worin das Trägheitsmoment der hohlen Walze

$$T = \frac{\pi\, l\,\gamma}{2\,g}(R^4 - r^4).$$

Die Arbeit des Gewichtes ist $-\,G\,h$.

Setzt man $-\,L_0 = -\,G\,h$, so wird

$$\omega^2 = \frac{4\,G\,g\,h}{2\,G\,R^2 + \pi\,l\,\gamma\,(R^2 - r^2)}$$

und

$$\omega = 4{,}19.$$

670. $$v^2 = \frac{3\,g\,d\,(d-l)\sqrt{d^2 - l^2}}{3\,d^2 - 2\,l^2}.$$

671. $$B\,C = x = s\left(\frac{\sin\alpha}{f} - \cos\alpha\right).$$

[Die Gesamtarbeit muß Null sein.
Arbeit des Gewichtes: $G\,s\sin\alpha$.
Arbeit der Reibung: $-\,f\,(G\cos\alpha\,.\,s + G\,x)$.]

672. $f_1 = f_2\cos\alpha - \sin\alpha$.

[Das Prinzip der Bewegungsenergie liefert für den einen Teil G_1 des Körpers

$$-\frac{1}{2}\frac{G_1}{g}v^2 = -\,G_1\,f_1\,s_1,$$

worin v die Geschwindigkeit des Körpers in A ist; für den andern Teil G_2

$$-\frac{1}{2}\frac{G_2}{g}v^2 = G_2\,s_2\sin\alpha - G_2\,f_2\,s_2\cos\alpha.]$$

673. Es ist $A_r = \frac{1}{2}T\,\omega^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\omega}{2}\right)^2$, $\omega = \frac{n\,\pi}{30}$,

$$T = \frac{1}{2}\frac{G}{g}r^2,$$

woraus:

$$A_r = \frac{\pi^2}{4800\,g}G\,r^2\,n^2.$$

674. Bewegungsenergie der Welle zu Beginn:

$$\frac{1}{2}\,T\,\omega_0{}^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,r^2\right)\cdot\left(\frac{n\,\pi}{30}\right)^2.$$

Bewegungsenergie zu Ende: Null.
Arbeit der Reibung: $-\,f_1\,G\,.\,2\,r\,\pi\,.\,x,$

daraus: $$x = \frac{r\,n^2\,\pi}{7200\,g\,f_1} = 0{,}044.$$

675. $s = \dfrac{v^2}{4\,g\,f} = 10{,}098$ m.

676. $v^2 = 2\,g\,[r\,(1 - \cos\alpha) + f\,(l + r\sin\alpha)]$.
[Arbeit des Gewichtes: $-\,G\,r\,(1 - \cos\alpha)$,

Arbeit der Reibung: $-\,f\,G\,l - \int\limits_0^\alpha f\,.\,G\cos\varphi\,.\,r\,d\,\varphi,$

anfängliche Bewegungsenergie: $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{G}{g}\,v^2$.]

677. $x = 172{,}7$ m.

[Anfangsenergie: $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{G}{g}\,v^2,$

Arbeit des Gewichtes: $-\,G\,x\sin\alpha,$
Arbeit der Zapfenreibung und rollenden Reibung: $-\,\varkappa\,G\cos\alpha\,.\,x,$

worin $$\varkappa = \frac{0{,}06\,.\,4\text{ cm} + 0{,}05\text{ cm}}{40\text{ cm}} = 0{,}00725,$$

daraus: $$x = \frac{v^2}{2\,g\,(\sin\alpha + \varkappa)},\quad \cos\alpha \doteq 1.]$$

678. Die anfängliche Bewegungsenergie der Stange ist

$$L_1 = \frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,v^2,$$

jene der Kugel

$$L_2 = \frac{1}{2}\,T\,\omega^2,$$

wenn T ihr Trägheitsmoment für die in der horizontalen Ebene liegende Momentanachse und ω die Winkelgeschwindigkeit um diese bezeichnet; es ist

$$T = \frac{2}{5}\,\frac{G}{g}\,r^2 + \frac{G}{g}\,r^2,\quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Arbeit leisten die gleitende Reibung der Stange:

$$A_1 = -f\frac{G}{2}x$$

und die rollende Reibung der Kugel:

$$A_2 = -\frac{q}{r}\left(G + \frac{G}{2}\right)x,$$

wenn f und $\frac{q}{r}$ die Zahlen der gleitenden und der rollenden Reibung sind. Setzt man dann

$$-(L_1 + L_2) = A_1 + A_2,$$

so bleibt

$$x = \frac{12}{5}\frac{v^2}{\left(f + 3\frac{q}{r}\right)g}.$$

679. Die Bewegungsenergie des Gewichtes in der tiefsten Lage ist

$$G\,a\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2;$$

sie wird aufgewendet für die Reibungsarbeit $f\,G\,l$; daraus ist

$$f = \frac{a}{l}(1 - \cos\alpha).$$

680. Für die äußerste Gleichgewichtslage der Kette ist

$$x_1 = \frac{f\,l}{1 + f}.$$

Die Elementararbeit des Gewichtes ist $q\,x\,d\,x$, die der Reibung $-f\,q\,(l - x)\,d\,x$, somit die Bewegungsenergie am Ende

$$\frac{1}{2}\frac{q\,l}{g}v_1^2 = \int_{x_1}^{l} q\,x\,d\,x - \int_{x_1}^{l} f\,q\,(l - x)\,d\,x,$$

woraus:

$$v_1^2 = \frac{g\,l}{1 + f}.$$

681. Läßt man den Widerstand der rollenden Bewegung $\mathfrak{R} = \varphi\frac{G}{r}$ im Mittelpunkt der Kugel angreifen, so ist seine Arbeit $-\mathfrak{R}\,x$. Die anfängliche Bewegungsenergie der Kugel besteht aus der Schwerpunktsenergie $\frac{1}{2}\frac{G}{g}c^2$ und aus der Energie der Drehung um den Schwerpunkt

$$\frac{1}{2}T\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\frac{G}{g}r^2\cdot\left(\frac{c}{r}\right)^2.$$

Aus $L_0 = \mathfrak{R}\,x$ wird

$$x = \frac{7\,r\,c^2}{10\,g\,\varphi}.$$

682. Nennt man $p = \frac{G}{r^2\pi}$ den Druck auf die Flächeneinheit und nimmt man in der Entfernung ϱ von der Achse einen ringförmigen Flächenstreifen $2\varrho\pi\,.\,d\varrho$ an, so ist dessen Reibung

$$f\,p\,.\,2\varrho\pi\,.\,d\varrho$$

und die Arbeit der Reibung bis zur Ruhe

$$-(f\,p\,.\,2\varrho\pi\,.\,d\varrho)\,.\,2\varrho\pi\,.\,x.$$

Die Gesamtarbeit der Reibung aller Flächenstreifen bis zur Ruhe ist

$$A = -4\pi^2 f\,p\,x\int_0^r \varrho^2\,d\varrho = -\frac{4}{3}\pi^2 f\,p\,x\,r^3.$$

Die Anfangsenergie ist

$$L_0 = \frac{1}{4}\frac{G}{g}r^2\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2.$$

Aus $A = -L_0$ folgt:

$$x = \frac{r\,n^2\pi}{4800\,f\,g}.$$

683. Setze die Summe der Arbeiten gleich Null:

$$P\,s + P\,x - G\,x - \int_0^y F_1\,.\,d\,f_1 + 2\int_0^x F\,.\,d\,f = 0.$$

Hierin ist $P = \frac{\pi d^2}{4}p$ der Druck auf den Kolben (Arbeit $P\,s$) und der gleich große Druck auf den Deckel des Zylinders (Arbeit $P\,x$); ferner y die Zusammendrückung der Feder F_1 und zwar:

$$y = \frac{a(c+d)}{d(a+b)}(x+s) = m(x+s).$$

Man erhält:

$$(P - F_0\,m)(x+s) - \frac{1}{2}k\,m^2(x+s)^2 - k\,x^2 = 0,$$

woraus: $$x = 25 \text{ mm}.$$

684. Nach dem d'Alembertschen Prinzip halten die äußeren Kräfte (Gewicht und Druck) mit den Trägheitskräften Gleichgewicht; es ist also
$$D + M\gamma = G$$
oder
$$D = G\left(1 - \frac{\gamma}{g}\right) = 5{,}923 \text{ kg}.$$

685. Nennt man γ die Beschleunigung von G nach aufwärts, also auch jene von G_1 nach abwärts, R und R_1 die Reibungen, M und M_1 die Massen, so ist die Fadenspannung links
$$G \sin\alpha + R + M\gamma$$
und rechts
$$G_1 \sin\beta - R_1 - M_1\gamma.$$
Setzt man diese Spannungen gleich und überdies
$$R = f\,G\cos\alpha, \quad R_1 = f\,G_1\cos\beta.$$
so bleibt
$$\gamma = \frac{g}{G + G_1}\,[G_1(\sin\beta - f\cos\beta) - G(\sin\alpha + f\cos\alpha)].$$

686. Das d'Alembertsche Prinzip, für jeden der drei Körper angeschrieben, gibt die Gleichungen:
$$f\,G + \frac{G}{g}\gamma = S_1, \quad G = \frac{G}{g}\gamma + S_2,$$
und wenn λ die Winkelbeschleunigung des Zylinders ist:
$$\int_0^r \lambda\,\varrho^2\,dm + S_1 r = S_2 r.$$
Setzt man $\lambda = \frac{\gamma}{r}$, $\int_0^r \varrho^2\,dm = \frac{1}{2}\frac{G}{g}r^2$, so erhält man:
$$\gamma = \frac{2}{5}g(1 - f), \quad S_1 = \frac{G}{5}(2 + 3f), \quad S_2 = \frac{G}{5}(3 + 2f).$$

687. Ist γ die Beschleunigung von G, so ist $\frac{\gamma}{2}$ die Beschleunigung von G_1. Die Fadenspannung rechts von der festen Rolle ist
$$G - M\gamma,$$
die Fadenspannung links von der festen Rolle ist
$$\frac{1}{2}\left(G_1 + M_1\frac{\gamma}{2}\right),$$
wenn M und M_1 die Massen sind. Setzt man die Fadenspannungen gleich, so bleibt
$$\gamma = g\,\frac{G - \frac{1}{2}G_1}{G + \frac{1}{4}G_1}.$$

688. Die Seilspannung links von der obersten Rolle ist
$$G - M\gamma,$$
hingegen die Seilspannung rechts
$$\frac{1}{4}(G_1 + M_1\gamma_1).$$
Die Beschleunigung γ_1 von G_1 ist ein Viertel jener von G, also
$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{4}.$$
Setzt man die Seilspannungen gleich, so bleibt
$$\gamma = g\frac{G - \frac{1}{4}G_1}{G + \frac{1}{16}G_1}.$$

689. In der Richtung der Stange halten Gleichgewicht: die Spannung S, der Teil $G\cos\varphi$ des Gewichtes und die Trägheitskraft $\frac{G}{g}\cdot\frac{v^2}{l}$; hieraus ist $S = G\left(\cos\varphi + \frac{v^2}{l\,g}\right)$.

690. Die Bremsreibung ist $\mathfrak{R} = G(e^{f\pi} - 1)$, die Zapfenreibung $f_1 D = f_1(e^{f\pi} + 2)G$. Bilde die Momente der Kräfte und der Trägheitskraft $M\gamma$ um die Drehachse, und setze ihre Summe Null. Es wird $\gamma = g(1{,}23 - 0{,}26\,e^{f\pi})$.

691. Die Bewegung sei so weit vorgeschritten, daß A den Abstand x von C hat; dann sind die Spannungen in der Kette links und rechts von der kleinen Rolle
$$S = q\,x\sin\alpha + \frac{q\,x}{g}\gamma,$$
$$S_1 = q(l - x)\sin\alpha - \frac{q(l - x)}{g}\gamma.$$
Hierin bezeichnet q das Gewicht der Kette für die Längeneinheit, γ ihre Beschleunigung. Setzt man $S = S_1$, so folgt
$$\gamma = g\sin\alpha\frac{l - 2x}{l} = a - bx$$
und aus $v\,dv = \gamma(-dx)$:
$$v^2 = a(l - 2x) - b\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

und für $x = 0$ die verlangte Geschwindigkeit

$$v_1^2 = \frac{1}{2} g l \sin \alpha.$$

692. Bringe in G und G_1 außer den Gewichten die Trägheitskräfte $\frac{G}{g} \omega^2 l \sin \varphi$ und $\frac{G_1}{g} \omega^2 l_1 \cos \varphi$ an und setze die Momente um O gleich Null. Es wird

$$\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\omega^2}{g} l.$$

Das Biegungsmoment um O wird

$$\mathbf{M} = G l (2 \sin \varphi - \cos \varphi).$$

693. Ist $\mu\, d x$ ein Massenelement der Stange a, x sein Abstand von O, so ist $\mu\, d x \,.\, x \sin \varphi\, \omega^2$ seine Trägheitskraft, $\mu\, d x \,.\, x^2 \sin \varphi \cos \varphi\, \omega^2$ ihr Moment um O, $\mu\, \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \int\limits_0^a x^2\, d x$ $= \frac{1}{3} \frac{G}{g} \omega^2 a^2 \sin \varphi \cos \varphi$ das Moment der Trägheitskräfte der Stange a um O. Setzt man die Summe der Momente der Gewichte und der Trägheitskräfte um O gleich Null, so wird

$$\omega^2 = \frac{3}{2} g \frac{G a \sin \varphi - G_1 b \cos \varphi}{\cos \varphi \sin \varphi (G a^2 - G_1 b^2)}.$$

694. Setzt man $O A = a$ und $O B = b$, und nimmt auf O A ein kleines Stück $d x$ des Stabes in der Entfernung x von O an, so ist $\mu\, d x$ dessen Masse, $\mu\, d x \,.\, x \sin \varphi \,.\, \omega^2$ dessen Trägheitskraft und $\mu\, d x \,.\, x^2 \sin \varphi \cos \varphi\, \omega^2$ deren Moment um O. Die Trägheitskräfte des Stabes O A haben um O das Moment

$$\mathbf{M}_1 = \mu\, \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \int\limits_0^a x^2\, d x.$$

Bildet man ebenso $\mathbf{M}_2$ für den Stab O B und nimmt die Momente der Gewichte hinzu, so ist

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 - \mu\, g \sin \varphi \,.\, \frac{a^2 - b^2}{2} = 0,$$

woraus

$$\cos \varphi = \frac{3 g}{2 \omega^2} \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3}.$$

695. Da der Gelenkdruck D mit dem Gewichte des Stabes und dessen Trägheitskräften im Gleichgewicht sein muß, so bestehen die Gleichungen:

$$D \sin \psi + \int_0^b \mu \, d x \, . \, x \sin \varphi \, . \, \omega^2 = \int_0^a \mu \, d x \, . \, x \sin \varphi \, . \, \omega^2,$$

$$D \cos \psi = \mu \, g \, (a + b),$$

woraus in Verbindung mit dem Werte von $\cos \varphi$ in der vorigen Aufgabe folgt:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{3}{4} \operatorname{tg} \varphi \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{a^3 + b^3}.$$

696. In G_1 wirken: Gewicht, Trägheitskraft

$$\frac{G_1}{g} (b \sin \psi + a \sin \varphi) \, \omega^2$$

und Fadenspannung S_b. In G wirken: Gewicht, Trägheitskraft $\frac{G}{g} a \sin \varphi \, . \, \omega^2$, sowie die Fadenspannungen S_a und S_b. Stelle für jeden der beiden Punkte G und G_1 zwei Gleichgewichtsbedingungen auf. Es ergeben sich für die Winkel φ und ψ die Gleichungen:

$$\frac{\omega^2}{g} (a \sin \varphi + b \sin \psi) = \operatorname{tg} \psi,$$

$$\frac{\omega^2}{g} b \sin \psi = \frac{G + G_1}{G} (\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi)$$

und für die Fadenspannungen:

$$S_a = \frac{G + G_1}{\cos \varphi}, \quad S_b = \frac{G_1}{\cos \psi}.$$

697. Die Spannung im Faden ist $S = \frac{G_1}{2 \cos \varphi}$. Nimmt man in der Entfernung x von O ein Massenelement $\mu \, d x$ der Stange O A an, so ist dessen Trägheitskraft

$$\mu \, d x \, . \, x \sin \varphi \, . \, \omega^2.$$

Bildet man die Summe der Momente der äußeren Kräfte und der Trägheitskräfte für O A um O, so wird

$$- G a \sin \varphi - S \, . \, 4 a \cos \varphi \sin \varphi + \int_0^{2a} \mu \, d x \, . \, x \sin \varphi \, \omega^2 \, . \, x \cos \varphi = 0.$$

Setzt man überdies die Masse der Stange O A:

$$\mu \, . \, 2 a = \frac{G}{g},$$

so wird

$$\omega^2 \cos \varphi = \frac{3 g}{4 a} \left(1 + 2 \frac{G_1}{G}\right).$$

698. Ist q ds das Gewicht eines Stückes ds der Kette mit den Koordinaten x und y, so ist $\frac{q\,ds}{g}\,y\,\omega^2$ dessen Trägheitskraft; projiziert man beide Kräfte auf die Normale der Kurve, so wird

$$q\,ds\,.\,\sin\varphi = \frac{q\,ds}{g}\,y\,\omega^2\cos\varphi,$$

wenn φ der Winkel der Tangente gegen die X ist. Es wird also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = y\frac{\omega^2}{g}$$

oder

$$\frac{dy}{y} = \frac{\omega^2}{g}\,.\,dx$$

und da für $x = 0$, $y = a$ ist:

$$y = a\,e^{\frac{\omega^2}{g}x}$$

die Gleichung der Kurve.

699. Nennt man γ und γ_1 die Beschleunigungen von G und G_1, M und M_1 ihre Massen, so ist

$$S = G + M\gamma, \qquad S_1 = G_1 - M_1\gamma_1,$$
$$\gamma = r\lambda, \qquad \gamma_1 = r_1\lambda,$$

endlich wegen Gleichgewicht $S\,r = S_1\,r_1$; hieraus folgt:

$$\lambda = g\,\frac{G_1 r_1 - G r}{G r^2 + G_1 r_1^2};$$

ferner aus $h = \frac{1}{2}\gamma_1 t^2$:

$$t^2 = \frac{2h}{g r_1}\,\frac{G r^2 + G_1 r_1^2}{G_1 r_1 - G r},$$

endlich die Spannungen

$$S = \frac{G G_1 r_1 (r + r_1)}{G r^2 + G_1 r_1^2}, \quad S_1 = \frac{G G_1 r (r + r_1)}{G r^2 + G_1 r_1^2}.$$

700. Bringt man in jedem Massenteilchen dm des Wellrades die Trägheitskraft $\varrho\,\lambda\,.\,dm$ an und bildet das Moment um die Achse des Wellrades

$$\mathbf{M} = \int \varrho\,\lambda\,dm\,.\,\varrho = \lambda\int dm\,.\,\varrho^2 = \lambda\,T,$$

worin T das Trägheitsmoment des Wellrades um seine Achse ist, so wird für Gleichgewicht

$$S\,r + \lambda\,T = S_1\,r_1,$$

woraus:
$$\lambda = g \frac{G_1 r_1 - G r}{G r^2 + G_1 r_1^2 + g T},$$
$$t^2 = \frac{2h}{g r_1} \cdot \frac{G r^2 + G_1 r_1^2 + g T}{G_1 r_1 - G r},$$
$$S = G \frac{G_1 r_1 (r + r_1) + g T}{G r^2 + G_1 r_1^2 + g T},$$
$$S_1 = G_1 \frac{G r (r + r_1) + g T}{G r^2 + G_1 r_1^2 + g T}.$$

701. Für das linke Gewicht gilt die Gleichgewichtsbedingung
$$S = G + q(l - x) + \frac{G + q(l - x)}{g} \gamma,$$
für das rechte
$$S_1 + \frac{G_1 + q x}{g} \gamma = G_1 + q x.$$
Überdies sind die Spannungen im Faden S und S_1 bei A und B gleich. Hieraus folgt
$$\gamma = g \frac{G_1 - G + q(2x - l)}{G + G_1 + q l} = a + b x.$$
Aus $v\,d\,v = \gamma\,d\,x$ folgt ferner
$$v^2 = 2 a x + b x^2$$
und die Geschwindigkeit v_1 für $x = l$:
$$v_1^2 = \frac{2 g l (G_1 - G)}{G + G_1 + q l}.$$
Endlich wird
$$S = S_1 = \frac{2 (G_1 + q x) [G + q (l - x)]}{G + G_1 + q l}.$$

702. Ist das Gewicht um x gesunken, so drehen im Sinne der Uhr die Gewichte $G + q x$, entgegen die Trägheitskräfte. Ihr Moment ist
$$\frac{G + q x}{g} \gamma r + \lambda [T_1 + T_2 + T_3].$$
Hierin ist

γ die Beschleunigung des Gewichtes G,

$\lambda = \frac{\gamma}{r}$ die Winkelbeschleunigung der Welle,

$T_1 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} r^2$ das Trägheitsmoment der Welle,

$$T_2 = \frac{1}{2}\,\frac{G_2}{g}\,R^2$$ das Trägheitsmoment des Rades,

$$T_3 = \frac{(l - x)\,q}{g}\,r^2$$ das Trägheitsmoment des aufgewickelten Seiles.

Setzt man die Summe der Momente Null, so bleibt

$$\gamma = \frac{2\,g\,r^2\,(G + q\,x)}{2\,G\,r^2 + G_2\,R^2 + G_1\,r^2 + 2\,l\,q\,r^2}$$

und aus $v\,d\,v = \gamma\,d\,x$ durch Integration die Endgeschwindigkeit ($x = l$):

$$v_1{}^2 = \frac{2\,g\,l\left(G + \frac{q\,l}{2}\right)}{G + q\,l + \frac{1}{2}\left(G_1 + G_2\,\frac{R^2}{r^2}\right)},$$

$$v_1 = 1{,}8\ \mathrm{m/s}.$$

703. Anfangs ist für Gleichgewicht

$$2\,F_1 = 2\,k\,(l_0 - l_1) = G + G_1.$$

Während der Bewegung des Kolbens ist nach dem d'Alembertschen Prinzip $2\,F - G - G_1 - M\,\gamma + M_1\,\gamma_1 = 0$,

worin $$2\,F = 2\,k\,(l_0 - x)$$

die veränderliche Kraft der Federn, γ die aufwärts gerichtete Beschleunigung des Zylinders ist. Man erhält

$$\gamma = \frac{d^2\,x}{d\,t^2} = \frac{1}{M}\left[2\,k\,(l_0 - x) - G - G_1\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)\right]$$

und aus $v\,d\,v = \gamma\,d\,x$ die Geschwindigkeit des Zylinders

$$v^2 = \frac{2}{M}\,(x - l_1)\left[2\,k\,l_0 - G - G_1\left(1 - \frac{\gamma_1}{g}\right) - k\,(x + l_1)\right].$$

Der Zylinder kommt wieder in Ruhe, wenn

$$x - l_1 = 2\,(l_0 - l_1) - \frac{G + G_1\left(1 - \frac{\gamma_1}{g}\right)}{k}$$

wird; um diese Größe hebt sich der Zylinder, um sodann um die Gleichgewichtslage $x_1 - l_1 = \frac{G_1}{2\,k}\cdot\frac{\gamma_1}{g}$ zu schwingen. Sobald der Kolben den Boden erreicht hat, kehrt der Zylinder wieder dauernd in seine Anfangslage zurück.

704. Nennt man M und M_1 die Massen von P und Q, S und S_1 die Seilspannungen, v und v_1 die Geschwindigkeiten, γ und

γ_1 die Beschleunigungen der beiden Gewichte, so ist nach dem d'Alembertschen Prinzip

$$S = P + M\gamma,$$
$$S_1 \cos\varphi + M_1\gamma_1 = Q$$

und weil $S = S_1$:

$$(P + M\gamma)\cos\varphi = Q - M_1\gamma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

Gleitet Q um dx nach abwärts und hebt sich P um ds in die Höhe, so ist $ds = dx\cos\varphi$,

also $$v = v_1\cos\varphi = v_1\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

und durch Differentiation

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \gamma_1\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + v_1{}^2\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$$

Obige Gleichung a) geht nach Einsetzen über in

$$\gamma_1\left[M_1 + \frac{Mx^2}{a^2+x^2}\right] + v_1{}^2\frac{Ma^2x}{(a^2+x^2)^2} = Q - P\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

oder $$d\left\{v_1{}^2\left[M_1 + \frac{Mx^2}{a^2+x^2}\right]\right\} = 2\left(Q - P\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)dx$$

und $$v_1{}^2\left[M_1 + \frac{Mx^2}{a^2+x^2}\right] = 2Qx - 2P\sqrt{a^2+x^2} + C,$$

also die gesuchte Geschwindigkeit des fallenden Gewichtes Q, da für $x = 0$, $v_1 = 0$, $C = 2Pa$ wird:

$$v_1{}^2 = 2g\frac{Qx - P\left(\sqrt{a^2+x^2} - a\right)}{Q + P\frac{x^2}{a^2+x^2}}.$$

705. Da der gemeinsame Schwerpunkt in Ruhe bleibt, ist $G_1 s_1 - G s = 0$, also $s_1 = s\frac{G}{G_1}$.

706. Es ist $x = 0$.

707. Der Rücklauf der Kanone beträgt

$$\left(\frac{Gv}{G+G_1}\right)^2\frac{1}{2fg},$$

wenn G das Gewicht des Geschosses, G_1 das Gewicht der Kanone bedeutet.

708. Wenn G_1 um x nach links gerückt ist, hat G den horizontalen Weg $b_1 - b - x$ zurückgelegt, falls das kleine Prisma bis zur Unterlage herabgeglitten ist. Es wird, da auf den gemeinsamen Schwerpunkt beider Prismen nur vertikale Kräfte wirken,

$$G_1 x - G (b_1 - b - x) = 0$$

sein, also

$$x = \frac{G (b_1 - b)}{G + G_1}.$$

709. Nennt man x und x_1 die Abstände der beiden Punkte nach beliebiger Zeit von der Anfangslage von G, z_s den Abstand ihres gemeinsamen Schwerpunktes, so ist

$$z_s = \frac{G x + G_1 x_1}{G + G_1}$$

und

$$\frac{d z_s}{d t} = \frac{1}{G + G_1} \left[G \frac{d x}{d t} + G_1 \frac{d x_1}{d t} \right].$$

Für den Anfang ist $\frac{d x}{d t} = 0$, also

$$\frac{d z_s}{d t} = v_0 = \frac{G_1}{G + G_1} c.$$

Setzt man in der Gleichung für z_s

$$z_s = h, \ x = \frac{1}{2} g t^2, \ x_1 = h - c t + \frac{1}{2} g t^2,$$

so wird die gefragte Zeit

$$t = \frac{1}{g (G + G_1)} [G_1 c + \sqrt{2 g h G (G + G_1) + G_1{}^2 c^2}].$$

710. Im Augenblick der Trennung von G und G_1 ist

$$(G + G_1) v_s = G v + G_1 (v_s - c_1),$$

wenn $v_s = c \cos \alpha$ die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes ist. Daraus wird

$$v = c \cos \alpha + \frac{G_1}{G} c_1.$$

Nennt man W die halbe Sprungweite des Turners (während des Aufsteigens), W_1 die halbe Sprungweite, nachdem er sich vom Gewicht trennte (also während des Abfalles), h die Sprunghöhe, so ist

$$h = \frac{c^2}{2 g} \sin^2 \alpha,$$

$$W^2 = \frac{2 v_s{}^2 h}{g}, \ W_1{}^2 = \frac{2 v^2 h}{g}$$

und

$$x = W_1 - W = \frac{G_1}{G} \cdot \frac{c c_1 \sin \alpha}{g}.$$

711. Nach dem Schwerpunktsprinzip ist die Anfangsgeschwindigkeit des Kahnes
$$v_0 = \frac{G}{G_1} c.$$
Seine Beschleunigung ist $-\frac{a g}{G_1} v^2$; aus der Gleichung
$$\frac{d v}{d t} = -\frac{a g}{G_1} v^2, \quad \frac{a g}{G_1} d t = -\frac{d v}{v^2}$$
findet man
$$v = \frac{G G_1 c}{G_1^2 + G g a c t}.$$

712. Da keine Reibung auftritt, dreht sich die kleine Scheibe nicht, sondern besitzt nur Translation. Der Punkt A beschreibt einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt B, wobei $B A O_2 O_1$ ein Parallelogramm ist.

713. Sie ist eine horizontale Gerade, senkrecht zur Bildfläche, in der Entfernung $r\left(1 - \frac{3}{8}\cos\varphi\right)$ vertikal über N. [Da keine Reibung auftritt, muß der Schwerpunkt vertikal sinken; der Punkt N bewegt sich horizontal; aus diesen beiden Bewegungsrichtungen kann man durch Ziehen der Normalen die Lage der Momentanachse konstruieren.]

714. Der Schwerpunkt (Mittelpunkt) der Stange fällt in einer Vertikale, da nur Vertikalkräfte vorhanden sind. Nennt man φ den Neigungswinkel der Stange während der Bewegung, x und y die Koordinaten von A, so ist
$$x = l\cos\alpha + l\cos\varphi,$$
$$y = 2\,l\sin\varphi,$$
woraus sich der Ort von A ergibt:
$$(x - l\cos\alpha)^2 + \frac{y^2}{4} = l^2 \quad \text{(Ellipse)}.$$
Führt man durch den Mittelpunkt der Stange eine Horizontale, so ist ihr Schnitt O mit BY das Momentanzentrum (Drehpol) der Stange und OA die Normale der Bahn von A.

715. Ist T das Trägheitsmoment beider Scheiben um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, so tritt die Winkelbeschleunigung
$$\lambda = \frac{2 P R}{T}$$ um jenen Punkt auf, da er in Ruhe bleibt.

Es ist $$T = \frac{93}{160} \frac{G R^2}{g},$$

somit $$\lambda = \frac{320}{93} \frac{P g}{G R}.$$

716. Ziehe durch den Schwerpunkt der Platte eine Horizontale und bringe sie zum Schnitt mit AB; dann ist der Schnittpunkt der Drehpol.

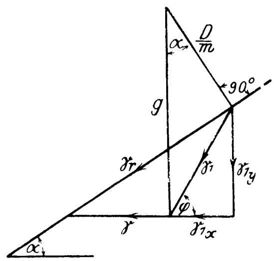
717. Auf den Gesamtschwerpunkt S von M und m wirken nur vertikale Kräfte, er kann also nur vertikal fallen. Nennt man ξ und x die horizontalen Entfernungen der Schwerpunkte von M und m von der Vertikalen durch S, so muß also sein:

$$M \xi = m x$$

und nach zweimaliger Differentiation

$$M \frac{d^2 \xi}{d t^2} = m \frac{d^2 x}{d t^2}$$

oder $$M \gamma = m \gamma_{1x}.$$



Die relative Beschleunigung γ_r von m hat die Richtung der Keilfläche BA; es ist nach den Gesetzen der relativen Bewegung

γ_r = absolute Punktbeschleunigung — Beschleunigung des Keils

oder $$\gamma_r = \gamma_1 + \bar{\gamma} \text{ (siehe Abbildung)},$$

wobei die Beschleunigung des Keils nach rechts gerichtet ist.

Die absolute Punktbeschleunigung γ_1 besteht aus der Beschleunigung g der Schwere und der Beschleunigung des Druckes D; ihre Teile sind:

$$\gamma_{1y} = g - \frac{D}{m} \cos \alpha,$$

$$\gamma_{1x} = \frac{D}{m} \sin \alpha = \frac{M}{m} \gamma, \text{ also } D = \frac{M \gamma}{\sin \alpha}.$$

Nach der Zeichnung ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma_{1y}}{\gamma + \gamma_{1x}},$$

woraus nach Einsetzung der Werte

$$\gamma = g \frac{m \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Sodann ist
$$\gamma_{1x} = \frac{M}{m}\gamma = g\frac{M\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha},$$
$$D = \frac{M\gamma}{\sin\alpha} = \frac{M\,m\,g\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha},$$
$$y_{1y} = g\frac{(M+m)\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

Die absolute Beschleunigung γ_1 der Punktmasse m ist
$$\gamma_1 = \sqrt{\gamma_{1x}^2 + \gamma_{1y}^2} = \frac{g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\sqrt{M^2 + (2M+m)\,m\sin^2\alpha}$$
und ihre Neigung gegen die Horizontale
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma_{1y}}{\gamma_{\cdot x}} = \frac{M+m}{M}\operatorname{tg}\alpha.$$

Da φ konstant ist, ist die absolute Bahn des Punktes m eine Gerade, φ ihre Neigung gegen die Horizontale. Die relative Beschleunigung wird
$$\gamma_r = \frac{\gamma_{1y}}{\sin\alpha} = g\frac{(M+m)\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha},$$
der Druck zwischen Keil und horizontaler Ebene:
$$D_1 = Mg + D\cos\alpha = \frac{M(M+m)g}{M + m\sin^2\alpha}.$$

718. Die Schwingungsdauer des Kugelpendels ist bei kleiner Schwingung
$$T = \pi\sqrt{\frac{T_0}{G\,a}}.$$
Darin ist das Trägheitsmoment um O
$$T_0 = M\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right).$$
Setzt man ebenso
$$T_1 = 2\,T = \pi\sqrt{\frac{T_{01}}{G\,x}},$$
$$T_{01} = M\left(\frac{2}{5}r^2 + x^2\right),$$
so wird
$$x^2 - 4\,x\left(\frac{2}{5}\frac{r^2}{a} + a\right) = -\frac{2}{5}r^2$$
und
$$x_1 = 160{,}938\text{ cm},\quad x_2 = 0{,}062\text{ cm}.$$

719. Da die Schwingungsdauer $T = \pi\sqrt{\frac{T_0}{G\,r_0}}$ ist, muß $\frac{T_0}{r_0}$ ein Minimum werden. Darin ist $T_0 = \frac{1}{12}M\,l^2 + M\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$ das

Trägheitsmoment der Stange um O; $r_0 = x - \frac{l}{2}$ der Abstand des Schwerpunktes von O. Aus

$$\frac{l^2}{6(2x - l)} + x - \frac{l}{2} = \text{Minimum}$$

folgt
$$x = \frac{l}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

720. $\lambda = g \sin \varphi \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}$,

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}.$$

721. Setze die Schwingungsdauern der beiden Ringe um O gleich. Es folgt
$$\frac{T_0}{M r_0} = \frac{T_{01}}{M_1 r_{01}},$$
worin
$$T_0 = M R^2 + M (R - r)^2$$
das Trägheitsmoment des Ringes R für O,
$$r_0 = R - r$$
der Abstand des Ringmittelpunktes von O ist; ebenso T_{01} und r_{01} für den Ring R_1. Es bleibt
$$R = R_1$$
und
$$2 R R_1 - 2 r (R + R_1) + r^2 = 0.$$

722. Die Winkelbeschleunigung des Kegels ist

$\lambda = -\frac{P r}{T}$, $T = \frac{3}{10} M R^2$ Trägheitsmoment des Kegels,

$$M = \frac{\gamma}{3 g} R^2 \pi h \quad \text{Masse des Kegels.}$$

Da λ konstant ist, wird die Winkelgeschwindigkeit des Kegels
$$\omega = \omega_0 + \lambda t$$
und für $\omega = 0$:
$$t = \frac{\pi \gamma}{10 g} \frac{R^4 h \omega_0}{P r}.$$

723. Die Momentanachse ist die Berührungserzeugende O. Das Moment des Eigengewichtes für diese Achse ist

$\mathbf{M} = \frac{2}{3} \gamma l (R^3 - r^3)$, das Trägheitsmoment für die gleiche Achse $T = \frac{3}{4} \pi \frac{\gamma}{g} l (R^4 + r^4)$. Man erhält $\lambda = \frac{\mathbf{M}}{T} = \frac{8 g}{9 \pi} \frac{R^3 - r^3}{R^4 + r^4}$.

724. Ist d M die Masse eines kleinen Stückes d x der Stange, so ist

$$d\,M = \frac{G}{g\,l}\,d\,x,$$

wenn l die Länge der Stange bezeichnet. Die Trägheitskraft von d M ist

$$d\,T = x \sin\alpha\,\omega^2 \,.\, d\,M,$$

senkrecht zur Spindel; hierin ist x die Entfernung des Massenelementes von A. Zerlegt man D in einen vertikal nach aufwärts gerichteten Teil V und einen horizontalen, nach links gerichteten Teil H, so ist nach dem d'Alembertschen Prinzip:

$$V = G, \quad H = \int_0^l d\,T$$

und für die Momente um A:

$$G\,\frac{l}{2} \sin\alpha - \int_0^l d\,T \,.\, x \cos\alpha = 0.$$

Daraus erhält man:

$$\omega^2 = \frac{3\,g}{2\,a}, \quad H = \frac{3}{4}\,G \operatorname{tg}\alpha$$

und

$$D = G\sqrt{1 + \frac{9}{16}\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{H}{V} = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

725. Schneidet man die Platte in dünne Streifen parallel zu h, ist d ϱ die Breite eines Streifens und ϱ seine Entfernung von der Spindel, so ist die Trägheitskraft eines Streifens

$$d\,T = d\,M \,.\, \varrho\,\omega^2$$

und sein Massenelement

$$d\,M = \frac{G}{g} \,.\, \frac{d\,\varrho}{b}.$$

Nach dem d'Alembertschen Prinzip sind dann die Momente um A:

$$G\,\frac{b}{2} - B\,h - \int_0^b d\,T\,\frac{h}{2} = 0,$$

woraus der Druck in B:

$$B = G\,b\left(\frac{1}{2\,h} - \frac{\omega^2}{4\,g}\right).$$

726. Nimm in der Entfernung x von O ein kleines Stück d x des Stabes an; seine Widerstandsfläche ist b d x, das Moment des Widerstandes um O ist $k \,.\, b\,d\,x \,.\, (x\,\omega)^2 \,.\, x$ und das Moment sämtlicher Widerstände

$$\mathbf{M} = k\, b\, \omega^2 \int_0^l x^3\, d\, x = \frac{1}{4}\, k\, \omega^2\, b\, l^4.$$

Das Trägheitsmoment des Stabes für O ist

$$T = \frac{1}{3}\, \frac{\gamma}{g}\, b^2\, l^3$$

und die Winkelbeschleunigung des Stabes

$$\lambda = -\frac{\mathbf{M}}{T} = -a\, \omega^2,$$

worin

$$a = \frac{3\, k\, g}{4\, \gamma}\, \frac{l}{b}.$$

Aus $\omega\, d\, \omega = \lambda\, .\, d\, \varphi$ wird $\frac{d\, \omega}{\omega} = -a\, d\, \varphi$

und nach Integration $\omega = \omega_0\, e^{-a\varphi}$.

Setzt man $\omega = \frac{d\, \varphi}{d\, t}$, so wird $\omega_0\, .\, d\, t = e^{a\varphi}\, d\, \varphi$,

durch Integration $a\, \omega_0\, t = e^{a\varphi} - 1$

und endlich $\varphi = \frac{1}{a} \ln\, (1 + a\, \omega_0\, t)$.

727. Das Moment des Luftdruckes um die Achse des Türflügels ist

$$\mathbf{M} = h\, b \cos \varphi\, .\, q\, \frac{b}{2} \cos \varphi,$$

das Trägheitsmoment der Türe

$$T = \frac{1}{3}\, \frac{\gamma}{g}\, b^3\, h\, d.$$

Die Winkelbeschleunigung der Türe ist

$$\lambda = \frac{\mathbf{M}}{T} = \frac{3\, q\, g}{2\, \gamma\, b\, d} \cos^2 \varphi.$$

Aus $\omega\, d\, \omega = \lambda\, (-\, d\, \varphi)$ folgt nach Integration

$$\omega^2 = \frac{3\, q\, g}{4\, \gamma\, b\, d}\, (\pi - 2\, \varphi - \sin 2\, \varphi)$$

und die gefragte Geschwindigkeit:

$$v_1^{\,2} = \frac{3\, \pi\, q\, g\, b}{4\, \gamma\, d}.$$

728. Teilt man die Platte in dünne Streifen parallel zu h von der Breite d x und der Entfernung x von der Achse, so ist der Luftwiderstand eines solchen Streifens

$$k \,.\, h\,d\,x \,.\, (x\,\omega)^2,$$

wenn k die Proportionalitätskonstante und ω die veränderliche Winkelgeschwindigkeit ist. Die Summe der Momente aller Luftwiderstände

$$\mathbf{M} = 2\int_0^{b/2} k \,.\, h\,d\,x \,.\, (x\,\omega)^2 \,.\, x = \frac{1}{32}\,k\,\omega^2\,h\,b^4.$$

Das Trägheitsmoment des Flügels um die Achse ist

$$T_0 = \frac{1}{12}\,\frac{\gamma}{g}\,b^3\,h\,d,$$

wenn die Dicke d sehr klein ist. Die Winkelbeschleunigung des Flügels wird

$$\lambda = -\frac{\mathbf{M}}{T_0} = -\,a\,\omega^2,$$

worin

$$a = \frac{3}{8}\,\frac{g}{\gamma}\,\frac{k\,b}{d}$$

und wegen $\lambda = \frac{d\,\omega}{d\,t}$:

$$a\,t = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}.$$

Soll $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ werden, so ist für die Zeit

$$T = \frac{1}{a\,\omega_0} = \frac{8}{3}\,\frac{\gamma}{g}\,\frac{d}{k\,b\,\omega_0}.$$

729. Die Winkelbeschleunigung des Flügels ist

$$\lambda = \frac{G\,r - \mathbf{M}}{T_0}.$$

Hierin ist $\mathbf{M}$ das Moment des Luftwiderstandes, T_0 das Trägheitsmoment des Flügels um die Spindel.

Teilt man die Fläche des Flügels ähnlich wie in voriger Aufgabe in Streifen parallel zu h von der Breite d x, so ist

$$\mathbf{M} = 2\,k\,h\,\omega^2\int_{b_1}^{b_2} x^3\,d\,x = \frac{1}{2}\,k\,h\,\omega^2\,(b_2{}^4 - b_1{}^4).$$

Ferner ist

$$T_0 = \frac{2}{3}\,h\,d\,\mu\,(b_2{}^3 - b_1{}^3).$$

Es wird
$$\lambda = A - B\,\omega^2 = \frac{d\,\omega}{d\,t},$$
worin
$$A = \frac{G\,r}{T_0}, \quad B = \frac{k\,h\,(b_2{}^4 - b_1{}^4)}{2\,T_0}.$$
Die Differentialgleichung $d\,t = \frac{d\,\omega}{A - B\,\omega^2}$

liefert
$$t = \frac{1}{2\sqrt{A\,B}} \ln \frac{\sqrt{A} + \omega\sqrt{B}}{\sqrt{A} - \omega\sqrt{B}},$$
woraus
$$\omega = \sqrt{\frac{2\,G\,r}{k\,h\,(b_2{}^4 - b_1{}^4)}\,\frac{e^{q\,t} - 1}{e^{q\,t} + 1}},$$
mit
$$q = \frac{3\sqrt{G\,r\,k\,(b_2{}^4 - b_1{}^4)}}{\mu\,d\sqrt{2\,h}\,(b_2{}^3 - b_1{}^3)}.$$

730. $\lambda = \frac{G}{T_0}\left(a \sin\varphi - f\,r\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right) =$ Winkelbeschleunigung. Setzt man
$$\frac{G\,a}{T_0} = A, \quad \frac{G\,f\,r}{T_0} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = B,$$
so wird
$$\omega\,d\,\omega = \lambda\,.\,d\,\varphi = (A \sin\varphi - B)\,d\,\varphi,$$
woraus
$$\frac{\omega^2}{2} = A\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) + B\,(\varphi_0 - \varphi)$$
und für $\varphi = \pi$ wird die Geschwindigkeit des Schwerpunkts
$$v_s{}^2 = 2\,A\,a^2\,(1 + \cos\varphi_0) - 2\,B\,a^2\,(\pi - \varphi_0).$$

731. Für die Winkelbeschleunigung ergibt sich
$$\lambda = \frac{3\,g}{2\,l}\cos\varphi$$
und aus $\omega\,d\,\omega = \lambda\,.\,d\,\varphi$ durch Integration
$$\omega^2 = \frac{3\,g}{l}\sin\varphi.$$
Nimmt man ein Stück $d\,M$ des Stabes in der Entfernung x von O an, so besitzt es die Trägheitskräfte $d\,M\,.\,x\,\omega^2$ in der Richtung O A und $d\,M\,.\,x\,\lambda$ senkrecht zu O A, um O gegen den Uhrzeiger drehend. Bildet man die Projektionen der äußeren und Trägheitskräfte, so wird
$$X = (\lambda \sin\varphi + \omega^2 \cos\varphi) \int x\,d\,M,$$
$$Y = G + (\omega^2 \sin\varphi - \lambda\cos\varphi) \int x\,d\,M$$

und mit $$\int x \, d\,M = \frac{G\,l}{2\,g}:$$

$$X = \frac{9}{4} G \sin\varphi \cos\varphi, \quad Y = \frac{1}{4} G\,[10 - 9\cos^2\varphi].$$

Setzt man $\psi = 90 + \varphi + \alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{10 - 9\cos^2\varphi}{9\sin\varphi\cos\varphi}$,

so wird schließlich $\quad \operatorname{tg}\psi = -\frac{1}{10}\operatorname{cotg}\varphi.$

732. Die Winkelbeschleunigung des Körpers ist

$$\lambda = \frac{G\,a\sin\alpha}{T_0} = A\sin\alpha,$$

worin T_0 das Trägheitsmoment des Körpers um die Achse O ist. Aus $\omega\, d\,\omega = \lambda\,(-\,d\,\alpha)$ wird

$$\omega^2 = 2\,A\cos\alpha.$$

Nimmt man irgend einen Punkt P des Körpers mit der Masse d M an, setzt

$$O\,P = r, \quad \sphericalangle\, S\,O\,P = \psi, \quad r\cos\psi = x, \quad r\sin\psi = y,$$

so haben die Trägheitskräfte des Körpers in Richtung O S und senkrecht dazu die Teile

$$X = \omega^2\int x\,d\,M + \lambda\int y\,d\,M,$$
$$Y = \lambda\int x\,d\,M - \omega^2\int y\,d\,M$$

und weil $$\int x\,d\,M = M\,a, \quad \int y\,d\,M = 0$$

$$X = \omega^2\,M\,a, \quad Y = \lambda\,M\,a:$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\lambda}{\omega^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

733. Nennt man T das Trägheitsmoment der Spindel samt Arm, so ist $\quad T + m\,x^2$

das Trägheitsmoment des sich drehenden Körpers. Es ist veränderlich; die Gleichung

$$\text{Winkelbeschleunigung} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}}$$

darf deshalb nicht angewendet werden.

Das Prinzip der Bewegungsenergie $L - L_0 = A$ liefert, da die Arbeit A Null ist

$$L = L_0$$

oder: $$\frac{1}{2}(T + m\,x^2)\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}(T + m\,a^2)\,\omega_0^2,$$

worin v die Geschwindigkeit der Masse m längs des Armes ist. Differenziert man diese Gleichung, so wird

$$m\,\omega^2\,x\,d\,x + (T + m\,x^2)\,\omega\,d\,\omega + m\,v\,d\,v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

Nun ist aber für die Bewegung von m auf dem Arm: $v\,d\,v = \gamma\,d\,x$, worin die Beschleunigung $\gamma = x\,\omega^2$ ist. Damit wird Gleichung a):

$$2\,m\,\omega\,x\,d\,x + (T + m\,x^2)\,d\,\omega = 0,$$

deren Integration die Winkelgeschwindigkeit liefert:

$$\omega = \omega_0\,\frac{T + m\,a^2}{T + m\,x^2}.$$

734. Nimmt man an, die Trommel habe sich bereits um den Winkel φ gedreht, so ist

$$d\,y = x\,.\,d\,\varphi.$$

Nach einer Umdrehung der Trommel hat sich ihr Halbmesser x um

$$\frac{(R - r)\,d}{h}$$

vermindert, also bei einer Drehung $d\,\varphi$ um

$$d\,x = -\frac{(R - r)\,d}{2\,\pi\,h}\,.\,d\,\varphi = -a\,.\,d\,\varphi.$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt

$$x = R - a\,\varphi$$

und
$$y = \int_0^{\varphi}(R - a\,\varphi)\,.\,d\,\varphi = R\,\varphi - \frac{1}{2}\,a\,\varphi^2.$$

Ein Teil des Seiles ist auf der Trommel aufgewickelt und macht deren Drehung mit; das Trägheitsmoment dieses Seilstückes ist

$$\int_x^r x^2\,.\,d\,M = \frac{q}{g}\int_x^r x^3\,.\,d\,\varphi = \frac{q}{a\,g}\int_r^x x^3\,.\,d\,x = \frac{q}{4\,a\,g}\,(x^4 - r^4),$$

wenn q das Gewicht des Seiles für die Längeneinheit ist.

Nennt man T das konstante Trägheitsmoment der Trommel, so ist

$$T + \frac{q}{4\,a\,g}\,(x^4 - r^4)$$

das Trägheitsmoment des sich drehenden Körpers; es ist veränderlich und deshalb darf die Gleichung

$$\text{Winkelbeschleunigung} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}}$$

nicht angewendet werden.

Das Prinzip der Bewegungs-Energie lautet hier:

Energie der Trommel samt aufgewundenem Seil + Energie des übrigen Seilstückes + Energie der Gewichtsmasse G = = Arbeit des Gewichtes G + Arbeit des sinkenden Seilgewichtes q y

oder:

$$\frac{1}{2}\left[T + \frac{q}{4\,a\,g}(x^4 - r^4)\right]\omega^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{q}{g}(b+y) + \frac{G}{g}\right]v^2 =$$

$$= G\,y + \frac{1}{2}\,q\,y^2.$$

Nun ist die Winkelgeschwindigkeit der Trommel

$$\omega = \frac{v}{x},$$

somit

$$\left\{T + \frac{q}{4\,a\,g}(x^4 - r^4) + \frac{x^2}{g}\left[q\,(b+y) + G\right]\right\}\omega^2 = 2\,G\,y + q\,y^2$$

und endlich

$$v^2 = \frac{(2\,G\,y + q\,y^2)\,x^2}{T + \frac{q}{4\,a\,g}(x^4 - r^4) + \frac{x^2}{g}[q\,(b+y) + G]},$$

worin $x^2 = R^2 - 2\,a\,y.$

735. Nach dem Prinzip der Bewegung des Schwerpunkts ist seine Beschleunigung

$$\gamma_s = -\,f\,g \quad (f = \text{Reibungszahl})$$

und seine Geschwindigkeit

$$v_s = v_0 - f\,g\,t.$$

Die Walze kommt zur Ruhe nach der Zeit

$$t_2 = \frac{v_0}{f\,g}.$$

Die Winkelbeschleunigung der Walze um ihre Achse ist

$$\lambda = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{-\,f\,G\,a}{\frac{1}{2}\frac{G}{g}a^2} = -\,\frac{2\,f\,g}{a}$$

und somit die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \omega_0 + \lambda\, t = \omega_0 - \frac{2\, f\, g}{a}\, t.$$

Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes zwischen Walze und Unterlage ist

$$v_s + a\, \omega = v_0 + a\, \omega_0 - 3\, f\, g\, t.$$

Die Walze beginnt zu rollen, wenn der Berührungspunkt ruht, also nach der Zeit

$$t_1 = \frac{v_0 + a\, \omega_0}{3\, f\, g}.$$

736. Die Grundgleichungen für die Bewegung des Schwerpunkts und für die Drehung um den Schwerpunkt sind:

$$M \frac{d^2 x}{d\, t^2} = B,$$

$$M \frac{d^2 y}{d\, t^2} = A - G,$$

$$\lambda = \frac{d^2 \varphi}{d\, t^2} = \frac{B \frac{a}{2} \sin \varphi - A \frac{a}{2} \cos \varphi}{\frac{1}{12} M\, a^2}.$$

Hierin sind $x = \frac{a}{2} \cos \varphi$, $y = \frac{a}{2} \sin \varphi$ die Koordinaten des Schwerpunkts, M die Masse des Stabes.

Bildet man $\frac{d^2 x}{d\, t^2}$ und $\frac{d^2 y}{d\, t^2}$, so geht die letzte Gleichung über in

$$\lambda = -\frac{3}{2} \frac{g}{a} \cos \varphi$$

und aus $\omega \,.\, d\, \omega = \lambda \,.\, d\, \varphi$:

$$\omega^2 = \frac{3\, g}{a} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi),$$

wenn φ_0 der Anfangswert von φ ist.

Endlich erhält man aus den beiden ersten Gleichungen:

$$A = G \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \sin \varphi \sin \varphi_0 + \frac{9}{4} \sin^2 \varphi\right],$$

$$B = \frac{3}{4}\, G \cos \varphi\, [3 \sin \varphi - 2 \sin \varphi_0].$$

737. Wenn der Druck B verschwindet, also für

$$\sin \varphi_1 = \frac{2}{3} \sin \varphi_0.$$

738. Der Druck auf die Stütze A ist $A = \frac{G}{2}$.

Der Schwerpunkt des Stabes erhält, wenn die Stütze B entfernt wird, die Beschleunigung

$$\gamma_s = \frac{G - A}{M} = \frac{g}{2}.$$

Der Stab beginnt sich um A zu drehen mit der Winkelbeschleunigung

$$\lambda = \frac{G x}{T},$$

worin $T = M\left(\frac{l^2}{12} + x^2\right)$ das Trägheitsmoment des Stabes um A ist. Da $\gamma_s = x \lambda$ ist, bleibt für die gesuchte Entfernung der Stützen

$$2 x = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

739. Lösung analog wie vorher. Der Druck wird $\frac{G}{4}$.

740. Ist D der fragliche Druck in A und B, M und G die Masse und das Gewicht der Tischplatte, T ihr Trägheitsmoment um A B, so wird die Schwerpunktsbeschleunigung

$$\gamma_s = \frac{G - 2 D}{M}$$

und die Winkelbeschleunigung um A B

$$\lambda = \frac{G e}{T},$$

worin $e = \frac{r}{2}$, $T = T_0 + M e^2 = \frac{1}{2} M r^2$ (r = Halbmesser der Platte).

Aus $\gamma_s = e \lambda$ folgt: $$D = \frac{G}{4}.$$

741. Der anfängliche Druck in der Stütze F ist $\frac{G}{2}$.

Nach Entfernung der Stütze F_1 wird die Beschleunigung des Schwerpunkts S

$$\gamma_s = \frac{G - D}{M}$$

und wenn der Druck D in F sich nicht ändert:

$$\gamma_s = \frac{1}{2} g.$$

Die Winkelbeschleunigung der Platte um F wird

$$\lambda = \frac{G c}{T}$$

und das Trägheitsmoment der Platte für F

$$T = \frac{1}{4} M (a^2 + b^2) + M (a^2 - b^2),$$

wenn a und b die Halbachsen sind.

Setzt man noch $\gamma_s = c \lambda,$

so wird $3 a^2 = 5 b^2$

und die numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

742. Ist G das Gewicht der Platte, S die anfängliche Spannung des Fadens A B, so ist die Beschleunigung des Schwerpunkts

$$\gamma_s = \frac{G - S}{M}.$$

Im ersten Augenblick dreht sich die Platte um einen Punkt O, den man erhält, wenn man die Horizontale durch S mit A B zum Schnitt bringt. (Vgl. Aufgabe 716.)

Das Trägheitsmoment der Platte um O ist

$$T = M \left(\frac{a^2}{6} + b^2\right),$$

die Winkelbeschleunigung um O

$$\lambda = \frac{G b}{T}.$$

Setzt man nun $\gamma_s = b \lambda$, so wird die gesuchte Spannung des Fadens A B

$$S = G \frac{a^2}{a^2 + 6 b^2}.$$

743. Durchschneidet man O B und nennt S die Spannung von O A, x und y die Koordinaten des Schwerpunkts der Stange,

φ ihren Drehungswinkel gegen die Horizontale, M ihre Masse, so ist im ersten Augenblick

$$M \frac{d^2 x}{d t^2} = S \cos 60^0,$$

$$M \frac{d^2 y}{d t^2} = G - S \sin 60^0,$$

$$M k^2 \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = S \frac{a}{2} \sin 60^0.$$

Hierin ist $k = \frac{a}{\sqrt{12}}$ der Trägheitshalbmesser der Stange für den Schwerpunkt.

Ist ferner nach der ersten Bewegung der Stange $\sphericalangle AOY = \psi$,

so wird
$$x = \frac{a}{2} \cos \varphi - a \sin \psi,$$

$$y = \frac{a}{2} \sin \varphi + a \cos \psi,$$

woraus
$$x^2 + y^2 - a x \cos \varphi - a y \sin \varphi = \frac{3}{4} a^2$$

oder weil φ im ersten Augenblick klein ist:

$$x^2 + y^2 - a x - a y \varphi = \frac{3}{4} a^2.$$

Differenziert man zweimal nach t und beachtet, daß anfangs

$$\frac{d x}{d t} = 0, \quad \frac{d y}{d t} = 0, \quad \frac{d \varphi}{d t} = 0, \quad x = 0, \quad y = h$$

ist, so erhält man

$$2 h \frac{d^2 y}{d t^2} - a \frac{d^2 x}{d t^2} - a h \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = 0$$

und hieraus mit Hilfe der drei ersten Gleichungen

$$S = \frac{\sqrt{12}}{13} G,$$

die anfängliche Spannung des Seiles O A.

744. Ist q das Gewicht der Längeneinheit der Kette und wird dem Prisma die Beschleunigung γ nach links erteilt, so besitzt der linke Teil der Kette die nach rechts gerichtete Trägheitskraft $\frac{q a}{g} \gamma$; die Spannung der Kette im höchsten Punkt ist dann für

Gleichgewicht $S_1 = q\,a \sin\alpha - \frac{q\,a}{g}\gamma\cos\alpha.$

Ebenso folgt für die Spannung im rechten Teil der Kette

$$S_2 = q\,a \sin\beta + \frac{q\,a}{g}\gamma\cos\beta.$$

Setzt man $S_1 = S_2$, so wird

$$\gamma = g\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

745. Nennt man M und M_1 die Massen von G und G_1, γ und γ_1 ihre Beschleunigungen, so ist

$$\gamma = \frac{G - 2\,D\sin\alpha}{M} = \frac{d^2 y}{d\,t^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{D\cos\alpha}{M_1} = \frac{d^2 x}{d\,t^2}.$$

Bezeichnet man $O\,A = y$, $O\,B = x$, so ist

$$y = x\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

und $$\frac{d^2 y}{d\,t^2} = \frac{d^2 x}{d\,t^2}\mathrm{cotg}\,\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen wird:

$$D = \frac{G\,G_1}{\cos\alpha\,(G\,\mathrm{cotg}\,\alpha + 2\,G_1\,\mathrm{tg}\,\alpha)},$$

$$\gamma = g\,\frac{G\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{G\,\mathrm{cotg}\,\alpha + 2\,G_1\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

$$\gamma_1 = g\,\frac{G}{G\,\mathrm{cotg}\,\alpha + 2\,G_1\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Da γ und γ_1 konstant sind, so ist der Weg des Keils

$$y = \frac{1}{2}\gamma\,t^2$$

und jener der Platte $$x = \frac{1}{2}\gamma_1\,t^2.$$

746. Nennt man R die Reibung, so ist nach dem Prinzip der Schwerpunktsbewegung die Beschleunigung des Schwerpunkts

$$\gamma_s = \frac{R - P\cos\alpha}{M}$$

nach links gerichtet; M ist die Masse der Walze samt Welle.

Die Winkelbeschleunigung der Walze um ihre Achse ist, wenn $T = M\,k^2$ ihr achsiales Trägheitsmoment ist,

$$\lambda = \frac{P\,a - R\,r}{M\,k^2}.$$

Da die tiefsten Punkte der Walze die Geschwindigkeit Null haben, so ist $\gamma_s = r\,\lambda.$

Durch Einsetzen der Werte erhält man den Mindestwert der Reibung

$$R = P\frac{a\,r + k^2\cos\alpha}{r^2 + k^2}$$

und somit $$\gamma_s = g\frac{P}{G}\frac{r\,(a - r\cos\alpha)}{r^2 + k^2}.$$

Da γ_s konstant ist, besitzt der Schwerpunkt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

747. Die im Schwerpunkt wirkende Horizontalkraft ist:

$$H = k\,.\,\overline{S\,A}\,.\cos\varphi - F = k\,x - F.$$

Die Winkelbeschleunigung um den Schwerpunkt ist:

$$\lambda = \frac{F\,r}{T},\quad T = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\,r^2 = \frac{1}{2}\,M\,r^2.$$

Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders um seine Achse, v_s die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, so ist, weil die tiefsten Punkte des Zylinders die Geschwindigkeit Null besitzen,

$$v_s = r\,\omega$$

und $$\gamma_s = \frac{d\,v_s}{d\,t} = r\,\lambda = \frac{H}{M},$$

woraus die Fadenspannung

$$F = \frac{1}{3}\,k\,x$$

und die Horizontalkraft

$$H = \frac{2}{3}\,k\,x.$$

Der Schwerpunkt macht also um O eine schwingende lineare Bewegung.

Die Vertikalkraft des Schwerpunkts ist

$$V = k\,y - G.$$

Es muß also $G > k\,y$ sein, wenn der Zylinder rollen soll.

748. Nennt man M die Masse der bewegten Kugel, G ihr Gewicht, so ist zunächst für die Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung ihres Schwerpunkts

$$(a + b)\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = \frac{1}{M}\,[G\sin\varphi - R],$$

$$(a+b)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{M}[G\cos\varphi - D].$$

Sodann gilt für die Bewegung der Kugel um ihren Schwerpunkt:

$$\lambda = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{R\,a}{T},$$

$$T = \text{Trägheitsmoment} = \frac{2}{5}\,M\,a^2.$$

Hierin bedeutet ϑ den gesamten Verdrehungswinkel der Kugel gegen ihre Anfangslage, für den die Beziehung gilt: $a(\vartheta - \varphi) = b\,\varphi$.

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{5\,R}{2\,M\,a},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{5\,G\sin\varphi}{7\,M\,(a+b)},$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{10\,G\,(1-\cos\varphi)}{7\,M\,(a+b)}$$

und endlich

$$D = \frac{1}{7}\,G\,(17\cos\varphi - 10),$$

$$R = \frac{2}{7}\,G\sin\varphi,$$

$$f > \frac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi - 10},$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{10}{17}\ (\text{für } D = 0).$$

749. Nennt man $M_1\,M_2$ die Massen der beiden Walzen, $r_1\,r_2$ ihre Halbmesser, $\gamma_1\,\gamma_2$ die Beschleunigungen ihrer Schwerpunkte, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$M_1\,\gamma_1 = G_1\sin\alpha - S,$$
$$M_2\,\gamma_2 = G_2\sin\beta - S.$$

Nennt man ferner $\lambda_1\,\lambda_2$ die Winkelbeschleunigungen der Walzen, so ist

$$\gamma_1 + \gamma = r_1\,\lambda_1,\quad \gamma_2 - \gamma = r_2\,\lambda_2$$

und

$$\frac{1}{2}\,M_1\,r_1^2\,.\,\lambda_1 = S\,r_1,\quad \frac{1}{2}\,M_2\,r_2^2\,.\,\lambda_2 = S\,r_2.$$

Man erhält daraus

$$\gamma = g\,\frac{G_2\sin\beta - G_1\sin\alpha}{G_1 + G_2}$$

für die Beschleunigung des gleitenden Bandes und

$$S = \frac{G_1 G_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{3 (G_1 + G_2)}$$

für seine Spannung.

750. Nennt man x und y die Schwerpunktskoordinaten des Stabes $AB = l$, φ seinen Winkel gegen die Vertikale Y während der Bewegung, M seine Masse, A den Druck an der Ebene, f die Reibungszahl, so sind die Bewegungsgleichungen des Stabes

$$M \frac{d^2 x}{d t^2} = f A,$$

$$M \frac{d^2 y}{d t^2} = A - G,$$

$$\frac{1}{2} M l^2 \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = A \frac{l}{2} \sin \varphi - f A \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Ferner ist $$x = \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad y = \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

woraus $$\frac{d^2 x}{d t^2} \cos \varphi - \frac{d^2 y}{d t^2} \sin \varphi = \frac{l}{2} \frac{d^2 \varphi}{d t^2}.$$

Aus obigen drei Gleichungen wird sodann die Winkelbeschleunigung

des Stabes $$\lambda = \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \frac{3 g \sin \varphi}{2 l}$$

und aus $\omega \, d \omega = \lambda \, d \varphi$ durch Integration

$$\omega^2 = \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 = \frac{3 g}{l} (\cos \beta - \cos \varphi),$$

wenn β der Anfangswert von φ ist.

Für $\varphi = 90^0$ wird $\omega^2 = \frac{3 g}{l} \cos \beta$ und somit die Geschwindigkeit des Punktes B beim Aufschlagen

$$v^2 = l^2 \omega^2 = 3 g l \cos \beta.$$

Ferner wird der Druck

$$A = G + M \frac{d^2 y}{d t^2} = G - \frac{M l}{2} (\omega^2 \cos \varphi + \lambda \sin \varphi)$$

und $$A = \frac{G}{4} (1 - 6 \cos \varphi \cos \beta + 9 \cos^2 \varphi).$$

Der Stab kann die Ebene nicht verlassen, da für $A = 0$, $\cos \varphi$ imaginär wird.

751. Nennt man G das Gewicht einer Walze, M ihre Masse, r ihren Halbmesser, D den Druck zwischen den Walzen, ferner

$$BO = y, \quad OC = x,$$

so ist

$$x^2 + y^2 = 4\,r^2,$$

die Beschleunigung des Punktes B

$$\gamma = -\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{G - 2\,D \cos \varphi}{M}$$

und die Beschleunigung des Punktes C

$$\gamma_1 = \frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{D \sin \varphi}{M}.$$

Durch Differenzieren der ersten Gleichung erhält man

$$x \frac{d x}{d t} + y \frac{d y}{d t} = 0$$

und

$$x \frac{d^2 x}{d t^2} + y \frac{d^2 y}{d t^2} + \left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 = 0$$

oder

$$x \frac{d^2 x}{d t^2} + y \frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{4\,r^2}{x^2}\left(\frac{d y}{d t}\right)^2 = 0.$$

Entfernt man mit Hilfe der beiden Gleichungen für γ und γ_1 den Druck D und $\frac{d^2 x}{d t^2}$, benützt ferner die Beziehungen

$$\sin \varphi = \frac{x}{2\,r}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{2\,r},$$

so geht die letzte Differentialgleichung über in

$$8\,r^2 y \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 + (16\,r^4 - y^4)\frac{d^2 y}{d t^2} + g\,(4\,r^2 - y^2)^2 = 0,$$

welche Gleichung auch geschrieben werden kann

$$\frac{8\,r^2 y}{(4\,r^2 - y^2)^2}\left(\frac{d y}{d t}\right)^2 + \frac{4\,r^2 + y^2}{4\,r^2 - y^2}\,\frac{d^2 y}{d t^2} + g = 0$$

oder

$$d\left\{\frac{4\,r^2 + y^2}{4\,r^2 - y^2}\left(\frac{d y}{d t}\right)^2\right\} = -\,2\,g\,d\,y$$

und die Geschwindigkeit der mittleren Walze:

$$v^2 = \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 = C - 2\,g\,y\,\frac{4\,r^2 - y^2}{4\,r^2 + y^2}.$$

Für den Anfang ist $v = 0, \quad y = r\sqrt{3}$,

somit

$$v^2 = 2\,g\left\{\frac{r\sqrt{3}}{7} - y\,\frac{4\,r^2 - y^2}{4\,r^2 + y^2}\right\}$$

und die Geschwindigkeit im Augenblick der Berührung der mittleren Walze mit der Ebene:

$$y = 0, \quad v_1{}^2 = \frac{2\sqrt{3}}{7} g r.$$

752. Nennt man M und M_1 die Massen des Punktes und des Keils, G_1 das Gewicht des letzteren, so lauten die Bewegungsgleichungen des Punktes G

$$M \frac{d^2 x}{d t^2} = - D \sin(\beta - \alpha),$$

$$M \frac{d^2 y}{d t^2} = D \cos(\beta - \alpha) - G$$

und da der Keil fortschreitende Bewegung besitzt, die Bewegungsgleichungen des Punktes B

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = D \sin(\beta - \alpha) + D_1 \sin\alpha,$$

$$M_1 \frac{d^2 y_1}{d t^2} = - D \cos(\beta - \alpha) + D_1 \cos\alpha - G_1.$$

Ferner ist $\quad y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$

und $\quad y_1 = (a - x_1) \operatorname{tg}\alpha,$

wenn man $O E = a$ setzt. Die beiden letzten Gleichungen liefern

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{d^2 y_1}{d t^2} = \left(\frac{d^2 x}{d t^2} - \frac{d^2 x_1}{d t^2}\right) \operatorname{tg}(\beta - \alpha),$$

$$\frac{d^2 y_1}{d t^2} = - \frac{d^2 x_1}{d t^2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Aus diesen beiden und den ersten vier Gleichungen erhält man

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - g \frac{G_1 \cos\beta \cos\alpha \sin(\beta - \alpha)}{G_1 + G \sin^2\beta},$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = - g \left[1 - \frac{G_1 \cos\beta \cos\alpha \cos(\beta - \alpha)}{G_1 + G \sin^2\beta}\right],$$

$$\frac{d^2 x_1}{d t^2} = g \frac{\cos\alpha\,[G_1 \sin\alpha + G \sin\beta \cos(\beta - \alpha)]}{G_1 + G \sin^2\beta},$$

$$\frac{d^2 y_1}{d t^2} = - g \frac{\sin\alpha\,[G_1 \sin\alpha + G \sin\beta \cos(\beta - \alpha)]}{G_1 + G \sin^2\beta}$$

und hieraus:

a) die Beschleunigung γ_1 des Keils auf der schiefen Ebene,

wenn $A B = s_1$: $\quad \gamma_1 = \frac{d^2 s_1}{d t^2}$ oder

$$\gamma_1 = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{d^2 x_1}{d t^2} = g\frac{G_1 \sin\alpha + G \sin\beta \cos(\beta - \alpha)}{G_1 + G \sin^2\beta}.$$

Die Bewegung ist gleichförmig beschleunigt, also

$$s_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 t^2.$$

b) Die Beschleunigung γ des Punktes G auf der Keilfläche, wenn $C G = s$, $C B = b$:

$$\gamma = \frac{d^2 s}{d t^2}, \text{ oder weil } (b - s)\cos(\beta - \alpha) = x - x_1,$$

$$\gamma = \frac{1}{\cos(\beta - \alpha)}\left[-\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{d^2 x_1}{d t^2}\right] = g\frac{(G + G_1)\cos\alpha \sin\beta}{G_1 + G\sin^2\beta}$$

und ebenso wie oben $\qquad s = \frac{1}{2}\gamma t^2.$

c) Die absolute Bahn des Punktes G ist eine Gerade; deren Neigung gegen die Horizontale ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d^2 y}{d t^2} : \frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{G_1 + G\sin^2\beta}{G_1 \cos\alpha \cos\beta \sin(\beta - \alpha)} - \operatorname{cotg}(\beta - \alpha).$$

d) $$D = -\frac{M}{\sin(\beta - \alpha)}\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{G G_1 \cos\alpha \cos\beta}{G_1 + G\sin^2\beta}.$$

e) $$D_1 = \left(M\frac{d^2 x}{d t^2} + M_1\frac{d^2 x_1}{d t^2}\right)\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{G_1 (G + G_1)\cos\alpha}{G_1 + G\sin^2\beta}.$$

753. Nennt man $B C = s$, so ist

$$s \sin\alpha = 2 a \sin\varphi,$$

$$\frac{d s}{d t}\sin\alpha = 2 a \cos\varphi \frac{d\varphi}{d t}$$

und wenn $\frac{d\varphi}{d t} = \omega$, $\frac{d^2\varphi}{d t^2} = \lambda$ bezeichnet wird:

$$\frac{d^2 s}{d t^2}\sin\alpha = 2 a\,(\lambda\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi).$$

Für die Spannung S des Fadens ist nach dem Prinzip d'Alemberts:

$$S + M\gamma = P,$$

somit $$S = P - M\frac{d^2 s}{d t^2} = P + \frac{2 a M}{\sin\alpha}(\omega^2\sin\varphi - \lambda\cos\varphi) \quad . \quad . \quad (a.$$

Nennt man ferner x und y die Koordinaten des Schwerpunkts der Stange, M_1 ihre Masse, A und B die Auflagerdrücke in A und B, so wird

$$M_1 \frac{d^2 x}{d t^2} = S \cos \alpha - B \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.$$

$$M_1 \frac{d^2 y}{d t^2} = A - G + B \cos \alpha + S \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c.$$

$$M_1 k^2 \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = B a \cos (\alpha - \varphi) + S a \sin (\alpha - \varphi) - A a \cos \varphi \quad . \quad (d.$$

(Hier ist $k = \frac{a}{\sqrt{3}}$ der Trägheitshalbmesser der Stange in bezug auf den Schwerpunkt.)

Aus den geometrischen Beziehungen

$$x = a (2 + 2 \sin \varphi \operatorname{cotg} \alpha - \cos \varphi),$$
$$y = a \sin \varphi$$

folgt ferner

$$\frac{d x}{d t} = a \omega (2 \operatorname{cotg} \alpha \cos \varphi + \sin \varphi),$$

$$\frac{d y}{d t} = a \omega \cos \varphi$$

und

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = a \omega^2 (- 2 \operatorname{cotg} \alpha \sin \varphi + \cos \varphi)$$
$$+ a \lambda (2 \operatorname{cotg} \alpha \cos \varphi + \sin \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e.$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = - a \omega^2 \sin \varphi + a \lambda \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f.$$

Entfernt man aus den Gleichungen a bis f

$$A, \ B, \ S, \ \frac{d^2 x}{d t^2}, \ \frac{d^2 y}{d t^2}, \ \text{so bleibt}$$

$$2 \lambda \left\{ P \cos^2 \varphi + G \left[\cos \alpha \cos \varphi \cos (\alpha - \varphi) + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right] \right\}$$
$$+ \omega^2 \{ G \cos \alpha \sin (\alpha - 2 \varphi) - P \sin 2 \varphi \}$$
$$= \frac{g}{2 a} \cos \varphi \sin \alpha (2 P - G \sin \alpha).$$

Diese Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$d \{ K \omega^2 \} = \frac{g}{2 a} \sin \alpha \cos \varphi (2 P - G \sin \alpha) \,.\, d \varphi,$$

worin K der Faktor von 2λ ist, und nach Integration und Einführung der Anfangswerte $\varphi = 0$, $\omega = 0$:

$$K \omega^2 = \frac{g}{2 a} \sin \alpha \sin \varphi (2 P - G \sin \alpha),$$

und die Geschwindigkeit des fallenden Gewichtes P aus

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\,a \cos\varphi}{\sin\alpha}\,\omega:$$

$$v^2 = 2\,a\,g\,\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{K\sin\alpha}\,(2\,P - G\sin\alpha),$$

worin $K = P\cos^2\varphi + G\left[\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right].$

754. $\frac{M_1}{M_2} = k =$ Stoßzahl.

755. $\frac{M_1}{M_2} = 3.$

756. $\frac{v_1}{v_2} = -\frac{1+k}{3-k}.$

757. Stoßzahl $k = \frac{1}{2}.$

Die Geschwindigkeit der stoßenden Kugel nach dem Stoß ist Null.

758. $2\,M_1\,v_1 \sin\alpha.$

759. $2\,M_1\,(v_2\sin\beta - v_1\cos\beta).$ [Erteile beiden Körpern die Geschwindigkeit v_2 nach rechts und führe die Aufgabe auf die vorige zurück.]

760. M_2 hat nach dem Stoß mit M_1 die Geschwindigkeit

$$c_2 = 2\,v_1\,\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{5}{3}\,v_1,$$

nach dem Stoß mit M_3 die Geschwindigkeit

$$c_2\left[1 - \frac{2\,M_3}{M_2 + M_3}\right].$$

Soll dieser Ausdruck gleich $-v_1$ werden, so muß

$$M_3 = 4\,M_2 \text{ sein.}$$

761. Da die Bewegungsgröße sich nicht ändert und die Stöße unelastisch sind, werden zuerst zwei Kugeln mit der gleichen Geschwindigkeit $\frac{v_1}{2}$ laufen, sodann drei Kugeln mit $\frac{v_1}{3}$ und schließlich alle vier Kugeln mit $\frac{v_1}{4}$.

762. Nennt man v_1, v_2 die Fallgeschwindigkeiten der beiden Gewichte G_1 und G_2 im Augenblick des Auftreffens, so sind

$$v_1 = \sqrt{2\,g\,h_1},\quad v_2 = \sqrt{2\,g\,h_2}$$

und die Bewegungsgröße vor dem Stoß

$$\frac{1}{g}(G_1 v_1 - G_2 v_2).$$

Nach dem Stoß ist die Bewegungsgröße

$$\frac{1}{g}(2G + G_1 + G_2)c.$$

Setzt man beide gleich, so wird

$$c = \sqrt{2g}\frac{G_1\sqrt{h_1} - G_2\sqrt{h_2}}{2G + G_1 + G_2}.$$

763. Vor dem ersten Anprall sei die Geschwindigkeit v_1; dann ist vor dem zweiten Anprall

$$v_2 = - v_1 k,$$

wenn k die Stoßzahl ist; die Zeit zwischen erstem und zweitem Anprall ist

$$t_1 = \frac{a - d}{v_1 k}.$$

Rechnet man ebenso die Zeit zwischen zweitem und drittem Anprall mit

$$t_2 = \frac{a - d}{v_1 k^2},$$

so wird die ganze Zeit

$$t = t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_{n-1}$$

und

$$v_1 = \frac{a - d}{t} \cdot \frac{1 - k^{n-1}}{k^{n-1}(1 - k)}.$$

764. $M_2 = \sqrt{M_1 M_3}$.

765. Nennt man in dem Augenblick, in dem C mit B in Berührung kommt,

$$\sphericalangle BCD = \alpha, \quad \sphericalangle BCA = \varphi,$$

ferner d den Kugeldurchmesser, so ist $v_1 \cos\alpha$ die Geschwindigkeit des Stoßes und $\frac{1}{2} v_1 \cos\alpha (1 - k)$ die Geschwindigkeit der Kugel C in der Richtung CB nach dem Stoß, hingegen $v_1 \sin\alpha$ senkrecht dazu.

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - k}.$$

Nun ist

$$d \sin\varphi = a \cos(\varphi - \alpha),$$

woraus

$$BD = d\sin\alpha = \frac{d}{a(1 + k)}\left\{\sqrt{d^2 - a^2(1 - k^2)} + d\right\}.$$

766. Nennt man α den Winkel zwischen v_1 und der gemeinsamen Normale der beiden Kugeln, so hat die stoßende Kugel nach dem Stoß die Geschwindigkeit $v_1 \sin\alpha$ in der Tangente, $\frac{1}{2} v_1 \cos\alpha (1 - k)$ in der Normale; somit

$$\frac{1}{n^2} v_1^2 = v_1^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{4} v_1^2 \cos^2\alpha (1 - k)^2,$$

woraus

$$\cos\alpha = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{(3 - k)(1 + k)}}.$$

767. Nennt man φ die Ablenkung des Balles A durch den Stoß, so ergibt sich allgemein

$$\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{2}{(1 + k)\sin\alpha (1 - \cos\alpha)}.$$

Für $\varphi = 90^0$ wird hieraus

$$\cos^2\alpha - \cos\alpha = \frac{2}{1 + k}.$$

768. Die zweite Kugel besitzt nach dem Stoß mit der ersten die Geschwindigkeit $\dfrac{2 v_1}{1 + \dfrac{M_2}{M_1}} = \dfrac{2n}{n + 1} v_1$, wenn M_1 und M_2 die Massen der stoßenden und der gestoßenen Kugel sind. Ebenso ist die Geschwindigkeit der dritten Kugel nach dem Stoß $\left(\dfrac{2n}{n + 1}\right)^2 v_1$,

die der letzten $\left(\dfrac{2n}{n + 1}\right)^{r-1} v_1$.

769. Ist l die Länge vom Aufhängungs- bis zum Kugelmittelpunkt, so ist die Geschwindigkeit der Kugel M_1 vor dem Stoß

$$v_1 = \sqrt{2 g l (1 - \cos\alpha_1)} = 2 \sin\frac{\alpha_1}{2} \sqrt{g l};$$

die Geschwindigkeit von M_2 nach dem Stoß mit M_1:

$$c_2 = (1 + k) v_1 \frac{M_1}{M_1 + M_2}$$

und nach dem Stoß mit M_3:

$$c_2' = (1 + k) v_1 \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_2 - k M_3}{M_2 + M_3};$$

die Geschwindigkeit von M_3 nach dem Stoß mit M_2 ist:

$$c_3 = c_2 (1 + k) \frac{M_2}{M_2 + M_3} = (1 + k)^2 v_1 \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_2}{M_2 + M_3}.$$

Setzt man wie oben:

$$c_2' = 2 \sin \frac{\alpha_2}{2} \sqrt{g\, l}, \quad c_3 = 2 \sin \frac{\alpha_3}{2} \sqrt{g\, l},$$

so wird:

$$\sin \frac{\alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2} (1 + k) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_2 - k\, M_3}{M_2 + M_3},$$

$$\sin \frac{\alpha_3}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2} (1 + k)^2 \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_2}{M_2 + M_3}$$

und für die besonderen Werte:

$$\alpha_2 = 13^0\, 16', \ \alpha_3 = 36^0\, 32'.$$

770. Nennt man G_1 das Gewicht des Stabes, ω_1 sein Winkelgeschwindigkeit in der tiefsten Lage, T_1 sein Trägheitsmoment für O, so ist nach dem Prinzip der Bewegungsenergie

$$G_1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} T_1\, \omega_1{}^2, \qquad T_1 = \frac{1}{3} \frac{G_1}{g} l^2$$

und somit die Geschwindigkeit des tiefsten Punktes (Stoßstelle)

$$v_1 = l\, \omega = \sqrt{3\, g\, l}.$$

Die an die Stoßstelle reduzierte Masse des Stabes ist

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{T_1}{l^2} = \frac{1}{3} \frac{G_1}{g}$$

und die Geschwindigkeit des Gewichtes G_2 (Masse M_2) nach dem Stoß

$$c_2 = \frac{v_1}{1 + \frac{M_2}{\mathfrak{M}_1}} = v_1 \frac{G_1}{G_1 + 3\, G_2}.$$

Nach dem Prinzip der Bewegungsenergie ist ferner für die Bewegung von G_1

$$-\frac{1}{2} M_2\, c_2{}^2 = - x\, f\, G_2,$$

woraus

$$x = \frac{3}{2} \frac{1}{f} \left(\frac{G_1}{G_1 + 3\, G_2} \right)^2 = 15{,}07 \text{ m}.$$

771. Die Geschwindigkeit v_1, mit der das Stabende an den Würfel stößt, folgt aus dem Prinzip der Bewegungsenergie:

$$L - L_0 = A$$

oder
$$\frac{1}{2} T_1 \omega_1^2 = G_1 \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha).$$

Hierin ist $T_1 = \frac{1}{3} M_1 l^2$ das Trägheitsmoment des Stabes für O ω_1 seine Winkelgeschwindigkeit im Augenblick des Stoßes. Es folgt
$$v_1 = l \omega_1 = \sqrt{3 g l (1 - \cos \alpha)}.$$
Die reduzierte Stangenmasse an der Stoßstelle ist
$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{3} M_1 = \frac{1}{3} \frac{G_1}{g}.$$
Das Trägheitsmoment des Würfels um O_2 ist
$$T_2 = \frac{2}{3} \frac{G_2}{g} s^2$$
und somit seine nach A reduzierte Masse
$$\mathfrak{M}_2 = \frac{T_2}{s^2} = \frac{2}{3} \frac{G_2}{g}.$$
Die Geschwindigkeit von A nach dem Stoß ist
$$c_2 = v_1 (1 + k) \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} = v_1 (1 + k) \frac{G_1}{G_1 + 2 G_2}.$$
Die Bewegungsenergie des Würfels nach dem Stoß ist
$$\mathfrak{N} = \frac{1}{2} \mathfrak{M}_2 c_2^2 = \frac{G_1^2 G_2 (1 + k)^2}{(G_1 + 2 G_2)^2} l (1 - \cos \alpha).$$
Zum Kippen des Würfels ist die Arbeit erforderlich:
$$A = G_2 \frac{s}{2} \left(\sqrt{2} - 1\right).$$
Es muß $\mathfrak{N} > A$ sein oder:
$$\cos \alpha < 1 - \frac{2}{9} \left(\sqrt{2} - 1\right) \frac{s}{l} \left(1 + 2 \frac{G_2}{G_1}\right)^2.$$

Andere Lösung: Ist D die Stoßkraft zwischen beiden Körpern, so ist ihr Moment um O_1 bzw. O_2 gleich der Änderung des Momentes der Bewegungsgröße oder:
$$D l = T_1 (\omega_0 - \omega_1) \text{ und } D s = T_2 \omega_2.$$
Hierin ist ω_0 die Winkelgeschwindigkeit des Stabes zu Beginn des Stoßes, nämlich $\frac{v_1}{l}$. Hieraus wird zunächst
$$\frac{T_1}{l^2} (v_1 - l \omega_1) = \frac{T_2}{s} \omega_2.$$

Ist der Stoß unelastisch ($k = 0$), so bleiben die Körper nach dem Stoß in Berührung und es ist für die Stoßstelle

$$l\,\omega_1 = s\,\omega_2,$$

woraus mit $\frac{T_1}{l^2} = \mathfrak{M}_1, \quad \frac{T_2}{s^2} = \mathfrak{M}_2$

folgt: $$c_2 = s\,\omega_2 = v_1 \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}.$$

Ist die Stoßzahl nicht Null, sondern k, so ist der Faktor $1 + k$ noch hinzuzufügen, es wird also

$$c_2 = v_1 (1 + k) \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2},$$

wie bereits oben gefunden wurde.

772. Reduziert man die Masse M_2 des Balkens nach A, so ist sie

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{T_2}{a^2} = \frac{1}{3} M_2$$

und die Geschwindigkeit von M_1 nach dem Stoß

$$c_1 = v_1 - \frac{2\,v_1}{1 + \frac{M_1}{\mathfrak{M}_2}} = v_1 \frac{3\,M_1 - M_2}{3\,M_1 + M_2},$$

wenn $v_1 = \sqrt{2\,g\,h}$ die Geschwindigkeit vor dem Stoß ist.

Der Punkt A, der anfangs ruht, hat nach dem Stoß die Geschwindigkeit

$$c_2 = \frac{2\,v_1}{1 + \frac{\mathfrak{M}_2}{M_1}},$$

woraus $$\omega_2 = \frac{c_2}{a} = \frac{v_1}{a} \frac{6\,M_1}{3\,M_1 + M_2}.$$

773. Nennt man T_1, T_2, T_3 die Trägheitsmomente der drei Stäbe für ihre Drehungsachsen, so ist:

$$T_1 = \frac{M_1}{3}(a_1{}^2 + b_1{}^2 - a_1\,b_1),$$

$$T_2 = \frac{M_2}{3}(a_2{}^2 + b_2{}^2 - a_2\,b_2),$$

$$T_3 = \frac{M_3}{3}(a_3{}^2 + b_3{}^2 - a_3\,b_3).$$

Nach dem Stoß nehmen die Punkte der drei Stäbe folgende Geschwindigkeiten an:

$$A_1 \ldots\ldots c_1 = \frac{M a_1^2}{M a_1^2 + T_1}(1 + k) V$$

$$B_1 \ldots\ldots v_1 = \frac{b_1}{a_1} c_1$$

$$A_2 \ldots\ldots c_2 = \frac{a_2^2 T_1}{a_2^2 T_1 + b_1^2 T_2}(1 + k) v_1$$

$$B_2 \ldots\ldots v_2 = \frac{b_2}{a_2} c_2$$

$$A_3 \ldots\ldots c_3 = \frac{a_3^2 T_2}{a_3^2 T_2 + b_2^2 T_3}(1 + k) v_2$$

$$B_3 \ldots\ldots v_3 = \frac{b_3}{a_3} c_3.$$

Die Kugel m erhält endlich die Geschwindigkeit

$$c = \frac{T_3}{T_3 + m b_3^2}(1 + k) v_3$$

oder

$$c = V(1 + k)^4 \frac{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 M T_1 T_2 T_3}{(a_1^2 M + T_1)(a_2^2 T_1 + b_1^2 T_2)(a_3^2 T_2 + b_2^2 T_3)(T_3 + m b_3^2)}.$$

774. Nach dem Prinzip der Bewegungsenergie ist die Geschwindigkeit des Stabes an der Stoßstelle

$$v_1^2 = \frac{3 g \sin \alpha b^2}{a},$$

wenn $O A = a$, $O B = b$ gesetzt wird. Die Geschwindigkeit c_1 dieser Stelle nach dem Stoß ergibt sich aus

$$v_1 - c_1 = \frac{v_1 (1 + k)}{1 + \frac{\mathfrak{M}_1}{M_2}}$$

oder mit $M_2 = \infty$ (weil B fest ist)

$$c_1 = - k v_1.$$

Setzt man analog wie oben

$$c_1^2 = \frac{3 g \sin \beta b^2}{a},$$

so wird
$$k = \sqrt{\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}}.$$

775. Ist M_2 die Masse der Platte, so ist ihr Trägheitsmoment für $X: \frac{7}{48} M_2 h^2$ und die nach A reduzierte Masse: $\frac{7}{12} M_2 = \mathfrak{M}_2$.

Ist v_1 die Geschwindigkeit der stoßenden Masse $M_1 = \frac{1}{10} M_2$, c_2 die Geschwindigkeit der Stoßstelle A nach dem Stoß, so ist

$$c_2 = v_1 (1 + k) \frac{M_1}{M_1 + \mathfrak{M}_2}$$

und für $k = 1$:

$$c_2 = \frac{12}{41} v_1.$$

Soll die Platte bis zur horizontalen Lage schwingen, so ist nach dem Prinzip der Bewegungsenergie

$$\frac{1}{2} \mathfrak{M}_2 c_2^2 = M_2 g \cdot \frac{h}{4},$$

woraus

$$v_1 = \frac{41}{12} \sqrt{\frac{6 g h}{7}}.$$

776. Das Trägheitsmoment der Daumenwelle für ihre Achse ist

$$T_1 = \frac{1}{12} \frac{\gamma}{g} \pi d (R^4 + 5 r^4);$$

die an die Stoßstelle reduzierte Masse der Daumenwelle

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4 T_1}{(R + r)^2},$$

ihre Geschwindigkeit an der Stoßstelle

$$v_1 = \frac{(R + r) n \pi}{60}.$$

Der Stoß ist unelastisch, da Welle und Stampfe nach dem Stoß in Berührung bleiben; demnach ist die Geschwindigkeit der Stampfe nach dem Stoß

$$c_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + M_2} v_1, \quad M_2 = \frac{G_2}{g}.$$

Es ist also

$$c_2 = \frac{1}{60} \frac{\pi^2 \gamma n d (R + r)(R^4 + 5 r^4)}{\gamma \pi d (R^4 + 5 r^4) + 3 G_2 (R + r)^2} = 0{,}202 \text{ m/s}.$$

777. Nennt man $SA = a$, l die Länge des Stabes, M_1 seine Masse, $\mathfrak{M}_1 = \frac{l^2}{12 a^2} M_1$ die nach A reduzierte Masse, so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts S nach dem Stoß

$$c_s = v_1 \left[1 - \frac{1+k}{1+\frac{M_1}{\mathfrak{M}_1}}\right],$$

weil die Masse M_2 des Hindernisses unendlich groß ist.

Für die Winkelgeschwindigkeit ω des Stabes um S erhält man nach dem Stoß

$$a\,\omega = -\,v_1 \frac{1+k}{1+\frac{\mathfrak{M}_1}{M_1}}$$

und für die Geschwindigkeit der Stoßstelle $A : c_s + a\,\omega$, d. i.

$$-\,v_1\,k,$$

also von a ganz unabhängig.

778. Ist M_1 die Masse der Platte, $M_1\,\varrho^2$ ihr Trägheitsmoment für die Schwerlinie senkrecht zur Bildfläche, so ist ihre Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß

$$\omega_1 = -\frac{1}{x}\,\frac{v_1(1+k)}{1+\frac{\mathfrak{M}_1}{M_1}},$$

worin v_1 die Fallgeschwindigkeit der Platte, $\mathfrak{M}_1$ die an die Stoßstelle reduzierte Masse $\frac{M_1\,\varrho^2}{x^2}$ ist. Soll ω_1 ein Maximum werden, so muß $x\left(1+\frac{\varrho^2}{x^2}\right)$ ein Minimum sein; dies tritt ein für $x = \varrho$.

Die größte Winkelgeschwindigkeit der Platte ist also

$$\omega_{max} = -\frac{v_1(1+k)}{2\,\varrho}.$$

779. Nennt man S den gemeinsamen Schwerpunkt der Masse M und des Stieles, S_1 jenen der Masse M und bezeichnet

$$O\,S = z, \quad S\,S_1 = y,$$

so muß

$$z\,y = \varrho^2$$

sein, wenn $(M + \mu\,x)\,\varrho^2$ das Trägheitsmoment des Hammers für seine zur Bildfläche senkrechte Schwerlinie ist.

Es ist

$$y = \frac{\mu\,x}{M+\mu\,x}\left(\frac{x}{2}+a\right),$$

$$z = x + a - y,$$

$$(M+\mu\,x)\,\varrho^2 = T + M\,y^2 + \mu\,x\left[\frac{x^2}{12} + \left(\frac{x}{2}+a-y\right)^2\right],$$

wenn T das Trägheitsmoment von M in bezug auf seine zur Bildfläche senkrechte Schwerlinie ist.

Hieraus erhält man

$$\mu x^2 (x + 3a) = 6T.$$

780. Es muß $y + r = \frac{T_x}{My}$ sein, wenn T_x das Trägheitsmoment der Masse M der Scheibe für X ist.

Aus $T_x = \frac{1}{4} M r^2 + M y^2$ findet man

$$y = \frac{r}{4}.$$

781. Es ist, wenn M die Masse des Dreiecks, y_s die Koordinate seines Schwerpunkts bezeichnet:

$$\xi = \frac{\int x y \, d M}{M y_s}, \quad \eta = \frac{\int y^2 \, d M}{M y_s},$$

woraus wegen

$$\int x y \, d M = \mu \int \int x y \, d x \, d y = \mu \int_0^a x \, d x \, . \frac{{y_1}^2}{2} = \frac{\mu}{24} a^2 b^2,$$

$$y_1 = \frac{b}{a}(a - x), \quad M = \frac{1}{2} \mu a b,$$

$$\int y^2 \, d M = \mu \int \int y^2 \, d x \, d y = \mu \int_0^a d x \, . \frac{{y_1}^3}{3} = \frac{\mu}{12} a b^3;$$

endlich folgt: $\quad \xi = \frac{a}{4}, \quad \eta = \frac{b}{2}.$

782. Rechnung wie in vorhergehendem Beispiel.

$$\int x y \, d M = \mu \int \int x y \, d x \, d y = \mu \int_0^r \left[x \, d x \int_0^{y_1} y \, d y\right] =$$

$$= \frac{\mu}{2} \int_0^r x \, d x \, . \, {y_1}^2 = \frac{\mu}{2} \int_0^r x (r^2 - x^2) \, d x = \frac{\mu}{8} r^4,$$

$$\int y^2 \, d M = \mu \int \int y^2 \, d x \, d y = \mu \int_0^r \left[d x \int_0^{y_1} y^2 \, d y\right] =$$

$$= \frac{\mu}{3}\int_0^r d\,x\,.\,y_1{}^3 = \frac{\mu}{3}\int_0^r (r^2 - x^2)^{3/2}\,d\,x = \frac{\mu\,\pi}{16}\,r^4,$$

woraus

$$M = \frac{\mu\,\pi}{4}\,r^2, \quad y_s = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi},$$

$$\xi = \frac{3}{8}\,r, \quad \eta = \frac{3\,\pi}{16}\,r.$$

783. Rechnung wie im Beispiel 781.

$$\int x\,y\,d\,M = \mu\int\int x\,y\,d\,x\,d\,y = \mu\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\Big[y\,d\,y\int_{-x_1}^{x_2} x\,d\,x\Big],$$

$$x_1 = \frac{b_1}{h}\left(\frac{h}{2} + y\right), \quad x_2 = \frac{b_2}{h}\left(\frac{h}{2} + y\right),$$

woraus

$$\int x\,y\,d\,M = \frac{1}{24}\,\mu\,b\,h^2\,(b_2 - b_1).$$

Ferner

$$\int y^2\,d\,M = \frac{1}{24}\,\mu\,b\,h^3,$$

$$M = \frac{1}{2}\,\mu\,b\,h, \quad y_s = \frac{h}{6},$$

somit

$$\xi = \frac{1}{2}\,(b_2 - b_1), \quad \eta = \frac{h}{2}$$

d. h. der Stoßpunkt liegt im Halbierungspunkt der Grundlinie b.

784. In B wird ein Stoß auf die Platte ausgeübt. Bildet man die Momente der Bewegungsgrößen der Platte um B vor und nach dem Stoß und setzt sie einander gleich, so ist

$$M\,v_s\,.\,0 + T\,\omega = M\,v_s'\,.\,e + T\,\omega'.$$

Hierin ist M die Masse der Platte, T ihr Trägheitsmoment für die vertikale Schwerlinie, v_s und v_s' die Geschwindigkeiten des Schwerpunkts vor und nach dem Stoß, e die halbe Diagonale. Mit

$$T = \frac{1}{3}\,m\,e^2, \quad v_s' = e\,\omega'$$

erhält man

$$\omega' = \frac{\omega}{4}.$$

785. Nennt man M die Masse einer Stange, T ihr Trägheitsmoment für C, so hat die Bewegungsgröße der Stange AC vor dem

Stoß um C das Moment $M v . \frac{a}{2}$, nach dem Stoß $T \omega$. Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit um C. Setzt man die Momente der Bewegungsgrößen um C einander gleich, so bleibt

$$\omega = \frac{3 v}{2 a}$$

und da der Drehungswinkel des Stabes A C: $\varphi = \frac{2}{3} \pi$ ist, bis A und B sich treffen, so wird die gewünschte Zeit

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{4 a \pi}{9 v}.$$

786. Nennt man M die Masse der Scheibe, T ihr Trägheitsmoment für A C, r die halbe Diagonale, B die auftretende Stoßkraft, so ist $T (\omega' - \omega) = - B r.$

Hat ferner der Schwerpunkt der Scheibe nach dem Stoß die Geschwindigkeit c_s, so ist $M c_s = B$
und endlich $c_s = r \omega'.$

Hieraus erhält man

$$\omega' = \frac{\omega}{7} \text{ und } B = \frac{M r \omega}{7}.$$

787. Bildet man die Momente der Bewegungsgrößen des Würfels vor und nach dem Stoß um die festgehaltene Stelle H, so müssen sie einander gleich sein; es wird also

$$M v . \frac{a}{2} = T \omega.$$

Hierin ist M die Masse des Würfels, $T = \frac{2}{3} M a^2$ sein Trägheitsmoment für die Kante bei H, ω seine Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß. Daraus wird die gefragte Geschwindigkeit

$$c_s = \frac{a}{\sqrt{2}} \omega = \frac{3}{8} v \sqrt{2}.$$

Die Bewegungsenergie des Würfels nach dem Stoß ist

$$\frac{1}{2} T \omega^2;$$

soll sie den Würfel kippen, so muß sie die Arbeit zum Heben des Würfels $M g \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1)$

leisten können; es muß also

$$v^2 \geqq \frac{8}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right) g\, a$$

sein.

788. Setzt man die Momente der Bewegungsgrößen um A vor und nach dem Stoß einander gleich, so wird

$$M_1\, v_1 \cdot \frac{3\, a}{2} = T\, \omega + M_1\, \overline{A\, B^2} \cdot \omega.$$

Hierin ist T das Trägheitsmoment des Prismas um A, ω seine Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß. Es wird

$$\omega = \frac{36\, v_1}{53\, a}.$$

Damit das Prisma umkippt, muß seine Bewegungsenergie größer als die zum Kippen um A notwendige Hebearbeit sein, oder

$$\frac{1}{2}\left(T + M_1\, \overline{A\, B^2}\right) \omega^2 > (M_1 + M_2)\, g \left(\overline{A\, S} - \frac{3}{2} a\right),$$

worin S der gemeinsame Schwerpunkt des Prismas und der Masse M_1 ist. Es ergibt sich

$$A\, S = \frac{13}{8} a$$

und hieraus

$$v_1{}^2 > \frac{53}{9} g\, a.$$

789. Es bezeichne M die Masse jedes der beiden Menschen, m die Seilmasse, $\mathfrak{M}$ die an den Umfang der Rolle reduzierte Masse der Rolle.

Sind v_1 und v_2 die wirklichen Geschwindigkeiten des kletternden und des anderen Menschen und bedenkt man, daß die Momente der entstehenden Bewegungsgrößen um den Rollenmittelpunkt die Summe Null besitzen müssen, so wird

$$M\, v_1\, r = (M + m + \mathfrak{M})\, v_2\, r.$$

Nun ist aber $v_1 = v_0 - v_2$, woraus

$$v_1 = v_0 \frac{M + m + \mathfrak{M}}{2\, M + m + \mathfrak{M}}, \quad v_2 = v_0 \frac{M}{2\, M + m + \mathfrak{M}}.$$

790. $v = 16{,}6 \frac{m}{s}$. $\left[60 \cdot \frac{1000\, m}{3600\, s} = v \frac{1\, m}{1\, s}.\right]$

791. $\gamma = 12\,713{,}76 \, . \frac{\text{Kilomet.}}{\text{Stunde}^2}. \left[9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \gamma \frac{1000 \text{ m}}{(3600 \text{ s})^2}.\right]$

792. $t = 1$ Minute. $\left[80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 288 \frac{1000 \text{m}}{\text{t}^2}.\right]$

793. $\gamma = 1{,}831 \, . \left[9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{t}^2} = \gamma \frac{\text{m}}{\text{t}_1^{\,2}}, \quad \frac{\text{t}_1}{\text{t}} = 0{,}432.\right]$

794. Die Zeiteinheit muß verzehnfacht werden.

$$\left[\lambda \, . \frac{1}{\text{t}^2} = 100 \, \lambda \, . \frac{1}{\text{t}_1^{\,2}}.\right]$$

795. 1 PS = 542 engl. Sek.-Fuß-Pfund.

$$\left[75 \frac{\text{mkg}}{\text{sek}} = x \frac{0{,}454 \text{ kg} \, . \, 0{,}305 \text{ m}}{1 \text{ sek}}.\right]$$

796. $1 \text{ PS} = 75 \text{ g} = 735{,}75 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}.$

797. $T_1 = T \, . \, 981 \, . \, 10^5$. $[T \, . \, M \, L^2 = T_1 \, . \, M_1 \, L_1^{\,2}$ oder

$$T \, . \frac{1 \text{ kg Gewicht}}{1 \text{ m/s}^2} \, . \, 1 \text{ m}^2 = T_1 \, . \, 1 \text{ g Masse} \, . \, 1 \text{ cm}^2.]$$

798. $x = 1 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}. \left[64\,285{,}71 \frac{\text{Pfund . Fuß}^2}{\text{Minute}^2} = x \frac{\text{kg . m}^2}{\text{sek}^2}.\right]$

799. $x = 7411 \frac{\text{Pfund}}{\text{Zoll}^2}. \left[600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = x \frac{\text{Pfund}}{\text{Zoll}^2}.\right]$

800. $a \ldots\ldots L^{-1}$; $b \ldots\ldots M \, L^{-1} \, T^{-2}$.

801. $a = 0{,}100$, $b = 0{,}667 \, . \left[0{,}038 \frac{1}{\text{cm}} = a \frac{1}{\text{Zoll}},\right.$

$$\left. 0{,}054 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = b \frac{\text{Pfund}}{\text{Zoll}^2}.\right]$$

802. $\alpha \ldots\ldots M \, L^{-(n+1)} \, T^{n-2}$.

803. $\alpha \ldots\ldots M \, L^{-3}$; $\beta \ldots\ldots M \, L^{-5/2} \, T^{-1/2}$.

804. $u \ldots\ldots T^{-1}$; $\alpha \ldots\ldots L$; $\beta \ldots\ldots L^2 \, T^{-2}$; $\gamma \ldots\ldots L^2$.

805. $\alpha \ldots\ldots L^{-1} \, T^2$; $\beta \ldots\ldots T^2$.

$\alpha = 0{,}00008848$, während β unverändert bleibt.

806. $\alpha \ldots\ldots L^{1/2} T^{-1}$; $\beta \ldots\ldots T^{-1}$.
$\alpha = 63{,}8352$, während β unverändert bleibt.

807. a b c haben die Dimension $L^{1/2} T^{-1}$,
$a_1\ b_1$ „ „ „ $L^{1/2}$.
Es wird:
$$a = a_1 = 40{,}94,$$
$$b = b_1 = 0{,}002759,$$
$$c = 1{,}78.$$

808. Da A die Dimension Null hat, bleibt für die Zahl 1250 die Dimension $M^{-1} L T^2$ oder auch $\frac{L^2}{K}$, wenn mit K die Dimension der Kraft bezeichnet wird.

809. Wird die Dimension der Kraft mit K bezeichnet, so hat die Zahl 0,00277 die Dimension $T^2 L^5 K^{-2}$; sie ändert sich also in 0,27569.

810. Nennt man K die Dimension der Kraft, so findet man für die Zahlen 7, 40 und 0,06 der empirischen Gleichungen die Dimensionen $L^{1/2}$, $K T^{-1}$ und $K^{-1/2} L T^{1/2}$.

Man erhält also die Dimensional-Gleichungen:
$$7 \,.\, \mathrm{met}^{1/2} = x \,.\, \mathrm{Fuß}^{1/2},$$
$$40 \,.\, \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{Stunde}^{-1} = y \,.\, \mathrm{Pfund} \,.\, \mathrm{Stunde}^{-1},$$
$$0{,}06 \,.\, \mathrm{kg}^{-1/2} \,.\, \mathrm{met} \,.\, \mathrm{Stunde}^{1/2} = z \,.\, \mathrm{Pfund}^{-1/2} \,.\, \mathrm{Fuß} \,.\, \mathrm{Stunde}^{1/2},$$
woraus die neuen Gleichungen folgen
$$h^F = \left(\frac{12{,}5\, B}{88 + B}\right)^2,$$
$$d^F = 0{,}13 \sqrt{B}.$$

811. Nennt man K die Dimension der Kraft, so ergeben sich für die Zahlen 0,045 und 0,5 die Dimensionen $K^{-1/2} L$ und L. Man erhält die Dimensional-Gleichungen:
$$0{,}045\ \mathrm{kg}^{-1/2} \,.\, \mathrm{cm} = x \,.\, \mathrm{Pfund}^{-1/2} \,.\, \mathrm{Zoll},$$
$$0{,}5\ \mathrm{cm} = y\ \mathrm{Zoll},$$
woraus die neue Gleichung folgt
$$d^z = 0{,}012 \sqrt{P} + 0{,}2.$$

812. Die Dimensionen von v, B, R, r sind: $L T^{-1}$, $K T^{-1}$, L^2 und $L^3 K^{-1}$; daher hat die Zahl 3600 keine Dimension, sie ändert sich also überhaupt nicht.

813. Die Gleichung enthält vier verschiedene Längeneinheiten: mm, cm (in Atmosphäre), dcm (in Liter) und m. Nennt man diese der Reihe nach

$$L_3 : L_2 : L_1 : L = 1 : 10 : 10^2 : 10^3$$

und K die Einheit der Kraft (Kilogramm), so wird die Dimensional-Gleichung

$$f \cdot \frac{L_3{}^2}{L^2} = 15 \sqrt{\frac{v \cdot L_1{}^3}{p_0\, K\, L_2{}^{-2}}}$$

oder
$$f = 15 \sqrt{\frac{v}{p_0}} \cdot L^2\, L_1{}^{3/2}\, L_2\, L_3{}^{-2}\, K^{-1/2}.$$

Die Zahl 15 hat also die Dimension

$$L^{-2}\, L_1{}^{-3/2}\, L_2{}^{-1}\, L_3{}^2\, K^{1/2}.$$

Will man sämtliche Größen in der Gleichung auf met. beziehen, so ist

$$15 \cdot L^{-2}\, L_1{}^{-3/2}\, L_2{}^{-1}\, L_3{}^2 = x \cdot L^{-2}\, L^{-3/2}\, L^{-1}\, L^2,$$

woraus
$$x = 15 \cdot 10^{-5/2}.$$

Will man sie hingegen auf mm beziehen, so wird

$$15 \cdot L^{-2}\, L_1{}^{-3/2}\, L_2{}^{-1}\, L_3{}^2 = y \cdot L_3{}^{-2}\, L_3{}^{-3/2}\, L_3{}^{-1}\, L_3{}^2$$

und
$$y = 15 \cdot 10^{-10}.$$

Die Gleichung lautet also dann

$$f = 0{,}015 \sqrt{\frac{10\,v}{p_0}} \quad \text{und} \quad f = 15 \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{v}{p_0}}.$$

814. In der Gleichung kommen zwei Krafteinheiten (Kilogramm und Tonne) und zwei Längeneinheiten (Kilometer und Meter) vor; außerdem soll die Zeiteinheit (Stunde) durch eine andere (Sekunde) ersetzt werden. Zwischen diesen Einheiten bestehen die Beziehungen:

$$K_1 = 1000\,K, \quad L_1 = 1000\,L, \quad T_1 = 3600\,T.$$

Die Dimension von 0,0052 ist

$$\frac{K}{K_1\, L^2} \cdot \frac{T_1{}^2}{L_1{}^2}.$$

Die neue Zahl k für einheitliche Einheiten muß also der Gleichung genügen:

$$0{,}0052 \cdot \frac{K}{K_1\, L^2} \cdot \frac{T_1{}^2}{L_1{}^2} = k \cdot \frac{K}{K\, L^2} \cdot \frac{T^2}{L^2},$$

woraus
$$k = 67\,392 \cdot 10^{-9}.$$

815. Der Widerstand ist eine Kraft und hat als solche die Dimension MLT^{-2}; die Fläche der Scheibe hat die Dimension L^2, die Dichte der Luft ML^{-3}, die Geschwindigkeit LT^{-1}. Man schreibe also die Dimensionalgleichung an:

$$MLT^{-2} = (L^2)^x.\ (ML^{-3})^y.\ (LT^{-1})^z.$$

Man erhält daraus: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$, d. h.

Widerstand $= \zeta$. Fläche. Dichte. (Geschwindigkeit)^2.

816. Die Leistung hat die Dimension ML^2T^{-3}, die Winkelgeschwindigkeit T^{-1}, die Luftdichte ML^{-3}. Die Dimensionalgleichung lautet dann:

$$ML^2T^{-3} = L^x\,(T^{-1})^y.\ (ML^{-3})^z.$$

Man erhält daraus: $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$, d. h.

Leistung der Luftschraube $= \zeta$. (Halbmesser der Schraubenflügel)^5.
(Winkelgeschwindigkeit)^3. Dichte.