



DRANG und ZWANG

EINE HÖHERE FESTIGKEITSLEHRE FÜR INGENIEURE

VON

Dr., Dr.-Ing. AUG. FÖPPL und Dr. LUDWIG FÖPPL

ZWEITER BAND
Zweite Auflage

VERLAG VON R. OLDENBOURG, MÜNCHEN und BERLIN, 1928

А. ФЕННЛЬ и Л. ФЕННЛЬ

СИЛА И ДЕФОРМАЦИЯ

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ТОМ ВТОРОЙ

перевод со второго
немецкого издания
В. М. Абрамова
под редакцией проф.
Г. Э. Проктора

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ИКТИ СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ПОМОГРАФИИ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

ТЭ-5-4
ТКК № 89

Редакция *Г. А. Вольперта.*

Оформление *С. Л. Дыман*

Изд. № 114. Тираж 5 000 экз. Заказ поступил с матриц 13/VI 1936 г. Подп. в печ. 16/VI 1936 г. Форм. бум. 62 × 94. Уч.-авт. л. 30. Бум. л. 12. Печ. зн. в бум. листе 101 000. Зак. 988. Уполном. Главл. № В-37062. Выход в свет июль 1936 г.

3-я тип. ОНТИ

Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА КО ВТОРОМУ ТОМУ.

Выход из печати второго тома книги А. Феппля и Л. Феппля задержался настолько, что первоначальные предположения о помещении ряда дополнительных статей по актуальнейшим вопросам теории упругости, которые не были достаточно освещены в этой книге в их современном состоянии, как, например, по теории совместного кручения и изгиба, по теории расчета оболочек и т. п., стали в значительной мере менее обоснованными вследствие появления за истекший с момента выхода первого тома период времени большого количества капитальной переводной и оригинальной литературы по упругости.

Следует отметить выход в свет переводов статей Трефтца, Пфейфера, Геккелера из VI тома немецкой «Handbuch der Physik», классического труда Лява «Математическая теория упругости», курса С. П. Тимошенко и ряда оригинальных монографий: проф. Н. И. Мусхелишвили (два издания), проф. Г. В. Колосова, ряда курсов по теории упругости для инженеров: проф. М. М. Филоненко-Бородича, С. В. Серенсена, А. И. Дымова, ряда монографий по теории расчета тонких плит (пластинок): акад. Б. Г. Галеркина, проф. Ю. А. Шиманского и др., в которых целый ряд вопросов, которые предполагалось осветить в дополнительных статьях, разработан полнее. Тем не менее мы сочли необходимым приложить в конце книги, в дополнение к § 78, изложения некоторых более строгих работ по весьма злободневному вопросу о центре изгиба, вопросу, по которому до сего времени нет еще единых, установившихся воззрений. Для того чтобы выдержать единство трактовки этого приложения с трактовкой, принятой авторами настоящей книги в главе о кручении, нам пришлось значительно переработать изложения оригинальных работ.

Кроме того, мы сочли нужным снабдить книгу лишь наиболее необходимыми библиографическими дополнениями из числа тех, которые появились за последние 1—1½ года после выхода в русском переводе (с английского) чрезвычайно богатой библиографическими ссылками книги проф. Тимошенко «Теория упругости», 1933.

Необходимо все же заметить, что, несмотря на сравнительное обилие книг, изданных за последнее время по теории упругости и притом в большинстве случаев представляющих собой классические сочинения, издание книги «Сила и деформация» А. Феппля и Л. Феппля ни в какой мере не потеряло своего значения по следующим соображениям.

Август Феппл, под живым общим руководством которого была написана эта книга, являлся на континенте крупнейшим педагогом в области технической механики конца прошлого и начала этого столетия. Поэтому все его работы в упомянутой области, из которых наиболее замечательны III и VI томы его «Technische Mechanik» и «Сила и деформация», проникнуты стремлением дать, с одной стороны, в достаточной мере строгие, но в то же время и возможно более эффективные методы решения наи-

более важных инженерно-теоретических задач, а с другой стороны, — развить в читателе-инженере глубокое механическое и физическое понимание постановки проблемы и задачи, отчетливое представление законности делаемых допущений, яркое понимание механического смысла различных методов решения задачи и, наконец, развить привычку установления границ и пределов применимости полученных результатов. Если в некоторых местах и пришлось несколько дополнить или исправить небольшие недочеты, неизбежные при проделанной авторами значительной переработке обычного изложения курсов теории упругости, то тем не менее нужно признать книгу весьма ценной с педагогической точки зрения. Книга, являясь как бы пропедевтическим курсом к математической теории упругости, послужит для наших инженеров прекрасным пособием для подготовки к чтению классических работ Лява, Колосова, Мухелишвили и др.

В основном, добавления и некоторые более серьезные исправления текста выносились в форме примечаний. Так, например, в задаче о кручении круглого кольца с тонкой стенкой постоянной толщины (стр. 94), в задачах об устойчивости круглой пластинки, об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок и др., изменения вынесены из текста. Лишь в двух случаях: в § 72 о кручении многосвязных тонкостенных контуров и в § 74 о точном решении задачи о кручении секториального сечения, изменения сделаны в самом тексте с соответственными оговорками. При этом в последней задаче (в § 74), в целях придания большей строгости изложению работы академика А. Н. Динника, сделанному авторами книги, нам пришлось переработать большую часть этого параграфа, дополнив его также некоторыми новыми результатами, полученными В. С. Лысковым. Мы стремились также по возможности держаться ближе к оригинальному тексту и ближе передать самый характер его.

Наконец, нельзя не отметить еще некоторых затруднений в отношении выбора терминологии и обозначений в тех случаях, в которых в русской литературе по теории упругости они еще не вполне установились. В большинстве случаев эта терминология увязана с предложениями, сделанными комиссией по терминологии при Всесоюзной академии наук (например: центр кручения, центр изгиба, собственные напряжения, погонный угол закручивания и пр.). В то же время мы вынуждены были ввести и несколько необычные термины, например, в аналогии Прандтля — термин «холм напряжений», за отсутствием более удобного и столь же яркого термина; термин «работа упругих сил» применялся нами преимущественно в тех случаях, когда речь шла главным образом о работе сил действия отброшенных частей тела на элемент, выделенный из него (например, о работе напряжений, изгибающих моментов, перерезывающих и нормальных сил, являющихся после выделения элемента для него уже внешними); когда же речь шла о соответственной работе, выраженной через деформации, то мы применяли термин «работа деформации», и, наконец, если имелась в виду вся работа внешних сил, приложенных к упругому телу или системе тел, накопленная в обратимой форме, мы применяли термин «потенциальная энергия».

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ.

Второе издание мне пришлось подготовить к печати самостоятельно ввиду смерти моего отца Августа Феппля в августе 1924 г. Со времени выхода в свет первого издания в 1920 г. в прикладной теории упругости появилось столь много нового, что потребовались значительные изменения. В особенности это относится к первым двум главам об оболочках и о кручении стержней, которые частью написаны заново, а частью значительно дополнены. Стремясь не столько увеличить объем книги, сколько уменьшить его, я отдельные параграфы первого издания сократил или даже совсем выпустил в тех случаях, когда это мне казалось возможным без существенного ущерба для целого.

В новом издании мною приняты во внимание многие ценные критические замечания, сделанные по поводу этой книги. Из числа многих критиков я назову Филлунгера (Fillunger), Прагера (Prager), Тимошенко и Трефтца (Treffitz), которым я должен выразить здесь мою благодарность за их указания. При обработке всего материала я внес много нового не только в изложение, но и в отношении связи одних отделов с другими. Читатель, знакомый с первым изданием, сам найдет соответствующие места. Я старался переработать книгу в духе умершего соавтора и надеюсь, что новое издание снова будет иметь много читателей и приобретет новых друзей.

Людвиг Фепплъ.

Мюнхен, январь 1928 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>
Предисловие редактора русского перевода ко второму тому	5
Предисловие ко второму немецкому изданию	7

ПЯТАЯ ГЛАВА.

ОБОЛОЧКИ.

§ 58. Напряжения в тонкостенных сосудах, находящихся под внутренним давлением	14
Равновесие элемента оболочки	15
Напряжения в оболочке	16
Кольцо эллиптического сечения под внутренним давлением	18
§ 59. Безмоментная теория оболочки при симметричной и несимметричной нагрузке	22
Напряжения в шаровой оболочке, находящейся под действием собственного веса	22
Несимметрично нагруженная шаровая оболочка по Г. Рейснеру	26
Пример. Шаровая оболочка под давлением ветра	27
§ 60. Напряжения в трубе, наполненной водой и опирающейся своими краями	29
§ 61. Жесткая оболочка, имеющая ось симметрии	32
Равновесие элемента оболочки	32
Деформация	35
Связь между деформацией и напряжениями	37
§ 62. Решение для жесткой шаровой оболочки	38
Приближенное решение по Бауэрсфельду-Геккелеру	40
§ 63. Решение для жесткой цилиндрической оболочки	43
§ 64. Цилиндрическая оболочка с несимметрично нагруженными концами	46

ШЕСТАЯ ГЛАВА.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ.

§ 65. Теория Сен-Венана	48
Противоречие теории Навье с результатами опытов	49
Условия на контуре сечения	50
Точная и приближенная теории	51
Уравнения для перемещений	52
Эллиптическое сечение	54
Полое сечение	58

§ 66. Введение функции напряжений	58
Сечение в виде равностороннего треугольника	60
§ 67. Приближенные решения для прямоугольного сечения	62
Энергия деформации	62
Простейшая гипотеза для функции напряжений	63
Более общая гипотеза	65
§ 68. Гидродинамическая аналогия и аналогия Прандтля	66
Узкий прямоугольник	67
Формулы для напряжений и погонного угла закручивания	68
Мыльная пленка	71
Холм напряжений	73
Угловое сопротивление кручению	74
§ 69. Применение теоремы Стокса к задаче о кручении	77
Формула Р. Бредта	77
§ 70. Приближенные решения для прокатных профилей	78
Закругления во входящих углах	78
Зависимость повышения напряжений от радиуса кривизны	81
Предельный случай бесконечно узких прямоугольников	83
Формула для погонного угла закручивания	84
Простая формула для τ_{\max}	86
§ 71. Полые сечения	87
Связь теоремы Стокса с аналогией Прандтля	87
§ 72. Тонкостенные трубчатые стержни	91
Прямоугольное сечение с четырьмя стенками одинаковой толщины	92
Сечение с перегородкой	93
§ 73. Точное решение для прямоугольного сечения	95
Формулы для узкого прямоугольника	101
§ 74. Точное решение для кругового секторяльного сечения	102
Формулы для круглого сечения с радиальной трещиной	108
§ 75. Приближенная формула Сен-Венана для угла кручения	110
§ 76. Стержни с переменным сечением	111
Тела вращения	113
Усеченный конус	117
Сравнение с потоком жидкости (в продольном разрезе)	118
Концентрация напряжений в закруглении	121
Тонкостенные полые тела	122
§ 77. Кручение стержня эллиптического сечения при невозможности искривления поперечного сечения	123
Случай узкого эллипса	128
§ 78. Центр изгиба	130
Положение центра изгиба корытного сечения	131
Центр изгиба у несимметричного сечения	133
Касательные напряжения, создаваемые поперечной силой	136
Функция напряжений для этих касательных напряжений	136
Центр изгиба как центр вращения при кручении	138
§ 79. Пластическое равновесие в закрученном стержне	139
Обобщение аналогии с мыльной пленкой	141

СЕДЬМАЯ ГЛАВА.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ.

§ 80. Основные уравнения в цилиндрических координатах	143
Операторы (символы для обозначения операций) D , D^2 и E^2	147
§ 81. Пример. Круглый цилиндр, стянутый по боковой поверхности кольцевым давлением	149
Гипотеза для приближенного решения	151
§ 82. Различные обобщения предыдущего случая	158
Стяжное кольцо	159
Сдавливание цилиндра силами, приложенными к контуру основания	162
Полый цилиндр	162
Принцип Сен-Венана	163
§ 83. Определение местных напряжений в пластинке вблизи точки приложения сосредоточенной силы	163
Формула для σ_{\max}	171
§ 84. Точные решения	172
Сечения симметрично нагруженного тела вращения в общем случае не остаются плоскими	174
§ 85. Точное решение для круглого цилиндра, стянутого по боковой поверхности кольцевым давлением	176
Связь с решениями Файлона и Гиртлера	182
Гипотеза для фиг. 106	182
Элементарные решения	187
Анализ распределения напряжений	189
§ 86. Точное решение для цилиндра при действии касательных напряжений вдоль боковой поверхности	197
§ 87. Бесконечно большое тело вращения	204
Решение Буссинеска	205
Траектории напряжений	209
Совместное действие разных нагрузок	209
§ 88. Функция напряжений для тел вращения	212

ВОСЬМАЯ ГЛАВА.

ТВЕРДОСТЬ.

§ 89. Твердость как свойство тел	217
Метод испытания по Герцу	218
Определение твердости по Ауэрбаху и Фепплю	220
Определение твердости по Кону и Бринелю	221
§ 90. Давление шара на плитку	223
Формулы Герца	229
§ 91. Обобщение решения на другие случаи	231
Перекрещивающиеся цилиндры	231
Два шара любых радиусов	232
Сплошной и полый шары	233
§ 92. Напряженное состояние материала у площадки сжатия	234
Допускаемое напряжение «на твердость» много выше, чем на сжатие	239
Прочность в центре поверхности давления больше, чем на краях	242
Числовой пример	243

§ 93. Предположения о возможных обобщениях теории	245
---	-----

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА.

СОБСТВЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

§ 94. Определение и происхождение собственных напряжений	249
Температурные, литейные, остаточные напряжения	250
§ 95. Общие свойства собственных напряжений	251
Ненагруженному состоянию соответствует минимум энергии деформации.	253
Напряжения, производимые нагрузкой, не зависят от внутренних на-	
пряжений	255
§ 96. Исключительные случаи	256
Пример Прандтля	260
§ 97. Температурные напряжения	260
§ 98. Общее решение задачи об определении температурных напряже-	
ний в бесконечно большом теле	264
§ 99. Замечания к предыдущему решению	267
Распределение температурных напряжений	268
§ 100. Температурные напряжения в телах вращения	270
§ 101. Температурные напряжения в тонкостенной трубе	271
Условия на концах трубы	273
Старое приближенное решение А. Фепля	275
Решение при помощи теоремы о минимуме энергии деформации	275
Сравнение обоих решений	281
§ 102. Остаточные напряжения	282
Основные положения	284
§ 103. Остаточные напряжения, получающиеся при вращении вала круг-	
лого сечения	287
Диаграмма остаточных напряжений	289
§ 104. Остаточные напряжения при изгибе	294
Диаграмма для балки прямоугольного сечения	297

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА.

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ
НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ.

§ 105. Продольный изгиб стержней	298
Вывод эйлеровой критической силы на основании принципа возмож-	
ных перемещений	299
Повторение вывода в предположении, что линия изгиба представляет	
пологую параболическую дугу	303
Второй способ для вывода эйлеровой критической силы	304
§ 106. Критическая сила при других граничных условиях	306
Стержень, защемленный обоими или одним концом	306
Стержень, защемленный одним концом, при невозможности попереч-	
ного смещения другого конца	308

§ 107. Устойчивость сжатых пластинчат	314
Решение для прямоугольной пластинки при помощи принципа возможных перемещений	315
Решение для круглой пластинки	319
§ 108. Устойчивость плоской формы при изгибе	323
Устойчивость балки прямоугольного сечения	323
Вывод дифференциального уравнения устойчивости	326
Решение дифференциального уравнения	327
Величина критической силы для балки, защемленной одним концом	328
Другие граничные условия	330
Нагрузка концов балки одними моментами	331
Влияние собственного веса балки на устойчивость	334
§ 109. Устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки	335
Влияние нормальных напряжений в горизонтальных полках	336
Величина угла закручивания	338
Основное уравнение устойчивости изгиба двутавровой балки	340
Двутавровая балка, защемленная одним концом и нагруженная на другом	343
Числовой пример	346
§ 110. Двутавровая балка, нагруженная силой посередине	349
Числовой пример	352
§ 111. Приближенное решение задач об устойчивости при помощи упругой шарнирной цепи по Г. Генки	354
Вычисление критической силы для прямого стержня прямоугольного сечения, защемленного одним концом	356
Устойчивость двухшарнирной рамы	358
§ 112. Общая теория устойчивости равновесия оболочек	358
Энергия деформации оболочки и применение принципа возможных перемещений	359
Принятие во внимание бесконечно малых деформаций до 2-го порядка включительно	361
Члены в выражении энергии деформации, зависящие от растяжения и изгиба	362
Деформация, не сопровождаемая растяжением срединной оболочки	363
§ 113. Устойчивость цилиндрической оболочки, равномерно сжатой в направлении образующих	366
Величина критической силы	369
Зависимость числа волн от размеров цилиндра	370
Условия для потери устойчивости до перехода за предел упругости	372
Продольный изгиб цилиндра как целого	372
§ 114. Некоторые другие работы по устойчивости оболочек	373
Цилиндр под действием постоянного наружного давления по Р. Мизесу	374
Зависимость числа волн от размеров цилиндра	375
Устойчивость шаровой оболочки под действием баружного давления по Р. Целли	376
§ 115. Устойчивость круглого кольца	378
Дополнение: 0 центре изгиба (Г. Э. Проктор)	385

ПЯТАЯ ГЛАВА

ОБОЛОЧКИ.

В теории упругости оболочкой называют тело, имеющее вид пластинки, ограниченной криволинейными поверхностями, толщина которой в сравнении с остальными размерами тела мала. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью. Оболочка вполне определена, если указана форма этой срединной поверхности и толщина в каждом месте оболочки. Срединная поверхность может иметь любую форму; в случае плоской формы оболочка переходит в пластинку, теория которой уже изложена нами подробно в третьей главе. На практике обычно приходится иметь дело лишь с такими оболочками, срединная поверхность которых представляет поверхность вращения. Только такие оболочки мы и будем здесь рассматривать. В свою очередь из оболочек, имеющих срединной поверхностью поверхность вращения, наиболее важными являются шаровая, коническая и цилиндрическая оболочки.

В теории оболочек на основании особенностей их формы делают следующие два упрощения. Во-первых, ввиду незначительной толщины оболочки нормальные напряжения в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности оболочки, не рассматривают и, во-вторых, относительно деформации предполагают, что точки, находившиеся до деформации на перпендикуляре к срединной поверхности, после деформации будут также находиться на прямой, перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. Проведя такие перпендикуляры через две близкие точки срединной поверхности до и после деформации, мы увидим, что это допущение вместе с законом Гука определяет распределение напряжений по сечению, перпендикулярному к срединной поверхности, а именно: напряжения, равномерно распределенные по толщине и зависящие от растяжения оболочки, складываются с напряжениями от изгиба, распределенными по толщине по закону прямой линии.

Вследствие предполагаемой нами осевой симметрии оболочки важную роль играют меридиональные и круговые сечения срединной поверхности плоскостями, проходящими через ось симметрии и перпендикулярными к ней. Двумя близкими меридианами и двумя параллельными кругами, получающимися в пересечении срединной поверхности плоскостями, проходящими через ось симметрии и перпендикулярными к оси, определится элемент оболочки, для которого мы и выведем условия равновесия. Границами элемента будут не сами секущие плоскости, проходящие через круги параллелей, а конические поверхности, перпендикулярные к средин-

ной поверхности и имеющие с этими плоскостями общие линии пересечения с срединной поверхностью.

Вышеуказанные упрощения, делаемые при определении напряжений в оболочках, основаны на особенностях формы оболочек. Кроме них при известных условиях могут быть сделаны и другие существенные упрощения. Если в силу заданных граничных условий не происходит изгиба оболочки, так что в меридиональных сечениях и в сечениях коническими поверхностями получатся лишь нормальные напряжения, равномерно распределенные по толщине, и нет напряжений от изгиба, то в этом случае так называемого чистого растяжения или сжатия энергия деформации сравнительно незначительна. По теореме о минимуме энергии деформации мы всегда будем иметь одно растяжение, если оно совместимо с условиями равновесия и с граничными условиями. В противном случае на основании той же теоремы можно заключить, что напряжения от изгиба оболочки, получающегося в силу граничных условий, например вследствие защемления краев, должны по мере удаления от краев очень быстро уменьшаться, так что на некотором расстоянии от краев снова получится одно растяжение. Отсюда мы видим, какое значение имеет случай действия в оболочке одних нормальных напряжений, распределенных равномерно по толщине (напряжения типа получающихся в мембранах — «Membranspannungen»). Особенно важное значение этот случай имеет для тонких оболочек, сопротивление которых изгибу незначительно. Мы сперва займемся случаем действия одних нормальных напряжений, равномерно распределенных по толщине, и лишь затем обратимся к теории изгиба оболочек.

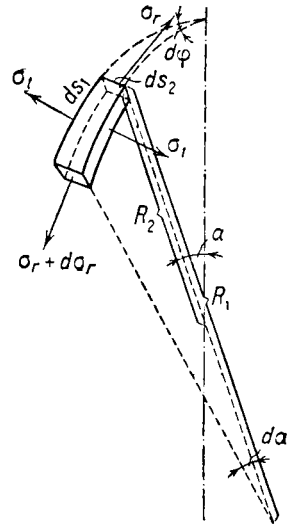
§ 58. Напряжения в тонкостенных сосудах, находящаяся под внутренним давлением. Особенно просто решается задача об определении напряжений в тонкостенных сосудах, находящихся под внутренним или внешним давлением, например в оболочке воздушного шара, когда внешние силы перпендикулярны к стенке сосуда. Ввиду незначительности толщины стенки можно считать, что напряжения распределяются по толщине стенки равномерно.

Мы обратимся сразу к наиболее важному для практики случаю сосуда, имеющего ось симметрии, и двумя близкими меридиональными сечениями и сечениями по конической поверхности вырежем из стенки оболочки бесконечно малый элемент. Нормальные напряжения σ_r и σ_θ , действующие в этих сечениях (фиг. 66), должны уравниваться давлением p , действующим на стенку элемента.

Давление p , нормальное к внутренней поверхности стенки сосуда, мы будем считать постоянным, хотя зависимость p от a не намного усложнила бы дальнейшие вычисления. Так как внешние силы не имеют составляющих, касательных к стенке сосуда, то на боковых гранях рассматриваемого элемента оболочки не могут действовать касательные напряжения, перпендикулярные к стенке. Вследствие симметрии на гранях элемента вообще не могут действовать касательные напряжения в других направлениях, так что напряжение σ_r и меридиональное напряжение σ_θ являются главными напряжениями.

Обозначим постоянную толщину стенки через h , радиус кривизны меридиональной кривой через R_1 , а другой главный радиус кривизны

поверхности вращения, начерченный на фиг. 66, через R_2 . Условие равновесия сил, действующих на элемент оболочки в направлении, перпендикулярном к поверхности оболочки, даст, что результирующая напряжений, действующих на гранях элемента, должна уравниваться давлением p , производимым средою на внутреннюю поверхность. Меридиональные напряжения σ_r , действующие на двух гранях с коническими поверхностями, дадут вместе результирующую $\sigma_r h ds_2 da$, направленную вдоль нормали к срединной поверхности оболочки. При этом мы можем не обращать внимания на разность $d\sigma_r$ между напряжениями на этих двух гранях, так как в сравнении с другими величинами, входящими в условие равновесия, соответствующий член представляет бесконечно малую величину более высокого порядка.



Фиг. 66.

Результирующая напряжений, действующих в двух меридиональных сечениях, имеет величину $\sigma_r h ds_1 d\varphi$, если через $d\varphi$ обозначить угол, заключенный между меридиональными плоскостями, и направлена перпендикулярно к оси вращения, так что нужная нам составляющая в направлении нормали к поверхности оболочки получается путем умножения на $\sin \alpha$. Тогда условие равновесия будет выражаться следующим образом:

$$\sigma_r h ds_2 da + \sigma_t h ds_1 d\varphi \sin \alpha = p ds_1 ds_2.$$

Если принять во внимание равенства:

$$ds_1 = R_1 da \quad \text{и} \quad ds_2 = r d\varphi = R_2 \sin \alpha d\varphi,$$

где через r обозначено расстояние по нормали от оси симметрии, то из условия равновесия путем деления на $ds_1 ds_2 h$ мы получаем:

$$\frac{\sigma_r}{R_1} + \frac{\sigma_t}{R_2} = \frac{p}{h}. \quad (1)$$

Второе уравнение, связывающее σ_r и σ_t , можно получить, рассматривая равновесие сил, действующих на элемент оболочки в направлении касательной к меридиональной кривой. Так как внешняя сила касательной составляющей не имеет, то условие равновесия будет выражаться только через напряжения.

При перемещении по меридиану на ds_1 получится приращение меридионального напряжения $d\sigma_r$. В направлении возрастания α меридиональные напряжения дадут приращение $\frac{d(\sigma_r r)}{ds_1} \cdot h d\varphi ds_1$, а составляющая результирующей напряжений σ_t , действующих на обоих меридиональных сечениях,

будет равна $\sigma_t h ds_1 d\varphi \cos \alpha$ и у элемента оболочки, начерченного на фиг. 66, будет направлена в сторону уменьшения α , так что условие равновесия будет выражаться уравнением:

$$\frac{d(\sigma_t r)}{ds_1} h d\varphi ds_1 - \sigma_t h ds_1 d\varphi \cos \alpha = 0.$$

Отсюда, деля на $h ds_1 d\varphi$ и выражая ds_1 через другие величины, получаем:

$$\frac{d(\sigma_t r)}{d\alpha} = \sigma_t R_1 \cos \alpha.$$

Если вместо $\sigma_t R_1$ подставить его выражение из уравнения (1) и умножить рассматриваемое уравнение на $\sin \alpha$, то получается:

$$\sin \alpha \frac{d(\sigma_t r)}{d\alpha} + \sigma_r r \cos \alpha = \frac{p}{h} R_1 r \cos \alpha.$$

Но левая сторона этого уравнения представляет производную $\sigma_r r \sin \alpha$ по α . Интегрирование по α в пределах между постоянным значением α_0 и переменным α дает:

$$\sigma_r r \sin \alpha - (\sigma_r r \sin \alpha)_0 = \frac{p}{h} \int_{\alpha_0}^{\alpha} R_1 r \cos \alpha d\alpha.$$

Так как

$$R_1 \cos \alpha d\alpha = \cos \alpha ds_1 = dr,$$

то получается:

$$\sigma_r r \sin \alpha - (\sigma_r r \sin \alpha)_0 = \frac{p}{2h} (r^2 - r_0^2). \quad (2)$$

Если это равенство мы умножим еще на $2\pi h$, то оно будет выражать равновесие пояса конечной ширины, вырезанного из всей оболочки двумя параллельными кругами, соответствующими значениям α и α_0 . Действительно, на левой стороне рассматриваемого равенства стоит разность результирующих меридиональных напряжений, действующих на двух параллельных кругах, а справа стоит часть полного внутреннего давления, приходящаяся на этот пояс оболочки, именно $p\pi(r^2 - r_0^2)$. Если оболочка в вершине при $\alpha_0 = 0$ смыкается, как это соответствует сосуду, находящемуся под внутренним давлением, то в последнем равенстве выпадают как $(\sigma_r r \sin \alpha)_0$, так и r_0 , и для σ_r получается формула:

$$\sigma_r = \frac{pr}{2h \sin \alpha}, \quad (2a)$$

или

$$\sigma_r = \frac{p}{2h} R_2.$$

Формулы (1) и (2) полностью определяют напряжения в оболочке. Именно для σ_t получается выражение:

$$\sigma_t = \frac{p}{h} \cdot R_2 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right). \quad (1a)$$

Между прочим, обращаем внимание читателя на то, что путем надлежащего выбора радиуса кривизны R_1 меридиональной кривой можно добиться, чтобы напряжение σ_t обращалось в нуль. Формула (1a) для $\sigma_t = 0$ дает условие:

$$R_2 = 2R_1.$$

Эта зависимость между главными радиусами кривизны приводит к особой форме упругой линии для образующей меридиональной кривой поверхности вращения. Если это условие для радиусов кривизны R_1 и R_2 выполняется лишь в отдельных точках меридиана, то и напряжение σ_t будет обращаться в нуль только в этих точках, причем к числу этих точек относятся те, в которых напряжение σ_t при перемещении вдоль меридиана изменяет знак. В случае тонкостенных сосудов, находящихся под внутренним давлением, в областях отрицательных напряжений σ_t получается сминание стенки, что обнаруживается в образовании складок.

По поводу формулы (2a) следует заметить, что ее можно было бы вывести, не пользуясь дифференциальным уравнением, а проведя через сосуд секущую плоскость, перпендикулярную к оси симметрии ¹⁾, и рассматривая равновесие отсеченной части. Меридиональные напряжения σ_r , действующие в этом сечении по параллельному кругу радиуса r , должны уравновешиваться давлением, производимым жидкостью на площади круга и имеющим величину $r^2\pi p$. Это условие дает равенство:

$$\sigma_r \cdot 2\pi r h \sin \alpha = r^2\pi p,$$

совпадающее с формулой (2a).

Если меридиональная кривая оболочки загибается в обратную сторону ²⁾, так что кривая соответствует форме сосуда, показанной на фиг. 67, то для определения значения меридионального напряжения на параллельном круге AA' , плоскость которого пересекает оболочку еще по второму кругу BB' , придется обратиться к формуле (2). Если эту формулу применить к поясу оболочки, меридиональные сечения которого изображаются кривыми AC и $A'C'$, причем касательные к меридиональной кривой в точках C и C' горизонтальны, то так как $\alpha_0 = 0$, получается:

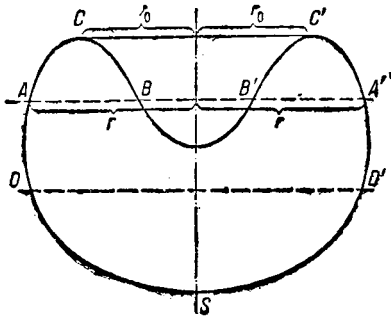
$$\sigma_r = \frac{p}{2h} \cdot \frac{r^2 - r_0^2}{r \sin \alpha}. \quad (2b)$$

На основании этого можно вывести заключение, что сосуд формы, изображенной на фиг. 67, не может находиться под внутренним давлением в состоянии равновесия, если стенки сосуда не обладают известной жесткостью в смысле сопротивления изгибу. В этом случае вычисление меридионального напряжения σ_r на параллельном круге DD' даст два совершенно различных значения в зависимости от того, применим ли мы формулу (2a) к поясу оболочки $CD - C'D'$ или же рассмотрим равновесие нижней части сосуда, отсекаемой параллельным кругом DD' . В последнем случае значение σ_r получилось бы по формуле (2b) при $r_0 = 0$. Поэтому

¹⁾ Вернее, проведя коническую поверхность, нормальную к срединной поверхности. *Прим. перев.*

²⁾ Автор применяет здесь термин «точка возврата», который в математике имеет совершенно другой смысл. *Прим. перев.*

мы можем вывести заключение, что такой сосуд, не обладающий сопротивлением изгибу, при постоянном внутреннем давлении своей формы не сохраняет, а деформируется до тех пор, пока все плоскости, перпендикулярные к оси вращения, не начнут пересекать сосуд только по одному параллельному кругу. Каким образом этот процесс будет происходить, мы этим заниматься не будем; также не будем заниматься и вопросом, возможна ли при этом деформация без образования складок. Формула (2b) остается в силе также и в случае не односвязного, как на фиг. 67, а многосвязного пространства, например в случае



Фиг. 67.

кольцевой оболочки, находящейся под внутренним давлением. В этом случае кольцо двумя плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, будет пересекаться по двум кругам. Чтобы получить меридиональные напряжения на таком круге, нужно рассмотреть равновесие пояса оболочки, заключенного между соответствующим параллельным кругом и одной из двух плоскостей, соприкасающихся с кольцом по кругу радиуса r_0 . Чтобы значения меридиональных напряжений не получились,

когда мы будем брать ту или другую касательную плоскость, разными, радиус r_0 обоих кругов должен быть одинаковым. Вообще можно показать, что для сохранения кольцом, находящимся под внутренним давлением, своей формы, меридиональная кривая кольца должна иметь ось симметрии, перпендикулярную оси вращения.

Для такого кольца мы можем воспользоваться формулой (2b), при помощи которой по формуле (1) для напряжения σ_t получим значение:

$$\sigma_t = R_2 \left(\frac{p}{h} - \frac{p}{R_1 \sin \alpha} \cdot \frac{r^2 - r_0^2}{2hr} \right), \quad (3)$$

так что напряжения в кольце можно определить по этим двум формулам, не зная деформаций сосуда.

В качестве примера мы возьмем замкнутое кольцо из трубки эллиптического сечения, находящейся под постоянным внутренним давлением. Пусть большая ось $2a$ меридионального сечения будет параллельна оси вращения, которую примем за ось z (фиг. 68), так что уравнение эллиптического меридионального сечения будет иметь вид:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{(r - r_0)^2}{b^2} = 1.$$

Чтобы вычислить, пользуясь этим уравнением, R_1 , R_2 и $\sin \alpha$, входящие в формулы (2b) и (3), мы вычислим сперва:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{dr}{dz} = -\frac{b^2 z}{a^2 (r - r_0)} = -\frac{b^2}{a (r - r_0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{(r - r_0)^2}{b^2}}; \\ \frac{d^2 r}{dz^2} &= -\frac{b^2}{a^2 (r - r_0)} - \frac{b^2 z}{a^2 (r - r_0)^2} \cdot \frac{b^2 z}{a^2 (r - r_0)} = -\frac{b^4}{a^2 (r - r_0)^3}. \end{aligned}$$

Это нам даст:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a(r-r_0)}{\sqrt{(a^2-b^2)(r-r_0)^2+b^4}}, \\ R_2 &= \frac{r}{a(r-r_0)} \sqrt{(a^2-b^2)(r-r_0)^2+b^4}, \\ R_1 &= \frac{[(a^2-b^2)(r-r_0)^2+b^4]^{3/4}}{ab^2},\end{aligned}$$

и путем подстановки этих выражений в формулы (2b) и (3) мы получаем напряжения:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p(r+r_0)}{2ahr} \sqrt{(a^2-b^2)(r-r_0)^2+b^4}, \\ \sigma_t &= \frac{p}{2ah} \cdot \frac{2r(a^2-b^2)(r-r_0)+b^4}{\sqrt{(a^2-b^2)(r-r_0)^2+b^4}}.\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В то время как меридиональное напряжение σ_r при всех условиях положительно, следовательно, производит растяжение, напряжение σ_t может принимать и отрицательные значения. Так как $a > b$, то числитель в выражении для σ_t при $r=r_0-b$ будет иметь наименьшее значение; поэтому

$$-2(r_0-b)(a^2-b^2)b+b^4 > 0$$

или

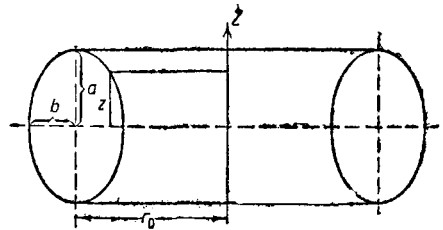
$$r_0 < b \cdot \frac{2a^2-b^2}{2(a^2-b^2)} \quad (5)$$

дает условие для радиуса r_0 , необходимое для того, чтобы не получалось сжимающих напряжений, противостоять действию которых тонкие оболочки вообще не могут. Если меридиональное сечение кольца представляет эллипс с большой осью, расположенной перпендикулярно оси вращения, так что $a < b$, то вместо неравенства (5) получается неравенство:

$$r_0 < b \frac{2a^2-b^2}{2(b^2-a^2)}. \quad (6)$$

В то время как в первом случае, когда большая ось эллипса была параллельна оси вращения, сжимающие напряжения при достаточно большом r_0 получались на внутренней стороне кольца при $r < r_0$, во втором случае, когда большая ось расположена перпендикулярно к оси вращения кольца, сжимающие напряжения получатся на наружной стороне при $r > r_0$, если r_0 не удовлетворяет неравенству (6).

Из этого видно, что цилиндрическая трубка эллиптического сечения, для которой в предыдущих формулах нужно положить $r_0 = \infty$, при постоянном внутреннем давлении сохранять свою форму не может. Напряжения σ_t , как показывают формулы (4), были бы в этом



Фиг. 68.

случае бесконечно большими. Такая цилиндрическая трубка эллиптического сечения бесконечной длины, для концов которой граничные условия отпадают, вследствие отсутствия напряжений от изгиба, переходит при действии постоянного внутреннего давления в трубку круглого сечения.

Мы еще напишем здесь формулы для напряжений в кольцевой оболочке круглого сечения, которые получатся по формулам (4), если в них положить $b = a$. Это нам дает:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a}{2h} \cdot \frac{r + r_0}{r} \cdot p, \\ \sigma_t &= \frac{a}{2h} p, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

так что напряжения σ_t во всех точках кольцевой оболочки одинаковы. По формулам (7) для круглой кольцевой оболочки напряжения в цилиндрической оболочке круглого сечения получаются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a}{h} p, \\ \sigma_t &= \frac{a}{2h} p. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Следовательно, в цилиндрической трубке круглого сечения меридиональные напряжения в два раза больше напряжений, действующих в направлении образующей цилиндра. Этот результат относится к цилиндрической трубке, закрытой на обоих бесконечно удаленных концах и находящейся под действием постоянного внутреннего давления p , вследствие чего в цилиндрической стенке и возникают продольные напряжения соответствующей величины.

В случае как круглой кольцевой оболочки, так и круглой цилиндрической трубки, находящейся под внутренним давлением, возникают лишь растягивающие напряжения. В случае же наружного давления изменились бы лишь знаки напряжений, и вместо растягивающих всюду получились бы сжимающие напряжения, которые могут вызвать значительные деформации тонкостенных сосудов. Так как формулы, выведенные в этом параграфе, применяются не только к тонким оболочкам, но также и к оболочкам с сравнительно толстыми стенками, в которых могут действовать также касательные напряжения и нормальные напряжения от изгиба, то в последнем случае опасаться возникновения одних сжимающих напряжений не следует.

Опасным является, например, случай жаровых труб парового котла, подверженных действию значительного наружного давления. Как показывают простые соображения, деформация жаровой трубы производится главным образом нормальными напряжениями от изгиба. Само собой разумеется, что сечение жаровой трубы стремятся делать по возможности круглым, так как иначе наружное давление сделало бы трубу еще более сплюснутой, чем вначале. Для увеличения жесткости часто применяют усиливающие кольца или цилиндрическую стенку делают не гладкой, а придают ей волнистый профиль, так как волнистая стенка деформируется труднее гладкой цилиндрической стенки.

Деформация тонкостенных оболочек, имеющих ось симметрии и находящихся под внутренним давлением, определяется по напряжениям, которые мы можем вычислить независимо от деформаций и которые мы будем считать известными. Если мы относительные удлинения вдоль меридиана и параллельного круга обозначим через ϵ_r и ϵ_t , то будем иметь:

$$\epsilon_r = \frac{\Delta ds}{ds} \quad \text{и} \quad \epsilon_t = \frac{\Delta r}{r},$$

где через ds обозначен элемент меридиональной кривой. Связь между напряжениями и удлинениями по закону Гука дает следующие формулы для определения удлинений:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t \right), \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Так как σ_r и σ_t на основании формул (2а) или (2б) и (3) можно считать известными функциями от r , то мы можем определить и удлинения, причем вторая из формул (9) нам дает непосредственно и перемещения точек меридиональной кривой в радиальном направлении, в то время как перемещения в осевом направлении получаются из формул (9) путем несколько более сложных вычислений. Мы ограничимся лишь этим указанием, так как при возможности найти все напряжения, не рассматривая деформаций, определение деформаций в этой статически определимой задаче представляет мало интереса.

Следует еще заметить, что при переменной толщине h расчет можно производить таким же образом, как и при постоянной толщине. В этом случае вместо напряжений целесообразнее ввести результирующие их:

$$S_r = h\sigma_r; \quad S_t = h\sigma_t,$$

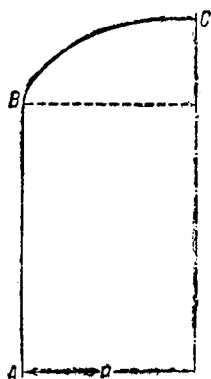
для которых формулы (1а) и (2а) переходят в следующие:

$$S_t = R_2 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1} \right), \quad (1б)$$

$$S_r = \frac{p}{2} R_2. \quad (2б)$$

Особого внимания заслуживает определение напряжений в тонкостенных сосудах, находящихся под внутренним или внешним избыточным давлением p , в особых (в смысле разрывности производных какого-либо порядка) точках меридиана. В качестве примера рассмотрим цилиндрический котел радиуса a с эллиптическим днищем по фиг. 69. В месте перехода B от цилиндрической поверхности к днищу кривизна меридиональной кривой испытывает скачок. Если радиусы кривизны меридиональной кривой в этом месте обозначить через R_1 и R_1' в зависимости от того, с какой стороны мы подходим к точке стыка, то формула (2а)

показывает, что σ_r в месте перехода изменяется непрерывно, так как и R_2 изменяется непрерывно, а σ_t вместе с R_1 делает скачок; именно по формуле (1a) в точке перехода



Фиг. 69.

$$\sigma_t = \frac{p}{h} R_2 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1} \right),$$

$$\sigma_t' = \frac{p}{h} R_2 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1'} \right),$$

откуда скачок напряжения σ_t получается равным:

$$\frac{\sigma_t' - \sigma_t}{\sigma_r} = R_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right).$$

При переходе цилиндрической части котла в днище (фиг. 69) $\frac{1}{R_1} = 0$, так что скачок получается большой. В действительности же такой скачок получиться не может, так как он несовместим с безусловно требуемой непрерывностью деформации. На самом деле в таком месте возникают нормальные напряжения от изгиба, которые, однако, в обоих направлениях быстро уменьшаются, так что на некотором расстоянии практически можно рассматривать лишь нормальные напряжения, распределенные по толщине равномерно.

59. Безмоментная теория оболочки при симметричной и несимметричной нагрузке.

Теория, изложенная в предыдущем параграфе, применяется также при приближенном определении напряжений в куполах. Но здесь нужно иметь в виду, что внешняя сила, действующая на элемент свода, ограниченный двумя близкими меридиональными сечениями и сечениями по коническим поверхностям, нормальным к срединной поверхности, вообще говоря, имеет нормальную составляющую, которую мы обозначим теперь через Z и положительное направление которой мы примем вниз, и касательную составляющую X .

Эти составляющие при переходе от одной точки к другой изменяются, как, например, это мы имеем в случае собственного веса купола. Будем считать, что составляющие X и Z отнесены к единице площади срединной поверхности оболочки. Для упрощения вычислений мы вместо общего случая оболочки с осью симметрии возьмем купол в форме шаровой оболочки радиуса a ; тогда формула (1) нам даст:

$$\sigma_r + \sigma_t = -\frac{Z}{h} a, \quad (10)$$

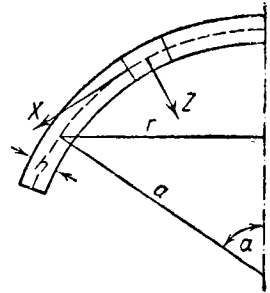
а вместо формулы (2) получается:

$$\sigma_r = \frac{a}{h \sin^2 \alpha} \left\{ - \int_0^\alpha (X \sin^2 \alpha + Z \sin \alpha \cos \alpha) d\alpha + C \right\}. \quad (11)$$

Последняя формула выражает не что иное, как равновесие между напряжениями и внешними силами, приложенными к той части оболочки, которая отсекается плоскостью, перпендикулярной к оси симметрии нагрузки.

Обозначения, принятые здесь, показаны на фиг. 70. Постоянная C должна быть выбрана таким образом, чтобы σ_r в вершине купола принимало конечное значение. X и Z следует считать заданными функциями от a ; так, например, если нагрузкой купола является собственный вес, то мы должны положить

$$X = \gamma h \sin \alpha \quad \text{и} \quad Z = \gamma h \cos \alpha,$$



Фиг. 70.

где через γ обозначен удельный вес материала.

При таких составляющих формула (11) переходит в следующую:

$$\sigma_r = \gamma a \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + C \frac{a}{\sin^2 \alpha}.$$

Для того чтобы σ_r при $a = 0$ не было бесконечным, мы должны положить:

$$C = -\gamma,$$

так что

$$\sigma_r = \frac{\gamma a}{\sin^2 \alpha} (\cos \alpha - 1), \quad (12)$$

и на основании формулы (10) выражение

$$\sigma_t = -\gamma a \left(\cos \alpha - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \quad (13)$$

даст нам напряжения в шаровой оболочке, нагруженной лишь собственным весом. В вершине купола значения напряжений будут:

$$(\sigma_r)_0 = (\sigma_t)_0 = -\frac{1}{2} \gamma a, \quad (14)$$

как это получается из формул (12) и (13) путем разложения $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ в ряды.

Если бы оболочка имела сверху круглое отверстие, то постоянная C в формуле (11) определилась бы из условия, что на этой границе напряжение σ_r обращается в нуль или принимает наперед заданное значение.

Само собой разумеется, что для действительности этого решения требуется, чтобы опорные реакции проходили в точности в направлении касательных к меридиональным кривым купола. Это граничное условие выполняется в точности у купола, имеющего форму полушария, которое опирается на горизонтальное основание. При другом граничном

условии, например, если края заземлены, получаются напряжения от изгиба, которые складываются с растягивающими напряжениями, распределенными по толщине равномерно.

Следует еще указать на то, что меридиональное напряжение σ_r на основании формулы (12) отрицательно и потому производит сжатие, а напряжения τ_t на основании формулы (13) в верхней части купола также отрицательны, в то время как при значении $\alpha = \alpha_0$, определяющемся из уравнения

$$\cos \alpha_0 = \sin^2 \alpha_0$$

и равном 52° , они обращаются в нуль и для больших значений α переходят в растягивающие. Наибольшее растягивающее напряжение получается у основания купола; в случае купола, имеющего форму полушария, оно составляет $\gamma \cdot a$.

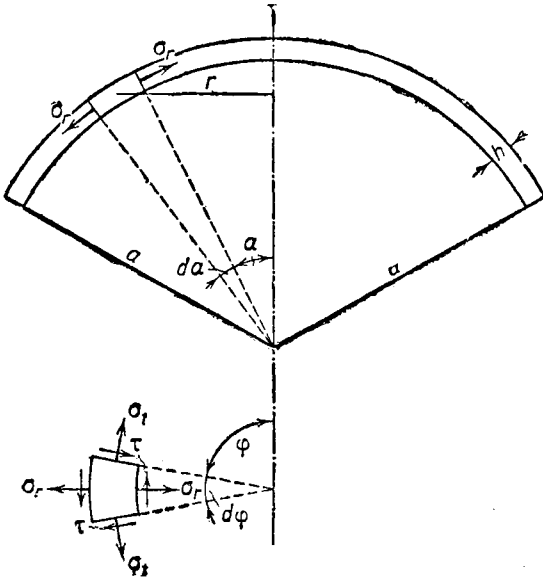
При помощи формул (10) и (11) нетрудно исследовать и другие случаи нагрузки шаровой оболочки. При этом следует всегда иметь в виду, что все предыдущие выводы действительны только при условии осевой

симметрии внешних сил. Точно так же можно применить легко формулы (1) и (2) предыдущего параграфа к любым куполам с осью симметрии и с симметричной нагрузкой. Во всяком случае эти задачи являются чисто статическими, так как можно указать напряжения, не зная деформаций.

Сделаем следующий шаг и определим напряжения в куполе, имеющем ось симметрии, но несущем несимметричную нагрузку. Мы и здесь ограничимся шаровой оболочкой, хотя решение можно указать для любой формы купола,

имеющего ось симметрии, и оно требует лишь длинных вычислений. Определение напряжений в шаровой оболочке, нагруженной несимметрично, сделано Г. Рейснером (H. Reissner, Müller-Breslau-Festschrift, 1912).

Предположения и упрощения и здесь такие же, как в предыдущем параграфе. Ввиду незначительности толщины стенки купола примем, что напряжения распределены по толщине стенки равномерно и что изгибающими моментами можно пренебречь. Пренебрегая нормальными напряжениями от изгиба, мы предположим, что и касательными напряжениями, перпендикулярными к срединной поверхности, можно также пренебречь. Вследствие несимметричности нагрузки теперь σ_r и σ_t , вообще говоря, уже не будут



Фиг. 71.

главными напряжениями, так как в меридиональном сечении и в сечении конической поверхностью появятся касательные напряжения τ , параллельные срединной поверхности купола. В то время как в случае симметрично нагруженного купола нам достаточно двух уравнений для определения σ_r и σ_t , в случае купола, нагруженного несимметрично, ввиду добавления третьего напряжения τ нужно будет составить третье уравнение, которое получится на основании условия равновесия сил, действующих на элемент оболочки в направлении горизонтальной касательной. Уравнение (10), выражающее условие равновесия сил, действующих на элемент купола в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности его, остается в силе и здесь. Но для несимметрично нагруженного купола уравнение, аналогичное уравнению (11) и вытекающее из условия равновесия для части купола, отсеченной плоскостью, перпендикулярной к оси, мы здесь написать не можем, так как напряжение σ_r вдоль такого сечения представляет переменную величину. Поэтому, аналогично тому, как мы это делали при выводе формул (1) и (2), мы должны обратиться к рассмотрению элемента купола и написать в дифференциальной форме условия равновесия сил, действующих в направлении касательной к меридиональной кривой и в направлении горизонтальной касательной. Составляющую внешнюю силы, отнесенную к единице площади срединной поверхности шаровой оболочки и действующую в направлении горизонтальной касательной, мы обозначим через Y , а для меридионального угла мы, как и прежде, воспользуемся обозначением φ . При обозначениях, указанных на фиг. 71, условие равновесия сил, действующих на показанный в плане и в разрезе элемент оболочки в направлении касательной к меридиональной кривой, имеет вид:

$$\frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial \alpha} \cdot h \cdot d\alpha \, d\varphi - \sigma_t \cos \alpha \, h \, da \, d\varphi + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} h a \, da \, d\varphi + X \cdot ar \, da \, d\varphi = 0,$$

где нужно положить $r = a \sin \alpha$. Из четырех членов, стоящих в левой части последнего уравнения, первый происходит от приращения меридионального напряжения при перемещении вдоль меридиана, второй представляет составляющую в направлении касательной к меридиану результирующей напряжений σ_r , приложенных к элементу купола, третий член соответствует приращению касательного напряжения при перемещении на $d\varphi$ и при выбранном на фиг. 71 положительном направлении должен иметь знак плюс, и, наконец, четвертый член дает составляющая внешних сил.

Из последнего уравнения путем деления на $ah \sin \alpha \, da \, d\varphi$ и подстановки значения r получается:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha (\sigma_r - \sigma_t) + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + \frac{X}{h} \cdot a = 0.$$

Для равновесия сил, действующих в направлении горизонтальной касательной, мы получаем условие:

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} ah \, da \, d\varphi + \tau ha \cos \alpha \, da \, d\varphi + \frac{\partial(\tau r)}{\partial \alpha} h \, da \, d\varphi + Yra \, da \, d\varphi = 0.$$

Четыре величины на левой стороне этого уравнения можно истолковать аналогично тому, как мы это сделали выше. Путем деления на $ah \sin \alpha \, da \, d\varphi$ мы получаем уравнение желательной для нас формы. Таким образом три условия равновесия выражаются в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_t + \frac{Z}{h} a &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha (\sigma_r - \sigma_t) + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + \frac{X}{h} a &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + 2\tau \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} + \frac{Y}{h} a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для определения трех неизвестных напряжений σ_r , σ_t и τ мы опять имеем три независимых уравнения. Следовательно, задача и в этом случае является статически определимой. Конечно, решение уравнений (15) представляет некоторые трудности, так как из трех уравнений (15) два последних представляют совместные дифференциальные уравнения в частных производных.

По Г. Рейснеру можно показать, что уравнения (15) можно проинтегрировать просто, если внешние силы X , Y и Z можно разложить в тригонометрические ряды, так называемые ряды Фурье. Именно, если мы вместо X , Y и Z подставим $X_n \sin n\varphi$, $Y_n \cos n\varphi$, $Z_n \sin n\varphi$ и аналогично вместо σ_r , σ_t и τ подставим $\sigma_{r,n} \sin n\varphi$, $\sigma_{t,n} \sin n\varphi$ и $\tau_n \cos n\varphi$, то уравнения (15) перейдут в обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,n} + \sigma_{t,n} + \frac{Z_n}{h} a &= 0, \\ \frac{d\sigma_{r,n}}{d\alpha} + \operatorname{ctg} \alpha (\sigma_{r,n} - \sigma_{t,n}) - \frac{n}{\sin \alpha} \cdot \tau_n + \frac{X_n}{h} a &= 0, \\ \frac{d\tau_n}{d\alpha} + 2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \tau_n + \frac{n}{\sin \alpha} \cdot \sigma_{t,n} + \frac{Y_n}{h} a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь величины, обозначенные индексом n , зависят лишь от угла α . Каждому целому значению n соответствует три таких уравнения. Если бы в разложении функций X , Y и Z в ряд Фурье входили как синусы, так и косинусы, то для каждого целого n кроме трех уравнений (16) получились бы еще три уравнения для определения коэффициентов более общего разложения в ряд Фурье; эти новые уравнения отличались бы от уравнений (16) лишь знаками перед n в двух последних уравнениях (16). Но мы для упрощения вычислений предположим, что разложение в ряд Фурье внешних сил, а следовательно, и напряжений, можно представить в следующем простом виде:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum X_n \sin n\varphi; & Y &= \sum Y_n \cos n\varphi; & Z &= \sum Z_n \sin n\varphi; \\ \sigma_r &= \sum \sigma_{r,n} \sin n\varphi & \sigma_t &= \sum \sigma_{t,n} \sin n\varphi; & \tau &= \sum \tau_n \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Исключая при помощи первого из уравнений (16) величину σ_{tn} из двух других уравнений, мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_{rn}}{d\alpha} + 2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sigma_{tn} - \frac{n}{\sin \alpha} \cdot \tau_n &= -\frac{a}{h} (Z_n \operatorname{ctg} \alpha + X_n), \\ \frac{d\tau_n}{d\alpha} + 2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \tau_n - \frac{n}{\sin \alpha} \cdot \sigma_{rn} &= -\frac{a}{h} \left(Y_n - Z_n \frac{n}{\sin \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ввиду того, что σ_{rn} и τ_n входят в эти два дифференциальных уравнения симметрично, естественно ввести новые неизвестные:

$$u = \sigma_{rn} + \tau_n \quad \text{и} \quad v = \sigma_{rn} - \tau_n,$$

так что получается:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rn} &= \frac{u+v}{2}, \\ \tau_n &= \frac{u-v}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Путем сложения и вычитания уравнений (18) мы получаем дифференциальные уравнения для u и v :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\alpha} + u \left(2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= -\frac{a}{h} \left[X_n + Y_n + Z_n \left(\operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) \right], \\ \frac{dv}{d\alpha} + v \left(2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= -\frac{a}{h} \left[X_n - Y_n + Z_n \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Решения этих линейных дифференциальных уравнений первого порядка можно представить в квадратурах:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\operatorname{tg}^{\frac{\alpha}{2}}}{\sin^2 \alpha} \left\{ c_1 - \frac{a}{h} \int \left[X_n + Y_n + Z_n \left(\operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) \right] \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^{\frac{\alpha}{2}}} d\alpha, \right. \\ v &= \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{\alpha}{2}}}{\sin^2 \alpha} \left\{ c_2 - \frac{a}{h} \int \left[X_n - Y_n + Z_n \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) \right] \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^{\frac{\alpha}{2}}} d\alpha. \right. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Таким образом общая задача об определении напряжений в шаровой оболочке при произвольно заданной несимметричной нагрузке решена, потому что при помощи значений u и v по формулам (19) можно вычислить σ_{rn} и τ_n , а затем при помощи первого из уравнений (16) также и σ_{tn} . Суммируя по всем значениям n , мы по формуле (17) получим искомые значения напряжений.

В качестве простого примера несимметрично нагруженной шаровой оболочки мы возьмем случай $n=1$, $X=0$, $Y=0$, $Z=Z_0 \sin \alpha$, который соответствует давлению ветра на наветренной

стороне шарового купола и подсасыванию с подветренной стороны. При этих значениях мы по формулам (21) получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[c_1 - \frac{a}{h} Z_0 \left(\cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \right] \frac{1}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}, \\ v &= \left[c_2 + \frac{a}{h} Z_0 \left(\cos \alpha - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \right] \frac{1}{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В случае раскрытого шарового свода постоянные c_1 и c_2 определяются из соответствующих граничных условий, а в случае закрытого купола c_1 и c_2 следует определить так, чтобы в вершине купола не получились для напряжений бесконечно большие значения, аналогично тому, как мы это делали в случае симметрично нагруженной шаровой оболочки. Для того чтобы u и v при $\alpha=0$ не обращались в бесконечность, мы в рассматриваемом примере должны взять $c_1 = \frac{2}{3} \frac{a}{h} Z_0$ и $c_2 = -\frac{2}{3} \frac{a}{h} Z_0$. Тогда по формулам (19) и (17) мы найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r1} \sin \varphi = -\frac{a}{h} Z_0 \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \sin \varphi, \\ \tau &= \tau_1 \cos \varphi = \frac{a}{h} Z_0 \frac{1}{\sin^3 \alpha} \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

а следовательно,

$$\sigma_t = \sigma_{t1} \sin \varphi = -\frac{a}{h} Z_0 \frac{3}{\sin^3 \alpha} \left[\sin^4 \alpha - \cos \alpha \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right) \right] \sin \varphi. \quad (22b)$$

Разлагая $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ в ряд по степеням α , мы найдем, что при $\alpha=0$ напряжения σ_r , σ_t и τ обращаются в вершине купола в нуль.

Следующая таблица показывает изменение напряжений вдоль произвольно взятой меридиональной кривой, вычисленных по формуле (22a).

α	$\sigma_{r1} \cdot \frac{h}{aZ_0}$	$\tau_1 \cdot \frac{h}{aZ_0}$
0°	0	0
30°	-0,13	+0,14
45°	-0,156	+0,221
60°	-0,161	+0,322
80°	-0,0902	+0,518
90°	0	+0,667

Мы видим, что на контуре купола, имеющего форму полушария, т. е. при $\alpha=90^\circ$, давление ветра будет восприниматься одними касательными напряжениями, проходящими в направлении касательной к опорному кругу, так как изгибающие моменты и касательные напряжения, перпендикулярные к срединной поверхности купола, здесь не рассматриваются.

Таким образом задача о распределении напряжений в тонкостенном куполе, если нагрузка несимметрична, если можно пренебречь изгибающими моментами и касательными напряжениями, перпендикулярными к срединной поверхности купола, и если края могут свободно перемещаться в направлении, перпендикулярном касательной плоскости, — решена.

§ 60. Напряжения в трубе, наполненной водой и опирающейся своими краями.

На гидроэлектрических станциях часто применяются трубы значительных размеров, причем опоры для трубы ставятся лишь в некоторых местах, так что труба от нагрузки водой работает на изгиб. Мы покажем, что, несмотря на это, стенки трубы работают в сущности не на изгиб, а на растяжение, т. е. в них возникают растягивающие напряжения, равномерно распределенные по толщине стенки. Так как значительные напряжения от изгиба не возникают, то толщину стенки трубы можно делать сравнительно незначительной. В этом выводе и заключается практическая выгода таких исследований.

Мы при своем изложении будем следовать работе Д. Тома (D. Thoma, «Ztschr. f. d. ges. Turbinenwesen», Heft 5, 1920). Ради простоты мы предположим, что ось трубы горизонтальна (фиг. 72) и что давление воды в разных точках трубы определяется формулой:

$$p = \gamma (H + r \cos \varphi). \tag{23}$$

Если мы двумя близкими поперечными и осевыми сечениями вырежем элемент цилиндрической оболочки, то напряжения, которые будут действовать на поверхностях разреза и которые мы обозначим через σ_t , σ_z , τ , должны уравниваться давлением p . По формуле (1) мы имеем:

$$\frac{\sigma_t}{r} = \frac{p}{h}. \tag{24}$$

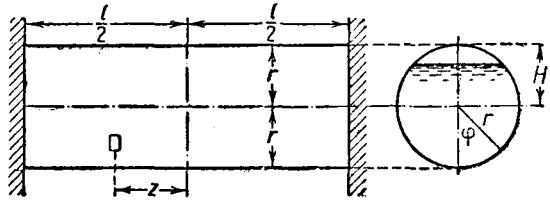
Второе слагаемое в левой стороне формулы (1) опущено, так как другой радиус кривизны R_1 у цилиндрической поверхности равен бесконечности. Если в формулу (24) вместо p подставить его значение из формулы (23), то напряжение σ_t в стенке трубы будет определяться по формуле:

$$\sigma_t = \frac{r}{h} p = \frac{r}{h} \gamma (H + r \cos \varphi). \tag{25}$$

Тем самым определятся и остальные напряжения σ_z , τ , так как напряжения σ_z , σ_t и τ связаны такими же уравнениями равновесия, как и в случае плоского напряженного состояния. Мы можем развернуть цилиндрическую оболочку на плоскость, и тогда будут иметь место условия равновесия [т. I, гл. IV, уравнения (7), стр. 276]:

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \tag{26}$$

где положено $dt = r d\varphi$.



Фиг. 72.

Если в первое из двух последних уравнений подставить значение σ_z из формулы (25), то получится:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \varphi} = +\frac{r}{h} \gamma \sin \varphi,$$

или

$$\tau = z \cdot \frac{r}{h} \gamma \sin \varphi. \quad (27)$$

Здесь постоянная интегрирования равна нулю, так как в точках указанной на фиг. 72 оси $z=0$ на основании симметрии никаких касательных напряжений получиться не может.

Подставляя значение τ во второе уравнение системы (26), получим:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = -z \cdot \frac{\gamma}{h} \cos \varphi,$$

или после интегрирования по z :

$$\sigma_x = -\frac{z^2}{2} \cdot \frac{\gamma}{h} \cos \varphi + f(\varphi); \quad (28)$$

пока еще неопределенная функция $f(\varphi)$ имеет характер статически неопределимой величины, так как ее можно найти, лишь рассмотрев деформацию. Ее определение основывается на граничных условиях для обоих концов трубы.

В случае трубы, защемленной обоими концами, как это указано на фиг. 72, длина образующих цилиндра должна сохраняться; то есть при

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_t \right),$$

должно быть:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \epsilon_x dz = 0,$$

или, подставляя значение ϵ_x :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[-\frac{z^2}{2} \cdot \frac{\gamma}{h} \cos \varphi + f(\varphi) - \frac{1}{m} \frac{r}{h} \gamma (H + r \cos \varphi) \right] dz = 0.$$

Это уравнение должно удовлетворяться при всяком φ , так как ни одна образующая не может изменять свою длину.

Путем интегрирования мы находим:

$$f(\cdot) = \frac{\gamma}{h} \left[\left(\frac{l^2}{24} + \frac{r^2}{m} \right) \cos \varphi + \frac{rH}{m} \right]$$

и, следовательно,

$$\sigma_s = \frac{\gamma}{h} \left[\left(\frac{l^2}{24} + \frac{r^2}{m} - \frac{z^2}{2} \right) \cos \varphi + \frac{rH}{m} \right]. \quad (29)$$

Формулами (25), (28) и (29) напряжения в заземленной дуге определяются полностью. Числовые расчеты (см. названную работу Д. Тома) показывают, что, не перегружая материал, можно обойтись сравнительно малой толщиной h стенки.

При других граничных условиях получается другая функция $f(\varphi)$. В качестве примера рассмотрим еще одно граничное условие, примерно соблюдающееся на практике, когда имеют дело с длинными трубопроводами с компенсаторами и кольцами жесткости. Здесь можно предположить, что концевые сечения, опирающиеся на жесткое кольцо, не наклоняются, а могут передвигаться параллельно самим себе, по крайней мере так будет обстоять дело, если отказаться от рассмотрения сил трения на опорах колец жесткости; в этом случае $f(\varphi)$ определяется из условия, что укорочение для всех образующих будет одинаковым. Из условия независимости величины

$$\begin{aligned} & + \frac{i}{2} \\ & \int \epsilon_s dz \\ & - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

от φ вытекает:

$$f(\varphi) = \frac{\gamma}{h} \left(\frac{l^2}{24} + \frac{r^2}{m} \right) \cos \varphi,$$

и потому получается:

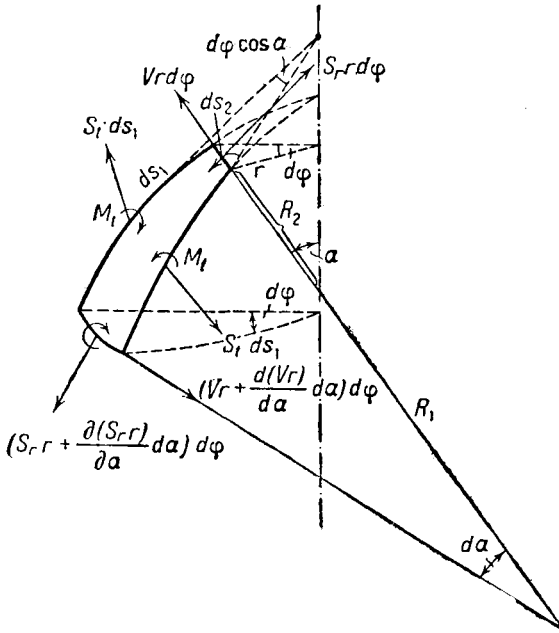
$$\sigma_s = \frac{\gamma}{h} \left(\frac{l^2}{24} + \frac{r^2}{m} - \frac{z^2}{2} \right) \cos \varphi.$$

Наконец, укажем еще, что в случае трубы, наполненной водой частично ($H < r$), формулы для напряжений σ_s на уровне зеркала воды дают скачок, который в действительности получиться не может. На самом деле в этом месте и в ближайшей окрестности возникают добавочные напряжения от изгиба.

Задача, рассмотренная в этом параграфе, решена строгими методами теории упругости с учетом напряжений от изгиба Швериным (Schwerin, «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 2, S. 340, 1922). Существенный результат его работы заключается в доказательстве, что напряжения от изгиба оболочки в сравнении с нормальными напряжениями, равномерно распределенными по толщине, никакой роли не играют, как это и было показано простым способом выше.

§ 61. Жесткая оболочка, имеющая ось симметрии.

В предыдущих параграфах этой главы мы рассматривали исключительно растягивающие или сжимающие напряжения, распределенные по толщине стенки равномерно и возникающие в оболочке под действием какой-либо нагрузки, причем у нас не было необходимости рассматривать изгиб оболочки. Как уже упомянуто выше, из теоремы о минимуме



Фиг. 73.

энергии деформации вытекает, что оболочка значительного изгиба не испытывает, если равновесие возможно при действии одних растягивающих или сжимающих напряжений, распределенных по толщине равномерно. Последнее условие при некоторых граничных условиях не выполняется, так как для получения при данной нагрузке оболочки одних нормальных напряжений, распределенных по сечению равномерно, требуются вполне определенные граничные условия, которые вообще не осуществляются. В этом случае мы должны сложить растягивающие напряжения, равномерно распределенные по толщине, с напряжениями, изгибающими оболочку и создаваемыми добавочными силами, соответствующими изменению характера граничных условий. Этими напряжениями от изгиба мы теперь и займемся.

Для этой цели двумя близкими меридиональными плоскостями и коническими поверхностями, нормальными к срединной поверхности, вырежем элемент оболочки (фиг. 73) и к поверхностям разреза приложим результирующие напряжений. Так как мы предполагаем, что нагрузка симметрична, то проведенные сечения будут главными сечениями для случая действия одних нормальных напряжений, распределенных по толщине равномерно. Соответствующие нормальные силы равны:

$$S_r = 2hs_r$$

и

$$S_t = 2hs_t,$$

где толщину оболочки, как всегда при рассмотрении изгиба, мы обозначили через $2h$. К ним еще добавляются изгибающие моменты M_r и M_t ,

а также поперечные силы V , действующие в сечениях по коническим поверхностям, нормальным к срединной поверхности оболочки.

Условия равновесия сил, действующих в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности оболочки, и в направлении касательной к меридиану, имеют вид:

$$\frac{S_r}{R_1} + \frac{S_t}{R_2} + \frac{1}{r} \frac{d(V \cdot r)}{R_1 d\alpha} = p, \quad (30a)$$

$$S_r \sin \alpha + V \cos \alpha = \frac{r}{2} p. \quad (30b)$$

Последнее уравнение опять проще всего можно получить из условия равновесия части оболочки, отсеченной плоскостью, перпендикулярной к оси. Здесь в обоих уравнениях p обозначает внешнюю нагрузку, перпендикулярную к оболочке. Согласно сделанному вначале замечанию, в рассматриваемом случае, когда отыскиваются напряжения, создаваемые силами, приложенными на краях, нужно положить $p = 0$. При $V = 0$ формулы (30a) и (30b) переходят в формулы (1) и (2a). Так как мы рассматриваем и изгибающие моменты, то поперечными силами V пренебречь нельзя. Это следует из третьего условия равновесия моментов относительно касательной к параллельному кругу. Оно имеет вид:

$$\frac{d(M_r \cdot r)}{d\alpha} d\alpha \cdot d\varphi - M_t R_1 d\alpha \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha - V \cdot r \cdot R_1 d\alpha \cdot d\varphi = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\alpha}(M_r \cdot r) - M_t \cdot R_1 \cos \alpha - V \cdot r \cdot R_1 = 0. \quad (30c)$$

Здесь M_r , M_t и V , а также S_r и S_t относятся к единице длины элемента, измеряемого вдоль срединной поверхности оболочки, следовательно, они уже содержат в себе толщину $2h$ стенки оболочки.

Если нам нужно рассмотреть влияние граничных условий, то мы должны положить $p = 0$, и уравнения (30) переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_r}{R_1} + \frac{S_t}{R_2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d(V \cdot r)}{R_1 d\alpha} &= 0, \\ S_r \cdot \sin \alpha + V \cdot \cos \alpha &= 0, \\ \frac{d(M_r \cdot r)}{d\alpha} - M_t \cdot R_1 \cos \alpha - V \cdot r R_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Действительно, равновесие моментов показывает, что поперечная сила V связана с моментами M_r и M_t так, что нужно принимать во внимание и те и другие, или же нужно пренебрегать ими одновременно. В последнем случае остаются лишь статически определяемые нормальные напряжения, распределенные по сечению равномерно.

При трех уравнениях равновесия (31) мы имеем пять неизвестных S_r , S_t , V , M_r , M_t , так что теперь уже задача является статически неопределимой, которую можно решить, лишь рассмотрев деформации. Что касается деформации, связанной с растягивающими и сжимающими

напряжениями, распределенными по сечению равномерно, то она определяется двумя главными удлинениями ϵ_r и ϵ_t в направлении меридиана и круга широт. Если перемещение точки срединной поверхности в направлении меридиана в сторону увеличения a мы обозначим через u , а в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности оболочки внутрь, — через w , то изменение длины элемента меридиана $ds_1 = R_1 da$ можно написать в следующем виде:

$$\epsilon_r \cdot R_1 da = \frac{du}{da} da - w da.$$

Происхождение члена, стоящего на правой стороне этого равенства и зависящего от перемещения u , понятно без особых объяснений. Для объяснения происхождения второго члена, зависящего от w , заметим, что одно только перемещение в направлении, перпендикулярном к оболочке, уже вызывает удлинение ϵ_r , а следовательно, и изменение длины элемента меридиана на величину $w da$ с отрицательным знаком при положительном направлении w внутрь.

Из последнего уравнения меридиональное удлинение получается равным:

$$\epsilon_r = \frac{u' - w}{R_1}, \quad (32)$$

где штрих над u , как и всегда в дальнейшем, обозначает дифференцирование по a .

Второе главное удлинение ϵ_t получится из соотношения:

$$\epsilon_t = \frac{2\pi \cdot \Delta r}{2\pi \cdot r} = \frac{\Delta r}{r},$$

где (фиг. 73) r обозначает радиус круга широт, а Δr — приращение этого радиуса; мы имеем:

$$\Delta r = u \cdot \cos \alpha - w \cdot \sin \alpha \quad \text{и} \quad r = R_2 \cdot \sin \alpha,$$

следовательно,

$$\epsilon_t = \frac{u \cdot \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_2}. \quad (33)$$

Связь между главными удлинениями и главными напряжениями дает закон Гука:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t \right) = \frac{1}{2Eh} \left(S_r - \frac{1}{m} S_t \right),$$

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right) = \frac{1}{2Eh} \left(S_t - \frac{1}{m} S_r \right),$$

откуда при сокращенном обозначении для «жесткости» оболочки

$$B = \frac{(2h)^3 \cdot E}{12} \cdot \frac{m^2}{m^2 - 1} \quad (34)$$

получается:

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{3B}{h^2} \left(\epsilon_r + \frac{1}{m} \epsilon_t \right), \\ S_t &= \frac{3B}{h^2} \left(\epsilon_t + \frac{1}{m} \epsilon_r \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

К этим формулам мы еще вернемся впоследствии. Пока же мы должны еще заняться деформациями, вызываемыми изгибом оболочки. Они сводятся к изменению кривизны χ_r меридиана и кривизны χ_t в сечении, перпендикулярном к меридиональному. Для характеристики изгиба целесообразно ввести величину ϑ , представляющую изменение угла α ¹⁾; величину ϑ нужно рассматривать как функцию от α . Так как кривизна меридиана до деформации составляла

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{ds_1},$$

то из этого следует, что изменение кривизны²⁾ равно:

$$\chi_r = d\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{d\vartheta}{ds_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \vartheta', \quad (36)$$

где снова обозначение производной $\frac{d\vartheta}{ds_1}$ заменено другим обозначением ϑ' .

При вычислении изменения второй главной кривизны мы будем исходить из формулы:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin \alpha}{r}$$

и вычислим приращение этого выражения, происходящее только из-за изгиба оболочки:

$$\chi_t = d\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{\cos \alpha}{r} \cdot \vartheta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2} \cdot \vartheta, \quad (37)$$

где снова изменение угла α , происходящее только из-за изгиба оболочки, обозначено через $d\alpha = \vartheta$.

Формулы (36) и (37) выражают изменения кривизны через деформацию ϑ , а формулы (32) и (33) выражают удлинения ϵ_r и ϵ_t через перемещения u и w . Но эти три величины u , w и ϑ не могут быть независимыми одна от другой, так как уже одни u и w полностью определяют деформацию. Условие совместности деформаций, связывающее эти три величины, имеет вид:

$$\vartheta = \frac{u}{R_1} + \frac{dw}{R_1 da} = \frac{u + w'}{R_1}, \quad (38)$$

1) То-есть разность между значением α для какой-либо точки после деформации и первоначальным значением до деформации. *Прим. перев.*

2) Здесь изменением кривизны называется разность между значением кривизны после деформации и первоначальным значением кривизны до деформации.

Прим. перев.

как это легко вывести; если бы было только одно перемещение u , а $w=0$, то получилось бы непосредственно $\vartheta = \frac{u}{R_1}$; с другой стороны, если бы было $u=0$, и было бы перемещение w только в направлении, перпендикулярном к оболочке, то мы имели бы $\vartheta = \frac{dw}{ds_1}$; путем сложения перемещений u и w и получается формула (38).

Для определения изгибающих моментов, вызывающих изгиб оболочек, мы еще рассмотрим удлинения волокон, параллельных срединной поверхности оболочки. Удлинения на расстоянии z от срединной поверхности, параллельные меридиану и кругу широт, мы обозначим соответственно через ϵ_{rs} и ϵ_{ts} ; причем z считается положительным по направлению внутрь, т. е. в сторону положительных w . Как ϵ_{rs} , так и ϵ_{ts} состояются из двух частей, из которых первая происходит от растяжения оболочки и определяется по формулам (32) и (33), а вторая происходит от изгиба оболочки. Для ϵ_{rs} второй частью, как следует непосредственно из определения удлинения, будет:

$$-\frac{z \, d\vartheta}{(R_1 - z) \cdot da} = -\frac{z}{R_1 - z} \cdot \vartheta'$$

а для ϵ_{ts} совершенно аналогично:

$$-\frac{z \cdot \vartheta \cdot \cos \alpha}{r_s},$$

но так как

$$r_s = (R_2 - z) \cdot \sin \alpha,$$

то

$$-\frac{z \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \vartheta}{R_2 - z}.$$

Поэтому, складывая обе части, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rs} &= \frac{u' - w}{R_1 - z} - \frac{z}{R_1 - z} \cdot \vartheta', \\ \epsilon_{ts} &= \frac{u \cdot \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_2 - z} - \frac{z \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{R_2 - z} \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

При $z=0$, т. е. на срединной поверхности оболочки, эти выражения переходят в уже выведенные раньше выражения для ϵ_r и ϵ_t .

По закону Гука с удлинениями ϵ_{rs} и ϵ_{ts} связаны напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rs} &= \frac{E \cdot m^2}{m^2 - 1} \cdot \left(\epsilon_{rs} + \frac{1}{m} \epsilon_{ts} \right), \\ \sigma_{ts} &= \frac{E \cdot m^2}{m^2 - 1} \cdot \left(\epsilon_{ts} + \frac{1}{m} \epsilon_{rs} \right). \end{aligned}$$

Подставив значения ϵ_{r_s} и ϵ_{t_s} , мы найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_s} &= \frac{Em^2}{m^2-1} \left[\frac{u' - w}{R_1 - z} - \frac{z\vartheta'}{R_1 - z} + \frac{1}{m} \left(\frac{u \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_2 - z} - \frac{z \operatorname{c}'g \alpha}{R_2 - z} \cdot \vartheta \right) \right], \\ \sigma_{t_s} &= \frac{Em^2}{m^2-1} \left[\frac{u \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_2 - z} - \frac{z \operatorname{t}g \alpha}{R_2 - z} \cdot \vartheta + \frac{1}{m} \left(\frac{u' - w}{R_1 - z} - \frac{z}{R_1 - z} \cdot \vartheta' \right) \right]. \end{aligned} \right\} (40)$$

Отсюда результирующие напряжения, отнесенные к единице длины элемента, расположенного в срединной поверхности оболочки, получатся путем интегрирования по толщине оболочки:

$$S_r = \int_{-h}^{+h} \sigma_{r_s} \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} dz, \quad S_t = \int_{-h}^{+h} \sigma_{t_s} \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} dz.$$

Подставляя значения σ_{r_s} и σ_{t_s} из формул (40) и принимая во внимание, что толщина $2h$ оболочки в сравнении с радиусами кривизны R_1 и R_2 мала, мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{2hEm^2}{m^2-1} \cdot \left(\epsilon_r + \frac{1}{m} \epsilon_t \right) = \frac{3B}{h^2} \left(\epsilon_r + \frac{1}{m} \epsilon_t \right), \\ S_t &= \frac{2hEm^2}{m^2-1} \cdot \left(\epsilon_t + \frac{1}{m} \epsilon_r \right) = \frac{3B}{h^2} \left(\epsilon_t + \frac{1}{m} \epsilon_r \right), \end{aligned} \right\} (41)$$

т. е. нормальные напряжения, равномерно распределенные по толщине, можно определить только по деформациям срединной поверхности оболочки, а изгиб оболочки на эти напряжения влияния не оказывает. Этим обстоятельством мы молчаливо пользовались уже раньше и при помощи формул (41) снова пришли к прежним формулам (35).

Для вычисления изгибающих моментов положим:

$$M_r = \int_{-h}^{+h} \sigma_{r_s} \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} \cdot z dz, \quad M_t = \int_{-h}^{+h} \sigma_{t_s} \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} \cdot z dz.$$

Если мы сюда подставим значения σ_{r_s} и σ_{t_s} из формул (40) и примем во внимание, что толщиной оболочки в сравнении с радиусами кривизны можно пренебречь, то мы найдем:

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{2h^3E}{3} \cdot \frac{m^2}{m^2-1} \left(\frac{\vartheta'}{R_1} + \frac{1}{m} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2} \cdot \vartheta \right), \\ M_t &= -\frac{2h^3E}{3} \cdot \frac{m^2}{m^2-1} \left(\frac{\operatorname{ct}'g \alpha}{R_2} \cdot \vartheta + \frac{1}{m} \frac{\vartheta'}{R_1} \right), \end{aligned}$$

или, вводя приращения кривизны χ_r и χ_t по формулам (36) и (37), получим:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -B \left(\chi_r + \frac{1}{m} \chi_t \right), \\ M_t &= -B \left(\chi_t + \frac{1}{m} \chi_r \right), \end{aligned} \right\} (42)$$

причем одновременно мы ввели и жесткость по формуле (34).

Теперь у нас имеются все данные для расчета жесткой оболочки, имеющей ось симметрии, при симметричной же нагрузке. Дальнейший расчет должен производиться следующим образом. В три уравнения (31), выражающие условия равновесия, вставляют результирующие напряжения и моменты S_r , S_t , M_r и M_t из формул (41) и (42), удлинения ϵ_r и ϵ_t , а также приращения кривизны χ_r и χ_t , выраженные при помощи формул (32), (33), (36) и (37) через u , w и ϑ , причем следует еще принять во внимание уравнение совместности (38) этих трех величин. Тогда три уравнения, выражающие условия равновесия, можно свести к двум дифференциальным уравнениям для V и ϑ .

В следующих параграфах мы применим этот ход расчета сперва для шаровой оболочки, а затем и для цилиндрической. Здесь же мы сделаем лишь некоторые указания на литературу. Толчок к возникновению новых работ по расчетам оболочек дал Г. Рейснер в работе, помещенной в Müller-Breslau Festschrift, 1912, в которой он составил дифференциальные уравнения для шаровой оболочки. Его выводы Е. Мейснер (E. Meissner) в журнале «Phys. Zeitschrift» за 1913 г. обобщил на все оболочки, имеющие ось симметрии. Отдельные выводы содержатся в цюрихской диссертации Е. Болле (E. Bolle, 1916) о шаровой оболочке, Дювуа (Dubois, 1917) о шаровой оболочке, Висслер (Wissler) о кольцевой оболочке. Далее, следует упомянуть диссертацию Гоннегера (Hoppeger, 1919) о кольцевой оболочке с переменной толщиной; эта работа примыкает к работе Е. Мейснера «Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen», появившейся в «Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich». Из новых работ, дающих приближенные значения, пригодные для практики, в первую очередь, следует назвать работы И. Геккелера (J. Geckeler, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, № 276, а также «Ztschr. d. V. d. I.», стр. 163, 1926, и П. Пастернака (P. Pasternak, «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», стр. 1 1926).

§ 62. Решение для жесткой шаровой оболочки.

Общую теорию предыдущего параграфа мы теперь применим к частному случаю шаровой оболочки. Для этой цели мы в формулах предыдущего параграфа должны положить:

$$R_1 = R_2 = a.$$

Вместо условий равновесия (31) это дает уравнения:

$$\left. \begin{aligned} S_r + S_t + \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d(V \sin \alpha)}{da} &= 0, \\ S_r \cdot \sin \alpha + V \cdot \cos \alpha &= 0, \\ \frac{d(M_r \cdot \sin \alpha)}{da} - M_t \cdot \cos \alpha - Va \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Далее, для удлинений и изменений кривизны мы имеем формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{u' - w}{a}, & \chi_r &= \frac{\vartheta'}{a}, \\ \varepsilon_t &= \frac{u \operatorname{ctg} \alpha - w}{a}, & \chi_t &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{a} \cdot \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

В данном случае уравнение совместности (38) переходит в следующее:

$$\vartheta = \frac{u + w'}{a}. \quad (45)$$

Аналогично формулам (41) выражения для результирующих напряжений будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{3B}{h^2} \left(\varepsilon_r + \frac{1}{m} \varepsilon_t \right) = \frac{3B}{h^2 a} \left[u' - w + \frac{1}{m} (u \operatorname{ctg} \alpha - w) \right], \\ S_t &= \frac{3B}{h^2} \left(\varepsilon_t + \frac{1}{m} \varepsilon_r \right) = \frac{3B}{h^2 a} \left[u \operatorname{ctg} \alpha - w + \frac{1}{m} (u' - w) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Далее, формулы (42) для моментов переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -B \left(\chi_r + \frac{1}{m} \chi_t \right) = -\frac{B}{a} \left[\vartheta' + \frac{1}{m} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \vartheta \right], \\ M_t &= -B \left(\chi_t + \frac{1}{m} \chi_r \right) = -\frac{B}{a} \left[\operatorname{ctg} \alpha \cdot \vartheta + \frac{1}{m} \vartheta' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Путем подстановки этих значений в третье из уравнений (43) мы после простого преобразования найдем:

$$\vartheta'' + \vartheta' \operatorname{ctg} \alpha - \vartheta \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{m} \vartheta = -\frac{a^2}{B} \cdot V. \quad (48)$$

Это и будет первым из двух основных уравнений нашей задачи, связывающих переменные V и ϑ . Для вывода второго основного уравнения мы по формуле (44) вычислим:

$$(\varepsilon_r - \varepsilon_t) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{a} (u' - u \operatorname{ctg} \alpha)$$

$$\varepsilon_t' = \frac{1}{a} \left(u' \operatorname{ctg} \alpha - \frac{u}{\sin^2 \alpha} - w' \right).$$

Вычитая эти два равенства одно из другого, мы получим

$$(\varepsilon_r - \varepsilon_t) \operatorname{ctg} \alpha - \varepsilon_t' = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) \cdot u + \frac{w'}{a} = \frac{u + w'}{a},$$

и на основании равенств (45) получается:

$$\vartheta = (\epsilon_r - \epsilon_i) \operatorname{ctg} \alpha - \epsilon'_i.$$

Из равенств (46) вытекает:

$$\epsilon_r = \frac{1}{2E \cdot h} \left(S_r - \frac{1}{m} S_i \right) \quad \text{и} \quad \epsilon_i = \frac{1}{2E \cdot h} \left(S_i - \frac{1}{m} S_r \right).$$

Если эти выражения подставить в последнее равенство, то оно перейдет в следующее:

$$\vartheta = \frac{1}{2E \cdot h} \left[\frac{m+1}{m} (S_r - S_i) \operatorname{ctg} \alpha - S'_i - \frac{1}{m} S'_r \right].$$

Из первых двух уравнений (43) получается:

$$S_r = -V \operatorname{ctg} \alpha$$

и

$$S_i = -V'.$$

Если эти выражения подставить в последнее найденное нами выражение для ϑ , то после простого преобразования получается второе основное уравнение:

$$V'' + V' \operatorname{ctg} \alpha - V \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{m} V = 2hE\vartheta. \quad (49)$$

Оба основных уравнения (48) и (49)^{*} представляют гипергеометрические дифференциальные уравнения, которые можно решить при помощи рядов. Полное решение находится в диссертации Е. Болле, названной в предыдущем параграфе. Мы этим довольно сложным решением заниматься не будем, а дадим приближенное решение по способу Бауэрсфельда-Геккелера (Bauersfeld-Geckeler), которое для практики вполне достаточно и обладает большим преимуществом, именно простотой.

Идея, лежащая в основании этого приближенного решения, следующая. Так как внешние силы, приложенные к краям оболочки, уравнивают друг друга¹⁾, то по принципу Сен-Венана при удалении от краев, их действие должно сильно уменьшаться, т. е. уменьшение должно выражаться функциями типа e^{-kx} или x^{-k} с большим значением k . Но тогда производные этих функций будут в k раз больше самих функций, и каждая производная более высокого порядка будет в k раз больше предыдущей производной. Поэтому, пренебрегая функциями и их производными в сравнении с производными более высокого порядка, основные уравнения (48) и (49) мы можем переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta'' &= -\frac{a^2}{B} \cdot V, & V'' &= 2hE \cdot \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

¹⁾ Изгиб оболочки, согласно сказанному выше, производится только добавочными силами, создающими защемление, т. е. опорными моментами. *Прим. перев.*

Эти два совместных дифференциальных уравнения 2-го порядка можно свести к одному дифференциальному уравнению 4-го порядка с постоянными коэффициентами, которое для ϑ имеет следующий вид:

$$\vartheta^{IV} + \frac{a^2}{B} \cdot 2hE \cdot \vartheta = 0, \quad (51)$$

и такое же уравнение получается для V .

Для сокращения мы введем обозначение

$$k^4 = \frac{1}{4} \frac{a^2}{B} \cdot 2hE = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{a^2}{h^2},$$

или

$$k = \sqrt[4]{\frac{3}{4} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{h}} \quad (52)$$

и назовем k декрементом затухания.

Тогда уравнения для ϑ и V будут иметь вид:

$$\vartheta^{IV} + 4k^4 \vartheta = 0 \quad \text{и} \quad V^{IV} + 4k^4 V = 0. \quad (53)$$

Решение дифференциального уравнения для V можно написать в форме:

$$\begin{aligned} V = & C_1 \cdot Eh \cdot e^{-k(\alpha_0 - \alpha)} \cos [k(\alpha_0 - \alpha) + \phi_1] + \\ & + C_2 \cdot Eh \cdot e^{+k(\alpha_0 - \alpha)} \cos [k(\alpha_0 - \alpha) + \phi_2] \end{aligned} \quad (54)$$

с четырьмя постоянными интегрирования C_1 , C_2 , ϕ_1 и ϕ_2 . Здесь α_0 представляет значение α на контуре оболочки. Если мы предположим, что нагруженному краю, действие нагрузки которого мы исследуем, соответствует значение $\alpha_0 \geq \alpha$, то в предыдущем решении для V постоянную C_2 нужно положить равной нулю. Если значки у C_1 и ϕ_1 отбросить, то при сокращенном обозначении

$$\alpha_0 - \alpha = \omega$$

решение запишется в следующей форме:

$$V = C \cdot Eh \cdot e^{-k\omega} \cdot \cos(k\omega + \phi). \quad (55)$$

Если бы шаровая оболочка имела в вершине круглое отверстие, краям которого соответствует также значение α_0 , то влияние нагрузки этих краев можно было бы выразить при помощи формулы, аналогичной формуле (55), в которой ω имело бы значение $\alpha - \alpha_0$.

Из формулы (55) путем дифференцирования по a мы получаем:

$$\begin{aligned} V' &= C \cdot E h \cdot k \cdot e^{-k\omega} [\cos(k\omega + \phi) + \sin(k\omega + \phi)] = \\ &= C \cdot E h \cdot k \cdot e^{-k\omega} \sqrt{2} \sin\left(k\omega + \phi + \frac{\pi}{4}\right); \\ V'' &= C \cdot 2 E h \cdot k^2 \cdot e^{-k\omega} \cdot \sin(k\omega + \phi), \end{aligned}$$

отсюда по формуле (50):

$$\vartheta = C \cdot k^2 \cdot e^{-k\omega} \cdot \sin(k\omega + \phi). \quad (56)$$

Формулы (55) и (56) представляют решения с двумя постоянными интегрирования C и ϕ . При помощи этих формул мы для усилий в шаровой оболочке получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} S_r &= -V \operatorname{ctg} a = -C \cdot E h \cdot e^{-k\omega} \cdot \cos(k\omega + \phi) \operatorname{ctg} a, \\ S_t &= -V' = -C \cdot \sqrt{2} \cdot E h \cdot k \cdot e^{-k\omega} \cdot \sin\left(k\omega + \phi + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} (57)$$

Далее, при тех же упрощающих предположениях, которыми мы пользовались при выводе дифференциальных уравнений, для изгибающих моментов получаются выражения:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{B}{a} \vartheta' = \frac{B}{a} \sqrt{2} \cdot C \cdot k^2 \cdot e^{-k\omega} \cdot \cos\left(k\omega + \phi + \frac{\pi}{4}\right), \\ M_t &= -\frac{1}{m} \frac{B}{a} \vartheta' = \frac{1}{m} M_r = \frac{1}{m} \frac{B}{a} \sqrt{2} \cdot C \cdot k^2 \cdot e^{-k\omega} \cdot \cos\left(k\omega + \phi + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} (58)$$

При принятых упрощающих предположениях величиной S_t в сравнении с S_r можно пренебречь. Это нужно иметь в виду при определении постоянных C и ϕ на основании граничных условий на контуре, соответствующем значению α_0 . Для относительного удлинения ϵ_t можно приближенно положить:

$$\epsilon_t = \frac{S_t}{2hE}.$$

Обычно на краях $(\epsilon_t)_0$ задано; тогда получается:

$$(S_t)_0 = 2hE \cdot (\epsilon_t)_0.$$

Это значение нужно подставить во второе уравнение (52) при $\omega = 0$, что нам дает первое соотношение, связывающее C и ϕ . Постоянная ϕ определяется в зависимости от типа опор на контуре, соответствующем значению α_0 .

При полном заземлении $\vartheta_0 = 0$ и, следовательно, по формуле (56) $\phi = 0$.

В случае, если края могут поворачиваться, $(M_r)_0 = 0$, и, следовательно, по формуле (58) $\phi = \frac{\pi}{4}$.

Если имеет место упругое защемление, то ϕ изменяется в пределах между 0 и $\frac{\pi}{4}$ в зависимости от степени защемления. Тогда имеет место соотношение:

$$\frac{\vartheta_0}{\bar{\vartheta}_0} = 1 - \frac{(M_r)_0}{(\bar{M}_r)_0},$$

где ϑ_0 и $(M_r)_0$ обозначают действительно получающиеся граничные значения, а $\bar{\vartheta}_0$ представляет деформацию при свободном контуре и $(\bar{M}_r)_0$ опорный момент при полном защемлении.

Степень убывания напряжений с увеличением расстояния от опор определяется величиною декремента k формулы (52). Для него при $m = \frac{10}{3}$ получается формула:

$$k = \sqrt[4]{\frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{h}} = 0,91 \sqrt{\frac{a}{h}}.$$

При этом значении для полной длины волны периодических изменений напряжений получается значение:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} a = \frac{2\pi}{0,91} \sqrt{ah} = 4,89 \sqrt{2ha}.$$

Таким образом длина волны зависит от среднего геометрического из радиуса a и толщины стенки $2h$. Так как декремент равен почти $\sqrt{\frac{a}{h}}$, то приближенное решение применимо лишь при большом отношении $\frac{a}{h}$. Геккер показал, что при больших значениях этого отношения получается очень хорошее приближение.

§ 63. Решение для жесткой цилиндрической оболочки.

В предыдущем параграфе мы применили общую теорию § 61 к частному случаю шаровой оболочки; аналогично сделаем теперь то же и для цилиндрической оболочки радиуса a , симметрично нагруженной моментами M_0 и поперечными силами V_0 на конце $x = 0$. В формулах § 61 теперь нужно положить:

$$R_1 = \infty; \quad R_2 = r = a; \quad R_1 dx = dx; \quad \alpha = 90^\circ.$$

Тогда уравнения (31), выражающие условия равновесия, переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_t}{a} + \frac{dV}{dx} &= 0, \\ S_r &= 0, \\ \frac{dM_r}{dx} &= V. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Для удлинений и изменений кривизны цилиндрической оболочки мы имеем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{du}{dx}, & \chi_r &= \frac{d\vartheta}{dx}, \\ \epsilon_t &= -\frac{w}{a}, & \chi_t &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

а условие совместности (38) переходит здесь в такое:

$$\vartheta = \frac{dw}{dx}. \quad (61)$$

Теперь формулы (41) для усилий имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{3B}{h^2} \left(\epsilon_r + \frac{1}{m} \epsilon_t \right) = \frac{3B}{h^2} \left(\frac{du}{dx} - \frac{1}{m} \frac{w}{a} \right), \\ S_t &= \frac{3B}{h^2} \left(\epsilon_t + \frac{1}{m} \epsilon_r \right) = \frac{3B}{h^2} \left(-\frac{w}{a} + \frac{1}{m} \frac{du}{dx} \right), \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

а формулы (42) для моментов переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -B \left(\chi_r + \frac{1}{m} \chi_t \right) = -B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}, \\ M_t &= -B \left(\chi_t + \frac{1}{m} \chi_r \right) = -\frac{1}{m} \cdot B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Путем подстановки значения M_r в третье из уравнений (59) мы получим в качестве первого основного уравнения для цилиндрической оболочки уравнение:

$$-B \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = V. \quad (64)$$

Второе основное уравнение получится путем подстановки в первые два из уравнений (59) значений S_r и S_t из формул (62). Мы получим сперва:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \frac{3B}{ah^2} \cdot \left(\frac{w}{a} - \frac{1}{m} \cdot \frac{du}{dx} \right), \\ 0 &= \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{1}{m} \frac{w}{a}. \end{aligned}$$

Поэтому получается

$$\frac{dV}{dx} = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{3B}{a^2 h^2} \cdot w$$

или на основании условия совместности (61) в качестве второго основного уравнения для цилиндрической оболочки получаем:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{3B}{a^2 h^2} \cdot \vartheta. \quad (65)$$

Из двух основных уравнений находим:

$$\frac{d^4 \vartheta}{dx^4} = -\frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{3}{a^2 h^2} \cdot \vartheta \quad (66)$$

и такое же дифференциальное уравнение имеет место на основании (61) для V , а также и для w .

Здесь мы имеем дело с тем же дифференциальным уравнением, как и в предыдущем параграфе в случае шаровой оболочки, с тем лишь отличием, что дифференциальное уравнение (66) представляет для цилиндрической оболочки точное уравнение, а дифференциальное уравнение (51) для шаровой оболочки является приближенным.

Введя опять декремент k по формуле (52), мы можем записать уравнение (66) в форме:

$$\frac{d^4 \vartheta}{dx^4} + 4k^4 \cdot \frac{\vartheta}{a^4} = 0, \quad (67)$$

и аналогично дифференциальные уравнения для V и w будут иметь вид:

$$\frac{d^4 V}{dx^4} + 4k^4 \cdot \frac{V}{a^4} = 0, \quad (68)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 \cdot \frac{w}{a^4} = 0. \quad (69)$$

Аналогично формуле (54) мы для V возьмем выражение:

$$V = C_1 \cdot Eh \cdot e^{-k \frac{x}{a}} \cdot \cos\left(k \frac{x}{a} + \psi_1\right) + C_2 \cdot Eh \cdot e^{+k \frac{x}{a}} \cdot \cos\left(k \frac{x}{a} + \psi_2\right).$$

Здесь для одного из торцов мы имеем $x=0$. Вследствие того, что $x \geq 0$, опять нужно взять лишь первое слагаемое, которое мы, опуская значки, можем написать в виде:

$$V = C \cdot Eh \cdot e^{-k \frac{x}{a}} \cdot \cos\left(k \frac{x}{a} + \psi\right). \quad (70)$$

Нами принято, что второй торец $x=l$ цилиндрической трубы удален на достаточно большое расстояние, так что влияние обоих концов суммироваться не может.

На основании решения (70) усилия получаются равными:

$$\begin{aligned} S_t &= -a \cdot \frac{dV}{dx} = C \cdot Eh \cdot k \cdot e^{-k \frac{x}{a}} \cdot \left[\cos\left(k \frac{x}{a} + \psi\right) + \sin\left(k \frac{x}{a} + \psi\right) \right] = \\ &= C \cdot \sqrt{2} \cdot Eh \cdot k \cdot e^{-k \frac{x}{a}} \cdot \sin\left(k \frac{x}{a} + \psi + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (71)$$

Из формулы (65) вытекает:

$$\vartheta = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{a^2 h^2}{3B} \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} = C \cdot k^2 e^{-k \frac{x}{a}} \sin\left(k \frac{x}{a} + \psi\right), \quad (72)$$

причем значение B нужно подставить по формуле (34).

Отсюда изгибающие моменты получаются равными:

$$M_r = -B \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = C \cdot B \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{k^3}{a} e^{-k \frac{x}{a}} \sin\left(k \frac{x}{a} + \psi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (73)$$

и

$$M_t = \frac{1}{m} M_r.$$

Если на торце, соответствующем значению $x=0$, заданы изгибающий момент M_0 и поперечная сила V_0 , то и постоянные интегрирования выражаются через них; если, например, $V_0 = 0$, то

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad C = \frac{M_0 a}{2Bh^3} = M_0 \cdot \frac{k}{ah \cdot E}.$$

Здесь также характерно, что при больших декрементах k влияние конца трубы $x=0$ с увеличением x быстро уменьшается.

§ 64. Цилиндрическая оболочка с несимметрично нагруженными концами.

Предположим, что цилиндрическая оболочка под действием несимметричной нагрузки работает на растяжение, как это показано на фиг. 74. Рассмотрим равновесие элемента оболочки, вырезанного двумя близкими поперечными и продольными сечениями. Если мы толщину стенки обозначим через h , то условия равновесия сил, действующих в продольном направлении, которое мы возьмем за ось z , и сил, действующих в поперечном направлении, которое мы примем за ось t , аналогично формулам (26) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

где

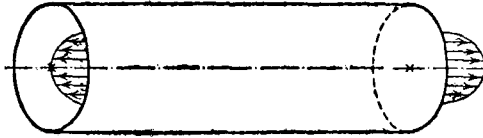
$$S_z = \sigma_z h; \quad S_t = \sigma_t h; \quad T = \tau h. \quad (75)$$

К уравнениям (74) добавляется еще уравнение, выражающее условия равновесия сил, действующих в направлении, перпендикулярном к оболочке:

$$S_t = 0, \quad (76)$$

так как в данном случае нет внутреннего давления, которое могло бы уравновесить силу S_t .

Так как всюду $S_z = 0$, то также всюду и $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$. Но так как на краях



Фиг. 74.

$T = 0$, то поэтому всюду должно быть $T = 0$, а отсюда в согласии с первым из уравнений (74) вытекает $\frac{\partial S_z}{\partial z} = 0$ или

$$S_z = \text{const. вдоль образующих.} \quad (77)$$

Мы получили, следовательно, поразительный результат, что действие несимметричной нагрузки на края трубы на большое расстояние не распространяется, как это было бы, если бы мы вместо цилиндрической оболочки взяли пластинку, нагруженную аналогично. Конечно, на распределение сил по концам накладываются некоторые условия непрерывности. По данному вопросу мы можем указать работу Д. Тома (Thoma, Festschrift für A. Föppl).

ШЕСТАЯ ГЛАВА. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ.

§ 65. Теория Сен-Венана.

Теорию кручения старались построить еще задолго до Сен-Венана и в этом направлении достигли некоторых успехов. Повидимому, впервые этой задачей серьезно занялся Кулон (Coulomb); он нашел правильную формулу для угла кручения стержня круглого сечения. Затем позже Навье (Navier), пользуясь своей теорией изгиба, развил полную теорию кручения призматических стержней произвольного сечения, которая была очень проста и претендовала на полное и правильное решение всей задачи. Эта теория пользовалась всеобщим признанием до середины прошлого столетия и она даже до настоящего столетия имела еще отдельных последователей, хотя и была в очевидном противоречии с некоторыми очень простыми и общеизвестными опытными фактами.

На эти противоречия впервые указал Сен-Венан (de Saint-Venant). Многочисленными работами он поставил теорию кручения на совершенно новое основание. Если не считать стержней круглого сечения, для которых результаты в сравнении с прежними не изменились, то можно считать, что современная теория кручения начинается с Сен-Венана. Замечательно, однако, что прошло очень много времени, пока она утвердилась взамен теории Навье. Теория Сен-Венана получила полное признание лишь после смерти Навье, когда его книга «*Résumé des leçons*» в 1864 г. вышла в свет третьим изданием, переработанным Сен-Венаном. В этой книге, которая и теперь еще представляет один из важнейших литературных источников учения о кручении, Сен-Венан впервые дал краткое изложение этого вопроса согласно теории Навье, а затем на более чем 200 страницах, отвергая взгляды Навье, дал систематическое изложение своих собственных старых работ по теории кручения. Только начиная с этого момента был разрешен, по крайней мере, в глазах людей, играющих ведущую роль в этой отрасли знания, этот спорный вопрос. Если еще и высказывались возражения против этой теории, то они никогда не опирались на определенные опытные факты или на доводы, с вескостью которых должен был бы согласиться противник.

Теория Навье исходила из допущения, что поперечные сечения при кручении, так же как и при изгибе, остаются плоскими. Как известно, в случае изгиба это допущение как основание для расчетов оправдалось весьма хорошо; хотя в общем случае изгиба, когда действуют и касательные напряжения,

оно также оказалось не вполне верным. Поэтому понятно, что в кругах инженеров, занимавшихся чаще изгибом, чем кручением стержней, существовала тенденция применить гипотезу плоских сечений, давшую хорошие результаты при изгибе, также и при кручении, тем более, что в практически наиболее важном случае кручения круглого вала результаты, получаемые этой теорией, совпадают с результатами наблюдений наилучшим образом.

Менее понятно, что Навье, не обращая внимания на бросающиеся в глаза противоречия его теории с опытными фактами, даже при первом указании на эти противоречия, не задумался о том, насколько правильной можно считать гипотезу плоских сечений при кручении. Если бы у него хоть раз возникло такое сомнение, то он как глубокомысленный ученый при дальнейшем исследовании этого вопроса, наверное, пришел бы к таким же заключениям, как и Сен-Венан.

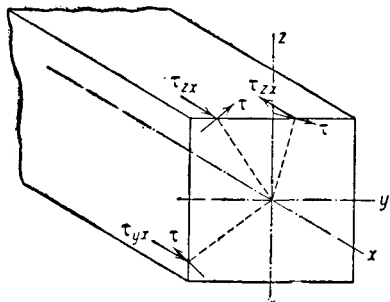
Расхождение между теорией кручения Навье и опытом нагляднее всего можно показать на следующем примере. Пусть рейшина и трость круглого сечения изготовлены из одинакового материала, причем поперечные сечения рейшины и трости имеют одну и ту же площадь. Длина обоих тел пусть будет также одинакова. Всякий, кто из своего опыта знает упругие свойства рейшины и трости, не будет сомневаться в том, что пара сил с одинаковым моментом закрутит рейшину при прочих равных условиях на значительно больший угол, чем трость. По теории же Навье было бы наоборот, потому что по этой теории угол кручения при прочих одинаковых условиях обратно пропорционален полярному моменту инерции площади поперечного сечения стержня. Но из всех фигур одинаковой площади круг имеет минимальный полярный момент инерции, а полярный момент инерции прямоугольника будет тем больше, чем меньше отношение узкой стороны его к длинной. Следовательно, по этой теории жесткость в смысле сопротивления закручиванию у рейшины значительно больше, чем у трости круглого сечения, что во всяком случае противоречит опыту.

Если теория не принимает во внимание таких общеизвестных фактов, то из этого неизбежно вытекает, что она построена на неправильном основании. Основная ошибка теории Навье заключается лишь в произвольном допущении, что поперечные сечения стержня при кручении должны оставаться плоскими, так как в остальном все в этой теории было развито последовательно. Лишь Сен-Венан освободился от этого допущения и, наоборот, доказал, что поперечные сечения стержня, за исключением круглого сечения, для которого теория Навье только и верна, при кручении должны обязательно искривляться. Неизбежность искривления во всех других случаях можно доказать путем опыта, пользуясь для этого надлежащими средствами.

В недопустимости предположения, что поперечные сечения при кручении остаются плоскими, можно убедиться легко также на основании следующих соображений. Рассмотрим, например, стержень квадратного сечения, начерченный на фиг. 75. Предположим, что стержню каким-либо путем сообщена деформация, соответствующая гипотезе Навье. Тогда каждая точка поперечного сечения по отношению к лежащей против нее точке соседнего сечения, которое мы считаем неподвижным,

опишет малую дугу круга, которая будет перпендикулярна к радиусу, проведенному из центра квадрата к рассматриваемой точке. В этой точке упругая деформация будет представлять собою только сдвиг, которому будет соответствовать касательное напряжение τ в плоскости поперечного сечения, пропорциональное сдвигу и идущее также в направлении, перпендикулярном к радиусу. Точно такие же заключения выводил и Навье, предполагая, что сечения сохраняют плоскую форму.

Теперь мы рассмотрим произвольную точку контура сечения, для которой будут также верны эти замечания. Касательное напряжение τ , действующее в произвольной точке контура, можно разложить на две составляющих τ_{xy} и τ_{xz} , из которых направление одной совпадает с направлением контура поперечного сечения, а направление другой перпендикулярно к нему. Каждой составляющей соответствует равное касательное напряжение на перпендикулярной площадке; эти напряжения мы обозначим через τ_{yx} и τ_{zx} . Касательное напряжение τ_{xz} должно быть приложено по боковой грани стержня, перпендикулярной к оси z . Отсюда следует, что для сохранения предположенной деформации нужно приложить не только пару сил на каждом из концов стержня, но также и внешние силы по боковой грани, которые должны действовать в направлении, параллельном касательным напряжениям. Только при выполнении этого условия можно осуществить деформацию такого типа, какую предполагал Навье.



Фиг. 75.

Однако при кручении стержня речь идет не о подобной нагрузке. Говоря о кручении, мы предполагаем, что деформация создается и поддерживается лишь парами, приложенными в конечных сечениях, в то время, как на боковые грани внешние силы и внешние реакции не действуют. Но при таких условиях напряженное состояние, получаемое на основании гипотезы Навье, противоречит необходимым условиям равновесия отдельных элементов объема, выделенных у боковой поверхности, а потому отсюда неизбежно вытекает неправильность его гипотезы.

Поэтому можно сказать: теория Навье не верна потому, что она грешит против важного граничного условия, согласно которому касательные напряжения в точках контура сечения не должны иметь составляющих, перпендикулярных к линии контура. Как раз в теории Сен-Венана это граничное условие и играет решающую роль. Наличие этого условия является причиной невозможности найти общее решение задачи о кручении, годное для всех поперечных сечений. Для каждой новой формы поперечного сечения нам приходится искать и новое решение.

Цель, преследуемая теорией кручения, заключается в определении как упругих деформаций, так и соответствующих напряжений в каждой точке стержня. К этой цели можно прийти двумя разными путями. Один путь, избранный Сен-Венаном, заключается в том, что сперва определяют упругую деформацию, представив перемещения ξ, η, ζ в виде функций от

координат x, y, z точки тела, какие она имела до деформации; это легко сделать при помощи основных уравнений упругости. После определения ξ, η, ζ на основании закона Гука находят и связанные с этими перемещениями напряжения.

Другой путь ведет к непосредственному определению напряжений, и после того как это сделано, находят вызываемые ими деформации. При этом способе исходят из уравнений совместности; в § 8 первой главы уже показано, как это может быть сделано. Этот второй способ имеет много преимуществ перед первым, особенно в том отношении, что его можно лучше использовать для отыскания приближенных решений.

Однако сперва мы пойдем по пути, использованному самим Сен-Венаном, который исходил из основных уравнений теории упругости, и сперва будем искать только точные решения. Конечно, мы должны тотчас же предостеречь читателя от переоценки «точности» этих решений. Хотя математическая задача о нахождении интеграла основных уравнений, удовлетворяющего требуемым граничным условиям, в некоторых случаях может быть решена совершенно строго, но из этого еще не следует, что такое решение безусловно надежно и с физической точки зрения. Это было бы действительно так, если бы предположения, на которых основан вывод основных уравнений, выполнялись строго. Однако обычно об этом не может быть и речи; мы предполагаем, что материал изотропен, но материал, из которого изготавливают рассчитываемые стержни, обычно обнаруживает в разных направлениях разные упругие свойства, что как раз может быть довольно отчетливо замечено при испытании на кручение¹⁾. Это видно уже из того, что значение модуля сдвига G , найденное из опытов над кручением, не особенно точно согласуется со значением, выражаемым через упругие постоянные E и ν по формуле (29) § 2, как это должно было бы иметь место для изотропного тела. Точно так же и предположение об однородности материала или об одинаковости свойств его в разных точках оправдывается не всегда, например в двутавровых балках часто можно заметить довольно резко выраженную разницу между внутренней частью и наружным слоем.

Кто думает заняться решением задач теории упругости лишь с целью испробовать свои математические способности, тот пройдет мимо таких расхождений теории с опытом с легким сердцем. Но инженер, занимающийся сопротивлением материалов не из любви к теоретическим исследованиям, а с целью получить надежное представление о действительно происходящих явлениях в телах, думает об этом совсем иначе. Даже математически строгая теория в нем всегда вызывает известное сомнение не в отношении правильности, а в отношении применимости ее на практике, и если нет подтверждения ее на опыте, то он безусловно не будет на нее полагаться. С этой точки зрения нет резкой границы между точными и приближенными теориями. Но несмотря на это, все же можно и тут делать известное различие между ними и теории доверяют тем больше, чем меньше она содержит произвольных

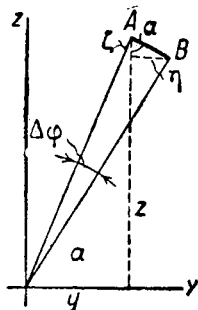
¹⁾ По вопросу о кручении стержней из анизотропного материала имеется русская работа проф. А. Ш. Локшина. См. Труды всероссийского съезда математиков в Москве, 1927 г., стр. 271. *Прим. перев.*

и сомнительных предположений. С этой точки зрения «точная» теория все же предпочтительнее.

Основные уравнения теории упругости, т. е. уравнения (36) § 2, в случае отсутствия объемных сил можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0; & \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0; & e &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Чтобы найти решение, относящееся к случаю кручения, мы будем считать, что все поперечные сечения стержня, достаточно удаленные от концов его, находятся в одинаковых условиях и что каждое сечение поворачивается относительно соседнего, как это уже предполагалось в теории Навье и о чем уже говорилось раньше при рассмотрении фиг. 75. Но в противоположность теории Навье, мы предполагаем, что каждое сечение к тому же еще и искривляется. Мы сперва рассмотрим ζ только поворот сечения, создающий перемещения η , в плоскости поперечного сечения. Оси координат мы проведем так, чтобы ось x совпала с осью стержня, а начало координат — с соответствующей точкой начального сечения, причем плоскость xy должна постоянно проходить через точку начального сечения, близкую к началу координат. При повороте произвольного поперечного сечения относительно системы координатных осей точка, обозначенная на фиг. 76



Фиг. 76.

буквой A , опишет малую дугу AB , длина которой равна произведению расстояния r от оси x на угол закручивания $\Delta\varphi$. Мы будем считать этот угол очень малым; он пропорционален расстоянию рассматриваемого сечения от начального, так что мы можем положить:

$$\Delta\varphi = \vartheta x,$$

где ϑ обозначает погонный угол закручивания (степень кручения), т. е. угол закручивания, приходящийся на единицу длины. Поэтому для перемещений η , ζ точки A на фиг. 76 получаются выражения

$$\eta = \vartheta x r \sin \alpha; \quad \zeta = -\vartheta x r \cos \alpha,$$

вместо которых можно написать

$$\eta = \vartheta x z; \quad \zeta = -\vartheta x r. \quad (2)$$

Этими формулами полностью характеризуется та часть всей деформации, которая только и принималась в теории Навье.

Искривление поперечных сечений происходит из-за перемещений точек сечения в направлении оси стержня, т. е. оно определяется

перемещением ξ . Нашей главной задачей мы должны, таким образом, считать определение ξ как функции от x , y , z .

Из (2) и (1) мы получаем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \text{и потому} \quad e = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Возникает вопрос, какое значение мы должны принять для e или, что то же, для $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. По формуле (34) § 2 мы имеем:

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right),$$

и если бы величина $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, или e , не была равна нулю, то в поперечном сечении стержня кроме касательных напряжений действовали еще и нормальные. Это вполне возможно, если стержень работает не только на кручение, но также одновременно на растяжение или на сжатие или на изгиб. Этим сложным случаем мы теперь заниматься не будем, а займемся самым простым, когда нормальные напряжения в плоскости поперечного сечения не действуют, а имеются лишь касательные напряжения. Возможность такого простого случая, а следовательно, возможность допущения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

вытекает из того, что мы при таком предположении можем удовлетворить как основным уравнениям теории упругости, так и граничным условиям.

Согласно формуле (3) все поперечные сечения стержня искривляются одинаковым образом, так что они остаются подобными (конгруэнтными) друг другу. Далее, из формулы (3) также следует, что $e = 0$, т. е. что деформация при чистом кручении происходит без всякого изменения объема. При этих предположениях второе и третье из основных уравнений теории упругости (1) удовлетворяются во всех точках, а первое переходит в следующее:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0. \tag{4}$$

Это хорошо известное дифференциальное уравнение, с которым знаком каждый математик и которое, например, играет большую роль в теории конформных отображений и аналитических функций. Оно имеет бесконечное число решений, из которых нужно отыскать решение, удовлетворяющее определенным условиям на границах. Сперва мы выясним, какие же граничные условия должны удовлетворяться в рассматриваемом случае.

На основании уравнений (34) § 2 и формул (2) и (3) мы для напряжений находим следующие значения:

$$\tau_x = \tau_y = \sigma_x = \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \vartheta z \right), \quad \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \vartheta y \right), \tag{5}$$

Поэтому внутри стержня мы во всех точках имеем чистый сдвиг, причем в каждой точке одна из секущих плоскостей, на которой действуют только касательные напряжения, совпадает с плоскостью поперечного сечения. На контуре сечения, как мы уже убедились в этом, рассматривая фиг. 75, направление касательного напряжения совпадает с направлением контура. Если координаты точки контура мы обозначим через y , z и представим себе, что уравнение контура будет иметь вид $z=f(y)$, то направление элемента контура будет характеризоваться производной $\frac{dz}{dy}$. Если направление элемента контура будет совпадать с направлением результирующей напряжений τ_{xy} и τ_{xz} , то должно существовать равенство:

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy},$$

а отсюда на основании формул (5) получается граничное условие для ξ :

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - \vartheta y}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + \vartheta z} = \frac{dz}{dy}. \quad (6)$$

Заслуга Сен-Венана в том и заключается, что он вывел эти уравнения и решил их для ряда различных форм поперечного сечения.

Одно из наиболее простых решений получается для эллиптического сечения. Положив

$$\xi = kyz, \quad (7)$$

мы заметим, что уравнение (4) будет удовлетворяться, а граничное условие перейдет в следующее:

$$\frac{(k - \vartheta)y}{(k + \vartheta)z} = \frac{dz}{dy},$$

откуда, интегрируя, находим:

$$(\vartheta - k)y^2 + (\vartheta + k)z^2 = C, \quad (8)$$

если под C понимать постоянную интегрирования. При $\vartheta > k$ это будет уравнение эллипса, отнесенное к центральным осям. Путем надлежащего выбора произвольных постоянных C и k можно получить любой эллипс. Именно, если полуоси эллипса обозначить через a и b , причем $a > b$, то мы должны иметь:

$$a^2 = \frac{C}{\vartheta - k} \quad \text{и} \quad b^2 = \frac{C}{\vartheta + k},$$

или, решая при данных a и b эти равенства относительно C и k , получаем:

$$C = 2\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}; \quad k = \vartheta \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (9)$$

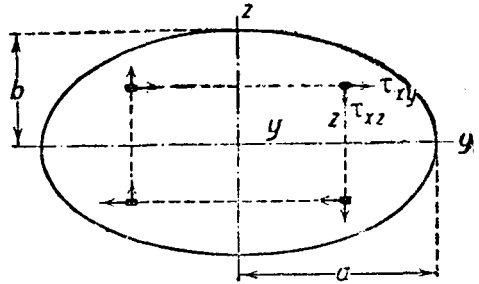
Остается лишь определить постоянную ϑ . Последняя определяется из условия, что касательные напряжения, действующие в каждом сечении, должны давать пару, уравновешиваемую крутящим моментом M . Но для касательных напряжений на основании формул (5) и (7) получаются выражения:

$$\tau_{xy} = G(\vartheta + k)z; \quad \tau_{xz} = G(k - \vartheta)y,$$

вместо которых после подстановки k из формулы (9) можно также написать:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= 2G\vartheta \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot z; \\ \tau_{xz} &= -2G\vartheta \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot y. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Знак ϑ может быть положительным или отрицательным и определяется в зависимости от направления вращения момента M . При положительном значении ϑ напряжения τ_{xy} и τ_{xz} , действующие на элемент площади F в первой четверти эллипса, имеют направления, указанные на фиг. 77 стрелками, т. е. стремятся вращать около центра эллипса по часовой стрелке. То же относится к напряжениям, действующим на симметрично расположенные элементы площади в других четвертях, как это следует из оснований формул (10). Напряжения, действующие на элемент dF , дают момент¹⁾:



Фиг. 77.

$$2G\vartheta \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} z^2 + \frac{b^2}{a^2 + b^2} y^2 \right) dF,$$

и потому, суммируя, мы получаем крутящий момент:

$$M = \frac{2G\vartheta}{a^2 + b^2} (a^2 I_y + b^2 I_x), \quad (11)$$

где I_y и I_x обозначают моменты инерции эллипса относительно осей y и z . Но для них, как известно, мы имеем выражения:

$$I_y = \pi \frac{a^3 b^3}{4}, \quad I_x = \pi \frac{b a^3}{4};$$

если подставить эти выражения в равенство (11) и решить его относительно ϑ , то условие равновесия моментов перейдет в следующее:

$$\vartheta = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G} M, \quad (12)$$

¹⁾ Момент считается здесь положительным, если он стремится вращать сечение по часовой стрелке. *Прим. ред.*

которое и определяет погонный угол кручения (угол закручивания, отнесенный к единице длины) стержня эллиптического сечения. Далее, при этом значении ϑ формулы (9) и (7) переходят в следующие:

$$k = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} M, \quad \text{или} \quad \xi = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} M y z. \quad (13)$$

Эти формулы полностью определяют упругую деформацию стержня эллиптического сечения при кручении. Мы видим, что сечение принимает форму гиперболического параболоида. Линии одинакового смещения ξ представляют собой равносторонние гиперболы, а все точки, расположенные на диаметре, после деформации будут лежать на параболе.

Если положить $a = b$, отчего эллипс перейдет в круг, то по формулам (13) k и ξ обратятся в нуль и в этом случае сечение, как это и предполагала теория Навье, останется и после деформации плоским.

Наконец, формулы (10) после подстановки значения ϑ из формулы (12) дадут для напряжений следующие выражения:

$$\tau_{xy} = \frac{2Mz}{\pi a b^3}; \quad \tau_{xz} = -\frac{2My}{\pi a^3 b}. \quad (14)$$

Если от центра эллипса перемещаться в радиальном направлении, то y и z будут увеличиваться в постоянном отношении, и то же будет с напряжениями τ_{xy} и τ_{xz} . Отсюда следует, что полное напряжение τ в каждой точке одного и того же радиуса имеет одно и то же направление, параллельное направлению касательной к эллипсу, проведенной в конце радиуса, или, иначе говоря, направлению сопряженного диаметра. Если мы в сечении начертим ряд эллипсов, подобных контурному и подобно расположенных, то в каждой точке такого эллипса напряжение τ будет проходить в направлении касательной к соответствующему эллипсу. Линию, лежащую в плоскости сечения и идущую в направлении касательного напряжения τ , называют траекторией касательных напряжений. Поэтому для эллиптического сечения траекториями касательных напряжений будут эллипсы, подобные эллиптическому контуру.

Наибольшее напряжение получается в конце радиуса-вектора. Если это напряжение обозначить через τ_u , то на основании формулы (14) получается:

$$\tau_u^2 = \frac{4M^2}{\pi^2 a^2 b^2} \left(\frac{z^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4} \right),$$

где под y и z нужно понимать теперь координаты точек контура. Но последние связаны уравнением:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

из которого можно z выразить через y , что даст нам:

$$\tau_u^2 = \frac{4M^2}{\pi^2 a^2 b^2} \cdot \frac{a^4 - y^2(a^2 - b^2)}{a^4 b^2}.$$

Мы предположили, что $a > b$, откуда следует, что τ_u^2 принимает наибольшее значение в той точке контура, в которой y^2 имеет наименьшее

значение, т. е. равно нулю. Поэтому для наибольшего напряжения τ_{\max} мы находим значение:

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi ab^2}, \quad (15)$$

причем это наибольшее напряжение получается в конце малой полуоси эллипса, т. е. в той точке контура, которая находится на наименьшем расстоянии от центра.

Как раз против этого заключения наиболее возражали последователи старой теории Навье. Им казалось естественным, что наибольшее напряжение должно получиться в той точке контура, которая наиболее удалена от центра, т. е. в конце большой полуоси. Тому, кто еще и теперь держался бы этого мнения, не обращая внимания на другие доводы, можно было бы предложить убедиться на опыте в том, какое решение правильно. Для этого следует закрутить цилиндр эллиптического сечения из мягкой стали с хорошо полированной поверхностью и наблюдать, в каком месте появятся линии Людерса, указывающие на переход за предел текучести. Здесь должны действовать наибольшие напряжения; таким образом этот опыт доказывает правильность теории Сен-Венана. Кроме того, опыт показывает, что сечения действительно искривляются, в то время как старая теория, опровергаемая опытом, основывалась на предположении, что сечения остаются плоскими.

Теория кручения стержней эллиптического сечения одновременно заключает в себе простой, но очень важный для практики, случай вала круглого сечения. Для него действительны все предыдущие формулы, если положить в них $b = a$.

Далее, найденное решение легко также обобщить на случай полого вала, предполагая, что внутренний контур полого сечения совпадает с одной из траекторий касательных напряжений соответствующего сплошного сечения. Это замечание действительно во всех случаях, а не только для эллиптического сечения, к которому мы применили его здесь. Именно, если мы предположим, что в сечении любой формы проведена одна из траекторий касательных напряжений, то она разделит сечение на внутреннюю и наружную части. Точно так же и цилиндрическая поверхность, сечение которой представляет рассматриваемая траектория касательных напряжений, разделит весь стержень на внутреннюю и внешнюю части. В сплошном стержне на границе между этими двумя частями никакие силы действовать не будут. Это вытекает из следующего: во всех точках стержня мы имеем чистый сдвиг, и поверхность раздела проведена нами таким образом, что во всех точках касательная к ней плоскость совпадает с площадкой, на которой не действует никаких напряжений.

Так как обе части не действуют друг на друга, то удаление одной части совершенно не отразится на другой. Равновесие между внешними силами, приложенными к концевому сечению, и создаваемыми ими напряжениями должно при этом сохраняться, как оно было и до удаления другой части. При этом само собой предполагается, что на концевых сечениях внешние силы распределяются совершенно таким же образом, как и напряжения во всех остальных сечениях, так что с удалением внутренней или внешней части стержня отпадает также и соответствующая часть внешних сил, действующих на концевое сечение.

Если внутреннюю часть стержня удалить, то получится полый вал, на который можно тотчас же обобщить решение, выведенное для сплошного сечения. Для эллиптического полого сечения с полуосями a и b для наружного и aa и ab для внутреннего контура, где α — правильная дробь, все предыдущие формулы можно оставить без изменения, за исключением формулы (11) для момента. Для моментов инерции I_y и I_z мы должны взять теперь следующие выражения:

$$I_y = (1 - \alpha^4) \frac{\pi a b^3}{4}; \quad I_z = (1 - \alpha^4) \frac{\pi b a^3}{4}.$$

Поэтому для погонного угла кручения вместо формулы (12) получается:

$$\vartheta = \frac{a^2 + b^2}{(1 - \alpha^4) \pi a^3 b^3 G} M. \quad (16)$$

Аналогично можно вычислить и напряжения, так что для наибольшего напряжения в конце малой полуоси наружного контура мы получим выражение:

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{(1 - \alpha^4) \pi a b^2}. \quad (17)$$

При $b = a$ эти формулы будут относиться к кольцевому сечению, для которого они преимущественно и применяются.

Сен-Венан дал точные решения не только для эллиптического сечения, но также для равностороннего треугольного и для прямоугольного сечений, которыми мы еще займемся. Кроме того, он рассмотрел еще ряд сечений с контурами, образованными алгебраическими кривыми более высокого порядка, для которых точное решение легко указать. Эти контуры он брал такими, чтобы они не слишком отличались от применяемых в технике, для которых нельзя было найти одновременно простых и точных решений. Например, Сен-Венан заменил квадратное и прямоугольное сечения такими, контуры которых образованы кривыми четвертого порядка, подходящими к сторонам этих сечений весьма близко. Это приводит к приближенной теории для квадратного и прямоугольного сечений, точное решение для которых не слишком отличается от решений для сечения, измененного указанным образом. Потребность в приближенном решении возникла потому, что точное решение для прямоугольного сечения можно представить лишь в виде бесконечного ряда, а не в конечной форме. Нам удобнее будет вывести приближенные решения другим путем, что мы и сделаем дальше.

§ 66. Введение функции напряжений.

Мы рассмотрим теперь задачу о кручении с другой точки зрения, о которой мы уже говорили, и будем стараться выразить в виде функции от координат точки поперечного сечения сперва напряжения τ_{xy} и τ_{xz} и лишь по ним определим деформации, получающиеся при кручении.

В § 8 уже было показано, как от уравнений совместности деформации

перейти к уравнениям (63) и (64), которым должны удовлетворять напряжения τ_{xy} и τ_{xz} в случае чистого кручения. Если их написать в обратной последовательности, то они имеют вид:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = C = 2G\vartheta. \quad (19)$$

Первое из этих уравнений было выведено на основании равновесия сил, действующих в направлении оси стержня, а второе из уравнений совместности деформаций. Постоянную C , которая была написана в формуле указанного параграфа, можно, как показывает формула (5) предыдущего параграфа, положить равной $2G\vartheta$.

С чисто аналитической точки зрения уравнение (18) выражает, что обе функции τ_{xy} и τ_{xz} можно выразить через одну функцию F от координат точек плоскости поперечного сечения, именно можно положить:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (20)$$

Введенная таким образом «функция напряжений» F , отыскание которой и является нашей ближайшей задачей, должна будет удовлетворить уравнению:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\vartheta, \quad (21)$$

вытекающему из уравнения (19).

Кроме того, должно быть еще выполнено граничное условие на контуре сечения, которое в предыдущем параграфе выражалось формулой (6). Здесь это граничное условие напишется проще. Именно из первоначального условия на контуре:

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy}$$

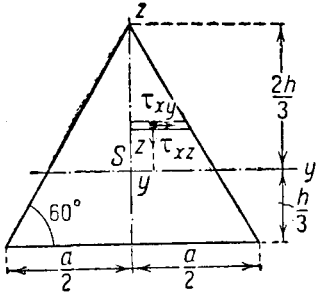
после введения функции напряжений получается:

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0. \quad (22)$$

Но это условие выражает, что F при обходе вдоль контура не изменяется. Это условие в случае полого сечения должно выполняться не только на внешнем контуре, а также и на внутреннем. Поэтому для всех линий контура F должно принимать постоянное значение, которое, однако, для разных друг от друга независимых линий контура вообще будет различным.

Точное решение задачи о кручении мы получим, если сможем определить функцию F таким образом, чтобы она удовлетворяла всем

названным условиям. Мы сперва рассмотрим один пример точного решения, а затем перейдем к приближенным решениям, не удовлетворяющим всем условиям.



Фиг. 78.

Пример относится к ранее упомянутому случаю равностороннего треугольника. Этот случай представляет вместе с тем и единственный пример сечения, ограниченного прямыми линиями, для которого задача о кручении решена точно и решение получено в простой замкнутой форме.

Пусть сторона треугольника обозначена, как на фиг. 78, через a , а высота через h , так что $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Ось z совместим с осью

симметрии сечения, а ось y проведем через центр тяжести треугольника. Уравнения трех ограничивающих сечение прямых относительно выбранной системы координат будут иметь вид:

$$z - \frac{2h}{3} - \frac{2h}{a}y = 0; \quad z - \frac{2h}{3} + \frac{2h}{a}y = 0, \quad z + \frac{h}{3} = 0.$$

Произведение этих трех равенств почленно дает уравнение, которому должна удовлетворять каждая точка периметра. После перемножения уравнение будет иметь вид:

$$z^3 - hz^2 - 3y^2z - hy^2 + \frac{4h^3}{27} = 0, \quad (23)$$

если всюду a выразить через h . Если мы для упрощения напомним короче

$$f(y, z) = 0,$$

то после дифференцирования по y и z мы получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4h. \quad (24)$$

Во всех случаях, когда сумма обеих вторых производных функции, при помощи которой выражается уравнение контура, дает постоянную величину, можно получить очень простое решение задачи о кручении, положив функцию напряжений F равной произведению f на некоторую постоянную. Этот случай имеет место как раз и в уже рассмотренном случае эллиптического сечения, для которого решение, найденное раньше другим путем, можно было бы быстро вывести только что предложенным приемом. В рассматриваемом случае треугольного сечения мы должны положить

$$F = \frac{2G\delta}{4h} \cdot f(y, z) = \frac{2G\delta}{4h} \left(z^3 - hz^2 - 3y^2z - hy^2 + \frac{4h^3}{27} \right);$$

это выражение будет удовлетворять всем условиям, выведенным для F , так как на основании (24) удовлетворяется дифференциальное уравнение (21),

и F для всех точек контура обращается в нуль, т. е. удовлетворяется граничное условие (22). Конечно, к F можно было бы, если угодно, добавить еще произвольную постоянную; но она здесь не нужна, так как напряжения зависят лишь от производных от F .

Если $f(y, z)$ приравнять положительному числу, меньшему чем $\frac{4h^3}{27}$, то мы получим уравнение одной из траекторий касательных напряжений, которая будет алгебраической кривой третьего порядка. По формулам (20) для касательных напряжений мы найдем выражения:

$$\tau_{xy} = \frac{G\delta}{2h} (3y^2 - 3z^2 + 2hz),$$

$$\tau_{xz} = -\frac{G\delta}{h} y(3z + h).$$

Остается лишь определить погонный угол кручения ϑ . Он найдется из условия, что касательные напряжения, действующие в сечении, должны уравновешиваться крутящим моментом M . Элемент площади dF , показанный на фигуре, дает для момента касательных напряжений относительно центра тяжести величину:

$$dF(\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) = dF \frac{G\delta}{2h} (3y^2z - 3z^3 + 2hz^2 + 6y^2z + 2hy^2).$$

Отсюда путем интегрирования по y получается момент напряжений, действующих на полоске высотой dz , идущей параллельно оси y и находящейся от нее на расстоянии z . Этот момент будет иметь величину:

$$\frac{G \cdot \delta a}{h} dz \left(\frac{z^4}{h} - \frac{10}{9} z^3 + \frac{2}{9} z^2 h + \frac{8}{243} h^3 \right),$$

и интегрирование по z в пределах между $z = -\frac{h}{3}$ и $z = +\frac{2h}{3}$ после вычислений дает:

$$M = \frac{G\delta ah^3}{30},$$

откуда погонный угол кручения ϑ получается равным:

$$\vartheta = \frac{30M}{Ga^4h^3} = \frac{80M}{Ga^4\sqrt{3}}. \quad (25)$$

Наибольшее касательное напряжение получается на середине сторон контура. Это значение τ_{xy} в точке $y=0$, $z = -\frac{h}{3}$, будет, следовательно, равно:

$$\tau_{\max} = \frac{G\delta h}{2} = \frac{15M}{ah^2} = \frac{20M}{a^3}. \quad (26)$$

Этим задача решена полностью, если не считать определения формы криволинейной поверхности, на которую перейдут точки первоначально

плоского сечения. Форму эту можно было бы легко определить, обратившись к формулам (5), из которых после определения всех величин можно найти ξ как функцию от u и z . Так как в этом практической необходимости нет, то этих вычислений мы здесь производить не будем.

§ 67. Приближенные решения для прямоугольного сечения.

Наилучший путь для получения практически годных приближенных решений в задаче о кручении заключается в использовании теорем о минимуме работы деформации, которые рекомендуется применять следующим образом. Сперва следует задаться каким-либо напряженным состоянием, строго удовлетворяющим всем условиям статики и зависящим в соответствии с желательной степенью точности от одного или нескольких произвольных параметров. Эти постоянные можно затем определить таким образом, чтобы соответствующая работа деформации была бы при выбранном типе напряженного состояния минимальной.

Всем требованиям статики, которые предъявляются как к точному, так и приближенному решению, мы удовлетворим, выбрав произвольную функцию напряжений F , которая, во-первых, во всех точках, расположенных на контуре, принимает одно и то же значение и в которую, во-вторых, входит одинаковый для всех членов множитель; последний и должен быть определен таким образом, чтобы напряжения, действующие в сечении, уравновешивались крутящим моментом M . В отдельных случаях вряд ли представит затруднение составление подходящего выражения для функции F , удовлетворяющей этим требованиям и одновременно содержащей одну или несколько произвольных постоянных. Для прямоугольного сечения, взятого нами в качестве основного примера применения рассматриваемого метода, это сделать во всяком случае легко, и притом это можно сделать различными способами. В других случаях при составлении подходящего выражения для функции F также не может встретиться никаких принципиальных затруднений, однако, вычисления могут оказаться столь сложными, что их будет трудно преодолеть, и по этой причине метод может оказаться непригодным.

Составив подходящее выражение для F , вычисляют соответствующую работу упругих сил A . Так как в рассматриваемой задаче тело находится в состоянии чистого сдвига, то удельную работу упругих сил в каждой точке мы должны положить равной:

$$A = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) = \frac{1}{2G} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right],$$

и потому для работы упругих сил A , приходящейся на единицу длины стержня, получается выражение:

$$A = \frac{1}{2G} \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] dF, \quad (27)$$

причем здесь одна и та же буква F имеет два разных значения, которые легко отличить одно от другого, так что это ничему не мешает

В случае сплошного сечения функция F должна удовлетворять лишь условию, что F на всем контуре должна иметь постоянное значение, и так как величина ее никакой роли не играет, то ее можно положить равной нулю. Благодаря этому все формулы для прогиба, которыми мы задавались в третьей главе при приближенном решении задачи об изгибе пластинок, можно применить без всякого изменения и в рассматриваемом случае.

Как и там, мы сперва рассмотрим более простое предположение, что F выражается функцией:

$$F = c \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi z}{2b}, \quad (28)$$

которая, очевидно, удовлетворяет требуемому граничному условию. Здесь, как и прежде в случае прямоугольной пластинки, за начало координат принят центр прямоугольного сечения, а под a и b нужно понимать половины сторон прямоугольника. Через c обозначен параметр, который должен быть определен таким образом, чтобы напряжения уравнивались крутящим моментом M . Это требование выражается формулой:

$$M = \int (z \tau_{xy} - y \tau_{xz}) dF = - \int \left(z \frac{\partial F}{\partial z} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dF. \quad (29)$$

Если подставить выражение F из формулы (28), то формула (29) перейдет в следующую:

$$M = c \int \frac{\pi z}{2b} \cos \frac{\pi y}{2a} \sin \frac{\pi z}{2b} dF + c \int \frac{\pi y}{2a} \sin \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi z}{2b} dF.$$

Воспользовавшись формулой:

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x,$$

мы получим следующий простой результат:

$$M = \frac{32abc}{\pi^2}.$$

Для того чтобы принятое выражение для F удовлетворяло всем условиям статики, мы должны написать:

$$F = \frac{\pi^2 M}{32ab} \cos \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi z}{2b}. \quad (30)$$

Конечно, в эту формулу не входят те произвольные постоянные, с помощью надлежащего выбора которых мы могли бы по теореме о минимуме энергии деформации получить напряжения, возможно менее отличающиеся от действительных. Поэтому у нас нет никакой гарантии в том,

что формула (30) дает сколько-нибудь хорошее приближение. Но мы можем все же рассматривать его как первое приближение, так как оно во всяком случае удовлетворяет всем требованиям статики, и потому у материала, имеющего упругие свойства, отличные от тех, которые мы предполагаем, оно может оказаться и соответствующим действительности. Поэтому не бесполезно установить некоторые следствия, которые можно вывести из написанной формулы.

По формулам (20) для касательных напряжений получаются выражения:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{\pi^3 M}{64ab^2} \cos \frac{\pi y}{2a} \sin \frac{\pi z}{2b}, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\pi^3 M}{64a^2b} \sin \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi z}{2b}.\end{aligned}$$

Если мы примем, что $a > b$, то наибольшее касательное напряжение получится в точке $y=0$ и $z=b$, т. е. на середине длинной стороны прямоугольника, и мы получим для него значение:

$$\tau_{\max} = \frac{\pi^3 M}{64ab^2} \approx 0,484 \frac{M}{ab^2}. \quad (31)$$

Чтобы вычислить также и погонный угол кручения ϑ , соответствующий этой приближенной формуле, мы подставим F в формулу (27) и выполним интегрирование по площади сечения, что можно сделать, пользуясь непосредственно интегральными формулами, выведенными в § 37. Мы получим:

$$A = \frac{\pi^6}{8192} \frac{M^2}{Ga^2b^2} \left\{ \frac{1}{a^2} \int \sin^2 \frac{\pi y}{2a} \cos^2 \frac{\pi z}{2b} dF + \frac{1}{b^2} \int \cos^2 \frac{\pi y}{2a} \sin^2 \frac{\pi z}{2b} dF \right\}$$

и после дальнейших преобразований:

$$A = \frac{\pi^6}{8192} M^2 \frac{a^2 + b^2}{Ga^3b^3}.$$

С другой стороны, работа упругих сил A должна равняться работе внешних сил, произведенной при кручении, т. е. величине $\frac{1}{2} M\vartheta$ и, приравнявая эти величины, мы получаем:

$$\vartheta = \frac{\pi^6}{4096} M \frac{a^2 + b^2}{Ga^3b^3} = 0,235 \frac{a^2 + b^2}{Ga^3b^3} M. \quad (32)$$

Мы, таким образом, получили, правда, еще очень грубую приближенную формулу для прямоугольного сечения, которую, однако, при помощи указанного способа, если не бояться связанных с ним вычислений, легко уточнить.

Например, для функции напряжений F можно было бы взять следующее выражение:

$$F = c_1 \cdot \cos \frac{\pi y}{2a} \cdot \cos \frac{\pi z}{2b} + c_2 \cdot \cos 3 \frac{\pi y}{2a} \cos 3 \frac{\pi z}{2b}, \quad (33)$$

удовлетворяющее как граничным условиям, так и условию симметричности и содержащее два параметра c_1 и c_2 , которые связаны только одним уравнением, выражающим условие равновесия между внешним моментом M и касательными напряжениями, действующими в сечении. Второе уравнение для их определения получается на основании теоремы о минимуме работы деформации, для чего нужно среди всех значений параметров c_1 и c_2 отыскать те из них, которые делают полную работу деформации минимальной. Тогда получится уже лучшее приближение к точному решению, которое мы выведем дальше.

Функция напряжений F , обращающаяся для всего контура прямоугольного сечения в нуль, может быть выражена также формулой:

$$F = c(a^2 - y^2)(b^2 - z^2). \quad (34)$$

В этом случае на основании формулы (29) для c получается выражение:

$$c = \frac{9M}{32a^3b^3},$$

и по формуле (27) после подстановки значения F для работы деформации получается выражение:

$$A = \frac{64c^2}{45G} a^3 b^3 (a^2 + b^2) = \frac{9}{80} \frac{M^2}{Ga^3b^3} (a^2 + b^2).$$

Для погонного угла кручения ϑ мы найдем формулу:

$$\vartheta = 0,225 \cdot \frac{a^2 + b^2}{Ga^3b^3} M. \quad (35)$$

Наибольшее напряжение τ_{\max} в точке $y=0$, $z=b$, предполагая опять $a > b$, получается теперь равным:

$$\tau_{\max} = 2ca^2b = \frac{9M}{16a^2b^2} = 0,562 \frac{M}{ab^2}. \quad (36)$$

Таковы будут формулы элементарной приближенной теории кручения стержня прямоугольного сечения, которыми обычно пользуются техники и которые были выведены подробнее, чем здесь, в третьем томе курса «Технической механики» А. Феппля.

По отношению к этой теории можно высказать упрек, что она основана на совершенно произвольных допущениях, вследствие чего она не заслуживает большого доверия.

Но ее большим преимуществом является простота, и ее можно без большого умаления последнего преимущества легко обобщить так, чтобы она лучше соответствовала действительным условиям кручения, а потому

давала более точные результаты. Для этой цели нужно лишь умножить выражение для F в формуле (34) на какую-либо простую функцию от u и z , не содержащую лишь членов первой степени и заключающую в себе несколько произвольных коэффициентов, что на выполнении требуемых граничных условий не отразится. Затем эти «параметры», как можно назвать упомянутые коэффициенты, следует определить, пользуясь теоремой о минимуме работы деформации, таким образом, чтобы получаемое решение возможно меньше отличалось от точного решения. Хотя с увеличением числа вводимых параметров, т. е. с увеличением точности, вычисления и становятся длиннее, все же они в сравнении с другими способами остаются в умеренных пределах¹⁾.

§ 68. Гидродинамическая аналогия и аналогия Прандтля.

Другой путь для получения удовлетворительных приближенных решений задачи о кручении заключается в том, что эту задачу сравнивают с родственными задачами из других отделов теоретической физики и заимствуют оттуда приближенные решения, которые или уже найдены там, или которые легко найти. Причина такого «родства» заключается в том, что задачи, взятые из других отделов теоретической физики, сводятся к решению тех же дифференциальных уравнений и что граничные условия в обоих случаях одинаковы. Точное решение одной задачи представляет одновременно точное решение и другой. Но и приближенное решение, найденное в одной области, можно обычно с успехом использовать для отыскания решений родственных задач из других областей.

В случае задачи о кручении найдены две разных аналогии, которые могут принести большую пользу. Одна из них взята из гидродинамики и относится к задаче о нахождении плоского стационарного потока жидкости, циркулирующей в цилиндрическом сосуде с твердыми стенками и имеющей одинаковую компоненту вихря во всех точках. Собственно мы имеем здесь не динамическую, а кинематическую задачу, так как силы, производящие это движение, совсем не рассматриваются.

Проведем оси координат uz в плоскости поперечного сечения цилиндрического сосуда, в котором происходит движение жидкости, и обозначим составляющие скорости по этим осям через v_y и v_x . С математической точки зрения наша задача заключается в том, чтобы выразить v_y и v_x в виде функций от координат в плоскости сечения. Уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости требует, чтобы в каждой точке сечения удовлетворялось уравнение:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (37)$$

¹⁾ Весьма простая приближенная формула, относящаяся к случаю кручения стержня прямоугольного сечения и дающая большую точность, выведена проф. Л. В. Канторовичем в статье «Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла» (Изв. Акад. наук, отд. физ.-мат. наук ИМЭН, 1933, № 5, стр. 647). Этот метод вообще очень полезен при решении многих краевых задач и других типов. *Прим. перев.*

Далее, у контура сечения скорость не может иметь составляющей, перпендикулярной к стенке, так как в этих местах жидкость должна течь вдоль стенки. Наконец, для того чтобы компонента вихря была во всех точках одинакова, должно еще удовлетворяться и другое уравнение:

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = \text{const.}, \quad (38)$$

так как по определению, принятому в гидродинамике, выражение, стоящее в левой части этого уравнения, и представляет компоненту вихря.

Сравнение формул (37) и (38) с формулами (18) и (19) § 66 показывает, что их можно привести к полному совпадению друг с другом, если положить:

$$v_y = m\tau_{xy}; \quad v_z = m\tau_{zx}; \quad \text{const.} = 2mG\delta,$$

где под m нужно понимать множитель, служащий для пересчета напряжений на соответствующие скорости.

Точно так же и граничные условия совпадают полностью, так как в одном случае напряжения, а в другом скорости должны идти в точках контура вдоль него. Уравнениями (18) и (19) и только что указанным граничным условием задача о кручении определялась однозначно, а потому, если мы сможем найти для сосуда того же сечения движение жидкости, то тем самым мы, наверное, будем иметь для того же контура и правильное решение задачи о кручении. При этом нужно лишь сохранить за собой право выбрать множитель m таким, чтобы пара сил, даваемая касательными напряжениями, уравновешивалась заданным моментом кручения M .

Эта аналогия имеет наиболее простое и практически наиболее важное применение при приближенном решении задачи о кручении сечения в форме вытянутого прямоугольника. Для этого случая мы в предыдущем параграфе уже вывели приближенные формулы совсем другим путем; но при этом мы пришли к заключению, что эти формулы нельзя считать достаточно точными. Выражения для функции напряжений, примененные выше, для предельного случая узкого прямоугольника подходят довольно плохо, и их следовало бы улучшить путем введения большего числа параметров, что, однако, привело бы к длинным вычислениям. Зато как раз в предельном случае узкого прямоугольника для получения достаточно близкого к точному приближенного решения особенно пригодна гидродинамическая аналогия.

Именно в случае узкого прямоугольника очень легко получить представление о том, какой характер должно приблизительно иметь движение жидкости. Для этой цели начертим в сечении ряд линий тока. Мы уже знаем, что эти линии тока совпадают с траекториями касательных напряжений в задаче о кручении. Наружная линия тока должна совпадать с контуром сечения; близкая к ней соседняя линия тока не может значительно отклоняться от линии контура, так как компонента вихря должна оставаться постоянной. Доказательство этого мы дадим в дальнейшем. Считая это установленным, мы выводим заключение, что в средней части

узкого прямоугольника (фиг. 79) линии тока почти прямолинейны и параллельны длинным сторонам. Если ось z провести, как это сделано на фигуре, через центр прямоугольника параллельно его коротким сторонам, то для всех точек, расположенных на оси z ,

$$v_x = 0$$

и, в то же время, с большим приближением

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Но по формуле (38) из этого вытекает, что в этих точках одновременно должно быть:

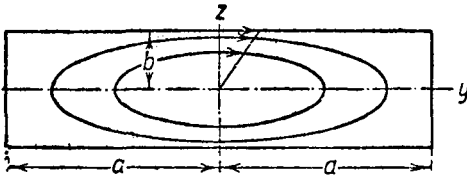
$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \text{const.}$$

Поэтому скорости, а следовательно, и напряжения в точках, расположенных на оси z , пропорциональны расстоянию от центра. Если от скоростей потока жидкости снова перейти к напряжениям, то для точек, расположенных на оси z , можно положить:

$$\tau_{xy} = 2G\vartheta z, \quad (39)$$

так как очевидно, что напряжения в начале координат должны обращаться в нуль и потому постоянная интегрирования равна нулю.

В концах небольшого отрезка dz , расположенного где-либо на оси z между $z=0$ и $z=b$, наметим направление двух линий тока, как это начерчено на фигуре, но только гораздо ближе одна к другой, и сообразим, как их нужно продолжить в плоскости прямоугольника дальше. Очевидно, что обе линии тока, так же, как и сам прямоугольник, имеют осями симметрии оси координат, и потому обе оси координат



Фиг. 79.

пересекают линии тока под прямым углом. Расстояние между ними на оси y несомненно должно быть больше, чем dz , так как все отрезки dz на оси z составляют вместе лишь небольшой отрезок b , в то время как соответствующие им отрезки на оси y составляют вместе значительно больший отрезок a . Вряд ли даже нужно было бы указывать на то, что благодаря известной закономерности всего потока, обусловленной постоянством вихря, отдельные отрезки dz не могут за счет других составлять исключение из этого правила.

Жидкость, заключенная между двумя соседними линиями тока, всегда остается между ними и образует струю («трубку тока»). Вследствие несжимаемости жидкость должна течь сквозь поперечное сечение струи с тем большей скоростью, чем меньше сечение. Отсюда непосредственно

вытекает, что в точках оси z , на которой линии тока сближаются больше всего, скорости жидкости должны быть больше, чем в других местах, в частности больше, чем в соответствующих точках оси y . Поэтому наибольшая скорость, а также и наибольшее напряжение, получатся в точках $y=0$, $z=\pm b$, т. е. на серединах длинных сторон прямоугольника.

Следует обратить внимание на то, как просто путем сравнения с движением жидкости мы сразу пришли к результату относительно места наибольшего напряжения, резко противоречащему старой теории Навье, в то время как при всяком другом методе, например при изложенном в предыдущем параграфе, этот же результат получается лишь после длительных вычислений и потому не представляется столь категоричным и столь убедительным, как в данном случае, где это следствие является почти очевидным.

В дальнейших вычислениях мы наибольшее касательное напряжение обозначим через τ_{\max} . Тогда для любой точки на оси z мы на основании формулы (39) должны положить:

$$\tau = \tau_{\max} \cdot \frac{z}{b}. \quad (40)$$

На элемент площади величиною $dz \cdot ds$, примыкающий непосредственно к оси z , будет действовать сила, момент которой относительно центра прямоугольника равен:

$$\tau_{\max} \cdot \frac{z}{b} \cdot dz \cdot ds \cdot z.$$

Сравним с этим элементом другой элемент, принадлежащий к той же струйке жидкости; его длину в направлении течения жидкости мы также обозначим через ds . Сила, действующая на этот элемент, будет иметь момент:

$$\tau_{\max} \frac{z}{b} \cdot dz \cdot ds \cdot p,$$

где p обозначает плечо этой силы, т. е. длину перпендикуляра, опущенного на касательную к линии тока, проведенную в соответствующей точке. Это следует из того, что скорость жидкости, а следовательно, и напряжение станут во столько раз меньше, во сколько раз ширина струйки жидкости в этом месте будет больше dz , так что произведение этих величин в пределах одной и той же струйки будет оставаться постоянным.

Поэтому все элементы площади, принадлежащие к одной и той же струйке, дают момент dM , для величины которого мы найдем выражение:

$$dM = \int \tau_{\max} \frac{z}{b} dz \cdot p \cdot ds.$$

Интегрирование должно производиться по всем элементам длины рассматриваемой струйки жидкости, пересекающей в расстоянии z от начала ось z и имеющей ширину dz на той же оси. Поэтому эти

множители, а также τ_{\max} и b при интегрировании можно считать постоянными, так что предыдущее равенство можно написать в виде:

$$dM = \frac{\tau_{\max}}{b} z dz \int p ds.$$

Входящий сюда интеграл $\int p ds$ имеет простое геометрическое значение. Если мы соединим концы элемента ds линии тока с центром прямоугольника, то мы получим бесконечно узкий треугольник с основанием ds и с соответствующей высотой p , так что $p ds$ представляет двойную площадь треугольника. Все треугольники такого рода, принадлежащие одной и той же линии тока, заполняют всю заключенную внутри линии тока площадь. Если площадь, заключенную внутри одной такой линии тока, мы обозначим через S , то мы можем положить также:

$$dM = \frac{\tau_{\max}}{b} 2Sz dz,$$

где S следует рассматривать как функцию от того расстояния z линии тока от начала координат, которое характеризует соответствующую линию тока и измеряется по оси z .

Поэтому уравнение моментов, выражающее условие равновесия между касательными напряжениями и крутящим моментом внешних сил, имеет вид:

$$M = 2 \frac{\tau_{\max}}{b} \int_0^b Sz dz. \quad (41)$$

До сих пор, по крайней мере, для очень вытянутого прямоугольника теорию можно считать точной. При дальнейшем же пользовании формулой (41) придется ввести ряд приближенных предположений.

При $z = b$ величина S равна площади всего прямоугольника, т. е. равна $4ab$. Если z лишь немного меньше, чем b , то площадь S , заключенная внутри соответствующей линии тока, будет, очевидно, мало отличаться от описанного около него прямоугольника, короткая сторона которого равна $2z$, а длинная несколько, но незначительно, меньше, чем $2a$. Спрашивается теперь, как можно оценить величину этой длинной стороны. На первый взгляд кажется, что вернее всего взять ее во столько раз меньше $2a$, во сколько $2z$ меньше, чем $2b$, т. е. положить ее равной $2a \frac{z}{b}$. Но мы сделали бы при этом значительную ошибку, именно это противоречило бы требованию, чтобы вихрь ($\text{curl } v$) во всех точках сечения имел одинаковую величину. Не задерживаясь на доказательстве этого, мы удовольствуемся значением, которое заведомо будет служить верхним пределом для S . Именно, мы вставим в предыдущее равенство заведомо преувеличенное значение

$$S = 4az$$

и получим:

$$M = 2 \cdot \frac{\tau_{\max}}{b} \int_0^b 4az^2 dz = \frac{8ab^2}{3} \tau_{\max}.$$

Если мы в этом равенстве под M будем понимать момент внешних сил и решим его относительно τ_{\max} , то мы получим:

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{8zb^2} = \frac{3M}{a_1 b_1^2}, \quad (42)$$

где под $a_1 = 2a$ и $b_1 = 2b$ нужно понимать длины сторон прямоугольника. Так как величина S была взята заведомо преувеличенной, то приближенная формула на pewno даст преуменьшенное значение для τ_{\max} .

Приближенное с той же точностью значение погонного угла кручения ϑ получится из формулы (39), если в ней положить $\tau_{xy} = \tau_{\max}$ и $z = b$, именно:

$$\vartheta = \frac{\tau_{\max}}{2Gb} = \frac{3M}{16ab^3G} = 0,1875 \frac{M}{ab^3G} = \frac{3M}{a_1 b_1^3 G}, \quad (43)$$

причем ясно, что найденное значение ϑ также преуменьшено, но насколько именно, это мы увидим дальше. Пока же мы укажем, что при сделанном относительно S предположении, значение S для линий тока, лежащих ближе к центру прямоугольника, сильно преувеличено; но эта ошибка не может сильно отразиться на результате, так как средняя часть сечения, несмотря на эту переоценку, даст только незначительную часть всего момента, потому что в формуле (41) как S , так и z для средней части меньше, чем для наружных струек жидкости.

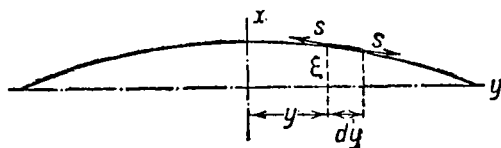
Как видно из изложенного, гидродинамическая аналогия благодаря своей наглядности представляет очень ценное средство для приближенной оценки напряжений в соответствующих случаях, хотя она и недостаточна для удовлетворительного ответа на все вопросы. В этом отношении ее превосходит другая аналогия, автором которой является Прандтль, к которой, действительно, дает нам в руки средство для определения опытным путем распределения напряжений в данном сечении при помощи надлежащих измерений.

Вырежем в тонком листе отверстие, совпадающее по форме с тем сечением, для которого желательно решить задачу о кручении. Пусть лист этот лежит горизонтально и закрывает собой сосуд, а само отверстие пусть затянуто столь же тонкой мыльной пленкой, как и в мыльных пузырях. Если в сосуд вдуть воздух так, чтобы в нем получилось незначительное избыточное давление в сравнении с давлением наружного воздуха, то мыльная пленка выпучится наружу и образует пузырь, возвышающийся над горизонтальной плоскостью листа. Если предположить, что ординаты мыльной пленки в сравнении с размерами отверстия незначительны, то можно доказать, что эти ординаты в каждой точке пропорциональны значениям функции F , рассматриваемой в задаче о кручении.

Чтобы доказать это, мы сперва выведем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять выпуклая поверхность мыльной пленки. Фиг. 80 показывает сечение мыльной пленки плоскостью, параллельной плоскости xu . Рассмотрим равновесие сил, действующих в направлении оси x и приложенных к элементу пленки, проектируемому на плоскость uz в виде малого прямоугольника со сторонами du и dz . Из капиллярной физики известно, что натяжение пленки, приходящееся

на единицу длины, не зависит от формы пленки и во всех точках ее имеет одинаковую величину, которую мы обозначим через s . Избыточное давление воздуха, отнесенное к единице площади, мы обозначим через p .

Тогда натяжение вдоль ребра dz рассматриваемого элемента пленки будет равно $s dz$, а составляющую этой растягивающей силы по оси x можно положить равной $-s dz \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}$, так как прогибы ξ , а следовательно, и угол наклона поверхности по отношению к плоскости yz по предположению малы, а потому вместо синуса угла наклона можно



Фиг. 80.

подставить тангенс его. На противоположном ребре элемента пленки будет действовать также капиллярное натяжение, составляющая которого по оси x дает аналогичное выражение, но имеет обратное направление. Поэтому в условии равновесия

сил, действующих в направлении оси x , будет входить лишь разность этих составляющих, равная $s dz \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy$. Так как ось x , как видно из фигуры, направлена в ту сторону, в которую выпучивается мыльная пленка, то вторая производная ξ имеет всюду отрицательное значение, и потому выражение, написанное выше, дает величину избыточной силы в отрицательном направлении оси x , т. е. направленной вниз.

Две других стороны элемента пленки, представляющего прямоугольник в проекции на горизонтальную плоскость, дают после сложения сил, направленных в разные стороны, также равнодействующую, направленную вниз, которая аналогично получается равной $s dy \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} dz$.

Этим силам противодействует составляющая избыточного давления на элемент пленки, имеющая величину $p dy dz$ и направленная вверх.

Если в условии равновесия вычеркнуть общий множитель $dy dz$, то получится дифференциальное уравнение мыльной пленки, а именно:

$$s \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + p = 0, \quad (44)$$

в котором s и p нужно считать постоянными.

С другой стороны, для функции напряжений F в задаче о кручении мы имеем дифференциальное уравнение (21), именно:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\theta.$$

Если мы в нем положим:

$$F = k\xi, \quad (45)$$

где k есть множитель, имеющий размерность напряжения, отнесенного к единице площади, а ξ имеет размерность длины, и если

давление p на мыльную пленку мы возьмем таким, чтобы оно удовлетворяло равенству

$$2G\theta = k \frac{p}{s}, \quad (46)$$

то оба дифференциальных уравнения полностью совпадут друг с другом. У сплошного сечения, какое мы сейчас предполагаем, совпадут полностью и граничные условия для F и ξ , так как у мыльной пленки ξ на контуре будет равно всюду нулю, а от функции напряжений требовалось, чтобы она вдоль всего контура принимала одинаковые значения. Этим доказано, что в надлежащем масштабе, который можно определить при помощи формулы (46), ординаты выпуклой поверхности, образованной мыльной пленкой, представляют значение функции напряжений F . По этой причине выпуклую поверхность пленки Прандтль назвал «холмом напряжений». Из сказанного в § 66, в котором мы ввели в рассмотрение функцию напряжений, вытекает, что линии одинаковой высоты (горизонтали), проведенные на «холме напряжений», одновременно будут и траекториями напряжений поперечного сечения.

Если от точки холма напряжений с координатами y, z, ξ перейти к соседней точке, то ордината ξ изменится на величину $d\xi$, которую можно положить равной:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz.$$

Поэтому путь, проложенный на выпуклой поверхности в направлении, образующем угол φ с плоскостью xy , будет иметь уклон, величина которого равна:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial \xi}{\partial z} \sin \varphi.$$

Если это выражение продифференцировать по φ и приравнять производную нулю, то мы тем самым определим направление, в котором уклон имеет максимум или минимум. Наибольший уклон на выпуклой поверхности в этой точке мы найдем после подстановки полученного значения φ в предыдущую формулу.

После простых вычислений мы найдем для него выражение:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2}.$$

С другой же стороны, полное касательное напряжение τ , получающееся при кручении, будет, если воспользоваться формулами (20) из § 66 и (45), равно:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2}. \quad (47)$$

Этим доказано, что величина касательного напряжения равна уклону поверхности мыльной пленки, умноженному на масштаб k .

По формуле (20) мы имеем:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

независимо от того, в каком направлении идут оси координат в сечении. Для упрощения изложения можем взять направления координатных осей такими, чтобы ось z пошла в направлении касательной к горизонтали, проходящей через рассматриваемую точку поверхности мыльной пленки, а ось y была перпендикулярна к ней. Тогда значение $\frac{\partial F}{\partial y}$ или $k \frac{\partial \xi}{\partial y}$ даст нам уклон поверхности мыльной пленки и касательное напряжение τ_{xz} , действующее в этой точке сечения. Этим замечанием можно заменить предыдущий подробный вывод зависимости между указанными двумя величинами. Мы можем к нему присоединить тотчас же и второе замечание. Если расстояние между двумя бесконечно близкими траекториями касательных напряжений, измеренное в направлении нормали, обозначить через dn , то величина

$$\tau dn = \frac{\partial F}{\partial n} dn = mv dn,$$

в соответствии с гидродинамической аналогией, представляет «силовой поток» сквозь сечение соответствующей струйки жидкости. Поэтому разность высот двух горизонталей поверхности мыльной пленки, расположенных на каком угодно расстоянии одна от другой, дает меру полного «силового потока» сквозь сечение, заключенное между соответствующими линиями напряжений. Если в каком-либо месте линии напряжений сближаются, то с точки зрения гидродинамики скорость увеличивается; проводя аналогию с мыльной пленкой, можно сказать, что поверхность мыльной пленки в этом месте становится круче; и то и другое указывает на то, что напряжение в этом месте становится значительнее. Поэтому обе аналогии можно применять совместно, причем они могут помогать одна другой и дополнять друг друга.

Далее, можно показать, что объем, ограниченный поверхностью мыльной пленки (объем холма напряжений), представляет меру углового сопротивления кручению.

Входящий в эту формулировку термин «угловое сопротивление кручению» нуждается в некотором пояснении. Угол закручивания ϑ , отнесенный к единице длины стержня, во всех рассматриваемых нами случаях пропорционален моменту кручения и обратно пропорционален G , модулю сдвига материала, из которого стержень сделан. Он зависит еще лишь от профиля поперечного сечения и от размеров его. Чем больше при данном профиле размеры поперечного сечения и чем лучше сопротивляется стержень кручению, тем меньше при данных M и G погонный угол кручения ϑ . Эту зависимость можно выразить формулой:

$$\vartheta = \frac{M}{JG}, \quad (48)$$

где J представляет величину, служащую мерой сопротивления закручиванию, обусловливаемого профилем и размерами поперечного сечения. Эта величина и называется угловым сопротивлением сечения кручению¹⁾, и уравнение (48) нужно рассматривать как формулу, при помощи которой и определяется этот термин. В противоположность этому термину произведение IG , зависящее также и от свойств материала стержня, называется жесткостью стержня при кручении.

В частном случае круглого сечения радиуса a угловое сопротивление кручению можно получить непосредственно из выведенных формул. Мы имеем для него выражение:

$$J = \frac{\pi a^4}{2},$$

т. е. угловое сопротивление кручению в этом и только в этом случае совпадает с полярным моментом инерции поперечного сечения. Далее в случае эллиптического сечения с полуосями a и b по формуле (12) § 66 мы получаем формулу:

$$J = \pi \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2},$$

которая заключает в себе предыдущую как частный случай²⁾. Наконец, для узкого прямоугольника по приближенной формуле (43) при $a > b$, мы будем иметь:

$$J = \frac{16}{3} ab^3 \quad (49)$$

с оговоркой, что это значение, как мы уже знаем, неверное преувеличено.

Эти замечания сделаны только для иллюстрации на рассмотренных примерах термина «угловое сопротивление при кручении». Мы обратимся теперь к доказательству сформулированной выше теоремы о связи между угловым сопротивлением при кручении и объемом, ограниченным поверхностью мыльной пленки. Для этого мы будем исходить из уравнения моментов (29), именно из равенства:

$$M = - \int \left(y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} \right) dF_1,$$

где теперь во избежание путаницы элемент площади мы обозначили через dF_1 . Путем интегрирования по частям мы получаем:

$$\int y \frac{\partial F}{\partial y} dF_1 = \int dz \int \frac{\partial}{\partial y} (yF) dy - \int F dF_1 = - \int F dF_1,$$

¹⁾ Этот термин малоупотребителен в русской литературе, ибо величина, им обозначаемая, имеет размерность момента инерции, а филологически недостаточно точно определяет суть дела. Более употребительно понятие «жесткости при кручении». *Прим. ред.*

²⁾ Следует помнить, что это выражение уже не представляет собою полярного момента инерции эллипса, который равен $I_p = \pi \frac{ab}{4} (a^2 + b^2)$ *Прим. ред.*

так как при интегрировании по u получается выражение uF , которое при подстановке пределов интегрирования, соответствующих контуру, обращается в нуль в силу того, что сама функция F обращается в нуль.

Другой интеграл, входящий в уравнение моментов, можно преобразовать аналогичным образом, вследствие чего рассматриваемое равенство перейдет в такое:

$$M = 2 \int F dF_1 \quad (50)$$

или, если вспомнить о связи между F и ξ , выражающейся формулой (45), в следующее:

$$M = 2k \int \xi dF_1. \quad (51)$$

С другой стороны, соединяя формулы (46) и (48), мы получаем:

$$M = k \cdot \frac{p}{s} \cdot \frac{J}{2},$$

и сравнение с предыдущим равенством показывает, что имеет место соотношение:

$$J = 4 \frac{s}{p} \int \xi dF_1. \quad (52)$$

Это и доказывает теорему, так как интеграл, входящий в формулу, представляет объем, ограниченный поверхностью мыльной пленки.

Таким образом «угловое сопротивление кручению» для данного сечения можно было бы определить путем опыта с мыльной пленкой, если была бы известна зависимость между s и p . На практике поступают следующим образом. В одной и той же стенке сосуда делают два разных отверстия, которые затягивают мыльной пленкой и из которых одно имеет круглую форму, а другое имеет форму того поперечного сечения, для которого требуется определить J . Тогда угловые сопротивления кручению обоих сечений будут относиться друг к другу как объемы, ограниченные мыльными пленками.

Так как угловое сопротивление кручению для круглого сечения известно, то, измерив эти объемы, мы путем сравнения найдем и искомое угловое сопротивление кручению для рассматриваемого сечения¹⁾.

¹⁾ Недавно Л. Феппл опубликовал новую работу «Eine Ergänzung des Prandtl'schen Seifenhautgleichnisses zur Torsion», «Z. f. ang. M. u. M.», т. 15, № 1—2, 1935. См. также статью Bauersfeld W. «Über eine Erweiterung des Prandtl'schen Membrangleichnisses», напечатанной в «Ingenieur-Archiv», т. 5, № 1, 1934. См. также Thiel «Photogrammetrisches Verfahren zur Lösung von Torsionsaufgaben» «Ingenieur. Archiv» 1934 № 6, стр. 417. *Прим. перев.*

§ 69. Применение теоремы Стокса к задаче о кручении.

Теорема Стокса представляет чисто математическую теорему, относящуюся к геометрии вихревых полей и с большой пользой применяемую во многих отделах теоретической физики, в особенности в теории электричества и магнетизма. Она имеет также важное значение и в теории кручения стержней. Так как мы не можем предполагать, что читатель ее знает, то мы ее выведем, ограничившись тем простейшим случаем, в котором мы ее применим.

Соединим в плоскости сечения стержня произвольную точку A с произвольной точкой B при помощи произвольной кривой, которую мы примем за путь интегрирования, и рассмотрим интеграл

$$\int_A^B \tau_s ds;$$

вместо него по формуле (5) можно написать:

$$\int_A^B \tau_s ds = \int_A^B (\tau_{xy} dy + \tau_{zx} dz) = G \int_A^B \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz \right) + G \cdot \oint_A^B (z dy - y dz).$$

или

$$\int_A^B \tau_s ds = G (\xi_B - \xi_A) + G \oint_A^B (z dy - y dz). \quad (53)$$

Если путь интегрирования замкнут, так что B совпадает с A , то

$$\xi_B = \xi_A,$$

а интеграл в правой части становится равным двойной площади $2F$, заключенной внутри пути интегрирования. Таким образом теорема Стокса выражается в следующей форме:

$$\oint \tau_s ds = 2G \oint F. \quad (54)$$

Эту замечательную формулу нашел самостоятельно путем особых рассуждений, не зная теоремы Стокса, один из глубокомысленнейших инженеров, много содействовавший развитию технической механики, теперь покойный Р. Бредт (R. Bredt), бывший технический руководитель и владелец крупного машиностроительного завода в Веттере на Руре. Его статья «Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität» была опубликована в 1896 г. в журнале «V. d. I.», стр. 785. Он принял эту теорему за исходный пункт теории кручения вообще и двутавровой балки в частности. Эту работу можно назвать одной из лучших, когда-либо появлявшихся, по указанному вопросу.

§ 70. Приближенные решения для прокатных профилей.

Профили большей части сортов прокатного материала, как то: углового железа, двутаврового железа и т. д., состоит из нескольких узких прямоугольников, причем в местах перехода во входящих углах сделаны закругления. Наружные углы обычно делают острыми; если бы они также закруглялись, то это не отразилось бы на сопротивлении кручению, так как в частях сечения, примыкающих к этим углам, при кручении значительных напряжений не возникает.

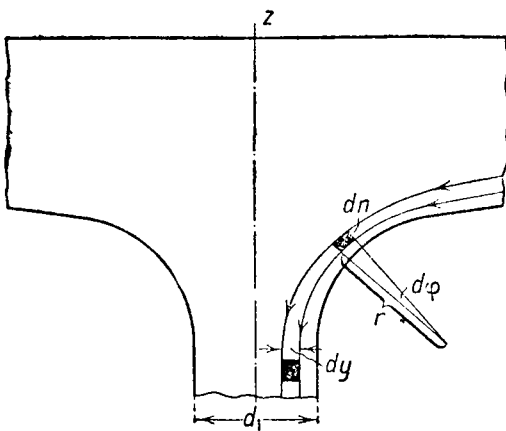
Опыт показал, что закругления во входящих углах необходимы, хотя бы уже для того, чтобы избежать дефектов в этих местах при прокатке, и вообще для гарантии соблюдения требуемой формы профиля. Но закругления необходимы также и для избежания концентрации напряжений во входящих углах в готовом прокате как при кручении, так и в известной степени при изгибе стержня.

Для случая кручения, которым мы занимаемся, это вытекает из простых соображений на основании гидродинамической аналогии. Именно, если жидкость вынуждена огибать острый угол, то линии тока сближаются, и потому скорость жидкости увеличивается, причем в предельном случае эта скорость получается бесконечно большой. Это показывают и чисто геометрические соображения. Для строгого доказательства, дающего возможность произвести и приблизительную оценку получающегося повышения напряжений, лучше всего исходить из уже формулированной теоремы Стокса.

Фиг. 81 изображает часть профиля двутавровой балки с соответствующими закруглениями во входящих углах в местах перехода вертикальной стенки в горизонтальную полку. Ось симметрии профиля принята за ось z . На правой стороне сечения начерчены две траектории касательных напряжений, которые по уже изложенным причинам должны проходить в общем аналогично соседней линии контура сечения. Две нормали к траекториям касательных напряжений выделяют элемент площади, который на фигуре сделан сплошь черным и к которому мы применим формулу (54).

Фиг. 81 изображает часть профиля двутавровой балки с соответствующими закруглениями во входящих углах в местах перехода вертикальной стенки в горизонтальную полку. Ось симметрии профиля принята за ось z . На правой стороне сечения начерчены две траектории касательных напряжений, которые по уже изложенным причинам должны проходить в общем аналогично соседней линии контура сечения. Две нормали к траекториям касательных напряжений выделяют элемент площади, который на фигуре сделан сплошь черным и к которому мы применим формулу (54).

Пусть радиусы кривизны обеих траекторий касательных напряжений будут r и $r + dn$ (фиг. 81), т. е. мы принимаем, что центры кривизны обеих траекторий касательных напряжений в рассматриваемом месте



Фиг. 81.

совпадают. Так как это предположение вводится лишь для определения разности между длинами элементов дуг, соответствующих центральному углу, то его можно считать допустимым. В точках, рассматриваемых нами, это допущение можно считать достаточно точным.

Касательное напряжение в соответствующей точке на траектории касательных напряжений, ближайшей к контуру сечения, мы обозначим через τ , а на другой — через $\tau + d\tau$. Тогда, применяя формулу (54) к выделенной части площади, мы получим:

$$\tau r d\varphi - (\tau + d\tau)(r + dn) d\varphi = r d\varphi dn \cdot 2G\vartheta.$$

Пренебрегая бесконечно малым членом третьего порядка, мы после деления на $d\varphi dn$ получим:

$$\tau + r \frac{d\tau}{dn} = -2Gr\vartheta,$$

вместо чего можно также написать:

$$\frac{d\tau}{dn} = -2G\vartheta - \frac{\tau}{r}. \quad (55)$$

Равенство это остается в силе и во всех других местах между одними и теми же траекториями касательных напряжений. Там, где траектории касательных напряжений проходят почти прямолинейно, т. е. в вертикальной стенке на большом расстоянии от полок, последняя формула упрощается и принимает вид:

$$\frac{d\tau}{dn} = -2G\vartheta, \quad (56)$$

т. е. получается такая же формула, какую мы имели с несколькими другими обозначениями при выводе формулы (39) для вытянутого прямоугольника. Действительно, такие же заключения, как и там, можно вывести и для частей вертикальной стенки, удаленных от горизонтальных полок.

Сравнение формул (55) и (56) показывает, что производная напряжения по нормали $\frac{d\tau}{dn}$ в месте закругления становится во всяком случае большей, а при весьма малом r даже значительно большей, чем на прямых или почти прямых участках линий тока.

С другой же стороны, если мы будем перемещаться по нормали n от контура по направлению внутрь сечения, то скоро мы придем в такую точку, в которой касательное напряжение будет почти равно нулю. Так как уменьшение касательного напряжения до нуля происходит на таких расстояниях от контура, которые как в области закругления, так и в теле вертикальной стенки вдали от горизонтальных полок не слишком от-

личаются друг от друга¹⁾, и так как производная напряжения по нормали к контуру $\frac{d\tau}{dn}$ на закруглении больше, чем в вертикальной стенке, то и касательное напряжение на контуре в области закругления будет, наверное, больше, чем на контуре вдали от горизонтальных полок. Если r будет уменьшаться до нуля, как мы это имеем во входящих углах без закругления, то по формуле (55) производная напряжения по нормали стремится неопределенно возрастать, а это возможно лишь в том случае, если касательное напряжение само будет бесконечно большим²⁾. Этим доказывается, что входящие углы без закруглений или даже углы с закруглением недостаточного большого радиуса должны привести к значительному повышению напряжений.

Ввиду сделанных при выводе формулы (55) допущений данная теория может рассматриваться лишь как приближенная, однако и независимо от этого она вообще дает лишь качественную оценку происходящих явлений. Зато положительной стороной ее является то, что она в очень наглядной форме указывает правила, которыми нужно руководствоваться для осуществления желаемых изменений распределения касательных напряжений во входящих углах. Не останавливаясь на этом, можно сделать еще нижеследующие подсчеты.

Если толщину вертикальной стенки двутавровой балки обозначить через d_1 , а касательное напряжение на контуре вертикальной стенки через τ_1 , то в частях вертикальной стенки, удаленных от мест перехода, мы должны положить:

$$\frac{d\tau}{dn} = -\frac{2\tau_1}{d_1} \},$$

а для мест перехода вертикальной стенки в горизонтальные полки на основании формулы (55) получается соотношение:

$$\frac{d\tau}{dn} = -\frac{2\tau_1}{d_1} - \frac{\tau}{r}. \quad (57)$$

Далее, наибольшее напряжение на контуре в пределах закругления мы обозначим через τ_2 , расстояние одной из траекторий касательных напря-

1) Высказанное автором допущение будет удовлетворяться в случае, если сечение составлено из вытянутых прямоугольников или близких к ним фигур (например полок и стенки и т.п.), толщины которых имеют близкие друг к другу размеры. *Прим. ред.*

2) Хотя математически из стремления к неограниченному возрастанию производной не следует стремление к неограниченному возрастанию самой функции, тем не менее в данном случае, принимая во внимание условие неразрывности потока, которое можно записать так:

$$\tau_1 dn_1 = \tau_2 dn_2.$$

ясно, что если $dn_2 \rightarrow 0$, делясь, например, величиной малой, второго порядка малости, в то время как dn_1 будет оставаться величиной первого порядка малости, то τ_2 должно будет неопределенно возрастать. *Прим. ред.*

*) Так как согласно формулам (39) и (40) — $2G\vartheta = \frac{2\tau_1}{d_1}$. *Прим. п. ред.*

жений проходящей очень близко к контуру, от закругления через da_2 , а расстояние той же траектории касательных напряжений от наружной поверхности вертикальной стенки через da_1 . Тогда по теореме непрерывности (неразрывности) потока жидкости для соответствующей струйки имеет место равенство:

$$\tau_2 da_2 = \tau_1 da_1.$$

Но производная напряжения по нормали к траектории касательных напряжений в точке 2 больше такой же производной в точке 1 по двум причинам, во-первых, потому, что τ_2 само по себе больше чем τ_1 , и потому уменьшение τ_1 на протяжении до соседней траектории касательных напряжений должно быть также примерно пропорционально больше, и, во-вторых, потому, что это уменьшение происходит на длине, которая меньше, чем в первом случае в отношении $da_2 : da_1$. Поэтому для приближенного расчета мы с достаточной точностью можем положить:

$$\left(\frac{d\tau}{dn}\right)_2 = \left(\frac{d\tau}{dn}\right)_1 \cdot \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2,$$

и если эту формулу соединить с формулой (57), то мы получим:

$$\frac{2\tau_1}{d_1} + \frac{\tau_2}{r} = 2 \frac{\tau_2^2}{\tau_1 \cdot d_1}.$$

Это будет квадратное уравнение, из которого можно определить неизвестную τ_2 . Если взять положительный корень, который нам только и нужен, то получается:

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{d_1}{4r} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4r}{d_1}\right)^2} \right). \quad (58)$$

По этой формуле можно с точностью, достаточной для практических целей, вычислить повышение напряжений в местах перехода не только для двутаврового, но также и для углового, швеллерного (корытного) и других профилей.

Если радиус r закругления будет равен $\frac{1}{3}$ толщины вертикальной полки, то по этой формуле τ_2 будет в два раза больше τ_1 . В то же время при $r = d_1$ мы будем иметь $\tau_2 = 1,28 \tau_1$, следовательно, напряжение повышается не особенно значительно.

Наконец, нужно еще указать на то, что даже большое значение τ_2 у балки с закруглениями недостаточно большого радиуса во входящих углах еще не влечет особой опасности, если только балка работает всегда на кручение в одном направлении. По этой причине опасаться разрушения конструкции, одним из элементов которой является такая балка, вообще не приходится. Последствия концентрации напряжений сказываются лишь в том, что в соответствующем месте получается незначительная остаточная деформация, из-за чего распределение напряжений изменяется и становится примерно таким, как если бы было сделано более глубокое закругление несколько большего радиуса. Иначе обстоит дело, если нагрузка действует попеременно в противоположных направлениях и если

такие колебания нагрузки повторяются очень часто. Тогда местная концентрация напряжений указанного характера может со временем привести к разрушению из-за так называемой «усталости» материала. У очень хрупкого материала, переносящего лишь незначительное превышение предела упругости, разрушение из-за большого увеличения τ_2 может получиться уже при первом же приложении нагрузки. Но во всех других случаях возникновение значительных напряжений τ_2 вообще обнаружить нелегко, и мы можем повышением напряжений в закруглении пренебречь, так как оно обычно¹⁾ ничему не вредит.

Этим вопрос о влиянии закруглений достаточно выяснен, и далее мы его рассматривать не будем. Угловое сопротивление при кручении от введения в профиль закруглений вообще изменяется незначительно, так что мы можем не обращать на закругления никакого внимания.

Для определения углового сопротивления кручению профиля, составленного из двух или большего числа узких прямоугольников, лучше всего основываться на аналогии Прандтля, хотя здесь оказывается удобной и теорема Стокса. При применении аналогии Прандтля мы можем воспользоваться сохранившимся в нашей памяти опытом, накопившимся у нас в детстве, когда мы еще играли с мыльными пузырями. До известной степени этот «практический» опыт может заменить нам эксперимент, производимый указанным выше образом для определения углового сопротивления при кручении.

Здесь мы опять имеем в виду, в первую очередь, двутавровый профиль, хотя то же, но с соответствующими изменениями относится и к другим профилям прокатного железа. Если на закругления во входящих углах и на сужение горизонтальных полок в направлении к концам их, встречающееся в старых нормальных профилях, внимания не обращать, то сечение двутавровой балки составляет из трех прямоугольников, из которых прямоугольник, соответствующий вертикальной стенке, во всех случаях является безусловно вытянутым, в то время как о сечениях горизонтальных полок утверждать это же с одинаковым правом нельзя. Лишь у новых профилей, с широкими горизонтальными полками, длинная сторона значительно больше узкой, так что эту сторону можно считать в сравнении с другой бесконечно большой. Мы предположим сперва, что имеем дело именно с таким профилем, имеющим широкие полки, и зададимся вопросом, как найти угловое сопротивление при кручении сечения, составленного из трех узких прямоугольников. Для ответа на этот вопрос сравним угловое сопротивление при кручении для всего профиля с суммой угловых сопротивлений трех частей, из которых состоит рассматриваемый профиль.

При решении этой задачи путем опыта с мыльной пленкой нужно отверстие в крышке сосуда, имеющее форму рассматриваемого профиля, разгородить двумя кусками тонкой проволоки, положив их вдоль линий раздела трех отдельных прямоугольных частей отверстия, и каждое из этих

¹⁾ Это утверждение не вполне точно, так как в случаях действия переменной внешней нагрузки концентрация напряжений должна быть учтена (хотя бы по формулам Зодерберга, см. Тимошенко, Сопротивление материалов, ч. II или Дружинин и Ягин, Сопротивление материалов с задачами, ч. I, 1933) соответственным снижением допускаемых напряжений. *Прим. ред.*

трех отверстий затянуть своей пленкой. После этого остается лишь путем опыта установить, в каком соотношении друг к другу находится сумма объемов, ограниченных тремя отдельными мыльными пленками, к объему, ограниченному цельной пленкой, находящейся под равномерным давлением p , действующим по площади всего односвязного отверстия.

Для всякого, кто в юности с достаточной наблюдательностью забавлялся мыльными пузырями, и без специально поставленного опыта ясно, что объем, ограниченный пленкой, натянутой над неперегороженным отверстием, будет больше суммы объемов, ограниченных пленками, натянутыми над тремя разделенными проволочками отверстиями. Кроме того, можно предвидеть, что разность между суммой объемов трех отдельных пузырей и объемом пузыря, опирающегося только на наружный контур, будет тем меньше, чем отношение длин отдельных прямоугольников к ширине их будет больше. Это вытекает из того, что вдоль линии раздела отдельных пузырей получается впадина, в то время как в другом случае таких впадин нет, и пузырь имеет над этим местом такую же высоту, как и оба смежных прямоугольника, если они имеют одинаковую ширину, или меньшая над узким отверстием высота пузыря переходит постепенно в большую высоту над широким отверстием. Но если длины прямоугольников в сравнении с шириной их велики, то форма мыльного пузыря вообще мало будет зависеть от того, был ли пузырь разделен проволочкой или же пленкой было затянута отверстие, не перегороженное проволочками.

На основании этого мы можем считать, что в случае профиля, составленного из очень узких прямоугольников, угловое сопротивление кручению всего профиля с достаточной точностью будет равно сумме угловых сопротивлений кручению отдельных прямоугольников, на которые можно разложить профиль; при этом мы должны сделать оговорку, что в сомнительных случаях мы должны проверить это путем опыта и установить отношение разницы объемов к объему, ограниченному мыльной пленкой, натянутой на неперегороженное отверстие. Если короткую и длинную стороны первого из этих прямоугольников обозначить через d_1 и l_1 и аналогичные обозначения ввести для всех других прямоугольников, то по формуле (49) часть момента сопротивления кручению, отвечающая первому прямоугольнику, будет равна:

$$J_1 = \frac{1}{3} l_1 d_1^3,$$

причем при пользовании формулой (49) нужно иметь в виду, что в ней a и b обозначают половины сторон, а здесь l_1 и d_1 — целые длины сторон. Поэтому угловое сопротивление при кручении полного профиля приближенно можно положить равным

$$J = \frac{1}{3} \sum l d^3, \quad (59)$$

где суммировать нужно по всем прямоугольникам полного профиля. При оценке точности, даваемой этой формулой,

нужно иметь в виду, что при определении величины J по формуле (49), как об этом было своевременно сказано, она будет заведомо преувеличена, а величина J , получаемая путем суммирования истинных значений J_1 , J_2 и т. д., наоборот, будет преуменьшена. Поэтому в формуле (59) обе погрешности частично друг друга уничтожают, но предвидеть, какая из них будет больше, нельзя. Поэтому будет ли величина J , вычисленная по формуле (59), преуменьшена или преувеличена, этот вопрос остается невыясненным.

С практической точки зрения это, однако, не является недостатком формулы (59), так как и независимо от этого, все наши теоретические выводы нуждаются в последующей проверке и в подтверждении путем опыта. Говоря так, мы имеем в виду не точные измерения рельефа мыльных пленок, а сравнение результатов вычислений с результатами специальных опытов, поставленных для проверки точности найденной формулы. Роль же аналогии Прандтля полностью исчерпывается тем, что она привела нас к общей формуле для углового сопротивления кручению J , отражающей достаточно близко к действительности истинное положение вещей.

Без предварительных теоретических соображений нельзя было бы объединить результаты весьма многочисленных опытов над кручением стержней разных прокатных профилей одной формулой. Кто когда-либо занимался экспериментальными исследованиями, тот знает, как важно иметь ориентировочную формулу (59), по которой можно было бы судить о результатах измерений и сравнивать их друг с другом. Если же такой формулы нет, что также часто встречается, то мы получаем беспорядочное скопление большого числа не связанных одна с другой цифр, к которым обычно вообще подступиться нельзя.

Мы надеемся, что результатами таких опытов на кручение мы будем располагать в ближайшем будущем. Пока же следует заметить, что вместо формулы (59) для сравнения с результатами наблюдений удобнее выведенная из нее на основании формулы 48) формула для угла кручения ϑ , отнесенного к единице длины стержня, а именно:

$$\vartheta = \frac{3M}{G \sum l a^3}. \quad (60)$$

Для этой же цели формулу снабжают поправочным коэффициентом ζ и пишут ее в виде:

$$\vartheta = \zeta \frac{3M}{G \sum l a^3}. \quad (61)$$

Задача экспериментатора заключается сперва в тщательном определении модуля сдвига G , а затем в установлении по наблюдаемым значениям ϑ поправочного коэффициента ζ .

При целесообразной постановке опытов результаты их будут представлять ценный вклад в область наших знаний об упругих свойствах прокатных материалов с разными профилями.

Теперь мы возвратимся еще раз к вопросу о наибольшем касательном напряжении τ_{\max} и о месте, в котором оно получается.

Здесь приближенные формулы для целей практического применения будут вполне достаточны. К тому же в настоящее время более точных формул мы вообще не имеем.

Предполагая, что ширину всех прямоугольников в сравнении с их длиной можно считать незначительной, и временно не обращая внимания на повышение напряжений в местах перехода отдельных прямоугольников друг в друга, мы узнаем величину наибольшего напряжения, вычислив по формуле (42) напряжения τ_{\max} , соответствующие отдельным прямоугольникам. Если через M_1 обозначить ту часть полного, действующего на всю балку крутящего момента M , которая уравнивается касательными напряжениями, действующими в первом прямоугольнике, то для него получается:

$$\tau_{\max, 1} = \frac{3M_1}{l_1 d_1^2},$$

причем погонный угол кручения ϑ для стержня с соответствующим прямоугольным сечением по формуле (43) получается равным:

$$\vartheta = \frac{3M_1}{G l_1 d_1^3}.$$

Далее, из этих двух формул получается:

$$\tau_{\max, 1} = G d_1 \vartheta,$$

и точно так же для наибольшего касательного напряжения во втором прямоугольнике получается значение:

$$\tau_{\max, 2} = G d_2 \vartheta.$$

Но погонный угол кручения ϑ в обеих формулах один и тот же, а именно тот, на который повертывается вся балка. Отсюда следует, что наибольшее касательное напряжение получается на середине длинной стороны самого толстого прямоугольника.

У двутавровой балки горизонтальные полки всегда толще вертикальной стенки. Поэтому наибольшее касательное напряжение получается не на середине длинной стороны сечения вертикальной стенки, а на полках, более жестких в смысле сопротивления кручению. В случае двутавровых балок с широкими горизонтальными полками, не имеющими уклона с внутренней стороны (двутавровые балки Грея), можно принять, что наибольшее касательное напряжение получается на середине наружных длинных сторон горизонтальных полок, если только закругления во входящих углах сделаны достаточно большим радиусом, чтобы исключить возможность чрезмерного повышения напряжений в закруглениях. Эти профили с достаточным основанием считаются более совершенными по сравнению со старыми.

В случае же нормальных профилей мы о месте возникновения наибольших напряжений ничего определенного сказать не можем, так как у нормальных профилей отношение длины горизонтальной полки к толщине ее не настолько велико, чтобы длину ее в сравнении с толщиной можно было считать бесконечно большой. Однако и для таких балок с помощью опыта с мыльной пленкой вопрос может быть решен с достаточной точностью. Следует еще указать, что Р. Бредт в указанной выше статье рассмотрел подробно и вопрос о месте наибольших напряжений в двутавровых балках, в то время изготовлявшихся лишь с нормальными профилями, и хорошо продумал его. Но нужно иметь в виду, что он, конечно, не обратил внимания на возможность существования в горизонтальных полках также замкнутых траекторий касательных напряжений, не заходящих в тело вертикальной стенки.

А. А. Гриффитс (A. A. Griffith) и Дж. Дж. Тейлор (G. J. Taylor) в работе, напечатанной в журнале «Engineering» в 1917 г., стр. 652, при помощи аналогии Прандтля с мыльной пленкой экспериментально доказали, что у двутаврового сечения в тех местах, где вертикальная стенка переходит в горизонтальные полки, действительно получают замкнутые траектории касательных напряжений, так как мыльная пленка, натянутая над сечением, имела над профилями полок местные возвышения.

Если у всех прямоугольников, из которых состоит профиль, длина l в сравнении с толщиной d очень велика, то наибольшее касательное напряжение с достаточной для практических целей точностью можно вычислять по простой формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{3Md_{\max}}{\sum l d^3}, \quad (62)$$

в которой M обозначает крутящий момент, воспринимаемый всем сечением, а d_{\max} наибольшую толщину. Эта формула получается из предыдущей для $\tau_{\max,1}$ и т. д., если в ней подставить выражение для ϑ по формуле (60). При применении этой формулы предполагается, что возможность значительного повышения напряжений во входящих углах устранена путем введения в профиль закруглений по достаточно большому радиусу.

Формулы, выведенные в этом параграфе для узких прямоугольников и для сечений, состоящих из таких прямоугольников, будут недействительны, если прямоугольники имеют очень незначительную толщину. В этом случае основные предположения, из которых исходит теория кручения Сен-Венана, вообще недостаточны, так как вследствие сравнительно значительной деформации стержней с таким сечением при их кручении получаются также и нормальные напряжения, перпендикулярные к сечению, которыми при значительном удлинении волокон в осевом направлении пренебрегать нельзя. Их влияние тем больше, чем уже прямоугольник. Подробнее об этом изложено у К. Вебера (C. Weber) в работе «Die Lehre der Verdrehungsfestigkeit», Forschungsheft № 249, изд. V. d. I. Далее, укажем здесь еще на другую работу того же

автора: «Der Verdrehungswinkel von Walzeisensträgern», помещенную в сборнике A. Föppl-Festschrift, Berlin 1924, в которой формула (59) для углового сопротивления при кручении исследована детальнее на нескольких примерах^{1) 2)}.

§ 71. Полые сечения.

Вообще говоря, задачу о кручении стержня с полым сечением решить труднее, чем в случае сплошного сечения, так как при этом должны быть выполнены еще граничные условия на внутреннем контуре, ограничивающем полость. Лишь в том случае, если внутренний контур совпадает с траекторией касательных напряжений сплошного сечения с одинаковым наружным контуром, эта лишняя трудность отпадает, и решение задачи можно получить непосредственно из решения для сплошного сечения. Об этом уже была речь раньше, и в § 65 были выведены формулы для круглого и эллиптического полых сечений, в случае которых указанное предположение выполняется. Во всех же других случаях и даже в случае полого сечения, ограниченного и внутри и снаружи кругами, но расположенными эксцентрично, задача о кручении становится много сложнее, чем для соответствующего сплошного сечения.

Сперва мы сообразим, как изменится аналогия Прандтля при обобщении ее на случай полого сечения. Представим себе, что мыльным пузырем затянута отверстие, соответствующее сплошному контуру. Срежем верхнюю часть пузыря горизонтальной плоскостью и наложим на нижнюю часть пузыря пластинку соответствующей формы. Нижняя часть мыльной пленки пристанет к краям этой пластинки так же, как она соединялась раньше с верхней удаленной частью пленки. При сохранении пластинкой своего положения условия, в которых находится нижняя часть пленки, не изменятся, и она попрежнему останется в равновесии. Если пластинку, так же как и мыльную пленку, считать невесомой, то она также будет оставаться в равновесии. Это доказывается следующими соображениями. К пластинке будут приложены в сущности те же внешние силы, которые раньше удерживали в равновесии верхнюю часть пленки, так как очевидно, что давление воздуха на площадь пластинки статически эквивалентно давлению воздуха на внутреннюю поверхность верхней части мыльного пузыря; это можно обнаружить непосредственно, рассмотрев равновесие объема воздуха, заключающегося между обеими упомянутыми поверхностями.

В этом случае мы также будем говорить о «холме напряжений», который, однако, сверху будет теперь ограничен плоскостью пластинки. Ординаты этой поверхности, включая и плоскость пластинки, точно так же, как и в предыдущем случае, и по тем же причинам дают значения функции напряжений в соответствующих точках полого сечения. Здесь верхняя горизонтальная часть поверхности напряжений соответствует полости сечения; во всех точках плоскости пластинки уклон

¹⁾ Интересная задача «О расчете лопастей пропеллера на кручение» рассмотрена пр.ф. А. С. Лейбензоном в Трудах ЦАИ, вып. 8, 1924. *Прим. ред.*

²⁾ О кручении двутавровой балки см. также новую работу W. Swalbe, Die Torsion von Walzeisensträgern в *Ingenieur-Archiv*, Bd. 5, H. 3, 1934. *Прим. перев.*

холма напряжений, а следовательно, и соответствующее напряжение, равны нулю. В этом новом случае остаются в силе все теоремы, указанные раньше для холма напряжений, в частности объем холма напряжений, если отнести к нему и верхнюю горизонтальную площадку, связан с угловым сопротивлением кручению полого сечения формулой (52).

Высоту верхней горизонтальной площадки над плоскостью наружного контура мы обозначим через h , а значение функции напряжений для верхней горизонтальной площадки через F_1 ; тогда обе величины будут по формуле (45) связаны соотношением:

$$F_1 = kh. \quad (63)$$

Производя опыт, высоту h можно в известных пределах выбирать произвольной; но при этом не следует упускать из виду предположения, лежащего в основании всей аналогии, что уклон поверхности мыльной пленки во всех точках должен быть достаточно малым, чтобы тангенс угла наклона можно было без большой ошибки заменить через синус, как это сделано при выводе дифференциального уравнения (44). Если это предположение выполнено, то изменение высоты h пластинки над стенкой сосуда будет иметь следствием лишь изменение масштаба k .

До сих пор все здесь было просто и понятно, но, к сожалению, вся эта теория применима лишь к тому простому случаю, когда расчетные формулы для полого сечения заключаются уже в формулах для сплошного сечения, именно к случаю, когда внутренний контур полого сечения совпадает с одной из траекторий касательных напряжений сплошного сечения. Можно показать, что аналогия Прандтля может быть подробным же образом проведена и в самом общем случае полого сечения с совершенно произвольным внутренним контуром. Однако в этом случае дело будет обстоять значительно сложнее, так что рассчитывать на решение задачи опытным путем из-за встречающихся трудностей нельзя. Тем не менее и в этих случаях аналогия сохраняет значение, по крайней мере, в том отношении, что она дает наглядную иллюстрацию задачи, которую можно с успехом применить для приближенной оценки напряжений.

Представим себе, что в стенке сосуда опять сделано отверстие, форма которого совпадает с наружным контуром полого сечения. Пусть на надлежащем расстоянии h над стенкой сосуда закреплена пластинка, форма и положение которой по отношению к отверстию в стенке соответствуют внутреннему контуру полого сечения. Теперь натянем мыльную пленку между краями отверстия в стенке и краями пластинки так, чтобы эта пленка вместе с пластинкой закрывала сосуд сверху. Форма этой мыльной пленки будет зависеть от величины избыточного давления воздуха p в резервуаре. Среди всех возможных форм будет существовать и та, которую мы ищем и при которой мыльная пленка и пластинка будут представлять вместе холм напряжений, обладающий всеми доказанными ранее свойствами. К этому можно лишь добавить, что избыточное давление воздуха p должно быть подобрано таким, чтобы полное давление воздуха на пластинку равнялось сумме направленных в прямо противоположную

сторону компонентов натяжений, приложенных к краям пластинки. Это равносильно требованию, чтобы все силы, действующие на нересомую пластинку в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, взаимно уравновешивались, как это мы имели и в первом рассмотренном выше простом случае. Но там пластинка была во всяком случае в равновесии; теперь же у нас выполнено лишь необходимое, но не достаточное условие равновесия, и потому пластинку для сохранения ее положения нужно удерживать добавочными силами. Правда, можно было бы ограничить движение пластинки таким образом, чтобы у ней оставалась лишь одна степень свободы движения только в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, и тогда пластинка должна была бы сама остановиться на высоте h , соответствующей давлению p . При такой постановке опыта можно было бы решить все вопросы, касающиеся любого полого сечения, точно таким же образом, как и в случае сплошного сечения. Но практические трудности, с которыми пришлось бы столкнуться при осуществлении этой идеи, очевидно, весьма значительны и их вряд ли можно преодолеть.

Для доказательства высказанных утверждений заметим, что функция

$$F = k\xi,$$

в которой ξ , так же как и в формуле (45), обозначает ординату поверхности, образованной как мыльной пленкой, так и пластинкой, удовлетворяет всем условиям, которыми определяется функция напряжений, кроме одного, о котором и будет идти речь дальше. Функция F , как было указано еще в § 66, удовлетворяет дифференциальному уравнению (21) только при выборе надлежащего значения k , причем граничные условия на обоих контурах выполняются также, так как на наружном контуре значение F равно всюду нулю, а на внутреннем F принимает всюду одно и то же значение $H = kh$. Следовательно, для получения решения нужно лишь взять для пластинки высоту h , соответствующую данному избыточному давлению воздуха.

Чтобы подготовить доказательство этого утверждения, мы сперва составим условия равновесия пластинки, совершающей вынужденное движение в одном направлении. К элементу ds_1 контура пластинки будет приложена капиллярная сила $s ds_1$, где первая буква s применена в прежнем значении¹⁾, а составляющая этой силы в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинки, будет равна:

$$s ds_1 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial n},$$

если уклон поверхности холма напряжений выразить через производную. Если площадь пластинки обозначить через S_0 , то условие равновесия будет иметь вид:

$$S_0 p = s \int \frac{\partial \xi}{\partial n} ds_1 = \frac{s}{k} \int \frac{\partial F}{\partial n} ds_1.$$

1) См. фиг. 80 на стр. 72. Прим. перев.

Но уклон холма напряжений дает, как мы нашли прежде, касательное напряжение, действующее в соответственно перпендикулярном направлении, и потому мы можем написать то же равенство в виде формулы, аналогичной формуле (54),

$$\int \tau ds_1 = k \frac{\rho}{s} S_0,$$

в которую входит криволинейный интеграл от касательного напряжения, взятый по внутреннему контуру¹⁾. Если принять во внимание, что по формуле (46) мы для установления соответствия между мыльной пленкой и холмом напряжений должны иметь:

$$2G\vartheta = k \frac{\rho}{s},$$

то предыдущее равенство перейдет в следующее:

$$\int \tau ds_1 = 2G\vartheta S_0; \quad (64)$$

таким образом по виду эта формула совершенно аналогична формуле (54), если не считать того, что здесь стоит S_0 вместо F и τds_1 вместо $\tau_s ds$, так как здесь направления τ и ds_1 совпадают и потому их скалярное произведение равно алгебраическому произведению численных значений этих величин.

Эти рассуждения указывают на тесную связь между аналогией Прандтля, с одной стороны, и теоремой Стокса, с другой. Точно так же и для любой другой горизонтальной плоскости, которую можно провести через холм напряжений, сумма вертикальных составляющих капиллярных натяжений, действующих в соответствующем сечении, умноженная на $\frac{k}{s}$, будет равна криволинейному интегралу касательного напряжения по соответствующей траектории касательных напряжений. Это дает возможность перейти от аналогии Прандтля к теореме Стокса, и наоборот. Так как опыт с мыльной пленкой в случае полых сечений не дает никаких надежд на получение удовлетворительных результатов, а теорема Стокса представляет очень удобное средство для нахождения приближенных решений для полых сечений, то мы и обратимся теперь к применению для полых сечений теоремы Стокса.

Нам нужно решить вопрос, можно ли применить формулу (64) к внутреннему контуру полого сечения или нет, если под ϑ понимать погонный угол кручения, определяющий напряжение, входящее в левую часть рассматриваемой формулы. Аналогия формулы (64) и (54) еще не доказывает правильности формулы (64). Это было бы так, если бы формула (64), так же как и прежняя формула (54), относилась к траектории касательных напряжений или к какой-либо замкнутой линии сплошного сечения. Но этого здесь нет; площадь, по контуру которой взят

¹⁾ Криволинейный интеграл от касательной составляющей вектора, взятый по замкнутому контуру, называют «циркуляцией». *Прим. ред.*

криволинейный интеграл, стоящий в левой части формулы, и к которой относится объем, стоящий в правой части, не принадлежит площади сечения, так что ни погонный угол кручения ϑ , ни модуль сдвига G для площади полости не могут иметь никакого значения.

Что формула (64) действительно верна, следует из формулы (53), полученной при выводе теоремы Стокса в предыдущем параграфе, которая действительна для любого пути интегрирования как в случае сплошного, так и в случае полого сечения. Если путь интегрирования замкнут, то эта формула переходит в формулу (54), причем безразлично, заключается ли внутри его полость сечения или нет. Здесь под F нужно понимать всю площадь, заключенную внутри пути интегрирования, следовательно, включая в нее и площадь внутренней полости, если она расположена внутри пути интегрирования. При применении к внутреннему контуру формула (54) переходит в формулу (64), что и доказывает правильность последней. Для наружного контура она имеет вид:

$$\int \tau ds = 2G\vartheta \cdot S_1, \quad (65)$$

где под S_1 нужно понимать всю площадь, заключенную внутри наружного контура поперечного сечения. Поэтому интеграл от касательного напряжения, взятый по наружному контуру полого сечения при данном погонном угле кручения ϑ , имеет такую же величину, как и для соответствующего сплошного сечения при одинаковом погонном угле кручения. Можно вывести также следующую, довольно полезную для многих вычислений формулу:

$$\frac{\int_1 \tau ds}{\int_0 \tau ds} = \frac{S_1}{S_0}. \quad (66)$$

§ 72. Тонкостенные трубчатые стержни.

Если на кручение работает тонкостенная труба, то на основании гидродинамической аналогии можно вывести следующие заключения. Во-первых, касательное напряжение τ не может изменяться значительно по толщине стенки, так что мы под τ можем понимать среднее значение, и, во-вторых, для двух разных мест с толщинами стенки h и h' средние касательные напряжения τ и τ' должны удовлетворять соотношению:

$$h \cdot \tau = h' \cdot \tau'. \quad (67)$$

Таким образом касательные напряжения обратно пропорциональны толщинам стенки.

Величину касательных напряжений легко найти благодаря их простой связи с крутящим моментом M . Для определения этой зависимости возьмем в сечении произвольную точку O (фиг. 82) и найдем относительно нее момент касательных напряжений, действующих на элемент ds . Его величина будет равна:

$$dM = \tau h ds \cdot l,$$

где опять через h обозначена толщина стенки в соответствующем месте, а через l длина перпендикуляра, опущенного из точки O на направление касательной.

Интегрируя по всей площади кольца, мы получим крутящий момент:

$$M = \tau h \int l ds = \tau h \cdot 2S, \quad (68)$$

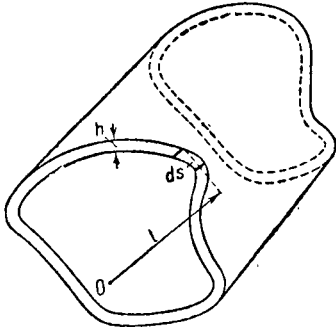
где через S обозначена площадь, заключенная внутри срединной линии кольцевого сечения. Поэтому касательное напряжение в каждом месте определяется по формуле:

$$\tau \cdot h = \tau' \cdot h' = \frac{M}{2S}. \quad (69)$$

Погонный угол кручения ϑ по формуле (64) получается равным:

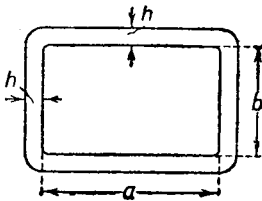
$$\vartheta = \frac{\tau \cdot h}{2G \cdot S} \int \frac{ds}{h} = \frac{M}{4G \cdot S^2} \cdot \int \frac{ds}{h}, \quad (70)$$

где интеграл должен быть взят вдоль замкнутой срединной линии кольцевого сечения.



Фиг. 82.

Эти формулы, выведенные Р. Бредтом в его работе «Studien zur Drehungselastizität» в журнале «Ztschr. d. V. d. I.», 1896, мы применим к полому сечению прямоугольной формы (фиг. 83). Так как толщина стенки принимается всюду постоянной, то и среднее напряжение постоянно, а именно по формуле (69) оно составляет:



Фиг. 83.

$$\tau = \frac{M}{2S \cdot h} = \frac{M}{2(a+h)(b+h)h}.$$

На основании формулы (70) погонный угол кручения для полого прямоугольного сечения будет равен:

$$\vartheta = \frac{2(a+b+2h)M}{4G(a+h)^2(b+h)^2h} = \frac{M}{GJ},$$

так что угловое сопротивление при кручении J приближенно получается равным

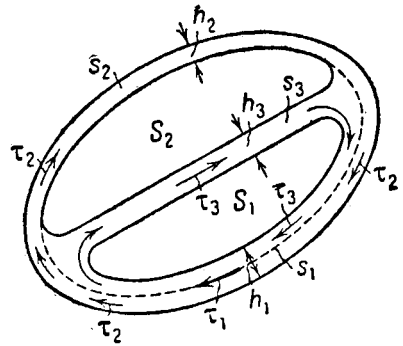
$$J = \frac{2h(a+h)^2(b+h)^2}{a+b+2h}. \quad (71)$$

Для полого квадратного сечения при $a=b$ угловое сопротивление при кручении приближенно равно

$$J = h(a+h)^3. \quad (72)$$

Во всяком случае угловое сопротивление при кручении для полого прямоугольного сечения значительно больше, чем если бы четыре прямоугольничка составляли односвязное сечение, когда J можно было бы вычислить приближенно по формуле (59).

Мы рассмотрим еще случай кручения трубчатого стержня с внутренней стенкой (фиг. 84). Пусть в пределах каждой из трех частей, из которых состоит сечение, толщина стенки постоянна. Если мы воспользуемся гидродинамической аналогией и будем рассматривать касательные напряжения как скорости, то мы тотчас же увидим, что в случае сечения из двух одинаковых половин в соединительной стенке вообще никаких касательных напряжений не будет, так как вследствие симметрии скорость потока в обеих половинах будет одинакова и потому в сечении внутренней стенки никакого движения жидкости, следовательно, и никаких касательных напряжений не будет¹⁾.



Фиг. 84.

В противном случае, когда внутренняя стенка разделяет все сечение на две несимметричных половины, мы на основании гидродинамической аналогии (при обозначениях фиг. 84) выразим сперва условие неразрывности в следующей форме:

$$\tau_1 h_1 = \tau_2 h_2 + \tau_3 h_3. \quad (73)$$

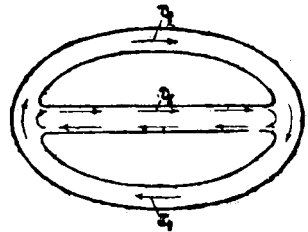
Общее движение жидкости, совершающееся в направлении часовой стрелки, можно представить себе состоящим из двух замкнутых потоков, из которых один с расходом $\tau_2 h_2$ течет вокруг площади $S_1 + S_2$, а другой с расходом $\tau_3 h_3$ — вокруг площади S_1 , причем в стенке толщиной h_1 течет таким образом два параллельных потока, вместе [согласно формуле (73)] составляющие общий поток с расходом $\tau_1 h_1$.

Применяя формулу (68) для описанных двух замкнутых потоков и принимая во внимание равенство (73), будем иметь:

$$M = 2\tau_2 h_2 (S_1 + S_2) + 2\tau_3 h_3 + S_1 = \tau_1 h_1 \cdot 2S_1 + \tau_2 h_2 \cdot 2S_2. \quad (74)$$

¹⁾ Автор упускает из виду другую, более вероятную возможность существования движения жидкости в сечении внутренней стенки в двух противоположных направлениях, как указано на рядом прилагаемом чертеже (фиг. 84а); это течение образует самостоятельный замкнутый в этой перегородке поток. *Прим. ред.*

²⁾ В оригинале проф. Л. Фепль вводит частичные моменты $M_1 = \tau_1 h_1 \cdot 2S_1$ и $M_2 = \tau_2 h_2 \cdot 2S_2$, которые, однако, представляются совершенно фиктивными, так как они не соответствуют каждому порознь никакому замкнутому потоку. Не заметив этой условности, Л. Фепль допускает не отвечающее физической сущности явления применение формулы Стокса. Поэтому вывод, данный Л. Феплем, нами заменен иным, приведшим к отличным от формул автора результатам, совпадающим, однако, с таковыми, приведенными в первой части курса «Теории упругости» проф. Тимошенко, но полученным из аналогии Прандтля. Совпадение нетрудно установить решением совместных уравнений (d) и (e) на стр. 166 части I изд. 1914 г. или сравнив с формулами (п), (v) и (p) на стр. 303 изд. 1934 г. *Прим. ред.*



Фиг. 84а.

Отмечая, что для каждой замкнутой линии обвода (это может и не быть линия тока) формула (70) Стокса должна дать один и тот же погонный угол закручивания ϑ , получим:

$$\vartheta = \frac{\tau_1 h_1}{2GS_1} \left(\frac{s_1}{h_1} + \frac{s_2}{h_2} \right) - \frac{\tau_2 h_2}{2GS_1} \cdot \frac{s_3}{h_3} = \frac{\tau_2 h_2}{2GS_2} \left(\frac{s_2}{h_2} + \frac{s_3}{h_3} \right) - \frac{\tau_1 h_1}{2GS_2} \cdot \frac{s_3}{h_3}. \quad (75)$$

Здесь мы исключили $\tau_3 h_3$ на основании соотношения (73), а через s_1 , s_2 и s_3 обозначили длины соответственных участков стенки и перегородки, имеющих постоянные толщины h_1 , h_2 и h_3 .

Из двух уравнений (74) и (75) нетрудно определить выражения для $\tau_1 h_1$ и $\tau_2 h_2$:

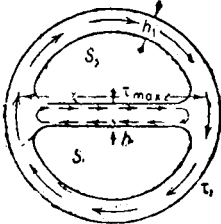
$$\left. \begin{aligned} \tau_1 h_1 &= \frac{M}{2} \cdot \frac{\frac{s_2}{h_2} \cdot S_1 + \frac{s_3}{h_3} (S_1 + S_2)}{\frac{s_2}{h_2} \cdot S_1^2 + \frac{s_1}{h_1} \cdot S_2^2 + \frac{s_3}{h_3} (S_1 + S_2)^2}, \\ \tau_2 h_2 &= \frac{M}{2} \cdot \frac{\frac{s_2}{h_2} \cdot S_2 + \frac{s_3}{h_3} (S_1 + S_2)}{\frac{s_2}{h_2} \cdot S_1^2 + \frac{s_1}{h_1} \cdot S_2^2 + \frac{s_3}{h_3} (S_2 + S_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

откуда на основании (73) получим также:

$$\tau_3 h_3 = \frac{M}{2} \cdot \frac{\frac{s_2}{h_2} S_1 - \frac{s_1}{h_1} S_2}{\frac{s_2}{h_2} \cdot S_1^2 + \frac{s_1}{h_1} \cdot S_2^2 + \frac{s_3}{h_3} (S_1 + S_2)^2}. \quad (77)$$

Из последней формулы вытекает, что $\tau_3 = 0$, если $S_1 = S_2$, $h_1 = h_2$ и $s_1 = s_2$; это как раз и выполняется в случае сечения с симметрично расположенной внутренней перегородкой¹⁾. Но условия, выражающие

¹⁾ Здесь следует обратить внимание на то, что полученный для симметричной перегородки результат не будет строго верен, так как она все-таки подвергается закручиванию с одним и тем же погонным углом закручивания ϑ . Однако в ней возникает самостоятельный замкнутый поток напряжений, как в прямоугольной тонкой пластинке, причем, несмотря на незначительный (сравнительно с трубчатой частью) приходящийся на нее скручивающий момент, напряжения могут в ней возникнуть достаточно большие (фиг. 84b):



Фиг. 84b.

где τ_{\max} есть наибольшее напряжение у контура перегородки, s_2 — длина ее. С другой стороны, имеем:

$$\vartheta = \frac{\tau_1 h_1}{2G(S_1 + S_2 + s_2 h_2)} \cdot \frac{s_1}{h_1} = \frac{\tau_{\max, 2}}{2Gh_2},$$

откуда

$$\tau_{\max, 2} = \frac{\tau_1 s_1 h_2}{S_1 + S_2 + s_2 h_2},$$

отсутствии напряжений во внутренней стенке, легко выполнить также и в случае несимметричных полых сечений.

Следует еще раз подчеркнуть, что указанные формулы являются приближенными, так как они выведены в предположении, что касательные напряжения по всей толщине стенки постоянны. При незначительной толщине стенки это заведомо выполняется с хорошим приближением; в случае же стенок значительной толщины при применении этих формул нужно соблюдать известную осторожность.

Так как сплошное сечение при помощи траекторий касательных напряжений можно также разложить на отдельные полые сечения с тонкими стенками, не оказывающие друг на друга никакого влияния, то полученные результаты для тонкостенных полых сечений можно с известным приближением обобщить и на все остальные сечения. Это показано Гельмутом Энгельманом (Helmut Engelmann) на отдельных примерах в его мюнхенской диссертации¹⁾.

§ 73. Точное решение для прямоугольного сечения.

Наиболее блестящим результатом теории Сен-Венана, найденным им самим, является точное решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения с произвольным отношением сторон. Он вывел две формулы, которые вполне заменяют одна другую и которые выражают перемещения ξ в виде функций от координат y и z поперечного сечения. Формулы содержат бесконечные ряды, которые, однако, быстро сходятся, так что они удобны для практического применения, в особенности, если в каждом отдельном случае пользоваться, в зависимости от отношения полусторон a и b , той из них, ряды в которой сходятся быстрее.

где s_1 есть длина всего трубчатого контура.

Пусть к примеру имеем круглую трубу со средним радиусом стенки

$$R = 20h_1, \quad h_2 = 2h_1;$$

тогда

$$S_1 + S_2 + s_2 h_2 = \pi R^2 = 400\pi h_1^2,$$

$$s_1 = 2\pi R = 40\pi h_1, \quad s_2 = 2R = 40h_1,$$

и наша формула для $\tau_{\max, 2}$ дает:

$$\tau_{\max, 2} = \frac{40\pi h_1 \cdot 2h_1}{400\pi \cdot h_1^2} \cdot \tau_1 = \frac{1}{5} \tau_1.$$

Отсюда ясно, что наибольшие напряжения, возникающие в перегородке, толщина которой не во много раз больше толщины стенки, будут малы по сравнению с напряжениями, возникающими в стенках трубчатого сечения. *Прим. ред.*

¹⁾ Она опубликована в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.» за 1929 г., Н. 5, стр. 386—401. *Прим. ред.*

Если воспользоваться гиперболическими функциями sh и ch , то формулы будут иметь вид:

$$\xi = -\vartheta yz + \frac{32a^2}{\pi^3} \vartheta \left\{ \sin \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\text{sh} \frac{\pi z}{2a}}{\text{ch} \frac{\pi b}{2a}} - \frac{1}{3^3} \sin 3 \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\text{sh} 3 \frac{\pi z}{2a}}{\text{ch} 3 \frac{\pi b}{2a}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{5^3} \sin 5 \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\text{sh} 5 \frac{\pi z}{2a}}{\text{ch} 5 \frac{\pi b}{2a}} - \dots \right\}, \\ \xi = +\vartheta yz - \frac{32b^2}{\pi^3} \vartheta \left\{ \sin \frac{\pi z}{2b} \cdot \frac{\text{sh} \frac{\pi y}{2b}}{\text{ch} \frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^3} \sin 3 \frac{\pi z}{2b} \cdot \frac{\text{sh} 3 \frac{\pi y}{2b}}{\text{ch} 3 \frac{\pi a}{2b}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{5^3} \sin 5 \frac{\pi z}{2b} \cdot \frac{\text{sh} 5 \frac{\pi y}{2b}}{\text{ch} 5 \frac{\pi a}{2b}} - \dots \right\}. \quad (78)$$

Здесь ϑ опять обозначает погонный угол закручивания. Заметим, что вместо формул для ξ можно вывести аналогичные формулы и для функции напряжений F , что сделать легко. Но мы остановимся лишь на формулах, данных самим Сен-Венаном.

Для доказательства правильности формул нужно сперва показать, что они удовлетворяют дифференциальному уравнению (4), именно уравнению:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0.$$

Что этому уравнению удовлетворяет первый член обеих формул, это ясно сразу, но и все следующие члены, взятые отдельно, также удовлетворяют уравнению, так как все эти члены имеют вид:

$$A \sin cy \text{ sh } cz,$$

и двукратное дифференцирование по y дает то же выражение, умноженное на $-c^2$, а при двукратном дифференцировании гиперболического синуса по z получается то же выражение, умноженное на $+c^2$, и потому сумма обеих производных действительно обращается в нуль. То же получается, если y и z поменять местами.

Затем нужно еще показать, что выполнены также и граничные условия.

По формуле (5) мы имеем:

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \vartheta z \right);$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \vartheta y \right);$$

если подставить первую из формул (78), то мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{16a}{\pi^2} G\vartheta \left(\cos \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}} - \frac{1}{3^2} \cos 3 \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\operatorname{sh} 3 \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} 3 \frac{\pi b}{2a}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5^2} \cos 5 \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\operatorname{sh} 5 \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} 5 \frac{\pi b}{2a}} - \dots \right), \\ \tau_{xz} &= -2G\vartheta y + \frac{16a}{\pi^2} G\vartheta \left(\sin \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}} - \frac{1}{3^2} \sin 3 \frac{\pi y}{2a} \cdot \frac{\operatorname{ch} 3 \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} 3 \frac{\pi b}{2a}} + \dots \right). \end{aligned} \right\} (79)$$

На сторонах прямоугольника, параллельных оси z , мы имеем $y = \pm a$, и потому каждый член ряда для τ_{xy} обращается в нуль. Следовательно, на этих сторонах граничные условия выполняются непосредственно. На двух других сторонах, параллельных оси y , должно обращаться в нуль напряжение τ_{xz} . При $z = b$ мы по второй из формул (79) получаем:

$$\tau_{xz} = -2G\vartheta y + \frac{16a}{\pi^2} G\vartheta \left(\sin \frac{\pi y}{2a} - \frac{1}{3^2} \sin 3 \frac{\pi y}{2a} + \frac{1}{5^2} \sin 5 \frac{\pi y}{2a} - \dots \right).$$

Но по известной формуле из теории тригонометрических рядов для каждого значения переменного x , заключенного между 0 и $\frac{\pi}{2}$, мы имеем:

$$x = \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right),$$

и потому все выражение, стоящее в скобках в формуле для τ_{xz} , равно

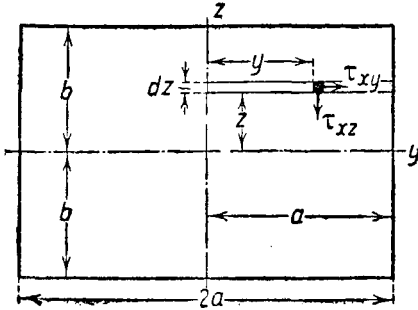
$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y\pi}{2a},$$

так что действительно, как это и требуется, τ_{xz} при каждом значении y обращается на боковых сторонах $z = \pm b$ в нуль.

Этим и исчерпывается доказательство правильности первой из формул (78). Доказательство для второй можно провести совершенно аналогичным образом. В этом случае напряжения выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= 2G\vartheta z - \frac{16b}{\pi^2} G\vartheta \left(\sin \frac{\pi z}{2b} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^2} \sin 3 \frac{\pi z}{2b} \cdot \frac{\operatorname{ch} 3 \frac{\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} 3 \frac{\pi a}{2b}} + \dots \right), \\ \tau_{xz} &= -\frac{16b}{\pi^2} G\vartheta \left(\cos \frac{\pi z}{2b} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^2} \cos 3 \frac{\pi z}{2b} \cdot \frac{\operatorname{sh} 3 \frac{\pi y}{2b}}{\operatorname{ch} 3 \frac{\pi a}{2b}} + \dots \right). \end{aligned} \right\} (80)$$

И эти выражения на боковых сторонах обращаются, как это и требуется, опять в нуль. Следует указать, что одна из этих формул получается из другой при повороте осей координат на прямой угол так, чтобы положительное направление оси z совпало с прежним положительным направлением оси y , а положительное направление оси y



Фиг. 85.

с прежним отрицательным направлением оси z ; это нам лучше всего показывает, что оба решения равносильны одно другому. Тем не менее не мешает сохранить их оба, чтобы в каждом отдельном случае воспользоваться тем из них, которое более удобно.

Формулы (78) — (80) можно применять лишь в предположении, что величина ϑ уже известна. Обычно же считается заданным не ϑ , а крутящий момент M , а величину ϑ нужно еще вычислить. Как и в прежних слу-

чаях связь между M и ϑ дает уравнение моментов, которое мы и выведем, приняв за центр моментов центр тяжести сечения.

Рассмотрим в первой четверти элемент площади $dydz$ с координатами y и z (фиг. 85). На этот элемент будет действовать касательная сила $\tau_{xy} dydz$, а момент ее будет иметь значение $z\tau_{xy} dydz$; если это выражение мы проинтегрируем по площади прямоугольника высотой dz от $y=0$ до $y=a$, то мы получим момент, величина которого на основании формулы (78) будет выражаться формулой:

$$z dz \frac{16a}{\pi^2} G\vartheta \cdot \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{\operatorname{sh} 3 \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} 3 \frac{\pi b}{2a}} + \frac{1}{5^3} \frac{\operatorname{sh} 5 \frac{\pi z}{2a}}{\operatorname{ch} 5 \frac{\pi b}{2a}} + \dots \right).$$

Затем мы проинтегрируем по z в пределах от $z=0$ до $z=b$. При этом мы должны пользоваться формулой:

$$\int x \operatorname{sh} x dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

при помощи которой, например, обозначая $\frac{\pi z}{2a}$ через u , мы найдем:

$$\int_0^b z \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2a} dz = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \left[u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \right]_0^{\frac{\pi b}{2a}} = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a} - \operatorname{sh} \frac{\pi b}{2a} \right).$$

Если аналогично проинтегрировать и остальные члены, то момент, получающийся от напряжений τ_{xy} , действующих в первой четверти прямоугольника, будет иметь выражение:

$$\frac{128a^4}{\pi^3} G\vartheta \left\{ \frac{\pi b}{2a} - \operatorname{th} \frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^3} \left(3 \frac{\pi b}{2a} - \operatorname{th} 3 \frac{\pi b}{2a} \right) + \frac{1}{5^3} \left(5 \frac{\pi b}{2a} - \operatorname{th} 5 \frac{\pi b}{2a} \right) + \dots \right\}.$$

Для всего сечения момент будет в четыре раза больше. Это выражение можно еще упростить, если соединить вместе члены, не содержащие гиперболического тангенса. Именно по известной теореме о разложении в ряд π^4 мы имеем:

$$\frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^4} \cdot \frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{5^4} \cdot \frac{\pi b}{2a} + \dots = \frac{\pi b}{2a} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \frac{\pi b}{2a} \cdot \frac{\pi^4}{96};$$

в правильности этой формулы можно убедиться и непосредственно путем вычислений. Поэтому напряжения τ_{xy} , действующие на всей площади, дадут момент:

$$\begin{aligned} \text{момент напряжений } \tau_{xy} = \\ = \frac{8}{3} G \delta a^3 b - \frac{512a^4}{\pi^5} G \delta \left(\text{th } \frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^4} \text{th } 3 \frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{5^4} \text{th } 5 \frac{\pi b}{2a} + \dots \right). \end{aligned} \quad (81)$$

Все вычисления мы повторим еще раз для того случая, когда τ_{xy} выражается формулой (80). В этом случае интегрирование по элементу площади, находящемуся на расстоянии z и имеющему высоту dz , в пределах от $y=0$ и $y=a$ дает нам:

$$z dz G \delta \left\{ 2az - \frac{32b^2}{\pi^3} \left[\sin \frac{\pi z}{2b} \text{th } \frac{\pi a}{2b} - \frac{1}{3^3} \sin 3 \frac{\pi z}{2b} \text{th } 3 \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{5^3} \sin 5 \frac{\pi z}{2b} \text{th } 5 \frac{\pi a}{2b} - \dots \right] \right\}.$$

Затем мы должны проинтегрировать по z от $z=0$ до $z=b$, причем мы должны пользоваться формулой

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x.$$

Умножив еще на четыре, чтобы получить момент для всего сечения, мы после вычислений получим формулу:

$$\begin{aligned} \text{момент напряжений } \tau_{xy} = \\ = \frac{8}{3} G \delta a b^3 - \frac{512b^4}{\pi^5} G \delta \left(\text{th } \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^4} \text{th } 3 \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{5^4} \text{th } 5 \frac{\pi a}{2b} + \dots \right). \end{aligned} \quad (82)$$

Обе формулы (81) и (82) должны давать одно и то же значение. Для фактического вычисления в каждом отдельном случае пользуются той из них, в которой ряд сходится быстрее. Если $a > b$, то быстрее будет сходиться ряд в формуле (82), в противном же случае быстрее будет сходиться ряд в формуле (81).

Нам остается еще вычислить сумму моментов напряжений τ_{xz} . Это можно было бы сделать аналогичным образом, воспользовавшись выражением τ_{xz} или из формулы (79), или из формулы (80). Но нам нет необходимости повторять все вычисления еще раз. Действительно, формула (79) для τ_{xz} получается, как это уже было указано прежде, из формулы (80) для τ_{xy} , если в ней заменить z через $-y$, а y через $+z$ и одновременно поменять местами a и b . Точно так же при выводе

выражения для момента напряжений τ_{xx} нужно заменить плечо z на y и одновременно нужно изменить знак, потому что напряжение τ_{xx} , если оно направлено в сторону, обратную положительному направлению оси z , будет стремиться вращать в направлении часовой стрелки, как это видно из фиг. 85. Так же обстоит дело и с формулой (80) для τ_{xx} , которая получается из формулы (79) для τ_{xy} путем таких же перестановок. Отсюда видно, что вычисление момента касательных напряжений τ_{xx} привело бы к тем же результатам, как и в случае касательных напряжений τ_{xy} , с тем единственным отличием, что буквы a и b будут переставлены одна на место другой.

Но обе формулы (81) и (82) для момента касательных напряжений τ_{xy} уже полностью совпадают одна с другой, если в одной из них поменять местами a и b . Отсюда следует, что обе формулы, которые мы вывели для момента напряжений τ_{xx} на основании формул (79) и (80), должны совпасть с формулами (81) и (82). Поэтому для прямоугольного сечения момент напряжений τ_{xy} равен моменту напряжений τ_{xx} , а отсюда, если обозначить через M крутящий момент, вытекает формула:

$$M = 2 \text{ моментам напряжений } \tau_{xy} = 2 \text{ моментам напряжений } \tau_{xx} \dots \quad (83)$$

При помощи этой формулы, в которую можно по произволу подставить соответствующее значение момента из формулы (81) или (82), можно определить погонный угол кручения ϑ . Мы сейчас произведем все вычисления для двух предельных случаев, когда прямоугольник представляет или квадрат, или же имеет очень незначительную толщину.

При $a = b$ обе формулы (81) и (82) совпадают, и мы находим:

$$M = \frac{16}{3} G \vartheta^4 a - \frac{1024 a^4}{\pi^5} G \vartheta \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^5} \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^5} \operatorname{th} \frac{5\pi}{2} + \dots \right)$$

По таблице гиперболических тангенсов мы находим, что $\operatorname{th} \frac{\pi}{2} = 0,9171$, а $\operatorname{th} \frac{3\pi}{2}$ и гиперболические тангенсы во всех следующих членах ряда отличаются от единицы лишь на пятый десятичный знак. Так как, кроме того, $5^5 = 15\,625$, то третий член в скобках отличается от единицы менее, чем на 0,0001, и потому мы получаем:

$$M \approx G \vartheta^4 \left(5,3333 - \frac{1024}{\pi^5} \left[0,9171 + \frac{1}{243} \right] \right) \approx 2,281 G \vartheta^4 a^4.$$

Если мы всю сторону квадрата обозначим через a_1 , так что $a_1^4 = 16a^4$, то формула для погонного угла кручения для квадратного сечения примет вид:

$$\vartheta = 7,014 \frac{M}{G a_1^4}. \quad (84)$$

Поэтому угловое сопротивление при кручении J для квадратного сечения имеет величину:

$$J = 0,1426 a_1^4 = 2,281 a^4. \quad (85)$$

Если мы снова, как и прежде, через a обозначим половину большой, а через b половину малой стороны узкого прямоугольника, то при вычислении погонного угла кручения для такого сечения нужно будет исходить из формулы (82), так как гиперболический тангенс большого числа, как уже отмечено раньше, весьма мало отличается от единицы. Поэтому мы получаем:

$$M = \frac{16}{3} G \vartheta a b^3 - \frac{1024 b^4}{\pi^3} G \vartheta \left(1 + \frac{1}{243} + \frac{1}{15625} + \dots \right) = \\ = G \vartheta (5,333 a b^3 - 3,360 b^4) = G \vartheta b^3 (5,333 a - 3,360 b).$$

Если и здесь вместо полусторон a и b ввести стороны a_1 и b_1 , то формулы для погонного угла кручения для узкого прямоугольника будут иметь вид:

$$\vartheta = \frac{M}{G \left(\frac{a_1 b_1^3}{3} - \frac{3,360}{16} b_1^4 \right)} = \frac{3M}{G b_1^3 (a_1 - 0,63 b_1)} \dots \quad (86)$$

Поэтому угловое сопротивление при кручении имеет величину:

$$J = \frac{b_1^3}{3} (a_1 - 0,63 b_1). \quad (87)$$

Если b_1 в сравнении с a_1 весьма мало, то последний член в скобках можно вычеркнуть. Тогда мы получим приближенную формулу (43), уже выведенную в § 68, которой мы впоследствии воспользовались при выводе формулы (59) для углового сопротивления при кручении балок с двутавровым и тому подобными профилями. Таким образом мы видим, что сделанное нами предположение дает результаты, достаточно точно совпадающие с результатами, выведенными на основании точной теории. Сомнение же в пригодности формулы (35), выведенной на основании других приближенных предположений, оказалось правильным, так как формула (35) дает значения, отличающиеся от точных на 20%.

Нам остается еще определить только наибольшее напряжение τ_{\max} , создаваемое заданным крутящим моментом M . На основании предыдущего нам известно, что наибольшее напряжение получается на серединах длинных сторон прямоугольника, так что при наших обозначениях ($a > b$) это будет напряжение τ_{xy} в точках $y = 0$, $z = \pm b$. Для вычисления наибольшего напряжения лучше всего исходить из формулы (80), так как ряд, стоящий в ней, сходится быстрее. Мы получаем:

$$\tau_{xy} = 2G \vartheta b - \frac{16b}{\pi^2} G \vartheta \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}} + \frac{1}{3^2 \operatorname{ch} 3 \frac{\pi a}{2b}} + \dots \right), \quad (88)$$

причем нет никакого смысла сохранять в скобках более двух членов, так как третий член, даже в самом невыгодном случае $a = b$, будет очень незначителен. Для этого случая мы имеем:

$$\tau_{\max} = 2G \vartheta b - \frac{16}{\pi^2} b G \vartheta \left(\frac{1}{2,509} + \frac{1}{9,55,665} + \dots \right) \approx \\ \approx 1,351 b G \vartheta = 1,351 a G \vartheta \approx 0,675 a_1 G \vartheta.$$

Сюда мы должны еще подставить значение для ϑ из формулы (84) и тогда мы для наибольшего касательного напряжения при квадратном сечении получим значение:

$$\tau_{\max} \approx 4,73 \frac{M}{a_1^3}. \quad (89)$$

Если сравним это значение, даваемое точной теорией, со значением из формулы (36), обычно применяемым в технике,

$$\tau_{\max} = \frac{9M}{16ab^2} = 4,50 \frac{M}{a_1 b_1^2},$$

то оказывается, что для квадратного сечения получается достаточно удовлетворительное совпадение.

В случае очень узкого прямоугольника уже первый член ряда в формуле (88) будет настолько мал, что весь ряд можно будет вычеркнуть и останется лишь выражение

$$\tau_{\max} = 2G\vartheta b = G\vartheta b_1.$$

Если сюда подставить значение ϑ из формулы (86), то получится:

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{b_1^2 (a_1 - 0,63b_1)}. \quad (90)$$

Пренебрегая здесь величиною $0,63b_1$, которая в сравнении с a_1 мала, получим приближенную формулу (42), выведенную на основании гидродинамической аналогии. Поэтому формулу (42) можно применять и для очень узких прямоугольников. Но лучше ее заменить почти столь же простой формулой (90).

§ 74. Точное решение для кругового секториального сечения.

Акад. А. Н. Динник в своей работе, написанной на русском языке ¹⁾, дал точное решение задачи о кручении стержней с сечением, имеющим форму кругового сектора ²⁾; это решение мы здесь и изложим.

Центральный угол кругового сектора мы обозначим через α , а радиус через a . Положение какой-либо точки внутри или на контуре сектора пусть определяется полярными координатами r и φ (фиг. 86). Для

¹⁾ «Известия Донского политехнического института» за 1912 г., т. I., отд. II и за 1913 г., т. II, отд. II. *Прим. перев.*

²⁾ Задача эта с помощью теории функций комплексного переменного решена Greenhill'ом (см. Love, *Mathematical theory of Elasticity* 1927, § 222), однако в приведенных Love формулах для случая кручения полуцилиндра, по утверждению акад. Динника, имеется ошибка. *Прим. ред.*

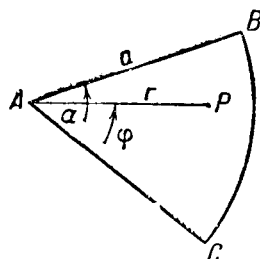
решения задачи применяется функция напряжений F , которая должна удовлетворять уравнению (21) § 66.

В полярных координатах это дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -2G\theta, \quad (91)$$

и граничные условия для $F(r, \varphi)$ будут следующие ¹⁾:

$$F(r, 0) = F(r, \alpha) = F(a, \varphi) = 0. \quad (92)$$



Фиг. 86.

Для упрощения мы вместо r введем новую переменную:

$$x = \frac{r}{a}, \quad (93a)$$

а вместо $F(x, \varphi)$ новую зависимую переменную:

$$f = \frac{F}{2G\theta a^2}. \quad (93b)$$

Тогда уравнение (91) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -1 \quad (94)$$

с граничными условиями:

$$f(x, 0) = f(x, \alpha) = f(1, \varphi) = 0. \quad (95)$$

Задачи рассматриваемого типа, сводящиеся к решению дифференциального уравнения (94) при граничных условиях (95), играют в теоретической физике большую роль. Мы попытаемся решить задачу, предположив, что $f(x, \varphi)$ можно представить бесконечным рядом, каждый член которого представляет произведение из функции от одного только x на функцию от одного только φ . Ввиду особой формы дифференциального уравнения в рассматриваемом случае естественно разложить f в ряд Фурье, в котором коэффициенты разложения являются функциями от x . Таким образом общее выражение для $f(x, \varphi)$ будет иметь вид ²⁾:

$$f(x, \varphi) = \sum_0^{+\infty} [X_p \sin(\beta_p \varphi) + Y_p \cos(\beta_p \varphi)].$$

¹⁾ Необходимо заметить, что дифференциальное уравнение (91) не будет удовлетворяться в точках контура B и C , так как в силу равенств (92) в этих точках мы будем иметь $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0$. *Прим. перев.*

²⁾ Нами исправлена здесь ошибка, вкравшаяся у авторов вследствие того, что в оригинальной работе Динника не проставлены пределы суммирования. Именно мы заменили знак суммы $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ знаком \sum_0^{∞} . *Прим. перев.*

Но на основании первых двух граничных условий все Y_p должны обратиться в нуль, а β_p должны удовлетворять условию:

$$\beta_p = p \frac{\pi}{a}.$$

Если мы в дифференциальное уравнение (94) вставим выражение:

$$f(x, \varphi) = \sum_1^{+\infty} X_p \sin\left(\frac{p\pi}{a} \varphi\right) \quad (96)$$

и примем во внимание, что коэффициенты X_p при синусах представляют функции от x , то дифференциальное уравнение перейдет в следующее:

$$\sum_1^{+\infty} \sin\left(\frac{p\pi}{a} \varphi\right) \left\{ \frac{d^2 X_p}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dX_p}{dx} - \frac{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2}{x^2} X_p \right\} = -1. \quad (97)$$

Если мы разложим постоянную величину, стоящую в правой части этого уравнения, в неполный ряд Фурье, а именно в ряд по синусам ¹⁾, то мы придем к дифференциальному уравнению второго порядка относительно X_p типа:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dX}{dx} + a_p - \frac{m^2}{x^2} X = 0,$$

(где $m = \frac{p\pi}{a}$) напоминающего уравнение Бесселя, но отличающегося от него свободным членом и коэффициентом при X_p ²⁾; решение этого уравнения, как в этом нетрудно убедиться, может быть представлено разложением по функциям Бесселя порядка m вида:

$$\sum_n A_{mn} J_m(\lambda_n x),$$

где λ_n суть корни функции Бесселя порядка m , удовлетворяющие таким образом условию $J_m(\lambda_n x) = 0$. В нашем случае $m = \frac{p\pi}{a}$, т. е. зависит от p . Здесь взят частный случай разложения по функциям Бесселя первого рода, так как функции Бесселя второго рода для $x=0$ обращаются в бесконечность, что не отвечает существу задачи. Таким образом из сказанного становится очевидным, что решение уравнения (94) следует искать в форме двойного ряда типа

$$f(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} B_{pn} \sin \frac{p\pi\varphi}{a} J_{\frac{p\pi}{a}}(\lambda_n x). \quad (98)$$

¹⁾ Возможность такого разложения следует из теории рядов Фурье, а соответствующий пример можно найти в книге акад. А. Н. Крылова «Приближенные вычисления», Ленинград 1933, стр. 181, решение которого может быть представлено в форме $1 = \sum_1^{\infty} a_p \sin \frac{p\pi}{a} \varphi$. *Прим. ред.*

²⁾ Частный пример интегрирования такого уравнения, в котором $m=0$, рассмотрен в работе акад. А. Н. Динника, Круглая мембрана под произвольной нагрузкой, Изв. Киев. пол. ин-та, 1910. Разложение искомой функции в ряд имеет вид $\sum_n A_n J_0(\lambda_n x)$, так что оно проведено, в соответствии с типом уравнения, по функциям Бесселя нулевого порядка. *Прим. ред.*

Чтобы провести решение и определить коэффициенты B_{pn} , разложим постоянную величину, стоящую справа в уравнении (94), в двойной ряд такого же типа:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{pn} J_{\frac{p\pi}{\alpha}}(\lambda_n x) \sin \frac{p\pi\varphi}{\alpha}. \quad (99)$$

Для этого умножим обе части равенства (99) на $\sin \frac{q\pi\varphi}{\alpha}$ и проинтегрируем по φ в пределах от 0 до α . Замечая, что:

$$\int_0^{\alpha} \sin \frac{p\pi\varphi}{\alpha} \cdot \sin \frac{q\pi\varphi}{\alpha} d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{для } p \neq q, \\ \frac{\alpha}{2} & \text{для } p = q, \end{cases}$$

а также, что

$$\int_0^{\alpha} \sin \frac{p\pi\varphi}{\alpha} d\varphi = \frac{\alpha}{\pi} [1 - (-1)^p],$$

придем к следующему соотношению:

$$\frac{2}{p\pi} [1 - (-1)^p] = \sum_{n=1}^{\infty} A_{pn} J_{\frac{p\pi}{\alpha}}(\lambda_n x). \quad (100)$$

Для окончательного определения коэффициентов A_{pn} разложения (100) умножим обе части равенства на $x J_{\frac{p\pi}{\alpha}}(\lambda_n x) dx$ и проинтегрируем в пределах от $x=0$ до $x=1$.

Тогда замечая, что на основании известного свойства функций Бесселя

$$\int_0^1 x J_k(\lambda_n x) J_k(\lambda_m x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \frac{1}{2} \{ J_{m+1}(\lambda_n) \}^2, & \text{при } m = n, \end{cases}$$

получим

$$\frac{2}{p\pi} [1 - (-1)^p] \int_0^1 J_{\frac{p\pi}{\alpha}}(\lambda_n x) x dx = \frac{1}{2} A_{pn} \left\{ J_{\left(\frac{p\pi}{\alpha} + 1\right)}(\lambda_n) \right\}^2.$$

Очевидно теперь, что при четном p соответственные коэффициенты A_{pn} обратятся в нуль, а при нечетном p получим для них следующую общую формулу:

$$A_{pn} = \frac{8}{p\pi} \cdot \frac{1}{\left\{ J_{\left(\frac{p\pi}{\alpha} + 1\right)}(\lambda_n) \right\}^2} \int_0^1 J_{\frac{p\pi}{\alpha}}(\lambda_n x) x dx; \quad (101)$$

таким образом индексу p надо давать только нечетные значения. Тогда дифференциальное уравнение (94) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_{pn} \sin \frac{p\pi}{\alpha} \varphi J_{\frac{p\pi}{\alpha}}(\lambda_n x). \quad (94)$$

Подставляя теперь сюда вместо f его выражение в форме (98), в котором, очевидно, необходимо будет сохранить также только нечетные p^1), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sin \frac{p\pi}{a} \varphi \left\{ B_{pn} \lambda_n^2 \frac{d^2 J_{\frac{p\pi}{a}}(z_n)}{dz_n^2} + B_{pn} \lambda_n^2 \frac{1}{z_n} \frac{d J_{\frac{p\pi}{a}}(z_n)}{dz_n} + \right. \\ \left. + A_{pn} J_{\frac{p\pi}{a}}(z_n) - \frac{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \lambda_n^2}{z_n^2} J_{\frac{p\pi}{a}}(z_n) \right\} = 0,$$

где положено $z_n = \lambda_n x$, а n должно получить все значения целых чисел, как четных, так и нечетных.

Из написанного уравнения явствует с очевидностью, что если положить:

$$B_{pn} = A_{pn} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} \quad (101')$$

и вынести $B_{pn} \lambda_n^2$ за фигурные скобки, то в фигурных скобках останется уравнение Бесселя для функции Бесселя порядка $\frac{p\pi}{a}$, а потому фигурная скобка тождественно, для всякого p , обращается в нуль. Таким образом уравнение (97), а следовательно, и (94) приведенной выше подстановкой удовлетворяется.

Из уравнений (101') и (101) получим:

$$B_{pn} = \frac{8}{p\pi \lambda_n^2} \frac{1}{\left\{ J_{\left(\frac{p\pi}{a}+1\right)}(\lambda_n) \right\}^2} \int_0^1 J_{\frac{p\pi}{a}}(\lambda_n x) x dx.$$

Вводя новую переменную $z = \lambda_n x$ и обозначая для краткости стоящий в правой части интеграл через

$$U_p(\lambda_n) = \lambda_n^2 \int_0^1 J_{\frac{p\pi}{a}}(\lambda_n x) x dx = \int_0^{\lambda_n} J_{\frac{p\pi}{a}}(z) z dz,$$

придем к такому значению для искомой функции напряжений:

$$F(x, \varphi) = \frac{16G\delta a^2}{\pi} \sum_{n=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \sum_{p=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{U_p(\lambda_n)}{p \lambda_n^4 \left\{ J_{\left(\frac{p\pi}{a}+1\right)}(\lambda_n) \right\}^2} \cdot J_{\frac{p\pi}{a}}(\lambda_n x) \sin \frac{p\pi}{a} \varphi. \quad (102)$$

Полученная функция напряжений является искомой, так как она удовлетворяет уравнению (91), а также граничным условиям, ибо помимо

¹⁾ Ибо из соотношения (101') $B_{pn} = A_{pn} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2}$, справедливого для всяких целых p и n , следует, что при обращении в нуль всех A_{pn} с четными p все B_{pn} с четными p также пропадут. *Прим. ред.*

выполнения первых двух условий (95), как это было показано выше, выполняется также и последнее из них, так как при $r=a$, $x=1$, а следовательно:

$$\left. \frac{J_{p\pi}(\lambda_n x)}{a} \right|_{a=1} = \frac{J_{p\pi}(\lambda_n)}{a} = 0,$$

так как λ_n суть корни функции Бесселя порядка $\frac{p\pi}{a}$.

Крутящий момент получится по формуле (50) путем интегрирования по всей площади сектора и будет выражаться формулой:

$$\begin{aligned} M &= 2a^2 \int_{\varphi=0}^{\alpha} \int_{x=0}^1 F(x, \varphi) x dx d\varphi = \\ &= \frac{64 G \delta a^4 \alpha}{\pi^2} \sum_{n=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \sum_{p=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left\{ \frac{U(\lambda_n)}{p^{1/3} J\left(\frac{p\pi}{a} + 1\right)(\lambda_n)} \right\}^2. \end{aligned} \quad (103)$$

Таким образом решение поставленной задачи получено в функциях Бесселя первого рода и интегралах от них. Наименьший порядок $m = \frac{p\pi}{a}$ функций Бесселя зависит от угла α сектора и будет тем выше, чем меньше α .

Как известно, функция Бесселя первого рода порядка m может быть представлена рядом

$$\begin{aligned} J_m(y) = \frac{y^p}{2^m \cdot m!} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{m+1} + \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^4}{2!(m+1)(m+2)} - \right. \\ \left. - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^6}{3!(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

который для не очень больших аргументов y сходится быстро. Для функций Бесселя составлены таблицы, из которых следует упомянуть сборник таблиц Янке и Эмде (Jahnke-Emde)¹⁾, а также более подробные таблицы К. Хаяси²⁾, очень полезные для точных инженерных расчетов.

Если бы порядок функций Бесселя был дробным, то вместо факториала $m!$, стоящего в знаменателе множителем, в ряде для $J_m(y)$, мы имели

1) Эти таблицы в настоящее время изданы в переводе (с 1-го изд.) на русский язык. Затем можно указать «Таблицы специальных функций», составленные коллективом преподавателей Моск. энерг. инст. под редакцией Я. Н. Шпильрейна, ч. I, М. 1933. «Таблицы бesselевых функций дробных порядков», Киев 1933 (на украинск. яз.) акад. А. Н. Динника, Киев 1933. *Прим. перев.*

2) K. H a y a s c h i, *Tafeln der Besselschen, Kugel-, Theta und anderer Funktionen*, Berlin, Springer, 1931.

бы функцию $\Gamma(m)$ (гамма от m), значение которой для целых аргументов m тождественно равно

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

Для функции Γ также имеются готовые таблицы.

Здесь необходимо еще заметить, что интегралы, через которые выражается функция $U_p(\lambda_n)$, в редких случаях могли быть найдены в замкнутой форме, поэтому определение их производилось А. Н. Динником численным интегрированием по способу Симпсона, при помощи табличных значений функций $J_m(y)$. Двойной ряд оказался быстро сходящимся.

Особенно важен случай $\alpha = 2\pi$, соответствующий случаю вала круглого сечения с радиальной трещиной. Для него функция напряжений принимает следующий вид ¹⁾:

$$F = \frac{16G \cdot \delta \cdot a^2}{\pi} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{+\infty} \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{U_1(\lambda_n)}{p\lambda_n^4 \left\{ J_{\left(\frac{p}{2}+1\right)}(\lambda_n) \right\}^2} \cdot J_{\frac{p}{2}}(\lambda_n x) \sin\left(\frac{p\varphi}{2}\right),$$

где

$$U_1(\lambda_n) = \int_0^{\lambda_n} J_{\frac{p}{2}}(z) z dz,$$

а крутящий момент выражается следующей формулой:

$$M = \frac{128G \cdot \delta \cdot a^4}{\pi} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{+\infty} \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{U_1(\lambda_n)}{p\lambda_n^3 J_{\left(\frac{p}{2}+1\right)}(\lambda_n)} \right\}^2.$$

Если представить выражение для скручивающего момента в форме:

$$M = KG\delta a^4,$$

то коэффициент K , представляющий собою функцию от α :

$$K(\alpha) = \frac{64\alpha}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\alpha} \sum_{p=1,3,5,\dots}^{\alpha} \left\{ \frac{U_p(\lambda_n)}{p\lambda_n^3 J_{\left(\frac{p}{\alpha}+1\right)}(\lambda_n)} \right\}^2,$$

будет характеризовать жесткость кругового сектора при кручении. А. Н. Динник вычислил ряд значений для K , приводимых в ниже

¹⁾ Здесь оставлен открытым вопрос о возможности возникновения напряжений на поверхностях трещины из-за «перекрытия» деформаций на соиздающих участках контура, т. е. из-за давления одной части вала на другую при его кручении. Как показывают формулы (2), перемещения на обеих сторонах трещины будут одинаковыми и никакого давления поэтому не получится
Прим. перев.

следующей таблице, в которой для сравнения помещены значения K , определенные им по методу Гринхилла и по формуле Сен-Венана.

α	K по формуле А. Н. Динника	K по методу Гринхилла	K по формуле Сен-Венана
15°	0,0011	0,0011	0,00098
30°	0,0068	0,0068	0,00690
45°	0,017	0,018 ¹⁾	0,019
60°	0,035	0,035	0,038
90°	0,080	0,080	0,088
120°	0,144	—	0,148
180°	0,297	—	0,307
240°	0,476	—	—
270°	0,560	—	0,720
360°	0,878	—	1,570

Следует подчеркнуть, что приближенная формула Сен-Венана дает всегда для секториального сечения преувеличенные значения для K , за исключением весьма малых углов сектора. Для кругового сечения с радиальной трещиной, доходящей до центра круга ($\alpha = 360^\circ$), это преувеличение достигает 80%.

Касательные напряжения τ везде направлены вдоль контура и обращаются в нуль в углах B и C (фиг. 89). Что касается вершины A секториального угла α , то для всех $\alpha \leq 180^\circ$ касательное напряжение обращается в нуль, а для углов $\alpha > 180^\circ$ оно стремится к бесконечности. Таким образом и для рассматриваемого случая подтверждается нецелесообразность оставления в скручиваемых сечениях острых входящих углов.

Для кругового кольцевого сектора (фиг. 89а) дано решение А. С. Локшиным ²⁾, определившим коэффициент жесткости $K(u_0)$, а также В. П. Лысковым, который решал задачу в криволинейных координатах и получил форму ряда, отличающуюся от формы А. Н. Динника тем, что ряд представлен через тригонометрические и гиперболические функции.

В. П. Лысков приходит к следующим окончательным результатам, которые, вводя относительную координату $u_0 = \frac{a_0}{a}$, где a_0 есть внутренний, а a — внешний радиус кругового полого сектора, можно кратко записать так:

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{скр}} &= K(u_0) G \vartheta a^4, \\ \tau_{\text{max}} &= \frac{2}{\pi} G \vartheta a \varphi(u_0), \\ M_{\text{скр}} &= \frac{\pi}{2} a^3 \psi(u_0). \end{aligned} \right\} \quad (103')$$

Значения входящих в приведенные формулы функций, вычисленные В. П. Лысковым для полого вала с радиальной трещиной [угол между

¹⁾ Цифра 0,018 нами не проверена; расхождение ее с вычислениями по формуле А. Н. Динника могут быть объяснены или влиянием следующей значащей цифры, не помещенной в таблице, или опечаткой, которая, однако, имеется в обеих статьях

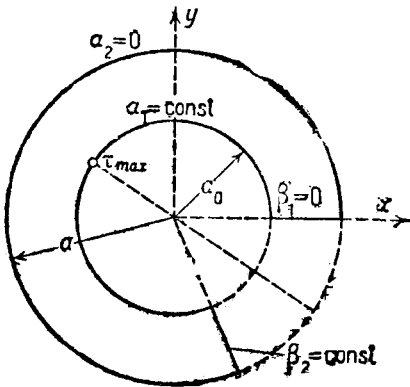
²⁾ Известия Екатеринославского горного ин-та, 1924. *Прим. ред.*

радиусами $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = \text{const.}$ (см. фиг. 86а) равен нулю] сведены в таблицу:

$u_0 = \frac{a_0^2}{a}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$K(u_0)$	0,878	0,725	0,570	0,394	0,291	0,183	0,101	0,045	0,014	0,0019	0
$\varphi(u_0)$	∞	3,091	2,198	1,472	1,172	0,913	0,690	0,508	0,318	0,110	0
$\psi(u_0)$	0	0,234	0,259	0,268	0,248	0,200	0,147	0,088	0,046	0,017	0

В вышеприведенные (на стр. 108) формулы для F и M входят функции Бесселя порядка, равного половине целого числа, которые выражаются через простые синусы и косинусы. Именно:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x, \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \text{ и т. д.}$$



Фиг. 86а.

Таким образом в этом случае вычисление бесконечных рядов производится очень просто. Вычисления дают для крутящего момента значение:

$$M = 0,878 G \cdot \vartheta \cdot a^4,$$

в то время как для круглого сечения без трещины по формуле (12) получается значение:

$$M_1 = \frac{\pi}{2} G \cdot \vartheta \cdot a^4 = 1,571 G \cdot \vartheta \cdot a^4.$$

Таким образом одинаковый крутящий момент в стержне круглого сечения с радиальной трещиной дает погонный угол кручения примерно в два раза больше, чем у одинакового стержня без трещины.

§ 75. Приближенная формула Сен-Венана для угла кручения

Для полноты изложения мы должны еще сказать об одной часто применяемой в технике приближенной формуле, хотя бы для того, чтобы предупредить об опасности ее применения, так как во многих случаях

1) Для сплошного вала с радиальной трещиной ($a = 2\pi$ в задаче А. Н. Динника) $u_0 = \frac{a_0}{a} = 0$ получился тот же коэффициент $K(u_0)$, что и у Лыскова.

она может привести к совершенно неправильным заключениям. Формула эта выведена самим создателем современной теории кручения Сен-Венаном и потому, конечно, она в большинстве случаев довольно хорошо совпадает с выводами точной теории, так как иначе Сен-Венан не выводил бы и не рекомендовал бы ее. Но автор ее был несколько неосторожен, когда рекомендовал применять ее во всех случаях, и она действительно применялась впоследствии иногда в случаях, которые при ее выводе не имелись в виду и в которых она совершенно неправильна.

В применяемых нами здесь обозначениях формула эта дает следующее выражение углового сопротивления при кручении вала произвольного сечения:

$$J = \frac{F^2}{40I_p}, \quad (104)$$

где под F нужно понимать площадь, а под I_p полярный момент инерции.

Как уже сказано, эта формула во многих случаях дает довольно удовлетворительные результаты, и потому достаточно указать здесь лишь исключения, когда она не верна. В первую очередь, мы должны указать полые сечения, для которых ее применять ни в коем случае нельзя. Совершенно неверные результаты она дает также и для крестообразного сечения, т. е. для сечения, имеющего форму знака плюс (+). Точно так же она дает значительную ошибку при применении ее к угловому профилю, если длины сторон уголка в сравнении с толщиной велики. Довольно хорошее совпадение получается в случае нормальных двутавровых профилей, в то время, как у двутавровых профилей с широкими полками (профиль Грея) момент сопротивления при кручении получается слишком большим (доходит до двойного значения).

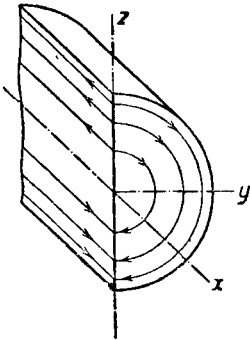
Этих замечаний здесь будет достаточно. Для окончательного выяснения вопроса о величине углового сопротивления при кручении желательна и даже необходима постановка достаточно большого числа опытов. Такие опыты были начаты давно. Война и ее последствия помешали этой большой работе, но мы об ней еще надеемся услышать.

§ 76. Стержни с переменным сечением.

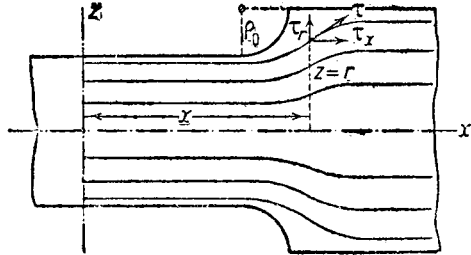
До сих пор мы рассматривали лишь стержни цилиндрической или призматической формы. В большинстве случаев с такими стержнями обычно и имеют дело, но все же не всегда. В стержнях с резким изменением поперечного сечения часто во время работы машины в определенных местах происходят поломки, указывающие на существование там значительной концентрации напряжений. Поэтому нам необходимо заняться вопросом, какие напряжения и деформации получаются вследствие кручения в стержне переменного сечения.

В общем случае мы будем предполагать, что поперечное сечение имеет любой профиль. Можно, например, ставить задачу об определении напряжений и деформаций в теле, имеющем форму усеченной пирамиды, в предположении, что сечения имеют форму квадрата. Конечно, найти точное решение этой задачи много труднее, чем можно было бы ожидать. Но не исключается возможность получить, по крайней мере, приближенное решение, если основываться на подходящих допущениях.

Здесь мы ограничимся рассмотрением практически наиболее важного случая, когда сечение стержня в любом месте представляет круг. В этом случае сечения при деформации остаются плоскими, причем это свойство, как оказывается, мы имеем не только у круглого цилиндра, но и у каждого тела вращения с меридиональным сечением любого вида. Но мы сделали бы очень большую ошибку, если бы предположили, что и напряжения в сечениях такого тела вращения можно вычислять по тем же простым формулам, как и в цилиндрическом теле одинакового диаметра во всех сечениях. Раньше это неправильное предположение считали за очевидное, но поломки валов, казавшиеся при этом предположении необъяснимыми, были вызваны в действительности тем, что напряжения в месте резкого изменения сечения получались значительно более высокими, чем расчетные.



Фиг. 87.



Фиг. 88.

Прежде чем приступить к решению рассматриваемой задачи, вспомним о напряжениях, получающихся в цилиндрическом валу, работающем на кручение. На фиг. 87 изображена часть стержня, ограниченная с одной стороны поперечным, а с другой стороны осевым сечением. Пусть поперечное сечение лежит в плоскости yz прямоугольной системы координат, а осевое сечение в плоскости xz . Кроме нескольких траекторий касательных напряжений, начерченных в поперечном сечении, на фигуре мы видим также траектории касательных напряжений и в осевом сечении, на которые мы теперь и обратим свое внимание.

Мы уже знаем, что цилиндрический стержень при кручении находится в состоянии чистого сдвига, так что не только в поперечном, но и в осевом сечении действуют лишь касательные напряжения. Поэтому в осевом сечении можно начертить такие же траектории касательных напряжений, как и в поперечном сечении; в данном случае это будут, очевидно, прямые линии. Также очевидно, что вдоль этих линий касательные напряжения имеют одинаковую величину, и если представить себе, что у каждой линии надписана величина соответствующего ей касательного напряжения, то тем самым напряженное состояние вала будет характеризоваться с такой же полнотой, как раньше его характеризовали у нас траектории касательных напряжений, начерченные в поперечном сечении.

Так же можно поступать и при решении задачи о кручении тел вращения. На фиг. 88 дано осевое сечение тела вращения, которое и в левой и в правой части имеет цилиндрическую форму, а переход цилиндрической части меньшего диаметра в цилиндрическую часть большего диаметра сделан при помощи закругления радиуса ρ_0 . Как и на предыдущей фигуре, ось тела пусть совпадает с осью x , а плоскость осевого сечения с плоскостью xz . На фигуре нанесен ряд траекторий касательных напряжений, которые в каждой из частей тела, удаленных от места перехода одной цилиндрической части в другую, будут идти примерно прямолинейно, образуя S-образную переходную часть от одной прямой к другой.

Во всяком случае ось x будет представлять ось симметрии для всего семейства траекторий касательных напряжений, если не обращать внимания на то, что траектории касательных напряжений по обе стороны от оси симметрии направлены в разные стороны, как это видно на предыдущей фигуре. Следует заметить, что стрелки на фиг. 88, в сравнении с предыдущей фигурой, направлены в обратную сторону. Это объясняется вот чем. Если момент положителен, то касательные напряжения будут иметь направления, указанные стрелками на фиг. 87. Но в рассматриваемом случае, к которому относится фиг. 88, для упрощения вычислений оказалось желательным направления, указываемые стрелками, заменить на обратные, чтобы положительным значениям z соответствовали всегда положительные касательные напряжения τ_{yz} и τ_{yx} . Если момент будет не отрицательным, как это соответствует направлению касательных напряжений на фиг. 88, а положительным, то мы должны будем впоследствии изменить направления напряжений на обратные. Далее, также для упрощения, касательные напряжения τ_{yx} обозначены нами здесь через τ_x , напряжения τ_{yz} через τ_z , а ордината z через r . Этим самым мы также подчеркиваем, что направление плоскости xz никакой роли не играет и что во всех осевых сечениях получаются одни и те же напряжения.

Самые крайние траектории касательных напряжений должны совпадать с линиями контура осевого сечения. Это вытекает, как и в случае кручения призматического стержня, из граничного условия на контуре, согласно которому касательные напряжения во всех точках контура не могут иметь составляющей, нормальной к контуру, если внешние силы на боковую поверхность стержня не действуют.

Определение величины касательных напряжений во всех точках и построение семейства траекторий касательных напряжений достаточно, чтобы дать полную характеристику напряженного состояния всего тела. Мы покажем, что в теле вращения, так же как и в цилиндрическом или призматическом стержне, получается чистый сдвиг, для характеристики которого достаточно указанных данных.

Чтобы доказать это, рассмотрим точку тела с абсциссой x , находящуюся на расстоянии r от оси стержня. Так как мы имеем полную симметрию относительно оси x , то во всех точках с одинаковыми значениями x и r мы имеем одни и те же напряжения и деформации. Деформацию можно характеризовать углом ρ , на который повернется из начального положения круг x, r при кручении стержня. Угол ρ нужно

рассматривать как функцию от x и r . Перемещения η , ξ определенной точки этого круга выразятся по формулам (2) § 65 следующим образом:

$$\eta = pz; \quad \xi = -py. \quad (105)$$

К этим формулам добавляется пока еще не доказанное и нуждающееся в проверке равенство:

$$\xi = 0 \quad (106)$$

для всех точек тела. Во всяком случае формулы (105) и (106) характеризуют деформацию тела, возможную с геометрической точки зрения, и нам нужно лишь установить, при каких условиях она осуществляется и будет ли это как раз та деформация, которую мы здесь рассматриваем. Из формул (105) следует:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = z \frac{\partial p}{\partial y} = z \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = z \cdot \frac{y}{r} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -y \frac{z}{r} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Поэтому объемное расширение e будет равно нулю:

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad (107)$$

т. е. деформация и в этом случае, совершенно так же, как и в случае кручения цилиндрического тела, не изменяет объема какой-либо части тела. Поэтому основные уравнения теории упругости упрощаются и принимают вид:

$$\nabla^2 \xi = 0, \quad \nabla^2 \eta = 0, \quad \nabla^2 \zeta = 0, \quad (108)$$

из которых первое при сделанном нами предположении удовлетворяется непосредственно. Для производных функции η мы, на основании формулы (105), получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= z \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \frac{y^2 z}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{z}{r} - \frac{y^2 z}{r^3} \right); \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \cdot \frac{z^3}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{3z}{r} - \frac{z^3}{r^3} \right), \end{aligned}$$

что дает:

$$\nabla^2 \eta = z \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + 3 \frac{z}{r} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Чтобы удовлетворить основным уравнениям упругого равновесия, мы должны подчинить p условию:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (109)$$

Если это условие будет выполнено, то будет удовлетворяться не только второе, но также и последнее из трех основных уравнений. Поэтому каждое решение дифференциального уравнения (109) совместно с равенствами (105) и (106) дает нам одну из возможных деформаций тела, причем возникновение той или другой деформации зависит еще от граничных условий на поверхности тела.

Перейдем теперь от деформаций к напряжениям, вычислив их по формулам (34) § 2. Для точки с координатами x , r мы получим:

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right) = 0,$$

и точно так же вторая из формул (34) § 2 нам даст:

$$\sigma_y = 2G \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2} \right) = 2G \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2G \frac{yz}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Но так как мы совместили плоскость xz координатной системы с плоскостью осевого сечения фиг. 88, то для всех точек осевого сечения $y=0$, и потому

$$\sigma_y = 0.$$

Этим и доказывается высказанное нами ранее утверждение, что при рассматриваемой деформации ни в поперечном, ни в осевом сечениях тела вращения нормальных напряжений не будет.

На фиг. 88 мы уже заранее начертили семейство траекторий касательных напряжений так, что крайние траектории напряжений совпадают с линиями контура осевого сечения. Это соответствует граничному условию, что на всей боковой поверхности тела внешних сил нет. В каждой точке боковой поверхности тела нормальное напряжение будет равно нулю, потому что мы во всех точках имеем чистый сдвиг, и плоскость сдвига, параллельно которой направлены соответствующие касательные напряжения, совпадает с касательной плоскостью к боковой поверхности.

Для того чтобы наше решение удовлетворяло всем требованиям, остается выполнить еще следующее условие. Внешние силы, действующие на концевых сечениях всего тела вращения, должны распределяться по сечению по тому же закону, как и касательные напряжения, согласно нашему предположению. Конечно, на практике это условие выполняется так же редко, как и в случае цилиндрического или призматического стержня. Но по принципу Сен-Венана мы можем на это условие внимания не обращать, если ограничимся определением напряжений и деформаций в точках тела, удаленных от концевых сечений. В особенности это допустимо при определении повышения напряжений при более или менее резком переходе от тонкой к толстой части стержня, так как мы можем считать, что концевые сечения удалены от места этого перехода на произвольно большое расстояние.

Нам еще нужно вывести формулы для касательных напряжений, действующих в плоскости осевого сечения.

По формулам (34) § 2, принимая во внимание формулы (105) и (106), мы получим:

$$\tau_{xy} = G \frac{\partial \eta}{\partial x} = Gz \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\tau_{xz} = -Gy \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\tau_{yz} = G \frac{z^2 - y^2}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Но в плоскости xz , которую мы совместили с плоскостью осевого сечения, мы имеем $y = 0$ и $z = r$ и поэтому для составляющих напряжений, которые мы теперь обозначим через τ_x и τ_r , мы получим формулы:

$$\tau_x = Gr \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\tau_r = Gr \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (110)$$

Далее, если равенство

$$r = f(x)$$

будет предст. влять уравнение траектории касательных напряжений, идущей в плоскости осевого сечения, то мы на этой линии должны будем иметь:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\tau_r}{\tau_x} = \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (111)$$

Эта формула выражает вместе с тем условие, которому должна удовлетворять на контуре осевого сечения функция p , если под r в этой формуле понимать ординату линии контура, соответствующую абсциссе x .

Таким образом с чисто математической точки зрения рассматриваемая задача сводится к тому, чтобы для заданного осевого сечения тела вращения найти решение дифференциального уравнения (109), удовлетворяющее в каждой точке контура граничному условию (111). Следовательно, мы имеем задачу, вполне аналогичную задаче о кручении призматического тела, т. е. задаче Сен-Венана, своящейся также к нахождению такого решения дифференциального уравнения второго порядка, именно уравнения (4), которое удовлетворяло бы одновременно и граничному условию (6), выраженному в форме обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Здесь, так же как и в прежнем случае, можно указать любое число решений дифференциального уравнения (109) в частных производных и затем определить форму контура, для которого каждое из таких решений удовлетворяет граничным условиям. Найти же решение дифференциального уравнения в частных производных для произвольно заданного осевого сечения мы не можем.

Наиболее простым решением рассматриваемого дифференциального уравнения является

$$p = C(x^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (112)$$

где C обозначает постоянную интегрирования. Это решение можно вводить в качестве слагаемого во все остальные решения. Легко убедиться, что это решение действительно удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению. По формулам (110) мы получим:

$$\begin{aligned} \tau_x &= -3GCr x (x^2 + r^2)^{-\frac{5}{2}}; \\ \tau_r &= -3GC r^2 (x^2 + r^2)^{-\frac{5}{2}}; \end{aligned}$$

а дифференциальное уравнение линии контура перейдет в следующее:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{r}{x},$$

откуда получается:

$$r = cx.$$

Таким образом стержень, к которому относится решение (112), имеет вид усеченного конуса. Все другие траектории касательных напряжений будут в этом случае также прямыми линиями и, судя по продолжению, пересекаются в вершине конуса.

Далее, мы можем указать решение:

$$p = r^2(c_1 x + c_2) - \frac{4}{3} c_1 x^3 - 4c_2 x^2 + c_3 x + c_4,$$

в котором коэффициенты c представляют произвольные постоянные. Но в этом случае определение по формуле (111) контура, соответствующего этому решению, представляет большие трудности. Так же обстоит дело и с решениями вида:

$$p = Ar^4 + Br^2 + C,$$

в которых A , B , C представляют легко находимые целые рациональные функции от x , именно A первой, B третьей и C пятой степени. Здесь можно также добавить другие члены с r^6 , r^8 и т. д.

Другим решением дифференциального уравнения (109), быть может, лучше подходящим для дальнейших вычислений, является следующее:

$$p = C \sin \alpha x \left(1 + \frac{(\alpha r)^2}{8} + \frac{(\alpha r)^4}{8 \cdot 24} + \frac{(\alpha r)^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right), \quad (113)$$

где C и α обозначают произвольные постоянные. В правильности его можно убедиться непосредственно путем подстановки в дифференциальное уравнение. Дальнейшие решения мы получим, образуя сумму любого числа членов этого вида с разными значениями α . Таким образом можно

составить решение, содержащее любое число постоянных, при надлежащем выборе которых можно выполнить граничное условие, по крайней мере, с известным приближением.

Точные решения имеются у А. Тимпе (A. Timpe) в статье «Die Torsion von Umdrehungskörpern», Math. Ann. 1911, стр. 480 и у Л. Фелпеля «Die Torsion runder Stäbe mit veränderlichem Querschnitt», Bayr. Ak. d. Wiss., 1921¹⁾.

Другой путь заключается в том, что от нахождения точных решений отказываются, а довольствуются приближенными решениями, которые для определенных заданных контуров осевого сечения можно найти аналогично тому, как мы уже делали в этой же главе для призматических стержней. Мы должны исходить при этом из напряженного состояния, удовлетворяющего всем условиям статики, в частности, также граничным условиям; при этом в формулы для напряжения входят один или несколько параметров, которые затем должны быть определены таким образом, чтобы работа деформации имела минимум. Здесь весьма помогает построение в осевом сечении сети траекторий касательных напряжений. Чтобы можно было применять, как это мы делали в случае призматических стержней, гидродинамическую аналогию, мы должны добавить еще несколько замечаний.

Рассмотрим плоскопараллельный поток жидкости, линии тока которого совпадают с траекториями касательных напряжений в плоскости осевого сечения тела вращения. Для того чтобы этот поток удовлетворял условию неразрывности движения несжимаемой жидкости, мы не можем, как это делали в случае призматического стержня, считать скорость потока пропорциональной касательному напряжению. Вместо этого, обозначая через m опять произвольный масштаб, мы должны положить:

$$v_x = mr^2 \tau_x = mGr^3 \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad v_r = mr^2 \tau_r = mGr^3 \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (114)$$

Тогда условие неразрывности будет удовлетворяться. Именно мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= mGr^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} &= 3mGr^2 \frac{\partial p}{\partial r} + mCr^3 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} &= mGr^3 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \end{aligned}$$

причем последний знак равенства написан нами на основании уравнения (109). Мы вычислим также выражение вихревой скорости потока

¹⁾ См. также новую работу А. Тимпе, «Achsen-symmetrische Torsionszustände und ihre Inversion», Ztschr. f. ang. Math. u. Mech., 1931 г. Bd. 11, H. 1, S. 8, в которой автор решает задачу о кручении конического (сплошного и полого) вала, нагруженного распределенными по поверхности скручивающими силами, а также задачу о кручении шара двумя парами сил, приложенными на концах диаметра. Прим. ред.

и получим:

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = 3mGr^2 \frac{\partial p}{\partial x} + mGr^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial r};$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} = mGr^3 \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial x},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial x} = 3mGr^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 3 \frac{v_x}{r} = 3mr\tau_x.$$

Следовательно, в этом случае вихревая (удвоенная угловая) скорость не представляет постоянную величину, а изменяется вместе с x и r . Но во всяком случае мы можем и здесь применить теорему Стокса. Тогда для криволинейного интеграла по замкнутой кривой, ограничивающей в плоскости осевого сечения участок площади любой формы, мы получим выражение:

$$\oint v \cdot d\mathfrak{z} = 3 \int \frac{v_x}{r} dF = 3m \int r\tau_x dF; \quad (115)$$

этой формулой можно воспользоваться так же, как это мы сделали прежде, в случае призматического стержня.

Теперь рассмотрим трубку тока (струйку жидкости), заключенную между двумя близкими траекториями касательных напряжений. Если в одном месте трубки тока скорость, а следовательно, и соответствующее касательное напряжение известны, то мы сможем узнать скорость и во всех других местах на основании того соображения, что она обратно пропорциональна ширине трубки тока; точно так же мы можем узнать и касательные напряжения путем пересчета скорости и приняв во внимание формулы гидродинамической аналогии (114), в которые входит ордината r .

В частности, если тело вращения состоит из двух цилиндрических частей разных диаметров с закруглением в месте перехода, приблизительно, как на фиг. 88, то во всех частях трубки тока, удаленных от закругления на достаточно большое расстояние, мы можем найти касательное напряжение, а следовательно, и скорость непосредственно. Именно касательное напряжение будет равно тому, которое получается в цилиндрическом стержне на соответствующем расстоянии от оси при действии заданного крутящего момента M , и потому оно известно. Таким образом сеть траекторий касательных напряжений, начерченных в плоскости осевого сечения, нам дает непосредственное заключение о величине касательных напряжений во всех точках тела.

Каждую траекторию касательных напряжений мы можем также рассматривать, как меридиональную образующую поверхности вращения, ось которой совпадает с осью стержня. Такая поверхность вращения делит стержень на внутреннюю и внешнюю части, которые на поверхности соприкосновения не действуют друг на друга. Поэтому мы можем одну из двух частей удалить, не изменяя режима другой части, предполагая, конечно, что при удалении одной части прекращается также и действие сил, приложенных к концевым сечениям удаленной части. Если мы удалим

внутреннюю часть, то останется полое тело, к которому можно будет непосредственно применить решение, найденное для сплошного тела. Все это в точности соответствует тому, что мы имеем в случае призматического полого стержня.

Трубка тока, заключенной между двумя соседними линиями тока, соответствует полый тонкостенный стержень, в котором будут такие же напряжения и деформации, какие получаются и в сплошном стержне. Мы можем рассматривать все тело вращения, как состоящее из большого числа вставленных один в другой и воспринимающих действие приложенных сил независимо друг от друга тонкостенных полых стержней, из которых на каждый приходится известная часть dM всего крутящего момента. Если разность между наружным и внутренним радиусами поперечного сечения такого элементарного стержня обозначить через dr , то для него мы будем иметь:

$$dM = 2\pi r dr \tau_x \cdot r = 2\pi \frac{v_x}{m} dr.$$

Таким образом мерой момента, воспринимаемого соответствующим элементарным стержнем, служит расход жидкости $v_x dr$ в трубке тока.

Сказанное дает нам наглядное представление о напряжениях и более уясняет суть дела, чем чисто аналитическое решение задачи. Оно дает нам также основание для ориентировочной оценки искомых величин, так как относительно приблизительного направления линий тока, из которых крайняя задана непосредственно, вряд ли могут быть какие-либо сомнения. Здесь может быть очень полезной теорема Стокса, выражающаяся формулой (115), как это мы сейчас покажем.

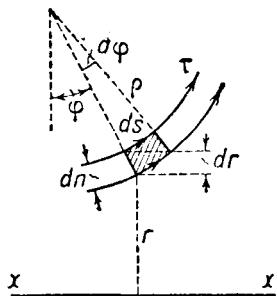
Фиг. 89 показывает небольшую часть трубки тока, ширина которой в этом месте обозначена через dn . Меньший радиус кривизны линии тока обозначен через ρ , а угол между двумя близкими нормальными через $d\varphi$. Длина элемента трубки тока, к которому мы применим формулу (115), будет выражаться формулой $ds = \rho d\varphi$. Криволинейный интеграл по контуру дает следующее выражение:

$$\int v d\mathfrak{z} = v ds - \left(v + \frac{\partial v}{\partial n} dn \right) (ds + dn d\varphi) = -v dn d\varphi - \frac{\partial v}{\partial n} dn ds,$$

если пренебречь бесконечно малым членом третьего и более высоких порядков.

Поэтому по формуле (115), после сокращения общего множителя $dn ds$, получится:

$$-\frac{v}{\rho} - \frac{\partial v}{\partial n} = 3m\tau_x.$$



Фиг. 89.

Если здесь заменить v через $mr^2\tau$, то это равенство после деления на mr^2 перейдет в следующее:

$$-\frac{\tau}{\rho} - \frac{2\tau}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial \tau}{\partial n} = 3 \frac{\tau_x}{r}.$$

Обозначив угол, заключенный между нормалью к линии тока и направлением r , через φ , мы, как видно из чертежа, будем иметь:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = -\cos \varphi \quad \text{и потому} \quad \tau \frac{\partial r}{\partial n} = -\tau_x;$$

предыдущее равенство перейдет таким образом в следующее:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = -\frac{\tau}{\rho} - \frac{\tau_x}{r}. \quad (116)$$

Формула выведена нами в предположении, что траектории касательных напряжений обращены своей вогнутостью наружу, как на чертеже. Величина $\frac{\partial \tau}{\partial n}$ соответствует падению напряжения в направлении от траектории напряжений, идущей снаружи, к траектории напряжений, расположенной ближе к оси стержня, чем и объясняется отрицательный знак $\frac{\partial \tau}{\partial n}$. Если же считать, как это обычно делают, dn положительным в направлении наружу от оси стержня, то знаки на правой стороне формулы (116) нужно изменить на обратные.

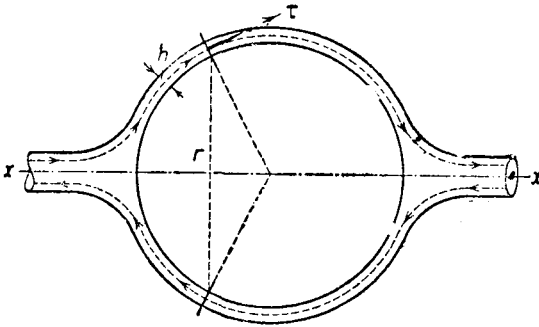
У самой крайней линии тока радиус кривизны ρ нам задан, он равен радиусу закругления ρ_0 , и там мы имеем:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = -\frac{\tau}{\rho_0} - \frac{\tau_x}{r}. \quad (117)$$

Обычно ρ_0 составляет лишь небольшую дробную часть диаметра вала, в то время как τ по меньшей мере равно τ_x . Поэтому в закруглении уменьшение напряжения на единицу длины зависит преимущественно от ρ_0 , и если радиус закругления будет слишком мал, то падение напряжения по нормали к закруглению будет очень большим, как это мы видели и в других случаях раньше. Но при значительном падении напряжения на единицу длины и напряжение на контуре должно соответственно повыситься. Поэтому закруглений с малыми радиусами нужно безусловно избегать, особенно у валов, скручиваемых попеременно в противоположных направлениях.

Но даже при сравнительно большом радиусе ρ_0 напряжение в месте перехода получается значительно более высоким, чем на контуре цилиндрической части вала меньшего диаметра на достаточно большом расстоянии от места перехода. Для случая $\rho_0 = 0,1 r$ А. Фепплъ, который первый занялся этим вопросом, оценил напряжение в закруглении

цифрой, в 2,09 раза превосходящей напряжение на контуре тонкой части вала. Но при этом было оговорено, что эта оценка не может претендовать на точность. Позже Виллерс (Willers) в своей геттингенской докторской диссертации и в журнале «Ztschr. f. Math. und Physik», Bd. 55, S. 225, 1907 определил это напряжение точнее путем приближенного



Фиг. 90.

интегрирования дифференциального уравнения по способу, указанному Рунге (Runge), причем оказалось, что первоначальная оценка повышения напряжений была слишком преувеличена. При

$$\rho_0 = 0,1 r$$

напряжение τ_{\max} составляет величину только в 1,75 раза больше напряжения на поверхности более тонкой

части вала. Все же и эта цифра говорит об очень значительном повышении напряжений, которое может привести к плохим последствиям, если на него не обратить внимания.

Дополнение к работе Виллерса с обобщением на сходные случаи содержится в более поздней геттингенской диссертации 1916 г. Арндта (Arndt) под названием «Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen», на которую мы здесь и сошлемся. В связи с этим укажем еще раз на уже названные на стр. 118 работы А. Тимпе и Л. Феппля, а также на мюнхенскую диссертацию Р. Зоннтага (R. Sonntag) под заглавием «Zur Torsion von runden Wellen mit veränderlichem Durchmesser. Ein Beitrag zur Theorie der Kerbwirkung», которая вероятно будет ¹⁾ опубликована в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.» 1928.

Для тонкостенных полых тел можно, впрочем, дать такой же упрощенный метод расчета, какой мы дали раньше для призматических стержней. Покажем его на примере, к которому относится фиг. 90. Здесь мы имеем тело вращения, которое в одном месте переходит в полый шар с незначительной толщиной стенки h . Чертеж дает осевое

¹⁾ Опубликована в «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.» Bd. 9, H. 1, стр. 1—22, 1929. Перенапряжения в выточках и шпоночных канавках изучены в работе Shepherd W. M., The Torsion and Flexure of Shafting with Keyways or Cracks Proc. of the Royal Soc., Ser. A, Vol. 133, № A 836, 1932 г., p. 607. См. также Shepherd W. «The torsion and Flexure of Shafting with keyways or Cracks». Proc. Royal Soc. Lond. Ser. A 1933. Vol. 138, стр. 607. Экспериментальные работы см. Coker «The influens of keys and keyways on cylindric force fits and Shrinkage fits», Engineering 1934. 13 Apr., а также Kopf und Weber «Verfahren zur Ermittlung d. Torsionsbeanspruchung mittels Membranmodell». VD. I, 1934, стр. 913. Прим. ред.

сечение этого тела, в котором начерчены две траектории касательных напряжений, дающие, как и на фиг. 88, наглядное представление о напряженном состоянии. В сечении полого шара конической поверхностью, взятом теперь вместо плоского поперечного сечения, будет действовать касательное напряжение τ , которое на основании уравнения моментов получается равным

$$\tau = \frac{M}{2\pi r^2 h}.$$

Можно было бы считать переменным также h и решать такую задачу: по какому закону должна изменяться толщина, для того чтобы тело имело во всех сечениях одинаковое сопротивление. При помощи выражения для работы деформации можно легко также вывести формулу и для угла кручения всего тела.

§ 77. Кручение стержня эллиптического сечения при невозможности искривления поперечного сечения.

До сих пор мы всегда предполагали, что напряжения во всех поперечных сечениях стержня, работающего на кручение, одинаковы и что все сечения деформируются (искривляются) беспрепятственно, как это получается по теории Сен-Венана. Но нередко бывают случаи, когда искривление поперечного сечения затруднено, а при иных условиях возможность его даже совсем исключена. Последнее мы имеем, например, у среднего поперечного сечения стержня, к обоим концам которого приложены два одинаковых, вращающих в одном направлении, крутящих момента M , уравновешивающихся удвоенным крутящим моментом $2M$, приложенным в среднем сечении. Вследствие симметрии среднее поперечное сечение искривляться не может. Очевидно, что в таком сечении кроме касательных напряжений τ_{xy} и τ_{yx} должны еще действовать нормальные напряжения σ_x , перпендикулярные к поперечному сечению. Такие нормальные напряжения будут действовать также и в сечениях, близких к среднему, но они будут постепенно уменьшаться по мере того, как будет ослабляться влияние причин, препятствующих искривлению поперечного сечения. На обоих же концах стержня, на которых нормальные напряжения равны нулю, препятствовать искривлению поперечного сечения ничто не будет. На основании теоремы о минимуме энергии деформации можно вывести заключение, что влияние среднего поперечного сечения, препятствующего искривлению других поперечных сечений, очень быстро уменьшается; то же относится и к нормальным напряжениям σ_x . Этими соображениями мы воспользуемся впоследствии, чтобы подобрать подходящее выражение для напряжений. В случаях стержня, концы которого переходят в толстые плиты, также можно считать, что толстые плиты препятствуют искривлению концевых сечений при кручении стержня¹⁾.

¹⁾ Это допущение будет близко к действительности, строго говоря, только в случае, если модуль упругости материала плиты значительно превосходит таковой материала стержня. *Прим. ред.*

Мы сперва рассмотрим задачу для эллиптического сечения, для которого в случае простого кручения мы в § 65 дали подробное и точное решение. Мы будем здесь следовать изложению А. Фелпеля в работе «Die Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung», Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, стр. 261, 1920. По формуле (13) § 65 перемещение ξ при кручении стержня эллиптического сечения составляет

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} M \cdot yz, \quad (118)$$

где a и b обозначают большую и малую полуоси эллипса, M — крутящий момент, а y и z — координаты точек поперечного сечения относительно осей, совпадающих с осями эллипса.

В соответствии со сказанным выше естественно взять для ξ следующее выражение

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} \cdot M \cdot yz \cdot (1 - e^{-\gamma x}), \quad (119)$$

предполагая, что стержень расположен по ту сторону от начального сечения $x = 0$ [по формуле (119) совершенно не искривляющегося], для которой $x > 0$. При $x = \infty$ формула (119) переходит в (118). Так как в формулу (119) входит показательная функция от x , то одна формула переходит практически в другую уже при небольшом x . Положительная величина γ представляет параметр, который будет определен впоследствии.

Мы можем предположить, что, как и при обыкновенном кручении, все нормальные напряжения кроме σ_x обращаются в нуль, т. е.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0.$$

Тогда на основании формулы (119) для σ_x получается выражение

$$\sigma_x = E \frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{E}{G} \cdot M \cdot e^{-\gamma x} \cdot yz,$$

или, так как

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{m}{2(m+1)} \cdot E, \\ \sigma_x &= \gamma \cdot \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{2(m+1)}{m} M \cdot e^{-\gamma x} \cdot yz. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

По формулам (21) § 2, в которых мы должны положить $\sigma_y = \sigma_z = 0$, касательные напряжения определяются из трех следующих условий равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Вместо σ_m мы должны подставить его выражение из формулы (120). Для τ_{yz} мы возьмем выражение:

$$\tau_{yz} = k(a^2b^2 - b^2y^2 - a^2z^2)^{1/2} \cdot e^{-\gamma z}. \quad (122)$$

Это выражение, с одной стороны, удовлетворяет условию, требующему, чтобы напряжение τ_{yz} при $x = \infty$ обращалось в нуль, а с другой стороны, и граничному условию на эллиптическом основании, на котором в виду $\sigma_y = \sigma_z = 0$ должно быть также и $\tau_{yz} = 0$. Действительно, выражение внутри скобок в последней формуле обращается в нуль для всех точек эллипса. Под k нужно понимать постоянную величину, зависящую от крутящего момента, которая определится в дальнейшем.

При взятом выражении для τ_{yz} из двух последних уравнений (121) мы путем интегрирования получаем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{1}{\gamma} \cdot e^{-\gamma z} \cdot 4ka^2z(a^2b^2 - b^2y^2 - a^2z^2) + \frac{2M}{\pi a b^3} z, \\ \tau_{xz} &= -\frac{1}{\gamma} \cdot e^{-\gamma z} \cdot 4kb^2y(a^2b^2 - b^2y^2 - a^2z^2) - \frac{2M}{\pi a^3 b} y. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Оба последние члена являются независимыми от x постоянными интегрирования и имеют такой же вид, как и соответствующие выражения в обыкновенной теории кручения Сен-Венана. Граничным условиям формулы (123) удовлетворяют, так как на боковой поверхности первые члены обращаются в нуль.

При подстановке значения для σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} из формул (120) и (123) в первое уравнение (121) оно будет удовлетворяться тождественно, если мы для k возьмем значение

$$k = \gamma^3 \cdot \frac{a^2 - b^2}{8\pi a^3 b^3} \frac{m+1}{m} \cdot M. \quad (124)$$

Этим и доказывается, что напряжения, вычисляемые по выписанным формулам, удовлетворяют всем условиям статики, включая и граничные условия. Теперь мы определим γ таким образом, чтобы указанные напряжения возможно меньше отличались от действительных. Ясно, что только что рассматриваемые напряжения не удовлетворяют всем требованиям задачи, как в этом легко убедиться, если выражения для них подставить в уравнения совместности деформаций. Но мы зато получим приближенные значения напряжений, которые будут отличаться от действительных не слишком значительно, если γ определим так, чтобы работа деформации имела минимум. Так как $\tau_y = \sigma_x = 0$, то на основании формулы (54) § 5 для удельной работы деформации получается выражение:

$$A = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{m}{2(m+1)} \cdot \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \right\}. \quad (125)$$

Чтобы получить полную работу деформации, это выражение нужно проинтегрировать по поперечному сечению стержня и по его длине

в пределах от $x=0$ до $x=l$. При этом входящий в выражение работы деформации интеграл

$$\int_0^l e^{-\gamma x} dx$$

можно заменить через

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma},$$

так как подинтегральная функция с увеличением x уменьшается очень быстро и так как мы предполагаем, что длина стержня l не слишком мала.

Интеграл от σ_x^2 после подстановки σ_x из формулы (120) будет выражаться следующим образом:

$$\iint \sigma_x^2 dF dx = c^2 \gamma^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\gamma x} dx \cdot \int y^2 z^2 dF,$$

где введено сокращенное обозначение

$$c = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^2 b^3} \cdot \frac{2(m+1)}{m} M. \quad (126)$$

Если выполнить интегрирование, то получится:

$$\iint \sigma_x^2 dF dx = c^2 \gamma \cdot \frac{\pi a^3 b^3}{48}. \quad (127)$$

Теперь переходим к вычислению интеграла:

$$\begin{aligned} \iint \tau_{xy}^2 dx dF &= \frac{8k^2 a^4}{\gamma^3} \int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 dF - \\ &- \frac{16 Mka}{\gamma \cdot \pi b^3} \int z^2 (a^2 b^3 - b^2 y^3 - a^2 z^3) dF + \frac{4M^2 l}{\pi^2 a^2 b^6} \int z^2 dF. \end{aligned}$$

Остальные интегралы, взятые по эллиптическому сечению, вычисляются проще всего, если эллипс рассматривать как прямоугольную проекцию круга и интегралы по площади эллипса выразить через интегралы по площади круга. Мы таким образом легко найдем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 dF &= \frac{\pi a^5 b^7}{24}, \\ \int z^2 (a^2 b^3 - b^2 y^3 - a^2 z^3) dF &= \frac{\pi a^4 b^5}{12}, \end{aligned}$$

и в результате при применении этих формул получается:

$$\iint \tau_{xy}^2 dx dF = \frac{\pi k^2 a^9 \cdot l}{3\gamma^3} - \frac{4Mka^4 b^2}{3\gamma^2} + \frac{M^2 l}{\pi a b^3}. \quad (128)$$

Точно таким же образом можно вычислить следующий интеграл, и мы получим для него выражение:

$$\iint \tau_{xz}^2 dx dF = \frac{\pi k^2 a^7 b^9}{3\gamma^3} + \frac{4Mka^2 b^4}{3\gamma^2} + \frac{M^2 l}{\pi a^3 b}. \quad (129)$$

Последний интеграл можно вычислить еще проще; мы найдем для него следующее выражение:

$$\iint \tau_{yz}^2 dx dF = \frac{k^2}{2\gamma} \int (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 dF = \frac{k^2}{2\gamma} \cdot \frac{\pi a^9 b^9}{5}. \quad (130)$$

Вся работа деформации A может быть выражена через эти величины следующим образом:

$$A = \frac{1}{2G} \left[\frac{m}{2(m+1)} c^2 \gamma \cdot \frac{\pi a^3 b^3}{48} + \frac{\pi k^2 a^7 b^7}{3\gamma^3} (a^2 + b^2) - \frac{4Mka^2 b^2}{3\gamma^2} (a^2 - b^2) + \right. \\ \left. + \frac{M^2 l}{\pi a^3 b^3} (a^2 + b^2) + \frac{k^2}{10\gamma} \cdot \pi a^9 b^9 \right].$$

Сюда еще нужно подставить значения c и k . При этом можно вынести за скобки общих множителей, так что, в конце концов, мы придем к сравнительно простому выражению. Оно имеет вид:

$$A = \frac{1}{2G} \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 M^2 \frac{(a^2 - b^2)^2}{8\pi a^3 b^3} \left[\gamma^5 \frac{a^2 b^2}{80} + \gamma^3 \cdot \frac{a^2 + b^2}{24} - \frac{m}{m+1} \gamma \right] + \\ + \frac{1}{2G} \cdot \frac{M^2 (a^2 + b^2) l}{\pi a^3 b^3}. \quad (131)$$

Это выражение мы продифференцируем по γ и производную приравняем нулю. Таким путем мы получим для определения γ уравнение:

$$\gamma^4 a^2 b^2 + 2\gamma^2 (a^2 + b^2) = \frac{16m}{m+1}. \quad (132)$$

Решая его, мы найдем:

$$ab\gamma^2 = -\frac{a^2 + b^2}{ab} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2} + \frac{16m}{m+1}}.$$

Мы должны взять лишь один корень, так как согласно условиям задачи γ должно быть действительным и положительным.

Таким образом задача в сущности уже решена. После определения γ , мы по выведенным формулам найдем не только все напряжения, но также сможем легко найти затем и угол закручивания, который, главным образом, и нужен для дальнейшего применения теории. Если этот угол обозначить через $\Delta\varphi$, причем буква Δ применена для указания на то, что угол во всяком случае нужно считать малым, то $\Delta\varphi$ определится из уравнения работы:

$$\frac{1}{2} M \Delta\varphi = A, \quad (133)$$

в которое нужно подставить A из формулы (131).

Нам остается еще на примерах показать, чего мы можем, приблизительно, ожидать от применения этого способа. Для этого мы, как обычно, положим обратный коэффициент Пуассона m равным 4. Для круглого сечения, т. е. при $a=b$, уравнение (132) дает:

$$\gamma = 1,45 \cdot \frac{1}{a}.$$

Здесь мы имеем предельный случай, когда выведенные формулы не дают ничего нового. При $a=b$ величина k по формуле (124) обращается в нуль и, таким образом, обращаются в нуль все те члены в выражениях напряжений, в которые входит γ , и остается лишь решение, еще данное Сен-Венаном.

В качестве второго примера рассмотрим случай $a=10b$, соответствующий сильно сплюснутому эллипсу. Для него получается:

$$\gamma = 2,65 \cdot \frac{1}{a} = 0,265 \cdot \frac{1}{b}.$$

Для определения A вычислим выражение, стоящее в формуле (131) внутри квадратных скобок:

$$\gamma \left[\gamma^4 \frac{a^2 b^2}{80} + \gamma^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{24} - \frac{4}{5} \right] = \gamma \left[\frac{0,49}{80} + \frac{7,07}{24} - 0,8 \right] = -0,50 \gamma.$$

Член в выражении A , зависящий от γ , будет, таким образом, отрицательным; легко убедиться в том, что он получится отрицательным при любом сжатии эллипса. Этого можно было ожидать и заранее, так как защемление конца стержня затрудняет деформацию и лишь уменьшает, а не увеличивает работу упругой деформации.

При дальнейшем вычислении A по формуле (131) получается:

$$A = \frac{M^2}{2G\pi b^3} \left(1,01 \frac{l}{a} - 0,25 \right),$$

а для угла $\Delta\varphi$ из формулы (133), если в нее подставить значение π и заменить a через b , получается выражение:

$$\Delta\varphi = \frac{M}{Gb^3} \left(0,032 \frac{l}{b} - 0,08 \right).$$

Первый член в скобках соответствует углу закручивания для случая беспрепятственного искривления поперечного сечения, а второй член дает уменьшение, вызываемое защемлением конца стержня. Уменьшение происходит на такую же величину, как если бы длина стержня l укоротилась на $2,5b$. С другой стороны, при расстоянии $x=2,5b$ от начального сечения мы будем иметь $\gamma x = 0,66$ и $e^{-\gamma x} = 0,41$. Поэтому для сечения, отстоящего на $2,5b$ от начального, члены, входящие в формулы (120) и (123) для напряжений и содержащие γ , уменьшаются до 0,41 своих значений в защемленном сечении.

Далее, вычислим нормальные напряжения, действующие в защемленном сечении. В случае $a=10b$ мы для них по формуле (120) получим:

$$\sigma_x = 0,021 \frac{yz}{b^3} M.$$

Обозначим наибольшее значение, которое принимает σ_x , через σ_{\max} . Это напряжение получается на контуре защемленного сечения в той точке, для которой yz достигает своего наибольшего возможного значения $\frac{ab}{2}$ или $5b^2$. Таким образом получается:

$$\sigma_{\max} = 0,105 \frac{M}{b^3}.$$

Сравним это значение с наибольшим касательным напряжением τ_{\max} , получающимся в стержне. Оно определяется по формуле Сен-Венана, так как в защемленном сечении или вблизи его величина τ не превосходит величины τ для свободного (незащемленного) стержня. Поэтому мы имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a b^2} = 0,0637 \frac{M}{b^3}.$$

Сравнение показывает, что наибольшее по абсолютной величине напряжение получается в защемленном сечении и что σ_{\max} для случая $a=10b$ в 1,65 раза больше τ_{\max} . Но нужно иметь в виду, что для многих материалов касательное напряжение опаснее растягивающего или сжимающего одинаковой величины. Поэтому можно считать, что при защемлении конца стержня, как правило, не приходится ожидать особого снижения прочности его ¹⁾.

Наконец, рассмотрим еще предельный случай, когда a в сравнении с b можно считать бесконечно большим. Этот случай имеет известное практическое значение, так как он дает приближенную оценку тех условий, в которых примерно находится прямоугольное сечение с таким же отношением сторон. Для этого случая корнем уравнения (132) будет:

$$\alpha\gamma = \sqrt{\frac{8m}{m+1}} = 2,53,$$

и если это значение вставить в формулу (131), а затем вычислить $\Delta\varphi$ по формуле (133), то получится:

$$\Delta\varphi = \frac{M}{G\pi b^3} \left(\frac{l}{a} - 0,26 \right).$$

1) Поэтому следует рекомендовать производить проверку в подобных случаях по формулам сложного сопротивления, например, построенным на основе теории прочности Мора или Милеса — Генки. *Прим. ред.*

Эта формула почти полностью совпадает с формулой для случая $a = 10b$. Наконец, таким же образом, как и прежде, мы для σ_{\max} получаем формулу:

$$\sigma_{\max} = 3,16 \frac{M}{\pi a b^2},$$

т. е. σ_{\max} в 1,58 раза больше τ_{\max} для того же случая.

Аналогичными методами, как и для эллиптического сечения, С. Тимошенко решил задачу и для прямоугольного сечения в работе «On the torsion of a prism, one of the cross sections of which remains plane», помещенной в *Proceedings of the London Mathem. Society, Ser. 2, Vol. 20, 1921*¹⁾. К. Вебер (C. Weber) рассматривает вопрос с более общей точки зрения в своей работе «Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt», помещенной в «*Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.*», Bd. 6, S. 85, 1926. Далее, в связи с этим следует указать на десятую главу этой книги, стр. 335, где мы к этому вопросу возвращаемся еще раз при рассмотрении устойчивости равновесия двутавровой балки.

§ 78. Центр изгиба²⁾.

Обычная теория изгиба прямой балки исходит из так называемой гипотезы Бернулли о сохранении поперечными сечениями плоской формы. Отсюда на основании закона Гука получается линейный закон (вернее плоскостной) распределения напряжений при изгибе. При этом обычно предполагается, что плоскость действия внешних сил проходит через ось балки. Если имеет место чистый изгиб, то плоскость действия внешних сил можно перемещать параллельно самой себе без изменения распределения напряжений в балке. Но это уже не имеет места в случае обыкновенного изгиба, при котором кроме изгибающих моментов в отдельных поперечных сечениях балки действуют еще и поперечные силы. В этом случае положение плоскости действия внешних сил имеет на распределение напряжений большое влияние. Спрашивается теперь, насколько правильно допущение, что при прохождении плоскости действия внешних сил через ось балки напряжения распределяются по сечению по закону прямой линии. В случае сечения с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии это допущение оправдало себя и подтвердилось опытами, результаты которых находятся в полном согласии с теорией. Так как на практике чаще всего применяются балки, профили которых имеют две оси симметрии, например балки с двутавровым сечением и т. д., то обычная теория изгиба балки, вообще говоря, хорошо согласуется с опытом. Но согласие теории с опытом имеет место и для сечений с одной осью симметрии, например для таврового, углового, коробчатого сечений и т. д., если только плоскость действия внешних сил совпадает с линией симметрии сечения. Если же мы имеем несимметричное сечение или сечение имеет одну ось симметрии, но

¹⁾ См. также статью Тимошенко в «Трудах русских ученых за границей», т. I за 1920 г. и его курс «Теория упругости» (перевод с английского) М.-Л. 1931, стр. 303. *Прим. ред.*

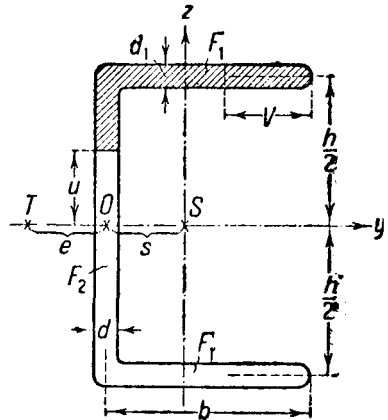
²⁾ См. изложение более современных методов решения задачи об определении центра изгиба в конце книги. *Прим. ред.*

плоскость действия внешних сил пересекает сечение не по оси симметрии, упомянутое допущение и обычная теория изгиба балки будут не верны. Практически важный пример представляет случай нагрузки швеллера в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии сечения, т. е. параллельно вертикальной стенке. Опыты Баха¹⁾ показали, что в этом случае, даже если плоскость действия внешних сил проходит через центр тяжести сечения, прямолинейный закон распределения нормальных напряжений в сечении все равно не соблюдается. В этом случае напряжения в полках сечения распределяются по длине их не равномерно, как этого требует обыкновенная теория изгиба балки, а изменение напряжений вдоль полки происходит так, как будто полки еще испытывают добавочный изгиб в своей плоскости. Отклонение распределения напряжений в сечении швеллера от распределения, даваемого обыкновенной теорией, оказалось возможным уменьшить путем смещения плоскости действия внешних сил параллельно вертикальной стенке; сравнение напряжений для обоих случаев нагрузки показало, что при смещении плоскости действия внешних сил за вертикальную стенку действительное распределение напряжений приближалось к ожидаемому по обыкновенной теории еще больше.

Вопрос об определении действительных напряжений, еще недавно совершенно невыясненный, лишь несколько лет тому назад был решен поразительно просто. Помимо других работ выяснению этого вопроса содействовали работы Р. Мелляра²⁾ и К. Вебера³⁾.

Рассмотрим на примере сечение с одной осью симметрии, именно корытное сечение (швеллер), начерченное на фиг. 91. Пусть плоскость действия внешних сил проходит параллельно вертикальной стенке. Положение плоскости действия внешних сил должно определяться на основании условия, чтобы нормальные напряжения от изгиба подчинялись закону прямой линии, т. е. были пропорциональны расстоянию от начерченной на фиг. 91 оси симметрии OS сечения, которая в данном случае является нулевой линией. Как известно, распределение нормальных напряжений определяет и распределение в сечении касательных напряжений. Чтобы выразить касательные напряжения через нормальные, сперва выразим поперечную силу V через изгибающий момент M , которые связаны соотношением:

$$V = \frac{dM}{dx},$$



Фиг. 91.

1) C. v. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, Berlin.

2) R. Maillart, *Der Schubmittelpunkt*, «Schweiz. Bauzt.», Bd. 83, 1924.

3) C. Weber, «Zischr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 4, S. 334, 1924.

а затем рассмотрим условия равновесия заштрихованного на фиг. 91 элемента балки, вырезанного двумя близкими поперечными сечениями и отстоящего на расстоянии u от нулевой линии; на основании этого условия равновесия касательное напряжение на расстоянии u от поперечного сечения получается равным:

$$\tau_u = \frac{V}{d \cdot J} \int_u^{\frac{h}{2}} z dF.$$

Здесь J обозначает момент инерции сечения относительно нулевой линии OS , а интеграл, входящий в эту формулу, представляет статический момент заштрихованной на фиг. 91 площади относительно нулевой линии. Вывод этой формулы основан, с одной стороны, на предположении, что для нормальных напряжений, перпендикулярных к плоскости поперечного сечения, имеет место закон прямой линии, а с другой стороны, на предположении, что касательные напряжения по всей толщине стенки d имеют постоянную величину и при этом параллельны осевой линии вертикальной стенки. Эти допущения для вертикальной стенки можно считать выполненными с удовлетворительным приближением. Поэтому при обозначениях фиг. 91 мы для касательных напряжений в стенке можем принять такую формулу:

$$\tau_u = \frac{V}{J} \cdot \left(F_1 \frac{h}{2d} + \frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2} \right).$$

Здесь F_1 обозначает площадь сечения горизонтальной полки. Конечно, результирующая касательных напряжений τ_u , действующих в вертикальной стенке, дает всю поперечную силу V , в чем можно убедиться также путем интегрирования касательного напряжения τ_u по поперечному сечению вертикальной стенки. Таким образом согласно последней формуле распределение касательных напряжений в вертикальной стенке происходит по параболе, причем наибольшее значение при $u = 0$ составляет:

$$(\tau_u)_{\max} = \frac{V}{J} \left(F_1 \frac{h}{2d} + \frac{h^2}{8} \right),$$

а наименьшее значение около горизонтальных полок¹⁾, при $u = \pm \frac{h}{2}$:

$$(\tau_u)_{\min} \approx \frac{V}{J} \cdot F_1 \cdot \frac{h}{2d} = \frac{V}{J} \cdot \frac{bh}{2} \cdot \frac{d_1}{d}.$$

Но в горизонтальных полках возникают также касательные напряжения, имеющие согласно граничным условиям горизонтальное направление. Равновесие элемента балки, имеющего длину v (см. фиг. 91) и ограниченного поперечными сечениями полки, дает для касательного напряжения, действующего в сечении на расстоянии v от края, величину

$$\tau_v = \frac{V}{J} \cdot \frac{h}{2} \cdot v.$$

1) Не считая точек стенки у верхней (нижней) поверхности полок, где напряжения τ_u должны быть равны нулю. *Прим. ред.*

Поэтому касательное напряжение τ_v на свободном конце полки равно нулю и в направлении к вертикальной стенке увеличивается по линейному закону. У вертикальной стенки оно имеет значение

$$(\tau_v)_{\max} \approx \frac{V}{J} \cdot \frac{hb}{2},$$

следовательно, если толщина вертикальной стенки d равна толщине горизонтальной полки d_1 , то касательное напряжение имеет такое же значение, как и в вертикальной стенке, что видно из сравнения с формулой для $(\tau_u)_{\min}$. Сказанное относительно верхней горизонтальной полки относится и к нижней с тем лишь отличием, что здесь касательные напряжения имеют противоположное направление. Если найти результирующую касательных напряжений, действующих в каждой из горизонтальных полок, то мы получим пару сил, имеющих величину

$$H = \frac{V}{J} \cdot \frac{hb^2d_1}{4},$$

и плечо h . Если эту пару сил, имеющую момент $H \cdot h$, вместе с результирующей V касательных напряжений, действующих только в вертикальной стенке (эта результирующая направлена по осевой линии вертикальной стенки), заменить одной им эквивалентной результирующей, то она опять будет иметь величину V и будет проходить параллельно вертикальной стенке на расстоянии e , отклоненном в сторону, противоположную той, в которой расположен центр тяжести. Это расстояние e равно

$$e = \frac{Hh}{V} = \frac{h^2b^2d_1}{4J} = \frac{bd_1}{\frac{dh}{3} + 2bd_1}. \quad (134)$$

Точку T , в которой результирующая V всех касательных напряжений, действующих при распределении нормальных напряжений по сечению по закону прямой линии, пересекает ось симметрии сечения, мы назовем центром изгиба. Иногда эту точку называют центром касательных напряжений (центром жесткости). Следовательно, для того чтобы распределение напряжений происходило по закону прямой линии, плоскость действия внешних сил должна проходить через центр изгиба (центр жесткости) поперечного сечения. Действительно, приведенные опыты Баха уже указывали на то, что центр изгиба должен быть расположен по другую сторону вертикальной стенки. Его положение определяется приближенной формулой (134).

При совпадении плоскости действия внешних сил с вертикальной стенкой швеллера, или если эта плоскость проходит через центр тяжести поперечного сечения параллельно вертикальной стенке, как это было в опытах Баха, в действительности получаются изгиб и кручение. В самом деле, если плоскость действия внешних сил пройдет через центр изгиба сечения, то мы будем иметь обыкновенный изгиб балки; в случае же, если плоскость действия внешних сил будет сдвинута так, что пройдет через центр тяжести сечения, то кроме нормального изгиба,

обязательно получится еще и кручение, при котором в случае существования препятствий, мешающих искривлению поперечного сечения, горизонтальные полки будут работать на изгиб; этим и объясняется характер распределения напряжений в горизонтальных полках, установленный опытами Баха.

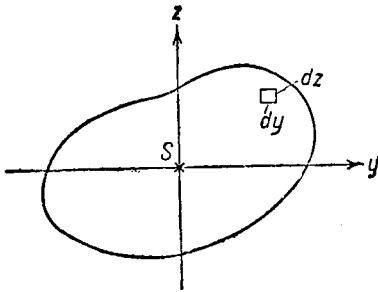
Все, что здесь сказано относительно коробчатого сечения (швеллер), одинаково относится и ко всем другим сечениям, имеющим только одну ось симметрии; например, центр изгиба у сечения, имеющего форму \perp , приблизительно расположен в точке пересечения осевых линий обеих полок, у таврового сечения также приблизительно в точке пересечения осевых линий обеих полок сечения и т. д.; он во всяком случае будет расположен на линии симметрии поперечного сечения. В случае сечения, имеющего две оси симметрии, он будет совпадать, конечно, с точкой пересечения обеих осей симметрии, т. е. с центром тяжести сечения. По этой причине старая теория изгиба балок с сечениями, имеющими две оси симметрии, и давала такое хорошее совпадение с опытом.

Когда сечение имеет только одну ось симметрии, распределение напряжений в сечении при косоугольной нагрузке будет происходить также по прямой линии, если только плоскость действия сил проходит через центр изгиба поперечного сечения. Действительно, если мы разложим внешние силы по оси симметрии и по перпендикулярной к ней оси, то для обеих составляющих мы получим распределение напряжений по закону прямой линии, а следовательно, то же мы будем иметь и при совместном действии обеих составляющих. Таким образом, если линия действия сил, вернее, линия пересечения плоскости действия сил с поперечным сечением, будет, оставаясь в сечении, вращаться около центра изгиба T , то одновременно будет вращаться около центра тяжести S сечения и соответствующая нулевая линия.

В случае сечения с двумя осями симметрии мы имеем то же самое с тем лишь упрощением, что центр изгиба и центр тяжести будут совпадать.

Покажем, что и в случае несимметричного сечения существует центр изгиба, положение которого определяется однозначно профилем сечения и который характеризуется тем, что для всех направлений линии действия силы, проходящих через эту точку, всегда распределение нормальных напряжений будет происходить по закону прямой линии, причем соответствующая нулевая линия всегда будет проходить через центр тяжести сечения. Предположим, что двум линиям KK и K_1K_1 действия сил (фиг. 92) соответствует распределение нормальных напряжений по закону прямой линии, причем нулевые линии NN и N_1N_1 проходят через центр тяжести S сечения. Допустим, что третье прямолинейное распределение нормальных напряжений с нулевой линией N_2N_2 соответствует линии действия силы $K_2'K_2'$, не проходящей через точку пересечения T двух первых линий; тогда поперечную силу V_2 , направление которой совпадает с направлением $K_2'K_2'$, можно будет разложить на составляющую V , идущую в направлении KK , и вторую составляющую V_1 , идущую параллельно K_1K_1 . В то время как первая создает распределение напряже-

Определение касательных напряжений в сечении может быть выполнено следующим образом. Мы предполагаем, что в произвольном сечении, какое, например, изображено на фиг. 93, распределение в сечении нормальных напряжений от изгиба происходит по закону прямой линии, причем нулевой линией является ось y . Если нормальные напряжения известны, то тем самым определяются и касательные напряжения. Чтобы показать это, напишем условие равновесия сил, действующих на поверхности небольшого прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер dx , dy , dz . Оно имеет вид:



Фиг. 93.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

С другой стороны, на основании распределения напряжений по закону прямой линии мы имеем:

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot z,$$

и отсюда

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{V}{J} \cdot z;$$

следовательно,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{V}{J} z. \quad (135)$$

Кроме этого соотношения между касательными напряжениями τ_{xy} и τ_{xz} мы получаем еще одно из условий совместности деформаций. Если координату, характеризующую искривление сечения, обозначить через ξ , то мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

откуда условие совместности дает:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0. \quad (137)$$

Последнее равенство будет удовлетворяться тождественно, если ввести функцию напряжений Φ , положив

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

и тогда уравнение (135) перейдет в следующее:

$$\Delta^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{V}{J} \cdot z. \quad (139)$$

Частный интеграл этого уравнения

$$\Phi_1 = -\frac{V}{J} \cdot \frac{z^3}{6} + a \cdot z, \quad (140)$$

где a обозначает постоянную, которая должна соответствовать форме сечения, представляет решение для прямоугольного сечения. В случае любого другого сечения мы имеем для Φ равенство

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (141)$$

где Φ_2 должна удовлетворять дифференциальному уравнению Лапласа

$$\Delta^2 \Phi_2 = 0 \quad (142)$$

и граничному условию, чтобы касательные напряжения были направлены вдоль контура.

Если перемещаться по сечению все время в направлении касательного напряжения, то мы получим траектории касательных напряжений. Для них мы имеем уравнение:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}. \quad (143)$$

Поэтому кривые $\Phi = \text{const.}$ представляют семейство кривых, ортогональных к траекториям касательных напряжений. Далее, из формул (136) и (138) вытекает, что координата ξ , характеризующая искривление с точностью до множителя $\frac{1}{G}$, совпадает с функцией напряжений:

$$\xi = \frac{\Phi}{G}. \quad (144)$$

Следовательно, кривые $\Phi = \text{const.}$ являются горизонталями искривленной поверхности поперечного сечения.

Траектории касательных напряжений разделяют поперечное сечение, а тем самым и весь стержень на независимые одна от другой части, на поверхности раздела которых не действуют никакие напряжения. Так как для каждого такого элемента сечения соответствующая нулевая линия совпадает с нулевой линией всего сечения, то центры тяжести всех элементов должны находиться на общей нулевой линии. Следовательно, все траектории касательных напряжений должны начинаться на контуре выше нулевой линии, а оканчиваться на контуре же ниже нулевой линии,

так чтобы центр тяжести элемента находился на нулевой линии между двумя траекториями касательных напряжений. Сам контур будет образован двумя, а в иных случаях и большим числом траекторий касательных напряжений.

Если для заданной нулевой линии удастся найти в сечении траектории касательных напряжений, то, как и в случае узких сечений, можно будет найти результирующую поперечную силу для отдельных элементов, а, следовательно, также и для всего поперечного сечения. Линия действия этой поперечной силы даст нам первое геометрическое место для центра изгиба, а повторяя способ для другой нулевой линии, проходящей через центр тяжести, мы получим вторую результирующую поперечную силу, линия действия которой дает второе геометрическое место для центра изгиба. В уже упомянутой выше работе К. Вебера в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 4, стр. 345 и сл., 1924, этот способ применен на ряде примеров. В этой работе кроме указанных здесь касательных напряжений, приняты еще во внимание и добавочные касательные напряжения, создаваемые в сечении поперечным сжатием.

К. Вебер в своей работе «Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt», напечатанной в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 6, стр. 85, 1926, обратил внимание на замечательную связь между центром изгиба и так называемым центром кручения, т. е. той точкой поперечного сечения, которая при кручении не перемещается. Вебер показывает, что обе эти точки тождественны. Для доказательства этого представим себе, что стержень с произвольным сечением на одном конце зашпемлен, а на свободном конце нагружен крутящим моментом M_t и поперечной силой V . Если сперва приложить поперечную силу V и только затем момент M_t , то будет произведена работа

$$A_I = \frac{1}{2} V^2 \cdot \eta_{V=1} + \frac{1}{2} M_t^2 \phi_{M_t=1} + V \cdot M_t \eta_{M_t=1},$$

в выражение которой входят следующие величины: $\eta_{V=1}$ — прогиб точки приложения поперечной силы V в направлении ее вследствие действия поперечной силы V , равной единице; $\phi_{M_t=1}$ — угол поворота конечного сечения, в котором действует крутящий момент, если этот момент равен единице; $\eta_{M_t=1}$ — перемещение точки приложения поперечной силы в ее направлении вследствие действия крутящего момента M_t , равного единице.

Наоборот, если сперва приложить крутящий момент M_t , а затем поперечную силу V , то будет произведена работа

$$A_{II} = \frac{1}{2} M_t^2 \cdot \phi_{M_t=1} + \frac{1}{2} V^2 \cdot \eta_{V=1} + M_t V \cdot \eta_{V=1}.$$

Так как $A_I = A_{II}$, то

$$\eta_{M_t=1} = \phi_{V=1}.$$

Если $\phi_{T=1} = 0$, т. е. если угол поворота сечения вследствие действия поперечной силы V равен нулю, то поперечная сила пройдет через центр изгиба, который К. Вебер называет центром поперечных сил. Так как это имеет место для любого направления поперечной силы, то это доказывает, что центр изгиба совпадает с центром кручения поперечного сечения¹⁾.

§ 79. Пластическое равновесие в закрученном стержне.

В § 57 первого тома мы рассмотрели пластическое равновесие при плоском напряженном состоянии. Теперь мы займемся, исходя из тех же физических оснований, пластическим равновесием в закрученном стержне. Мы будем при этом базироваться на работе А. Надаи (A. Nadai) «Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab», помещенной в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 3, стр. 442, 1923.

Представим себе стержень любого сечения, закрученный до такой степени, что в отдельных частях его возникает пластическая деформация материала. Мы сделаем простое, но достаточно хорошо выполняющееся у многих металлов, предположение, что в частях, где начинается пластическая деформация материала, касательные напряжения, действующие в поперечном сечении, имеют постоянное значение k . Это и будет выражать условие пластичности²⁾, которое вместе с условиями равновесия элемента и определяет напряжения в тех частях стержня, где начинается пластическая деформация материала, следовательно, определяет напряжения статически, как и в § 57 в случае плоского напряженного состояния, когда касательное напряжение в той области, где происходит пластическая деформация материала, было принято равным k . Случай стержня круглого сечения рассмотрел еще Сен-Венан³⁾. Мы же будем предполагать, что поперечное сечение имеет любую величину. Мы оставим в силе те же предположения относительно величины деформации в области материала, какие были сделаны нами в случае плоского напряженного состояния в § 57, стр. 396 первого тома.

Если мы выразим условие равновесия сил, действующих в направлении оси стержня, которую мы снова примем за ось x , и приложенных к элементу объема, в котором начинается пластическая деформация материала, то мы получим уравнение (18); это уравнение мы здесь перепишем еще раз:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0. \quad (145)$$

¹⁾ Это рассуждение не строго, но, несмотря на это, использовано в последней работе Трэффиза. Подробности по этому вопросу см. в приложении в конце книги. *Прим. ред.*

²⁾ Условий пластичности было предложено довольно много различными авторами. Довольно полный обзор их и оригинальное новое достаточно интересное предложение сделаны Schleicher'ом в его статье «Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung)». Ztschr. f. ang. Math. u. Mech. 1926, стр. 199. *Прим. ред.*

³⁾ См. Todhunter und Parsons, Geschichte der Elastizitätslehre.

К нему еще добавляется условие пластичности:

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = k^2 = \text{const.}, \quad (146)$$

в котором постоянная k обозначает характерный для соответствующего материала предел текучести. Мы имеем два уравнения с двумя неизвестными τ_{xy} и τ_{xz} , следовательно, задача является статически определенной.

Аналогично тому, как мы это делали в упругой области, и в пластической области мы можем ввести функцию напряжений F , положив аналогично формуле (20)

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\partial F}{\partial z}; \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \quad (147)$$

тогда вышеприведенное условие равновесия (145) будет выполняться автоматически, а уравнение (146) перейдет в такое уравнение для F

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = k^2. \quad (148)$$

Это уравнение можно переписать также в таком виде:

$$|\text{grad } F| = k, \quad (149)$$

оно выражает, что наибольший уклон поверхности напряжений F имеет всюду постоянное значение k . Таковую поверхность мы назовем поверхностью естественного откоса¹⁾.

Для заданной формы поперечного сечения поверхность естественного откоса получить легко, посыпая для этого горизонтально расположенную плоскость поперечного сечения мелким порошком до тех пор, пока порошок не начнет соскальзывать вниз за линию контура. Поверхность насыпанного порошка и будет представлять поверхность естественного откоса для данного сечения. Если стержень нагружен настолько, что материал во всех его частях доведен до течения, то поверхность естественного откоса, найденная указанным образом, и будет представлять поверхность напряжений. Действительно, для поверхности напряжений мы также имеем на контуре $F=0$, как это вытекает из формулы (22), которая имеет место как для упругой, так и для пластической области.

¹⁾ Подробнее о «поверхностях с естественным откосом» см. у P. Schilling, «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 3, стр. 197, 1923.

Однако, если пластическая деформация материала происходит не во всех точках поперечного сечения, то нужно отличать области, в которых получается пластическая деформация материала, от областей, в которых получается упругая деформация. В первых мы имеем функцию напряжений, удовлетворяющую написанному выше уравнению (148) и дающую поверхность естественного откоса. В области упругих деформаций мы имеем другую функцию напряжений, которую мы обозначим через F_1 . Она удовлетворяет уравнению (21):

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = -2G\vartheta. \quad (150)$$

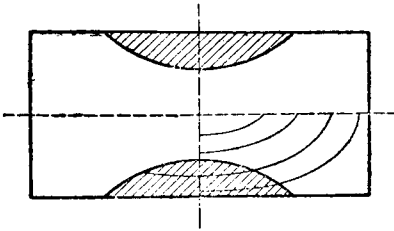
Мы знаем, что F_1 , так же как и F , на контуре сечения обращается в нуль. Спрашивается теперь, как переходит поверхность напряжений F в поверхность напряжений F_1 на их общей границе, отделяющей область пластических деформаций от области упругих деформаций. На этих границах напряжения не должны иметь скачков. Следовательно, если мы подходим к граничной кривой с разных сторон, то касательное напряжение должно всегда принимать значение $\tau_0 = k$ и, кроме того, также и направление касательного напряжения не может изменяться скачком, так что траектории напряжений должны переходить одна в другую без перегиба (без излома). Отсюда следует, что если ординаты поверхностей напряжений удовлетворяют условию $F = F_1$ в одной точке граничной кривой, то это же равенство должно выполняться и на всей граничной кривой. Отсюда мы видим, что граничные кривые можно получить, как проекции кривых перехода поверхности напряжений F_1 в поверхность напряжений F .

Теперь мы можем легко обобщить аналогию Прандтля и на эту задачу. Для этой цели представим себе, что ординаты поверхности естественного откоса уменьшены в одно и то же число раз, так чтобы их можно было в сравнении с размерами поперечного сечения считать малыми, и затащим контур сечения мыльной пленкой. Если мыльная пленка будет подвергнута изнутри избыточному давлению, то сперва образуется мыльный пузырь, соответствующий, как мы видели раньше в § 68, одним упругим деформациям. Но если мы нагрузку будем увеличивать дальше, так что в материале частично начнется пластическая деформация, то этому значению нагрузки будет соответствовать такое избыточное давление, при котором мыльная пленка будет частично прилегать изнутри к поверхности естественного откоса и притом на тем большей площади, чем будет больше нагружен стержень, т. е. чем больше будет избыточное давление p . Проекция кривой, по которой мыльная пленка соприкасается с поверхностью естественного откоса, дает границу между упругими и пластическими областями. Все теоремы относительно поверхности напряжений, доказанные Прандтлем (см. § 68), сохраняют свою силу и в данном случае.

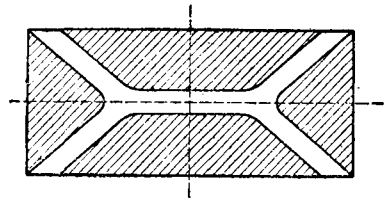
Фиг. 94 показывает границы тех частей прямоугольного сечения, в которых происходит пластическая деформация материала в начальной стадии этого процесса. Эти области выделены на фигуре штриховкой. Конечно, пластическая деформация материала начинается на серединах

длинных сторон. На чертеже нанесены и некоторые траектории напряжений.

На фиг. 95 изображена более поздняя стадия процесса пластической деформации, распространившейся на более значительную площадь. Здесь,



Фиг. 94.



Фиг. 95.

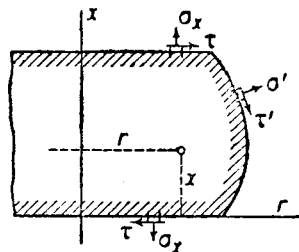
за исключением лишь узких полосок, в которых деформации еще являются упругими, уже происходит в пределах почти всего поперечного сечения пластическая деформация. Относительно дальнейших подробностей мы должны сослаться на уже упомянутую работу Надаи¹⁾.

¹⁾ См. также книгу Надаи, *Plasticity*, 1931 (ее перевод на русский язык в настоящее время находится в печати). *Прим. перев.*

СЕДЬМАЯ ГЛАВА.
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ.

§ 80. Основные уравнения в цилиндрических координатах.

Рассмотрим тело вращения, к которому приложены симметрично распределенные внешние силы, расположенные в меридиональных плоскостях, проходящих через точки приложения сил. В этом случае форма и нагрузка тела полностью характеризуются формой меридионального сечения и схемой его нагружения, начерченной на фиг. 96. Ось вращения мы возьмем за ось x , а другую ось, перпендикулярную к первой, возьмем за ось r . Двух координат x и r нам достаточно, так как все точки с одинаковыми такими координатами находятся в одинаковых условиях.



Фиг. 96.

При решении задач рассматриваемого типа собственный вес и другие массовые силы можно обычно не рассматривать, так что нам придется иметь дело лишь с внешними силами, приложенными к поверхности тела. Боковую поверхность тела целиком или большей частью можно часто также считать совершенно свободной от действия внешних сил, а потому свободной и от действия напряжений. В общем случае, которым мы сейчас и займемся, внешнюю силу, приложенную к элементу боковой поверхности, мы разложим на две составляющих, направленных по нормали и по касательной к боковой поверхности; согласно сделанному нами предположению обе эти составляющие должны быть расположены в меридиональной плоскости. Соответствующие силы, отнесенные к единице площади, мы должны считать за заданные на контуре тела нормальное σ' и касательное τ' напряжения. Остальные силы будут приложены к двум основаниям, ограничивающим тело сверху и снизу. Их мы также разложим на нормальную и на касательную составляющие, которые мы обозначим через σ_x и τ .

Так как каждая меридиональная плоскость представляет плоскость симметрии как в отношении формы, так и в отношении нагрузки тела, то в меридиональных плоскостях касательные напряжения действовать не могут. Поэтому для каждой точки тела, расположенной на меридиональной плоскости, площадка, в ней взятая является главной площадкой рассматриваемого напряженного состояния. Главное напряжение, действующее в этой плоскости, мы обозначим через σ_x ; такое обозначение

указывает, что нормальное напряжение направлено по касательной к кругу радиуса r , проведенному через точку x, r . Два других главных напряжения всегда направлены параллельно самой меридиональной плоскости и вообще в разных точках меридионального сечения имеют разные направления.

Для наглядности рекомендуется нанести в меридиональном сечении два семейства траекторий напряжений, идущих во всех точках в направлении главных напряжений и потому пересекающих одна другую всегда под прямым углом. Траектории напряжений дают приблизительное представление о характере ожидаемого напряженного состояния, чем можно воспользоваться для приближенной оценки напряжений в том случае, когда точное решение найти нельзя.

Кроме меридионального сечения мы через точку x, r проведем еще второе сечение, перпендикулярное к оси x , и третье сечение, перпендикулярное к двум первым. Следы новых секущих плоскостей на меридиональной плоскости будут параллельны осям r и x . Вследствие симметрии, в обеих секущих плоскостях в точке x, r могут действовать лишь такие касательные напряжения, которые параллельны меридиональной плоскости. По теореме о равенстве касательных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам эти оба касательных напряжения должны иметь одинаковую величину. Поэтому, не боясь недоразумений, мы оба напряжения можем обозначить буквой τ без добавления значков. Нормальные напряжения, действующие в секущих плоскостях, мы, как обычно, обозначим через σ_x и σ_r . Их, как и τ , нужно считать функциями от x и r . Знаки всех напряжений определяются по правилам, установленным в начале книги.

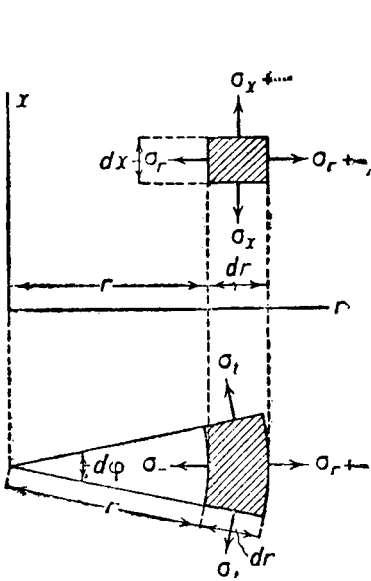
Предыдущие условия характеризуют случай, когда основные уравнения упругого равновесия можно представить в такой же простой форме, как и в случае плоской задачи, и мы можем ограничиться рассмотрением соотношений, имеющих место для точек одной и той же плоскости. Так как этот случай встречается часто, то он заслуживает особого рассмотрения. Задача заключается в том, чтобы четыре напряжения $\sigma_t, \sigma_x, \sigma_r, \tau$, характеризующие полностью напряженное состояние в точке x, r меридионального сечения, представить в виде функций от x и r , если на контуре заданы внешние силы или поставлены другие граничные условия.

Для этого служат два условия равновесия, в которые входят напряжения, действующие на элемент объема; эти условия должны быть выполнены во всех точках, они получаются путем проектирования всех сил на оси x и r . Фиг. 97 показывает вид сверху и спереди такого элемента объема; длины ребер равны dr, dx и $r d\varphi$. После сокращения на общего множителя $dr dx d\varphi$ мы получим следующие уравнения равновесия:

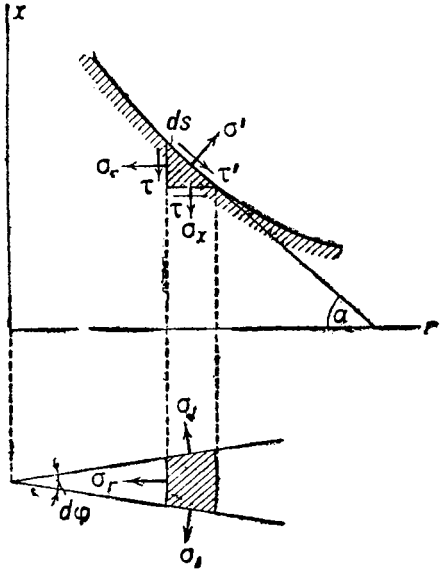
$$\left. \begin{aligned} r \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) + r \frac{\partial \tau}{\partial x} - \sigma_t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь мы рассматривали элемент объема, расположенный где-либо внутри тела. Фиг. 98 относится к поверхности, на которой, как мы приняли

прежде, действуют составляющие σ', τ' внешних поверхностных сил. Пусть касательная к контуру меридионального сечения образует с осью R угол α ; длину элемента дуги контура мы обозначим через ds . Тогда высота элемента будет равна $ds \sin \alpha$, а длина основания $ds \cos \alpha$. При составлении уравнения для проекций на горизонтальное направление члена



Фиг. 97.



Фиг. 98.

с σ_ϕ не будет, так как он представляет бесконечно малую величину третьего порядка, в то время как все другие члены представляют бесконечно малые величины второго порядка. Если, наконец, обе части уравнения сократить на общих множителей ds и $d\phi$, то получатся следующие условия равновесия:

$$\begin{aligned} \sigma' \cos \alpha - \tau' \sin \alpha - \sigma_x \cos \alpha - \tau \sin \alpha &= 0, \\ \sigma' \sin \alpha + \tau' \cos \alpha - \sigma_r \sin \alpha - \tau \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

из которых первое представляет уравнение проекций на ось x , а второе на ось r .

Отсюда для σ' и τ' , после простых преобразований, получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_r}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_r}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha, \\ \tau' &= \frac{\sigma_r - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Это точно такие же формулы, какие мы имели в случае плоского напряженного состояния для напряжений, действующих в трех сечениях,

расположенных одинаковым образом. Если на боковой поверхности напряжений быть не должно, то мы получаем граничные условия $\sigma'_r = 0$ и $\tau' = 0$.

Эти уравнения можно применить также и к элементу объема, ограниченному такими же плоскостями, но расположенному не у поверхности, а внутри тела. Условие $\tau' = 0$ или

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3)$$

тогда определит нам два взаимно перпендикулярных направления, по которым идут траектории нормальных напряжений в соответствующей точке меридионального сечения.

Двух уравнений (1) вместе с граничными условиями недостаточно для определения четырех напряжений в виде функций от x и r . Для этого нам во всяком случае нужны еще добавочные уравнения, которые получатся на основании зависимости, существующей между напряжениями и упругими деформациями. Проще всего выразить все напряжения через перемещения ξ и ρ , параллельные осям x и r , и таким образом свести число неизвестных функций с четырех до двух, для определения которых будет достаточно двух уравнений.

Это мы сделаем после, предварительно же мы укажем другой также имеющийся путь, преимущество которого заключается в том, что его можно применить для отыскания приближенного решения, если точное решение найти слишком трудно. Он состоит в применении теоремы о минимуме работы деформации. Совершенно так же, как мы это делали прежде, сперва рассматривают какое-либо напряженное состояние, строго удовлетворяющее всем условиям статики, т. е. уравнению (1) и граничным условиям, и зависящее от нескольких параметров, которыми можно располагать по нашему произволу. Затем путем интегрирования по всему объему тела определяют работу деформации A , соответствующую этому напряженному состоянию. Дифференцирование A по параметрам дает нам уравнения, которым параметры должны удовлетворять для того, чтобы A обратилось в минимум и чтобы благодаря этому получилось наилучшее приближенное решение, какое только возможно при применении принятых формул для напряжений. Этот путь до сих пор в рассматриваемой области, кажется, еще никем не применялся, хотя этим способом можно было бы найти еще много результатов, ценных для практического применения.

Так как мы будем исходить непосредственно из уравнений (1), то их в данном случае лучше написать в форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(r\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\tau)}{\partial x} - \sigma_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где теперь за неизвестные следует считать $r\sigma_x$, $r\sigma_r$, $r\tau$ и σ_z . Тогда уравнения будут иметь форму уравнений для плоской задачи с тем лишь отличием, что сюда вместо σ_y , σ_z и τ входят напряжения, умноженные на r , и что

массовые силы, входящие в уравнения плоской задачи, не приравнены нулю, а заменены соответствующим членом σ_t . Это замечание позволяет в известных случаях воспользоваться результатами, полученными в плоской задаче. И здесь можно указать функцию напряжений, аналогичную той, какую мы имели при плоском напряженном состоянии. Подробнее об этом сказано в § 88.

Упругая деформация тела вращения, которой мы теперь займемся, также должна быть симметричной относительно оси тела. Поэтому, как уже замечено, она полностью определяется заданием двух функций ξ и ρ от x и r , дающих перемещения точки x , r . Относительные удлинения ϵ_x , ϵ_r , ϵ_t в направлениях, указанных значками, выражаются через ξ и ρ , как легко видеть, при помощи следующих формул:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \epsilon_r = \frac{\partial \rho}{\partial r}; \quad \epsilon_t = \frac{\rho}{r}, \quad (5)$$

и отсюда, далее, для объемного расширения e получается:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_r + \epsilon_t = \frac{\partial \xi}{\partial x} + D\rho, \quad (6)$$

где под D надо понимать обозначение следующей операции:

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right), \quad (7)$$

введение которой делает дальнейшие формулы более наглядными

По закону Гука, т. е. по формулам (34) § 2, для напряжений мы получим формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right); \\ \sigma_r &= 2G \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{e}{m-2} \right); \\ \sigma_t &= 2G \left(\frac{\rho}{r} + \frac{e}{m-2} \right); \\ \tau &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если эти выражения подставить в уравнения (1), то мы и получим основные уравнения упругого равновесия, которым должны удовлетворять функции ξ и ρ . Если снова воспользоваться оператором D , то первое из уравнений (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + D\tau = 0;$$

после подстановки σ_x и τ , а также e из формулы (6) оно перейдет в следующее:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^2} + \frac{m-2}{2(m-1)} D \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} D\rho = 0. \quad (9)$$

Точно так же можно вывести из второго уравнения (1) второе основное уравнение и привести его к форме:

$$\frac{\partial}{\partial r} D\rho + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial x} = 0. \quad (10)$$

Для решения задачи об определении напряжений в теле вращения, рассматриваемой нами в этой главе, нужно лишь определить ρ и ξ таким образом, чтобы они удовлетворяли в каждой точке тела уравнениям (9) и (10) и одновременно граничным условиям на поверхности тела. Мы рассмотрим отдельные случаи, в которых удастся найти решение.

При применении формул (9) и (10) нужно между прочим иметь в виду, что порядок операций D и $\frac{\partial}{\partial r}$ изменять нельзя. Конечно, обозначение D можно было бы совсем не применять, заменив его в предыдущих формулах выражением по формуле (7), но тогда формулы получились бы несколько более длинными и менее наглядными.

Если, кроме того, ввести еще оператор D^2 , положив

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right),$$

то из уравнений (9) и (10), исключая из них ξ , т. е. дифференцируя (9) по x и r , и подставляя $\frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial x}$ из (10), получим:

$$\frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} + 2D^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + D^2 \cdot D^2 \rho = 0,$$

вместо чего можно написать короче и нагляднее:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D^2 \right)^2 \rho = 0. \quad (11)$$

Точно так же легко составить дифференциальное уравнение четвертого порядка, которому должно удовлетворять перемещение ξ , если к уравнению (10) сперва применить операцию $\frac{\partial}{\partial x} D$, а затем вставить $\frac{\partial}{\partial x} D\rho$ из уравнения (9). После простых вычислений это нам дает:

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} D \frac{\partial \xi}{\partial r} + \left(D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \xi = 0. \quad (12)$$

Здесь целесообразно ввести еще один оператор E^2 , положив

$$E^2 = D \frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (13)$$

и тогда предыдущее уравнение запишется в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + E^2\right)\xi = 0, \quad (14)$$

совершенно аналогичном уравнению (11), если не считать того, что D^2 и E^2 отличаются друг от друга членом $-\frac{1}{r^2}$.

Заметим, что по формуле (86) § 26

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

так что

$$E^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \nabla^2,$$

где ∇^2 обозначает оператор Лапласа в пространстве. При этом обозначении уравнение (14) можно записать еще короче:

$$\nabla^2 \xi = 0.$$

Но этому уравнению перемещение ξ должно удовлетворять во всех случаях, совершенно независимо от тех упрощений, которые мы получаем в случае тела вращения, так как его можно вывести непосредственно из основных уравнений (36) § 2 упругого равновесия путем исключения из них η , ζ , e . К вопросу о нахождении точных решений предыдущих уравнений мы еще возвратимся впоследствии.

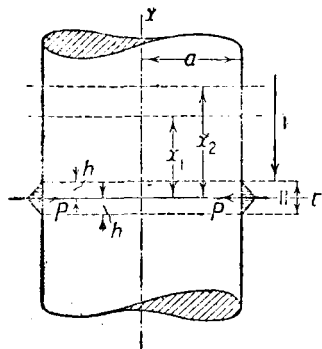
§ 81. Пример. Круглый цилиндр, стянутый по боковой поверхности кольцевым давлением.

Рассмотрим тело, имеющее форму круглого цилиндра, длина которого в сравнении с диаметром настолько велика, что ее можно считать бесконечно большой. Пусть нагрузка создается канатом или лентой, охватывающими без трения цилиндр по кольцу, расположенному примерно посередине длины, и натянутыми с заданной силой P . Тогда лента создаст равномерно распределенное вдоль круга давление на боковую поверхность цилиндра. Задача заключается в определении напряжений и деформаций, создаваемых в теле (фиг. 99).

Эта задача представляет одну из простейших и вместе с тем одну из важнейших задач из теории тел вращения. Но до сих пор она, насколько нам известно, не имела практически пригодного решения. Мы воспользуемся ей для того, чтобы показать на ней приближенный метод, опирающийся на теорему о минимуме работы деформации, хотя, как мы после увидим, для нее можно дать и точное решение, если не бояться, конечно, значительно более длинных вычислений.

Предварительно заметим, что задачу можно рассматривать немного иначе, не внося в нее существенных изменений. Например, если на вал надето в горячем состоянии стальное кольцо, то, хотя заранее сила

натяжения, которая получится в кольце после охлаждения, или же давление, производимое кольцом на вал, нам и не будут известны, все же очевидно, что эту новую задачу решить будет легко, если предыдущая задача будет уже решена. Заметим, что человеческая нога или рука, перевязанная бинтом, находится в таких же условиях, как и рассматриваемый нами упругий цилиндр.



Фиг. 99.

Начало системы координат мы поместим в центре круглого сечения, к точкам контура которого приложены внешние силы. Плоскость круга представляет плоскость симметрии, и потому нам достаточно рассмотреть лишь ту часть всего тела, которая идет в направлении положительной оси x . Мы будем считать, что внешние силы распределены по кольцевой полоске высотой $2h$, причем эту высоту следует считать малой в сравнении не только с длиной тела, но также и в сравнении с радиусом a . По какому закону распределяются внешние силы между $x=0$ и $x=h$, это для нас безразлично, но мы сделаем простейшее предположение, что удельное давление p ленты на единицу площади поверхности цилиндра составляет

$$p = p_0 \frac{h-x}{h}, \quad (15)$$

где p_0 представляет давление на средней линии. Давление p_0 будет связано с полным натяжением P всей ленты следующим простым соотношением:

$$P = p_0 a h, \quad (16)$$

которое получается из условия равновесия половины ленты (кольца), отсеченной диаметральной плоскостью.

Часть цилиндра, соответствующую положительной стороне оси x , мы разделим на часть I, простирающуюся от $x=h$ до $x=\infty$, и на часть II, расположенную в пределах от $x=0$ до $x=h$. Напряженное состояние в каждой из этих двух частей мы исследуем независимо одно от другого. Поперечное сечение, которое мы возьмем в первой части цилиндра на расстоянии x_1 от плоскости $x=0$, отделит новую внешнюю часть цилиндра, равновесие которой мы сперва и рассмотрим. Напряжения σ_x и τ , действующие в сечении x_1 , представляют единственную нагрузку, приложенную к этой части цилиндра и создающую в нем соответствующие деформации и напряжения. Поэтому можно считать, что напряжения σ_x и τ , действующие в более удаленном сечении x_2 и вызванные этой нагрузкой, определяются по точно таким же законам, как напряжения σ_x , τ , создаваемые в сечении x_1 нагрузкой, действующей в начальном сечении $x=h$ первой части цилиндра. Мы положим

$$(\sigma_x, \tau)_{x_2} = (\sigma_x, \tau)_h \cdot f(x_2)$$

(смысл этой формулы понять нетрудно), причем заметим, что величина h очень мала, так что x_1 в то же время можно рассматривать, как расстояние между сечениями x_1 и h ; тогда для напряжений в сечении x_2 в зависимости от того, будем ли мы считать причиной возникновения их напряжения, действующие в сечении x_1 , или напряжения, действующие в сечении h , мы получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}(\sigma_x, \tau)_{x_2} &= (\sigma_x, \tau)_h \cdot f(x_2) = (\sigma_x, \tau)_{x_1} \cdot f(x_2 - x_1) = \\ &= (\sigma_x, \tau)_h \cdot f(x_1) \cdot f(x_2 - x_1).\end{aligned}$$

Поэтому функция f , выражающая меру уменьшения напряжений с увеличением расстояния, должна удовлетворять функциональному уравнению

$$f(x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2 - x_1),$$

а это как раз представляет формулу, характеризующую показательную функцию. Следовательно, мы должны положить

$$f(x) = ce^{-\gamma x},$$

где под c и γ нужно понимать постоянные значения ¹⁾.

Этим соображением мы и будем руководиться при составлении формул для статически возможных напряжений в части цилиндра I, причем можно быть уверенным, что мы получим для напряжений значения, очень близкие к истинным, по крайней мере, в отношении зависимости от x .

1) Решение функционального уравнения

$$f(x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2 - x_1)$$

можно получить следующим образом. Дифференцируем по x_2 :

$$f'(x_2) = f(x_1) f'(x_2 - x_1);$$

делим второе равенство на первое:

$$\frac{f'(x_2)}{f(x_2)} = \frac{f'(x_2 - x_1)}{f(x_2 - x_1)}$$

и, полагая $x_2 - x_1 = z$, получим:

$$\frac{f'(x_2)}{f(x_2)} = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Так как x_2 и z независимы друг от друга, то последнее равенство возможно только при условии, что $\frac{f'(x_2)}{f(x_2)}$ не зависит от x_2 (или $\frac{f'(z)}{f(z)}$ от z), т. е.:

$$\frac{f'(x_2)}{f(x_2)} = \text{const.} = \pm \gamma.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим решение, указанное в тексте; в этом решении перед γ принят знак минус для выполнения условия $\sigma_x, \tau)_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

Прим. перев.

Затем мы зададимся некоторым достаточно вероятным законом распределения касательных напряжений τ . При этом нужно принять во внимание, что τ при $r=a$ должно обращаться в нуль, так как на боковой поверхности части цилиндра I никакие касательные внешние силы не действуют. Кроме того, вследствие симметрии, касательное напряжение должно обращаться в нуль и при $r=0$. Простейшее выражение, удовлетворяющее всем этим условиям, будет иметь вид:

$$\tau = ce^{-\gamma x}(ar - r^2). \quad (17)$$

Можно было бы положить также

$$\tau = e^{-\gamma x}(ar - r^2)(c + c_1 r + c_2 r^2 + \dots),$$

чтобы в формулу кроме c входили и другие параметры c_1, c_2 и т. д. При применении этого более общего закона приближенная теория, которую мы хотим построить, несомненно была бы значительно точнее, чем при пользовании выражением (17), и притом тем точнее, чем больше параметров мы возьмем. Но тогда выкладки получились бы много сложнее, и потому мы будем исходить из простейшей формулы (17), тем более, что наша цель заключается не в достижении большой точности, а в иллюстрации способа на таком примере, при котором вычисления можно было бы легко проверить.

После того как мы задались формулой для τ , напряжение σ_x можно будет получить из первого уравнения равновесия (4), именно:

$$\frac{\partial (r\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = 0,$$

из которого получится:

$$\sigma_x = \frac{c}{\gamma} e^{-\gamma x}(2a - 3r). \quad (18)$$

Другие напряжения σ_r и σ_t входят лишь во второе уравнение равновесия (4), именно в уравнение:

$$\sigma_t = \frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r\tau)}{\partial x},$$

так что мы имеем здесь еще больший произвол в выборе соответствующих выражений. Но при этом нужно иметь в виду, что при $r=a$, σ_r в первой части цилиндра должно всюду равняться нулю. Таким образом мы имеем много возможностей ввести новые параметры для повышения точности, но мы опять удовольствуемся применением простейшей формулы, содержащей лишь один новый параметр k :

$$\sigma_r = ke^{-\gamma x}(a - r). \quad (19)$$

Тогда, чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению, мы должны положить

$$\sigma_t = e^{-\gamma x}(ak - 2kr - c\gamma ar^2 + c\gamma r^3). \quad (20)$$

Таким образом эти формулы дают нам действительно напряженное состояние в первой части цилиндра, удовлетворяющее всем условиям статики, причем все формулы, если бы потребовалось, можно легко обобщить согласно сделанным указаниям.

Теперь мы переходим ко второй части цилиндра, расположенной в пределах от $x=0$ до $x=h$. Здесь мы сохраним те же выражения для напряжений с тем лишь отличием, что введем добавочные члены, как этого требуют измененные граничные условия. При этом следует иметь в виду, что сечение $x=0$ представляет плоскость симметрии, в которой касательные напряжения действовать не могут. Поэтому мы положим:

$$\tau = c(ar - r^2) \left(e^{-\gamma x} - \frac{h-x}{h} \right), \quad (21)$$

тогда напряжение τ при $x=h$ по формулам (17) и (21) будет принимать, как это и требуется, одинаковые значения.

Но такое же условие должно быть выполнено и для σ_x , связанного с τ дифференциальным уравнением (4). Оно дает нам:

$$\sigma_x = c \left(\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} - \frac{(h-x)^2}{2h} \right) (2a - 3r). \quad (22)$$

Напряжение σ_r должно удовлетворять граничному условию на контуре, согласно которому по формуле (15) при $r=a$ мы должны иметь:

$$\sigma_r = -p_0 \frac{h-x}{h}.$$

Знак минус выражает, что здесь мы имеем сжимающие напряжения. Поэтому во второй части цилиндра мы положим:

$$\sigma_r = ke^{-\gamma x} (a-r) - p_0 \frac{h-x}{h}, \quad (23)$$

причем при $x=h$ мы снова получаем для σ_r значение, совпадающее со значением, вычисляемым по формуле (19).

Наконец, для σ_t дифференциальное уравнение (4) дает выражение:

$$\sigma_t = e^{-\gamma x} (ak - 2kr - c\gamma ar^2 + c\gamma r^3) + \frac{c}{h} (ar^3 - r^3) - p_0 \frac{h-x}{h}. \quad (24)$$

Здесь, конечно, нам не удастся выбрать выражение для σ_t таким образом, чтобы при $x=h$ по формулам (20) и (24) получалось одно и то же значение. Но внезапный скачок напряжения σ_t в этом месте не нарушает ни одного из необходимых условий равновесия, а они только и должны быть удовлетворены при решении задачи по рассматриваемому методу. Конечно, было бы лучше избежать скачка, если бы это было возможно, не вводя в наши формулы других дефектов, так как скачок, очевидно, находится в противоречии с упругими свойствами тела. Чем точнее мы удовлетворим действительным условиям еще при первоначаль-

чальном выборе формул для напряжений, тем точнее будут совпадать с действительными значениями результаты вычислений. Но слишком бояться расхождений не следует; если требуется простая формула, то известные расхождения можно оставлять без внимания, лишь бы они не противоречили условиям статики, которые, конечно, должны быть выполнены во всей строгости.

Теперь мы можем перейти к вычислению работы упругих сил. Сперва мы это сделаем для части I. По формуле (54) § 5 удельная работа упругих сил тела вращения должна выражаться следующим образом:

$$A = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2) - \frac{1}{2(m+1)} (\tau_x + \tau_r + \sigma_t)^2 + \tau^2 \right\}; \quad (25)$$

в эту формулу вместо напряжений нужно вставить выражения, составленные выше. Это дает довольно сложное выражение, которое желательно упростить, хотя бы за счет точности, если иначе этого сделать нельзя.

Вспомним, что согласно сказанному в § 3 во многих случаях представляется допустимым принять $m = \infty$. В этом случае предыдущее выражение сильно упрощается и принимает следующий вид:

$$A = \frac{1}{4G} (\sigma_x^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2 + 2\tau^2), \quad (26)$$

что нам может дать значительное сокращение вычислений.

Но как бы это упрощение заманчиво ни было, мы все же от него откажемся, так как вычисления, даже при применении более общего выражения (25), не так уже сложны. На возможность эту теперь же необходимо указать на тот случай, если бы потребовалось повторить все вычисление для большего числа параметров.

Сперва мы вычислим

$$\sigma_x^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2 = e^{-2ix} \left\{ \frac{c^2}{\gamma^2} (2a - 3r)^2 + k^2 (a - r)^2 + (ak - 2kr - c\gamma ar^2 + c\gamma r^3)^2 \right\} = e^{-2ix} \cdot R_1,$$

где R_1 обозначает для сокращения выражение, стоящее в скобках. Точно так же

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_t)^2 = e^{-2ix} \left\{ \frac{2ac}{\gamma} + 2ak - r \left(\frac{3c}{\gamma} + 3k \right) - c\gamma ar^2 + c\gamma r^3 \right\}^2 = e^{-2ix} \cdot R_2,$$

$$\tau^2 = e^{-2ix} \cdot c^2 (ar - r^3)^2 = e^{-2ix} \cdot R_3.$$

Работа деформации A_1 для первой части цилиндра составляет

$$A_1 = \int_b^{\infty} dx \int_0^a 2\pi r A dr.$$

Так как величина h очень мала, то без заметной ошибки мы можем заменить интегрирование по x в пределах от $x=h$ до $x=\infty$ интегрированием в пределах между $x=0$ и $x=\infty$. Интегрирование это выполняется просто, и мы найдем:

$$A_1 = 2\pi \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{1}{2G} \int_0^a \left(\frac{rR_1}{2} - \frac{1}{2(m+1)} rR_2 + rR_3 \right) dr.$$

Хотя интегрирование по r и требует несколько более сложных вычислений, но и оно не представляет никаких трудностей, если не считать того, что выкладки длинные. Мы последовательно найдем:

$$\begin{aligned} \int_0^a rR_1 dr &= \frac{a^4}{4} \left(\frac{c^2}{\gamma^2} + k^2 \right) + \frac{a^6}{30} c\gamma k + \frac{a^8}{168} c^2\gamma^2, \\ \int_0^a rR_2 dr &= \frac{a^4}{4} \left(\frac{c^2}{\gamma^2} + \frac{2kc}{\gamma} + k^2 \right) + \frac{a^6}{168} c^2\gamma^2, \\ \int_0^a rR_3 dr &= \frac{a^6}{60} c^2. \end{aligned}$$

Если вставить эти значения, то мы получим:

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\pi}{2G\gamma} \left\{ \frac{m}{m+1} \left[\frac{a^4}{8} \left(\frac{c^2}{\gamma^2} + k^2 \right) + \frac{a^8}{3 \cdot 6} c^2\gamma^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{a^4}{4(m+1)} \cdot \frac{kc}{\gamma} + \frac{a^6}{60} (c\gamma k + c^2) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычисление работы упругих сил A_2 для второй части цилиндра значительно упрощается, если учесть, что вследствие малости h , а следовательно, и объема, мы должны принять во внимание лишь такие члены \mathbf{A} , чтобы, несмотря на небольшой объем, по которому производится интегрирование, получился член A_2 того же порядка, что и A_1 . Но из всех напряжений, как показывают формулы (21)–(24), лишь σ_r и σ_t содержат члены, имеющие очень большую величину, именно те, в которые входит p_0 , а также еще член в σ_t , содержащий в знаменателе h . Всеми же другими членами можно пренебречь, и мы получим:

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(p_0 \frac{h-x}{h} \right)^2 + \left\{ \frac{c}{h} (ar^2 - r^3) - p_0 \frac{h-x}{h} \right\}^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2(m+1)} \left[\frac{c}{h} (ar^2 - r^3) - 2p_0 \frac{h-x}{h} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, как и прежде, получается:

$$A_2 = \int_0^h dx \int_0^a 2\pi r \mathbf{A}_2 dr;$$

после интегрирования мы получим следующее выражение:

$$A_2 = \frac{\pi a^2}{2(m+1)G} \left\{ (m-1) \rho_0^2 \frac{h}{3} - (m-1) \rho_0 c \frac{a^3}{20} + m \frac{c^2}{h} \cdot \frac{a^6}{168} \right\}. \quad (28)$$

В сумму $A = A_1 + A_2$ входят три параметра, именно γ , c и k . Сперва мы вычислим производную A по k и приравняем ее нулю. Это нам даст уравнение

$$\frac{m}{m+1} \cdot \frac{a^4}{8} \cdot 2k - \frac{a^4}{4(m+1)} \cdot \frac{c}{\gamma} + \frac{a^6}{60} \cdot c\gamma = 0,$$

которое позволяет выразить k через c и γ . Мы получим:

$$k = c \left(\frac{1}{m\gamma} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{a^2}{15} \cdot \gamma \right).$$

Затем мы дифференцируем A по γ и, после приравнивания производной нулю, получаем уравнение:

$$\frac{m}{m+1} \left(-\frac{3a^4}{8} \cdot \frac{c^2}{\gamma^4} - \frac{a^4 k^2}{8\gamma^2} + \frac{a^6}{336} c^2 \right) + \frac{a^4}{2(m+1)} \cdot \frac{kc}{\gamma^3} - \frac{a^6}{60} \cdot \frac{c^2}{\gamma^2} = 0.$$

Если подставить сюда k из предыдущего уравнения и сократить все члены на общий множитель c^2 , то мы получим уравнение, в которое будет входить лишь неизвестная γ . Здесь для упрощения формул желательнее подставить вместо m какое-либо определенное численное значение. Мы сперва положим $m = \infty$, вследствие чего оба предыдущих уравнения упростятся и примут вид:

$$k = -\frac{a^2}{15} \gamma c; \quad -\frac{3a^4}{8} \frac{c^2}{\gamma^4} - \frac{a^4 k^2}{8\gamma^2} + \frac{a^6}{336} c^2 - \frac{a^6}{60} \frac{c^2}{\gamma^2} = 0,$$

так что уравнение для γ перейдет в следующее:

$$-\frac{3}{8} - \frac{a^4}{1800} \gamma^4 + \frac{a^4}{336} \gamma^4 - \frac{a^2}{60} \gamma^2 = 0. \quad (29)$$

Единственный положительный корень этого уравнения будет

$$\gamma = \frac{4,04}{a}. \quad (30)$$

Этот корень нами получен в предположении, что $m = \infty$. Но мы можем произвести сразу вычисления и для случая $m = 4$. При этом значении m первоначальные уравнения перейдут в такие:

$$k = \frac{c}{4} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{a^2 \gamma}{3} \right);$$

$$-3a^4 \frac{c^2}{\gamma^4} - \frac{a^4 k^2}{\gamma^2} + \frac{a^6}{42} c^2 + a^4 \cdot \frac{kc}{\gamma^3} - \frac{a^6}{6} \cdot \frac{c^2}{\gamma^2} = 0,$$

и путем подстановки k из первого во второе мы для γ получим уравнение:

$$17a^4\gamma^4 - 210a^2\gamma^2 = 2835.$$

Решение его относительно γ даст только один положительный, нам именно и нужный, корень

$$\gamma = \frac{4,53}{a}, \quad (31)$$

который в пределах точности, какую мы вообще можем ожидать от введенных произвольных предположений, удовлетворительно совпадает с значением по формуле (30). Поэтому при дальнейших вычислениях мы оставим более простое допущение $m = \infty$ и будем исходить из (30). Тогда для k , после подстановки значения γ , мы получим значение:

$$k = -0,269ac. \quad (32)$$

Чтобы определить c , мы должны еще продифференцировать $A = A_1 + A_2$ по c . Так как мы уже остановились на допущении $m = \infty$, то по формулам (27) и (28) мы можем написать A в упрощенном виде:

$$A = \frac{\pi}{2G} a^2 \left\{ \frac{a^2}{8} \left(\frac{c^2}{\gamma^3} + \frac{k^2}{\gamma} \right) + \frac{a^2}{336} c^2 \gamma + \frac{a^4}{60} \left(ck + \frac{c^2}{\gamma} \right) + p_0^2 \cdot \frac{h}{3} - p_0 c \frac{a^3}{20} + \frac{c^2}{h} \cdot \frac{a^6}{168} \right\}.$$

Это выражение мы продифференцируем по c , считая c независимым от k , несмотря на то, что мы уже выразили k через c . Мы так должны сделать потому, что при разыскании минимума имеем право придавать каждому параметру произвольное значение, независимое от других; поэтому мы должны определить значение c таким образом, чтобы для него, при сохранении своих значений всеми остальными переменными, работа упругих сил получила минимальное значение. Мы получим:

$$\frac{\partial A}{\partial c} = \frac{\pi}{2G} a^2 \left\{ \frac{a^2}{4} \cdot \frac{c}{\gamma^3} + \frac{a^6}{168} c \gamma + \frac{a^4 k}{60} + \frac{a^4}{30} \cdot \frac{c}{\gamma} - \frac{a^3}{20} p_0 + \frac{a^6}{84} \cdot \frac{c}{h} \right\}.$$

Это выражение мы приравняем нулю и затем вставим в него γ и k из формул (30)¹⁾ и (32). Тогда, решая относительно c и пользуясь формулой (16), получим:

$$c = \frac{p_0}{a^2 \left(0,632 + 0,238 \frac{a}{h} \right)} = \frac{P}{a^3 (0,632h + 0,238a)}. \quad (33)$$

¹⁾ Авторы по недосмотру указывают формулу (31), относящуюся к случаю $m = 4$. В то время как несколько выше на этой же странице они условливаются для простоты провести расчет в предположении $m = \infty$. Поэтому нами соответственно исправлено неверное значение численного коэффициента перед h в формуле (33). *Прим. ред.*

Наконец, членом с h ввиду того, что он в сравнении с другими слагаемыми в знаменателе мал, можно пренебречь, и тогда формула перейдет в следующую:

$$c = 4,202 \frac{P}{a^4}. \quad (34)$$

Остается еще определить величину упругой деформации, а именно упругого укорочения Δa радиуса a в каком-либо месте. Для этого мы будем основываться на законе Гука, согласно которому

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} \left(\tau_r - \frac{1}{m} (\tau_x + \tau_t) \right).$$

Так как мы решили производить вычисления полностью только для $m = \infty$, то в этом предположении мы получим:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} = \frac{k}{E} e^{-r^2} (a - r) = -0,269 \frac{ac}{E} e^{-r^2} (a - r) = \\ &= -1,130 \frac{P}{a^3 E} e^{-r^2} (a - r). \end{aligned}$$

Знак минус выражает, что здесь мы имеем укорочение, а не удлинение. Изменение длины Δa всего радиуса a получается равным

$$\Delta a = \int_0^a \epsilon_r dr = -0,565 \frac{P}{aE} e^{-r^2} = -0,565 \frac{P}{Ea} e^{-4,04 \frac{r^2}{a^2}}. \quad (35)$$

Этим задачу в пределах, намеченных нами, можно считать решенной полностью. Нам ничто не мешает также повторить все вычисления для другого значения m или также, исходя не из формул (17) и (19), а из других с большим числом параметров.

§ 82. Различные обобщения предыдущего случая.

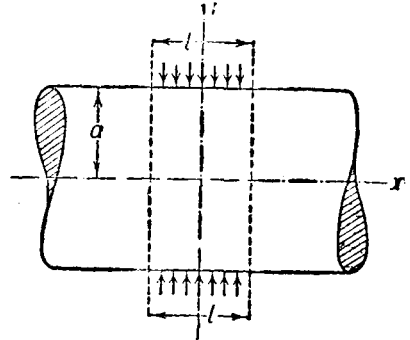
Случай нагрузки, которым мы занимались в предыдущем параграфе, можно использовать в качестве исходного при рассмотрении других случаев, представляющих комбинацию нагрузок первого типа и потому дающих возможность применить введенные формулы или непосредственно или же с незначительными изменениями. Это относится, в первую очередь, к случаю, когда на цилиндр надеты два кольца на не слишком большом расстоянии одно от другого, причем натяжения P_1 и P_2 в обоих кольцах могут быть и разными. Чтобы определить напряжения или укорочение радиуса Δa в каком-либо сечении, нужно лишь к значениям этих величин, зависящим от действия одной нагрузки и вычисленным по предыдущим формулам, прибавить значения, зависящие от действия другой нагрузки, причем под x в каждом случае нужно понимать расстояние рассматриваемого сечения от места приложения соответствующей нагрузки. Все это следует непосредственно из принципа сложения действия сил.

То же мы имеем и в том случае, когда внешние силы действуют на поверхность цилиндра на большей длине l , как это мы имеем в так называемом «стяжном» кольце (фиг. 100).

Начало координат мы можем взять в любой точке на оси вращения; или, как принято на чертеже, на середине отрезка l , или где-либо в другом месте. Переменную нагрузку на единицу площади боковой поверхности цилиндра мы обозначим через p . Если натяжение, приходящееся на ширину du кольца, обозначить через dP , то на основании тех же соображений, какие привели нас к формуле (16), мы получим:

$$dP = p \cdot a \cdot du.$$

В сечении с абсциссой x натяжение dP создает напряжения, которые получатся по формулам (17) — (20), если в них заменить x через $x - u$, а для γ , c , k взять значения по формулам (30) — (34). Если эти напряжения, создаваемые лишь элементарной нагрузкой dP , обозначить путем добавления спереди буквы d , то в предположении, что $x > u$, мы получим:



Фиг. 100.

$$\left. \begin{aligned} d\tau &= 4,2p \frac{du (ar - r^2)}{a^3} \cdot e^{-4,04 \frac{x-u}{a}}, \\ d\tau_x &= 1,04p \cdot \frac{du (2a - r)}{a^2} \cdot e^{-4,04 \frac{x-u}{a}}, \\ d\tau_r &= -1,13p \frac{du (a - r)}{a^2} e^{-4,04 \frac{x-u}{a}}, \\ d\sigma_t &= pdu \frac{1,13a^2 (2r - a) - 17,0r^2 (a - r)}{a^4} \cdot e^{-4,04 \frac{x-u}{a}}. \end{aligned} \right\} (36)$$

Уменьшение радиуса в точке x , которое в формуле (35) было обозначено через Δr , мы теперь обозначим буквой w , а ту часть его, которая обусловлена натяжением dP , через $d w$.

Тогда на основании формулы (35) получается:

$$d w = -0,565 \frac{p du}{E} e^{-4,04 \frac{x-u}{a}}. \quad (37)$$

Чтобы получить полные значения всех пяти величин, нужно еще проинтегрировать по u . Зависимость от x и от u во всех случаях одна и та же.

Мы вычислим сперва интеграл

$$\int_{l_1}^x \rho e^{-4,04 \frac{x-u}{a}} du,$$

в котором под l_1 нужно понимать абсциссу левого конца отрезка l , так что интегрирование распространяется на все внешние силы, для которых $x > u$, как это мы предполагали при выводе предыдущих формул.

Чтобы можно было вычислить интеграл, нужно еще сделать какое-либо предположение относительно распределения нагрузки вдоль отрезка l . Если мы предположим, что давление p постоянно, то интеграл будет иметь следующее значение:

$$\frac{\rho a}{4,04} \left(1 - e^{-4,04 \frac{x-l_1}{a}} \right).$$

Для внешних сил, расположенных по другую сторону сечения x , получается аналогичное выражение, и нам остается лишь сложить два таких выражения. Но при этом придется обратить внимание на одно особое обстоятельство, которое выяснится из нижеследующего.

Возьмем какое-либо сечение и рассмотрим, какое действие будут производить в этом сечении две нагрузки pdu , приложенных по обе стороны сечения на одинаковых расстояниях от него. Очевидно, что действие обеих нагрузок одинаково, если только не обращать внимания на знак касательных напряжений. Именно, нагрузка pdu во всех сечениях слева и справа создаст касательные напряжения, направления которых будут противоположны направлению сил p , т. е. касательные напряжения будут направлены наружу, если эти сечения рассматривать как основания средней части цилиндра с нагруженной боковой поверхностью. То же относится и к сечению x , расположенному посередине между двумя нагрузками pdu . Но здесь нужно различать, будем ли мы считать сечение x за основание части цилиндра, примыкающей к нему справа, или считать за основание части, примыкающей слева. В первом случае нагрузка, расположенная справа, создает в сечении касательные напряжения, направления которых, как мы только что видели, будут идти наружу, в то время как нагрузка, расположенная слева, создаст напряжения, направленные в противоположную сторону, о чем можно заключить на основании закона равенства действия и противодействия. Поэтому касательные напряжения, создаваемые обеими причинами, взаимно уничтожаются, так что в среднем сечении, заключенном между двумя нагрузками, могут действовать лишь нормальные напряжения. Это, впрочем, вытекает еще и из того, что это сечение для рассматриваемого случая нагрузки представляет плоскость симметрии, а в такой плоскости касательные напряжения вообще действовать не могут.

Но все это относится лишь к касательным напряжениям. Все же другие величины σ_x , σ_r , σ_t и ω , зависящие от действия нагрузок, расположенных по разные стороны, складываются, не изменяя своих знаков. В отношении

же нормальных напряжений σ_r и σ_t , а также и перемещения w , придется принять во внимание другое обстоятельство. Именно, если даже предполагать, что в формулах (23) и (24) $x=0$, а величина h очень мала, то в них все же еще останутся члены, которыми они будут отличаться от формул (19) и (20). Поэтому при вычислении σ_r и σ_t недостаточно сложить лишь те части их, которые получаются от действия нагрузок, расположенных по разные стороны, но нужно еще ввести дополнительные члены, соответствующие формулам (23) и (24). То же относится и к изменению длины w , которое было выражено непосредственно через σ_r .

Далее, если мы предположим, что начало координат расположено посередине отрезка l , как уже было принято на фиг. 100, то мы будем иметь $l_1 = -\frac{1}{2}l$, и на основании вышеизложенного мы для всех сечений, расположенных в пределах отрезка l , получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 1,04p \frac{ar - r^2}{a^2} \left(e^{-4,04 \frac{l-2x}{2a}} - e^{-4,04 \frac{l+2x}{2a}} \right), \\ \sigma_x &= 0,257p \frac{2a-r}{a} \left(2 - e^{-4,04 \frac{l-2x}{2a}} - e^{-4,04 \frac{l+2x}{2a}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Легко также вывести формулы для частей цилиндра, расположенных вне отрезка l , но мы здесь этого делать не будем. Далее, опять-таки на основании вышеизложенного для σ_r в пределах отрезка l получится выражение:

$$\sigma_r = -0,280p \frac{a-r}{a} \left(2 - e^{-4,04 \frac{l-2x}{2a}} - e^{-4,04 \frac{l+2x}{2a}} \right) - p, \quad (39)$$

а затем на основании формулы (35) для w получится выражение:

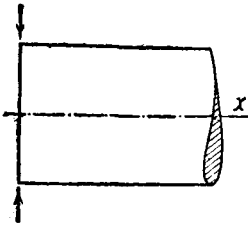
$$w = -0,140 a \frac{p}{E} \left(2 - e^{-4,04 \frac{l-2x}{2a}} - e^{-4,04 \frac{l+2x}{2a}} \right) - \frac{pa}{E}. \quad (40)$$

Отсюда мы видим, что w в пределах отрезка l представляет не постоянную величину, а переменную, и что она имеет наибольшее значение посредине; начиная от середины в направлении наружу она будет уменьшаться, если давление p постоянно. Но задачу можно обратить и попробовать определить p как функцию от x таким образом, чтобы в пределах отрезка l сокращение w радиуса a оставалось постоянным. И для этой задачи нами уже подготовлено все, что нужно для дальнейших вычислений.

Но, конечно, нельзя ожидать слишком многого от найденного здесь решения первоначальной задачи, так как это решение является лишь приближенным, надежность которого тем меньше, чем более детальные заключения нам нужны ¹⁾.

¹⁾ Более подробные выводы по этому вопросу имеются в статье W. Janicki, Beitrag zur Berechnung von Schrumpferbindungen, Schweizer Bauzt., Bd. 88, стр. 93, 1926, и Bd. 90, стр. 127, 1927, где теория обобщена на случай толстостенного полого цилиндра.

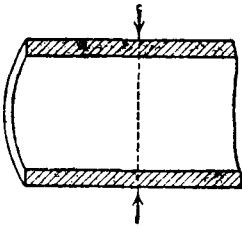
Далее, рассмотрим случай нагрузки, указанный на фиг. 101, когда нагрузка приложена на контуре основания цилиндра. Этот случай можно свести к случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе (фиг. 99), заменив в выведенных для него формулах P через $2P$. Это основывается на том соображении, что половина цилиндра, начинающаяся на фиг. 99 от плоскости симметрии $x=0$, находится в таких же условиях, как и цилиндр в рассмотренном случае. Конечно, это не вполне верно, так как хотя в плоскости симметрии $x=0$ в предыдущем случае и не было касательных напряжений, но зато были осевые напряжения σ_x , которых здесь нет. Все же разницу можно считать не столь уже значительной, чтобы нельзя было воспользоваться прежними



Фиг. 101.

результатами для приближенной оценки¹⁾. В противном случае ничто не мешало бы нам произвести все прежние вычисления еще раз с соответствующими изменениями.

То же относится и к случаю, указанному на фиг. 102, когда сплошной цилиндр заменен полым, т. е. трубкой, которая в одном месте подвергается давлению со всех сторон. Повторение всех вычислений, которые можно выполнить по образцу предыдущих, нас завело бы слишком далеко. Мы укажем лишь на главное отличие в сравнении со случаем сплошного цилиндра, которое заключается в том, что при принятой гипотезе должны удовлетворяться также и граничные условия на внутренней поверхности цилиндра. Далее, для вычисления Δa придется также избрать другой путь; именно, вместо того, чтобы вычислять сокращение диаметра, которое непосредственно найти



Фиг. 102.

нельзя, придется вычислить укорочение длины окружности. Если труба будет тонкостенной, то получится еще ряд упрощений, и тогда можно будет составить выражение, отвечающее действительным условиям точнее и надежнее, чем в случае толстостенной трубы или сплошного цилиндра, положив для этого заранее $\sigma_r = 0$ и введя в выражение τ большее число параметров. Но здесь мы ограничимся только этими указаниями.

В заключение укажем еще на связь, существующую между формулами (30) и (31) предыдущего параграфа, давшими нам значение γ , и результатом, найденным в § 16, согласно которому

$$\frac{1}{a} = 0,23a.$$

¹⁾ С высказанным здесь предположением о ничтожности влияния нормальных напряжений в концевом сечении вряд ли можно согласиться, ибо, как нам известно из ряда иных примеров (например в задаче о кручении), далеко не безразлично, может ли некоторое сечение свободно искривляться, или оно вынуждено оставаться плоским. Это обстоятельство приобретает тем большее значение, что рассматриваемая здесь задача поставлена с основной целью выявления местных напряжений и местных деформаций. *Прим. ред.*

Здесь мы по формуле (30) имеем:

$$\frac{1}{\gamma} = 0,25a;$$

γ и a в обоих случаях имеют один и тот же смысл, именно: они показывают, что уже на расстоянии, составляющем примерно $\frac{1}{8}$ диаметра тела, соответствующие напряжения уменьшаются, достигая $\frac{1}{2,718}$ доли того значения, которое напряжения имеют в месте приложения внешних сил. Отсюда можно вывести общее заключение, что система внешних сил, сконцентрированных в одном месте тела, имеющего форму стержня, и взаимно уравновешенных, создает такие напряжения, которые с увеличением расстояния от нагруженного места быстро уменьшаются, так что они становятся совсем незначительными уже на расстоянии, равном диаметру стержня. Этот результат соответствует формулировке принципа Сен-Венана в применении к телу, имеющему форму стержня.

§ 83. Определение местных напряжений в пластинке вблизи точки приложения сосредоточенной силы.

В § 30 мы подробно показали, что гипотезы, принимаемые в теории изгиба пластинки, не достаточны, чтобы определить наибольшие нормальные напряжения, создаваемые действием сосредоточенной силы. Чтобы определить эти напряжения, вырежем из пластинки вокруг точки приложения сосредоточенной силы цилиндр, радиус которого b представляет величину того же порядка, что и h , и рассмотрим равновесие этого цилиндра. К внутренним точкам цилиндра теория изгиба неприменима, так как предположения, из которых она исходит, в этих точках удовлетворяются не вполне. Этот цилиндр был начерчен на фиг. 25 на стр. 223 в первом томе, здесь мы перепечатаем этот чертеж еще раз.

Вне этого цилиндра формулы теории изгиба пластинки для нормальных напряжений мы считаем действительными. Напряжения σ , вычисленные по этим формулам для точек боковой поверхности цилиндра, будут для него внешними силами, которые мы можем считать заданными. Кроме того, на рассматриваемый цилиндр еще действует сосредоточенная сила или же действуют соответствующие ей сжимающие напряжения, распределенные по верхнему основанию $x = -\frac{h}{2}$, и касательные напряжения τ , распределенные по боковой поверхности цилиндра, равнодействующая которых должна быть равна сосредоточенной силе P . Наша задача будет теперь заключаться в определении напряжений, создаваемых внутри цилиндра внешними силами, приложенными на поверхности; очевидно, что эта задача относится к числу таких, которые мы как раз рассматриваем в этой главе. Мы приступим к ней так же, как и в § 81 в случае

цилиндра, подвергающегося действию поверхностных давлений, симметричных относительно оси.

По формулам (122) § 30 при $r=b$, т. е. на боковой поверхности цилиндра, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \frac{3P}{8m\pi h^2} \left[4(m+1) \ln \frac{a}{b} + (m-1) \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right], \\ \sigma_i' &= \frac{3P}{8m\pi h^2} \left[4(m+1) \ln \frac{a}{b} + (m-1) \frac{3a^2 - b^2}{a^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

причем σ_r' и σ_i' относятся к контуру, т. е. к расстоянию $x = \frac{h}{2}$ от срединной поверхности пластинки, а a обозначает радиус пластинки или же заменяющий его размер. На расстоянии же x от срединной поверхности мы будем иметь на контуре:

$$\sigma_r = \sigma_r' \cdot \frac{2x}{h}, \quad (42)$$

а для внутренних точек цилиндра мы положим

$$\sigma_r = R_1 x, \quad (43)$$

где R_1 обозначает функцию от одного r , подчиненную пока условию, чтобы она при $r=b$ принимала значение $\frac{2\sigma_r'}{h}$, которое мы считаем известным.

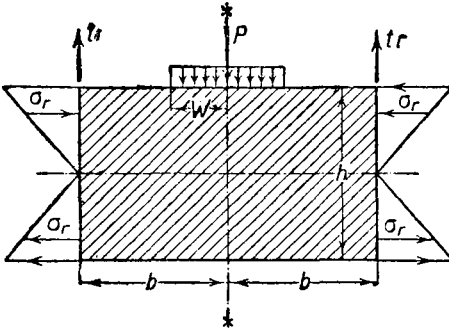
Если мы, как и в теории изгиба пластинки, будем считать ось x направленной вниз, то напряжения σ_x на верхнем основании цилиндра, т. е. при $x = -\frac{h}{2}$, будут совпадать с заданными на этом основании внешними силами.

Чтобы выразить напряжения σ_x при помощи формулы, мы должны сперва сделать какое-либо предположение о распределении внешней силы P по верхней плоскости. Здесь нет необходимости придерживаться обязательно распределения, указанного, например, на фиг. 103; мы должны взять его таким, чтобы оно было наиболее удобным для вычислений.

Для давления, действующего на единицу площади на расстоянии r , мы возьмем следующее выражение:

$$p = p_0 \left(\frac{b-r}{b} \right)^n, \quad (44)$$

где p_0 обозначает давление в центре, а n — какое-либо число, которое может быть равно единице или больше единицы. Чем больше мы возьмем n , тем большая часть всей нагрузки будет сконцентрирована вблизи центра верхнего основания.



Фиг. 103.

Вся нагрузка P и давление p_0 связаны друг с другом следующим соотношением:

$$P = 2\pi \int_0^b p r dr.$$

При вычислении интеграла нужно иметь в виду, что вообще мы имеем:

$$\int r \left(\frac{b-r}{b}\right)^n dr = -\frac{b}{n+2} \left(\frac{b-r}{b}\right)^{n+1} \cdot \left(r + \frac{b}{n+1}\right),$$

так что, подставив пределы и решив относительно p_0 , мы получим:

$$p_0 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{P}{\pi b^2}. \quad (45)$$

На основании формулы (44) мы для любого x полагаем

$$\sigma_x = -p_0 \left(\frac{b-r}{b}\right)^n \cdot X_1, \quad (46)$$

где X_1 обозначает пока произвольную функцию от одного x , которая должна лишь удовлетворять двум граничным условиям

$$X_1 \Big|_{x=+\frac{h}{2}} = 0$$

и

$$X_1 \Big|_{x=-\frac{h}{2}} = 1.$$

Выражение (46) мы вставим в первое из уравнений равновесия (4) и получим:

$$\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = p_0 r \left(\frac{b-r}{b}\right)^n \frac{dX_1}{dx},$$

а отсюда путем интегрирования, основываясь на написанной выше формуле для неопределенного интеграла, мы получим:

$$r\tau = -p_0 \frac{b}{n+2} \left(\frac{b-r}{b}\right)^{n+1} \cdot \left(r + \frac{b}{n+1}\right) \frac{dX_1}{dx} + X_2,$$

где под X_2 нужно понимать вторую, пока произвольную функцию от одного x . Но на оси цилиндра, т. е. при $r=0$ напряжение τ должно во всяком случае обращаться в нуль. Благодаря этому X_2 можно выразить через X_1 , именно:

$$X_2 = p_0 \frac{b^2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{dX_1}{dx} = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{dX_1}{dx}.$$

Правда, пока при $r=0$ у нас обратилась в нуль лишь величина $r\tau$, но легко убедиться в том, что и само τ обращается на оси цилиндра

в нуль, найдя для этого по известным правилам истинное значение неопределенного выражения $\frac{0}{0}$ для $r=0$. Если и в другом члене формулы для $r\tau$ выразить при помощи формулы (45) p_0 через P , то мы получим:

$$r\tau = \frac{P}{2\pi} \frac{dX_1}{dx} \left\{ 1 - \left(\frac{b-r}{b} \right)^{n+1} \cdot \left[(n+1) \frac{r}{b} + 1 \right] \right\}. \quad (47)$$

Отсюда на контуре, т. е. при $r=b$, получается:

$$b\tau_b = \frac{P}{2\pi} \frac{dX_1}{dx}.$$

Условие равновесия сил, действующих в направлении оси x (сила P и касательные напряжения τ_b), требует, чтобы имело место равенство:

$$2\pi b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_b dx + P = 0,$$

и это равенство при сделанном нами предположении действительно удовлетворяется. В этом можно убедиться, если принять во внимание граничные условия, установленные ранее для X_1 . Для удовлетворения же другого граничного условия $\tau_b=0$ при $x = \pm \frac{h}{2}$ мы оставляем за собой право впоследствии выбрать надлежащим образом постоянные, входящие в X_1 .

Если мы подставим $r\tau$ во второе из уравнений (4), выражающих условия равновесия, то получится:

$$\sigma_t = \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{d^2X_1}{dx^2} \left\{ 1 - \left(\frac{b-r}{b} \right)^{n+1} \left[(n+1) \frac{r}{b} + 1 \right] \right\}.$$

Для напряжения σ_r , входящего сюда, мы уже нашли формулу (43) и потому мы будем иметь:

$$\sigma_t = x \frac{d(rR_1)}{dr} + \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{d^2X_1}{dx^2} \left\{ 1 - \left(\frac{b-r}{b} \right)^{n+1} \left[(n+1) \frac{r}{b} + 1 \right] \right\}. \quad (48)$$

При гипотезах, выраженных формулами (43) и (48), у нас удовлетворены все условия статики, какие бы мы функции R_1 и X_1 ни взяли, лишь бы они удовлетворяли предписанным граничным условиям. Мы имеем поэтому возможность ввести в нашу формулу, выражающую принятую гипотезу, ряд параметров. Но этого не нужно делать наугад; мы должны стремиться заранее сделать выбор таким образом, чтобы по возможности ближе подойти к условиям, вероятность осуществления которых можно ожидать из иных соображений. Можно думать, что напряжения σ_t так же, как и σ_r , будут пропорциональны x , и потому

мы сделали бы ошибку, если бы, не обращая внимания на эти хотя и не обязательно требуемые статикой, но все же довольно вероятные предположения, ввели для X_1 гипотезу, выражаемую какой-либо другой простой формулой с рядом параметров. По указанным причинам мы положим

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} = cx,$$

и отсюда путем интегрирования при граничных условиях, указанных для X_1 при установлении формулы (46), получим:

$$X_1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{h} + \frac{ch^2}{24} \right) x + \frac{cx^3}{6}.$$

Постоянную c , входящую сюда и не являющуюся параметром, которым мы могли бы располагать по своему произволу, мы должны выбрать таким образом, чтобы она удовлетворяла последнему граничному условию, согласно которому τ при $x = \pm \frac{h}{2}$ должно обращаться в нуль. Это дает условие

$$\left(\frac{dX_1}{dx} \right)_{x = \pm \frac{h}{2}} = 0$$

и из него следует $c = \frac{12}{h^3}$. Таким образом мы для X_1 получаем окончательное выражение:

$$X_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{x}{h} + \frac{2x^3}{h^3}. \quad (49)$$

Остается еще лишь выбрать функцию R_1 , которая, кроме граничного условия при $r=b$, связана только одним условием, а именно тем, что она должна обращать работу деформации в минимум. Это вполне соответствует смыслу задачи, заключающейся в проверке, очевидно, ошибочного вывода теории изгиба пластинки, что в случае действия сосредоточенной силы напряжение σ_r в точке $r=0$ должно быть бесконечно большим. В § 30 нам удалось лишь показать, что это заключение ошибочно, но там мы не имели возможности решить, какое же значение имеет напряжение σ_r в точке $r=0$. Теорема о минимуме работы деформации как раз и может здесь дать заключение о том, какое значение имеет в действительности R_1 , а следовательно, и σ_r при $r=0$.

Конечно, чтобы избежать чрезмерно длинных вычислений, нам здесь придется удовольствоваться тем, что мы зададимся самой простой формулой для R_1 , именно мы возьмем:

$$R_1 = k_0 + k_1 r. \quad (50)$$

Так как величина R_1 [см. (42) и (43)] должна удовлетворять граничному условию при $r=b$, выражающемуся равенством

$$k_0 + k_1 b = \frac{2\sigma_r'}{h}, \quad (51)$$

то мы в формуле (50) имеем фактически только один параметр, потому что k_1 и k_0 зависят друг от друга. Но даже и эта простейшая формула должна быть такой, чтобы она достаточно отчетливо показывала сильное увеличение R_1 в направлении к центру. Если формулу (50) написать в виде:

$$R_1 = \frac{2 \cdot \sigma_r'}{h} \cdot \frac{r}{b} - k_0 \cdot \frac{b-r}{b},$$

подставляя параметр k_1 , выраженный через k_0 из уравнения (51), то мы видим, что при надлежащем выборе величины параметра k_0 значение R_1 в центре может превзойти значение R_1 на контуре во сколько угодно раз. Поэтому теорема о минимуме работы деформации, даже при помощи таких простых средств, может нам дать очень ясное представление о том, какую поправку нужно внести в выводы обыкновенной теории изгиба пластинки относительно очень сильного увеличения R_1 в направлении к центру.

Выпишем еще раз выражения для напряжений, которые мы получили до сих пор:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (k_0 + k_1 r) x, \\ \sigma_x &= -\frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{P}{\pi b^2} \cdot \left(\frac{b-r}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{x}{h} + \frac{2x^3}{h^3}\right), \\ \sigma_t &= \left\{ k_0 + 2k_1 r + \frac{12}{h^3} \cdot \frac{P}{2\pi} \left[1 - \left(\frac{b-r}{b}\right)^{n+1} \cdot \left((n+1) \frac{r}{b} + 1\right) \right] \right\} x, \\ \tau &= \frac{P}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \left(\frac{b-r}{b}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{b} + \frac{1}{r}\right) \right] \cdot \left(\frac{6x^2}{h^3} - \frac{3}{2h}\right). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

При помощи этих формул можно составить выражение для работы деформации, именно:

$$A = 2\pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dx \int_0^b r A dr,$$

причем для работы упругих сил A достаточно взять упрощенное выражение (26), получающееся при $m = \infty$,

$$A = \frac{1}{4G} \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2 + 2\tau^2).$$

Нам нет необходимости выполнять интегрирование по x и r полностью, так как выражение A нам нужно лишь для того, чтобы путем дифференцирования по k_0 получить уравнение для определения k_0 . Мы видим, что k_0 в выражениях для σ_x и τ вообще не входит, и потому соответствующие члены при дифференцировании по k_0 обратятся в нуль. Что касается остальных членов, то в них при дифференцировании войдут производные

напряжения, для которых мы на основании формулы (51) будем иметь следующие выражения:

$$\frac{d\sigma_r}{dk_0} = \left(1 + \frac{dk_1}{dk_0} r\right) x = \frac{b-r}{b} \cdot x,$$

$$\frac{d\sigma_t}{dk_0} = \frac{b-2r}{b} \cdot x.$$

Поэтому равенство, выражающее теорему о минимуме работы упругих сил, можно написать в таком виде:

$$\iint r \left(\sigma_r \frac{b-r}{b} x + \sigma_t \frac{b-2r}{b} x \right) dr dx = 0, \quad (53)$$

и лишь теперь нам необходимо выполнить самое интегрирование. Принимая во внимание формулу (51), мы после простых вычислений получим равенство:

$$\iint r \sigma_r \frac{b-r}{b} x dr dx = \frac{h^2 b^2}{144} \left(k_0 + \frac{2\sigma_r'}{h} \right).$$

Вычисление другого члена несколько сложнее, но и оно не представляет никаких принципиальных трудностей. При этом вычислении мы воспользуемся формулами:

$$\int r^2 \left(\frac{b-r}{b} \right)^n dr = - \left(\frac{b-r}{b} \right)^{n+1} \cdot \left[\frac{br^2}{n+3} + \frac{2b^2r}{(n+2)(n+3)} + \frac{2b^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right],$$

$$\int r^3 \left(\frac{b-r}{b} \right)^n dr = - \left(\frac{b-r}{b} \right)^{n+1} \cdot \left[\frac{br^3}{n+4} + \frac{3b^2r^2}{(n+3)(n+4)} + \frac{6b^3r}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{6b^4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right].$$

Если сюда подставить пределы 0 и b , то мы получим:

$$\int_0^b r^2 \cdot \left(\frac{b-r}{b} \right)^n dr = \frac{2b^3}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\int_0^b r^3 \cdot \left(\frac{b-r}{b} \right)^n dr = \frac{6b^4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

и таким образом после подстановки σ_t из формул (52) мы найдем следующее равенство:

$$\iint \sigma_t \cdot \left(r - \frac{2r^2}{b} \right) x dr dx = - \frac{b^2 h^3}{72} (k_0 + 2k_1^{(j)}) + \frac{P}{2\pi} b^2 \cdot K. \quad (54)$$

Здесь буква K введена нами для упрощения, она обозначает следующее выражение:

$$K = -\frac{1}{6} + \frac{12(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} - \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}. \quad (55)$$

Если при помощи формулы (51) выразить k_1 через k_0 , то равенство, выражающее теорему о минимуме работы упругих сил, будет иметь вид:

$$\frac{h^3 b^2}{144} \left(k_0 + \frac{2\sigma_r'}{h} \right) - \frac{h^3 b^2}{72} \left(\frac{1\sigma_r'}{h} - k_0 \right) + \frac{P^2}{2\pi} \cdot K = 0,$$

и решение этого уравнения относительно k_0 даст:

$$k_0 = 2 \frac{\sigma_r'}{h} - \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{48}{h^3} K. \quad (56)$$

До сих пор показатель n , введенный нами в формулу (44), оставался неопределенным. Чтобы перейти от распределения нагрузки по формуле (44) к случаю действия сосредоточенной силы, мы должны в полученных формулах положить $n = \infty$. Благодаря этому формула (55) для K значительно упростится, так как все члены кроме первого придется вычеркнуть, так что останется

$$K = -\frac{1}{6}.$$

При этом значении K формула для k_0 перейдет в следующую:

$$k_0 = \frac{2\sigma_r'}{h} + \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{8}{h^3}. \quad (57)$$

Далее, по формуле (51) мы получим:

$$k_1 = -\frac{P}{2\pi} \cdot \frac{8}{bh^3}, \quad (58)$$

а для функции R_1 по формуле (50) получим выражение:

$$R_1 = 2 \frac{\sigma_r'}{h} + \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{8}{h^3} \cdot \frac{b-r}{b}. \quad (59)$$

Наконец, по формуле (43) мы получим:

$$\sigma_r = \left(2 \frac{\sigma_r'}{h} + \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{8}{h^3} \cdot \frac{b-r}{b} \right) x, \quad (60)$$

и наша задача будет в сущности уже решена.

По формулам (52) легко можно вычислить и другие напряжения. Что они в предельном случае $n = \infty$ могут получиться даже бесконечно большими, этому удивляться не следует. Но нужно иметь в виду, что это относится только к σ_x , другие же напряжения σ_t и τ во всех точках значительно меньше наибольшего значения σ_x при $r=0$ и $x = -\frac{h}{2}$ ¹⁾.

В точке $r=0$, $x = +\frac{h}{2}$ мы получим напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_t = \sigma_r' + \frac{2P}{\pi h^2}; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau &= 0.\end{aligned}$$

При $x = -\frac{h}{2}$ напряжения σ_r и σ_t изменяют свои знаки, σ_x становится бесконечно большим (с отрицательным знаком), а τ во всех точках оси цилиндра остается равным нулю, как это уже было показано раньше. Наибольшее нормальное напряжение σ_r при изгибе пластинки сосредоточенной силой мы получаем в точке $r=0$ и $x = +\frac{h}{2}$ по формуле (41), которая дает:

$$\sigma_{\max} = \sigma_r' + \frac{2P}{\pi h^2} = \frac{P}{\pi h^2} \left\{ \frac{3}{8m} \left[4(m+1) \ln \frac{a}{b} + (m-1) \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right] + 2 \right\}.$$

Но так как для упрощения вычислений мы в этом параграфе уже приняли $m = \infty$, то, чтобы быть последовательными, мы должны то же значение подставить и в окончательную формулу, которая тогда перейдет в следующую:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi h^2} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{a}{b} + \frac{3}{8} \frac{a^2 - b^2}{a^2} + 2 \right\}. \quad (61)$$

Последний член в скобках, происходящий от нарастания напряжений в цилиндре, выделенном из пластинки, в направлении от боковой поверхности его к центру, имеет значительную величину и при обычно принимаемом значении b безусловно того же порядка, что и первый член. Но во всяком случае у тонкой плиты (пластинки), к которой эта теория только и относится, он меньше первого члена, так что о значительном повышении напряжений в направлении к центру, как этого можно было бы ожидать по формулам обыкновенной теории изгиба пластинки, не может быть и речи.

Таким образом при предположениях, сделанных для упрощения вычислений, цель, поставленную нами здесь, можно считать достигнутой.

Следующий вопрос заключается в том, какое значение b нужно принять при применении формулы (61) для вычисления нормальных напряжений, получающихся в пластинке при изгибе. На основании сказанного здесь, на этот вопрос ответить нельзя. Но во всяком случае b должно

¹⁾ Выражение для σ_x содержит множитель $n(n+1)$, которого нет у других напряжений, почему при достаточно больших n оно может оказаться во много раз большим σ_r , σ_t и τ . *Прим. ред.*

быть настолько большим, чтобы, начиная с $r=b$ в направлении наружу, гипотезы, положенные в основу теории изгиба пластинки, можно было считать выполненными с достаточной точностью. Конечно, величину b можно оценить лишь с известным приближением. Как она определяется, об этом уже было сказано в § 30.

Решение рассматриваемой задачи можно дать при помощи функций Бесселя, как это показал Надаи в журнале «Schweiz. Bauzt.», № 23 1920. В связи с этим укажем также на работу А. Тимпе, Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern, «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 4, 1924, в которой были даны точные решения для разных случаев нагрузки круглой пластинки и было сделано сравнение с решениями по приближенной теории изгиба пластинки, в которой считают, что толщина пластинки в сравнении с остальными размерами мала.

§ 84. Точные решения.

Теперь мы снова возвратимся к составленным в § 78 дифференциальным уравнениям (9)—(14) для перемещений ξ и ρ и спросим себя, как мы можем прийти к точным решениям этих уравнений, а вместе с тем и всей задачи. От нахождения общего решения мы вынуждены, конечно, отказаться и удовольствоваться лишь нахождением, по крайней мере, практически годных решений в отдельных частных случаях. Чтобы найти такие решения, будем сперва исходить из дифференциального уравнения для ξ (12), именно:

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} D \frac{\partial \xi}{\partial r} + \left(D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \xi = 0.$$

Здесь можно задать вполне естественный вопрос, могут ли и при каких условиях будут оставаться плоскими поперечные сечения тела, перпендикулярные к оси x , при деформации. Это произойдет, если ξ не будет зависеть от r , т. е. будет функцией от одного x . Действительно, уравнение будет удовлетворяться, если мы положим:

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad \xi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (62)$$

где коэффициенты a обозначают постоянные, которые нужно будет определить затем по граничным условиям. Тогда основные уравнения упругого равновесия (9) и (10) перейдут в следующие:

$$2a_2 + 6a_3 x + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} D \rho = 0, \quad (63)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} D \rho + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0. \quad (64)$$

Из них вытекает, что ρ может быть только функцией второй степени от x . Написав для ρ формулу

$$\rho = R_0 + R_1 x + R_2 x^2, \quad (65)$$

мы должны будем определить R_0, R_1, R_2 как функции от r так, чтобы были удовлетворены уравнения (63) и (64). При этом уравнение (63) перейдет в следующее:

$$2a^2 + 6a_3x + \frac{m}{2(m-1)} (DR_1 + 2xDR_2) = 0,$$

и для того чтобы оно удовлетворялось тождественно, R_1 и R_2 должны удовлетворять дифференциальным уравнениям:

$$DR_1 = -\frac{4(m-1)}{m} a_2; \quad DR_2 = -\frac{6(m-1)}{m} a_3. \quad (66)$$

Далее, если выражение для ρ подставить в формулу (64) и при этом воспользоваться только что выведенными формулами, то уравнение (64) перейдет в такое:

$$\frac{d}{dr} \cdot DR_0 + \frac{m-2}{m-1} R_2 = 0. \quad (67)$$

Дифференциальное уравнение (66) для R_2 , написанное подробнее, имеет вид:

$$\frac{dR_2}{dr} + \frac{R_2}{r} = -\frac{6(m-1)}{m} a_3;$$

для этого уравнения можно сразу указать следующее решение:

$$R_2 = -\frac{6(m-1)}{m} a_3 \left(\frac{C}{r} + \frac{r}{2} \right). \quad (68)$$

Здесь C обозначает произвольную постоянную интегрирования. В рассматриваемой задаче перемещение ρ при любом x на оси x должно обращаться в нуль, а потому и величина R_2 при $r=0$ должна обращаться в нуль, так что нужно положить $C=0$. Тогда уравнение (67), написанное подробнее, перейдет в следующее:

$$\frac{d^2R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_0}{dr} - \frac{R_0}{r^2} = \frac{3(m-2)}{m} a_3 r.$$

Полное решение этого уравнения имеет вид:

$$R_0 = \frac{3(m-2)}{8m} a_3 r^3 + Ar + \frac{B}{r},$$

где под A и B нужно понимать две постоянных интегрирования, из которых B мы должны сразу положить равной нулю, для того чтобы перемещение ρ обращалось в нуль при $\rho=0$. Решение дифференциального уравнения для R_1 можно получить непосредственно, зная решение для R_2 , и в результате мы получим:

$$\rho = \frac{3(m-2)}{8m} a_3 r^3 + Ar - \frac{2(m-1)}{m} a_2 r x - \frac{3(m-1)}{m} a_3 r x^2. \quad (69)$$

Эта формула и формула (62) для ξ полностью решают поставленную задачу, если не считать пока неизвестных постоянных интегрирования a_0, a_1, a_2, a_3 и A . Теперь ответим на вопрос, для каких граничных условий это решение подходит.

По формуле (6), после подстановки в нее выражений ξ и ρ , для e получится выражение:

$$e = \bar{\alpha}_1 + 2A + \frac{m-2}{m} \left(\frac{3a_3 r^2}{2} - 2a_2 x - 3a_3 x^2 \right),$$

и потому для напряжений по формулам (8) будем иметь выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\frac{2A}{m-2} + a_1 \frac{m-1}{m-2} + \frac{3}{2} \frac{a_3}{m} r^2 + \frac{m-1}{m} (2a_2 x + 3a_3 x^2) \right], \\ \sigma_r &= 2G \left[\frac{mA}{m-2} + \frac{a_1}{m-2} + 3a_3 \frac{3m-2}{8m} r^2 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 \right], \\ \sigma_t &= 2G \left[\frac{mA}{m-2} + \frac{a_1}{m-2} + 3a_3 \frac{m+2}{8m} r^2 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 \right], \\ \tau &= -\frac{2G(m-1)}{m} r (a_2 + 3a_3 x). \end{aligned} \right\} (70)$$

Нагрузка, которую нужно приложить на поверхности тела, чтобы в нем получились такие напряжения, определится по формулам (2):

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_r}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_r}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha, \\ \tau' &= \tau \cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_r}{2} \sin 2\alpha, \end{aligned} \right\} (71)$$

следовательно, сечения остаются плоскими только в весьма частном случае, вообще же сечения плоскими не остаются.

В частности, если положить $a_2 = a_3 = 0$ и $a_1 = -mA$, то все напряжения кроме σ_x обращаются в нуль, и мы получаем одноосное однородное напряженное состояние, какое получается в цилиндре с равномерно распределенной по основаниям нагрузкой, если цилиндрическая поверхность остается свободной от действия сил. Если же положить $a_2 = a_3 = 0$ и $a_1 = A$, то мы получим такое же однородное напряженное состояние с тремя одинаковыми главными напряжениями, какое получается в теле, нагруженном всесторонним постоянным давлением.

Теперь мы предложим себе вопрос, какие условия должны быть удовлетворены для того, чтобы вся боковая поверхность тела вращения была свободна от действия внешних сил, и оба основания были нагружены произвольной, но симметричной относительно центра нагрузкой. В этом случае σ' и τ' вдоль всего контура должны обращаться в нуль, а из формул (71) вытекает, что на всей боковой поверхности мы должны иметь:

$$\tau = -\sigma_r \operatorname{tg} \alpha; \quad \sigma_x = \sigma_r \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ и потому } \sigma_x \sigma_r = \tau^2. \quad (72)$$

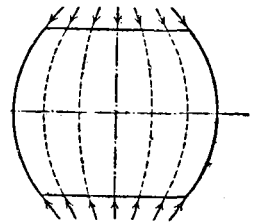
Здесь $\operatorname{tg} \alpha$, как видно из фиг. 98, стр. 145, можно положить равным:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{dx}{dr},$$

если под x и r в правой части этого равенства понимать координаты точек контура. Очевидно, что, вообще говоря, формулы (70) с этими условиями не совместимы, если не считать того особого случая, о котором речь была прежде. Таким образом наше исследование показывает, что за некоторыми исключениями, поперечные сечения симметрично нагруженного тела вращения не могут оставаться плоскими.

Этот результат важен главным образом потому, что в технике, вообще говоря, имеется тенденция во всех не типовых расчетах на прочность, для которых подходящего образца нет, исходить из упрощенного предположения о сохранении поперечными сечениями тела плоской формы при деформации. Это предположение часто является неверным и оно неверно, как мы только что доказали, и в общем случае тел вращения.

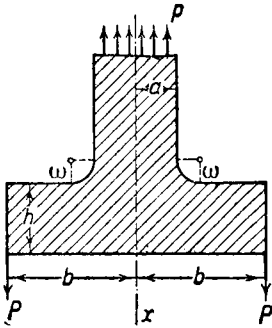
В связи с предыдущим мы укажем еще на две задачи, не имеющие пока решений, но рекомендуемые нами вниманию тех читателей, которые захотели бы заняться самостоятельными теоретическими исследованиями в этой области. Фиг. 104 изображает тело вращения, имеющее форму бочки, боковая поверхность которого свободна от действия внешних сил и оба основания нагружены произвольным образом, но симметрично относительно оси. Из равновесия элемента объема, расположенного у контура основания, получается, что поверхностное давление на торец у контура основания не может быть совершенно произвольно направленным, а оно во всяком случае должно идти в направлении касательной к образующей линии. В качестве образующей можно взять или дугу параболы, или синусоиду, или же какую-либо другую подходящую кривую. Образующая линия будет совпадать с одной из траекторий напряжений, а остальные траектории напряжений, из которых некоторые нанесены на чертеже, во всяком случае пойдут, примерно, как крайние. Если бы и не удалось найти точное решение задачи, которое, конечно, было бы желательно найти в первую очередь, то можно было бы на основании этих соображений, попытаться составить приближенное решение аналогично тому, как мы это делали в предыдущих параграфах. В рассматриваемой области теории упругости нужно еще так много сделать, что даже нахождение решения для некоторых задач этого типа уже представляло бы большой прогресс и помогло бы решению других аналогичных задач¹⁾.



Фиг. 104.

¹⁾ См. работу А. Тимпе (A. Timpe, Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern, «Ztschr. f. ang. w. Math. u. Mech», Bd. 4, 1924), где на стр. 375 дано точное решение для тела вращения, похожего на начерченное на фиг. 104.

Еще важнее, но, конечно, и значительно труднее, другая задача, которую поясняет фиг. 105. Здесь тело вращения имеет вид головки болта. Длину стержня можно считать произвольной, причем в сечении, расположенном на большом расстоянии кверху от головки, пусть действует равномерно распределенная по сечению нагрузка p . На боковой поверхности нижнего цилиндра, заменяющего головку болта, пусть приложены симметрично распределенные касательные силы, дающие в сумме растягивающую нагрузку $P = \pi a^2 p$. Закон распределения сил на этой поверхности не имеет существенного значения, так что в случае необходимости, можно было бы условия изменить.



Фиг. 105.

Пусть переход от нижнего цилиндра радиуса b к верхнему радиуса a сделан при помощи закругления радиуса ω . Основная задача заключается в определении вблизи закругления напряжений, величина которых во всяком случае весьма существенно зависит от радиуса ω . Решение этой задачи имеет настолько важное значение, что даже приближенное решение представило бы весьма ценный вклад в теорию упругости, хотя, конечно, точное или даже полуприближенное решение заслуживало бы предпочтения.

§ 85. Точное решение для круглого цилиндра, стянутого по боковой поверхности кольцевым давлением.

Для получения точного решения нужно найти интегралы двух дифференциальных уравнений (9) и (10) для перемещений ξ и ρ . Путем исключения одной из двух неизвестных, для ρ и ξ получаются уравнения (11) и (14). Мы покажем, что $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ удовлетворяет такому же дифференциальному уравнению, как и ρ , так что в дальнейшем можно будет заняться лишь одним из них. Это можно было бы доказать путем дифференцирования уравнения (14) по r , но мы изберем не этот путь, а будем исходить из уравнений (9) и (10). Путем дифференцирования первого по r , а второго по x мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2(m-1)} D^3 + \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{m-2}{2(m-1)} D^3 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \\ \left(D^3 + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

и если мы вычтем первое из второго, то после сокращения на общего множителя $\frac{m-2}{2(m-1)}$ мы получим:

$$\left(D^3 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \left(D^3 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0.$$

Таким образом в качестве предварительного результата мы получаем простое дифференциальное уравнение

$$\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = 0 \quad (74)$$

для величины $\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial r}$.

Обозначим это выражение через 2ω , так что

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial r} = 2\omega.$$

При помощи ω и объемного расширения e , вычисляемого по формуле (6), оба основных уравнения (9) и (10) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{m-2}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial (2r\omega)}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{m-2}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial (2r\omega)}{\partial x} = 0,$$

в чем проще всего убедиться путем подстановки значений e и ω , при которой написанные уравнения снова перейдут в уравнения (9) и (10).

Последние уравнения дают возможность применить гидродинамическую аналогию. Именно, если положить

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{p}{r} = \varphi(x, r),$$

$$\frac{m-2}{2(m-1)} \cdot 2r\omega = \frac{m-2}{2(m-1)} \cdot r \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = \psi(x, r),$$

то предыдущие уравнения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

отсюда мы видим, что φ представляет потенциал скоростей, а ψ — функцию тока потенциального потока, имеющего ось симметрии, так как из последних равенств вытекают следующие:

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

и

$$\Delta^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0;$$

первое равенство выражает так называемое условие неразрывности (сплошности), а второе выражает отсутствие в потоке вихрей.

При помощи потенциала φ или функции тока ψ можно определить и деформации, положив:

$$\rho = c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{m}{2(m-2)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2(m-1)}{m-2} \frac{\psi}{r},$$

$$\xi = c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{m}{2(m-2)} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

в чем опять проще всего убедиться, подставив эти выражения в основные уравнения для ρ и ξ и приняв во внимание дифференциальные уравнения для φ и ψ . Здесь c представляет постоянную величину. Путем дифференцирования φ и ψ по x можно получить новые решения.

Мы можем полученный результат резюмировать следующим образом: для каждого известного потенциального потока, имеющего ось симметрии, при помощи последних формул можно найти деформацию, имеющую также ось симметрии.

Таким образом нами указан путь для нахождения точных решений задачи о распределении напряжений, симметричных относительно оси. Укажем лишь на возможность построения точных решений при помощи следующих выражений для потенциала скоростей и функции тока:

$$\varphi = e^{-k \frac{x}{a}} J_0 \left(k \frac{r}{a} \right) \quad \text{и} \quad \psi = r e^{-k \frac{x}{a}} J_0' \left(k \frac{r}{a} \right),$$

где J_0 обозначает функцию Бесселя нулевого порядка, а штрих у J_0' — производную по аргументу $\left(k \frac{r}{a} \right)$. В эти решения входит еще параметр k . Путем суммирования или интегрирования по k из этих основных решений можно построить новые решения. Этот способ избрал Л. Феппл в близкой по содержанию с рассматриваемой задачей работе «Die Torsion runder Stäbe mit veränderlichem Querschnitt», Sitzungsberichte der Bayr. Ak. d. Wiss., 1921.

Мы укажем и изложим здесь второй способ для построения точных решений. Для этой цели напишем уравнения (73) в следующем виде:

$$\frac{m}{2(m-1)} D^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) - \left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Путем применения операции $D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ к обоим уравнениям мы на основании уравнения (74) получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} &= 0, \\ \left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Второе из этих уравнений получается из уравнения (11) непосредственно путем дифференцирования по x . Таким образом нахождение точного решения нашей задачи сводится к решению дифференциального уравнения

$$\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y = 0. \quad (76)$$

Вполне естественно искать такое решение уравнения (76), которое представляет произведение функции от r на функцию от одного x . Следовательно, положим

$$y = R_2(r) \cdot X_2(x). \quad (77)$$

Прежде чем приступить к решению этой трудной задачи, найдем сперва решение более простого дифференциального уравнения

$$\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)y = 0, \quad (78)$$

которое мы обозначим через

$$y_1 = R_1(r) \cdot X_1(x). \quad (79)$$

При таком выражении для y_1 уравнение (78) перейдет в следующее:

$$\frac{D^2 R_1}{R_1} = - \frac{\frac{d^2 X_1}{dx^2}}{X_1}.$$

Так как левая сторона этого уравнения зависит только от r , а правая только от x , то выражения, стоящие на обеих сторонах уравнения, могут принимать лишь постоянные значения. В зависимости от того, будет ли эта постоянная положительной или отрицательной, мы получим разные решения. Возьмем отрицательную постоянную и обозначим ее через $-k^2$. При мнимом значении k мы одновременно получаем и случай положительной постоянной. Последнее уравнение распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} D^2 R_1 &= -k^2 R_1, \\ \frac{d^2 X_1}{dx^2} &= +k^2 X_1; \end{aligned} \quad (80)$$

последнее имеет два решения e^{kx} и e^{-kx} , которые можно представить и в виде одной функции $\text{ch}(kx + a)$, где a обозначает произвольную постоянную, а ch — гиперболический косинус.

Первое из уравнений (80)

$$(D^2 + k^2)R_1 = 0, \quad (81)$$

написанное подробно, имеет следующий вид:

$$\frac{d_2 R_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) R_1 = 0.$$

Оно представляет дифференциальное уравнение Бесселя 1-го порядка с двумя интегралами $J_1(kr)$ и $K_1(kr)$, первый из которых обращается в начале координат в нуль и имеет особую точку $r = \infty$, а второй при $r = 0$ обращается в бесконечность, при беспредельном же увеличении r уменьшается до нуля.

Теперь перейдем к дифференциальному уравнению (76). Вместо того, чтобы искать решение этого однородного дифференциального уравнения 4-го порядка, можно решать неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) y = y_1, \quad (82)$$

интеграл которого будет удовлетворять также и уравнению (76). При подстановке вместо y и y_1 выражений (77) и (79) уравнение (82) переписется в следующем виде:

$$\frac{D^2 R_2}{R_2} + \frac{\frac{d^2 X_2}{dx^2}}{X_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{X_1}{X_2}. \quad (83)$$

В левой части уравнения стоит сумма функции от одного только r и функции от одного только x , а в правой части стоит произведение двух таких функций. Это равенство возможно лишь в том случае, если произведение в правой части его зависит или только от r , или только от x . Поэтому мы различаем два случая. В первом из них мы должны иметь:

$$X_2 = aX_1,$$

где a обозначает какую-либо постоянную. Тогда уравнение (83) будет иметь вид:

$$D^2 R_2 + \frac{\frac{d^2 X_1}{dx^2}}{X_1} \cdot R_2 = \frac{1}{a} R_1,$$

или в силу уравнений (80):

$$(D^2 + k^2) R_2 = \frac{1}{a} R_1,$$

и при повторном применении операции $D^2 + k^2$ мы получим:

$$(D^2 + k^2)^2 R_2 = 0. \quad (84)$$

Каждое решение этого дифференциального уравнения 4-го порядка составляется из двух пар частных решений. Первая пара частных решений совпадает одновременно с решениями уравнения (81), следовательно, это будут $J_1(kr)$ и $K_1(kr)$. Само собой разумеется, что эти две функции должны быть независимыми решениями дифференциального уравнения (84).

В соответствии с порядком рассматриваемого дифференциального уравнения к этим двум интегралам добавляются еще два других интеграла, именно:

$$r \cdot J_0(kr) \quad \text{и} \quad r \cdot K_0(kr).$$

Доказать, что эти две функции, представляющие произведение функций Бесселя нулевого порядка на r , удовлетворяют дифференциальному уравнению (84), можно легко путем подстановки в дифференциальное уравнение. Именно мы имеем:

$$(D^2 + k^2)[rJ_0(kr)] = 2 \frac{dJ_0(kr)}{dr},$$

как в этом можно убедиться, произведя соответствующие вычисления.

Так как по одной из известных формул теории дифференциальных уравнений Бесселя имеет место равенство:

$$\frac{dJ_0(kr)}{dr} = -kJ_1(kr),$$

то мы получаем:

$$(D^2 + k^2)^2 [rJ_0(kr)] = 0.$$

Такое же равенство имеет место и для $rK_0(kr)$.

Таким образом нами найдены четыре независимых друг от друга интеграла дифференциального уравнения (84), из которых путем умножения на $\text{ch}(kx + a)$ мы можем составить четыре независимых решения уравнения (76). Прежде чем выписывать эти решения, мы еще рассмотрим другой из указанных выше случаев, когда правая часть уравнения (83) зависит только от x .

Тогда мы должны иметь:

$$R_2 = bR_1,$$

где b обозначает постоянную. В этом случае на основании уравнения (81) уравнение (83) переходит в следующее:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right) X_2 = \frac{1}{b} X_1,$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)^2 X_2 = 0. \tag{85}$$

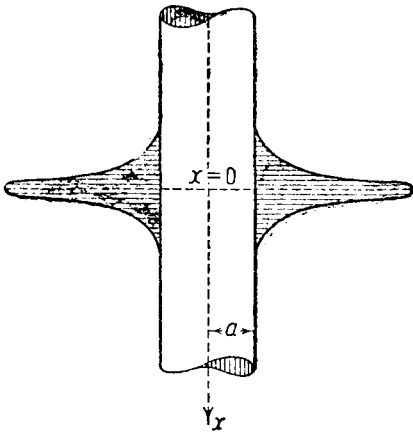
Это дифференциальное уравнение 4-го порядка кроме решения $\text{ch}(kx + a)$ имеет еще решение $x \cdot \text{ch}(kx + a)$, как в этом можно убедиться непосредственно путем подстановки в уравнение (85). Умножая на $J_1(kr)$ или $K_1(kr)$, мы опять получим решения дифференциального уравнения (76).

Таким образом мы нашли следующее решение уравнения (76), представляющее комбинацию написанных выше:

$$\left. \begin{aligned} y = & A \cdot \text{ch}(kx + \alpha) J_1 kr + B \cdot \text{ch}(kx + \beta) K_1(kr) + \\ & + C \cdot \text{ch}(kx + \gamma) r J_0(kr) + D \cdot \text{ch}(kx + \delta) r K_0(kr) + \\ & + E \cdot x \cdot \text{ch}(kx + \mu) J_1 kr + F x \text{с} \cdot \text{h}(kx + \nu) K_1(kr). \end{aligned} \right\} \tag{86}$$

Здесь A, B, \dots, F и $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ представляют постоянные. Формула (86) дает нам также общее выражение решения для $\frac{\partial \xi}{\partial r}, \frac{\partial \rho}{\partial x}$ и на основании уравнения (11) также и для самого ρ ; путем суммирования произвольного числа аналогично построенных членов с произвольными постоянными, можно получить более общее решение, так что решение определенной задачи сводится к нахождению этих постоянных на основании заданных граничных условий. В случае сплошного цилиндра функций K в формуле (86) не будет, так как они при $r=0$ принимают бесконечно большие значения, и в этом случае в формуле (86) останутся лишь члены, умножаемые на A, C, E .

Случай цилиндра конечной длины, на боковую поверхность которого действуют нормальные и касательные силы, параллельные образующим, рассмотрен Файлоном (Filon, «Philosophical Transactions of the Royal Society of London», serie A, V. 198, 1902) при условии, что основания цилиндра при деформации остаются плоскими, и на основании этого условия он получил закон распределения нормальных и касательных напряжений на основаниях. Р. Гиртлер (R. Girtler) в журнале «Sitzungsberichte der Wiener Akademie», 1907, рассматривает эту задачу в предположении, что напряжений на боковой поверхности нет и что на основаниях действует равномерно распределенное нормальное давление, отчего, конечно, основания искривляются.



Фиг. 106.

Мы рассмотрим здесь бесконечно длинный цилиндр радиуса a с внешней нормальной нагрузкой, относящейся к типу, рассмотренному в § 81, и действующей вблизи $x=0$. Для упрощения вычислений мы

предположим, что распределение нормальных давлений характеризуется кривой типа, начерченного на фиг. 106. В каждой точке боковой поверхности пусть действует давление, интенсивность которого пропорциональна ординате начерченной кривой, так что давление действует лишь вблизи сечения $x=0$.

Само собой разумеется, что при таком характере внешней нагрузки напряжения и перемещения должны обращаться в бесконечности в нуль. Вследствие этого формулы (86) применить здесь нельзя, даже если вычеркнуть функции K , так как гиперболический косинус при беспредельном увеличении x становится бесконечно большим. Для рассматриваемого случая нагрузки мы должны взять для k мнимое значение. Положим в формуле (86)

$$k = ik'$$

и вычеркнем члены, ненужные в случае сплошного цилиндра, тогда мы получим:

$$y = A \cos\left(k \frac{x}{a} + \alpha\right) J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) + B \cos\left(k \frac{x}{a} + \beta\right) r J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + Cx \cdot \cos\left(k \frac{x}{a} + \gamma\right) J_1\left(ik \frac{r}{a}\right), \quad (87)$$

где вместо k' мы опять написали k и затем k заменили через $\frac{k}{a}$, чтобы ввести величину k , не имеющую размерности. Здесь a обозначает радиус цилиндра. В то время как в формулу (86) входит гиперболический косинус, в формулу (87) входит обыкновенный косинус. Путем подстановки в уравнение (76) мы можем убедиться еще раз в правильности решения, выражаемого формулой (87).

Так как аргументы функций Бесселя J_0 и J_1 теперь имеют мнимые значения, то характер изменения этих функций в сравнении с функциями от вещественного аргумента весьма существенно изменяется, как это проще всего можно видеть из разложений функций Бесселя для вещественного и чисто мнимого аргументов в ряды:

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - + \dots,$$

$$J_0(ix) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} + + \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - + \dots \right\},$$

$$J_1(ix) = i \frac{x}{2} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + + \dots \right\}.$$

Разница между функциями Бесселя с вещественными и функциями Бесселя с чисто мнимыми аргументами выражается в знаках членов ряда. Мы видим, что при мнимом аргументе колебательный характер функций Бесселя, который они имеют при вещественном аргументе, теряется. Замечательно, что функция J_0 при мнимом аргументе остается вещественной, в то время как J_1 при мнимом аргументе сама становится мнимой.

Как уже было установлено раньше, формула (87) имеет место как для $y = \frac{\partial \rho}{\partial x}$, так и для $y = \frac{\partial \xi}{\partial r}$. Мы выпишем формулу (87) для обоих выражений еще раз и снабдим постоянные для отличия индексами. Но так как разность обоих выражений $\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial r}$ должна удовлетворять уравнению (74), то постоянные B , C , β и γ в обоих выражениях отличаться друг от друга не могут, так что мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= A_1 \cos\left(k \frac{x}{a} + \alpha_1\right) \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) + B \cos\left(k \frac{x}{a} + \beta\right) r J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \\ &\quad + Cx \cos\left(k \frac{x}{a} + \gamma\right) \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right), \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} &= A_2 \cos\left(k \frac{x}{a} + \alpha_2\right) \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) + B \cos\left(k \frac{x}{a} + \beta\right) r J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \\ &\quad + Cx \cos\left(k \frac{x}{a} + \gamma\right) J_1\left(ik \frac{r}{a}\right). \end{aligned} \right\} (88)$$

Так как нагрузка должна выражаться при помощи четной функции от x , как это показывает фиг. 106, то и перемещение ρ должно быть четной функцией от x , а ξ должно выражаться при помощи нечетной функции от x . В силу этого

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \frac{\pi}{2}; \quad \gamma = 0,$$

так что на основании формул (88) получается:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -A_1 \sin k \frac{x}{a} \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) - B \sin k \frac{x}{a} \cdot r J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \\ &\quad + Cx \cos k \frac{x}{a} \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right), \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} &= -A_2 \sin k \frac{x}{a} \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) - B \sin k \frac{x}{a} \cdot r J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \\ &\quad + Cx \cos k \frac{x}{a} \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right). \end{aligned} \right\} (89)$$

Отсюда путем интегрирования мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \varphi(r) + A_1 \frac{a}{k} \cos k \frac{x}{a} \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) + B \frac{a}{k} \cos k \frac{x}{a} \cdot r J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \\ &\quad + C \frac{a}{k} \left(x \sin k \frac{x}{a} + \frac{a}{k} \cos k \frac{x}{a}\right) J_1\left(ik \frac{r}{a}\right), \\ \xi &= \psi(x) - A_2 \frac{a}{k} \sin k \frac{x}{a} \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) + \\ &\quad + iB \frac{a}{k} \sin k \frac{x}{a} \cdot r J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) + iC \frac{a}{k} x \cos k \frac{x}{a} \cdot J_0\left(ik \frac{r}{a}\right). \end{aligned} \right\} (90)$$

При интегрировании $\frac{\partial i}{\partial r}$ по r придется воспользоваться следующей формулой из теории функций Бесселя:

$$2 \frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \quad (91a)$$

на которой, вместе с другой формулой:

$$J_{n-1}(x) = \frac{dJ_n(x)}{dx} + \frac{n}{x} J_n(x), \quad (91b)$$

может быть построена вся теория функций Бесселя.

Функции $\varphi(r)$ и $\psi(x)$ в формулах (90) пока еще произвольны. Путем подстановки выражений ρ и ξ в уравнения (9) и (10) мы для этих функций получим два уравнения:

$$D^2 \varphi(r) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = 0,$$

с решениями

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \varphi(r) = ar + \frac{b}{r}, \\ \xi_1 &= \psi(x) = cx + d, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

где a , b , c и d представляют постоянные интегрирования. Эти решения рассматриваемой задачи относятся к простейшим случаям нагрузки, когда на боковую поверхность цилиндра действует гидростатическое давление постоянной величины или когда цилиндр конечной длины растягивается или сжимается силами, равномерно распределенными по основаниям. Эти простые решения характеризуются также тем, что объемное расширение e имеет во всех точках постоянное значение $2a + c$, как в этом можно убедиться непосредственно путем подстановки в формулу (6).

В дальнейшем мы этих простых решений, которые можно комбинировать с основными решениями, складывая соответствующие напряжения, рассматривать не будем, так что положим $\varphi(r)$ и $\psi(x)$ равными нулю. Постоянные A_1 , A_2 , B и C , входящие в формулы (90) для ρ и ξ связаны еще одним соотношением, которое получается путем подстановки ρ и ξ в формулы (9) и (10), причем оба уравнения дают одно и то же соотношение:

$$\frac{m}{2(m-1)} \frac{k}{a} i (A_2 - A_1) - 2B - 2iC = 0. \quad (93)$$

Теперь определим постоянные так, чтобы удовлетворялись граничные условия ¹⁾. Так как касательное напряжение τ при $r = a$ должно обращаться в нуль

$$\tau_{r=a} = 0,$$

¹⁾ Здесь авторы в целях сокращения выкладки используют для нахождения соотношений между произвольными постоянными частного решения лишь те граничные условия, которые будут удовлетворяться уже тогда, когда каждый из частных интегралов решения дифференциального уравнения этому условию удовлетворяет, так что сумма частных интегралов также ему удовлетворит. *Прим. ред.*

то на основании последней из формул (8) должно выполняться следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)_{r=a} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{r=a} = 0.$$

На основании формул (89) получается:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2) \sin k \frac{x}{a} \cdot J_1(ik) + 2B \sin k \frac{x}{a} \cdot a J_0(ik) - \\ - 2Cx \cos k \frac{x}{a} \cdot J_1(ik) = 0. \end{aligned}$$

Так как это равенство должно удовлетворяться при всяком значении x , то оно распадается на два следующих уравнения:

$$\left. \begin{aligned} C = 0, \\ (A_1 + A_2) J_1(ik) + 2Ba J_0(ik) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

При помощи уравнений (93) и (94) все коэффициенты можно выразить через один из них, например, через A_1 ; так, исключая B , мы получим:

$$A_1 \left[J_1(ik) - ik \frac{m}{2(m-1)} J_0(ik) \right] + A_2 \left[J_1(ik) + ik \frac{m}{2(m-1)} J_0(ik) \right] = 0.$$

Остается еще выполнить второе граничное условие, согласно которому $(\mathfrak{x}_r)_{r=a}$ должно представлять заданную функцию от x . Для этой цели мы выразим σ_r посредством (18) через перемещения ξ и ρ . Справа мы найдем выражение для объемного расширения e , которое будет иметь вид:

$$e = i \frac{m-2}{2(m-1)} (A_2 - A_1) \cos k \frac{x}{a} J_0\left(ik \frac{r}{a}\right),$$

и тогда для σ_r получится выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_r = 2G \cos k \frac{x}{a} \cdot A_1 \left\{ \frac{J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{k \frac{r}{a}} - i J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2J_1(ik)}{J_1(ik) + ik \frac{m}{2(m-1)} J_0(ik)} \cdot \left[i \frac{m-2}{4(m-1)} J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m}{4(m-1)} \cdot k \frac{r}{a} J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) \right] \right\}. \quad (95) \end{aligned}$$

В этом выражении все постоянные при помощи соотношений (93) и (94) выражены через A_1 . Постоянную A_1 , которая пока еще была произвольной, мы выберем так, чтобы ее обратное значение, не считая неза-

висящего от k множителя, который мы обозначим через $\frac{1}{a}$, было равно значению выражения, стоящего в скобках, при $r=a$. Поэтому мы имеем:

$$A_1 = a \cdot \frac{J_1(ik + \frac{m}{2(m-1)} ik J_0(ik))}{J_1^2(ik) \cdot \left[\frac{1}{k} + \frac{m}{2(m-1)} k \right] + \frac{m}{2(m-1)} k J_0^2(ik)}, \quad (96)$$

и при этом значении формула (95) переходит в следующую:

$$\sigma_r = 2Ga \cos k \frac{x}{a} \cdot \Phi\left(ik \frac{r}{a}\right). \quad (97)$$

Здесь мы применили следующее сокращенное обозначение:

$$\begin{aligned} \Phi\left(ik \frac{r}{a}\right) = & \left\{ \left[\frac{a}{kr} J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) - iJ_0\left(ik \frac{r}{a}\right) \right] \cdot \left[J_1(ik) + \frac{m}{2(m-1)} ik J_0(ik) \right] + \right. \\ & \left. + 2J_1(ik) \left[i \frac{m-2}{4(m-1)} J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \frac{m}{4(m-1)} k \frac{r}{a} J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) \right] \right\} : \\ & : \left\{ J_1^2(ik) \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{m}{2(m-1)} k \right) + \frac{m}{2(m-1)} k J_0^2(ik) \right\}. \quad (98) \end{aligned}$$

Последнее выражение при $r=a$ принимает значение, равное единице, так что

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2Ga \cos k \frac{x}{a}. \quad (99)$$

Если бы граничное условие для $(\sigma_r)_{r=a}$ выражалось формулой (99) при определенном значении k , то задача была бы в сущности уже решена. Зависимость напряжения σ_r от r выражалась бы при помощи множителя $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$, входящего в формулу (97), и так же просто выражалась бы зависимость от r остальных напряжений.

Чтобы удовлетворить граничному условию для напряжения σ_r , изменение которого характеризуется кривой, начерченной на фиг. 106, мы должны решения, выражаемые формулами (97) и (98), которые мы назовем элементарными решениями, написать для разных значений k и затем сложить их. Если бы цилиндр имел конечную длину, но большую в сравнении с радиусом a цилиндра, то заданную нагрузку $(\sigma_r)_{r=a}$ на поверхности цилиндра мы разложили бы в ряд Фурье, и тогда мы получили бы решение в виде бесконечного ряда. Конечно, при этом на обоих основаниях цилиндра возникли бы напряжения, вообще не удовлетворяющие граничным условиям. Но по принципу Сен-Венана эти напряжения не имеют большого значения, если только цилиндр имеет достаточно малый диаметр и если точки приложения внешних сил удалены от оснований на достаточно большое расстояние. При таких предположениях, однако, в случае действия внешних сил, сконцентрированных в одном месте, придется взять большое число членов ряда Фурье. Против такого пути ничего возразить нельзя, и этим путем можно было бы решить

строго, т. е. с любой точностью, задачу о деформации цилиндра конечной длины при действии поверхностных давлений, симметричных относительно оси, рассмотренную в § 81; но при этом получились бы длинные вычисления вследствие введения большого числа членов ряда Фурье. Сумма конечного числа членов ряда Фурье будет удовлетворять граничному условию, относящемуся к $(\sigma_r)_{r=a}$, лишь с известным приближением; в частности в тех местах боковой поверхности, на которые никакие внешние силы не действуют, она будет давать, хотя и незначительное, но все же, вообще говоря, отличное от нуля внешнее давление. Поэтому мы можем поступить наоборот и задаться граничными условиями, совпадающими с действительными не во всех точках, а лишь в некоторых наиболее важных местах, например, как указано на фиг. 106, где давление сконцентрировано в непосредственной близости сечения $x=0$. Если принять во внимание, что из элементарного решения, выражаемого формулой (97), в которой k можно выбирать произвольно, при умножении на произвольную функцию $f(x)$ получается новое решение и что при интегрировании по k между определенными пределами опять получается новое решение, то, зная элементарное решение, мы можем построить новое решение следующим образом:

$$\sigma_r = 2Ga \int_b^{\infty} e^{-kx} \cdot \cos k \frac{x}{a} \cdot \Phi\left(ik \frac{r}{a}\right) dk. \quad (100)$$

Здесь ϵ обозначает очень малое положительное число, которое мы будем впоследствии изменять так, чтобы оно стремилось к пределу нуль. Сейчас же мы выясним вопрос относительно величины b нижнего предела интеграла.

При помощи формулы (100) точное решение для σ_r выражено в виде определенного интеграла. Чтобы решить вопрос, удовлетворяет ли это решение также и граничному условию, относящемуся к боковой поверхности цилиндра, мы подставим $r=a$, так что $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$ примет значение, равное единице. Если мы сперва в качестве нижнего предела интеграла возьмем $b=0$, то мы получим:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2Ga \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos k \frac{x}{a} dk.$$

Этот определенный интеграл можно вычислить, так что мы получим:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2Ga \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \frac{x^2}{a^2}}. \quad (101)$$

Так как мы предположили, что ϵ представляет очень малую величину, то характер изменения напряжения на цилиндрической поверхности $r=a$, выражаемого формулой (101), соответствует тому, который задан на фиг. 106. Для определения постоянной a проинтегрируем равенство (101) по x в

пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Так как $-(\sigma_r)_{r=a}$ дает значения внешних сил, заданных на цилиндрической поверхности, то мы получим:

$$P = -2Ga \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \frac{x^2}{a^2}} dx,$$

где P обозначает полное давление на полоску боковой поверхности, расположенную между двумя образующими и имеющую ширину, равную единице. Этот определенный интеграл имеет значение $a\pi$, следовательно, не зависит от величины постоянной ϵ . Поэтому

$$P = -2Ga \cdot a\pi,$$

или

$$a = -\frac{P}{2\pi aG}. \quad (102)$$

Найденное значение a не зависит от выбора постоянной ϵ . При очень малом значении ϵ , наклон линии нагрузки, как показывает формула (101), вблизи сечения $x=0$ получается очень крутым, так как при $x=0$ нагрузка пропорциональна величине $\frac{1}{\epsilon}$. Предельному значению $\epsilon=0$ будет соответствовать бесконечно большое давление, распределенное по круговому контуру сечения $x=0$, в других же точках боковой поверхности внешних сил не будет.

Если бы мы вместо нижнего предела нуль взяли положительное значение b , например, $b=1$, то значение интеграла в выражении для $(\sigma_r)_{r=a}$ отличалось бы на величину интеграла

$$\int_0^b e^{-kx} \cos k \frac{x}{a} dk,$$

значение которого ввиду малости ϵ можно с достаточной точностью

считать равным выражению $\frac{\sin b \frac{x}{a}}{\frac{x}{a}}$.

Поэтому распределение напряжений на цилиндрической поверхности не вполне удовлетворительно соответствовало бы требуемому. Это станет еще яснее, если определить P путем интегрирования в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Так как независимо от величины положительной константы b имеет место равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin b \frac{x}{a}}{\frac{x}{a}} dx = a\pi,$$

т. е. интеграл, здесь стоящий, имеет такую же величину, как и опреде-

ленный интеграл, входящий в написанное выше выражение для P , то для P получилось бы значение, равное нулю. Отсюда ясно видно, что мы во всяком случае должны взять $b=0$.

Следовательно, при $\varepsilon=0$ точное решение для σ_r имеет вид:

$$\sigma_r = -\frac{P}{a\pi} \int_0^{\infty} \cos k \frac{x}{a} \Phi\left(ik \frac{r}{a}\right) dk, \quad (103)$$

и наша задача сводится теперь лишь к вычислению этого определенного интеграла. Трудность вычисления этого интеграла заключается, главным образом, в сложности выражения для $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$, даваемого формулой (98). Приближенное вычисление интеграла можно выполнить, заменив функции Бесселя, входящие в $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$, более простыми функциями, дающими для функций Бесселя хорошее приближение. Для небольших значений аргумента хорошее приближение дают ряды, приведенные нами вслед за формулой (87). Но при этом для получения достаточной точности число членов ряда нужно брать тем больше, чем больше значение аргумента. Так как в рассматриваемом интеграле k изменяется между 0 и ∞ , и между теми же пределами изменяется и аргумент функций Бесселя, то при больших значениях аргумента для функции Бесселя нужно брать другие приближения; это достигается при помощи так называемого асимптотического выражения функций Бесселя для большого аргумента

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{2n+1}{4} \pi\right).$$

Для рассматриваемых функций Бесселя нулевого и первого порядка асимптотическое выражение имеет следующий вид:

$$J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) = \sqrt{\frac{2a}{i\pi k r}} \cdot \cos\left(ik \frac{r}{a} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) = \sqrt{\frac{2a}{i\pi k r}} \cdot \cos\left(ik \frac{r}{a} - \frac{3\pi}{4}\right),$$

или после простых преобразований:

$$J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) = \frac{e^{ik \frac{r}{a}}}{\sqrt{2\pi k \frac{r}{a}}},$$

$$J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) = i \frac{e^{ik \frac{r}{a}}}{\sqrt{2\pi k \frac{r}{a}}}.$$

Подставив эти выражения в $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$, мы получим асимптотическое выражение этой функции для больших значений k . Если это асимптотическое

выражение $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$ мы обозначим через $\Phi_2\left(ik \frac{r}{a}\right)$ и аналогично обозначим через $\Phi_1\left(ik \frac{r}{a}\right)$ асимптотическое выражение $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$ для малых значений k , получающееся из разложения в ряд функций Бесселя, то интеграл, входящий в выражение для σ_r , можно представить в виде суммы двух интегралов следующим образом:

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi a} \int_0^b \cos k \frac{x}{a} \cdot \Phi_1\left(ik \frac{r}{a}\right) dk - \frac{P}{\pi a} \int_b^\infty \cos k \frac{x}{a} \cdot \Phi_2\left(ik \frac{r}{a}\right) dk.$$

Предел в обоих интегралах должен быть выбран таким образом, чтобы, с одной стороны, до этого предела хорошее приближение для $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$ давало разложение в ряд $\Phi_1\left(ik \frac{r}{a}\right)$, а с другой стороны, начиная с того же предела, хорошее приближение давало асимптотическое выражение $\Phi_2\left(ik \frac{r}{a}\right)$. Так как асимптотическое выражение функции Бесселя дает хорошее для нее приближение и для значений аргумента, близких к нулю, то для значений r , незначительно отличающихся от a , мы можем взять значение предела b сравнительно небольшим, а вследствие этого мы можем обойтись незначительным числом членов в разложении в ряд $\Phi_1\left(ik \frac{r}{a}\right)$. Если в разложении в ряд оставить лишь первый член, то мы получим:

$$\Phi_1\left(ik \frac{r}{a}\right) = \frac{2(m+1) + 2(m+1)\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{kr}{2a}\right)^2}{2(m+1)\left[1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2\right]},$$

или после дальнейшего упрощения:

$$\Phi_1\left(ik \frac{r}{a}\right) = 1 - \frac{k^2}{8(m+1)} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Асимптотическое выражение имеет следующий вид:

$$\Phi_2\left(ik \frac{r}{a}\right) = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot e^{-k \frac{a-r}{a}} \left[1 - \frac{m}{2(m-1)} k \left(k \frac{r}{a} - 1\right) \frac{a-r}{a}\right].$$

Как $\Phi_1\left(ik \frac{r}{a}\right)$, так и $\Phi_2\left(ik \frac{r}{a}\right)$ при $r=a$ принимают значение, равное единице, как это и соответствует требуемым граничным условиям. Вследствие этого для значений r , близких к a , можно с достаточной точностью положить:

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi a} \int_0^\infty \cos k \frac{x}{a} \cdot \Phi_2\left(ik \frac{r}{a}\right) dk. \tag{104}$$

При $r=a$ эта формула дает для σ_r точное значение. Чем больше r отличается от a , тем менее точной будет эта формула. При $r=0$ и вблизи

этого значения ее уже применять нельзя. Это показывает второй из обоих интегралов, на которые разложен был полный интеграл, так как при очень малом значении r функция Бесселя с аргументом $ik \frac{r}{a}$ можно заменять их асимптотическими выражениями лишь при соответственно больших значениях k , так чтобы предел b в обоих интегралах при $r=0$ равнялся бесконечности. Мы увидим далее, как можно получить распределение напряжений вблизи оси цилиндра. Для точек же цилиндра, расположенных близко к боковой поверхности, формулой (104) пользоваться можно. Если мы под знак интеграла вставим выражение $\Phi_2\left(ik \frac{r}{a}\right)$, то у нас появятся следующие определенные интегралы, которые все можно выразить в конечной форме:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-k \frac{a-r}{a}} \cos k \frac{x}{a} dk &= \frac{\frac{a-r}{a}}{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}}, \\ \int_0^{\infty} k e^{-k \frac{a-r}{a}} \cos k \frac{x}{a} dk &= \frac{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^2}, \\ \int_0^{\infty} k^2 e^{-k \frac{a-r}{a}} \cos k \frac{x}{a} dk &= \frac{2 \frac{a-r}{a} \left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - 3 \frac{x^2}{a^2}\right]}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^3}. \end{aligned} \right\} (105)$$

Благодаря этим равенствам формула (104) переходит в следующую:

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi r} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \frac{\frac{a-r}{a}}{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{m}{2(m-1)} \cdot \frac{a-r}{a} \frac{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^2} - \frac{m}{m-1} \cdot \frac{(a-r)^2 r}{a^3} \cdot \frac{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - 3 \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^3} \right\}. \quad (106)$$

При $r=a$ это выражение принимает значение, равное нулю, как это и соответствует граничному условию; только на круговом контуре сечения $x=0$ это выражение для σ_r становится неопределенным, так как по формуле (106) оно принимает вид $\frac{0}{0}$. Но, если бы мы сперва ввели

в интегралы (105) постоянную ϵ так, чтобы в них вместо $e^{-k \frac{a-r}{a}}$ стояла функция $e^{-k \left(\frac{a-r}{a} + \epsilon\right)}$, и затем перешли к пределу, то, как и прежде, получилось бы, что на круговом контуре сечения $x=0$ цилиндра действует бесконечно большое давление. Так как, впрочем из трех слагаемых, стоящих в формуле (106) внутри фигурных скобок, два последних

слагаемых, независимо от значения ϵ , при $x=0$ будут иметь множитель $\frac{a-r}{a}$, т. е. при $r=a$ будут обращаться в нуль, то в пределе при переходе к цилиндрической поверхности нам придется считаться лишь с первым слагаемым. Сравнение с формулой (101) показывает, что для этого члена, входящего в формулу (106), будет неправедливо все, что нами было сказано по поводу формул (101) и (102); в этом легко убедиться, если только вместо $\frac{a-r}{a}$ вставить ϵ . В частности, отсюда мы делаем вывод, что по мере приближения к оси цилиндра, следовательно, с увеличением значения $\frac{a-r}{a}$, т. е. ϵ , распределение нормальных напряжений σ_r по линиям, параллельным образующим цилиндра, все более и более выравнивается; таким образом вместо бесконечно большого напряжения σ_r на контуре сечения $x=0$ при приближении к оси цилиндра получается конечное напряжение, которое, хотя и быстро убывает в обе стороны от $x=0$, все же приближается к нулю лишь асимптотически в бесконечности.

Чем больше будет $\frac{a-r}{a}$, тем больше будет и влияние двух последних слагаемых внутри скобок в формуле (106) и тем меньше становится, вообще говоря, как мы видели, точность формулы (106).

Если обе части формулы (106) проинтегрировать по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и ввести обозначение:

$$P_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_r dx,$$

то P_r будет представлять результирующую нормальных напряжений σ_r , действующих на боковой поверхности цилиндра радиуса r , concentрического данному цилиндру, на полоске (между двумя образующими) этого цилиндра шириной, равной единице. Целесообразнее отнести эту результирующую не к единице ширины, а к центральному углу, равному единице. Если эту результирующую мы обозначим через P_r , то мы будем иметь:

$$\frac{P_r}{r} = P_r,$$

и, далее, при $r=a$

$$\frac{P}{a} = P.$$

Если мы в правой стороне формулы (106) выполним интегрирование, то каждое из трех слагаемых даст свой определенный интеграл, из которых первый, как уже было показано в связи с рассмотрением формулы (101), независимо от значения $\frac{a-r}{a}$, дает:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{a-r}{a}}{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + x^2} dx = \pi.$$

Два других интеграла будут иметь следующие значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2\right]} dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - 3\frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2\right]^3} dx = 0,$$

в чем можно легко убедиться, если обратиться к каким-либо таблицам определенных интегралов. Воспользовавшись случаем, укажем на обширные таблицы Биренс де-Гаана (Bierens de Gaan), в которых можно легко найти все определенные интегралы, встречающиеся в этом и в следующих параграфах.

Таким образом после интегрирования формула (106) дает следующее равенство:

$$p_r = -p \sqrt{\frac{a}{r}}. \quad (107)$$

Итак, на концентрически расположенной полоске с краями, параллельными оси цилиндра, результирующая всех нормальных напряжений, действующих на эту полоску, с увеличением r уменьшается пропорционально $\sqrt{\frac{a}{r}}$.

С другой стороны, мы видели выше, что с уменьшением r происходит выравнивание напряжений, заданных на боковой поверхности цилиндра. При нашем предположении, что нагрузка приложена исключительно на круговом контуре сечения $x=0$, для всех остальных поперечных сечений x , при перемещении от наружной поверхности внутрь, сперва напряжения σ_r будут расти от нулевого значения на боковой поверхности до некоторого максимального значения, после чего, при дальнейшем продвижении внутрь, эти напряжения начнут уменьшаться. Укажем лишь, что геометрическое место точек, в которых нормальное напряжение σ_r для соответствующего сечения достигает наибольшего значения, пересекает плоскость, проведенную через ось цилиндра, по кривой, образующей на контуре сечения $x=0$ острый угол, причем касательные к ней в вершине этого угла идут внутрь цилиндра под углом 45° по разные стороны от сечения $x=0$.

После того как мы получили представление о характере изменения σ_r при изменении x и r , легко исследовать зависимость от x и r также и других напряжений. Мы начнем с касательных напряжений. Если мы в формулу

$$\tau = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

вместо $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ введем их выражения по формулам (89) и заменим

входящие в них константы значениями, определенными раньше, то мы получим следующее элементарное решение для τ :

$$\tau = i \frac{m}{2(m-1)} a \cdot G \frac{k}{a} \cdot \sin k \frac{x}{a} \frac{r J_1(ik) J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) - a J_0(ik) J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1^2(ik) \left[\frac{1}{k} + \frac{m}{2(m-1)} k\right] + \frac{m}{2(m-1)} r J_0^2(ik)}$$

Интегрируя по k в пределах от 0 до ∞ , мы получим полное напряжение. Граничному условию

$$\tau_{r=a} = 0$$

элементарное решение удовлетворяет, а следовательно, ему будет удовлетворять также и полное решение. Если мы заменим функции Бесселя снова их асимптотическими выражениями и вместо a по формуле (102) введем P , то полное решение для касательного напряжения τ будет иметь вид:

$$\tau = -\frac{m}{2(m-1)} \cdot \frac{P(a-r)}{2\pi a \sqrt{ar}} \int_0^{\infty} k^2 \sin k \frac{x}{a} \cdot e^{-k \frac{a-r}{a}} dk.$$

Этот определенный интеграл можно представить в конечной форме, именно, мы получим:

$$\tau = \frac{m}{m-1} \cdot \frac{P(a-r)}{2\pi a \sqrt{ar}} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{3\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^3}. \tag{108}$$

Ввиду наличия множителя x , касательные напряжения в сечении $x=0$ будут равны нулю; далее, правая часть формулы (108) представляет нечетную функцию от x , как это и должно быть вследствие симметрии.

Теперь напряжения σ_x и σ_t можно определить двумя разными способами. Во-первых, можно поступить так же, как и при определении τ , исходя при этом из формул (8), выражающих напряжения через деформацию. С другой же стороны, можно исходить также и из уравнений (1) этой главы и при помощи известных выражений для σ_r и τ определить из них σ_x и σ_t . Результат получается одинаковый. Мы найдем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m}{m-1} \frac{P}{\pi \sqrt{ar}} \cdot \frac{x^2}{a^2} \frac{3\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^3}, \\ \sigma_t &= \frac{P}{\pi r \sqrt{ar}} \left\{ \frac{a-r}{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{m(a-r) + 2r}{2(m-1)} \cdot \frac{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{109}$$

На основании этих формул для цилиндрической поверхности $r=a$ получается:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{r=a} &= -\frac{m}{m-1} \cdot \frac{P}{\pi a} \cdot \frac{a^2}{x^2}, \\ (\sigma_t)_{r=a} &= -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{P}{\pi a} \cdot \frac{a^2}{x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Перемещения ρ и ξ можно вычислить также при помощи формул (8). Для этого нам нужно иметь выражение для объемного расширения e , которое связано в каждой точке с тремя нормальными напряжениями соотношением

$$e = \frac{1}{2Gm+1} (\sigma_r + \sigma_x + \sigma_t).$$

Если подставить сюда вместо нормальных напряжений их выражения по формулам (106) и (109), то мы получим:

$$e = \frac{P}{2G\pi am+1} \sqrt{\frac{a-r}{r}} \frac{\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^2}. \quad (110a)$$

При помощи этой формулы легко определить и деформацию цилиндра, но мы на этом останавливаться не будем.

В заключение укажем еще раз, что напряжения и деформации, определенные таким образом, дают хорошее приближение для значений r , не слишком отличающихся от a . Мы видели, что при $r=0$ и вблизи оси цилиндра эти формулы применять нельзя. Если нам нужно определить напряжения в точках оси цилиндра, то можно исходить из верной во всех случаях формулы (103) для σ_r и положить в ней $r=0$. Тогда $\Phi\left(ik \frac{r}{a}\right)$ перейдет в следующее выражение:

$$\Phi_{r=0} = -\frac{i J_1(ik) + \frac{m}{2} ik J_0(ik)}{J_1^2(ik) \cdot \left[mk + \frac{2(m-1)}{k} \right] + mk J_0^2(ik)},$$

или, пользуясь асимптотическими выражениями для функций Бесселя, получим:

$$\Phi_{r=0} = -\frac{2+mk}{4(m-1)} k \sqrt{2\pi k} \cdot e^{-k}.$$

Дальнейший ход вычислений вполне аналогичен вышеприведенному с тем лишь отличием, что определенные интегралы будут другие.

§ 86. Точное решение для цилиндра при действии касательных напряжений вдоль боковой поверхности.

Пусть на боковой поверхности цилиндра у конца его действуют касательные силы в направлении образующих цилиндра, причем эти силы сконцентрированы преимущественно вблизи концевое сечения $x=0$, например, как указано на фиг. 107. Другой конец цилиндра пусть находится в бесконечности. Ординаты заштрихованной на чертеже фигуры указывают интенсивность нагрузки в соответствующем сечении. Так как на концевом сечении $x=0$ никаких напряжений быть не должно, то и интенсивность касательной нагрузки на боковой цилиндрической поверхности при $x=0$ должна быть равна нулю, как это показано и на фиг. 107. В непосредственной же близости к сечению $x=0$ пусть нагрузка на боковой поверхности цилиндра имеет значительную интенсивность, что соответствует крутому подъему кривой интенсивности нагрузки. Для равновесия сил, приложенных к цилиндру, необходимо, чтобы кроме указанных были приложены еще и другие силы, которые будем считать приложенными к бесконечно удаленному концу цилиндра, так что распределение их у этого конца никакой роли играть не будет. Нам нужно определить напряженное состояние, получающееся от действия указанной нагрузки в точках цилиндра, не слишком удаленных от сечения $x=0$. Так как в торцевом сечении $x=0$ никакие внешние силы не действуют, то мы имеем там:

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad (\tau_x)_{x=0} = 0. \quad (111)$$

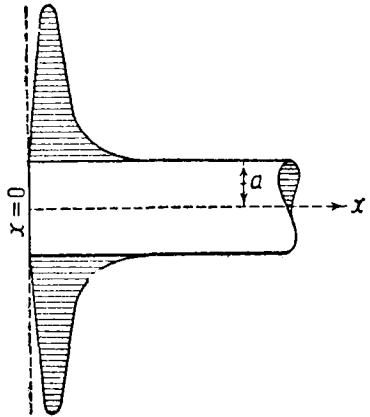
Этим граничным условиям мы подчиним элементарные решения, к составлению которых мы сперва и обратимся. При этом мы будем исходить из формул (89) и (90) предыдущего параграфа¹⁾. Второе из условий (111), которое мы также можем написать в виде:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,$$

выполняется автоматически, как это показывает сложение обеих формул (89). Первое из условий (111) мы напишем следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right)_{x=0} = 0.$$

¹⁾ Эти формулы представляют частный интеграл для перемещений с произвольными постоянными, подлежащими определению из граничных условий. См. также примечание на стр. 185. *Прим. ред.*



Фиг. 107.

Подставив выражения для ρ и ξ из формул (90) ¹⁾, мы получим следующее равенство:

$$A_1 J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) - A_2 (m-1) J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) + \\ + Ba \left[2 \frac{J_0\left(ik \frac{r}{a}\right)}{ik} + (m-2) \frac{r}{a} J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) \right] + Cm \frac{a}{k} J_0\left(ik \frac{r}{a}\right) = 0.$$

Так как это равенство должно иметь место при всяком значении r , то выражение, стоящее множителем перед $J_0\left(ik \frac{r}{a}\right)$, должно обращаться в нуль, что также относится и к множителю перед $J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)$, так что мы получим следующие равенства, которым должны удовлетворять произвольные постоянные:

$$B = 0, A_1 - (m-1) A_2 + ma \frac{C}{k} = 0. \quad (112)$$

Эти два равенства имеют место во всех случаях, когда в торцевом сечении $x = 0$ нет ни нормальных σ_x , ни касательных напряжений, независимо от того, действуют ли силы на боковой поверхности цилиндра или не действуют. Вместе с равенством (93), которое, как мы видели, представляет соотношение между постоянными, имеющее место во всех случаях, равенства (112) дают возможность выразить все постоянные через одну из них. Если мы выразим все постоянные через C , то мы получим:

$$A_1 = \frac{5m^2 - 8m + 4}{m(m-2)} \cdot \frac{a}{k} C, \\ A_2 = \frac{m^2 + 4m - 4}{m(m-2)} \cdot \frac{a}{k} C.$$

Таким образом у нас остается еще одна постоянная C , входящая множителем в выражения всех напряжений и перемещений, кроме того остается произвольным и значение k . Свободой выбора этих постоянных мы воспользуемся для выполнения граничных условий на боковой поверхности цилиндра, которые мы до сих пор во внимание не принимали. Здесь нормальные напряжения $(\sigma_r)_{r=a}$ и касательные $(\tau)_{r=a}$ могут быть заданы по нашему произволу. Мы сперва напишем элементарные решения для σ_r и τ в том виде, какой они принимают при найденных нами выражениях для постоянных:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = 2CG \left\{ 2 \frac{3m-2}{m-2} \cdot \frac{a}{k} \left[iJ_0\left(ik \frac{r}{a}\right) - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{r} \right] \cos k \frac{x}{a} + \right. \\ \left. + \left[iJ_0\left(ik \frac{r}{a}\right) - \frac{J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{k} \right] x \sin k \frac{x}{a} \right\}, \\ \tau = 2CG \cdot J_1\left(ik \frac{r}{a}\right) \left[x \cos k \frac{x}{a} - \frac{3m-2}{m-2} \frac{a}{k} \sin k \frac{x}{a} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

¹⁾ На основании формулы (6) этой главы, определяющей e через ρ и ξ , причем функция $\varphi(r)$, очевидно, должна быть принята равной нулю. *Прим. ред.*

На цилиндрической поверхности эти элементарные решения принимают следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=a} &= 2CG \left\{ 2 \frac{3m-2}{m-2} \frac{a}{k} \left[iJ_0(ik) - \frac{m-1}{m} \frac{J_1(ik)}{k} \right] \cos k \frac{x}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \left[iJ_0(ik) - \frac{J_1(ik)}{k} \right] x \sin k \frac{x}{a} \right\}, \\ \tau_{r=a} &= 2CGJ_1(ik) \left[x \cos k \frac{x}{a} - \frac{3m-2}{m-2} \frac{a}{k} \sin k \frac{x}{a} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Если бы граничное условие для цилиндрической поверхности требовало, чтобы или нормальные напряжения $(\sigma_r)_{r=a}$, или касательные $\tau_{r=a}$ при всех значениях обращались в нуль то удовлетворить этому условию элементарные решения не могли бы, так как множители при тригонометрических функциях в одной из двух формул (114) не могут обратиться в нуль. Поэтому задача, рассматриваемая в этом параграфе, несколько труднее задач предыдущего параграфа, в котором условию $\tau_{r=a}=0$ можно было подчинить элементарные решения, выбрав надлежащим образом значения постоянных. Здесь нам придется попытаться удовлетворить требуемым граничным условиям путем сложения элементарных решений, соответствующих разным, надлежащим образом выбранным значениям C и k , причем C может быть связано произвольной зависимостью с k . Мы положим

$$C = \frac{\gamma k^2 e^{-k^*}}{a J_1(ik)} \cdot \epsilon,$$

где γ обозначает постоянную, не зависящую от k , а ϵ , так же как и в предыдущем параграфе, представляет очень незначительную постоянную величину. Если при этом значении C мы проинтегрируем обе части равенства (113) по k в пределах от 0 до ∞ , то мы получим следующие главные решения для σ_r и τ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \frac{\gamma}{a} \epsilon \int_0^{\infty} e^{-k^*} \left\{ 2a \frac{3m-2}{m-2} \left[ik \frac{J_0\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)} - \frac{m-1}{m} \frac{J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)} \right] \cos k \frac{x}{a} + \right. \\ &\quad \left. + k \left[ik \frac{J_0\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)} - \frac{J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)} \right] x \sin k \frac{x}{a} \right\} dk, \\ \tau &= 2G \frac{\gamma}{a} \epsilon \int_0^{\infty} k e^{-k^*} \cdot \frac{J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)} \left[kx \cos k \frac{x}{a} - \frac{3m-2}{m-2} a \sin k \frac{x}{a} \right] dk. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Насколько эти формулы соответствуют требуемым условиям на боковой поверхности цилиндра, это мы увидим после. Здесь, так же как и в предыдущем параграфе, придется разбить каждый из интегралов на два слагаемых и затем первое из этих слагаемых разложить в ряд по функциям Бесселя, а для второго применить асимптотическое выражение. Но и здесь для значений r , близких к a , можно применить с достаточной точностью асимптотическое выражение функций Бесселя

для всего интеграла от 0 до ∞ . Так как мы имеем следующие асимптотические равенства:

$$\frac{J_0\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)} = -i \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-k \frac{a-r}{a}}, \quad \frac{J_1\left(ik \frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)} = \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-k \frac{a-r}{a}},$$

то формулы (115) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \frac{\gamma}{a} \varepsilon \sqrt{\frac{a}{r}} \int_0^{\infty} e^{-k \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)} \left[2a \frac{3m-2}{m-2} \left(k - \frac{m-1}{m}\right) \cos k \frac{x}{a} + \right. \\ &\quad \left. + k(k-1) x \sin k \frac{x}{a} \right] dk, \\ \tau &= 2G \frac{\gamma}{a} \varepsilon \sqrt{\frac{a}{r}} \int_0^{\infty} k e^{-k \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)} \left[kx \cos k \frac{x}{a} - \frac{3m-2}{m-2} a \sin k \frac{x}{a} \right] dk. \end{aligned} \right\} (116)$$

Входящие сюда интегралы частично уже встречались в предыдущем параграфе и выписаны нами отдельно, см. формулы (105). Кроме этого, сюда еще входят следующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} k e^{-k \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)} \sin k \frac{x}{a} dk = \frac{2 \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right) \frac{x}{a}}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^{\infty} k^2 e^{-k \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)} \sin k \frac{x}{a} dk = 2 \frac{x}{a} \frac{3 \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Если все эти интегралы подставить в формулы (116), то они перейдут в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \frac{\gamma}{a} \varepsilon \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ -2a \frac{(3m-2)(m-1)}{(m-2)m} \cdot \frac{\frac{a-r}{a} + \varepsilon}{\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2a \frac{3m-2}{m-2} \cdot \frac{\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{x^2}{a} \frac{\frac{a-r}{a} + \varepsilon}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}} + 2 \frac{x^2}{a} \cdot \frac{3 \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 - \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}; \\ \tau &= 2G \frac{\gamma}{a} \varepsilon \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ 2x \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right) \frac{\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 - 3 \frac{x^2}{a^2}}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3m-2}{m-2} a \frac{2 \left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right) \frac{x}{a}}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \varepsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \end{aligned} \right\} (117)$$

Теперь посмотрим, какие значения примут по этим формулам напряжения σ_r и τ при $r=a$. Чем ϵ меньше, тем ближе концентрируется нагрузка, действующая на цилиндрической поверхности, у торцевого сечения $x=0$. При предельном значении $\epsilon=0$ мы получили бы бесконечно большие напряжения только в непосредственной близости кругового контура сечения $x=0$. Вычислим интегралы

$$\int_0^{\infty} (\sigma_r)_{r=a} dx \text{ и } \int_0^{\infty} \tau_{r=a} dx$$

для случая $\lim \epsilon = 0$.

Из четырех слагаемых, стоящих в выражении для σ_r внутри фигурных скобок, второе и четвертое при интегрировании между указанными пределами, независимо от значений ϵ и $\frac{a-r}{a}$, обратятся в нуль, а первое и третье слагаемые, также независимо от ϵ и $\frac{a-r}{a}$, при интегрировании дадут следующее выражение:

$$-a^2 \pi \frac{3m-2}{m(m-2)} - \frac{a^2 \pi}{2}.$$

Но так как перед фигурными скобками стоит множитель ϵ , то в пределе при $\lim \epsilon = 0$ получится:

$$\int_0^{\infty} (\sigma_r)_{r=a} dx = 0. \quad (118)$$

При аналогичном интегрировании касательного напряжения τ первое слагаемое в фигурных скобках при $\lim \epsilon = 0$ даст значение нуль, а второе слагаемое перейдет в выражение

$$-\frac{3m-2}{m-2} \cdot \frac{1}{\epsilon},$$

так что при умножении на множитель, стоящий перед скобками, мы получим:

$$\int_0^{\infty} \tau_{r=a} dx = -2G \cdot \gamma a \frac{3m-2}{m-2}. \quad (119)$$

Если всю касательную нагрузку, действующую на полоску цилиндрической поверхности шириной, равной единице, обозначить через P , то при помощи формулы (119) можно выразить γ через P следующим образом:

$$\gamma = \frac{m-2}{3m-2} \cdot \frac{P}{2Gx}. \quad (120)$$

В рассматриваемом здесь случае $\lim \epsilon = 0$ вся внешняя сила P сконцентрировалась бы на контуре сечения $x=0$. Если же ϵ не стремится к нулю, а лишь очень мало, то формулы (118) и (119), а также формула (120) для γ останутся в силе лишь с некоторым приближением. В соответствии с этим заданная внешняя касательная нагрузка P будет сконцентрирована на цилиндрической поверхности в непосредственной близости к сечению

$x = 0$. Но это как раз и будет то граничное условие, которое согласно фиг. 107 должно быть выполнено на цилиндрической поверхности. Поэтому формулы (117) при небольших значениях ϵ дают хорошее приближение для напряжений σ_r и τ .

Большему значению ϵ соответствует более пологая кривая интенсивности нагрузки в меридиональном сечении; то же мы будем иметь и при приближении к оси цилиндра, так как в выражениях для σ_r и τ внутри фигурных скобок ϵ всюду складывается с выражением $\frac{a-r}{a}$, так что увеличение значения ϵ эквивалентно уменьшению r .

Так же, как напряжения σ_r и τ , можно определить и остальные напряжения σ_x и σ_t . Как и в предыдущем параграфе, для их определения можно было бы исходить из уравнений (1), подставив в них выражения для σ_r и τ из формул (117). Эти вычисления напряжений σ_x и σ_t при помощи уравнений (1) будут тем проще, чем проще выражения для σ_r и τ . Мы попытаемся вместо формул (117) получить для σ_x и σ_t еще более простые формулы. Мы видели, что при очень малом значении ϵ вблизи цилиндрической поверхности, т. е. при значениях r , не слишком сильно отличающихся от a , напряжением σ_r в первом приближении можно, вообще говоря, пренебречь, а в выражении для τ из двух слагаемых имеет существенное значение лишь второе; поэтому для небольших значений ϵ и небольших значений $a-r$ можно приближенно написать:

$$\sigma_r = 0, \tau = -\frac{2P}{a\sqrt{ar}} \frac{\left(\frac{a-r}{a} + \epsilon\right) x}{\left[\left(\frac{a-r}{a} + \epsilon\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \epsilon. \quad (121)$$

Отсюда получается:

$$\tau_{r=a} = -\frac{2P}{a^2} \frac{x}{\left(\epsilon^2 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \epsilon^{\frac{3}{2}}.$$

Этот закон изменения интенсивности нагрузки при надлежащем выборе ϵ хорошо совпадает с законом, изображенным графически на фиг. 107. Место действия наибольших касательных напряжений на цилиндрической поверхности мы найдем, если приравняем производную по x нулю. Если абсциссу соответствующего сечения мы обозначим через x_m ¹⁾, то $x_m = \frac{a}{\sqrt{3}} \epsilon$. Следовательно, с уменьшением ϵ это сечение приближается к сечению $x = 0$. Соответствующее касательное напряжение получается равным:

$$\tau_{\max} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{P}{a\epsilon}.$$

Оно с уменьшением ϵ до нуля увеличивается беспредельно. Эти соображения нам помогут определить численное значение ϵ , соответствующее заданному распределению касательных напряжений на цилиндрической

1) Во избежание неправильного понимания, обозначение Феппля x_{\max} заменено через x_m , в котором индекс m и должен напоминать, что для этого x_m должно быть $\tau = \tau_{\max}$. Прим. ред.

поверхности. Но, кроме того, с такой же степенью точности легко вычислить значения напряжений σ_x и σ_t и при помощи простых выражений для σ_r и τ по формулам (121), если исходить из уравнений (1).

Возвратимся к формулам (117). Они представляют приближенные решения, полученные из точных решений (115) для σ_r и τ путем замены в последних под знаком интеграла функций Бесселя их асимптотическими выражениями. Что формулы (117) действительны только для значений r , не слишком близких к нулю, мы уже на это указывали. Посмотрим, дают ли формулы (117) правильные решения при $r=a$, другими словами, совпадают ли формулы (115) и (117) при $r=a$. Так

как частное $\frac{J_1\left(ik\frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)}$ при $r=a$ принимает значение, равное единице, независимо от того, применяем ли мы для функций Бесселя асимптотические выражения или нет, то совпадение формул (115) и (117) для $\tau_{r=a}$, наверное, имеет место, и притом независимо от величины ϵ . Что же касается выражения для σ_r , то в него, кроме того, еще будет входить отно-

шение $\frac{J_0\left(ik\frac{r}{a}\right)}{J_1(ik)}$, которое при $r=a$ переходит в $\frac{J_0(ik)}{J_1(ik)}$. Асимптотическое выражение этих дробей дает значение $-i$. При малых же значениях переменной k , по которой производится интегрирование, асимптотическое выражение употреблять нельзя. Однако разность между значениями $(\sigma_r)_{r=a}$ по формулам (115) и (116) будет тем меньше, чем меньше ϵ . Она обратится в нуль при $\epsilon=0$.

Этим мы показали, что формулы (117) при небольших значениях ϵ дают хорошее приближение, если только значение r не слишком близко к нулю.

Если требуется знать напряжения на оси цилиндра, то мы должны исходить из формул (115), дающих точное решение, и положить в них $r=0$. Так как

$$J_0(0)=1 \quad \text{и} \quad J_1(0)=0,$$

то

$$\tau_{r=0}=0.$$

Этот результат очевиден на основании симметрии. Он получается также непосредственно и из уравнений (1) при $r=0$. Второе из уравнений (1) при $r=0$ дает:

$$(\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_t)_{r=0}.$$

Если в выражении для $(\sigma_r)_{r=0}$ по формуле (115) функции Бесселя $J_1(ik)$ заменить их асимптотическим выражением, так что

$$\frac{1}{J_1(ik)} = -i\sqrt{2\pi k} \cdot e^{-k},$$

то при значении γ по формуле (120) мы получим:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_t)_{r=0} = \frac{P\sqrt{c\pi}}{a^2} \epsilon \int_0^{\infty} e^{-k(1+\epsilon)} \left[2ak\sqrt{k} \cos k\frac{x}{a} + \right. \\ \left. + \frac{m-2}{3m-2} xk^2 \sqrt{k} \sin k\frac{x}{a} \right] dk. \end{aligned}$$

Определенные интегралы, входящие сюда, можно также вычислить. При $x=0$ второе слагаемое, стоящее в скобках под знаком интеграла, обращается в нуль, и для сечения $x=0$ мы получим:

$$(\tau_r)_{x=0} = (\tau_t)_{x=0} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{P}{a} \cdot \epsilon.$$

Если вместо P , как и в предыдущем параграфе, ввести силу, приходящуюся на полоску, центральный угол для которой равен единице, так что

$$p = Pa,$$

то мы получим:

$$(\tau_r)_{x=0} = (\tau_t)_{x=0} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p}{a^2} \cdot \epsilon.$$

Поэтому, если внешняя нагрузка остается постоянной, то при уменьшении радиуса a напряжения на оси цилиндра увеличиваются пропорционально $\frac{1}{a^2}$. Впрочем, это замечание относится не только к напряжениям на оси цилиндра, но также и к напряжениям во всех точках цилиндра, что вытекает из подобия цилиндров с разными радиусами a .

Таким образом мы дали приблизительное представление о характере распределения напряжений в цилиндре, на одном конце которого по боковой поверхности действуют касательные силы. Если даны численные значения этих сил, то нужно сперва выяснить точное распределение заданной нагрузки по цилиндрической поверхности, так как от него зависит величина ϵ , которая входит множителем в выражения всех напряжений. Чем ϵ меньше, т. е. чем больше касательная нагрузка стягивается к контуру торцевого сечения $x=0$, тем меньше будут напряжения на достаточном расстоянии от этого кругового контура, но зато, тем больше будут напряжения в непосредственной близости к контуру.

§ 87. Бесконечно большое тело вращения

Теперь рассмотрим тело больших размеров, ограниченное с одной стороны плоскостью, которую мы будем считать расположенной горизонтально. Пусть на небольшую часть этой плоскости действуют внешние силы, перпендикулярные к плоскости и распределенные симметрично относительно центра этой части плоскости. Кроме этих внешних сил пусть имеются только реакции, приложенные в точках, весьма далеко расположенных от места приложения нагрузки, и распределенные по весьма большой опорной поверхности. Если нам нужно найти напряжения и деформации, создаваемые нагрузкой, то при указанных условиях такое тело можно считать бесконечно большим телом вращения с нагрузкой, распределенной симметрично относительно оси вращения, для которого применимы формулы, выведенные в этой главе.

Здесь мы молчаливо предполагаем, что характер опор тела, расположенных весьма далеко от места приложения внешних сил, не слишком нарушает осевую симметрию. Примером может служить массивная

каменная плита, лежащая на выровненной горизонтальной поверхности земли и предназначенная для восприятия нагрузки, сконцентрированной на небольшой части горизонтальной поверхности плиты, так что для всех удаленных от нее точек эту нагрузку можно считать сосредоточенной. Если эта нагрузка приложена в центре горизонтальной плоскости или вблизи центра и, во всяком случае, не слишком близко к краям, то можно считать, что форма тела не играет большой роли. Инженер, желающий получить представление о характере напряженного состояния в такой каменной плите при указанных условиях, охотно удовлетворится ответом, основанным на предположении, что плиту можно считать за бесконечно большое тело вращения с нагрузкой, имеющей ось симметрии.

Решение этой задачи было впервые дано Буссинеском (Boussinesq)¹⁾. Это решение не дает напряжений и деформаций в непосредственной близости к нагруженному месту, а дает эти величины только в точках тела, находящихся на достаточно значительном расстоянии от точки приложения сосредоточенной силы в сравнении с размерами площади давления, по которой нагрузка распределяется в действительности. Одновременно мы получаем и закон, по которому уменьшаются напряжения и деформации с увеличением этого расстояния.

Конечно, решение будет неприменимо в точках, хотя и расположенных на очень большом расстоянии от нагруженного места, но слишком близко к боковой поверхности тела, так как решение это не может удовлетворить точно граничным условиям на этой поверхности. Но это решение можно считать удовлетворительным, если напряжения на свободной поверхности тела получатся настолько малыми, что на них можно не обращать внимания, и вообще если граничные условия будут выполнены с точностью до величин, которые в предельном случае бесконечно большого тела оказываются бесконечно малыми.

Более стеснительным является на первый взгляд другое ограничение, исключающее из рассмотрения ближайшие окрестности места приложения нагрузки. Но если нагрузку считать за сосредоточенную силу, то иначе и быть не может. Решив задачу при этом ограничении, мы можем обобщить результаты и на случай совместного действия бесконечно большого числа бесконечно малых сил, приложенных в пределах небольшой области. Формулы, к которым мы таким образом придем, будут действительны также и в пределах самой площади приложения нагрузки и в ее ближайшей окрестности. В пределах этой площади получаемое решение совпадает с решением, данным Герцем в своей теории твердости, о которой мы будем говорить в следующей главе.

На фиг. 108 начерчена часть меридионального сечения, проведенного через бесконечно большое тело вращения. Пусть начало координат O координатной системы rx совпадает с точкой приложения сосредоточенной силы. Для точки A с координатами x , r и расстоянием u ,

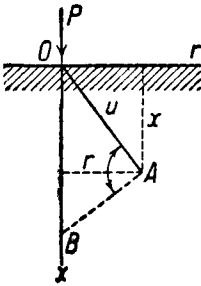
$$u = \sqrt{r^2 + x^2},$$

1) Эту фамилию на русском языке часто пишут неправильно, не зная правильного произношения ее на французском языке. *Прим. перев.*

от начала координат, как показал Буссинеск, для упругих перемещений ξ и ρ мы должны принять следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(m-1)}{mu} + \frac{x^2}{u^3} \right], \\ \rho &= \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{rx}{u^3} - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r}{u^2 + ux} \right). \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Чтобы доказать правильность этого решения, мы сперва по формулам (8) § 80 должны вычислить напряжения, соответствующие этим деформациям. Для производных от ξ и ρ , входящих в выражения напряжений, мы получим следующие формулы:



Фиг. 108.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{2x}{mu^3} - \frac{3x^3}{u^5} \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{x}{u^3} - \frac{3xr^2}{u^5} - \frac{m-2}{mu^2(u+x)^2} \left[x^2 - r^2 + ux - \frac{xr^2}{u} \right] \right),$$

при выводе которых принято во внимание, что u зависит от r и x . Пользуясь этими формулами, для объемного расширения e по формуле (6) из § 80, после ряда простых преобразований, основанных на применении соотношения $u^2 = x^2 + r^2$, получим:

$$e = -\frac{P}{4\pi G} \cdot \frac{2(m-2)x}{mu^3}.$$

Подставив все эти выражения в формулы (8), мы после некоторых преобразований, служащих для упрощения выражений, получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{x^3}{u^5}, \\ \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left[\frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{u(u+x)} - \frac{3xr^2}{u^5} \right], \\ \sigma_t &= \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{m-2}{m} \left[\frac{x}{u^3} - \frac{1}{u(u+x)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Точно таким же образом получится и τ , если сперва вычислить производные от ξ и ρ по r и x . Для τ мы получим очень простое выражение:

$$\tau = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{x^2 r}{u^5}. \quad (124)$$

На горизонтальной поверхности тела, т. е. при $x=0$, как σ_x , так и τ всюду, за исключением места приложения нагрузки, обращаются в нуль. Если же кроме x положить равными нулю и r , а следовательно, и u , то все напряжения обратятся в бесконечность, так как показателю u в знаменателе больше суммы показателей x и r в числителе. Таким

образом нами доказано, что у тела, в котором напряженное состояние определяется указанными формулами, на горизонтальную плоскость, ограничивающую его сверху, внешние силы действовать не будут. Исключение составляет лишь начало координат и его ближайшие окрестности. Кроме того, все напряжения и перемещения ξ и ρ обращаются в нуль при $u = \infty$, как это и требуется граничными условиями рассматриваемой задачи. Последнее граничное условие для ближайших окрестностей места приложения нагрузки, которое остается еще выполнить, нуждается в более детальном исследовании.

Рассматриваемое решение для точек, расположенных вблизи начала координат, непосредственно неприменимо. Чтобы доказать его правильность для точек, удаленных от начала координат, достаточно будет доказать, что напряжения, действующие в каком-либо сечении, проведенном вблизи начала координат, статически эквивалентны одной равнодействующей P . Для доказательства вычислим результирующую $\int \tau_x dF$ нормальных напряжений, действующих на плоскости $x = a$, проведенной через тело параллельно его поверхности на произвольном расстоянии a от нее. Поступая так, мы исключаем из рассмотрения точки, очень близкие к началу координат, для которого наши формулы недействительны; при этом результирующая нормальных напряжений должна равняться сумме внешних сил, действующих на поверхности тела. Интегрирование по всей площади сечения дает:

$$\begin{aligned} \int_F \tau_x dF &= 2\pi \int_0^{\infty} \tau r_x dr = -3P \int_0^{\infty} \frac{a^3 r dr}{u^3} = -3P \int \frac{a^3 r dr}{(a^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= -3P \frac{a^3}{2} \left[-\frac{2}{3} (a^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} \right]_0^{\infty} = -P. \end{aligned}$$

Так как значение интеграла совершенно не зависит от расстояния a , которое мы можем теперь уменьшать по своему произволу, то полученное равенство доказывает, что выполняется и последнее граничное условие. Знак минус у P , получившийся в окончательном результате, соответствует предположению, что внешняя сила P выражает абсолютную величину давления.

Мы еще не доказали, что полученные выражения для ξ и ρ удовлетворяют также основным уравнениям (9) и (10) упругого равновесия, выведенным в § 80. Доказательство этого путем непосредственной подстановки ξ и ρ в уравнения (9) и (10) привело бы к очень сложным вычислениям. Вместо этого, мы покажем, что напряжения, соответствующие деформациям ξ и ρ , уже выраженные при помощи формул (123) и (124), удовлетворяют условиям равновесия элемента объема, т. е. уравнениям (1) или (4), выведенными в § 80, из которых, в свою очередь, нами были выведены и основные уравнения упругого равновесия (9) и (10). Очень простые вычисления показывают, что эти условия действительно выполняются.

Этим исчерпывается полное доказательство того, что формулы Буссинеска представляют точное решение задачи для всех точек тела, удаленных от точки прило-

жения внешней силы на достаточное расстояние. Это расстояние должно быть таким, чтобы закон распределения внешней силы P около начала координат не влиял на величину напряжений. Займемся еще вопросом о практическом применении этих формул.

На фиг. 109, представляющей в сущности повторение фиг. 108, угол, образуемый с осью x радиусом вектором u , проведенным из начала координат O в точку A , обозначен через φ . При помощи этого угла формулы (123) и (124) для напряжений можно представить в следующем виде:

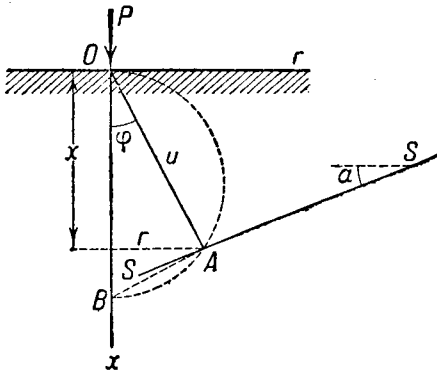
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3P}{2\pi u^2} \cos^3 \varphi, \\ \sigma_r &= \frac{P}{2\pi u^2} \left(\frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{1+\cos \varphi} - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \right), \\ \sigma_t &= \frac{P}{2\pi u^2} \cdot \frac{m-2}{m} \left(\cos \varphi - \frac{1}{1+\cos \varphi} \right), \\ \tau &= -\frac{3P}{2\pi u^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi.\end{aligned}$$

Мы видим, что при перемещении вдоль луча, проведенного из начала координат под любым углом φ , все компоненты напряжений уменьшаются пропорционально квадрату расстояния от начала координат.

Напряжения σ_x и τ , действующие на элементарную площадку, перпендикулярную к оси x , можно сложить в одну результирующую, величина которой будет равна:

$$\frac{3P}{2\pi u^2} \cos^3 \varphi, \text{ или, иначе, } \frac{3P}{2\pi (OB)^2},$$

где OB обозначает показанную на фигуре гипотенузу прямоугольного треугольника OAB . Линия действия этой результирующей



Фиг. 109.

во всяком случае будет проходить через точку приложения внешней силы, обозначенную на чертеже буквой O , где бы мы ни взяли эту элементарную площадку, расположенную в A перпендикулярно к оси x . Далее, во всех точках A , расположенных на одной и той же полуокружности, построенной на отрезке OB , как на диаметре, полное напряжение, действующее на горизонтальную секущую плоскость, будет иметь одну и ту же величину.

Проведем через точку A секущую плоскость SS , перпендикулярную к плоскости чертежа и образующую с осью R угол α . На фиг. 109

эта секущая плоскость обозначена буквами SS . Напряжения σ' и τ' , действующие в такой секущей плоскости в точке A , легко вычислить, пользуясь формулами (2), выведенными в § 80. Спрашивается, какой угол α нужно взять, для того чтобы напряжение τ' обратилось в нуль, т. е. чтобы напряжение σ' стало главным напряжением. Условие, необходимое для этого, уже было выражено в § 80 формулой (3), которая, после подстановки в нее соответствующих выражений для напряжений, перейдет в следующую:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_r} = \frac{6 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{3 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + \frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{\cos \varphi (1 + \cos \varphi)}}.$$

Но в эту формулу расстояние u от начала координат не входит. Отсюда следует, что для напряженных состояний, имеющих место во всех точках луча, проведенного через начало координат в произвольном направлении, направления главных площадок параллельны. Следовательно, каждый такой луч пересекает траектории напряжений во всех точках под одинаковыми углами.

В частном случае, например для каучука, можно положить $m=2$; тогда предыдущая формула упрощается и принимает вид:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\varphi, \text{ а следовательно, } \alpha = \varphi, \text{ или также } \alpha = \varphi \pm \frac{\pi}{2},$$

т. е. семейство одних траекторий нормальных напряжений в этом случае состоит из лучей, проходящих через точку O , а других — из окружностей, описанных около центра O .

Но обычно мы имеем не $m=2$, а $m > 2$, и тогда для острого угла α мы получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha < \operatorname{tg} 2\varphi, \text{ а следовательно, и } \alpha < \varphi.$$

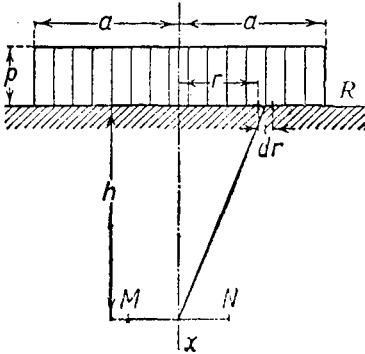
В этом случае направление траекторий напряжений в точке A на фиг. 109 получается из направления, соответствующего предыдущему случаю $m=2$, путем поворота в направлении вращения часовой стрелки на небольшой угол, который для разных значений φ имеет разную величину. Для $\varphi=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$ направление остается таким, какое было выше.

После того как мы выяснили смысл всех этих различных формулировок и убедились в правильности их, мы имеем отчетливое представление о напряженном состоянии, вызванном в теле действием одной сосредоточенной силы P , и можем перейти к выводу соответствующих формул для случая совместного действия разных сил. Напряженное состояние в какой-либо точке тела в этом случае мы получим, вычислив напряжения, создаваемые отдельными силами, по формулам, указанным выше, и затем сложив их. Мы это сейчас сделаем на простом конкретном примере, имеющем к тому же важное значение для практики.

Именно, предположим, что тело несет нагрузку, равномерно распределенную по небольшому кругу радиуса a , приложенную на его

верхней горизонтальной плоскости и имеющую интенсивность p , как это показано в меридиональном сечении на фиг. 109а. Ось x мы проведем через центр нагруженной площади. На расстоянии h от верхней плоскости выделим горизонтальную площадку MN и вычислим напряжение σ_x , действующее в точке пересечения оси x с этой площадкой.

Мы поставим себе целью определить закон, по которому при указанных условиях изменяется напряжение σ_x с увеличенным расстояния h от поверхности давления. Этот закон будет служить важным дополнением к предыдущим формулам, которые применимы только на не слишком близком расстоянии к точке приложения нагрузки. В этом отношении мы до сих пор знаем только, что σ_x изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния h , если только h можно считать в сравнении с a достаточно большим, так как в этом случае всю нагрузку можно заменить сосредоточенной силой, для которой решение уже было найдено. Но что за функцию от h представляет напряжение σ_x , если величина h или того же порядка, как



Фиг. 109а.

и a , или в сравнении с a очень мала, — это еще нужно установить.

Для этой цели возьмем элемент поверхности давления, имеющий площадь $r da dr$, который в меридиональном сечении на фиг. 109а изображается отрезком dr оси r и соответствует центральному углу da . Нагрузка, приходящаяся на этот элемент площади, создает в сечении MN в точке пересечения ее с осью x сжимающее напряжение σ_x , которое мы можем вычислить по одной из выведенных ранее формул (123), так как в этом случае мы вправе заменить элемент нагрузки $pr da dr$ сосредоточенной силой. Это напряжение получается равным $\frac{3pr \cdot da dr}{2\pi} \cdot \frac{h^3}{(h^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}$, если мы

знак минус, подразумевающийся само собой, здесь и в дальнейшем опустим. Полное сжимающее напряжение σ_x получится путем интегрирования этого выражения по всей нагруженной площади. Интегрирование по a производится очень просто, так как все элементы кольца, заключенного между r и dr , при одинаковом da дают одинаковое напряжение. Поэтому напряжение, возникающее от загрузки всего бесконечного узкого кольца будет:

$$3pr dr \cdot \frac{h^3}{(h^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

а для полного сжимающего напряжения σ_x мы получим выражение:

$$\sigma_x = 3ph^3 \int_0^a \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} = 3ph^3 \left[-\frac{1}{3(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_0^a = p \left\{ 1 - \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Если теперь уменьшать h до нуля, то мы получим $\sigma_x = p$, как это и должно быть, а при увеличении h от нуля до $h = \infty$ напряжение σ_x будет все время уменьшаться и при $h = \infty$ обратится в нуль¹⁾. Для уже рассмотренного случая, когда h много больше, чем a , но не настолько велико, чтобы его можно было считать бесконечно большим, мы можем, разлагая в ряд по биному Ньютона и пренебрегая малыми членами более высокого порядка, положить

$$\left[1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2,$$

так что для таких значений h мы для сжимающего напряжения получим формулу:

$$\sigma_x \approx \frac{3}{2} p \frac{a^2}{h^2}, \text{ или также } \sigma_x \approx \frac{3P}{2\pi h^2},$$

если под P понимать полную нагрузку. Таким образом эта формула дополняет первую из формул (123).

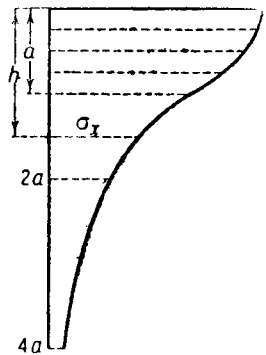
Мы вычислили σ_x для следующих значений h :

$$\begin{array}{ccccccccc} h = 0; & \frac{1}{4}a; & \frac{1}{2}a; & \frac{3}{4}a; & 1,0a; & 2a & 4a \\ \sigma_x = p; & 0,986 p; & 0,911 p; & 0,784 p; & 0,646 p; & 0,284 p; & 0,087 p. \end{array}$$

Фиг. 109b показывает кривую уменьшения давления с увеличением расстояния от поверхности давления.

В заключение укажем еще, что точное решение Буссинеска весьма пригодно для вывода приближенных формул, желательных для практических целей. При применении выведенных здесь формул нужно иметь в виду, что они при всех условиях дают некоторую неточность, так как предположения, на которых основан их вывод, никогда не выполняются полностью. Но это обыкновенно делу не вредит, если требуется, чтобы формулы характеризовали напряженное состояние и деформацию лишь в общих чертах.

Сделанные выводы изменятся мало и в том случае, если сделать еще один шаг дальше и результаты точней теории, полученные выше, совместить с надлежащим образом выбранными приближенными гипотезами. В качестве наиболее подходящего примера укажем на случай опор больших мостовых ферм, напряжения и деформации которых строитель обязательно должен знать с той или другой степенью точности. Если площадь давления в сравнении с размерами опорной плиты нельзя считать очень малой, то точное решение соответствующей задачи не всегда



Фиг. 109b.

1) При этом, однако, надо помнить, что $\int \sigma_x dF$ при $h = \infty$, распространенный на всю беспредельную плоскость подошвы неограниченного тела, не будет равняться нулю, а даст $\pi a^2 \cdot p$. *Прим. ред.*

достижимо и не всегда требуется. Обычно довольствуются простыми приближенными формулами, основанными на полученном ранее опыте. Однако наилучший путь заключается в использовании для вывода приближенных формул не только этого опыта, но также и результатов, даваемых точной теорией для более или менее сходных случаев.

Чтобы использовать в этом направлении выведенные формулы, мы должны стремиться к применению их для практических вычислений во всех случаях, где это только возможно. При этом желательно пользоваться не только точными значениями тех интегралов, которые мы имеем в соответствующих формулах, но и механическими квадратурами. Чтобы иметь возможность сформулировать простые приближенные допущения, мы должны представлять результаты вычислений в наглядной форме. Хотя эти гипотезы в известных пределах будут произвольными и потому неточными, все же они благодаря возможности сравнения с выводами точной теории для аналогичных случаев гарантируют от слишком больших ошибок. В связи с этим укажем на работу Фредрика Форта (Fredrik Vogt, *Über die Berechnung der Fundamentdeformation*, в журнале «Avhandlingar utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo», 1925).

§ 88. Функция напряжений для тел вращения.

Аналогично функции напряжений Эри (см. т. I, § 40), введенной для плоской деформации и для обобщенного плоского напряженного состояния, можно указать также и для напряженного состояния, имеющего ось симметрии, функцию напряжений F , через которую можно выразить все напряжения и деформации. Ее можно представить в следующем виде:

$$F(r, x) = \Phi_1(r, x) + x \cdot \frac{\partial \Phi_2(r, x)}{\partial x}, \quad (125)$$

где Φ_1 и Φ_2 являются гармоническими функциями, т. е. удовлетворяющими дифференциальному уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (126)$$

Далее, из обоих уравнений (125) и (126) следует:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (127)$$

Напряжения можно выразить через функцию напряжений следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \\ \sigma_r &= -\frac{\partial^2}{\partial r^2} (F + 2\Phi_2) - \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \\ \sigma_t &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (F + 2\Phi_2) - \frac{2}{m} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2}, \\ \tau &= -\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Далее, мы имеем, как в этом можно убедиться путем непосредственных вычислений, соотношение

$$\nabla^2 F = 2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2}. \quad (129)$$

Деформации выражаются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{m+1}{mE} \frac{\partial}{\partial x} \left[F - \frac{2(m-1)}{m} \Phi_2 \right]; \\ \rho &= -\frac{m+1}{mE} \frac{\partial}{\partial r} \left[F + \frac{2(m-1)}{m} \Phi_2 \right]; \\ e &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r} = \frac{2(m+1)(m-2)}{m^2 E} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = \frac{(m+1)(m-2)}{m^2 E} \nabla^2 F. \end{aligned} \right\} (130)$$

В правильности указанных выражений можно убедиться путем подстановки их в уравнения, выведенные в § 80.

Кроме этой функции напряжений имеется еще и вторая, тесно связанная с первой. Она указана у Лява, в его «Математической теории упругости»¹⁾, на стр. 314 и сл. немецкого издания. Именно, если положить

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = F + \frac{2(m-1)}{m} \Phi_2 = \Phi_1 + x \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{2(m-1)}{m} \Phi_2, \quad (131)$$

то χ будет удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0. \quad (132)$$

Исключая при помощи формулы (131) F и Φ_2 из написанных выше выражений для напряжений и деформации, мы получим следующие формулы, имеющие перед предыдущими преимущество в том отношении, что все величины выражены через одну функцию χ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2m-1}{m} \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m} \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_t &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{m} \nabla^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \\ \tau &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m-1}{m} \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} (133)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{m+1}{mE} \left(\frac{m-2}{m} \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \\ \rho &= -\frac{m+1}{mE} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial x}, \\ e &= \frac{(m+1)(m-2)}{mE} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \chi). \end{aligned} \right\} (134)$$

¹⁾ Перевод с английского Б. В. Булгакова и В. Я. Натансона, ОНТИ, Москва 1935.

Удобство применения функции напряжений заключается в том, что, пользуясь ею, мы можем указать очень большое число напряженных состояний, имеющих ось симметрии. Для этого достаточно лишь решения уравнения Лапласа (126), которых мы знаем очень много, подставить в формулу (125) или (131), и мы немедленно сможем вычислить функцию напряжений для деформированного состояния, обладающего осевой симметрией, а при помощи ее легко по написанной выше формуле вычислить также сами напряжения и деформации. Функция напряжений вполне определяет характер соответствующего напряженного состояния, так что она может служить для классификации напряженных состояний, имеющих ось симметрии. В то время как в случае плоской задачи, как уже было показано в четвертой главе, мы знаем ряд функций напряжений для разных случаев, имеющих важное значение, здесь дело обстоит иначе. Из всех практически важных случаев осевой симметрии функция напряжения, повидимому, известна лишь для случая бесконечного тела, ограниченного плоскостью и нагруженного сосредоточенной силой, т. е. для случая, рассмотренного нами в § 87 ¹⁾. Результаты, выведенные там, можно выразить через следующую функцию напряжений

$$F = -\frac{P}{2\pi} \left[\ln(x + \sqrt{r^2 + x^2}) - \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right], \quad (135)$$

так как $F = \Phi_1 + x \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$, то

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{P}{2\pi} \cdot \ln(x + \sqrt{r^2 + x^2}), \\ \Phi_2 &= +\frac{P}{2\pi} \cdot \ln(x + \sqrt{r^2 + x^2}) = -\Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

Ряд важных задач, как, например, задачи о сжатии шара между двумя плитами или же о деформации круглого цилиндра при действии поверхностных давлений, симметричных относительно оси, можно решить при помощи функции напряжений, причем, конечно, предварительно пришлось бы решить задачу о разложении напряженных состояний, имеющих ось симметрии и характеризующихся функциями напряжений, на более простые. Но если не считать некоторых частных случаев, то относительно функций напряжений для деформации с осевой симметрии еще не выяснен ряд вопросов общего характера. Сюда относится вопрос, как выражаются через функцию напряжений граничные условия, относящиеся к тем участкам поверхности, на которые никакие силы не действуют. При решении этого вопроса можно было бы ориентироваться на аналогичные данные о функции напряжений для плоской задачи. Здесь открывается благодарная область для дальнейших исследований.

¹⁾ В настоящее время функция напряжений известна для целого ряда интересных случаев. Этот вопрос сильно продвинул вперед работами Нейбера (Neuber) в его мюнхенской диссертации «Beiträge für achsensymmetrischen Spannungszustand» 1932 и в статьях: «Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie», «Z. f. ang. Math. u. Mech.», т. 14, стр. 203, 1934 и «Der räumliche Spannungszustand in Umdrehungskörper», «Ing. Arch.», т. 6, № 2, стр. 133, 1935.
Прим. перес.

Сделаем здесь еще одно замечание. Между функцией напряжений для плоской задачи и функцией напряжений для напряженного состояния, имеющего ось симметрии, имеется зависимость, на которую обратил внимание К. Вебер в работе, напечатанной в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», т. 5, стр. 467, 1925. Именно, в тех случаях, когда функцию Эри $f(y, z)$ можно представить¹⁾ в следующем виде:

$$f(y, z) = \varphi_1(y, z) + z \frac{\partial \varphi_2(y, z)}{\partial z}, \quad (137)$$

где φ и φ_2 являются гармоническими функциями, которые, следовательно удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа на плоскости

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

можно выразить через нее функцию напряжений $F(r, z)$ для деформированного состояния, имеющего ось симметрии, положив

$$F(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} f(r \cos \vartheta, z) d\vartheta; \quad (138)$$

причем мы будем иметь:

$$\Phi_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \varphi_1(r \cos \vartheta, z) d\vartheta, \quad (139)$$

$$\Phi_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \varphi_2(r \cos \vartheta, z) d\vartheta. \quad (140)$$

Затем в выражениях $F(r, z)$, $\Phi_1(r, z)$, $\Phi_2(r, z)$ букву z можно будет заменить буквой x , чтобы обозначения в них совпадали с теми, которыми мы пользовались прежде. Этот способ построения функций для напряженного состояния, имеющего ось симметрии, сводится к получению этого состояния из плоского, простирающегося в направлении оси x в обе стороны в бесконечность путем вращения около оси z и путем нахождения средних значений на всех кругах, описанных около точек оси z .

Этим способом из каждой функции Эри $f(r, z)$, которая представима в виде (137), можно путем нахождения средних значений

¹⁾ Это можно сделать всегда, так как всякая бигармоническая функция, т. е. функция удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 f = 0,$$

может быть выражена через две гармонических функции u и v следующим образом:

$$f(y, z) = u(y, z) + zv(y, z),$$

а следовательно, и так, как представлено в (137). См. Frank—Mises, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. I, 2 Aufl., стр. 848. То же свойство очевидно вытекает и из представления бигармонической функции через две аналитических функции от комплексной переменной (см. напр. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, 2-е изд., стр. 104. *Прим. перев.*

или путем интегрирования по формулам (138) получить функцию напряжений для деформации, имеющей ось симметрии. Но этот способ, вообще говоря, не дает для тел, имеющих ось симметрии, таких решений, чтобы на поверхности, свободной от действия внешних сил, напряжения были равны нулю. Тем не менее это удастся сделать в рассмотренном выше случае бесконечного тела, ограниченного плоскостью и нагруженного сосредоточенной силой, для которого функция напряжений получается из функции напряжений для полуплоскости, нагруженной перпендикулярной к ней силой, при помощи формулы (138). Именно в этом случае функция напряжений $f(y, z)$ имеет вид:

$$f = \frac{P}{\pi} \left(y \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + z \right) = \frac{P}{2\pi} \left[2y \operatorname{arctg} \frac{y}{z} - z \ln(y^2 + z^2) + 2z \right] + \\ + z \cdot \frac{P}{2\pi} \ln(y^2 + z^2) = \varphi_1 + z \frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial z},$$

причем

$$\varphi_1 = \frac{P}{2\pi} \left[2y \operatorname{arctg} \frac{y}{z} - z \ln(y^2 + z^2) + 2z \right] = -\varphi_2.$$

Путем подстановки этих выражений в предыдущие формулы мы получим Φ_1 и F , уже представленные формулами (135) и (136).

В заключение укажем, что аналогично из функции напряжений Эри можно получить и другую функцию напряжений χ для деформированного состояния, имеющего ось симметрии, чем мы здесь заниматься не можем. Конечно, можно поступить наоборот и из функции напряжений для деформированного состояния, имеющего ось симметрии, получить путем интегрирования функцию напряжений Эри. Об этом см. упомянутую работу К. Вебера¹⁾.

¹⁾ Важному вопросу о возможности выразить напряжения и деформации при осевой симметрии через функцию напряжений помимо работ Нейбера, указанных в примечании на стр. 214, посвящены еще следующие интересные работы:

1) Marguerre, Ebenes und Achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie, «Z. f. angew. Math. u. Mech.» Bd. 13, 437—438, 1933.

2) Biezeno, Über Marguerresche Spannungsfunktion «Ing. Arch.», Bd. 5, стр. 120—124, 1931.

Здесь мы имеем частный случай более общей постановки задачи о возможности представления любого пространственного напряженного состояния через минимальное число гармонических или бигармонических функций. Кроме указанных работ Нейбера следует еще указать

1) заметку П. Ф. Папковича в «Comptes Rendus», 1932, t. 195, № 10, p. 513.

2) ряд статей акад. Б. В. Galerкина, напечатанных в «Вестнике прикладной математики и механики», т. 2 и др. *Прим. перев.*

ВОСЬМАЯ ГЛАВА.

ТВЕРДОСТЬ.

§ 89. Твердость как свойство тел.

К числу свойств, легко устанавливаемых и потому пригодных для оценки определенных материалов, а также для более детального определения их качественных характеристик, кроме цвета, удельного веса, кристаллической формы и т. д., относится также и твердость. Для распознавания различных минералов, встречающихся в природе, минералогии составили «шкалу твердости», в которой алмазу, как самому твердому из всех исследованных минералов, приписывается твердость 10, а ряду других минералов приписывают твердость от 1 до 9. Установление твердости любого тела производится путем нанесения царапин, т. е. при помощи механического испытания простейшего вида; для этого устанавливают, какой из минералов шкалы твердости еще оставляет царапины на испытуемом материале и какой уже не дает царапин или иначе, на каком из минералов исследуемый оставляет царапины. На основании результатов такого испытания и определяют место исследуемого материала в этой условной шкале твердости.

Для тех целей, которые преследуют при измерении твердости минералогии, этот способ удовлетворителен, хотя он и дает возможность сделать лишь приближенную оценку твердости. Аналогичный характер имеет также и испытание, обычно производимое на металлообрабатывающих заводах, при котором пробуют, берет ли напильник данный материал или же последний слишком тверд, чтобы его можно было обрабатывать напильником.

Чтобы сделать этот способ пригодным для точных измерений, нужно иметь в виду, что и форма тела, которое испытывают путем нанесения царапин, также играет известную роль. Если разница в твердости не очень велика, то при помощи тела с острыми углами можно сделать царапину, т. е. повреждение плоской поверхности, даже у несколько более твердого тела. Из-за этого обстоятельства определение твердости путем нанесения царапин является не вполне надежным; хотя методику таких испытаний и можно было бы надлежащим образом нормировать, все же добиться этим путем таких результатов, которые позволили бы установить твердость в единицах условной минералогической шкалы с точностью до 0,1, не представляется возможным.

Чтобы установить более точную меру твердости, необходимо поэтому фиксировать определенную форму для тел, предназначенных для нанесе-

ния на одном из них или даже на обоих повреждениях при надавливании этих тел друг на друга. Во всяком случае, здесь важное значение имеет форма тела лишь вблизи места соприкосновения, а форма частей тела, находящихся на большом расстоянии от этого места, не играет особой роли. При определении твердости нанесение царапин, собственно, представляется излишним, ибо само собой разумеется, если будет обнаружено каким-либо иным способом наличие и степень повреждения, происходящего от нажатия друг на друга двух тел, и если условия, вызвавшие первоначальное внедрение, будут сохраняться, то при скольжении одного тела по другому поверхность более слабого будет повреждаться все в новых точках и таким образом получится царапина.

Далее, пользование произвольно установленной шкалой твердости станет ненужным, если удастся установить такой способ испытания, который при соблюдении стандартных условий позволит численно выразить сопротивляемость тел повреждению. Предпосылкой для выполнимости этого способа является, конечно, описание всех нормируемых условий с такой точностью, чтобы испытание одинаковых материалов всегда давало одинаковые числа твердости.

Первый, кто поставил себе задачу установить определение твердости на базе точного измерения, был великий физик Генрих Герц (Heinrich Hertz). Его работа дала первый толчок к тому развитию, которое привело в настоящее время в технике к универсальному способу для выражения твердости металлов некоторым числом. Правда, этот способ имеет ограниченное применение, так как им можно пользоваться лишь при испытании металлов и, собственно, даже металлов, обладающих обычными свойствами; но зато в пределах этой области применения он не оставляет желать ничего лучшего.

Герц исходил из уже названного выше положения, что для точных измерений твердости пробные образцы должны иметь поверхность вполне определенной формы, например, должны иметь форму шарика и плитки не слишком малой толщины и, далее, чтобы шарик и плитка были сделаны из одного и того же ¹⁾ материала, твердость которого определяют. При этих условиях мы избегаем сравнения с каким бы то ни было нормальным материалом, приобретение которого могло бы представлять известные затруднения вообще или в отношении однородности качества, и таким образом исключается источник ошибки, которая в некоторых случаях могла бы вызвать большие последствия.

Этим нами очерчен метод испытаний, который был бы вполне достаточен для измерения твердости новым и надежным путем и не требовал бы дальнейшего теоретического обоснования. Если бы Герц ограничился

¹⁾ Генрих Герц в своей работе не ограничивает метод требованием одинаковости материала и размеров сжимаемых тел. Эти требования выдвинуты были впоследствии исследователями, обнаружившими расхождение между теорией и опытом. Однако главной причиной отклонений (как выяснили более тщательные опыты) являлся переход предела упругости, весьма трудно улавливаемый во время опыта. Вторая причина заключалась в неучете теорией Герца влияния поверхностного натяжения, имеющего место в поверхностном (граничном) слое материала. Однако приданием сжимаемым телам (шарику) достаточно больших размеров можно уменьшить влияние этого фактора. *Прим. ред.*

выполнением достаточно большого числа опытов над различными материалами, имеющими важное практическое значение, то новый метод испытания материалов, вероятно, внедрился бы в практику много быстрее, чем это случилось в действительности.

Но Герц по складу своего ума был больше естествоиспытателем, чем техником, и при том больше теоретиком, чем практиком. Он сам проделал лишь несколько опытов над стеклом одного сорта. Его более интересовало определение теоретическим путем напряжений и деформаций, возникающих вблизи поверхности смятия при сжатии двух тел, например, шара и плитки, или же, в общем случае, тел произвольной формы. Теоретические исследования Герца привели к точному решению¹⁾ и относятся к наиболее изящным результатам, которые когда-либо были получены в этой области.

Созданная Герцем теория твердости дала плоды в двух направлениях, которые нужно отличать одно от другого, но которые оба весьма содействовали прогрессу науки. С одной стороны, эта теория дала обоснование для установления метода, пригодного для измерения твердости, как определенного свойства тела, а с другой стороны, ее результаты вышли далеко за пределы первоначально поставленной цели и дали детальные сведения о напряженном состоянии, получающемся при сжатии двух тел с криволинейной поверхностью. При этом не следует упускать из виду, что эти результаты, как и все следствия, для которых можно получить точные выводы из теории упругости, остаются правильными лишь до тех пор, пока напряжения не превосходят предела упругости²⁾, в то время как при обычном определении твердости всегда получают остаточные деформации, по которым собственно и судят о степени твердости. По этой-то причине и следует различать два направления в приложениях теории Герца, хотя они и тесно связаны друг с другом.

Вообще говоря, для испытания материалов точного и детального знания напряжений, получающихся при переходе за предел упругости, не требуется. Для этой цели при осуществлении методики определения твердости по плану, намеченному Герцем, необходимо лишь установить действительные деформации различных тел. Но эта работа не была выполнена самим Герцем, который, как это следует добавить, занимался работами, имевшими для науки значительно более важное значение, а была выполнена его последователями. Вторая сторона теории Герца, относящаяся к теоретическому определению напряжений, до настоящего времени является пределом, дальше которого никто еще не пошел. Она может иметь большое значение также и при разрешении многих вопросов,

¹⁾ Решение Герца нельзя назвать точным, так как он пользуется формулами, найденными для бесконечного полупространства, для сдавливаемых тел любой формы, но очень больших размеров. *Прим. перев.*

²⁾ Практическая трудность уловить момент этого перехода, так как он совершается на некоторой (хотя и весьма малой) глубине под центром площадки сжатия (см. работы: акад. А. Н. Динник, Удар и сжатие упругих тел, Киев 1909 г. и проф. Н. М. Беляев, Местные напряжения при сжатии упругих тел, сборник статей «Инженерные сооружения и строительная механика», Ленинград 1924 г., а также сборник ЛИИПСа, вып. 99, «Строительная механика», 1929 г., стр. 283—«К вопросу о местных напряжениях»...), и привела главным образом к расхождению между теорией и экспериментальными данными. *Прим. ред.*

с которыми приходится встречаться инженеру. Поэтому этой частью теории твердости Герца мы займемся подробнее дальше; пока же мы будем продолжать говорить о первой.

Главная заслуга в дальнейшей разработке метода Герца для определения твердости принадлежит иенскому физическому Ауэрбаху (Auerbach), который произвел многочисленные опыты над различными материалами. Он первый также указал на одно обстоятельство, весьма существенное для определения твердости, на которое Герц при своих теоретических исследованиях внимания не обратил и на которое он даже не мог обратить внимания. Именно оказалось, что результаты опытов Ауэрбаха, равно как и всех последующих исследователей, в одном имеющем важное значение отношении противоречили выводам Герца.

Согласно этой теории, а также и согласно любой другой теории, которая могла бы ее заменить и которая также основывалась бы на точных выводах теории уругости, размеры испытываемых образцов при определении твердости не должны иметь какого-либо значения, лишь бы все размеры всегда находились в одном и том же отношении друг к другу. Следует еще добавить, что к тому же заключению мы приходим, основываясь на общих соображениях относительно механического подобия или основываясь на теории моделей, не останавливаясь даже на особенностях, связанных с характером приложения нагрузки.

Но ко всеобщему удивлению этот вывод, казавшийся первоначально совершенно очевидным, при испытаниях на твердость не подтвердился. По мнению А. Феппля, это противоречие между теорией и опытом объясняется тем, что поверхностные слои тела ведут себя иначе, чем внутренние части тела. У жидкостей такая разница, выражающаяся в существовании поверхностного натяжения, проявляющегося в капиллярных явлениях, известна уже давно и хорошо исследована. В случае же твердых тел поверхностное натяжение, если исходить из предположения, что оно вообще существует, должно обнаружиться с отчетливостью лишь при определении твердости, так как лишь в этих опытах напряжения и деформации концентрируются преимущественно в поверхностных слоях, в то время как при всех других способах нагружения тела значительные напряжения и деформации получаются также и во внутренних частях тела, так что влияние тонкого поверхностного слоя затуманивается¹⁾. Впрочем, для практического определения твердости безразлично, как объясняется рассматриваемое явление; для практики достаточно использовать следующий простой факт, обнаруженный из наблюдений, что для получения сравнимых результатов пробные образцы должны иметь одни и те же размеры.

После Ауэрбаха, но вначале независимо от него, пытался использовать предложенный Герцем метод определения твердости для технических целей А. Феппл, работавший в своей мюнхенской лаборатории. При этом он имел в виду главным образом сравнение твердости разных

¹⁾ Большее удаление от обладающего особыми свойствами поверхностного слоя более напряженного (опасного) элемента материала мы получим путем увеличения размеров площадки смятия, т. е. увеличения радиусов кривизны соприкасающихся тел. *Прим. ред.*

сортов стали и, в частности, выяснение вопроса, как изменяется твердость обыкновенной инструментальной стали при разной термической обработке. Для этого применялись два пробных образца, обработанные по цилиндрической поверхности, радиусом 20 мм. Эти пробные образцы клали друг на друга крест-накрест, так что они касались своими цилиндрическими поверхностями только в одной точке, после чего их сдавливали с определенной силой. Остающиеся отпечатки имели круглую форму, а площадь круга в определенных границах, именно при радиусах от $2\frac{1}{2}$ до 4 мм, была довольно точно пропорциональна приложенной силе. При этом методе определения твердости за число твердости принималась нагрузка в килограммах, приходящаяся на 1 мм^2 площади круглого отпечатка.

Поверхность пробных образцов была выбрана цилиндрической для удобства изготовления. Если бы теория Герца подтверждалась во всех отношениях, то результаты испытания не зависели бы от того, применяли ли для определения числа твердости два перекрещивающихся цилиндра или два шарика, или шарик и плитку. Точно так же и величина радиуса цилиндрической поверхности не должна была бы играть никакой роли. Но опыты скоро показали, что результат испытания существенно зависит от выбора радиуса цилиндрической поверхности, как это нашел уже раньше при других условиях Ауэрбах. Тогда за нормальный размер, который нужно было соблюдать для получения сравнимых друг с другом результатов испытаний, был взят радиус 20 мм. Точно так же не подтвердилось и другое следствие из теории Герца, что результат измерений не зависит от того, применяют ли образцы цилиндрической или шаровой формы. Поэтому впоследствии пришлось делать различие между «цилиндрической» и «шариковой» твердостью.

В выпусках 25 и 28 журнала «Mittelungen» Мюнхенской лаборатории (издание Th. Askermapf в Мюнхене 1897 и 1902) можно найти две больших статьи о результатах определений твердости, выполненных А. Фепплем в Мюнхене при существенной помощи его сотрудников, Шверда (Schwerd, ныне проф. Высшего технического училища в Ганновере) и Шенка (Schenk, теперь проф. в Бреславле). Шверд также много содействовал ознакомлению широких кругов заинтересованных лиц с этим методом испытания, прочитав доклад на Съезде по механическому испытанию материалов, происходившем в Стокгольме.

Вскоре после этого Кон (Kohn), один из высших администраторов прусских железных дорог, и Бринель (Brinell), шведский инженер, почти одновременно и, очевидно, независимо друг от друга, предложили то упрощенное и практически ценное видоизменение метода определения твердости, которое применяется обычно и теперь. При этом методе, который обычно называют испытанием по Бринелю, в металлическую плитку, твердость материала которой нужно определить, вдавливают с силой 3000 кг шарик диаметром 1 см, сделанный из литой стали. От этого на плитке получается отпечаток, который, в зависимости от твердости материала, имеет диаметр несколько менее или более 4 мм, причем стальной шарик при этом определении никакого повреждения не испытывает. За число твердости здесь также принимают нагрузку, приходящуюся на 1 мм^2 площади поверхности давления.

Конечно, применение шарика и плитки не явилось новостью, так как оно соответствовало еще первому предложению Герца. Новым было лишь то, что было откинуто требование Герца, чтобы каждый материал испытывался сам с собой, т. е. без применения других материалов¹⁾. Правда, сделав этот шаг, мы тем самым отказываемся от безусловно обоснованного и желательного требования, которого А. Феппл придерживался всегда в своих старых опытах и к которому нам снова приходится обращаться в частных случаях. Но этот шаг был необходим для упрощения определения твердости до такой степени, чтобы его можно было ввести во всеобщее употребление и чтобы оно могло стать одним из важнейших методов механического испытания материалов на всех заводах, допускающим его применение в процессе работы.

Успех такого предложения оказался возможным потому, что в обычных условиях сам стальной шарик при определении твердости не испытывает заметных остаточных деформаций, которые получаются только в плитке обычно из значительно более мягкого материала. Конечно, стальной шарик при определении твердости испытывает упругие деформации, которые не могут не сказаться на результате испытания. Поэтому не исключалась возможность, что результат испытания мог зависеть от случайных свойств стального шарика, примененного для испытаний. Но это опасение оказалось необоснованным, потому что на основании многочисленных опытов известно, что сорта стали, из которых такие шарики изготовляют, по своим упругим свойствам лишь немного отличаются друг от друга, хотя бы временное сопротивление и имело у них весьма различные значения. Повидимому, также и закалка, благодаря которой значительно повышается предел упругости, изменяет упругие постоянные E, m, G лишь незначительно или же совсем их не изменяет. Поэтому можно считать, что все стальные шарики, применяемые для пробы по Бринелю, по своим упругим свойствам весьма близки друг к другу, так что безразлично, каким из них пользоваться, лишь бы у шарика не получились при испытании даже незначительные остаточные деформации. При этих условиях можно считать, что стальной шарик в сравнении с испытываемым металлическим предметом, является бесконечно твердым.

Правда, исторически шариковая проба по Бринелю оформилась, исходя из теории твердости Герца; но в том виде, как она применяется сейчас, она совершенно не зависит от этой теории, тем более, что теория Герца относится лишь к напряжениям или к упругим деформациям, получающимся до перехода за предел упругости. Теория дает также возможность вывести заключение, до какой величины можно доводить нагрузку, чтобы напряжения не переходили за предел упругости. В случае хрупкого тела, как стекло, с которым производил свои опыты Герц, можно считать, что переход за предел упругости немедленно вызывает образование трещины или обнаруживается отчетливо каким-либо другим образом. В этом случае формулы Герца можно

¹⁾ На стр. 193 (т. I Ges. Werke) Герц рассматривает определение твердости более слабого материала посредством двух шариков из двух разных материалов, но более твердых, чем первый. Лишь как один из возможных (но не обязательных) случаев он рассматривает также оба тела из одинаковых материалов и показывает, что критерий твердости остается одним и тем же. *Прим. ред.*

непосредственно связать с результатами измерений и наблюдений при испытании. Но в случае вязких материалов, которые обычно и испытываются шариковой пробой по Бринелю, установить путем опыта ту нагрузку, при которой напряжения достигают предела упругости, вообще говоря, нельзя. По этой причине при измерении твердости металлов пришлось от непосредственного определения нагрузки, доводящей напряжения до предела упругости, отказаться и судить о твердости исключительно по остаточным деформациям, возникающим после того, как напряжения далеко перейдут за этот предел упругости. Но тогда уже непосредственной связи между теоретическими исследованиями Герца и определением твердости в той форме, в какой оно производится теперь, не будет.

Определение твердости вообще не нуждается в особом теоретическом обосновании. Оно опирается непосредственно на многочисленные опыты, во время которых оно зарекомендовало себя как надежный и потому ценный метод для сравнения механических свойств металлов. Это не исключает возможности того, что во многих других случаях, не имеющих ничего общего с механическим испытанием металлов, теория Герца может сохранить свое значение.

§ 90. Давление шара на плитку.

В простейшем случае, когда шар давит на плитку, теория Герца тесно связана с теорией упругой деформации бесконечно большого тела, на плоскую грань которого действует сосредоточенная сила. Эта теория дана Буссинеском и изложена в § 87 предыдущей главы. Правда, теория Буссинеска дает напряжения и деформации лишь в точках тела, удаленных от точки приложения внешней силы, которые как раз в теории твердости вообще никакой роли не играют. Но уже при изложении этой теории было указано, как решение, найденное для сосредоточенной силы, можно обобщить на случай нагрузки, равномерно распределенной по заданной площади давления. Для этого необходимо проинтегрировать напряжения по всем бесконечно малым сосредоточенным силам, из которых можно составить равномерно распределенную нагрузку. Решение, полученное таким образом, будет верно так же и для точек тела, расположенных непосредственно под поверхностью давления.

Пока сила P , с которой шар давит на плитку, не превосходит определенного предела, оба тела испытывают только чисто упругие деформации. Этим случаем и будет ограничиваться теперь наше изложение. На основании симметрии получается, что поверхность смятия, по которой будут соприкасаться шар и плитка после деформации, должна быть ограничена кругом и что давление p , приходящееся на единицу площади, может быть функцией только расстояния ρ от центра круга.

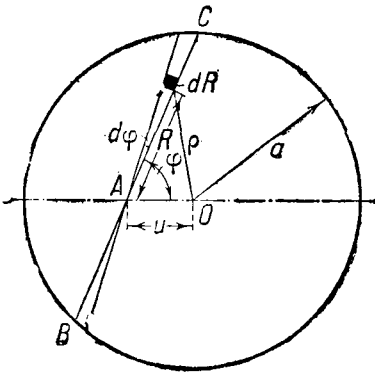
В дальнейшем мы докажем, что давление p принимает наибольшее значение p_0 в центре площадки смятия, который мы возьмем за начало координат, и что давление, начиная от центра, с увеличением ρ уменьшается по закону

$$p = p_0 \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a}, \quad (1)$$

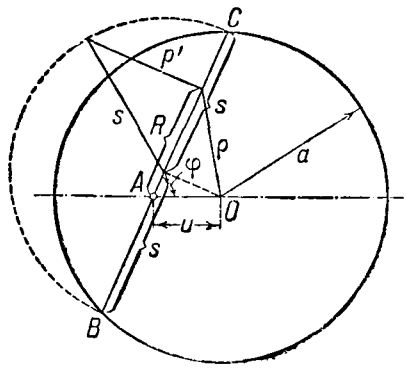
если под a понимать радиус площади давления. Таким образом по краю площадки смятия, следовательно, при $\rho = a$, давление p обращается в нуль.

Чтобы получить наглядное представление о распределении давления по формуле (1), построим на площади давления сферическую поверхность радиуса a , опирающуюся своим большим кругом на контур площадки смятия. Ординаты точек этой шаровой поверхности и дадут распределение давлений, выражаемое формулой (1), если масштаб для давлений взять таким, чтобы давление p_0 изображалось радиусом a .

Теперь рассмотрим упругую деформацию плитки, создаваемую нагрузкой, распределенной по площадке смятия только что указанным образом. На фиг. 110 начерчена площадка смятия, имеющая форму круга,



Фиг. 110.



Фиг. 111.

и на расстоянии u от центра O взята точка A , для которой мы вычислим перемещение ξ , получающееся при упругой деформации плитки. Через точку A проведем два луча, образующих друг с другом угол $d\varphi$ и вместе с дугами радиусов R и $R + dR$ ограничивающих элемент площади, на который будет действовать нагрузка

$$p dF, \text{ или } pR d\varphi dR.$$

Если эту элементарную нагрузку рассматривать как сосредоточенную силу, то вызванное ею перемещение точки A , которое мы обозначим через $d\xi$, можно вычислить по формуле, данной Буссинеском. По первой из формул (122), выведенных в § 85, полагая x равным нулю и заменяя u через R , мы получим:

$$d\xi = \frac{m-1}{2\pi mG} \cdot \frac{p dF}{R} = \frac{m-1}{2\pi mG} p d\varphi dR.$$

Нам остается теперь лишь проинтегрировать это выражение по всей площади давления. Сперва мы выполним интегрирование по всем элементам площади dF , расположенным между двумя лучами, проведенными через точку A в обе стороны от нее. Для всех этих элементов $d\varphi$

сохраняет одно и то же значение, и потому в результате мы получим выражение:

$$\frac{m-1}{2\pi mG} d\varphi \int p dR,$$

причем интегрирование производится по R вдоль хорды BC , проведенной через точку A под углом φ к AO . Интеграл вычислить проще всего, если вспомнить, что p изображается ординатами сферической поверхности радиуса a . Вертикальная плоскость, проходящая через хорду BC , пересечет сферическую поверхность по полуокружности, радиус которой равен $s = \frac{1}{2}BC$ и которая изображена на фиг. 111 в совмещенном с горизонтальной плоскостью положении. Ордината полуокружности в той точке хорды BC , которая находится на расстоянии R от точки A , на чертеже обозначена через p' . Эта ордината p' представляет давление p , действующее в соответствующей точке, согласно гипотезе, выраженной формулой (1), причем:

$$\frac{p}{p'} = \frac{p_0}{a}.$$

Поэтому мы имеем такое равенство:

$$\int p dR = \frac{p_0}{a} \int p' dR = \frac{p_0}{a} \cdot \frac{1}{2} \pi s^2,$$

так как последний интеграл представляет площадь полукруга радиуса s . Если еще принять во внимание, что можно положить

$$s^2 = a^2 - u^2 \sin^2 \varphi,$$

то перемещение $d\xi$, вызванное нагрузкой на всю площадь, заключенную между двумя бесконечно близкими хордами, будет выражаться следующим образом:

$$\frac{m-1}{4mG} \cdot \frac{p_0}{a} (a^2 - u^2 \sin^2 \varphi) d\varphi.$$

Если это выражение проинтегрировать по φ между пределами 0 и π , то мы получим перемещение ξ , вызываемое всей нагрузкой, распределенной по площадке смятия. Но мы имеем:

$$\int_0^\pi (a^2 - u^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = a^2 \pi - u^2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = a^2 \pi - \frac{u^2 \pi}{2},$$

и, таким образом, для полного перемещения ξ точки A , вызываемого всей нагрузкой, получим выражение:

$$\xi = \frac{m-1}{4mG} p_0 \pi \left(a - \frac{u^2}{2a} \right). \quad (2)$$

Это выражение можно еще несколько преобразовать, выразив p_0 через полную нагрузку P . Для последней мы имеем формулу:

$$P = \int p dF = \frac{p_0}{a} \int p' dF = \frac{p_0}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3,$$

откуда вытекает

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi a^2}. \quad (3)$$

Если это выражение подставить в формулу (2), то мы получим:

$$\xi = \frac{m-1}{4mG} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a} \left(1 - \frac{u^2}{2a^2}\right). \quad (4)$$

В частности наибольшее вертикальное перемещение ξ_0 в центре поверхности давления будет выражаться формулой:

$$\xi_0 = \frac{m-1}{4mG} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a}, \quad (5)$$

а перемещение на контуре площадки смятия будет равно следующему выражению:

$$\xi_a = \frac{1}{2} \frac{m-1}{4mG} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a},$$

т. е. оно в два раза меньше, чем в центре.

При выводе этих формул предполагается, что размеры плитки, в частности, следовательно, и толщина ее, в сравнении с радиусом a площадки смятия можно считать очень большими. В большинстве приложений рассматриваемой теории это предположение выполняется не вполне точно. В этом случае нужно иметь в виду, что хотя формулы и выведены на основании точной теории, но вследствие неточного выполнения исходного предположения их приходится считать приближенными, и при известных условиях они могут давать результаты, даже значительно отличающиеся от действительных. Насколько при таких условиях они вообще заслуживают доверия, этот вопрос лучше всего решить на основании результатов опытов. Но и здесь для того, чтобы такие опыты были успешны и чтобы результаты их можно было использовать, вообще должна уже существовать какая-либо теория, на которую можно было бы опереться и которая, собственно, подлежала бы проверке. По этим причинам рассматриваемые формулы, даже при значительных отклонениях от лежащих в основе их предположений, все еще сохраняют свое большое практическое значение.

Аналогичные соображения приводят к заключению, что предположение о плоской форме поверхности тела на грани, подвергаемой смятию, можно считать несущественными. Эту поверхность, образующую границу между двумя телами, можно заменить даже сферической поверхностью, причем предыдущие выводы мало изменятся, если только радиус r шара в сравнении с радиусом a площадки смятия велик. Если считать r бесконечно большим, то мы опять приходим к уже рассмотренному случаю тела, ограниченного плоскостью. Однако и для определения деформации шара, получающейся при вдавливании его в плитку,

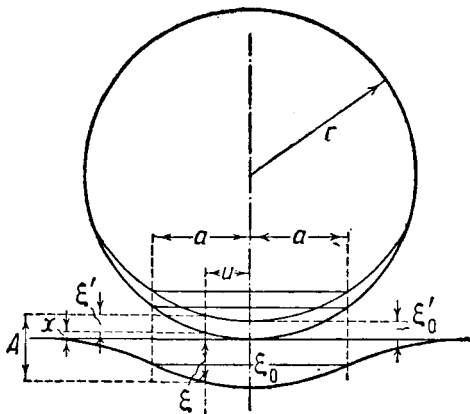
допустимо применение выведенных формул, если остается в силе предположение, что a в сравнении с r является малым.

Согласно закону равенства действия и противодействия к шару будут приложены те же силы, что и к плитке, и распределены они будут одинаково, но направление их будет обратным. Поэтому формулой (4) мы можем воспользоваться и для непосредственного определения упругого перемещения ξ' точки шара, расположенной на поверхности давления. Это перемещение ξ' происходит в направлении силы P , приложенной к шару, и его следует отсчитывать от какой-либо точки основной части шара, удаленной на достаточно большое расстояние от поверхности давления, чтобы в этой точке не было заметных упругих деформаций; например, мы можем отсчитывать перемещение или, вернее, составляющую перемещения в направлении силы P от центра шара. В общем случае мы будем считать, что шар сделан из другого материала, чем плитка. Если упругие постоянные материала шара мы обозначим через m' и G' , то аналогично формуле (4), мы получим:

$$\xi' = \frac{m' - 1}{4m'G'} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a} \left(1 - \frac{u^2}{2a^2}\right), \quad (6)$$

так как P , a и u сохраняют здесь свое прежнее значение.

Но ξ и ξ' не могут быть независимыми друг от друга; они связаны условием, что точки поверхностей обоих тел, совпадавшие до деформации, должны совпадать и после деформации. Чтобы выразить это условие аналитически, воспользуемся чертежом на фиг. 112. На нем начерчены сперва шар и поверхность плитки до деформации, когда они касались в одной точке. Затем в весьма утрированном виде показана деформация обеих поверхностей вблизи поверхности смятия, причем оба тела начерчены в первоначальном положении. Для того, чтобы поверхности давлений вошли в соприкосновение, нужно оба тела сблизить на расстояние A . Этот отрезок A можно назвать «сближением», он указывает, насколько тела в целом сближаются¹⁾ вследствие деформации. Нахождение этой величины и представляет главную задачу теории упругого сжатия двух тел. Пусть до деформации вертикальное расстояние между соответственными точками шара и плитки,



Фиг. 112.

¹⁾ Строго говоря, под сближением обоих тел следует понимать сближение после деформации двух точек, расположенных на весьма значительном расстоянии каждая от места соприкосновения на линии действия сжимающей силы и принадлежащих обоим телам. *Прим. ред.*

горизонтальное расстояние которых от точки касания равно u , составило x . По теореме Пифагора мы получим:

$$x = r - \sqrt{r^2 - u^2} = r \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{r^2}} \right).$$

Но u в сравнении с r является очень малым, и если корень разложить в ряд по биному Ньютона (биномиальный ряд), а также пренебречь членами с высшими степенями $\frac{u^2}{r^2}$, то формула для x перейдет в следующую:

$$x = \frac{u^2}{2r}. \quad (7)$$

Для каждого горизонтального расстояния u сближение A складывается из трех частей, именно мы должны, как видно из фигуры 112, сдвинуть шар так, чтобы после деформации он вошел в соприкосновение с поверхностью плитки, т. е. на расстояние

$$A = x + \xi + \xi'. \quad (8)$$

Здесь придется решить вопрос, имеем ли мы право считать, что давление в пределах площадки смятия распределяется по формуле (1), написанной нами выше. Очевидно, что от закона распределения давления зависит, какой функцией от u будет выражаться упругое перемещение ξ или ξ' , и формулы (4) и (6), в которых ξ и ξ' получились квадратичными функциями от u , действительны только при законе распределения давления, выраженном формулой (1). Если бы формула (1) оказалась ошибочной, то после подстановки ξ и ξ' при постоянном значении сближения A равенство (7) не выполнялось бы. Возможность удовлетворить равенству (7) при всяком значении u представляет поэтому первую проверку допустимости закона распределения давления, выражающегося формулой (1).

Если из формул (4), (6) и (7) выражения для ξ , ξ' и x подставить в формулу (8), то получится:

$$A = \frac{u^2}{2r} + \frac{3}{2} \frac{P}{a} \left(1 - \frac{u^2}{2a^2} \right) \left(\frac{m-1}{4mG} + \frac{m'-1}{4m'G'} \right),$$

и для того, чтобы это равенство выполнялось при всяком значении u , члены, содержащие u^2 , должны взаимно уничтожаться. Тогда у нас получится равенство:

$$A = \frac{3P}{2a} \left(\frac{m-1}{4mG} + \frac{m'-1}{4m'G'} \right),$$

а коэффициенты при u^2 должны удовлетворять условию:

$$\frac{1}{2r} = \frac{3}{4} \frac{P}{a^3} \left(\frac{m-1}{4mG} + \frac{m'-1}{4m'G'} \right). \quad (9)$$

Оба равенства можно еще разделить друг на друга, и тогда мы придем к более простой формуле для сближения, в которую упругие постоянные уже не войдут, именно

$$A = \frac{a^2}{r}. \quad (10)$$

В формуле (9) известны все величины кроме радиуса a поверхности давления, который нам и нужно определить. Решение относительно a дает:

$$a = \sqrt[3]{3Pr \left(\frac{m-1}{8mG} + \frac{m'-1}{8m'G'} \right)}. \quad (11)$$

В большинстве случаев шар и плитка имеют одинаковые упругие постоянные. Если, кроме того, положить $m = m' = \frac{10}{3}$, как это мы имеем у ковких сортов железа и стали, и пересчитать модуль сдвига G на модуль E , положив $G = \frac{5}{13}E$, то формула (11) перейдет в следующую:

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}. \quad (12)$$

Тогда для сближения A , путем подстановки в формулу (10) этого выражения для a , мы получим формулу:

$$A = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2r}}, \quad (13)$$

и, наконец, для наибольшего давления p_0 в центре площадки смятия, подставив в формулу (3) выражение a , мы получим формулу:

$$p_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}. \quad (14)$$

Формулы (12) и (14) с этими коэффициентами поместил в свое время А. Фейнль в третьем томе своего курса «Технической механики» («Vorglesungen...»), и с тех пор они в совершенно таком же виде, с тем же числом цифр после запятой, применяются в технике. Сам Герц в своих работах выразил эти величины через применявшиеся им всегда постоянные Кирхгофа K и θ , и хотя пересчет с этих постоянных на постоянные E и m , применяемые в технике, совсем прост, все же очевидно, что не каждый мог бы свободно сделать это, если бы он ознакомился с теорией сжатия упругих тел непосредственно по работам самого Герца.

В заключение мы должны возвратиться еще раз к формулированному в начале параграфа и выраженному формулой (1) закону распределения давления по поверхности плитки. Доказательство правильности этого закона заключается в том, что при этом предположении оказалось возможным точно удовлетворить всем уравнениям теории упругости, по крайней мере, при выполнении сделанных предположений относительно размеров

тела и размера площадки смятия. Но так как математическая теория упругости при данных условиях допускает лишь единственное решение, то отсюда следует, что решение, данное здесь, при выполнении остальных предположений, действительно правильно, и потому принятое распределение давления имеет место в действительности.

Конечно, Герц не имел, как имели мы здесь, уже готового предположения о распределении давления по поверхности плитки, при знании которого ему оставалось бы только доказать правильность решения. Он по этому вопросу не делал никаких предварительных предположений и нашел закон распределения давлений лишь в результате своих исследований. Герц пришел к своему результату, опираясь на то, что решение основных уравнений упругого равновесия может быть получено при помощи теории потенциала притягивающих или отталкивающих масс. Если представить себе, что между обоими телами помещен трехосный эллипсоид равномерной плотности, у которого ось, идущая в направлении нормали касательной плоскости, в сравнении с осями, расположенными в площадке сжатия, бесконечно мала, то для сил притяжения масс этого эллипсоида, подчиняющихся закону тяготения Ньютона, можно вычислить потенциал в виде функции от координат аффинкта ¹⁾ и для такого потенциала уже давно была выведена готовая формула. Как можно показать, не только сами составляющие сил притяжения, вычисляемые по соответствующим формулам, но и функции, получаемые из них путем дифференцирования или интегрирования по координатам, будут представлять решения основных уравнений теории упругости, и вся задача заключается лишь в том, чтобы составить из них такое решение, которое удовлетворяло бы одновременно всем граничным условиям, относящимся к напряжениям и деформациям. Это и удалось сделать Герцу. Кто захотел бы ознакомиться с теорией сжатия упругих тел по оригинальным работам Герца, тот должен иметь соответствующие предварительные сведения из теории потенциала.

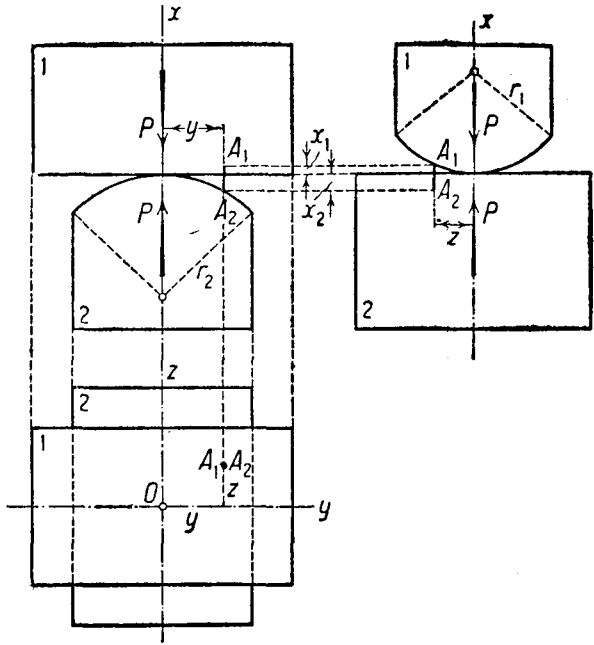
В пятом томе своего курса «Технической механики» А. Феппл сделал попытку изложить теорию Герца в такой форме, чтобы ее мог понять также и читатель, мало знакомый с теорией потенциала. Кто чувствует потребность проникнуть глубже в эту теорию, но не сможет самостоятельно прочесть работу Герца, которую можно найти в собрании его сочинений, тот может обратиться к указанной книге. Конечно, изложение и в этой книге является еще трудным, и потому Г. Лоренц (H. Lorenz) в четвертом томе своего учебника «Lehrbuch der technischen Physik», München 1913, сделал попытку изложить теорию твердости без всякой ссылки на теорию потенциала. Мы думаем, что он поступил правильно, и потому мы стремились последовать его примеру. Конечно, в деталях наше новое, переработанное изложение отличается от изложения Лоренца довольно значительно, так как последнее не могло удовлетворить нас вполне.

¹⁾ В русской литературе этот термин стал в последнее время употребляться чаще (см., например, Идельсон, Теория потенциала, Л. 1932). Он обозначает ту точку, которая подвергается действию сил (в данном случае объемных сил притяжения элементарных масс эллипсоида). *Прим. ред.*

§ 91. Обобщение решения на другие случаи.

Пока поверхность давления имеет форму круга, найденное решение можно очень просто обобщить и на другие случаи. Мы покажем это сперва на примере перекрещивающихся цилиндров. Фиг. 113

показывает оба цилиндра 1 и 2 в трех проекциях. Точка соприкосновения взята за начало O прямоугольной системы координат xuz . Ось y идет в направлении образующих цилиндра 1, а ось z в направлении образующих цилиндра 2. Рассмотрим две точки A_1, A_2 на обеих цилиндрических поверхностях, имеющие одни и те же координаты y и z , так что горизонтальные проекции этих точек совпадают. От касательной плоскости, проходящей через точку соприкосновения, т. е. от плоскости uz они находятся на расстояниях, обозначенных на чертеже через x_1 и x_2 . Предполагая, что y и z в сравнении с радиусами r_1 и r_2 цилиндров можно считать очень малыми, мы получим:



Фиг. 113.

$$x_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - z^2} = r_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{z^2}{r_1^2}} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{z^2}{r_1}$$

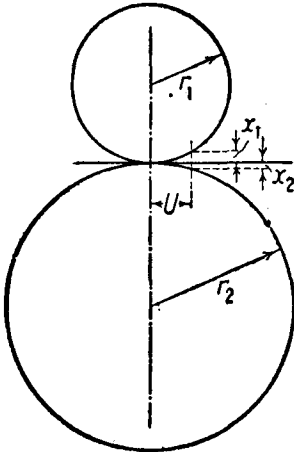
и точно такую же формулу мы получим для x_2 , если r_1 заменим через r_2 , а z через y . Расстояние между точками A_1 и A_2 мы обозначим через x . Тогда мы получим равенство:

$$x = x_1 + x_2 \approx \frac{z^2}{2r_1} + \frac{y^2}{2r_2}. \tag{15}$$

Если оба цилиндра имеют одинаковые радиусы $r_1 = r_2 = r$, то последняя формула упрощается и принимает следующий вид:

$$x \approx \frac{y^2 + z^2}{2r} = \frac{u^2}{2r},$$

в этом случае она буквально совпадает с формулой (7), выведенной для расстояния между точками шара и плитки. Все пары точек A , для которых расстояние x имеет одно и то же значение, будут проектироваться на плоскости yz на круг, описанный радиусом u из центра O .



Фиг. 114.

Но при этих условиях также и площадка смятия, получающаяся при сжатии двух тел, принимает круглую форму, и к ней можно будет применить без всякого изменения все формулы, выведенные прежде для шара и плитки. Это следует из того, что согласно нашим предположениям радиус r в сравнении с радиусом a площадки смятия следует считать очень большим, и потому упругое сжатие ξ_1 или ξ_2 должно получиться таким же большим, как если бы цилиндрическая или какая-либо другая криволинейная поверхность тела была заменена плоскостью¹⁾.

Поэтому остаются в силе не только формулы (5) и (6), но также и формулы (7) и (8) предыдущего параграфа (без всякого изменения), а также и другие, выведенные из них при помощи алгебраических преобразований.

Тот же случай мы имеем при сжатии двух шаров любых радиусов r_1 и r_2 . Как показывает фиг. 114, мы имеем здесь следующее выражение для x :

$$x = x_1 + x_2 = r_1 - \sqrt{r_1^2 - u^2} + r_2 - \sqrt{r_2^2 - u^2} \approx \frac{u^2}{2r_1} + \frac{u^2}{2r_2} = \frac{u^2}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right),$$

которое и нужно вставить в формулу (8) вместо выражения, взятого из формулы (7), оставляя все остальные рассуждения без изменения. Вследствие этого остаются в силе также и все формулы с (12) по (14) включительно, если в них положить

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (16)$$

При этом предполагается, что шары касаются снаружи, но все выводы изменятся весьма незначительно, если шары будут касаться изнутри, следовательно, если один из шаров является полым²⁾. В этом случае, изображенном на фиг. 115, радиус вогнутой шаровой поверхности, который необходимо должен быть наибольшим из двух, нужно считать отрицательным, и тогда все предыдущие выводы остаются

¹⁾ Следует заметить, что эта формулировка не строга, как это явствует из дальнейшего (см. случай двух шаров радиусов r_1 и r_2). Ее надо понимать в том смысле, что мы всегда случай касания любой пары тел, ограниченных какими угодно кривыми поверхностями вращения, можем условно свести к случаю касания шара с плоскостью, подобрав надлежащим образом радиус этого условного шара. *Прим. ред.*

²⁾ Точнее, второе тело ограничено вогнутой шаровой поверхностью. *Прим. ред.*

в силе. В частности, как это можно видеть из чертежа, мы получим формулу:

$$x = x_1 - x_2 \approx \frac{u^2}{2r_1} - \frac{u^2}{2r_2} = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

и потому формулы (12)—(14) можно применять попрежнему, если в них подставить

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (17)$$

Точно так же во всех других случаях, когда пары точек $A_1 A_2$, соответствующие одинаковым расстояниям x , лежат на круглом цилиндре, ось которого совпадает с нормалью к поверхностям тел в точке соприкосновения, можно пользоваться формулами (12)—(14), подставив соответствующее выражение для r . В других случаях, например, в случае перекрещивающихся цилиндров (фиг. 113) при разных радиусах r_1 и r_2 , задача будет много труднее.

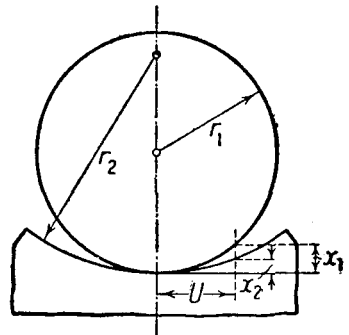
Все точки плоскости yz , для которых x по формуле (15) имеет одно и то же значение, будут расположены в последнем случае на эллипсе, отношение полуосей которого равно отношению квадратных корней из радиусов цилиндров r_1 и r_2 . Площадка смятия, получающаяся при сжатии обоих тел, в этом случае также принимает эллиптическую форму. На этой площадке давление распределяется так, что p в каждой точке пропорционально ординате трехосного эллипсоида, построенного на площадке смятия, как на главном диаметральном сечении.

Это утверждение соответствует в точности тому, которое нами было сформулировано в предыдущем параграфе при рассмотрении давления шара на плитку и правильность которого была затем доказана. Его можно проверить в общем случае точно таким же образом; сперва выводят из принятого закона давления выражения для упругой деформации обоих тел, а затем показывают, что при этом удовлетворяются строго все требования теории упругости. В принципе во всем способе, в сравнении с уже рассмотренным случаем, вообще ничего не меняется; но вычисления становятся настолько громоздкими, что нам приходится от них отказаться. Для этого случая пришлось бы включить в наше изложение сложный вывод потенциальной функции для трехосного эллипсоида, составляющий одну из основных глав теории потенциала.

Однако мы можем показать связь обеих задач друг с другом, пользуясь тем, что это легко сделать. Упругое перемещение ξ точки поверхности давления получается точно таким же образом, как и в предыдущем параграфе, равным следующему выражению:

$$\xi = \frac{m-1}{2\pi m G} \cdot \int \frac{p dF}{R}, \quad (18)$$

и, таким образом, единственное затруднение состоит в вычислении



Фиг. 115.

интеграла. В этом интеграле величина $p dF$ пропорциональна той части массы уже упомянутого трехосного эллипсоида, которая соответствует элементу площадки смятия. Напомним, что этот трехосный эллипсоид расположен на площадке смятия и что его ось, перпендикулярную к поверхности давления, при выборе надлежащего масштаба для p , в сравнении с другими осями, можно считать бесконечно малой. R обозначает расстояние от dF точки, для которой нужно вычислить ξ . По определению потенциала сил, пропорциональных массам и обратно пропорциональных квадратам расстояний, интеграл представляет для взятой точки значение потенциала сплюсненного трехосного эллипсоида. Можно также сказать, что ξ равно произведению постоянного множителя на потенциал массы, распределенной по площадке смятия пропорционально ординатам трехосного эллипсоида.

Отсюда мы видим, что приближенное вычисление интеграла, а следовательно ξ , чего для практических целей часто бывает вполне достаточно, для заданного распределения нагрузки не может представить никаких затруднений. Предположим, например, что нужно было бы исследовать упругую деформацию в месте касания колеса и железнодорожного рельса. Здесь мы имеем два перекрещивающихся цилиндра с сильно отличающимися друг от друга радиусами r_1 и r_2 . Сперва можно исходить из более простого случая, считая оба радиуса одинаковыми, принимая для них подходящее среднее значение и вычисляя a , A , p_0 по формулам (12) — (14). Затем мы должны были бы выяснить, как нужно изменить исходное предположение, чтобы приблизиться к действительному случаю. Для той же цели достаточно ограничиться приближенными вычислениями по формуле (18). Инженеры с большой практикой настолько привыкли решать даже труднейшие вопросы, встречающиеся им, пользуясь лишь сравнительно простыми теоретическими соображениями, что они, конечно, не хотели бы затрачивать труд на предварительное изучение теории потенциала для вывода потенциала трехосного эллипсоида. Поэтому мы думаем, что в данный момент от изложения этого вопроса целесообразнее отказаться, но мы оставляем за собой право в одном из следующих изданий этой книги, если бы оно потребовалось, поместить и эту трудную главу ¹⁾.

Очень близок к рассмотренным до сих пор случаям сжатия двух цилиндров, соприкасающихся вдоль образующей. Этот случай встречается в катках опор мостовых ферм. Но разбирать его нет необходимости, так как он относится к плоской задаче и в свое время был нами разобран.

§ 92. Напряженное состояние материала у площадки смятия.

От расчета на прочность, опирающегося на предыдущие формулы, требуется, чтобы он давал величину того давления P одного тела на другое, при котором не получалось бы повреждения материала. Если площадка смятия имеет круглую форму, то наибольшее сжимающее напряжение получается в центре и вычисляется по формуле (14), в которой оно обозначено через p_0 . Однако вычислением одного p_0 вопрос еще окончательно не решен, так как мы не знаем, каким может быть

¹⁾ Задача о смятии рельса бандажем колеса решена точно проф. Беляевым Н. М. в цитированных работах (см. прим. 2, стр. 219). *Прим. ред.*

допущено p_0 , чтобы в случае хрупких тел не произошло разрушения, а в случае пластических не получились остаточные деформации. Допускаемое значение p_0 зависит не только от механических свойств соответствующего материала, но также и от характера напряженного состояния, для которого сжимающее напряжение величиною p_0 является одним из главных.

Кто на это обстоятельство, как это часто случалось, не обращает никакого внимания, тот придет к совершенно неверным заключениям. Здесь следует вспомнить о сказанном еще в § 6 первой главы относительно прочностных материалов, где уже указывалось на то, что допускаемое напряжение p_0 при сжатии двух тел, как при испытании на твердость, можно принимать значительно выше, чем допускаемое сжимающее напряжение, определяемое из обычных опытов на сжатие, а потому относящееся к одноосному напряженному состоянию.

Лучше всего было бы при установлении допускаемого значения p_0 основываться непосредственно на результатах измерения твердости, не заботясь о том, какие значения допускаемого напряжения нужно было бы принимать при других условиях. При этом можно было бы за допускаемое значение p_0 принимать некоторую часть, скажем, в первом приближении половину числа твердости, найденного при обычном определении твердости путем вдавливания шарика, и тогда по формуле (14) можно вычислить полное давление P , которое можно допустить при данных условиях¹⁾. Во всяком случае нельзя ожидать, чтобы давление, определенное указанным образом, могло вызвать повреждение материала, так как для получения отпечатка радиуса a необходима нагрузка P_1 , величина которой равна $\pi a^2 p_1$ ²⁾, если через p_1 обозначить число твердости, определенное обычным путем. Если бы мы взяли $p_0 = \frac{1}{2} p_1$, то формула (3) дала бы нам нагрузку P , составляющую лишь $\frac{2}{3} p_0 \pi a^2$ или $\frac{1}{3} P_1$, так что давление будет отстоять от опасного предела достаточно далеко. К этому вопросу мы возвратимся еще впоследствии.

Если допускаемое напряжение установить на основании этих соображений, то мы получим значительно более высокие значения, чем обычно принимают для сжимающего напряжения. Поэтому возникает вопрос, чем

¹⁾ К предложению авторов использовать, для установления предельного давления p_1 , по Герцу, число твердости, определенное «обычным» (т. е., повидимому, бринелевской пробой) путем, следует отнестись с известной осторожностью потому, что при испытании по Бринелю самое получение видимого отпечатка связано с переходом предельного состояния не только в опасной точке плитки (см. этот параграф далее), но по всей площадке смятия и на некоторую глубину под нею, вследствие чего, строго говоря, применение формул Герца к этому случаю уже незаконно. В дальнейших примечаниях к этому параграфу приведена более правильная и теоретически обоснованная постановка вопроса, данная акад. А. Н. Динником и проф. Н. М. Беляевым. *Прим. ред.*

²⁾ Здесь p_1 , отнесено не к поверхности шарового сегмента, а к площади круга радиуса a (проекция шарового сегмента), что не совпадает с обычным методом Бринеля (см. стр. 221); однако в рассматриваемом Фепплем случае замена поверхности сегмента его проекцией допустима вследствие малости радиуса площадки смятия в сравнении с радиусом шара, так как все явление происходит в пределах упругих деформаций. *Прим. ред.*

объяснить эту разницу. Частично причину этого явления можно объяснить тем, что поверхностные слои тела имеют механические свойства, отличные от свойств внутренних слоев, как мы об этом говорили подробнее раньше (в § 89, стр. 220). Но во всяком случае главную причину следует видеть в том, что кроме главного напряжения $\sigma_x = -p$, в центре поверхности давления имеются еще два других главных напряжения, которые являются также сжимающими, равных друг другу и не намного меньших, чем само напряжение σ_x . Из § 6 известно, что при таких условиях получается значительное увеличение прочности материала и уменьшается опасность разрушения. Чтобы получить представление о том, насколько сильно это обстоятельство может отразиться на прочности материала, нам необходимо вычислить два других главных напряжения, действующие в центре площадки смятия.

Для этой цели мы будем опять основываться на формулах, вытекающих из теории Буссинеска и выведенных в § 87 для напряжений, создаваемых в бесконечно большом теле действием сосредоточенной силы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{x^3}{R^5}, \\ \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left(\frac{m-2}{m} \cdot \frac{1}{R(R+x)} - \frac{3xr^2}{R^5} \right), \\ \sigma_t &= \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{m-2}{m} \left(\frac{x}{R^3} - \frac{1}{R(R+x)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Эти формулы в непосредственной близости к точке приложения силы применять нельзя. На поверхности тела мы имеем $x=0$ и $R=r$ и потому мы получим:

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_r = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}; \quad \sigma_t = -\sigma_r, \quad (20)$$

но опять-таки за исключением места приложения нагрузки. Пусть на фиг. 116 точка O будет центром площадки смятия, имеющей форму круга. Рассмотрим четыре элемента площадки площадью $r d\varphi dr$ каждый, расположенные на концах двух взаимно перпендикулярных диаметров. На каждый из этих элементов площадки будет действовать одна и та же сила $pr d\varphi dr$, так как p зависит лишь от расстояния r от центра. Эти четыре силы при совместном действии их никаких напряжений в точке O не создадут; действительно, хотя две силы, действующие на оси y , и создадут в O напряжения σ_y , которые можно вычислить по предыдущей формуле для σ_r , зато одновременно получатся также и напряжения σ_x одинаковой величины и противоположного знака, так как по отношению к этим точкам приложения сил их можно считать за напряжения σ_t . Затем при добавлении сил, действующих на оси z , получается обратная картина и сумма напряжений как σ_y , так и σ_x обратится в нуль. Так как все силы, действующие на кольцевую площадь, заключенную между кругами радиусов r и $r+dr$, можно разложить на такие группы по четыре одинаковых силы, то отсюда вытекает,

что все внешние силы, действующие на площади кольца, не могут создать никаких нормальных напряжений в центре площадки смятия.

Далее, отсюда следует, что напряжения в точке O зависят лишь от сил, действующих вблизи. Поэтому вычислить напряжения в точке O непосредственно по формулам (19) нельзя, так как последние при $x=0$, $r=0$, $R=0$ и при стремлении P к нулю, принимают неопределенный вид $\frac{0}{0}$.

Поэтому мы поступим так, как это мы уже делали в § 87, когда мы вычисляли напряжения сперва в точке, расположенной ниже плоскости uz на небольшом расстоянии h от нее, и затем переходили к пределу $h=0$. Во всяком случае мы и здесь должны считать, что расстояние h в сравнении с радиусом a площадки смятия очень мало. Согласно сказанному выше нам нужно принять во внимание лишь силы, действующие вблизи точки O . Но вблизи точки O давление p , отнесенное к единице площади, изменяется незначительно, и потому мы с достаточной точностью можем считать p_0 всюду одинаковым.

Таким образом мы имеем снова тот же случай нагрузки, который мы уже рассматривали в конце § 87 и к которому относилась фиг. 109а. Разница заключается лишь в том, что мы теперь не можем делать h большим и должны ограничиться определением напряжений в точках, расположенных очень близко к плоскости uz , что, однако, для наших целей является вполне достаточным.

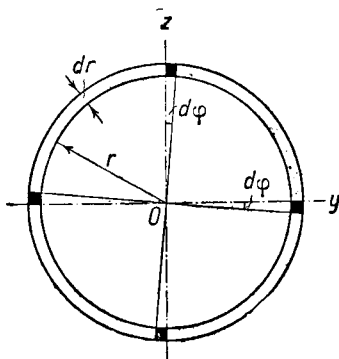
Как мы уже знаем, в точке $x=h$, $y=0$, $z=0$ при очень незначительном h можно положить

$$\sigma_x = -p_0.$$

На основании симметрии напряжения σ_y и σ_z имеют одинаковую величину; мы их обозначим через σ_q , причем значок q должен указывать на то, что речь идет о напряжении, действующем в поперечном направлении. Четыре силы $pr d\varphi dr$, о которых была речь при рассмотрении фиг. 116, дают для напряжения σ_q бесконечно малую величину 2-го порядка, которую мы обозначим через $d_2\sigma_q$. Теперь уже $d_2\sigma_q$ не будет нулем, так как рассматриваемая точка, для которой мы вычисляем $d_2\sigma_q$, расположена ниже плоскости uz на h . На основании соображений, аналогичных тем, какие мы имели прежде, мы, складывая выражения для σ_r и σ_t из (19), получим:

$$d_2\sigma_q = 2 \frac{pr d\varphi dr}{2\pi} \left(\frac{m-2}{m} \cdot \frac{h}{R^3} - \frac{3hr^2}{R^5} \right).$$

Эта формула относится к каждому из четырех сил, расположенным указанным образом. Поэтому величину напряжения $d_1\sigma_q$, создаваемого всеми силами, действующими на кольцевую площадь, мы получим путем



Фиг. 116.

интегрирования по φ между пределами 0 и $\frac{\pi}{2}$; она будет равна следующему выражению:

$$d_1\sigma_q = \frac{pr dr}{2} \left[\frac{m-2}{m} \cdot \frac{h}{(r^2+h^2)^{3/2}} - \frac{3hr^2}{(r^2+h^2)^{5/2}} \right],$$

которое получается после того, как R будет выражено через r и h . Отсюда полное напряжение σ_q получится путем интегрирования по r . Здесь мы должны, как уже замечено прежде, принять p постоянным, а именно равным p_0 . Интегрирование можно без большой ошибки выполнить в пределах между $r=0$ и $r=\infty$ ¹⁾, причем такая замена пределов тем скорее допустима, чем меньше мы возьмем h , тем более, что мы имеем в виду перейти затем к пределу $h=0$.

Тогда, как легко убедиться, мы имеем следующие равенства:

$$\int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{h},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{r^3 dr}{(r^2+h^2)^{5/2}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{h}{3(r^2+h^2)^{3/2}} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{3h},$$

и на основании их получается

$$\sigma_q = -\frac{m+2}{2m} p_0. \quad (21)$$

В случае железа обычно принимают $m = \frac{10}{3}$ и при этом значении мы будем иметь

$$\sigma_q \approx -0,8p_0 = 0,8\sigma_x^2).$$

1) Строже и естественнее было бы при подстановке пределов во взятые интегралы (см. продолжение текста), считая r весьма большим по сравнению с h , отбросить в разложении все члены высшего порядка малости с $\frac{1}{h}$. *Прим. ред.*

2) Акад. А. Н. Динник в своей работе об ударе и сжатии упругих тел, подробно исследуя случай напряженного состояния в районе площадки смятия, показал, что наибольшее касательное напряжение будет иметь место не в центре площадки смятия, а на глубине, примерно равной $0,5a$, где a — радиус круглой площадки смятия.

Это наибольшее касательное напряжение получилось равным (вернее немного больше)

$$\tau_{max} \approx 3\tau_{max}^0,$$

т. е. в три раза больше τ_{max}^0 в центре площадки смятия.

Согласно полученной здесь формулы имеем:

$$\tau_{max}^0 \approx 0,1 \cdot \sigma_x = 0,1 \cdot p_0,$$

где p_0 — давление в центре, и

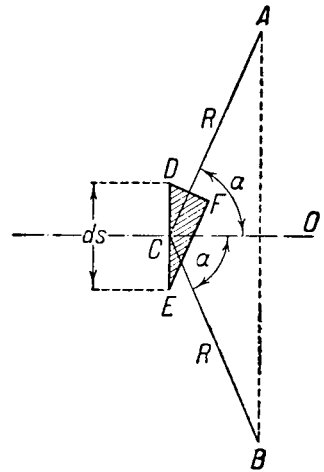
$$\tau_{max} \approx 3\tau_{max}^0 = 0,3p_0.$$

Поэтому дальнейший расчет должен быть произведен не для элемента, взятого в центре площадки, а для элемента, лежащего на глубине половины радиуса площадки смятия, как испытывающего наиболее опасное напряженное состояние. *Прим. ред.*

Следует обратить внимание на то, что в формуле (21) расстояние h совсем не фигурирует. Поэтому пока расстояние h в сравнении с радиусом a поверхности давления остается очень малым, величина его безразлична и в частности выведенная формула имеет место также и при $h=0$, т. е. непосредственно для элементов самой площадки смятия. Далее следует иметь в виду, что в этой точке σ_y не намного меньше, чем σ_x . Поэтому в центре площадки смятия мы имеем напряженное состояние, лишь незначительно отличающееся от гидростатического напряженного состояния, возникающего в теле, погруженном в жидкость, находящуюся под большим давлением¹⁾. Но в § 6 мы уже говорили об опытах, из которых можно вывести заключение, что такое напряженное состояние при обыкновенных условиях вообще не может вызвать никаких повреждений, какое бы большое всестороннее давление мы ни взяли. Поэтому можно сказать, что не столько важна величина p_0 , сколько разность между σ_x и p_0 ²⁾, которая, однако, составляет в нашем случае лишь $\frac{1}{5}p_0$. Таким образом после уяснения найденных соотношений не представляется случайностью, что допускаемое напряжение «на твердость», как показывает опыт, может быть взято значительно выше, чем допускаемое напряжение на сжатие при одноосном напряженном состоянии³⁾.

Далее, возникает вопрос, не может ли при этих условиях прочность материала в других точках площадки смятия быть меньше, чем в центре, несмотря на то, что значение p там меньше p_0 . Это действительно возможно; в частности нужно ожидать, что у таких материалов, как, например, стекло, у которого временное сопротивление разрыву много ниже временного сопротивления раздроблению (сжатию), разрушение начнется не из центра, а с краев площадки смятия, хотя там давление σ_x и падает до нуля.

Чтобы показать это, определим еще напряжения на контуре площадки смятия. Это можно сделать точно таким же образом, как и прежде. Мы будем исходить из случая нагрузки, указанного на фиг. 117, где к точкам A и B , расположенным симметрично относительно линии CO , приложены две силы P одинаковой величины. Проведем через C площадку DE , перпендикулярную к CO , и положим $DE=ds$. Затем найдем нормальное напряжение $d_2\sigma'$,



Фиг. 117.

¹⁾ В русской литературе по теории упругости установился термин «равномерное всестороннее сжатие», которое коротко и ярко характеризует указанное напряженное состояние. *Прим. ред.*

²⁾ По теории прочности Мора это строго верно только для пластических тел типа мягкой стали. *Прим. ред.*

³⁾ См. примечание 2 на стр. 238. *Прим. ред.*

действующее на сечение ds и создаваемое обеими силами P , которые мы считаем бесконечно малыми.

Для этой цели выделим бесконечно малую прямоугольную трехгранную призму DEF , у которой $DF \perp CA$. Напряжения, создаваемые силой P , приложенной в точке A , на площадках DF и EF являются напряжениями σ_r и σ_t , которые можно определить по формулам (20). Длина DF равна $ds \cos \alpha$, а проекция силы $\sigma_r ds \cos \alpha$ на направление CO получится путем умножения на $\cos \alpha$. К этой силе добавляется еще сила, зависящая от напряжения σ_t на площадке EF . Поэтому, составляя уравнение проекций всех сил на направление CO , мы получим, что для равновесия призмы необходимо, чтобы нормальное напряжение на площадке DE , отнесенное к единице площади, имело величину:

$$\sigma_r (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \cos 2\alpha.$$

Здесь принято во внимание, что $\sigma_t = -\sigma_r$, и вставлено значение σ_r из формулы (20). Кроме нормального напряжения сила P , приложенная к точке A , на площадке DE создает еще касательное напряжение, которое, однако, нас теперь не интересует, так как оно имеет такую же величину, но противоположное направление, как касательное напряжение, создаваемое на этой же площадке силой, приложенной в точке B , так что оба они при совместном действии обеих сил друг друга уничтожают. Нормальные же напряжения, создаваемые обеими силами и имеющие одинаковую величину, складываются. Если мы еще положим $P = p dF$, то получится

$$d_2 \sigma' = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{p dF}{\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \cos 2\alpha.$$

Это напряжение $d_2 \sigma'$ является одним из главных напряжений, создаваемых вблизи точки C обеими силами. Другое главное напряжение мы обозначим через $d_2 \sigma''$. Его можно найти так же, как и первое, если выделить прямоугольную призму, гипотенуза треугольного основания которой совпадает с линией CO . Тогда, повторив те же рассуждения, мы получим формулу:

$$d_2 \sigma'' = - \frac{m-2}{m} \cdot \frac{p dF}{\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \cos 2\alpha.$$

Следовательно, оба главных напряжения имеют одинаковую величину и противоположные знаки. Если линия CO проходит через центр площадки смятия, то всю нагрузку, действующую на всю площадку смятия, мы можем разложить на такие группы сил, каждая из которых состоит из двух сил, имеющих одинаковую величину и симметрично расположенных. Поэтому во всех точках площадки смятия главные напряжения, созданные совместным действием всех сил нагрузки, имеют одинаковую величину и противоположный знак.

Установив это, найдем теперь главное напряжение σ' в точке, расположенной на контуре площадки смятия. Силы, действующие на площадь, заключенную между двумя лучами с углом $d\alpha$ между ними и расположенную

в верхней части фиг. 118, и силы, действующие на симметрично расположенную площадь в нижней части, создадут вместе напряжение $d_1\sigma'$, которое получится из $d_2\sigma'$ путем интегрирования по R в пределах между $R=0$ и $R=s$, именно:

$$d_1\sigma' = \frac{m-2}{\pi m} \cos 2\alpha \, da \int_0^s \frac{p \, dR}{R}.$$

Заметим, что ввиду характера распределения нагрузки по площадке смятия можно положить

$$p = \frac{p_0}{a} \sqrt{R(s-R)},$$

где p_0 снова обозначает давление в центре площадки смятия. Далее, мы имеем следующее равенство:

$$\int \sqrt{\frac{s-R}{R}} \, dR = \sqrt{R(s-R)} - s \cdot \arcsin \sqrt{1 - \frac{R}{s}},$$

в справедливости которого легко убедиться, дифференцируя выражение, стоящее в правой части. Если мы подставим пределы, то получим:

$$\int_0^s \sqrt{\frac{s-R}{R}} \, dR = \frac{\pi}{2} s.$$

Таким образом мы найдем:

$$d_1\sigma' = \frac{m-2}{2m} \cdot \frac{p_0}{a} \cdot s \cdot \cos 2\alpha \, da.$$

Теперь остается лишь проинтегрировать по α в пределах между $\alpha=0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

При этом мы можем положить

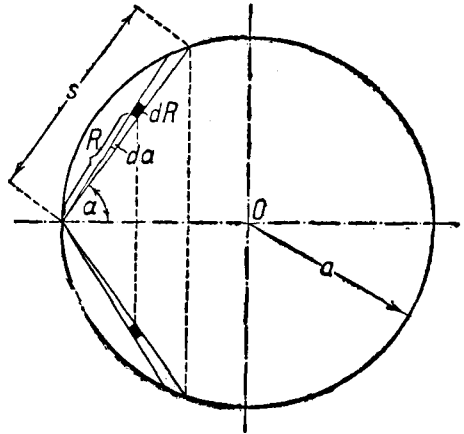
$$s = 2a \cos \alpha,$$

что нам даст

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha \cdot da = \frac{1}{3}.$$

Таким образом мы получим, наконец:

$$\sigma' = \frac{m-2}{3m} p_0. \tag{22}$$



Фиг. 118.

Другое главное напряжение σ'' на контуре площадки смятия, действующее в направлении касательной, имеет такую же величину, как и σ' , но в отличие от него является не растягивающим, а сжимающим напряжением, следовательно:

$$\sigma'' = -\frac{m-2}{3m} p_0. \quad (23)$$

Если положить для железа, как и прежде, $m = 3 \frac{1}{3}$, то формула для σ' перейдет в следующую:

$$\sigma' = \frac{4}{30} p_0 \approx 0,133 p_0.$$

Так как на элемент, расположенный у контура площадки смятия, действуют два главных напряжения одинаковой величины и противоположных знаков, то «предельное состояние» ¹⁾, достигнутое в этом случае при значении σ_s' для модуля главного напряжения, в случае одноосного напряженного состояния будет достигнуто при двойном значении главного напряжения. Отсюда видно, что в действительности прочность материала на контуре площадки смятия нужно считать ниже, чем в центре ее ²⁾.

В заключение остановимся еще несколько подробнее на форме упругой поверхности. Этим термином мы обозначаем поверхность вращения, на которой будут расположены точки поверхности тела после деформации. Ордината ξ упругой поверхности была уже выражена в функции расстояния u от центра при помощи формулы (4), именно:

$$\xi = \frac{m-1}{4mG} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a^2} \left(a - \frac{u^2}{2a} \right),$$

причем формула эта действительна в пределах от $u=0$ до $u=a$. Таким образом в пределах площадки смятия упругая поверхность представляет параболоид вращения. За пределами поверхности давления мы будем иметь другое уравнение, которое нам сейчас не нужно.

Нормаль к поверхности плитки при упругой деформации повертывается на небольшой угол ϕ , и потому она будет пересекать ось x под этим же углом. Так как этот угол мал, то его можно приравнять тангенсу, и тогда мы найдем:

$$\phi = -\frac{d\xi}{du} = \frac{m-1}{4mG} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a^3} u. \quad (24)$$

¹⁾ Например, «предел текучести» для пластических материалов, величина которых, как известно, положена в основу выбора допускаемого напряжения, или временное сопротивление для хрупких. *Прим. ред.*

²⁾ Более подробно этот вопрос рассмотрен в работах акад. А. Н. Динника и проф. Н. М. Беляева, выше цитированных, в последней из которых рассмотрен также более общий случай эллиптического контура площадки, причем показано, что опасное для прочности состояние наступает не у поверхности площадки смятия, а на некоторой глубине под ней. *Прим. ред.*

Точно таким же образом легко вычислить и радиус кривизны ρ упругой поверхности, и мы для кривизны $\frac{1}{\rho}$ получим формулу:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{m-1}{4mG} \cdot \frac{3P}{2a^3} \quad (25)$$

Одновременно это будет также кривизна, принимаемая после деформации поверхностью шара в пределах площадки смятия. Сравним ее с кривизной $\frac{1}{r}$ шара до деформации, подставив предварительно выражение $\frac{P}{a^3}$ из формулы (9). Если упругие постоянные шара и плитки одинаковы, то мы получим:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2r}, \quad (26)$$

т. е. кривизна тела, имеющего первоначально шаровую форму, при упругой деформации уменьшается до половины первоначального значения. Вместо формулы (24) можно поэтому также написать:

$$\phi = \frac{u}{\rho} = \frac{u}{2r}. \quad (27)$$

По этой формуле наибольшее значение ϕ при $u=a$, соответствующее контуру площадки смятия, получается равным следующему значению:

$$\phi_a = \frac{a}{2r} = 0,55 \sqrt[3]{\frac{P}{Er^2}}. \quad (28)$$

Для выяснения дальнейших вопросов, необходимо рассмотреть конкретный пример. Для этой цели предположим, что шарик и плитка сделаны из одинаковой закаленной стали. Радиус шарика мы примем равным 1 см, а модуль Юнга $E = 22 \cdot 10^5$ кг/см². Пусть твердость, определенная путем шариковой пробы по Бринелю, составляет 400 кг/мм² = 40 000 кг/см².

Решим сперва вопрос, какое давление P можно допустить, чтобы исключить возможность какого-либо повреждения при взаимном давлении шарика и плитки друг на друга. При этом предполагается, что мы уже имеем определенные данные о величине давления p_0 в центре площадки смятия, не вызывающего остаточных деформаций. Если вспомнить величину допускаемого напряжения на сжатие при одноосном напряженном состоянии, то можно было бы думать, что, приняв значение допускаемого напряжения для p_0 порядка 10 000 кг/см², мы уже зашли бы достаточно далеко.

1) Строго говоря, это значение мы будем иметь при $u=0$, т. е. в центре площадки смятия. Следующее ниже заключение о постоянстве кривизны шара в пределе всей площадки смятия надо понимать как приближенное и допустимое вследствие малости a ($0 \leq u \leq a$).

Для определения кривизны было взято приближенное выражение ее $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\xi}{du^2}$.
Г/р.и. ред.

Однако, если это значение p_0 вставить в формулу (14) и решить соответствующее уравнение относительно P , то для допускаемой нагрузки шарика мы получим всего лишь величину

$$P_{\text{доп}} = 3,56 \text{ кг.}$$

Но совершенно очевидно, что стальной шарик диаметром 2 см может давить на стальную плитку с значительно большей силой без всякой опасности для материала, и это лишь снова подтверждает, что установление какой бы то ни было связи с допускаемым напряжением на сжатие является ошибочным.

Если же мы примем, как было предложено в начале параграфа, что допускаемое значение p_0 равно половине числа твердости, т. е. равно 20 000 кг/см², то по формуле (14) $P_{\text{доп}}$ будет в восемь раз больше, именно:

$$P_{\text{доп}} = 28,5 \text{ кг.}$$

Конечно, как это было нами подробно обосновано, мы можем считать, что такая нагрузка, наверное, не вызовет в материале никаких повреждений. Но, с другой стороны, согласно имеющемуся опыту и эта нагрузка все еще слишком низка и, вероятно, ее можно безопасно еще повысить. Чтобы получить представление о том, до каких пор можно нагрузку повышать, пойдем теперь обратным путем и спросим себя, при какой нагрузке следует ожидать возникновения остаточной деформации. Для этого мы должны увеличивать нагрузку до тех пор, пока средняя нагрузка на единицу площадки смятия не будет равна числу твердости 40 000 кг/см². Но этой средней нагрузке соответствует давление в центре $p_0 = 60 000 \text{ кг/см}^2$. Если это значение мы подставим в формулу (14) и затем решим полученное уравнение относительно P , то мы наверное получим нагрузку, при которой мы перейдем за предел упругости; таким образом мы найдем:

$$P_{\text{доп}} < 769 \text{ кг.}$$

Как мы видим, предельные цифры для $P_{\text{доп}}$ расходятся очень значительно. Это происходит от того, что мы были вынуждены исходить из p_0 и что $P_{\text{доп}}$ растет пропорционально третьей степени допускаемого значения p_0 . Но практически этот способ вообще оказался непригодным. Мы можем поступать только наоборот, определив наибольший возможный предел для допускаемой нагрузки шарика и затем, путем опыта, проверив, насколько мы вообще можем приблизиться к этому крайнему пределу. Таким путем мы приходим к следующей формуле для $P_{\text{доп}}$, в которой число твердости обозначено через p_k :

$$P_{\text{доп}} = \zeta \cdot 58 \frac{p_k^3 \cdot r^2}{E^2}. \quad (29)$$

Под ζ нужно понимать поправочный коэффициент, меньший единицы, который определяется на основании опытов с пробными образцами из соответствующего материала и учитывает тот или иной запас прочности, подходящий для данного конкретного случая.

Предположим теперь, что для определенных случаев применения мы вправе взять $\zeta = 0,2$. Тогда для предыдущего примера мы найдем:

$$P_{\text{дон}} = 154 \text{ кг};$$

посмотрим, какие цифры нам дадут формулы в этом случае. По формулам (12) и (14) мы получим теперь:

$$a = 0,021 \text{ см}; \quad A = 0,00203 \text{ см}; \quad p_0 = 35 \ 200 \text{ кг/см}^2,$$

и, наконец, по формуле (25)

$$\phi_a = 0,0105$$

Значения a и ϕ_a ясно показывают, что действительно площадка смятия в сравнении с радиусом шара $r = 1 \text{ см}$ мала и что поэтому на основании результатов вычислений против предположения о малости величины a , положенного в основу при выводе формул, ничего возразить нельзя¹⁾.

§ 93. Предположения о возможных обобщениях теории.

После Герца к его теории твердости ни по одному существенному пункту ничего нового не добавлено. Правда, впоследствии оказалось, что в более простых случаях ее результаты можно вывести также и из старой теории Буссинеска, которая не нуждалась в пользовании формулами теории потенциала, но для общего случая эллиптических площадок смятия теория Буссинеска все же недостаточна, и в этом случае приходится снова обращаться к способу, примененному самим Герцем. По отдельным вопросам разными авторами были предложены теоретические исследования, но они не могли дать ничего нового.

¹⁾ Если, в соответствии со сказанным в примечании на стр. 238, определить τ_{max} и поставить условие, чтобы оно было меньше предела текучести при чистом сдвиге, то при нагрузке $P = 154 \text{ кг}$ будем иметь:

$$\tau_{\text{max}} = 0,3 \cdot p_0 \leq \frac{\sigma_s}{2},$$

где σ_s — предел текучести при одноосном растяжении (сжатии). Отсюда найдем $\sigma_s = 21 \ 100 \text{ кг/см}^2$. Это значение представляется вероятным для закаленной стали. Однако необходимо очень осторожно применять коэффициент $\zeta = 0,2$, так как для более мягких материалов радиус a может оказаться столь большим, что зона пластических деформаций при испытании по Бринелю окажется относительно большой, а потому уверенности в допустимости применения числа Бринеля согласно данной автором схемы при $\zeta = 0,2$ мы иметь не будем.

Принципиально более правильный путь указан в цитированных выше работах акад. Динника и проф. Беляева и выражается в условии, написанном выше в настоящем примечании и состоящем в том, что наибольшее касательное напряжение в наиболее опасном элементе на глубине под поверхностью площадки смятия не должно превышать предела текучести при чистом сдвиге. *Прим. ред.*

Но несмотря на это, мы не можем чувствовать себя вполне удовлетворенными современным состоянием теории твердости, так как она, очевидно, не охватывает всех наблюдаемых фактов. Это было установлено еще при первой детальной проверке теории опытным путем, предложенной Ауэрбахом. Но еще и раньше заметили, что при одинаковой твердости заостренным телом легче повредить плитку, чем, наоборот, плиткою острие. Так же обстоит дело и при испытаниях шариковой пробой по Бринелю в тех случаях, когда шар и плитки сделаны из материалов примерно одинаковой твердости и тем не менее повреждения получают только на плитке или же повреждения на плитке получают более значительными, чем на шарике.

Задачей дальнейших исследований является отыскание правильного объяснения этих фактов. Конечно, здесь речь идет не только о математической задаче, т. е. о нахождении решений основных уравнений упругого равновесия, которые соответствовали бы граничным условиям лучше, чем прежние. То, что на этом пути сделано Герцем, трудно превзойти. Можно было бы попытаться устранить или уменьшить ту неточность, которая получается из-за вычисления деформации шара вблизи поверхности давления по тем же формулам, как и плитки, и отыскать с этой целью особое решение для шара. Но мы видели на примере, что ввиду малости a и ϕ_a заметного влияния кривизны шара в пределах этой небольшой области ожидать нельзя. Но если бы мы и могли несколько улучшить формулы, то все равно независимость их от размеров пробного образца, свойственная всем решениям основных уравнений упругого равновесия, сохранилась бы. Поэтому, идя этим путем, нельзя найти объяснение тому факту, что при одинаковых условиях небольшой шарик вызывает повреждение пластинки без вреда для самого себя скорее, чем большой.

Поэтому единственную возможность объяснения этих фактов можно видеть лишь в существовании некоторой разницы между поверхностными и внутренними слоями тела, совершенно аналогично той, какую мы имеем в случае капиллярных явлений в жидкости. Вследствие этого для каждого материала существует определенный предел, до которого у поверхностного слоя можно обнаружить некоторые отклонения в свойствах; при этих условиях размеры пробного образца играют роль потому, что в случае одного и того же материала толщина поверхностного слоя всегда остается одинаковой, чем и объясняется больший эффект при применении маленьких шариков, чем при применении больших.

Если бы мы попытались на основании этого соображения улучшить теорию твердости, то у нас возник бы вопрос, чем же свойства поверхностного слоя могут отличаться от свойств внутренних слоев тела. Во всяком случае нельзя допустить, чтобы это отклонение в свойствах учитывалось нами путем введения дополнительных членов в общие уравнения равновесия напряжений, так как факты, подлежащие объяснению, указывают на то, что поверхностный слой должен иметь не микроскопически малую толщину, а такую, которая во всяком случае больше расстояния между молекулами тела, так что отклонения в свойствах, происходящие из-за молекулярного строения материи, объяснить наблюдаемые факты не могут.

Таким образом простейшее предположение, которое остается сделать, повидимому, будет заключаться в следующем. Упругие постоянные в пределах поверхностного слоя по мере увеличения расстояния от поверхности изменяются, так что лишь на некотором расстоянии от нее они принимают те постоянные значения, которые мы находим для соответствующего материала при обычных условиях, когда влияние поверхностного слоя не обнаруживается. При этом вполне можно было бы допустить, что материал, который при обычных условиях является изотропным, в поверхностном слое будет анизотропным, так что упругие постоянные для направления нормали были бы отличны от упругих постоянных для направлений, перпендикулярных к нормали.

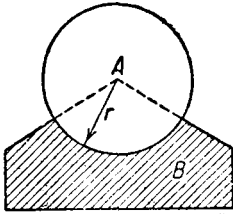
Все эти поправки привели бы к другой математической задаче, решение которой, хотя и было бы трудным делом, но не безнадежным. Конечно, при этом сперва пришлось бы ограничиться решением задачи при наиболее простых возможных предположениях. Но какое бы решение математической задачи ни получилось, его во всяком случае можно было бы считать лишь первым шагом на пути к решению вопроса об особых физических свойствах поверхностных слоев твердого тела, которые могли бы обнаруживаться не только при определении твердости, но и при других условиях. Лишь после того, как удастся доказать существование этих свойств при разных условиях и сформулировать теорию, объясняющую их и применимую ко всем случаям, лишь тогда можно будет считать новую теорию вполне удовлетворительной.

Мы здесь еще укажем на одно соображение, имеющее отношение к этому же вопросу. Рассмотрим пробный образец из очень хрупкого материала, применяемый при испытании на растяжение. Если он имеет кольцевую выточку, то в последней напряжения значительно повышаются (в некоторых случаях до двойной величины). Поэтому в случае материала очень хрупкого образец при одинаковых условиях должен рваться скорее, что и подтверждается опытом. Если же материал менее хрупкий, то тот же результат получается не при однократной нагрузке, а лишь при повторном приложении нагрузки с достаточной частотой.

При этом величина радиуса закругления выточки как по теории, так и на основании опытов, в случае геометрически подобных пробных образцов, никакой роли не играет. Даже если поверхность пробного образца гладко отполировать, то все равно нельзя избежать образования на поверхности ничтожных царапин, которые наносятся мелкими зернами шлифовочного материала и которые можно рассматривать как микроскопические «выточки». Можно ли, однако, считать, что они дадут тот же эффект, как и геометрически подобные им выточки в обычном смысле слова? Ответ на этот вопрос будет зависеть исключительно от того, имеют ли поверхностные слои те же самые упругие и вообще механические свойства, как и внутренние, или другие.

Тонкая проволока обычно дает более высокие значения временного сопротивления при разрыве, чем толстая проволока из того же материала. Это зависит отчасти от различия методов обработки при изготовлении проволоки, благодаря которой изменяется микроструктура материала. Но не исключается возможность, и это даже очень вероятно, что здесь сказывается также и разница между поверхностными и внутренними слоями.

Таким образом в действительности принципиальные вопросы, рассматриваемые нами, имеют значение для всех отделов сопротивления материалов, но их особое значение обнаруживается как раз при рассмотрении явлений, связанных с понятием о твердости. Здесь во всяком случае мы встречаемся с задачами, имеющими важное значение и ожидающими еще своего решения.



Фиг. 119.

В заключение упомянем еще об одной задаче, повидимому, также еще не имеющей решения и во всяком случае более легкой, чем та, о которой мы только что говорили; конечно, эта задача имеет и менее важное значение. Пусть на фиг. 119 буква *A* обозначает шар, а *B* сечение вкладыша

с цилиндрической вогнутой поверхностью одинакового радиуса r . Шар касается цилиндра первоначально по дуге круга, после чего его прижимают к вкладышу силою P , которая вызывает смятие. Требуется определить размеры площадки смятия, получающейся при этих условиях, и наибольшее удельное давление ¹⁾.

¹⁾ Практически более важное значение имеют некоторые иные типы «контактной проблемы», а именно: а) контакт шарика с поверхностью желобка, радиусы кривизны которого больше радиуса (задача о шарикоподшипнике), б) контакт (вдоль образующей) двух цилиндрических тел с параллельными осями (внутреннее касание), радиусы оснований которых равны или отличаются друг от друга на очень малую величину (порядка нескольких десятков микрон).

Эти задачи строго до настоящего времени не решены. Последние находят себе применение в теории заклепочных соединений, в расчете разного рода шарниров, опор форм и в подшипниках скольжения, причем в последнем случае важно решить задачу для случая контакта при наклонных друг к другу осях обоих цилиндров. *Прим. ред.*

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА.

СОБСТВЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

§ 94. Определение и происхождение собственных напряжений.

Собственными ¹⁾ напряжениями мы будем называть здесь все напряжения, которые могут существовать в теле независимо от приложенных к нему внешних сил. Сюда относятся в первую очередь все напряжения, существовавшие в теле до приложения нагрузки, независимо от их происхождения ²⁾. Далее к ним относится та часть напряжений, существующих в нагруженном теле, которая остается при прекращении действия внешних сил ³⁾. Другую часть напряжений, создаваемую непосредственно внешними силами и снова исчезающую при прекращении действия внешних сил, мы в противоположность первым назовем «напряжениями от нагрузки». Задачей нашего исследования является установление связи между собственными напряжениями и напряжениями от нагрузки.

При применении термина «собственные напряжения» необходимо, чтобы поверхность и объем тела, в котором эти напряжения действуют, были указаны точно, аналогично тому, как это должно быть сделано при установлении понятия «внешних сил», от которых собственные напряжения не должны зависеть совершенно. Если через тело провести сечение, делящее тело на две части, и ограничиться затем рассмотрением только одной из этих двух частей, то силы, действующие в этом сечении, которые для всего тела были внутренними, следовательно, в случае ненагруженного тела были собственными (начальными) напряжениями, становятся внешними силами, приложенными к одной, оставшейся, части этого тела. Этим внешним силам соответствуют в оставшейся части тела свои напряжения от нагрузки. Отсюда вытекает, что напряжения, существующие в определенной части тела, следует рассматривать как собственные, если рассматривать тело как целое, и они же утрачивают частично или полностью характер собственных, если рассматривать эту часть независимо от другой части тела.

В общем случае, если мы разрежем тело на две части, то в каждой из частей могут остаться напряжения, и тогда их можно считать за собственные напряжения соответствующих частей. Но, во всяком

1) Эти напряжения обычно называются внутренними. Мы применяем термин собственные напряжения, а не внутренние, как принятый Комиссией по технической терминологии при Академии наук. *Прим. ред.*

2) Такие напряжения в дальнейшем будем называть также «начальными». *Прим. ред.*

3) Такие напряжения в дальнейшем будем называть также «остаточными».

Прим. ред.

случае, не следует смешивать собственные напряжения части тела с собственными напряжениями, существовавшими в этой части до разделения тела на части. Собственные напряжения, остающиеся после того, как мы разрежем тело на части, будут соответствовать меньшей деформации, которая все же продолжает существовать и после прекращения действия напряжений, имевших место на поверхности раздела. Поэтому напряжения, действующие в каждой части тела, имеющей определенные границы, и рассматриваемые как собственные напряжения всего тела, можно разложить на две составляющие: на собственные напряжения, присущие только этой части как таковой, и на напряжения, создаваемые теми напряжениями, которые действуют на поверхность ее и играют роль «внешних сил» действия отброшенной части.

Таким образом напряжения, являющиеся для какой-либо части тела как бы происходящими от «внешней нагрузки», можно уничтожить полностью, нарушив связь этой части с остальной частью тела.

Но если из такой части тела выделить, в свою очередь, опять небольшую часть, то часть оставшейся ранее в ней деформации опять уничтожится; деля таким образом тело на все более и более мелкие части, мы можем достигнуть такого предела, что в этих элементах остаточные напряжения можно будет считать незначительными. Таким образом путем повторного деления мы будем получать части, состояние которых будет все больше и больше приближаться к ненапряженному, или, другими словами: можно считать, что элемент объема, имеющий во всех направлениях бесконечно малые размеры, никогда только ему присущих собственных напряжений не имеет.

Все, что нами сказано до сих пор, служит лишь для отчетливого определения термина «собственные напряжения», независимо от того, как эти собственные напряжения возникают, или что служит причиной их возникновения. Точно так же общие свойства собственных напряжений, о которых мы будем говорить в следующем параграфе, относятся ко всем собственным напряжениям независимо от их происхождения, и потому об них лучше говорить в общей форме. Но, чтобы дать ясное представление о предмете нашего исследования и дать предварительный обзор разных приложений этих общих исследований, мы перечислим теперь важнейшие причины, которые могут привести к возникновению собственных напряжений.

По своему происхождению собственные напряжения можно разделить на три главных класса. К первому классу мы причисляем «температурные» или «тепловые напряжения», получающиеся в теле, неравномерно нагретом или охлажденном в разных местах. Каждый инженер их знает и во многих случаях их опасается. Он знает, насколько важно обращать на них тщательное внимание и, по возможности, избегать их возникновения или соответствующим образом учесть их влияние. В деталях машин, подверженных во время работы значительным колебаниям температуры, температурные напряжения довольно часто вызывают поломки или другие повреждения и определение собственных напряжений или, по крайней мере, оценка их величин в таких случаях еще важнее, чем определение напряжений от внешних сил. Поэтому в теории упругости температурные напряжения,

по крайней мере в известных случаях, рассматриваются уже с давних пор, но они всегда рассматривались отдельно и потому противопоставлялись не только напряжениям от внешней нагрузки, но и всем остальным собственным напряжениям. Однако здесь мы их будем рассматривать пока вместе со всеми этими напряжениями, с которыми они имеют общие важнейшие свойства.

Ко второму классу относятся все внутренние напряжения, возникновение которых обусловливается процессом изготовления или обработкой тела. Сюда, в первую очередь, относятся усадочные напряжения, возникновения которых в отливках никогда полностью избежать нельзя; причиной возникновения их служит не вполне равномерное охлаждение расплавленного металла после заливки формы и не одновременное, а последовательное затвердевание. Уменьшить их по возможности, или предотвратить их возникновение и представляет одну из главных забот инженера-литейщика, особенно в сталелитейных. Если предотвратить в достаточной степени возникновение их заранее нельзя, то их стремятся уменьшить путем последующего многократного длительного отжига отливок. Точно так же могут содействовать постепенному уничтожению собственных напряжений, возникших при изготовлении, сотрясения и вибрации, получающиеся при работе машин.

К третьему классу относятся напряжения, остающиеся в теле, в котором никаких напряжений первоначально не было, но которые появились в результате действия нагрузки, вызвавшей в отдельных точках тела переход за предел упругости. Эти напряжения можно назвать остаточными. При более детальном исследовании этих остаточных напряжений нам придется учесть явление упругого последействия (гистерезис) и другие сопровождающие его явления. Впрочем, резкой границы между третьим и вторым классами провести нельзя, так как обработка, применяемая для изготовления тех или иных предметов, очень часто и производится за счет пластических деформаций, как это мы имеем при ковке, прокатке и т. д.

Таким образом мы перечислили те причины возникновения внутренних напряжений, которые имеют важнейшее значение для практики. Однако это перечисление отнюдь не претендует на полноту; его цель заключается лишь в том, чтобы дать приблизительное представление о них. Например, в случае дерева часто причиной возникновения собственных напряжений может служить увлажнение, вызывающее разбухание, или усушка отдельных мест.

§ 95. Общие свойства собственных напряжений.

Можно считать, что бесконечно малый элемент объема тела никаких собственных напряжений не имеет. Если он будет освобожден от связи с остальными частями тела, то он перейдет в ненапряженное состояние и исчезновение прежде имевшихся в нем напряжений вызовет деформацию его. Выделим элемент, который после этой деформации будет представлять прямоугольный параллелепипед с длинами ребер dx , dy , dz . Можно сказать, что мы будем иметь тогда естественное или недеформированное состояние этого элемента.

Чтобы заставить элемент снова принять ту форму, какую он имел при связи с остальным телом, мы должны приложить к нему напряжения σ_x и т. д. и τ_{xy} и т. д., которые вызвали бы в нем относительные удлинения ϵ_x и т. д. и сдвиги γ_{xy} и т. д., бывшие у элемента в то время, когда он составлял одно целое со всем телом. Связь между напряжениями и деформациями ϵ и γ определяется упругими свойствами материала тела. Нам нужно поэтому ввести определенное предположение относительно этой связи, и здесь мы, так же как и во всей книге, примем наиболее простое предположение, что материал изотропен, т. е. во всех направлениях имеет одинаковые свойства и что он подчиняется как закону Гука, так и вообще закону сложения действия сил; тогда между напряжениями σ_x и т. д. и деформациями ϵ_x и т. д. будут иметь место соотношения, о которых мы уже говорили подробно в первой главе нашей книги.

Подходящей мерой для оценки величины полной деформации, отнесенной к единице объема и имеющей место в определенной точке тела, мы можем считать удельную работу деформации, которую можно вычислить по любой из формул (53) — (57) § 5. По формуле (55) она выражается через компоненты тензора деформации следующим образом:

$$A = G \left\{ {}^0\epsilon_x^2 + {}^0\epsilon_y^2 + {}^0\epsilon_z^2 + \frac{{}^0e^2}{m-2} + \frac{1}{2} \left({}^0\gamma_{xy}^2 + {}^0\gamma_{yz}^2 + {}^0\gamma_{zx}^2 \right) \right\}.$$

Значок 0 , который мы ставим у ϵ и γ слева, указывает, что в этой формуле речь идет о ненагруженном теле, имеющем возможность беспрепятственно деформироваться. Соответствующая работа деформации для всего тела выразится интегралом

$$A = G \int \left\{ {}^0\epsilon_x^2 + {}^0\epsilon_y^2 + {}^0\epsilon_z^2 + \frac{{}^0e^2}{m-2} + \frac{1}{2} \left({}^0\gamma_{xy}^2 + {}^0\gamma_{yz}^2 + {}^0\gamma_{zx}^2 \right) \right\} dv. \quad (1)$$

Сообщим теперь ненагруженному телу бесконечно малые возможные перемещения и соответствующие изменения, которые получат деформации ϵ_x и т. д. в сравнении с исходными их значениями, мы обозначим через $\delta\epsilon_x$ и т. д. Тогда на основании принципа возможных перемещений, как это мы знаем из § 9, для вариации работы A [формула (1)], мы получаем равенство

$$\delta A = 0.$$

Чтобы подчеркнуть, что эта вариация относится к бесконечно малой возможной деформации, мы можем так же, как уже сделали в формуле (45) в § 14, написать это равенство в таком виде:

$$\delta_1 A = 0. \quad (2)$$

Как уже было выяснено детально в § 9, это равенство выражает одновременно условие, необходимое для того, чтобы при устойчивом равновесии ненагруженного, но имеющего собственные напряжения, тела работа деформации, вычисленная по предыдущей формуле (1), имела минимум.

Можно сказать и наоборот, что тело, деформированное действием собственных напряжений, при отсутствии внешних сил само примет ту форму устойчивого равновесия, при которой работа деформации, вычисленная по формуле (1), будет иметь минимум.

Следует еще раз подчеркнуть существенное предположение, лежащее в основе этого заключения, что деформация, характеризуемая величинами $\delta\epsilon_x$ и т. д., является возможной, т. е. следовательно, такой, которая происходит без нарушения сплошности связи между отдельными частями тела. Это сводится к тому, что все $\delta\epsilon_x$ и т. д. должны выражаться через соответственные возможные перемещения $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ точек тела, которые, в свою очередь, должны являться непрерывными функциями координат x, y, z для того, чтобы нарушения сплошности связи между отдельными частями тела не было.

Например, это существенное предположение было бы нарушено, если бы мы для тела, имеющего собственные напряжения, положили:

$$\delta\epsilon_x = \frac{1}{n} \circ\epsilon_x; \quad \delta\epsilon_y = \frac{1}{n} \circ\epsilon_y \text{ и т. д.},$$

где n обозначает произвольное целое число, так как мы уже знаем, что если тело разрезать на отдельные элементы, то последние изменят свою форму и примут такую, которая не дает возможности сложить тело без щелей между отдельными элементами. Поэтому и дробные части соответствующих деформаций привели бы к нарушению связи между отдельными частями тела. Но если, несмотря на это, предположить, что $\delta\epsilon_x = \frac{1}{n} \circ\epsilon_x$ и т. д. представляют действительно возможные перемещения, то уравнение (2) могло бы удовлетворяться лишь при условии, что все деформации, входящие в формулу (1), во всех точках тела равны нулю.

Это следствие можно формулировать в виде следующего положения: в ненагруженном теле никаких напряжений не может быть, если, не нарушая связи между отдельными частями тела, можно (в чисто геометрическом смысле) перевести тело из данного начального состояния в ненапряженное состояние¹⁾. В противном случае тело из данного начального состояния перейдет в такое напряженное состояние и примет такую форму, при которых работа деформации будет иметь минимум.

В дальнейшем мы будем предполагать, что тело подчиняется закону сложения действия сил. Поэтому из нашего рассмотрения исключаются случаи, когда тело имеет такую форму, для которой этот закон не имеет места. Если в теле собственных напряжений нет, то деформации и напряжения, происходящие от действия внешних сил, должны быть во всех

1) Это предположение заведомо неверно в случае больших деформаций, для которых дифференциальные уравнения будут нелинейными в отличие от линейных дифференциальных уравнений, принятых в теории упругости. Например, если половину резинового мяча вывернуть наизнанку, то в ней возникнут собственные напряжения, между тем как, возвращая из этого «данного» в первоначальное состояние, мы уже никаких напряжений иметь не будем. *Прим. перев.*

точках пропорциональными последним. Пусть теперь в таком теле имеются собственные напряжения и пусть к телу приложена какая-либо внешняя нагрузка. Создаваемая ею упругая деформация сообщает элементу объема $dx dy dz$ удлинения и сдвиги, которые для отличия от рассмотренных выше мы обозначим через ${}^b\varepsilon$ и ${}^b\gamma$. Значок b слева служит для указания, что причиной этих деформаций является нагрузка. Полная деформация соответствующего элемента объема (если сравнивать с ненапряженным состоянием) получится суммированием обеих деформаций, следовательно,

$$\varepsilon_x = {}^0\varepsilon_x + {}^b\varepsilon_x \text{ и т. д.; } e = {}^0e + {}^be; \quad \gamma_{xy} = {}^0\gamma_{xy} + {}^b\gamma_{xy} \text{ и т. д.};$$

тогда полная работа деформации, соответствующая новому состоянию, на основании формулы (1) будет выражаться следующей формулой:

$$A = G \int \left\{ ({}^0\varepsilon_x + {}^b\varepsilon_x)^2 + \dots + \frac{({}^0e + {}^be)^2}{m-2} + \frac{1}{2} \left[({}^0\gamma_{xy} + {}^b\gamma_{xy})^2 + \dots \right] \right\} dv.$$

Легко доказать, что это выражение переходит в такое:

$$A = {}^0A + {}^bA, \quad (3)$$

если под 0A понимать работу деформации, соответствующую ненапряженному состоянию с деформациями ${}^0\varepsilon_x$ и т. д., а под bA энергию деформации, которая получилась бы в первоначально ненапряженном теле при сообщении ему деформаций ${}^b\varepsilon_x$ и т. д.

Чтобы доказать правильность написанного равенства, раскроем в выражении A скобки и сложим вместе члены, содержащие квадраты деформаций со знаком 0 слева. Эти члены дадут в сумме 0A , и точно так же сумма членов, содержащих квадраты деформаций с значком b слева, даст bA . Следовательно, остается лишь показать, что обращается в нуль сумма членов с произведениями разных деформаций. Эта сумма имеет такой вид:

$$2G \int \left\{ {}^0\varepsilon_x {}^b\varepsilon_x + {}^0\varepsilon_y {}^b\varepsilon_y + {}^0\varepsilon_z {}^b\varepsilon_z + \frac{{}^0e {}^be}{m-2} + \frac{1}{2} ({}^0\gamma_{xy} {}^b\gamma_{xy} + {}^0\gamma_{yz} {}^b\gamma_{yz} + {}^0\gamma_{zx} {}^b\gamma_{zx}) \right\} dv.$$

Мы знаем, что работа деформации 0A , соответствующая собственным напряжениям, должна удовлетворять уравнению (2), именно уравнению

$$\delta_s {}^0A = 0,$$

которое, будучи написано подробнее, имеет следующий вид:

$$2G \int \left\{ {}^0\varepsilon_x \delta\varepsilon_x + {}^0\varepsilon_y \delta\varepsilon_y + {}^0\varepsilon_z \delta\varepsilon_z + \frac{{}^0e \delta e}{m-2} + \frac{1}{2} ({}^0\gamma_{xy} \delta\gamma_{xy} + {}^0\gamma_{yz} \delta\gamma_{yz} + {}^0\gamma_{zx} \delta\gamma_{zx}) \right\} dv = 0.$$

Здесь $\delta\varepsilon_x$ и т. д. обозначают произвольные бесконечно малые приращения, которые совместимы друг с другом без нарушения связи между отдельными частями тела. Но к деформациям, удовлетворяющим этому условию, которые поэтому можно назвать «возможными», относится

также и та, которую тело действительно испытывает при приложении внешней нагрузки. Следовательно, если мы в предыдущем равенстве положим:

$$\delta \epsilon_x = \frac{1}{n} \delta \epsilon_x; \quad \delta \epsilon_y = \frac{1}{n} \delta \epsilon_y \quad \text{и т. д.},$$

где n обозначает произвольно взятое большое число, то этим величинам, наверное, будет соответствовать возможная деформация, для которой должно быть выполнено равенство $\delta_a A = 0$. Следовательно, мы должны иметь равенство:

$$\int \{ {}^0 \epsilon_x \delta \epsilon_x + {}^0 \epsilon_y \delta \epsilon_y + \dots \} dv = 0$$

чем и исчерпывается доказательство правильности формулы (3).

Теперь мы сообщим возможную деформацию телу, которое одновременно и подвержено действию нагрузки, и имеет собственные напряжения. Пусть эта деформация переводит ${}^0 \epsilon_x + \delta \epsilon_x$ в ${}^0 \epsilon_x + \delta \epsilon_x + \delta \epsilon_x$ и т. д. На основании принципа возможных перемещений мы снова получаем:

$$\delta_a A = 0,$$

и на основании формулы (3), имея в виду, что при этой вариации величине ${}^0 A$ можно считать постоянной, мы получим:

$$\delta_a \delta A = 0. \quad (4)$$

Мы знаем также, что из этого равенства можно вывести все следствия, какие может дать теория упругости для этого случая нагрузки. Таким образом мы получаем теорему: если напряжения не превосходят предела упругости, следовательно, если вообще применима вся теория, изложенная выше, то тело, имеющее собственные напряжения, ведет себя под нагрузкой так, как если бы собственных напряжений не было или другими словами: напряжения от внешних сил не зависят от собственных.

Поэтому путем приложения нагрузки установить существование собственных напряжений в данном теле или вообще нельзя, или же можно лишь в случае, если при повышении нагрузки до появления остаточных деформаций этот предел будет достигнут раньше, чем это должно было бы произойти у тела без собственных напряжений. Но если мы вообще перейдем за предел упругости, то теряют силу все следствия, выведенные из закона Гука, и потому мы в этом случае не в состоянии на основании результатов испытаний под нагрузкой, доводящей тело до остаточных деформаций, использовать теорию, изложенную в этой книге, для вывода надежных заключений.

Единственное надежное средство доказать существование внутренних напряжений чисто механическим путем и определить величину их заключается в следующем: нужно нарушить связь между отдельными частями тела путем полного или частичного разреза и измерить получающиеся при этом деформации. В технических журналах часто можно встретить сообщения о таких опытах, которые производились над отливками. Таким

путем стараются получить представление о том, насколько при определенном способе изготовления отливок удастся снизить усадочные напряжения в отливках. Но к теоретической обработке и оценке результатов измерений, произведенных при таких испытаниях, пока еще никто не подошел. Чтобы это вообще можно было осуществить, необходимо заранее наметить план, по которому должны производиться опыты. От дальнейшего развития теории собственных напряжений на основании общих данных здесь положений можно, без сомнения, ждать еще много важных и ценных для практики выводов.

Ради полноты изложения следует еще упомянуть, что в случае прозрачных тел существование напряжений вообще, а потому и существование собственных напряжений, можно установить оптическим путем¹⁾. Этот метод основан на том, что тело в деформированном состоянии обладает двойным лучепреломлением, даже если бы в ненапряженном состоянии оно и было изотропным в отношении не только упругих, но и оптических свойств. Этим свойством уже часто пользовались для установления существования напряжений и определения величины их в телах, сделанных из стекла. Этим вопросом мы подробнее заниматься не будем отчасти потому, что он относится более к оптике, чем к теории упругости, а отчасти потому, что мы им сами не занимались²⁾.

§ 96. Исключительные случаи.

Теперь мы обратимся к исключительным случаям, при которых вследствие особенностей формы тела закон сложения действия внешних сил даже при отсутствии собственных напряжений не выполняется, ввиду чего отпадают и все выводы предыдущего параграфа, основанные на этом предположении. Для наглядности мы рассмотрим пример, на котором легче всего объяснить сущность дела. Фиг. 119а показывает лук с натянутой тетивой; на фигуре указаны обе³⁾ силы P , натягивающие лук перед спуском стрелы.

При ненагруженном состоянии тела, состоящего из дуги и тетивы, т. е. при отсутствии внешних сил P , в тетиве будет существовать вообще некоторое натяжение S_0 , из-за которого половина длины тетивы l (в ненапряженном состоянии) получит упругое удлинение Δl_0 , которое можно положить равным:

$$\Delta l_0 = c_1 S_0.$$

1) См. Зайцев, Оптический метод, также Cocker and Filon, Photo-Elasticity, 1931 и краткое изложение теоретических основ метода в статье Прокофьевой-Михайловской в сборнике № IV, «Автогенная сварка», Л. 1933, или А. А. Попов, Труды Моск. инст. инж. транспорта, Вып. 41 или «Оптический метод изучения напряжений в деталях машин» (Библ. инжен.) 1935 г. *Прим. ред.*

2) Со времени выхода последнего немецкого издания «Drang und Zwang», Л. Феппл руководил работами по применению оптического метода к исследованию напряжений в плоской задаче. Ряду чрезвычайно интересных задач в этой области посвящены две тетради «Mitteilungen aus d. Mechanisch-Technischen Laboratorium d. Techn. Hochsch. München», Н. 34 и 35 за 1930 и 1931 г. *Прим. ред.*

3) См. примеч. 2 стр. 257.

Точно так же и половина расстояния между концами дуги благодаря существованию собственных начальных напряжений получит упругое укорочение, которое пусть будет равно $c_2 S_0$. Коэффициенты c_1 и c_2 зависят определенным образом от длины, от размеров поперечного сечения, от модулей упругости и от формы дуги, и мы их можем считать при наших вычислениях известными, так как эту зависимость мы можем определить. Мы знаем также, как можно определить напряжения и все деформации для каждой точки всего тела, соответствующие определенному значению S_0 . Если мы предположим, что напряжения нигде не превосходят предела упругости, то все эти величины будут пропорциональны S_0 . Поэтому и работа деформации 0A , соответствующая собственным начальным напряжениям, при отсутствии нагрузки будет зависеть лишь от S_0 , и мы получим для нее выражение:

$${}^0A = (c_1 + c_2) S_0^2,$$

причем член $c_1 S_0^2$ представляет работу деформации тетивы, имеющей длину $2l$, а другой член представляет работу деформации дуги.

Теперь будем считать обе силы, указанные на чертеже ¹⁾, за нагрузку. Тетива, которую мы для простоты будем считать за совершенно упругую нить, после деформации, вызванной силами P , будет состоять из двух половин, образующих одна с другой тупой угол. На чертеже высота образуемого ею равнобедренного треугольника обозначена буквой f . Мы должны считать величину f в сравнении с l малой, но при этом должны заранее иметь в виду, что вследствие геометрических соотношений f во всяком случае получается значительно больше упругого удлинения тетивы из-за нагрузки. Как раз на разном порядке величины f и других величин, характеризующих деформацию, и основана, как мы увидим ниже, особенность, которая делает рассматриваемый случай согласно нашей терминологии исключительным.

Пусть натяжение тетивы с величины S_0 повысится в нагруженном состоянии до S . Равновесие сил, приложенных к тетиве, требует, чтобы выполнялось равенство

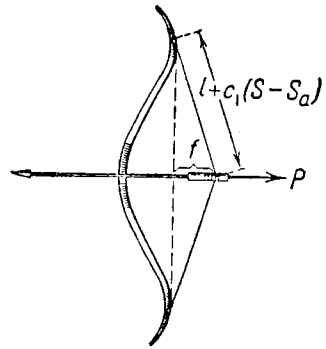
$$P = \frac{2f}{l} \cdot S.$$

По теореме Пифагора мы имеем соотношение:

$$f^2 + [l - c_2(S - S_0)]^2 = [l + c_1(S - S_0)]^2,$$

¹⁾ В немецком оригинале этот чертеж отсутствует. При выполнении его для русского издания вторая сила, приложенная к середине дуги лука, не показана из-за трудности получить ясный чертеж. *Прим. ред.*

²⁾ При выводе этого соотношения принято, что f столь мало, что влиянием изменения направления силы S по сравнению с S_0 на сближение концов дуги можно пренебречь и считать c_2 постоянным. *Прим. ред.*



Фиг. 119а.

откуда, пренебрегая малыми членами высших порядков, мы получим:

$$f^2 = 2l(c_1 + c_2)(S - S_0).$$

Поэтому для величины внешней силы P , вызывающей рассматриваемую деформацию, мы получим выражение:

$$P = \frac{2f}{l} S_0 + \frac{f^3}{l^2(c_1 + c_2)}. \quad (4a)$$

Эта формула показывает, что тело, состоящее из дуги и тетивы, не подчиняется закону сложения действия сил. При наличии собственных начальных напряжений и при отсутствии их (т. е. при $S_0 = 0$) деформация, характеризующаяся величиной f , увеличивается не пропорционально силе P . Поэтому здесь, вопреки теореме, сформулированной в предыдущем параграфе при рассмотрении уравнения (4), можно определить S_0 , а следовательно, и начальные напряжения путем испытания под нагрузкой. Это определение можно сделать, измеряя значения f , соответствующие разным значениям P . Точно так же и $c_1 + c_2$ нам перед знать не нужно, так как мы можем определить значение этой суммы также по результатам испытаний.

Вычислим, далее, работу деформации A , соответствующую нагруженному состоянию, положив

$$A = {}^0A + \int_0^f P df.$$

Здесь перемещением середины дуги лука относительно линии, соединяющей концы дуги, которое происходит вследствие увеличения кривизны дуги и является в сравнении с f малой величиной более высокого порядка, ради простоты мы будем пренебрегать. Если подставить значение P из формулы (4a) и выполнить интегрирование, то мы получим:

$$A = {}^0A + \frac{f^2}{l} S_0 + \frac{f^4}{4l^2(c_1 + c_2)},$$

или, если выразить 0A и S_0 через деформацию Δl_0 ,

$$A = \frac{c_1 + c_2}{c_1^2} \Delta l_0^2 + \frac{f^2 \Delta l_0}{c_1 l} + \frac{f^4}{4l^2(c_1 + c_2)}. \quad (4b)$$

Величина A была найдена нами путем вычисления работы, произведенной внешними силами. Вместо этого можно было бы вычислить по известным формулам работу деформации дуги и тетивы отдельно. Но и тогда мы пришли бы к тому же результату. Важно отметить, что работа деформации A , выраженная в деформациях, не представляет простую квадратичную функцию от деформаций. В этом и заключается необходимым и достаточным признаком исключительных случаев, в которых теоремы, выведенные в предыдущих параграфах, не действительны.

С этим связано также то обстоятельство, что формула (3)

$$A = {}^0A + {}^bA$$

в рассматриваемом примере не верна. Чтобы получить bA , мы должны в формуле (4b) положить Δl_0 равным нулю, что нам даст:

$${}^bA = \frac{f^4}{4l^2(c_1 + c_2)}.$$

Но в этом случае член с произведениями разных деформаций в формуле (3), как это можно видеть при первом взгляде на формулу (4b), в нуль не обратится. Мы должны еще выяснить, почему это не противоречит доказательству существования зависимости (3), данному раньше и, повидимому, годному во всех случаях.

Для этой цели мы проследим еще раз ход всего доказательства, сообщив ненагруженному телу, имеющему лишь начальные напряжения, такую возможную деформацию, какая получается в действительности при нагрузке внешними силами P бесконечно малой величины. На основании принципа возможных перемещений для этой возможной деформации по формуле (2) предыдущего параграфа должно выполняться равенство

$$\delta_1 {}^0A = 0.$$

Но здесь на основании формулы (4b), понимая в ней под f меру этой бесконечно малой деформации и пренебрегая последним членом более высокого порядка малости, мы получим:

$$\delta_1 {}^0A = \frac{f^2 \Delta l_0}{c_1 l}.$$

Эта формула не противоречит требованию принципа возможных перемещений, согласно которому вариация A должна обращаться в нуль с точностью до членов более высокого порядка малости, чем рассматриваемые перемещения. Поэтому то обстоятельство, что $\delta_1 {}^0A$ при бесконечно малом f представляет бесконечно малую величину 2-го порядка, действительно находится в соответствии с принципом возможных перемещений, а вместе с тем оно показывает также, что равновесие под действием начальных напряжений является устойчивым (см. по этому поводу сказанное в § 12 первого тома).

Лишь в том случае, если выражение для A , составленное по образцу формулы (4b), содержит исключительно члены с квадратами деформаций, можно будет, как это и сделано при получении формулы (3), вывести заключение, что члены, содержащие произведение разных деформаций, должны обращаться в нуль. В формуле же (4b) второй член A оказывается не второй, а третьей степени, так как он кроме f^2 содержит также еще и Δl_0 .

Предыдущие выводы основаны на замечаниях проф. С. Тимошенко. В своем письме из Аграма от 17 ноября 1920 г. Тимошенко обращает внимание на то, что следствия, выведенные в предыдущем параграфе,

верны лишь в тех случаях, когда имеет место теорема Кирхгофа об однозначности решений задач теории упругости. Он еще добавил при этом, что в противном случае имеется возможность измерить начальные напряжения и что, например, сопротивление трубы продольному изгибу может быть повышено, если подвергнуть ее действию значительного внутреннего давления.

В последнее время этот вопрос рассматривал также, и притом еще подробнее, проф. Л. Прандтль (L. Prandtl) в своей статье «Elastisch-bestimmte und elastisch-unbestimmte Systeme», помещенной в сборнике August Föppl Festschrift (Berlin, Springer, 1924, стр. 52). Под «упруго-определимыми системами» (elastisch-bestimmte Systeme) Прандтль понимает такие тела или такие системы тел, в которых существующие начальные напряжения не имеют заметного влияния на напряжения, возникающие впоследствии под действием внешних сил, и просто с ними складываются. Прандтль характеризует такие системы требованием выполнения равенства

$$\frac{\partial P_i}{\partial y_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} = \text{const.}$$

Здесь под y_i нужно понимать перемещение точки приложения силы P_i в направлении этой силы, а под H работу деформации, выраженную через y . Прандтль предлагает обозначать работу деформации буквой A (как это делается в этой книге во всех случаях) лишь тогда, когда работа деформации выражена через внешние силы, если же она выражена через перемещения, то он предлагает обозначать ее буквой H . Это предложение очень практично, так как оно может устранить те недоразумения, которые происходили часто прежде.

Далее, Прандтль в своей работе дает еще прекрасный пример «упруго-неопределимой» системы. Пример относится к ферме с 5 узлами и 8 стержнями, образующими квадрат с одним узлом в центре. Если силы действуют в плоскости фермы, то она будет статически неопределимой, если же силы действуют в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, и если центральный узел снабжен плоскими (листовыми) связями, противодействующими изменению угла между диагональными стержнями, идущими в одном направлении, то по терминологии Прандтля эта ферма будет представлять упруго-неопределимую систему. Напряжения и деформации ее зависят от начальных напряжений, которые можно создать в ферме при помощи винтовой стяжки еще до приложения нагрузки. Этими замечаниями мы здесь и ограничимся.

§ 97. Температурные напряжения.

Пусть небольшой шар радиуса a нагрет до температуры t° . Если он может расширяться свободно, то a увеличится на величину Δa_w , которую можно положить равной

$$\Delta a_w = \alpha t a,$$

где под α нужно понимать коэффициент линейного расширения. Если же шар представляет часть тела больших размеров и если он целиком за-

ключен внутри тела весьма далеко от его наружной поверхности, то внешняя часть тела будет противодействовать расширению шара, и получится деформированное состояние с напряжениями \mathfrak{z}_r (действующими в радиальном направлении) и σ_t в направлении касательной; эти напряжения на основании указанных предположений зависят лишь от расстояния r соответствующей точки тела от центра шара, и эти-то напряжения мы теперь и определим¹⁾.

На поверхности шара при $r = a$ напряжение \mathfrak{z} будет сжимающим и будет действовать со всех сторон аналогично давлению жидкости. Мы положим на поверхности шара $\mathfrak{z}_r = -p$. При этих условиях внутри шара мы будем иметь во всех точках одинаковое напряженное состояние с тремя одинаковыми главными напряжениями величиной $-p$. Эти напряжения создадут упругие деформации ϵ_p , которые внутри шара будут во всех направлениях одинаковы и для которых мы по формуле (31) § 2 получим:

$$\epsilon_p = -\frac{m-2}{mE} \cdot p.$$

Полное относительное удлинение во внутренних точках шара составляется из ϵ_p и из удлинения ϵ_w , вызванного нагреванием, и мы получим для него выражение:

$$\epsilon = \alpha t - \frac{m-2}{mE} \cdot p.$$

Отсюда для приращения Δa радиуса a получится формула:

$$\Delta a = a \left(\alpha t - \frac{m-2}{mE} p \right), \quad (5)$$

и это будет одновременно значением радиального перемещения ρ при упругой деформации части тела, непосредственно прилегающей к шару снаружи, для которой мы имеем $r = a$.

Вне шара, т. е. при $r > a$, относительные удлинения в радиальном и в перпендикулярных к нему направлениях будут выражаться формулами:

$$\epsilon_r = \frac{d\rho}{dr}; \quad \epsilon_t = \frac{\rho}{r}.$$

Между этими удлинениями и напряжениями σ_r и σ_t имеется зависимость, определяемая законом Гука, именно по формулам (31) § 2; мы имеем:

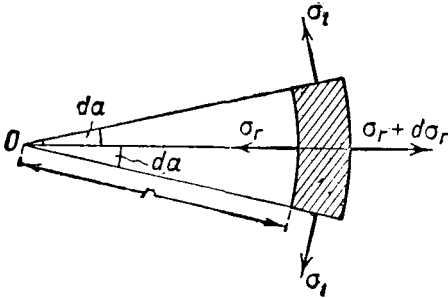
$$\epsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{2}{m} \sigma_t \right); \quad \epsilon_t = \frac{1}{E} \left(\frac{m-1}{m} \sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right).$$

¹⁾ Здесь автором не оговорено молчаливо принятое допущение (которое в практических примерах не выполняется) о том, что передачи тепла от нагретого шара окружающему его телу не происходит. *Прим. ред.*

Если из этих двух равенств определить σ_r и σ_t и затем выразить еще ϵ_r и ϵ_t через ρ , то получится:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left[(m-1) \frac{d\rho}{dr} + 2 \frac{\rho}{r} \right], \\ \sigma_t &= \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left(\frac{d\rho}{dr} + m \cdot \frac{\rho}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Но σ_r и σ_t должны удовлетворять условию равновесия, относящемуся к проекциям сил на радиальное направление. Это условие мы выведем, пользуясь фиг. 120, на которой O обозначает центр не показанного нагретого шара. Заштрихованный элемент объема расположен вне этого шара ($r > a$) и заключен между шаровыми поверхностями радиусов r и $r + dr$ и боковой поверхностью конуса с центральным углом $2da$. Напряжения σ_t , приложенные к контуру, дают результирующую, направленную к O и имеющую величину



Фиг. 120.

$$2\pi(rda) dr \cdot \sigma_t da;$$

эта результирующая должна уравниваться разностью сил, зависящих от радиальных напряжений, т. е. силой

$$\frac{d}{dr} [\pi(rda)^2 \sigma_r] dr.$$

Отсюда получается условие равновесия

$$2r\sigma_t = \frac{d}{dr} (r^3 \sigma_r). \quad (7)$$

Если сюда вставить выражения σ_r и σ_t из формул (6), то после простых вычислений, при которых коэффициент Пуассона сократится, мы получим дифференциальное уравнение для ρ

$$r^2 \frac{d^2 \rho}{dr^2} + 2r \frac{d\rho}{dr} - 2\rho = 0, \quad (8)$$

которое имеет место в пределах от $r=a$ до $r=\infty$. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\rho = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}; \quad (9)$$

здесь постоянную интегрирования C_1 в рассматриваемой задаче мы должны положить равной нулю, для того чтобы ρ обращалось в нуль

при $r = \infty$ ¹⁾. Другая постоянная интегрирования C_2 определится из условия, что при $r = a$ величина ρ должна совпасть со значением $\Delta\alpha$ по формуле (5). Поэтому во всех точках, расположенных вне нагретого шара, мы получим для ρ выражение

$$\rho = \frac{a^3}{r^2} \left(at - \frac{m-2}{mE} p \right).$$

Далее, первая из формул (6) нам дает:

$$\sigma_r = -\frac{2\lambda^3}{r^3} \cdot \frac{mE}{m+1} \left(at - \frac{m-2}{mE} p \right).$$

Но при $r = a$ мы должны иметь $\sigma_r = -p$, что и дает нам оставшееся до сих пор не известным давление p :

$$p = \frac{2m}{3(m-1)} Eat. \quad (10)$$

Таким образом после окончательных вычислений для рассматриваемого деформированного и напряженного состояния получается следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{m+1}{3(m-1)} \cdot \frac{a^3}{r^2} \cdot at, \\ \sigma_r &= -\frac{m}{3(m-1)} \cdot \frac{2\lambda^3}{r^3} \cdot Eat, \\ \sigma_t &= \frac{m}{3(m-1)} \cdot \frac{a^3}{r^3} \cdot Eat, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

для значений r от $r = a$ до $r = \infty$.

Вычислим еще работу деформации A всего тела. По формуле (55) из § 5 удельная работа деформации A в рассматриваемом случае выразится следующей формулой:

$$A = G \left[\epsilon_r^2 + 2\epsilon_t^2 + \frac{(\epsilon_r + 2\epsilon_t)^2}{m-2} \right].$$

В пределах шара радиуса a величины ϵ_r и ϵ_t одинаковы, а именно:

$$\epsilon_r = \epsilon_t = -\frac{m-2}{mE} p = -\frac{2(m-2)}{3(m-1)} at,$$

и потому в этих точках мы будем иметь:

$$A = \frac{4(m+1)(m-2)}{3(m-1)^2} G a^3 t^2.$$

1) Принимая, что решение, полученное для бесконечно большого тела, внутри которого находится нагретый шар, будет с практически достаточной точностью справедливо и для просто большого тела. *Прим. ред.*

Таким образом для работы деформации A_1 шара мы получим выражение:

$$A_1 = \frac{4\pi a^3}{3} A = \frac{16(m+1)(m-2)}{9(m-1)^2} \pi a^3 \cdot G \alpha^2 t^3.$$

Вне шара мы будем иметь формулы:

$$\epsilon_r = \frac{dr}{r} = -2 \frac{m+1}{3(m-1)} \cdot \frac{a^3}{r^3} \alpha t,$$

$$\epsilon_t = \frac{r}{r} = + \frac{m+1}{3(m-1)} \cdot \frac{a^3}{r^3} \alpha t,$$

$$e = \epsilon_r + 2\epsilon_t = 0; \quad A = 6G \frac{(m+1)^2}{9(m-1)^2} \cdot \frac{a^6}{r^6} \alpha^2 t^3.$$

Если вставить эти значения и проинтегрировать по всему объему в пределах от $r=a$ до $r=\infty$, то для работы деформации A_2 внешней части тела мы получим выражение:

$$A_2 = 4 \int_a^{\infty} \pi r^2 A dr = \frac{8(m+1)^2}{9(m-1)^2} \pi a^3 G \alpha^2 t^3.$$

Наконец, если для сокращения письма объем шара радиуса a обозначить через V , то для работы деформации A всего тела получится выражение:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2(m+1)}{m-1} V G \alpha^2 t^3. \quad (12)$$

Распределение работы деформации A по всему телу весьма существенно зависит от того, какую величину имеет в каждом отдельном случае величина m , обратная коэффициенту Пуассона. При $m=2$ работа деформации A_1 обращается в нуль, и вся работа деформации будет сосредоточена в наружной части тела. При $m=5$ мы будем иметь $A_1=A_2$, а при $m=\infty$ даже $A_1=2A_2$. При обычно принимаемом значении $m=4$ мы имеем $A_1=0,8A_2$, поэтому при нормальных условиях нужно считать, что работа деформации нагретой части составляет несколько менее половины всей работы деформации, а работа деформации наружной части составляет несколько более половины всей работы деформации.

§ 98. Общее решение задачи об определении температурных напряжений в бесконечно большом теле.

Хотя формулы (11) относятся лишь к тому случаю, когда причиной возникновения температурных напряжений является лишь одно нагретое место («кисточник»), тем не менее путем простого сложения найденных напряжений с напряжениями, создаваемыми другими источниками и вычисляемыми по тем же формулам, найденное решение легко обобщить и на случай тела с любым распределением температур. При этом мы сохраним лишь существенное предположение, что тело можно считать бесконечно большим и что изменения температуры, вызывающие деформации, происходят внутри тела на достаточном расстоянии от поверхности его.

Рассмотрим элемент объема $dv = da db dc$, температура которого пусть повысилась на t^0 ; найдем напряжения, получающиеся вследствие этого повышения температуры. Очевидно, что на больших расстояниях от dv форма элемента, имеющего во всех направлениях бесконечно малые размеры, роли не играет, и потому для напряжений, созданных этим источником, мы по формулам (11) получим выражения:

$$\sigma_t = \frac{m}{4\pi(m-1)} Ea \cdot \frac{t^0 v}{r^3}; \quad \sigma_r = -2\sigma_t, \tag{13}$$

причем эти формулы имеют место во всех точках, находящихся на таком расстоянии от dv , которое в сравнении с размерами dv можно считать бесконечно большим.

Характерная особенность этого напряженного состояния заключается в том, что при нем во всех точках $\sigma_r = -2\sigma_t$; посмотрим, какие дальнейшие следствия можно еще вывести. Для этой цели мы обратимся к общей теории, изложенной в первой главе, а именно, обратимся к формулам (11) и (12) § 1. Согласно этим формулам для элементарной площадки, положение которой определяется косинусами r_1, r_2, r_3 , мы имеем:

$$\begin{aligned} \sigma &= r_1^2 \sigma_x + r_2^2 \sigma_y + r_3^2 \sigma_z, \\ \tau_x &= e_1 r_1 \sigma_x + e_2 r_2 \sigma_y + e_3 r_3 \sigma_z, \end{aligned}$$

если под $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ понимать главные напряжения рассматриваемого напряженного состояния. В нашем случае мы согласно формулам (13) этого параграфа должны положить:

$$\tau_x = -2\sigma_t \quad \text{и} \quad \sigma_y = \sigma_z = \sigma_t.$$

Таким образом получается:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_t (r_2^2 + r_3^2 - 2r_1^2), \\ \tau_x &= \sigma_t (e_2 r_2 + e_3 r_3 - 2e_1 r_1). \end{aligned}$$

Но между косинусами e_1, r_1 и т. д. существуют зависимости [см. формулу (7) в § 1]:

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 &= 1, \\ e_1 r_1 + e_2 r_2 + e_3 r_3 &= 0, \end{aligned}$$

и, таким образом, предыдущие формулы переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= (1 - 3r_1^2) \sigma_t, \\ \tau_x &= -3e_1 r_1 \sigma_t. \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Обозначения, примененные раньше в § 1 и использованные нами здесь, для дальнейшего применения неудобны, а потому формулы (14) мы перепишем в других обозначениях, предотвращающих возможность путаницы и лучше подходящих для той цели, какую мы здесь преследуем.

Пусть в прямоугольной системе координат x, y, z , не имеющей ничего общего с предыдущей, a, b, c будут координаты элемента объема $d\tau = da db dc$, а x, y, z — координаты точки пространства, для которой мы хотим найти напряжения. Пусть буква r обозначает расстояние между обеими точками, т. е.

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

как, впрочем, это уже было в формулах (13).

Радиус-вектор r , проведенный из точки a, b, c в точку x, y, z и продолженный в том же направлении, образует с положительными направлениями осей координат x, y, z углы, которые мы обозначим через α, β, γ и которые выражаются следующими формулами:

$$\cos \alpha = \frac{x-a}{r};$$

$$\cos \beta = \frac{y-b}{r};$$

$$\cos \gamma = \frac{z-c}{r}.$$

Чтобы при помощи формул (14) определить напряжения $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ для площадки, перпендикулярной к оси x , мы вместо r_1 теперь напишем $\cos \alpha$, а вместо e_1 , которое войдет в формулу для τ_{xy} , применим новое обозначение $\cos \beta$. Аналогично поступим и с обозначениями величин, входящих в другие напряжения; в результате мы при новых обозначениях, исходя из формул (14), получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (1 - 3 \cos^2 \alpha) \sigma_i; \\ \sigma_y &= (1 - 3 \cos^2 \beta) \sigma_i; \\ \sigma_z &= (1 - 3 \cos^2 \gamma) \sigma_i; \\ \tau_{xy} &= -3 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sigma_i; \\ \tau_{yz} &= -3 \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \sigma_i; \\ \tau_{zx} &= -3 \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sigma_i. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В эти формулы нужно затем вместо σ_i вставить выражение, даваемое формулой (13).

Пока эти формулы относятся лишь к напряженному состоянию, создаваемому изменением температуры в элементе объема $d\tau$. Но все напряжения, создаваемые другими причинами, будут складываться с этими, не влияя друг на друга. После суммирования по всем элементам объема тела, в которых произошло изменение температуры, мы получим, например, для σ_x и τ_{xy} выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{m}{4\pi(m-1)} E\alpha \int \frac{t}{r^3} \left[1 - 3 \frac{(x-a)^2}{r^2} \right] da db dc, \\ \tau_{xy} &= -3 \frac{m}{4\pi(m-1)} E\alpha \int \frac{t(x-a)(y-b)}{r^3} da db dc \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и аналогичные выражения для других напряжений.

Но выражение для σ_x , стоящее выше, действительно лишь для точки тела, в которой температура не изменилась, потому что при выводе исходной формулы (13) было предположено, что точка x, y, z расположена на достаточно большом расстоянии от нагретого места. В общем же случае, когда температура изменяется и вблизи рассматриваемой точки, мы должны положить¹⁾:

$$\sigma_x = -\frac{2m}{3(m-1)} E \alpha t(x, y, z) + \frac{m}{4\pi(m-1)} E \alpha \int \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5} t(a, b, c) da db dc, (17)$$

где интегрирование производится по всему объему тела, за исключением объема небольшого шара, окружающего точку с координатами x, y, z . При этом безразлично, какой величины радиус этого небольшого шара взять, лишь бы он оставался в пределах, при которых температура заметно не изменяется. Если температура $t(a, b, c)$ постоянна, то выключение малого шара не отразится на величине интеграла по всему объему. Чтобы показать это, возьмем центр этого малого шара за начало координат, тогда мы будем иметь:

$$\int \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5} da db dc = \int \frac{r^2 - 3a^2}{r^5} da db dc = 0.$$

Это следует из того, что по причине симметрии

$$\int \frac{r^2 - 3a^2}{r^5} dv = \int \frac{r^2 - 3b^2}{r^5} dv = \int \frac{r^2 - 3c^2}{r^5} dv,$$

а сумма этих трех интегралов действительно дает нуль.

Формулы для касательных напряжений τ_{xy} и т. д. при повышении температуры в непосредственной близости к рассматриваемой точке вообще не изменятся, в предположении, конечно, что температура изменяется при переходе от одной точки к другой без скачков. Вследствие теплопроводности тела возможность скачков в распределении температуры можно считать, впрочем, исключенной. То же предположение положено в основу вывода формулы (17).

§ 99. Замечания к предыдущему решению.

Формулы, написанные выше, являются точными для тела, простирающегося во все стороны в бесконечность, в предположении, что изменения температуры, создающие рассматриваемое напряженное состояние, происходят лишь на конечном расстоянии от начала координат, а не в бесконечности. Следовательно, в приложениях все написанные формулы будут давать лишь приближенные значения.

Первое предположение, которое приходится допускать, применяя формулы, выведенные для тела с бесконечными размерами, само по себе

1) Эту формулу можно получить, складывая алгебраически местные сжимающие напряжения от местного нагрева (выделяя бесконечно малый шар с центром x, y, z подобно тому, как это делается в теории потенциала), выражаемые формулой (10), взятой с обратным знаком, на основании сказанного на стр. 261, с напряжениями σ_e по формуле (16). *Прим. ред.*

еще терпимо, так как погрешности, вводимые при этом, обычно сглаживаются тем, что напряжения уменьшаются пропорционально третьей степени расстояния от точки с изменяющейся температурой, так что напряжения могут иметь значительную величину вообще лишь вблизи точек с измененной температурой.

Но иначе обстоит дело со вторым предположением, что центр температурного возмущения расположен не слишком близко к поверхности тела, так как при обычно встречающихся случаях теплота проникает внутрь тела именно с поверхности его. Здесь безусловно необходимо развить изложенную теорию в соответствующем направлении. Но мы в данный момент ограничимся лишь общим описанием пути, идя которым это можно сделать.

Рассмотрим снова небольшой шар, который можно принять за элемент объема, нагретый на t^0 . Если он расположен внутри бесконечного тела, то возникнут напряжения, определенные выше. Проведем через центр шара секущую плоскость и удалим половину всего тела, расположенную по одну сторону плоскости. Для сохранения в оставшейся половине тела первоначального напряженного состояния по плоскости сечения придется приложить внешние силы, заменяющие напряжения σ , действовавшие ранее на этой плоскости. В пределах шара напряжения, действующие на эту плоскость, будут сжимающими напряжениями p , определяемыми по формуле (10) и равномерно распределенными по указанной площади, а вне шара они будут растягивающими напряжениями σ , которые можно вычислить по третьей из формул (11). Согласно этой формуле напряжения уменьшаются пропорционально третьей степени расстояния от центра шара, и потому в направлении наружу они быстро уничтожаются. Поэтому все эти растягивающие и сжимающие силы образуют вместе систему уравновешивающихся сил, действие которых можно заметить лишь на расстояниях, не намного превосходящих диаметр шара.

В теории деформации тел вращения, изложенной в § 87, мы показали, как можно определить напряжения, создаваемые такой системой сил; этим мы здесь и воспользуемся. После того как эти напряжения будут определены, их нужно будет вычесть из напряжений, вызванных в бесконечном теле изменениями температуры и существовавших в нем до сечения тела плоскостью. Полученные разности дадут температурные напряжения, создаваемые нагреванием элемента поверхности в теле, ограниченном плоскостью. Таким образом нами намечен, по крайней мере, первый шаг на том пути, которым нужно идти при дальнейшем развитии теории.

Заметим, что частично примененный, частично намеченный способ определения температурных напряжений имеет не только самостоятельное значение, но что он одновременно дает пример, которым вообще можно пользоваться при определении собственных напряжений независимо от их происхождения. В частности можно ожидать, что усадочные напряжения в отливках подчиняются законам, совершенно аналогичным тем, которым подчиняются температурные напряжения, так как и причины возникновения их совершенно аналогичны.

При затвердевании отливки расплавленная масса будет стремиться вытекать из формы. Если отвердение и охлаждение наружной поверхности

будут препятствовать этому вытеканию, то возникнут напряжения, имеющие характер, совершенно аналогичный рассмотренному выше. В этом случае источник возникновения напряжений расположен внутри тела, так что можно сразу воспользоваться формулами, выведенными в предыдущем параграфе. Конечно, мы здесь имеем значительное отступление от прежних предположений, именно, при температуре, не очень отличающейся от температуры плавления, затвердевшие наружные слои не будут подчиняться закону Гука. Все же после полного охлаждения отливки напряжения, получившиеся в ней, будут иметь такой же характер и будут подчинены таким же законам, как и температурные напряжения, которые могут быть вызваны в теле такой же формы, первоначально не имевшем никаких напряжений, путем нагревания разных мест до соответствующих температур, разных в различных точках. Знание такой зависимости во многих случаях может помочь выяснению часто довольно трудных вопросов.

Здесь мы приходим к одному вопросу принципиального значения, о котором нам придется еще упомянуть, именно, нужно еще выяснить, возможно ли по существу дела при всяких условиях получить любое наперед заданное в данном теле распределение собственных напряжений путем наложения напряжений, вызванных изменением температуры в надлежащим образом выбранных точках. Заранее нельзя дать на этот вопрос утвердительный ответ или считать решение этого вопроса очевидным, так как вполне допустимо предположение, что напряжения, существующие в ненагруженном теле, можно разбить на два класса так, что напряжения, относящиеся к одному классу, могут быть вызваны только изменениями температуры, а другие нет. Здесь мы имели бы, возможно, разницу, аналогичную той, которую имеем в теории силовых полей между безвихревыми и вихревыми полями. Этот вопрос мы оставляем открытым. Но как бы ни был решен этот вопрос, во всяком случае нужно в первую очередь заняться изучением характера распределения температурных напряжений.

Практическое применение закономерностей, выведенных для температурных напряжений, а также дальнейших следствий из них, будет заключаться в попытках объяснить ряд определенных вопросов, к которым может привести опыт или планомерные наблюдения, совместным действием небольшого числа источников возмущений. Соответствующие напряжения можно вычислить по приведенным выше формулам и указаниям без труда, во всяком случае это можно сделать хотя бы приближенно. Первый шаг для объяснения трудного и упирающегося в неисследованную область вопроса должен как раз заключаться в том, чтобы принять какое-либо положение, не противоречащее общим законам механики и связывающее разные явления и затем вывести из него дальнейшие следствия. Только обладание каким-либо приемлемым ориентировочным объяснением процесса может привести к критическому разбору результатов наблюдений и к более детальному сравнению их. Такой путь может навести на мысль поставить ряд новых опытов, результаты которых в свою очередь могут дать представление о том, как нужно изменить первоначальные взгляды, чтобы получить лучшее совпадение с действительностью.

§ 100. Температурные напряжения в телах вращения.

Чтобы применить общее решение, данное в § 98, нужно сделать определенное предположение относительно формы тела, в котором имеются температурные напряжения, и о характере нагревания, вызвавшего их. Во многих случаях, когда требуется точное знание температурных напряжений, мы имеем дело с телами вращения и с напряжениями, вызванными изменениями температурного режима, симметричными относительно оси. При этих условиях, очевидно, и температурные напряжения будут иметь осевую симметрию, и потому мы можем воспользоваться теорией, изложенной в седьмой главе.

Сперва мы займемся вопросом, как можно обобщить на случай тела, имеющего температурные напряжения, общие формулы, выведенные в § 80 для тел вращения.

Прежде всего вместо формул (5) § 80, выражающих связь между удлинениями ϵ и упругими перемещениями ξ и ρ , мы должны положить здесь

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} - at, \\ \epsilon_r &= \frac{\partial \rho}{\partial r} - at, \\ \epsilon_t &= \frac{\rho}{r} - at, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

так что и под ϵ мы должны понимать лишь упругую часть полного удлинения или ту часть, которая связана с напряжениями законом Гука. Далее из этих формул вытекает

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + D\rho - 3at, \quad (19)$$

если применить оператор D в указанном прежде смысле [формула (7) § 80]. Выражения для углов сдвига γ от изменения температурного режима здесь не изменятся. Таким образом вместо формул (8) в § 80 мы теперь получим следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{m-1}{m-2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{m-2} D\rho - \frac{m+1}{m-2} at \right), \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{1}{m-2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{m-2} \frac{\rho}{r} - \frac{m+1}{m-2} at \right), \\ \sigma_t &= 2G \left(\frac{1}{m-2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{m-2} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{m-1}{m-2} \frac{\rho}{r} - \frac{m+1}{m-2} at \right), \\ \tau &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Если эти выражения вставить в условия равновесия (4) § 80, связывающие напряжения, то мы получим основные уравнения упругого равновесия, которые должны заменить формулы (9) и (10) § 80 в случае

существования температурных напряжений. После простого преобразования они будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{m-2}{2(m-1)} \cdot D \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{m}{2(m-1)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} D \rho - \frac{m+1}{m-1} \alpha \frac{\partial t}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} D \rho + \frac{m-2}{2(m-1)} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial \xi}{\partial r \partial x} - \frac{m+1}{m-1} \alpha \frac{\partial t}{\partial r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В зависимости от постановки задачи температура или задается непосредственно в виде функции от x и r , или же она определяется из других условий по законам теплопроводности, данным Фурье. Но во всяком случае это определение производится совершенно независимо от определения напряжений, и мы будем считать, что температура уже определена, так что в дальнейшем под t нужно понимать известную функцию от x и r . При постоянном t формулы (21) снова переходят в формулы (9) и (10), данные в § 80, как и должно быть.

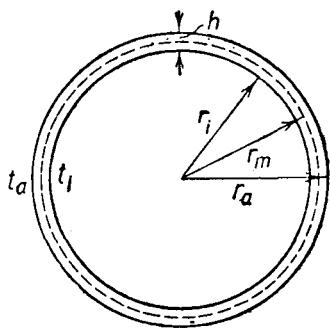
Общее решение уравнений (21) можно, конечно, найти так же, как оно найдено и в седьмой главе. Но мы вынуждены будем ограничиться рассмотрением лишь некоторых случаев, заслуживающих внимания. Один случай такого рода, особенно важный для практического применения, мы и рассмотрим в следующем параграфе.

§ 101. Температурные напряжения в тонкостенной трубе.

Обозначим внутренний радиус трубы через r_i , наружный через r_a и радиус средней окружности, делящей толщину стенки h пополам, через r_m , как это показано на чертеже поперечного сечения на фиг. 121. Температуры t_i на внутренней и t_a на наружной поверхностях мы будем считать заданными; тогда температура в какой-либо точке, имеющей радиус r , на основании закона теплопроводности будет выражаться логарифмической функцией от r . Но так как мы предполагаем, что труба тонкостенная, то можно с достаточной точностью считать t за линейную функцию от r , и для простоты мы и будем из этого исходить. Тогда температура t_m по середине толщины стенки будет равна арифметическому среднему из t_i и t_a , а в какой-либо другой точке стенки трубы мы будем иметь для температуры формулу:

$$t = t_m + \frac{2(r - r_m)}{h} (t_a - t_m). \quad (22)$$

В общем случае t_m и t_a могли бы еще зависеть и от x , следовательно, они в разных сечениях могли бы иметь разные величины. Но мы сейчас ограничимся исследованием простейшего случая, когда t не зависит от x .



Фиг. 121.

Чтобы прийти к простому и одновременно к практически важному решению основных уравнений (21), рассмотрим случай, когда одновременно можно положить

$$\xi = k_0 + k_1 x \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

где под k_0 и k_1 нужно понимать две постоянные величины.

Эти выражения удовлетворяют первому из основных уравнений (21), потому что каждый член этого уравнения обращается в нуль. Второе же основное уравнение переходит в следующее:

$$\frac{\partial}{\partial r} D\rho - \frac{m+1}{m-1} \alpha \cdot \frac{2(t_a - t_m)}{h} = 0.$$

Если вспомнить значение оператора D и переписать это уравнение подробнее, то мы получим:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\rho}{r^2} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{2\alpha(t_a - t_m)}{h} = K,$$

где для сокращения письма постоянную и считаемую известной величину в правой части уравнения мы обозначили буквой K .

Это дифференциальное уравнение имеет общее решение

$$\rho = \frac{1}{3} K r^3 + A r + \frac{B}{r}, \quad (24)$$

где A и B обозначают постоянные интегрирования.

Для напряжений, соответствующих этому решению, по формулам (20) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{m-2} \left\{ (m-1) k_1 + K r + 2A - (m+1) \alpha t \right\}, \\ \sigma_r &= \frac{2G}{m-2} \left\{ k_1 + \frac{2m-1}{3} K r + mA - (m-2) \frac{B}{r^2} - (m+1) \alpha t \right\}, \\ \sigma_t &= \frac{2G}{m-2} \left\{ k_1 + \frac{m+1}{3} K r + mA + (m-2) \frac{B}{r^2} - (m+1) \alpha t \right\}, \\ \tau &= 0. \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования мы располагаем условиями, что при $r=r_i$ и $r=r_a$ напряжение σ_r должно обращаться в нуль. В частности мы, таким образом, получим:

$$B = \alpha (t_a - t_m) \cdot \frac{m+1}{3(m-1)} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r_m h}.$$

В этом выражении нельзя полагать, как это казалось бы естественным, $r_a r_i = r_m^2$, а нужно сохранить его в том виде, в каком оно написано выше. Иначе напряжение σ_r получилось бы равным нулю. Почти такую картину мы и имеем в действительности, но погрешность, которую при

такой замене делают, хотя и не сказывается на значении самого напряжения σ_r , все же при дальнейших вычислениях влияет на σ_t столь сильно, что это может привести к совершенно неправильным заключениям.

Лучше всего вычислить σ_t , определив сперва значение $\sigma_t - \sigma_r$, для которого мы, пользуясь выражениями, написанными выше, получим:

$$\sigma_t - \sigma_r = 2G \left(\frac{2B}{r^2} - \frac{K'}{3} \right).$$

Так как на внутреннем контуре σ_r обращается в нуль, то после подстановки вместо K' и B их значений мы для точек внутреннего контура получим:

$$\sigma_t = 2G \frac{m+1}{3(m-1)} \alpha (t_a - t_m) \cdot \frac{2}{h} \left(\frac{r_a^2}{r_m} - r_i \right).$$

После подстановки выражений $r_a = r_m + \frac{1}{2}h$ и $r_i = r_m - \frac{1}{2}h$ эта формула перейдет в следующую:

$$\sigma_t = 2G \frac{m+1}{3(m-1)} \alpha (t_a - t_m) \left(3 + \frac{h}{2r_m} \right),$$

или, наконец, с достаточной точностью можно принять:

$$\sigma_t = 2G \frac{m+1}{m-1} \alpha (t_a - t_m). \quad (25)$$

Таким же образом можно вычислить напряжение σ_t , полагая $r = r_a$, т. е. у наружной поверхности стенки трубы; мы найдем там напряжение такой же величины, но с противоположным знаком.

Чтобы вычислить при $r = r_i$ напряжение σ_x , исключим сперва из формулы для σ_x , написанной выше, постоянную A , пользуясь условием, что при $r = r_i$ радиальное напряжение σ_r должно обратиться в нуль. Тогда после простых преобразований мы с той же точностью, как и в случае σ_t , найдем:

$$\sigma_x = 2G \frac{m+1}{m} (k_1 - \alpha t_m) + 2G \frac{m+1}{m-1} \alpha (t_a - t_m),$$

и точно так же при $r = r_a$

$$\sigma_x = 2G \frac{m+1}{m} (k_1 - \alpha t_m) - 2G \frac{m+1}{m-1} \alpha (t_a - t_m).$$

Мы предположим, что концы трубы ни на что не опираются или же опираются так, что они при нагревании могут расширяться свободно. Тогда в случае равномерного нагревания, т. е. при $t_a = t_m$, напряжение σ_x обратится всюду в нуль, что для постоянной k_1 , введенной в формулу (23), даст нам выражение:

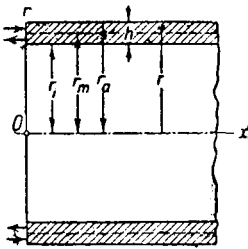
$$k_1 = \alpha t_m.$$

Таким образом при $r=r_i$ мы получим:

$$\sigma_x = 2G \frac{m+1}{m-1} \alpha (t_a - t_m), \quad (26)$$

и такое же значение, но с противоположным знаком, мы получим для наружной поверхности. Сравнение с формулой (25) показывает, что σ_x и σ_t совпадают всюду как по величине, так и по знаку.

Чтобы найденное решение всегда имело место, необходимо, чтобы на свободных концевых сечениях были приложены растягивающие и сжимающие внешние силы, соответствующие только что вычисленным нормальным напряжениям σ_x . На фиг. 122, изображающей осевое сечение трубы вблизи



Фиг. 122.

одного из концов ее, направления этих внешних сил, действующих на концевое сечение, указаны стрелками. Здесь предположено, что $t_a > t_m$, т. е. что труба нагрета снаружи. Если же труба имеет внутри более высокую температуру, чем снаружи, то направления стрелок нужно изменить на обратные.

В пределах той точности, которой мы до сих пор довольствовались, напряжения σ_x и соответствующие им внешние силы, действующие на концевое сечение, будут распределены по толщине стенки h по закону прямой линии, так что по середине толщины стенки они будут равны нулю.

Отсюда вытекает, что в пределах той же точности сумму растягивающих внешних сил, действующих на концевое сечение, можно приравнять сумме сжимающих внешних сил, так что все внешние силы, действующие на концевое сечение, образуют уравновешенную систему сил в смысле статики абсолютно твердого тела.

Решение, которое мы теперь имеем, не соответствует, однако, тому случаю, для которого мы должны найти решение. Именно, обычно конец трубы, для которой нужно определить температурные напряжения, внешними силами не нагружен; решение для этого случая нам и нужно еще найти. Но это можно сделать, основываясь на решении, уже найденном нами. Для этого к рассматриваемому напряженному состоянию добавим другое, создаваемое силами, приложенными к концам трубы и имеющими направление, противоположное тому направлению, которое имели остаточные температурные напряжения. Тогда при сложении решений напряжения по торцам трубы, происходящие от внешних сил, и остаточные температурные взаимно уничтожаются, и у нас останутся лишь температурные напряжения в ненагруженной трубе.

Прежде чем перейти ко второй части задачи, мы должны еще указать, что уже найденное решение для температурных напряжений можно считать достаточно точным во всех точках ненагруженной трубы, удаленных от конца ее на достаточное расстояние. Это вытекает из принципа Сен-Венана, согласно которому сконцентрированная в одном месте система уравновешенных внешних сил, приложенных к телу больших размеров, может оказать значительное

действие лишь вблизи места приложения их, а на больших расстояниях от него влияние этих внешних сил быстро уменьшается и скоро делается совсем незаметным. Точное исследование, которым мы сейчас займемся, подтвердит это заключение и в рассматриваемом случае, а кроме того, покажет, какие отклонения от предыдущих формул получатся для напряжений вблизи концов трубы.

Конечно, найти совершенно точные формулы для напряжений и деформаций, создаваемых одними внешними силами, приложенными к концам трубы, нелегко. Но они нам и не нужны и, по крайней мере, для практических целей являются совершенно лишними. Мы можем разными способами при помощи упрощающих предположений притти к хорошим приближенным формулам с достаточной гарантией за удовлетворительную точность.

Когда А. Фепплъ в первый раз занялся этим вопросом, то он нашел приближенное решение на основании сравнения рассматриваемой задачи с известной из элементарного курса сопротивления материалов теорией изгиба балки, лежащей на упругом основании (теория верхнего строения железнодорожного пути), и поместил это решение в пятом томе своего курса «Технической механики» («Vorlesungen...»). Здесь мы выберем другой путь, который, однако, приведет к совершенно аналогичным результатам.

Именно, сперва мы зададимся, как это уже часто делали в этой книге, напряжениями, строго удовлетворяющими всем требованиям статики для рассматриваемого случая нагрузки и одновременно условию, чтобы напряжения с увеличением расстояния от нагруженного конца трубы быстро уменьшались. Формулы для этих напряжений мы возьмем наиболее простыми, но так, чтобы в них входили два параметра. Тогда определение этих параметров на основании теоремы о минимуме энергии деформации будет нам гарантировать, что полученное решение не может дать напряжений, слишком отличающихся от действительных.

Вспомним те уравнения равновесия, которые связывают напряжения, действующие на элемент объема, и которые были нами составлены в седьмой главе; перепишем их теперь еще раз в форме уравнений (4) § 80.

Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(r\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\tau)}{\partial x} - \sigma_t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Начало координат O мы поместим в центре начального сечения трубы, как это уже было сделано на фиг. 122. В сечении $x=0$ в точках $r=r_1$ и $r=r_2$ мы для σ_x должны принять значения, даваемые формулой (26), но с заменой знака на обратный, так как нам нужно исследовать действие нагрузки, находящейся в равновесии с прежней и потому уничтожающей ее. В соответствии с этим мы сперва положим:

$$r\sigma_x = f(r) e^{-\tau x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x), \quad (28)$$

где $f(r)$ обозначает подлежащую определению функцию от r , которая во всяком случае при $x=0$, $r=r_i$ и $r=r_a$ должна удовлетворять только что формулированным условиям. Под γ нужно понимать параметр.

Тогда первое из уравнений (27) нам дает:

$$\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = -2\gamma e^{-\gamma x} \sin \gamma x \cdot f(r),$$

откуда путем интегрирования мы получим

$$r\tau = -2\gamma e^{-\gamma x} \sin \gamma x \int f(r) dr + X.$$

Хотя постоянная интегрирования X и является постоянной по отношению к r , но она может еще зависеть и от x . Так как, однако, в сечении $x=0$ внешние касательные силы не действуют и первый член предыдущего выражения при $x=0$ сам собою обращается в нуль, то, для того чтобы удовлетворялось рассматриваемое граничное условие, мы при $x=0$ должны также положить и $X=0$. Однако вообще на величина X не нужна вовсе, поэтому мы можем ее в рассматриваемом выражении совсем вычеркнуть.

Далее, при любом значении x и при $r=r_i$ и $r=r_a$ напряжение τ должно обращаться в нуль, так как наружная и внутренняя поверхности трубы должны оставаться ненагруженными. Чтобы удовлетворить этим граничным условиям, мы теперь положим:

$$r\tau = Kr(r^3 - 2rr_m + r_i r_a) 2\gamma e^{-\gamma x} \sin \gamma x. \quad (29)$$

Таким образом функцию $f(r)$, оставшуюся до сих пор неопределенной, мы подчиним условиям нашей задачи, если положим:

$$\int f(r) dr = -K(r^3 - 2r^2 r_m + r_i r_a r).$$

Отсюда путем дифференцирования мы получим также и самую функцию $f(r)$, а для σ_x мы вместо формулы (28) получим:

$$\sigma_x = -K \left(3r - 4r_m + \frac{r_i r_a}{r} \right) e^{-\gamma x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x). \quad (30)$$

Отсюда для сечения $x=0$ мы получим:

$$(\sigma_x)_{r=r_i} = -K(3r_i - 4r_m + r_a) = +Kh,$$

$$(\sigma_x)_{r=r_a} = -K(3r_a - 4r_m + r_i) = -Kh.$$

Эти формулы нам показывают, что граничные условия действительно будут удовлетворяться, если под K понимать заданное нам постоянное значение

$$K = -2G \frac{m+1}{m-1} a \frac{t_a - t_m}{h}. \quad (31)$$

Изменение знака в сравнении с формулой (26) было обосновано при составлении формулы (28).

Теперь зададимся еще подходящими выражениями для σ_r и σ_t , которые во всяком случае должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялось второе из уравнений (27). Кроме того, нужно иметь в виду, что как на наружной, так и на внутренней поверхности трубы напряжение τ , должно обращаться в нуль. Для этой цели мы аналогично тому, как раньше в случае τ , положим:

$$\sigma_r = C(r^2 - 2rr_m + r_i r_a) e^{-\gamma x} (\cos \gamma x - \sin \gamma x), \quad (32)$$

где C обозначает новый параметр. Уравнения (27) будут удовлетворяться, если мы положим:

$$\sigma_t = \left\{ C(3r^2 - 4rr_m + r_i r_a) - 2\gamma^2 \left\{ (r^2 - 2r^2 r_m + r_i r_a r) \right\} \right\} e^{-\gamma x} (\cos \gamma x - \sin \gamma x). \quad (33)$$

Так как выражения всех напряжений содержат множитель $e^{-\gamma x}$ и потому при $x = \infty$ обращаются в нуль, то все граничные условия будут удовлетворены, если труба имеет столь большую длину, что ее можно считать бесконечно большой. Точно так же и условия равновесия будут выполнены для каждого элемента, а потому будут выполнены все требования статики, которые мы можем предъявить к искомому решению. Принятые нами формулы содержат два параметра γ и C , и нам остается лишь определить их таким образом, чтобы по возможности были удовлетворены все требования, обусловленные упругими свойствами тела.

Общее выражение для удельной работы упругих сил A в теле вращения мы уже составили в седьмой главе, формула (25) § 81. Оно имело вид:

$$A = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{2} (\tau_x^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2) - \frac{1}{2(m+1)} (\tau_x + \sigma_r + \sigma_t)^2 + \tau^2 \right\}.$$

В это выражение нужно подставить уже написанные значения напряжений, после чего нужно проинтегрировать по всей стенке трубы в пределах от $x = 0$ до $x = \infty$. Это приводит к очень сложным вычислениям, и потому мы подумаем, нельзя ли эти вычисления без ущерба для дела сократить.

Это действительно можно сделать на основании того соображения, что напряжения τ и τ в среднем, очевидно, значительно меньше обоих других напряжений σ_x и σ_t . Именно, на внутренней и наружной поверхностях трубы τ и τ должны обращаться в нуль, и потому они должны изменяться с увеличением или уменьшением r быстро, в то время как изменение σ_x при изменении x , очевидно, должно происходить много медленнее. Из рассмотрения дифференциальных уравнений (27) можно убедиться в том, что τ_x и σ_t должны принимать значительно большие значения, чем τ_r и τ . Кроме того, это подтверждается также и принятыми нами формулами для напряжений, так как можно наперед ожидать, что $\frac{1}{\gamma}$ получится значительно выше, чем толщина h

стенки у тонкостенной трубы. Таким образом в выражении работы упругих сил напряжения σ_r и τ можно вычеркнуть с таким же правом, с каким мы вычеркиваем касательные напряжения при определении работы упругих сил изогнутой балки.

Кого такое доказательство не удовлетворяет, тот может, конечно, от соответствующего упрощения вычислений отказаться. Действительно, затратив большое количество труда, мы могли бы получить и более точные результаты. Но для нас очень высокая точность формул здесь не имеет значения; важнее для нас возможно большая наглядность хода вычислений, а последняя лучше всего достигается путем упрощения, связанного с вычеркиванием в выражении удельной работы упругих сил Λ напряжений σ_r и τ .

Таким образом для работы упругих сил A всей стенки трубы мы получим выражение:

$$A = 2\pi \int_0^{\infty} dx \int_{r_i}^{r_a} r \Lambda dr = \frac{\pi m}{2G(m+1)} \int_0^{\infty} dx \int_{r_i}^{r_a} r (\sigma_x^2 + \sigma_t^2) dr - \frac{\pi}{G(m+1)} \int_0^{\infty} dx \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_x \tau_i dr.$$

При дальнейших вычислениях мы заменим еще выражение σ_x по формуле (30) близким к нему ¹⁾:

$$\sigma_x = 2K(r - r_m) e^{-\gamma x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x), \quad (34)$$

тогда мы получим:

$$\int_{r_i}^{r_a} r \sigma_x^2 dr = \frac{r_m h^3}{12} \cdot 4K^2 e^{-2\gamma x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x)^2 = \frac{r_m h^3}{3} K^2 e^{-2\gamma x} (1 + \sin 2\gamma x).$$

Здесь интегрирование по x выполнить легко, и оно дает следующий результат:

$$\int_0^{\infty} dx \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_x^2 dr = \frac{r_m h^3}{3} K^2 \cdot \frac{3}{4\gamma}.$$

Точно так же мы упростим сперва и выражение σ_t . Для этой цели мы положим:

$$r = r_m + u,$$

так что под u нужно понимать расстояние рассматриваемой точки от срединной поверхности стенки трубы. Так как у тонкостенной трубы величина u всюду в сравнении с r_m мала, то высшими степенями $\frac{u}{r_m}$ можно будет пренебречь. Тогда вместо формулы (33) для σ_t можно с достаточной точностью положить:

$$\sigma_t = \left\{ C \cdot 2r_m u - 2\gamma^2 K r_m \left(u^2 - \frac{h^2}{4} \right) \right\} e^{-\gamma x} (\cos \gamma x - \sin \gamma x). \quad (35)$$

¹⁾ Применяя в выражении для $f(r)$ в формуле (30) указанную ниже подстановку $r = r_m + u$, нетрудно убедиться в том, что $f(r) = -2uK$, т. е. что $f(r) = -2(r - r_m)K$. Прим. ред.

Теперь интегрирование по r переходит в интегрирование по u , которое и дает следующее выражение:

$$\int_{r_1}^a r \sigma_t^2 dr = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (r_m + u) \sigma_t^2 du = \\ = \left\{ \frac{r_m^3 h^3}{3} C^2 + \frac{r_m^2 h^5}{15} \gamma^2 CK + \frac{2r_m^3 h^5}{15} \gamma^4 K^2 \right\} e^{-2\gamma x} (1 - \sin 2\gamma x).$$

Отсюда, интегрируя по x , мы получим:

$$\int_0^\infty dx \int_{r_1}^{r_a} r \sigma_t^2 dr = \frac{1}{4\gamma} \left\{ \frac{r_m^3 h^3}{3} C^2 + \frac{r_m^2 h^5}{15} \gamma^2 CK + \frac{2r_m^3 h^5}{15} \gamma^4 K^2 \right\}.$$

Аналогичным образом получится и следующее равенство:

$$\int_{r_1}^{r_a} r \sigma_x \sigma_t dr = \left\{ \frac{r_m^2 h^3}{3} CK + \frac{r_m h^5}{30} \gamma^2 K^2 \right\} e^{-2\gamma x} \cos 2\gamma x,$$

и, наконец, отсюда получим:

$$\int_0^\infty dx \int_{r_1}^{r_a} r \sigma_x \sigma_t dr = \frac{1}{4\gamma} \left\{ \frac{r_m^2 h^3}{3} CK + \frac{r_m h^5}{30} \gamma^2 K^2 \right\}.$$

Из этих отдельных частей можно получить теперь полное выражение работы упругих сил. Для нее получится следующее выражение:

$$A = \frac{\pi}{G(m+1)} \cdot \frac{r_m h^3}{12} \left\{ \frac{m}{2} \left[\frac{3K^2}{\gamma} + \frac{2}{5} r_m^2 h^2 \gamma^3 K^2 + \frac{r_m^2 C^2}{\gamma} + \frac{r_m h^2}{5} \gamma CK \right] - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{10} \gamma K^2 - \frac{r_m}{\gamma} CK \right\}. \quad (36)$$

Нам остается еще вычислить лишь производные A по C и γ и приравнять их нулю. Таким путем мы получим систему уравнений:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{2r_m^2}{\gamma} C + \frac{r_m h^2}{5} \gamma K \right) - \frac{r_m}{\gamma} K = 0, \\ \frac{m}{2} \left(-\frac{3K^2}{\gamma^2} + \frac{6}{5} r_m^2 h^2 \gamma^3 K^2 - \frac{r_m^2 C^2}{\gamma^2} + \frac{r_m h^2}{5} CK \right) - \frac{h^2}{10} K^2 + \frac{r_m}{\gamma^2} CK = 0.$$

Из первого из этих уравнений получается:

$$C = \frac{K}{r_m} \left(\frac{1}{m} - \frac{h^2 \gamma^2}{10} \right). \quad (37)$$

Если это выражение подставить во второе уравнение, то получится уравнение для определения неизвестной γ , в которое она входит в четвертой степени. Для упрощения величиной h^2 , малой в сравнении с $40r_m^2$, можно пренебречь, и тогда, решив уравнение, мы получим:

$$\gamma^2 = \frac{1}{r_m h} \sqrt{\frac{5(\delta m^2 - 1)}{6m^2}}. \quad (38)$$

Если сюда подставить $m = \infty$, то получим:

$$\gamma = \frac{1,26}{\sqrt{r_m h}};$$

при $m = 4$ или $m = 3$ мы получим значение, лишь незначительно отличающееся от написанного. Отсюда следует, что второй член в скобках в формуле (37) для тонкостенной трубы во всяком случае представляет очень малую дробь. Поэтому при обычных значениях m вторым членом в сравнении с первым можно пренебречь, и тогда мы с достаточной точностью получим такое равенство:

$$C = \frac{1}{m} \frac{K}{r_m}. \quad (39)$$

Выведа эти формулы, мы задачу в сущности решили. Нам нужно лишь вставить γ и C в формулы для напряжений, после чего мы можем вычислить напряжения в любой точке стенки трубы. Вычислять придется лишь σ_x и σ_z , так как σ_r и τ имеют сравнительно незначительную величину, о чем мы уже заключили раньше на основании общих рассуждений и что мы подтвердили впоследствии числовыми расчетами. Переписывать выражение σ_x еще раз необходимости нет, так как в сравнении со значением, определяемым по формуле (26), которая относится ко всем точкам стенки трубы, расположенным на достаточно большом расстоянии от конца трубы, увеличение σ_x от добавления поправочного значения, вычисляемого по формуле (30), нигде не играет большой роли. В сравнении с прежними значениями увеличится значительно лишь напряжение σ_z и притом непосредственно у самого конца трубы.

Формула (25), которая и теперь остается действительной лишь для точек, удаленных от конца трубы, для напряжений σ_z на внутренней поверхности трубы, при подстановке величины K из формулы (31), даст нам выражение

$$\sigma_z = -Kh.$$

На конце трубы к этому еще добавляется величина, вычисляемая по формуле (35) при $x = 0$ и $u = -\frac{h}{2}$, причем в формулу эту нужно вставить еще выражение γ^2 и C из формул (38) и (39). Чтобы избежать путаницы, это добавочное напряжение мы обозначим через σ'_z .

Мы получим для него следующее выражение:

$$\sigma'_t = -Cr_m h = -\frac{1}{m} Kh.$$

Поэтому при $m=4$ повышение наибольшего напряжения, получающегося в удаленных частях трубы, составляет 25%. При $m=3$ этот процент еще увеличивается, но лишь при $m=2$ он поднялся бы до 50%.

В пятом томе своего курса «Технической механики» («Vorlesungen...») А. Феппл, применив приближенную теорию, определил, что повышение напряжения составляет 57%, независимо от величины m ; такая большая цифра получилась там потому, что автор действием поперечного сужения частично пренебрегал и во всяком случае, не подвергал более тщательному исследованию его влияния. Значение для повышения напряжений, найденное здесь, повидимому, заслуживает большего доверия, хотя и его следует считать недостаточно надежным. При первой попытке получения приближенного решения задачи мы делали еще большие упрощения, чем это сделано теперь.

В отношении характера упругих деформаций, который зависит преимущественно от значения постоянной γ , результаты, вычисленные по обеим приближенным теориям, совпадают значительно лучше. Именно, для постоянной, обозначенной в формуле (292) пятого тома «Vorlesungen...» через a , а здесь через γ , мы прежде получили значение

$$\gamma = \frac{1,32}{\sqrt{r_m h}},$$

в то время как теперь вместо 1,32 получилось число 1,26. Таким образом расхождение составляет примерно 5%; отсюда можно вывести заключение, что найденное здесь значение, которое нужно считать обоснованным лучше, по всей вероятности, не слишком сильно будет отличаться от действительного. Деформации, зависящие от поведения всего тела в целом, при помощи приближенной теории могут быть определены точнее, чем напряжения, зависящие только от особенностей поведения тела в весьма ограниченной области его, расположенной вблизи рассматриваемой точки. В этом мы уже убеждались неоднократно и об этом мы подробно говорили при изложении теории пластинок.

Множитель $e^{-\gamma x}$, входящий в формулы для напряжений, от которого зависит постепенное уменьшение добавочных напряжений при удалении от конца трубы, на расстоянии x , равном радиусу трубы r_m , принимает значение

$$e^{-1,26 \cdot \sqrt{\frac{r_m}{h}}}.$$

Этот множитель уменьшается до ничтожного значения, даже если стенки трубы не очень тонки, например, если $r_m=5h$ или $r_m=10h$. Поэтому изменение напряжений, вызываемое тем, что концы трубы становятся

свободными, едва заметно уже на расстоянии $x = r_m$. Таким образом предположение, высказанное ранее на основании принципа Сен-Венана, что влияние сил, действующих на концах трубы, может обнаруживаться лишь вблизи этих концов, оказалось вполне соответствующим действительности также и в этом случае.

После нахождения напряжений можно определить и относительные удлинения ϵ_x , ϵ_r , ϵ_t , а затем по третьей из формул (18) получить также и перемещение ρ , выраженное в зависимости от x , что и определит деформацию трубы вследствие нагревания. От дальнейших вычислений мы здесь вынуждены отказаться.

Для читателя, имеющего желание заняться самостоятельными теоретическими исследованиями, мы укажем, что очень желательно отыскать температурные напряжения, создаваемые в тонкостенной трубе односторонним нагреванием, так как случаи такого рода встречаются часто. Можно было бы рассмотреть случай, когда нагревание происходит вдоль одной из образующих цилиндра или на внутренней или на наружной поверхности, и предположить, что соответствующие температуры в стенке трубы отличаются от средней температуры всего тела лишь вблизи нагретого места. При этом напряжения, возникающие вблизи свободных концов труб, можно не определять, и при таком упрощении решение задачи не должно было бы представить особых затруднений. Другой случай, который желательно рассмотреть, будет тот, когда температура повышена лишь в одной определенной точке на наружной или внутренней поверхности, т. е. температура отличается от средней температуры всего тела лишь в ближайшей окрестности этой точки ¹⁾.

Впрочем, мы имеем здесь в виду лишь приближенные решения по образцу рассмотренных в этом параграфе. С одной стороны, найти точное решение указанных задач было бы слишком трудно, а, с другой стороны, приближенное решение, основанное на теореме о минимуме работы деформации, для практических целей столь же пригодно, как и точное решение.

§ 102. Остаточные напряжения.

Если тело, не имевшее напряжений, будет нагружено так, что будет перейден предел упругости, то после прекращения действия сил останутся в общем случае некоторые собственные напряжения. Деформация тела, получившаяся при этой нагрузке, характеризуется относительными удлинениями ϵ и сдвигами γ ; и те и другие можно разложить на две части: одна часть, которую можно назвать упругой деформацией, сохраняется лишь до тех пор, пока продолжают действовать внешние силы, а другая, которую в противоположность первой мы назовем пластической деформацией, не имеет никакого стремления к исчезновению. Итак, мы положим

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

¹⁾ См. также Тимошенко и Лессельс, Прикладная теория упругости, 2-е изд., стр. 118. *Прим. ред.*

для каждой величины ϵ и то же для каждой величины γ , если вместо ϵ подставить γ , причем значки ϵ и γ , поставленные слева, указывают соответственно упругую и остаточную деформации.

Чтобы избежать при использовании этих определений какой бы то ни было путаницы, необходимо сделать еще одно замечание. Для возможности разложения деформации на две части нужно элемент объема, к которому относятся эти деформации, освободить от связи с остальными частями, так чтобы на этот элемент никакие силы извне не действовали. Та часть ϵ , которая при этом останется, и будет обозначена через ${}^b\epsilon$, а та часть ϵ , которая при этом исчезнет, будет частью ${}^e\epsilon$, которую мы, в свою очередь, разложим на две другие составные части.

Пока элемент объема связан со всем телом, геометрические связи препятствуют ему принять ту форму, которая получилась бы, если бы было разгружено не только все тело, но также был предоставлен самому себе и элемент объема при условии отсутствия внешних на него воздействий. Деформация, сообщаемая элементу объема для возможности соединения с остальными элементами, создает напряжения, связанные с соответствующими им деформациями по закону, который можно назвать законом упругости для рассматриваемого материала, соответствующим данным условиям. Так как в действительности отдельные элементы объема не предоставляются самим себе, то ту часть деформации, которая добавляется к ${}^b\epsilon$ и остается после разгрузки, мы обозначим через ${}^e\epsilon$ и назовем ее остаточным упругим удлинением (не смешивать с пластическим удлинением), а ${}^e\gamma$ назовем остаточным упругим сдвигом. Полная деформация элемента объема, которая под действием нагрузки тела приняла значение ${}^b\epsilon + {}^e\epsilon$, после прекращения действия нагрузки уменьшается не до ${}^b\epsilon$, а до ${}^b\epsilon + {}^e\epsilon$, так что исчезнет лишь часть ${}^b\epsilon - {}^e\epsilon$.

Удлинением ${}^e\epsilon$ и сдвигами ${}^e\gamma$ характеризуется упругое остающееся собственное деформированное состояние, которое необходимо для обеспечения геометрической связи между элементами тела, неосуществимой даже в ненагруженном теле вследствие несовместимости деформаций ${}^b\epsilon$ и ${}^b\gamma$. Этой упругой части полной остающейся деформации соответствуют собственные остаточные напряжения ${}^e\sigma$ и т. д., под которыми нужно понимать напряжения, оставшиеся в теле после разгрузки.

Все, что сказано нами до сих пор, служило лишь для установления терминов, которыми мы воспользуемся при дальнейшем изложении. Введение этих терминов не нуждалось в каком-либо обосновании и потребовало лишь подробных пояснений, исключающих возможность каких-либо сомнений в смысле этих терминов. Иначе, однако, обстоит дело с законом, устанавливающим связь между упругой частью остаточной деформации и соответствующими ей внутренними напряжениями, т. е. связь между ${}^e\epsilon$ и ${}^e\sigma$. Только опыт может выяснить, как нужно формулировать точно этот закон, и можно заранее ожидать, что он для разных материалов и даже для одного и того же материала, но при разных условиях, будет формулироваться иначе. Но соответствующие опытные данные мы можем получить, лишь приняв сперва наиболее простую формулировку этого закона, позволяющую ожидать, что она будет верна хотя бы приближенно. Затем нужно посмотреть, какие следствия можно получить из этого закона, и оставить за собой право путем сравнения этих

следствий с результатами поверочных испытаний или подтвердить допустимость сделанных предположений, или же, в противном случае, получить ориентировочные указания, в каком направлении нужно сделать исправления.

При этих условиях, однако, нет никакого сомнения в том, что сперва нужно сделать наиболее простое предположение, а именно, что искомый закон совпадает по форме с законом Гука для изотропного материала. Конечно, совершенно невероятно, чтобы это предположение было верно при всех условиях, но в случае металлов, к которым мы и имеем в виду преимущественно применить эту теорию, погрешность, вводимая при этом, вероятно, будет не очень велика. Об этом можно заключить, например, на основании того, что при простом испытании на разрыв, когда напряжения переходят за предел упругости, обычно укорочение, получающееся после разгрузки, имеет такую же величину, как будто никакого перехода за предел упругости при этой нагрузке не было ¹⁾.

Итак, в дальнейшем мы предположим, что между упругой частью остаточных деформаций и соответствующими ей напряжениями существует такая же зависимость, как и в общей теории, изложенной в первой главе и выражающейся формулами (34) § 2. При обозначениях, применяемых здесь, первая из этих формул будет иметь вид:

$${}^n\tau_x = 2G \left({}^n\varepsilon_x + \frac{{}^n e}{m-2} \right).$$

Другим же преобразованным выражением этого закона, именно

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right),$$

воспользоваться нельзя, так как упругие остаточные деформации, которым соответствует ${}^n\varepsilon_x$, не могут быть выражены через упругие перемещения ξ , η , ζ , которые были ранее непрерывными функциями координат.

Но одного принятого нами предположения еще недостаточно. К нему нужно добавить еще второе предположение относительно зависимости между ${}^e\varepsilon$ и ${}^b\varepsilon$ при нагрузке, вызывающей возникновение остаточных деформаций. Здесь найти такую простую гипотезу, которая не расходилась бы с действительностью, труднее, чем в первом случае. Мы рассмотрим два различных предположения относительно этой зависимости, которые являются наипростейшими.

В качестве первого предположения допустим, что под действием нагрузки, превосходящей предел упругости, во всем теле получается такое напряженное состояние, как если бы предел упругости материала лежал выше и напряжение ни в одной точке не превосходило этого повышенного предела упругости. Такое предположение о связи между пластической и чисто упругой деформациями во всяком случае допустимо, и возможно, что существуют материалы, у которых это предположение выполняется в действительности. Кроме

¹⁾ Постоянство модуля упругости по закону Герстне, а. П. и. м. ред.

того, можно считать весьма вероятным, что оно оправдывается у всех материалов, если только нагрузка сообщает всему телу однородное напряженное состояние, как, например, в случае всестороннего равномерного давления одинаковой величины во всех точках.

Но в остальных отношениях это предположение маловероятно, как это видно из того, что в случае верности этого предположения вообще не могли бы получиться собственные напряжения, а это противоречит опыту. При этом предположении пластические деформации ϵ^b пришлось бы рассматривать как второстепенные побочные явления, сопровождающие упругие деформации ϵ^e , определяющие характер основного процесса деформации, и теория всего процесса деформации получилась бы очень простой. Чтобы определить полные деформации, нам пришлось бы определить напряжения, а по ним уже вызываемые ими упругие деформации, считая, что предел упругости материала очень высок и потому он нигде не будет превзойден, и затем прибавить к упругим деформациям пластические, которые определялись бы на основании особого закона деформации, специфического для данного материала. Согласно высказанному здесь предположению эти пластические деформации ϵ^b следовало бы считать за компоненты стабильного изменения формы (конфигурации) элементов всего тела и притом такие, что при дальнейшем нарастании нагрузки или же при снятии ее тело вело бы себя так, как будто предел упругости вообще не был перейден и как будто тело уже наперед имело именно эту измененную форму. Следовательно, с прекращением действия нагрузки все деформации ϵ^e полностью исчезли бы, а деформации ϵ^b остались бы как вновь приобретенные свойства тела, находящегося в ненапряженном состоянии, и удовлетворяли бы уравнениям совместности, написанным в § 7 первой главы, так что никакого основания для возникновения упругих остаточных деформаций и соответствующих им собственных напряжений не было бы.

Но опыт показывает, что в телах, с которыми преимущественно приходится иметь дело, в особенности в металлах, собственные остаточные напряжения действительно можно создать; поэтому в дальнейшем мы можем первое предположение отбросить, не упуская, однако, из виду его принципиальной возможности. Именно, мы заранее должны считаться с тем, что действительное поведение тела не обязательно будет находиться в полном согласии с одним из простейших предположений, а будет соответствовать некоторому компромиссному предположению, так что для понимания действительного процесса нужно всегда учитывать возможность разных предположений простейшего рода.

Другой простой закон, который мы теперь рассмотрим, в некотором отношении прямо противоположен первому. Он заключается в том, что при нагрузке, вызывающей переход за предел упругости, не напряженное, а деформированное состояние во всем теле получается таким, как если бы никакого перехода за предел упругости не было. В применении, например, к изгибу балки это значит, что сечения ее остаются плоскими и после перехода за предел упругости, по крайней мере, при таких же условиях или с такой же степенью точности, как это имело место и до перехода за предел упругости.

Во всяком случае, второе предположение имеет перед первым значительное преимущество в том отношении, что оно не приводит а priori к противоречию с опытом, так как существование собственных остаточных напряжений, как мы после увидим, вполне совместимо с рассматриваемым предположением. Вполне возможно, что это предположение у наиболее важных материалов выполняется даже с большой точностью и в очень широких пределах. Уже часто ставили опыты с металлическими телами, при которых деформации доводились до очень значительной величины с целью получить представление о том, какой характер будут иметь много меньшие упругие деформации, предшествующие переходу за предел упругости. В основании всех опытов такого рода лежит рассматриваемое теперь второе предположение; оно даже молчаливо вводится нередко как само собой разумеющееся. Поэтому можно считать, что во многих случаях оно соответствует действительности, так как, иначе, его неправильность должна была бы выявиться в названных случаях с течением времени.

Конечно, против второго предположения можно было бы возразить, что его нельзя выразить в форме дифференциального уравнения, т. е. так, чтобы физические явления в определенном элементе объема зависели исключительно от предварительных условий, существовавших ранее в этом же элементе объема или на его поверхности и нам данных. В этом можно было бы действительно видеть весьма серьезный недостаток, если бы речь шла о сравнении второго предположения с каким-либо третьим, которое было бы свободно от этого дефекта и притом давало бы одинаковые виды на возможность построения теории упругих остаточных деформаций и соответствующих им собственных напряжений, находящейся в согласии с уже имеющимися опытными фактами. Но поскольку третьего предположения нет, то надежность второго предположения не приходится оспаривать даже с чисто теоретической точки зрения и тем более с практической точки зрения техника, которому важно лишь получить отчетливое представление об этих явлениях, позволяющих делать сравнение с результатами наблюдений, и приспособиться к ним.

Выполняется ли второе предположение, формулированное выше, в действительности и в каких именно пределах, все это можно выяснить лишь путем сравнения вытекающих из него следствий с результатами надлежаще поставленных опытов. Мы уже указали выше на возможность того, что во многих случаях картина явлений будет соответствовать некоторому компромиссному предположению, так что результаты перехода за предел упругости будут соответствовать отчасти одному, а отчасти другому из этих двух предположений. Но в какой мере это будет иметь место, об этом можно будет заключить на основании результатов надлежащих опытов лишь после того, как будет установлено, каких явлений можно ожидать на основании точного выполнения второго предположения.

Поэтому нашей ближайшей задачей мы должны считать получение следствий, вытекающих из второго предположения. Это мы и сделаем для двух простых и важных случаев, в которых сравнение теоретических выводов с результатами измерений, полученными при выполнении соответствующих опытов, сделать легко.

§ 103. Остаточные напряжения, получающиеся при кручении вала круглого сечения.

Если напряжения при упругой деформации круглого вала не превосходят предела упругости для кручения, то поперечные сечения остаются плоскими, и каждое сечение, не деформируясь, повертывается относительно любого другого, находящегося на расстоянии x от первого, на угол ϑx около оси стержня. Точно так же и все радиусы, проведенные в поперечном сечении до деформации, остаются прямолинейными и после деформации.

Согласно основному предположению, к которому мы пришли на основании соображений, изложенных в предыдущем параграфе, все, что нами сказано выше, будет относиться также и ко всей деформации, испытываемой телом при переходе за предел упругости. Но нужно иметь в виду, что предел упругости достигается во всем теле не одновременно, а именно сперва в наружных частях, а затем, при дальнейшем увеличении нагрузки, в частях тела, прилегающих к ним изнутри, причем напряжения в более удаленных от поверхности частях вала не доходят до предела упругости. Поэтому угол сдвига γ во внешних частях вала можно разложить на упругую часть ${}^e\gamma$ и на пластическую ${}^p\gamma$, в то время как во внутренних частях ${}^p\gamma = 0$. При этом сумма ${}^e\gamma + {}^p\gamma$ во всех точках пропорциональна расстоянию от оси стержня.

Теперь спросим себя, какой зависимостью связаны при этих условиях погонный угол закручивания ϑ (т. е. угол, отнесенный к единице длины вала) с величиной крутящего момента M . Эти две величины легко можно измерить с достаточной точностью при испытании на кручение, и потому результаты таких измерений особенно пригодны для сравнения с формулами, выведенными теоретическим путем.

По нашему предположению поперечные сечения при деформации остаются плоскими, а все радиусы остаются прямолинейными, поэтому между углами ϑ и γ имеется геометрическая зависимость

$$\gamma = r\vartheta, \quad (40)$$

если через r обозначить расстояние точки от оси стержня, к которой относится сдвиг γ . На расстояниях r , не превосходящих определенного предела r_0 , для касательного напряжения на основании формулы (40) получится выражение:

$$\tau = G\gamma = G\vartheta r. \quad (41)$$

Расстояние r_0 , до которого имеет место это равенство, зависит от величины крутящего момента M . На расстоянии r_0 угол сдвига γ достигает предела упругости γ_0 ; относительно последнего мы предположим, что он совпадает с пределом пропорциональности, для которого остается в силе закон Гука.

При $r = r_0$ мы должны предыдущую формулу для τ заменить другой, сообразуясь с индивидуальными свойствами материала. На основании имеющихся опытных данных мы предположим, что для

в которое мы должны вставить значение τ из формул (41) и (42). Это нам даст сперва такое равенство:

$$M = 2\pi G\vartheta \frac{a^4}{4} - 2\pi K\vartheta^n \int_{r_0}^a r^2 (r - r_0)^n dr.$$

Интеграл, входящий сюда, мы для сокращения обозначим через J , следовательно, напишем это равенство в форме:

$$M = 2\pi \left(G\vartheta \frac{a^4}{4} - K\vartheta^n J \right) \tag{43}$$

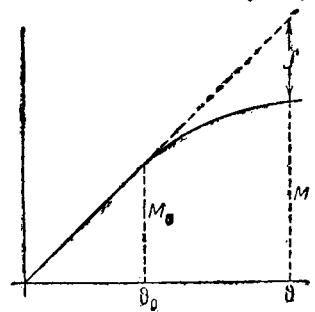
и вычислим затем J отдельно. При этом получится:

$$\begin{aligned} J &= \int_{r_0}^a r^2 (r - r_0)^n dr = \left[\frac{1}{n+3} (r - r_0)^{n+3} + \frac{2r_0}{n+2} (r - r_0)^{n+2} + \frac{r_0^2}{n+1} (r - r_0)^{n+1} \right]_{r_0}^a = \\ &= (a - r_0)^{n+1} \cdot \frac{(n+2)(n+1)a^2 - 2(n+1)ar_0 - 2r_0^2}{(n+3)(n+2)(n+1)}. \end{aligned} \tag{44}$$

Но, с другой стороны, зависимость между M и ϑ может быть получена и опытным путем при испытании вала на кручение. Пусть при этом испытании результаты измерений дают диаграмму, начерченную на фиг. 124. Эта диаграмма соответствует результатам испытания на кручение, выполненного в мюнхенской лаборатории.

На диаграмме кривая идет сперва прямолинейно до точки ϑ_0, M_0 . Поэтому при крутящем моменте M_0 предел пропорциональности достигается на поверхности вала, в то время как предыдущие формулы относятся к случаю $M > M_0$. Точке ϑ, M кривой на диаграмме соответствует состояние, при котором деформация будет упругой лишь в пределах до расстояния

$$r_0 = a \frac{\vartheta_0}{\vartheta}$$



Фиг. 124.

от оси. Поэтому это расстояние r_0 можно определить путем сравнения результатов вычисления по теоретическим формулам с результатами измерений при разных значениях ϑ и M , и в дальнейшем его можно считать известным.

Таким образом формулы (43) и (44) можно написать также в форме:

$$\left. \begin{aligned} M &= 2\pi G\vartheta \frac{a^4}{4} - J', \\ J' &= 2\pi K a^{n+3} \cdot \frac{(\vartheta - \vartheta_0)^{n+1} [(n+2)(n+1)\vartheta^2 + 2(n+1)\vartheta_0\vartheta + 2\vartheta_0^2]}{(n+3)(n+2)(n+1)\vartheta^n}; \end{aligned} \right\} \tag{45}$$

в эти формулы кроме непосредственно измеряемых величин и определяемого по ним модуля сдвига G входят еще две постоянные K и n ,

характерные для данного материала. Поэтому, если предположение, из которого мы исходили при выводе написанных формул, правильно, то мы можем установить путем надлежащего выбора K и n соответствие между величиной, обозначенной в последней формуле через J' , с длиной, обозначенной на диаграмме испытаний фиг. 124 той же буквой, и притом это соответствие можно установить для всех значений ϑ , больших, чем ϑ_0 . При сделанном предположении не составит никакого труда определить значения K и n таким образом, чтобы результаты вычислений по указанным формулам, в пределах допустимого использования результатов измерений, возможно лучше и во всяком случае достаточно точно совпадали с результатами, даваемыми диаграммой. На расхождения между ними в пределах ошибки наблюдений можно и даже следует не обращать внимания.

До сих пор наши вычисления относились не к собственным остаточным напряжениям, а только к состоянию, непосредственно создаваемому моментом M в том случае, когда напряжения превосходят предел упругости. Но переход к собственным напряжениям, остающимся в валу после прекращения действия крутящего момента, выполняется просто. Полный сдвиг γ на расстоянии r , превосходящем r_0 , состоит из упругой части

$${}^e\gamma = \frac{\tau}{G} = r\vartheta - \frac{K}{G}\vartheta^n(r-r_0)^n$$

и пластической ${}^b\gamma$

$${}^b\gamma = \gamma - {}^e\gamma = \frac{K}{G}\vartheta^n(r-r_0)^n.$$

Если мы прекратим действие крутящего момента M , то вал раскрутится в обратную сторону; угол раскручивания, отнесенный к единице длины вала, мы обозначим через ${}^e\vartheta$. Согласно предположению, введенному нами в предыдущем параграфе, деформация вала, получающаяся при раскручивании, будет такой же, как если бы напряжения за предел упругости не переходили, причем поперечные сечения остаются плоскими, и все радиусы в каждом сечении остаются прямолинейными.

Так как ${}^e\vartheta$ меньше погонного угла закручивания ϑ на некоторую величину ${}^b\vartheta$, то на расстоянии r от оси остается угол сдвига:

$${}^b\vartheta \cdot r = (\vartheta - {}^e\vartheta) r,$$

который, как показывает сравнение с предыдущей формулой, ни в коем случае не совпадает с ${}^b\gamma$. Разность между ними мы обозначили через ${}^n\gamma$, и потому мы должны положить

$${}^b\gamma + {}^n\gamma = {}^b\vartheta r = (\vartheta - {}^e\vartheta) r.$$

Для ${}^n\gamma$ после подстановки сюда найденного выше выражения ${}^b\gamma$ мы получим:

$${}^n\gamma = (\vartheta - {}^e\vartheta) r - \frac{K}{G}\vartheta^n(r-r_0)^n = {}^b\vartheta r - \frac{K}{G}\vartheta^n(r-r_0)^n. \quad (46)$$

Это равенство имеет место для всех точек, в которых $r > r_0$. При $r < r_0$ нужно в этой формуле вычеркнуть член, содержащий K .

«Упругому остаточному углу сдвига» ${}^n\gamma$ соответствует «собственное остаточное напряжение» ${}^n\tau$, которое получится из него путем умножения на модуль сдвига G . Поэтому мы получим:

$${}^n\tau = G \cdot {}^b\vartheta r - K {}^n(r - r_0)^n. \quad (47)$$

Эта формула верна в пределах от $r = r_0$ до $r = a$. При $r < r_0$ пропадает второй член; до этого предела и еще несколько выше него все напряжения ${}^n\tau$ сохраняют одинаковый знак. Начиная с определенного значения r^1 , знак этого выражения изменяется, и при дальнейшем увеличении r до $r = a$ новый знак сохраняется, в то время как абсолютное значение ${}^n\tau$ увеличивается.

Напряжения, действующие в поперечном сечении стержня, должны уравниваться внешними силами, приложенными к отсеченной части стержня. Но на разгруженный вал никакие внешние силы не действуют, и потому касательные напряжения ${}^n\tau$, действующие в поперечном сечении, должны удовлетворять условиям равновесия твердого тела. В случае круглого вала результирующая касательных напряжений на основании симметрии обратится в нуль, и потому остается выполнить условие, чтобы сумма остаточных моментов также обращалась в нуль. Это условие равновесия мы напомним, приняв за центр моментов центр круга. Мы получим тогда уравнение, из которого можно будет определить пластический погонный угол закручивания ${}^b\vartheta$. Это уравнение имеет вид:

$$2\pi \int_0^a {}^n\tau r^2 dr = 0.$$

В него нужно подставить выражение ${}^n\tau$ из формулы (47), но с оговоркой, что второй член в выражении ${}^n\tau$ в пределах от $r = 0$ до $r = r_0$ отпадает. После подстановки мы получим:

$$2\pi G \cdot {}^b\vartheta \frac{a^4}{4} - 2\pi K {}^n \int_{r_0}^a r^2 (r - r_0)^n dr = 0.$$

Интеграл во втором члене левой части этого равенства совпадает с значением J' в формуле (45), а следовательно, также и с значением, которое можно определить по диаграмме кручения фиг. 124, где оно обозначено той же буквой. Если подставить это значение и решить полученное уравнение относительно ${}^b\vartheta$, то мы найдем:

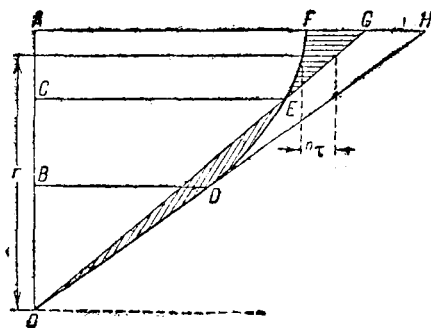
$${}^b\vartheta = \frac{2J'}{\pi G a^4} = \vartheta \frac{J'}{M + J'}, \quad (48)$$

причем отношение отрезков J' и $M + J'$ можно определить непосредственно по диаграмме испытания.

¹⁾ Для некоторого $r > r_0$. *Прим. ред.*

Конечно, эта формула выражает в сущности очевидный результат, который можно было бы вывести непосредственно из наших исходных предположений путем простых рассуждений. Если мы предположим, что испытание происходило до точки δM диаграммы на фиг. 124, то при процессе разгрузки каждому значению δ будет соответствовать снова свой момент M , и при нанесении соответствующих точек на диаграмму мы получим новую кривую, которая по нашим предположениям пойдет параллельно начальной части первой линии. Эта вторая линия пересечет ось абсцисс в точке, абсцисса которой равна δ_0 , и тогда формула (48) получится из диаграммы по теореме о пропорциональности отрезков, отсекаемых в двух лучах двумя параллельными прямыми. Поэтому в рамках настоящего исследования формула (48) имеет значение лишь в том отношении, что, будучи выведена из основных предположений, она не противоречит опыту.

После этих замечаний возвратимся к формуле (47), дающей нам закон, по которому распределяются остаточные напряжения по поперечному сечению стержня. Этот закон распределения мы представим теперь графически в виде диаграммы напряжений, как это сделано на фиг. 125.



Фиг. 125.

Линию $ODEF$ мы возьмем без изменений из диаграммы фиг. 123, сохранив одинаковые буквенные обозначения. Затем проведем прямую OEG , ординаты которой, измеряемые от OA , указывают в масштабе, принятом для диаграммы сдвигов $ОАН$, величину обратного раскручивания при разгрузке. Одновременно расстояния по

горизонтали между линией OEG и линией $ODEF$ касательных напряжений τ , получившихся в валу при нагрузке, будут представлять остаточные напряжения τ_0 . Это находится в полном соответствии с формулой (47). В точке пересечения E обеих линий остаточное напряжение обратится в нуль, и по обе стороны от E остаточные напряжения будут иметь противоположные направления.

Для обеспечения равенства нулю суммы моментов остаточных напряжений линия OEG должна быть начерчена в таком направлении, чтобы момент инерции площади EFG относительно оси, проходящей через O параллельно $АН$, был равен моменту инерции площади ODE относительно той же оси.

Все, что нами сказано, относится только к поперечным сечениям вала, удаленным от концов его на достаточное расстояние. На концевых же сечениях после разгрузки никаких напряжений не будет, и потому предыдущие выводы не приложимы к поперечным сечениям, проведенным вблизи концов. Можно предположить, что от полного отсутствия напряжений на концевых сечениях к рассмотренной выше диаграмме напряжений имеется постепенный переход, причем указанная диаграмма будет

иметь достаточную точность лишь в сечениях, удаленных от концов стержня. На расстоянии от конца, равном диаметру вала, заметного влияния конца вала ожидать, однако, нельзя.

Чтобы обосновать последнее утверждение, предположим, что к концевому сечению нагруженного вала приложена система уравновешенных касательных сил, распределенных по площади сечения и совпадающих по величине и знаку с теми напряжениями, которые на только что начерченной диаграмме названы остаточными напряжениями. Если эти силы рассматривать как нагрузку, то очевидно, что рассмотренная выше диаграмма напряжений будет действительна для всех сечений до самого конца стержня. Если же этих сил не будет, то диаграмма напряжений для сечений, близких к концу стержня, будет отличаться от диаграммы напряжений для сечений средней части вала на величину напряжений, создаваемых действием одних этих сил. Но так как силы внешней нагрузки, действующей на концевое сечение, взаимно уравновешены, то на основании принципа Сен-Венана в частях вала, удаленных от концов, они не могут обнаружить заметного действия. Можно даже предвидеть, что их действие будет уменьшаться, как и в других аналогичных случаях, рассмотренных в этой книге, по показательному закону и что на расстоянии, равном диаметру вала, влияние этой системы сил не может быть заметным.

Мы построили возможную и даже довольно вероятную диаграмму напряжений, остающихся после перехода за предел упругости при закручивании и последующей разгрузке вала. Будет ли эта диаграмма соответствовать действительным условиям в большей или меньшей степени, это еще неизвестно и может быть решено лишь опытным путем. Построение такой диаграммы необходимо, чтобы можно было основываться на чем-то определенном при выполнении опыта. Результаты испытаний покажут, в каком направлении нужно будет изменить первоначальное исходное предположение, чтобы получить лучшее совпадение с действительностью.

Остаточные напряжения, действующие в теле, в данном случае, как и в большинстве других, можно определить следующим образом. В теле делают полный или неполный разрез и затем смотрят, какая упругая деформация происходит при этом в теле или в остающейся части его. Можно было бы применить также и такой способ: после того как при закручивании вала будет перейден предел упругости, погрузить вал в ванну с кислотой, которая растворит наружную часть вала. Тогда вследствие существования остаточной упругой деформации обнаженная внутренняя часть раскрутится. Наружные слои вала можно было удалить также и путем обточки, но против последней имеется, однако, возражение, что обточка может вызвать в материале добавочные напряжения, которые исказят результаты опыта.

Другой способ, который, повидимому, не вызовет указанного возражения, заключается в том, что на строгальном станке мы выбираем в валу канавки в направлении образующих цилиндрической поверхности. Две таких канавки, расположенных одна против другой и доходящих до центральной части стержня, не имеющей остаточных напряжений, уничтожат большую часть остаточных напряжений, вследствие чего концы вала

повернутся один относительно другого на угол, который, возможно, будет не намного меньше погонного угла закручивания, остающегося после первоначального закручивания.

Кольцевые канавки, которые можно проточить на валу на токарном станке, также уничтожат упругую остаточную деформацию, а следовательно, и соответствующие остаточные напряжения, по крайней мере, вблизи выточки. Если выточка доходит до той внутренней части вала, в пределах которой напряжения не доходили до предела упругости, то прилегающие части вала будут вести себя так, как будто здесь был свободный конец вала. Поэтому при проточке кольцевых канавок должно произойти раскручивание вала, которое уничтожит, согласно сделанным выше замечаниям, соответствующую часть погонного угла закручивания цельного вала, который остается после кручения.

Этих замечаний будет достаточно, чтобы дать представление о том, как следует поступать, чтобы исследовать детально законы, которым подчиняются остаточные напряжения. В этой области еще много нужно сделать, и окончательный успех будет достигнут лишь при комбинировании теоретических исследований с удачно выбранной схемой опытов.

§ 104. Остаточные напряжения при изгибе.

К изогнутому стержню можно применить те же соображения, которыми мы руководствовались при рассмотрении случая кручения вала. Здесь мы также исходим из предположения, что поперечные сечения стержня остаются плоскими и после деформации. Если предел пропорциональности не перейден, то плоская форма сечений будет сохраняться с достаточной точностью во всех случаях, когда влиянием касательных напряжений на деформацию можно пренебречь. Мы предположим, что это условие выполняется и при переходе за пределы упругости и пропорциональности. Тогда, аналогично тому, как это мы делали со сдвигами γ , удлинения ϵ в волокнах, удаленных на достаточное расстояние от нулевой линии сечения, можно разложить на две части $\delta\epsilon + \epsilon$, причем удлинения ϵ связаны с напряжениями, получающимися в сечении при изгибе, законом Гука.

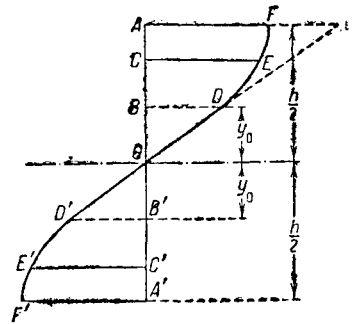
По сравнению с рассмотренным случаем кручения вала здесь получается разница в том отношении, что в поперечных сечениях изогнутого бруса возникают напряжения двух родов, именно растягивающие и сжимающие. Вполне возможно и до известной степени вероятно, что некоторые материалы по отношению к обоим напряжениям как во время перехода за предел упругости, так и за пределом упругости будут вести себя по-разному даже в таких случаях, когда до перехода этого предела такой разницы не замечается. У таких материалов весь процесс изгиба будет много сложнее, чем в случае кручения, при котором эта разница отпадает. Это соображение и побудило нас сперва рассмотреть здесь более простой случай кручения вала круглого сечения и уделить ему при изложении главное внимание, хотя в практических приложениях чаще имеют дело с изгибом, чем с кручением.

Но если можно предположить, что данный материал ведет себя по отношению к растягивающим и сжимающим напряжениям как до перехода предела упругости, так и в момент перехода, а также за пределом

упругости одинаково, то теорию для изгиба стержня можно построить совершенно таким же образом, как это было сделано для кручения вала. Это мы и покажем здесь, причем, ради простоты, лишь для случая, когда стержень имеет прямоугольное поперечное сечение и когда плоскость изгибающей пары проходит через главную ось сечения.

В этом случае диаграмма напряжений, как это указано на фиг. 126, будет состоять из двух одинаковых частей, расположенных по разные стороны от центра. Если материал обладает такими же свойствами, какие мы имели при кручении, то вероятно, что каждая из этих частей будет иметь примерно такой же вид, как и диаграмма $AODEF$ касательных напряжений τ на фиг. 123 для точек, расположенных вдоль радиуса OA . Чтобы облегчить сравнение, мы здесь применили для обозначений те же буквы.

Угол, образуемый двумя поперечными сечениями, расположенными на расстоянии dx друг от друга, мы обозначим через $d\varphi$. Тогда относительное удлинение ϵ в волокне, находящемся на расстоянии y от нулевой линии, будет выражаться формулой:



Фиг. 126.

$$\epsilon = y \frac{d\varphi}{dx}, \tag{49}$$

и отсюда для напряжения σ в волокнах, расположенных в пределах между $y = y_0$ и $y = \frac{h}{2}$, получается выражение:

$$\sigma = E\epsilon = Ey \frac{d\varphi}{dx}. \tag{50}$$

Здесь под y_0 , как видно из фигуры, нужно понимать расстояние от нулевой линии того волокна, в котором достигается предел упругости. В пределах же между $y = y_0$ и $y = \frac{h}{2}$ аналогично тому, как это сделано при рассмотрении случая кручения, можно положить

$$\sigma = E\epsilon - K_1 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (y - y_0) \right]^n = Ey \frac{d\varphi}{dx} - K_1 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^n (y - y_0)^n. \tag{51}$$

Постоянные K_1 и n , входящие в эту формулу, зависят от свойств материала и должны быть определены опытным путем. Здесь для показателя n мы применили старое обозначение, так как можно ожидать, что при предположенных условиях оба числа как для случая кручения, так и для случая изгиба будут совпадать.

Что касается определения постоянных K_1 и n , то в случае изгиба, если предположение, указанное выше, выполняется, мы находимся в несколько

лучшем положении, чем в случае кручения. Именно, для определения этих постоянных особых испытаний на изгиб не требуется, так как эти постоянные можно получить непосредственно из диаграмм удлинений при испытании на растяжение или на сжатие. Если рассматриваемая теория построена на правильном предположении, то значения K_1 и n , полученные таким образом, должны сохранять свое значение и при применении к изгибу.

Для изгибающего момента M , вызывающего поворот сечения на угол $d\varphi$, мы получим следующее выражение:

$$M = Eb \frac{d\varphi}{dx} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy - 2K_1 b \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^n \int_{y_0}^{\frac{h}{2}} y(y-y_0)^n dy, \quad (52)$$

если ширину прямоугольного сечения обозначить через b . После вычислений мы получим:

$$M = E \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{bh^3}{12} - 2K_1 \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^n \cdot b \left(\frac{h}{2} - y_0\right)^{n+1} \cdot \frac{y_0 + (n+1)\frac{h}{2}}{(n+2)(n+1)}$$

или, если исключить y_0 , пользуясь пропорцией

$$y_0 : \frac{h}{2} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 : \frac{d\varphi}{dx},$$

получим в другом виде:

$$M = E \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{bh^3}{12} - 2K_1 b \left(\frac{h}{2}\right)^{n+2} \cdot \left[\frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0\right]^{n+1} \cdot \frac{(n+1)\frac{d\varphi}{dx} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0}{(n+2)(n+1)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}. \quad (53)$$

Здесь под $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0$, как показывают формулы, нужно понимать тот угол относительного поворота двух сечений, находящихся на единице расстояния друг от друга, при котором в крайнем волокне достигается предел упругости.

Так как K_1 и n_1 можно считать известными на основании испытаний на растяжение и на сжатие, то формула (53) дает зависимость между M и углом поворота, сравнение которой с результатами, полученными при испытании на изгиб, может служить для проверки правильности принципов, положенных в основание теории.

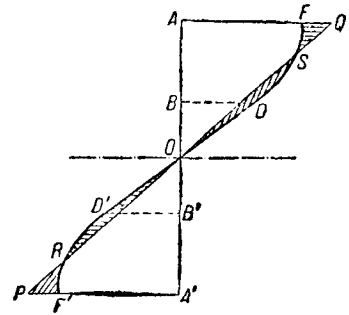
В тех поперечных сечениях, в которых был перейден предел упругости и в которых поэтому остались собственные напряжения, распределение напряжений после разгрузки балки будет иметь характер, указанный на фиг. 127.

Эта диаграмма получается из предыдущей следующим образом. Через точку O проводим прямую PQ , которая пересечет кривую прежней диаграммы в точках R и S . Направление PQ будет уже не такое, как при кручении; его нужно будет определить таким образом, чтобы произведение площади FSQ на расстояние ее центра тяжести от прямой, проходящей

через O в направлении оси стержня, было равно произведению площади ODS , умноженной на расстояние ее центра тяжести от той же оси.

Из чертежа мы видим, что остаточные напряжения в изогнутой балке распределяются по сечению так, что получается четыре слоя, в которых попеременно действуют растягивающие и сжимающие напряжения. Кроме нулевой линии, соответствующей точке O и совпадающей с нулевой линией при первоначальной изгибающей нагрузке, получаются две новых нулевых линии, положение которых в сечении определяется точками R и S .

Если стержень, в котором имеются такие остаточные напряжения, разрезать поперек, то отдельные части стержня повернутся одна относительно другой на некоторый угол, так как они будут при этом отчасти освобождены от действия упругих



Фиг. 127.

остаточных напряжений. Это были приведены нами в предыдущем параграфе для случая кручения можно применить без труда и потому нет

еще раз ¹⁾.

¹⁾ Упруго-пластическому изгибу балки посвящена работа: Fritsche, Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung, «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 11, стр. 176, 1931. Прим. перев.

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА.

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ.

§ 105. Продольный изгиб стержней.

Наибольший груз, который можно положить на тело без опасения вызвать поломку, при обычных условиях определяется требованием, чтобы напряжения и деформации в опасных местах тела не превосходили наибольшего предела, обусловленного крепостью материала. В случаях же «неустойчивого» равновесия, которыми мы займемся в этой главе, опасный предел зависит не только от крепости материала, но также и от возможности выгибания (выпучивания) в сторону, что, в свою очередь, зависит от формы тела и от характера приложения сил. В этих случаях тело в состоянии выдерживать действие такой нагрузки и даже более значительной нагрузки лишь до тех пор, пока принципиально возможное равновесие не будет нарушено ничтожнейшими причинами случайного характера.

Простейшим и общеизвестным примером является сжатый стержень, имеющий в сравнении с размерами поперечного сечения большую длину. При незначительной длине стержня нагрузка, действие которой стержень может надежно выдержать, зависит лишь от площади поперечного сечения и от временного сопротивления материала при сжатии. Но даже когда стержень имеет большую длину, он может выдержать действие такой нагрузки все еще без опасности поломки, если путем устройства надлежащих опор будет предотвращена возможность выгиба в сторону. Опоры, служащие для этой цели, не воспринимают на себя части нагрузки, сжимающей стержень, и потому их можно не делать такими прочными, как это было бы необходимо, если бы они воспринимали хотя бы незначительную часть этой нагрузки. Достаточно будет, если они смогут противостоять действию незначительных случайных сил в направлении, поперечном к оси стержня, которые иногда могут встретиться наряду с главной нагрузкой, и вообще достаточно, если они будут оказывать ничтожное, в сравнении с временным сопротивлением материала стержня при сжатии, сопротивление выгибанию в сторону из-за случайных причин.

Если боковой опоры такого рода нет или если она слишком мала, чтобы быть достаточно действительной, то в случае большой длины стержень ломается при значительно меньшей нагрузке, чем та, которую он мог бы выдерживать. В этом случае стержень ломается не потому, что сжимающие напряжения превзошли временное сопротивление сжатию, а вследствие изгиба, причем поломке предшествует сперва выгиб в сторону, и лишь при дальнейшем увеличении этой деформации происходит поломка.

Эти простые и естественные замечания нужно всегда иметь в виду при рассмотрении продольного изгиба стержней. Наш педагогический опыт показывает, что многие склонны рассматривать продольный изгиб стержней и другие явления, объясняемые неустойчивым равновесием, как чудо, нуждающееся в особом объяснении. В действительности же все эти явления совершенно аналогичны всем известному явлению, что очень трудно поставить длинный тонкий стержень на гладком полу вертикально и сохранить его в этом положении в течение длительного времени, не подпирая его со стороны. Хотя на него и будет действовать только собственный вес, все же уже незначительного сотрясения пола или легчайшего дуновения ветра достаточно, чтобы опрокинуть его. Аналогично этому «неустойчивость равновесия» является причиной, которая вполне объясняет все явления, связанные с продольным изгибом, потерей устойчивости формы тел и пр.

В § 12 второй главы было уже подробно сформулировано условие устойчивости или неустойчивости упругого равновесия, основанное на принципе возможных перемещений. Вспомним также о примере, которым мы воспользовались тогда и который был бы вполне уместен и в этой главе; этот пример относился к сплющиванию тонкостенной трубы, нагруженной внешним гидростатическим давлением.

Совершенно аналогично можно рассматривать и те случаи, которыми мы займемся теперь, хотя в деталях могут встретиться иногда расхождения. Прежде всего рассмотрим основной пример продольного изгиба стержня, из-за которого и была построена вся теория устойчивости упругого равновесия, и выведем соответствующие формулы для длинного сжатого стержня при разных возможных граничных условиях. Мы предполагаем, что наш читатель в общих чертах с этим предметом уже знаком, и потому мы изложим его короче, так что многих деталей касаться не будем и лишь подчеркнем то, что имеет принципиально важное значение.

Мы можем приступить к этим задачам по-разному, хотя основная идея решения таких задач уже полностью сформулирована нами во второй главе. Из методических соображений мы не ограничимся рассмотрением этих основных примеров, следуя лишь одному пути, а воспользуемся последовательно разными способами, ведущими к одинаковой цели, с тем, чтобы ознакомиться с предметом с разных сторон.

Мы будем исходить из выражения работы упругих сил dA элемента стержня, имеющего длину dx , когда он будет сжат продольной силой P и одновременно изогнут парю сил с моментом M . Обозначим площадь поперечного сечения через F , а жесткость через EI , тогда

$$dA = \frac{P^2}{2EF} dx + \frac{M^2}{2EI} dx; \quad (1)$$

здесь мы можем считать эту формулу уже известной.

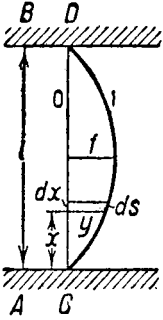
Рассмотрим стержень CD , фиг. 128, помещенный между двумя большими телами A и B , например между полом и потолком здания; пусть стержень должен передавать от одного тела к другому давление P . Пока стержень сможет выполнять свое назначение, его длина l будет

укорачиваться на небольшую величину (упругое укорочение), и полная работа упругих сил его, которую мы обозначим через A_0 , по формуле (1) будет равна:

$$A_0 = \frac{P^2}{2EF} l, \quad (2)$$

так что пока стержень не будет выгибаться в сторону, изгибающего момента M не будет. Работу упругих сил A_0 можно выразить не только через силу P , но также и через упругое удлинение Δl , причем мы получим выражение:

$$A_0 = EF \frac{\Delta l^2}{2l}. \quad (3)$$



Фиг. 128.

Теперь выясним, будет ли рассматриваемое состояние равновесия устойчивым или неустойчивым. Во втором случае был бы возможен выгиб стержня из прямолинейного начального положения O в сторону, т. е. в положение, обозначенное на чертеже цифрой I , при котором стержень принимает искривленную форму. Чтобы решить рассматриваемый вопрос, будем считать соответствующие перемещения за возможные и предположим, что при этом концы C и D остаются в покое. Оба тела A и B , между которыми помещен стержень, при этих возможных перемещениях вообще своего положения не изменяют. Предположим еще, что изгиб происходит по закону синуса так, что можно положить

$$y = f \sin \pi \frac{x}{l} \quad (4)$$

и что стрелу прогиба f в сравнении с длиной l стержня можно считать бесконечно малой.

Сперва вычислим, насколько при рассматриваемых возможных перемещениях увеличится длина осевой линии стержня. На основании фигуры и сказанного выше мы получим:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = dx \left(1 + \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}\right).$$

Поэтому для приращения длины $\delta \Delta l$ осевой линии стержня при продольном изгибе получается выражение:

$$\delta \Delta l = \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \quad (5)$$

Если f будет бесконечно малой величиной 1-го порядка, то это приращение длины будет бесконечно малой величиной 2-го порядка. При исследовании устойчивости равновесия как раз и имеют важное значение бесконечно малые величины 2-го порядка.

Если осевая линия стержня удлинится на величину $\delta\Delta l$, то стержень будет в новом положении испытывать действие меньших реакций P_1 тел A и B ; каждая из этих реакций связана с первоначальной сжимающей силой P_0 следующим соотношением:

$$P_1 = P_0 \left(1 - \frac{\delta\Delta l}{\Delta l}\right) = P_0 - \frac{\pi^2 f^2}{4l} \cdot \frac{EF}{l}. \quad (6)$$

Последний член в этом выражении указывает, насколько стержень разгружается при боковом выгибе.

Теперь мы вычислим работу деформации A_1 , соответствующую новому положению стержня. При этом мы опять будем исходить из формулы (1), положив в ней

$$M = P_1 y = P_1 f \sin \pi \frac{x}{l}.$$

Таким образом мы для A_1 получим выражение:

$$A_1 = \frac{P_1^2}{2EF} \int_0^l \left(1 + \frac{f^2}{l^2} \sin^2 \pi \frac{x}{l}\right) dx, \quad (7)$$

если вместо момента инерции I ввести радиус инерции i . Дальнейшее вычисление дает следующее выражение:

$$A_1 = \frac{P_1^2}{2EF} \left(l + \frac{f^2}{i^2} \cdot \frac{l}{2}\right).$$

При $f=0$ все эти формулы будут относиться к начальному положению, в котором $A_1 = A_0$. Если вставить выражение P_1 из формулы (6), выполнить умножение и пренебречь бесконечно малыми членами порядка выше 2-го, то мы получим:

$$A_1 = \frac{l}{2EF} \left(P_0 - \frac{\pi^2 EF}{4l^2} \cdot f^2\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{f^2}{2l^2}\right) = \frac{P_0^2 l}{2EF} - P_0 \frac{\pi^2}{4l} f^2 + P_0^2 \frac{l}{4EFi^2} \cdot f^2. \quad (8)$$

Первый член этого выражения совпадает с A_0 . Поэтому сумма двух следующих членов даст вторую вариацию $\delta^2 A$ работы деформации, получившуюся при взятом возможном перемещении. Она имеет следующее выражение:

$$\delta^2 A = P_0 \frac{f^2}{4} \left(\frac{P_0 l}{EFi^2} - \frac{\pi^2}{l}\right). \quad (9)$$

Равновесие будет безразличным ¹⁾, если $\delta^2 A$ обратится в нуль, т. е. при

$$P_0 = \pi^2 \frac{EFi^2}{l^2} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}. \quad (10)$$

¹⁾ Подобная трактовка явления продольного изгиба представляет некоторую опасность в том отношении, что по аналогии со статическими примерами дает повод к предположению произвольности если не формы изогнутой оси, то пара-

Это и будет формула Эйлера для продольного изгиба, которую мы вывели на основании принципа возможных перемещений.

Нам необходимо сделать здесь несколько замечаний. Иному читателю может показаться странным, что здесь было сказано о разгрузке стержня, производимой выгибом в сторону, и что вычисления производились, исходя из величины этой разгрузки, в то время как согласно обычному представлению считают, что нагрузка P имеет постоянную заданную величину и что эта нагрузка должна во всяком случае восприниматься стержнем полностью, независимо от того, остается стержень прямолинейным или он искривляется. Впоследствии мы также встанем на эту точку зрения, и тогда окажется, что при этом мы опять придем к такому же результату, как и здесь. Но уже теперь следует указать, что точка зрения, которой мы придерживались здесь, так же правильна, как и другая.

При применении принципа возможных перемещений мы можем выбирать возможные перемещения по своему произволу, следовательно, и так, чтобы концы стержня оставались в покое, несмотря на то, что осевая линия стержня искривляется. При этом, чтобы выразить потенциальную энергию через возможные перемещения, мы должны рассматривать работу деформации как функцию от деформаций. Но тогда мы неизбежно придем

метра (например, стрелы прогиба), входящего в ее аналитическое выражение. Такая произвольность получается и математически при элементарном решении задачи об устойчивости, но она не отвечает действительному положению вещей, так как точное решение (см., например, акад. Крылов А. Н., «Изв. Всес. акад. наук», отд. мат. и ест. наук, № 7, 1931), исходящее не из приближенного,

а из точного дифференциального уравнения изогнутой оси
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} = \pm M,$$

дает для каждого значения сжимающей стойку силы P (как для критического, так и в особенности для значений, больших критического) совершенно определенную равновесную форму упругой оси стержня при условии, что возникающие при таком искривлении в стержне напряжения нигде не превосходят предела упругости материала.

Так как точное решение для случаев центрального приложения сжимающей силы и при предположении идеальной прямолинейности оси стержня при критическом значении силы дает единственную прямолинейную форму равновесия, а при значениях ее, больших критического, дает кроме прямолинейной еще и искривленную равновесную форму оси стержня, правительнее (как это принято после Пуанкаре в математической теории упругости, см., например, Love, Treatise on the Mathematical Elasticity, Cambridge, 1927, p. 410) определять критическое значение сжимающей силы как такую величину ее, при которой происходит так называемая бифуркация равновесной формы оси сжатого стержня. Ряд точных решений был дан Greenhill'ем, Sree, Halphen'ом и др.

Сказанное здесь имеет в виду подчеркнуть лишь громадное значение точного решения задачи, если речь идет о деформациях, которые после потери устойчивости получают большие значения, при которых приближенное уравнение элементарной теории изгиба теряет силу.

В то же время следует иметь в виду, что, как это показал проф. Ясинский Ф. С. в своей диссертации (см. Полное собрание сочинений, т. I), значение критической силы, получаемое из приближенного уравнения, в точности совпадает с таковым, получаемым из точного уравнения.

Желая сохранить фепплевскую трактовку проблемы, можно было бы допустить представление о «безразличном» равновесии лишь в пределах бесконечно малых деформаций. *Прим. ред.*

к заключению, что осевая линия при таких возможных перемещениях несколько удлиняется и потому сжимающая сила, соответствующая новому деформированному состоянию, становится несколько меньше, чем прежде.

Наоборот, другое возражение, которое можно привести против нашего вывода, имеет известное основание, именно возражение против того, что мы рассматривали лишь выгиб по синусоиде. Действительно, если бы мы могли указать возможный выгиб, при котором вариация $\delta^2 A$ для одинаковой стрелы прогиба, но при другой форме линии изгиба получилась меньше, чем по формуле (9), то критическая нагрузка также получилась бы меньше. Поэтому мы повторим все вычисления еще раз для случая, когда за изогнутую ось принята пологая дуга параболы. В этом случае вместо уравнения (4) мы будем иметь уравнение:

$$y = 4f \frac{lx - x^2}{l^2},$$

при котором граничные условия на концах также выполнены. Вместо формулы (5) мы после простых вычислений получим:

$$\delta \Delta l = \frac{8f^2}{3l}$$

и, таким образом, вместо формулы (6) будем иметь формулу:

$$P_1 = P_0 - \frac{8f^2}{3l} \cdot \frac{EF}{l}.$$

На основании этого для работы деформации A_1 вместо формулы (8) получится формула:

$$A_1 = A_0 - P_0 \frac{8f^2}{3l} + P_0^2 \cdot \frac{4l}{15EF \cdot l^2} \cdot f^2,$$

а следовательно, для критической силы получится выражение:

$$P_0 = 10 \frac{EI}{l^2}.$$

Но, как мы видим, это значение несколько больше, хотя и не намного, значения, даваемого формулой (10), так как $\pi^2 = 9,87$; следовательно, стержень может легче выгнуться по синусоиде, чем по параболе, и, таким образом, последняя возможность вообще отпадает. Все же сравнение показывает, что результат изменяется очень мало, если синусоида заменяется другой полой кривой простой формы. Этим можно воспользоваться при выводе приближенных решений в тех случаях, где это возможно и где желательно вычисления сократить.

Конечно, предыдущее сравнение еще не доказывает, что выгиб должен происходить действительно по закону синуса. По крайней мере, не исключается возможность, что при выборе для возможных перемещений другой формы упругой линии при изгибе получится несколько меньшая

критическая сила, чем по формуле (10), и если бы это было так, то формулу (10) пришлось бы отбросить и взять меньшее значение.

Конечно, по причинам, изложенным в последнем абзаце § 12, нельзя а priori вывести заключение, что исправление, которое могло бы потребоваться, не может иметь большого практического значения. Это подтверждается также тем, что разница, получающаяся в зависимости от того, какую линию принимают за линию изгиба: синусоиду или параболу, незначительна. Но все же не лишено известного основания и требование объяснить, почему мы как раз берем синусоиду.

Доказательство правильности выбора синусоиды можно дать на основании детального исследования состояния неустойчивого равновесия, в котором будет находиться стержень после того, как он будет выведен из положения равновесия в положение с малой стрелой прогиба f и в этом положении затвердеет. Тогда мы убедимся, что действительно фигурой равновесия будет синусоида. Но, поступая таким образом, мы близко подойдем к уже другому способу, который применяется при выводе формулы для продольного изгиба чаще и который мы теперь рассмотрим подробнее.

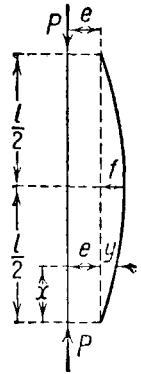
Этот второй путь, которым мы теперь пойдем, исходит из того, что вообще нельзя сделать стержень, осевая линия которого была бы строго прямолинейна, или нагрузить его так, чтобы линия действия внешней силы совпала в точности с осевой линией стержня. Даже при невыполнении хотя бы одного из этих двух предположений, уже при незначительной нагрузке кроме упругого укорочения в направлении оси стержня одновременно получится небольшой выгиб в сторону, который первоначально не будет иметь ничего общего с неустойчивым состоянием равновесия. Деформацию эксцентрично сжатого стержня мы можем легко определить, пользуясь элементарным курсом сопротивления материалов. Этот выгиб будет содействовать дальнейшему увеличению уже существовавшего вначале эксцентриситета точки приложения. После того как нагрузка достигнет известной величины, выгиб будет увеличиваться настолько сильно, что во избежание поломки стержня дальнейшее увеличение нагрузки придется сократить.

При таком подходе к явлению продольного изгиба неустойчивое равновесие, как таковое, совершенно исключается из рассмотрения. При всякой нагрузке и при всяком деформированном состоянии, соответствующем ей, получается только одно однозначно определяемое устойчивое равновесие, и опасный предел узнается по быстрому увеличению упругой деформации. Это совершенно аналогично тому, как если бы мы для доказательства неустойчивости равновесия стержня, поставленного вертикально на гладком полу, предположили, что он имеет незначительное отклонение от вертикального положения, и посмотрели, как велико это отклонение должно быть, чтобы стержень упал, или же показали, что он неизбежно должен упасть, если его нижний конец закруглен или заострен.

Этот подход совершенно равносителен предыдущему, хотя в деталях он и отличается от него. Конечно, преподаватели всегда могут наблюдать, как многие самобытные умы отказываются согласиться с таким подходом и требуют, чтобы им дали объяснение продольного изгиба и для того случая, когда все начальные условия были бы выполнены строго. Наше

изложение, приведенное в начале этой главы, и предназначается для таких читателей. Но хотя мы стремились понять такое желание и пойти ему навстречу, все же ни в коем случае не можем согласиться с требованием, чтобы все задачи, относящиеся к неустойчивому равновесию, рассматривались таким образом. Очень часто второй путь заслуживает предпочтения, и во всяком случае всегда можно решить этим путем все вопросы, относящиеся к неустойчивому равновесию, не нуждаясь для этого ни в каком другом способе.

На фиг. 129 принято, что линия действия силы P параллельна первоначальному направлению прямой оси стержня и расположена от нее на небольшом расстоянии e . Отсюда следует, что уже при незначительной нагрузке стержень кроме укорочения в продольном направлении получит еще небольшой выгиб в сторону. Пусть перемещение на расстоянии x от нижнего конца стержня будет y . Мы будем считать, что эксцентриситет точки приложения силы и ординаты начерчены в таком же масштабе, как и длины x и l .



Фиг. 129.

Изгибающий момент M в сечении x выражается формулой

$$M = P(e + y),$$

и потому для линии изгиба получится дифференциальное уравнение:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P(e + y).$$

Для случая, когда жесткость стержня EI постоянна, решение этого уравнения получится в виде:

$$y = A \sin ax + B \cos ax - e,$$

если под a понимать значение

$$a = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad (11)$$

зависящее от заданных величин. Постоянные интегрирования, обозначенные буквами A и B , получатся из граничных условий, согласно которым при $x=0$ и $x=l$ мы должны иметь $y=0$. Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид:

$$y = e \frac{1 - \cos al}{\sin al} \sin ax + e \cos ax - e,$$

и по этой формуле для прогиба f середины стержня мы при $x = \frac{l}{2}$ после простого преобразования получим следующее выражение:

$$f = e \frac{1 - \cos \frac{al}{2}}{\cos \frac{al}{2}}. \quad (12)$$

Каждой заданной силе P соответствует значение a , определяемое по формуле (11) и, в свою очередь, дающее значение стрелы прогиба f по формуле (12). При $P=0$ обратятся в нуль также a и f , а чем P будет больше, тем больше будут также a и f . Но очень быстрое увеличение f получится при приближении $\frac{al}{2}$ к прямому углу, т. е. к $\frac{\pi}{2}$. В предельном случае

$$al = \pi,$$

мы получим $f = \infty$, и по формуле (11) критическая сила будет иметь выражение:

$$P = EI \frac{\pi^2}{l^2}$$

в соответствии с результатом, найденным другим путем [формула (10)].

Путь, выбранный здесь, является самым коротким для вывода этой формулы, и потому его с полным основанием обычно и предпочитают. Одновременно он показывает, что стержень действительно изгибается по синусоиде.

Здесь следует указать еще на третий путь, о котором уже упоминалось в первом томе, в § 9 на стр. 80 и 81. При этом способе нет необходимости предполагать, что точка приложения силы расположена эксцентрично. Рассматривают состояние равновесия, соответствующее определенной стреле прогиба, и определяют силу P , необходимую для поддержания этого состояния. Условие, необходимое для этого, можно выразить в виде уравнения работы, как это было указано в § 9. Здесь нет необходимости в дальнейшем изложении этого способа ¹⁾.

§ 106. Критическая сила при других граничных условиях.

До сих пор мы для большей наглядности ограничивались рассмотрением наиболее важного случая, когда оба конца стержня могут свободно поворачиваться. Чтобы удовлетворить граничным условиям в случае обоих заземленных концов, мы для возможных перемещений вместо формулы (4) возьмем такую:

$$y = \frac{1}{2} f \left(1 - \cos 2\pi \frac{x}{l} \right) = f \sin^2 \frac{\pi x}{l}, \quad (13)$$

после чего можно повторить с соответствующими изменениями предыдущие вычисления. В качестве окончательного результата мы тогда найдем, как читателю уже известно, что критическая сила будет выражаться формулой

$$P = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}. \quad (14)$$

¹⁾ Следует отметить здесь также обзорную статью проф. С. П. Тимошенко, *Stabilitätsprobleme der Elastizität*, в *Handbuch d. physikalischen und technischen Mechanik*, т. IV, выпуск I, стр. 81—145, вышедшую в 1929 г. В настоящее время она имеется в переводе на русский язык («Вопросы устойчивости упругих систем», Л. 1935). *Прим. ред.*

Если же стержень зашпемлен лишь на конце $x=l$, а конец его $x=0$ может вращаться свободно, то при продольном изгибе он изогнется по линии, уравнение которой можно написать в следующем виде:

$$y = C \left(\alpha_1 x - \frac{\sin \alpha_1 x}{\cos \alpha_1 l} \right). \quad (15)$$

Здесь α_1 нужно выбрать таким образом, чтобы удовлетворялось граничное условие $y=0$ при $x=l$, т. е. величина α_1 должна быть корнем уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 l = \alpha_1 l,$$

причем нужно взять наименьший из бесконечного числа корней этого уравнения; решая уравнение путем ряда проб¹⁾, мы найдем для α_1 значение:

$$\alpha_1 = \frac{4,49}{l}.$$

Для постоянной C в формуле (15) мы можем взять любое значение, лишь бы оно было мало в сравнении с длиной стержня. Каждому достаточно малому значению C соответствует некоторая линия изгиба, и все такие линии одинаково возможны, так как упругое равновесие, к которому относится формула (15), является безразличным. Единственным условием, необходимым для этого, является выбор надлежащей величины силы P , определением которой мы займемся подробнее ниже.

Чтобы доказать высказанное утверждение и определить P , обратимся к фиг. 130. На этом чертеже кроме критической силы P , идущей в направлении оси стержня, показана еще сила H , направленная перпендикулярно к оси его. Эта сила должна препятствовать перемещению в горизонтальном направлении. Дифференциальное уравнение упругой линии получится в следующем виде:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -Py + Hx. \quad (16)$$

При этом оказывается, что выражение (15) действительно будет удовлетворять ему, если взять

$$P = EI \alpha^3$$

и одновременно

$$H = PC \alpha_1 = CEI \alpha_1^3.$$

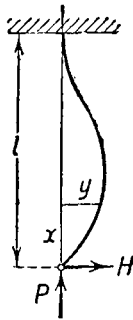
Решение (15) будет удовлетворять также и всем граничным условиям для концов стержня.

¹⁾ Или графически с последующими поправками (для увеличения точности), вычисляемыми хотя бы по способу Ньютона, который очень быстро (зачастую даже с одного раза) дает практически вполне достаточную точность (см. руководство по приближенным вычислениям, например, акад. А. Н. Крылова, Уиттекера и Робинсона, В. П. Ветчинкина). Ряд корней приведенного уравнения см. в книге J a h n k e - E m d e, Funktionenstafeln mit Formeln und Kurven, 1923, Berlin (имеется перевод на русский и украинский языки). Прим. ред.

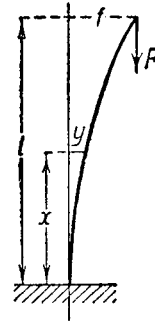
Таким образом сила H , необходимая для удерживания свободно вращающегося конца стержня, увеличивается пропорционально C , т. е. пропорционально стреле прогиба, в то время как для критической силы мы получаем значение, не зависящее от стрелы прогиба и равное

$$P = 4,49^2 \cdot \frac{EI}{l^2} \approx 20 \frac{EI}{l^2}. \quad (17)$$

Наконец, рассмотрим еще случай, указанный на фиг. 131, когда стержень зашпемлен на конце $x=0$, в то время как



Фиг. 130.



Фиг. 131.

конец $x=l$ может перемещаться и одновременно свободно поворачиваться. Когда P достигнет определенной величины, то он длительно будет сохранять равновесие в изогнутом положении, показанном на чертеже. В данном случае дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = P(f - y),$$

и решение, удовлетворяющее граничным условиям, на концах, будет:

$$y = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Последнее требование будет выполнено при условии что величина P выбрана надлежащим образом, именно:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (18)$$

Таким образом мы исчерпали четыре наиболее важных случая продольного изгиба, которые обычно разбираются в начальном курсе сопротивления материалов. Но в приложениях довольно часто встречаются

1) Точнее $20,16 \frac{EI}{l^2}$. Прим. ред.

еще и другие случаи, которые, хотя и аналогичны предыдущим, но все же не могут быть приведены к ним, и потому их приходится рассматривать особо. Здесь обычно математически точное решение задачи не требуется, а желательно получить возможно более простую формулу, которая позволяла бы ее легко приспособить для самых разнообразных условий и вычислять критическую силу с достаточной для практики степенью точности. Подобные формулы можно выводить разными способами. Дадим здесь простой пример, при решении которого мы заранее учтем, что он должен служить образцом при рассмотрении более сложных случаев.

На фиг. 132 в противоположность предыдущей фигуре принято, что боковому смещению конца $x = l$ противодействует сила H , пропорциональная его смещению. Мы можем поэтому положить

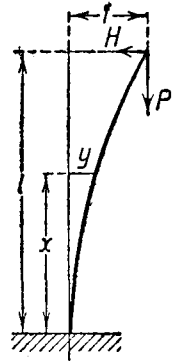
$$H = cf \quad (19)$$

и считать коэффициент c заданным. Случай такого рода встречается часто. Обычно силу H рассматривают как упругую реакцию, оказываемую другими телами, стремящимися удержать верхний конец тоже упругого стержня. Если принять $c = \infty$, то прогиб f должен обратиться в нуль, и мы приходим тогда к уже рассмотренному случаю фиг. 130, которая отличается от фиг. 132 лишь тем, что верхний и нижний концы стержня на обеих фигурах поменялись ролями. Предположив же, что $c = 0$, мы приходим к случаю, рассмотренному непосредственно перед этим, фиг. 131. Поэтому можно сказать, что общий случай, характеризуемый формулой (19), заключает в себе предыдущие как частные случаи.

Силы H , противодействующие согласно формуле (19) увеличению прогиба, могут, впрочем, действовать не только на конце стержня, но также и в других местах его и притом одновременно в нескольких местах, или же могут быть непрерывно распределены по всей длине стержня. Случаи такого рода встречаются в приложениях тоже часто. Поэтому мы заранее зададимся целью изложить способ решения так, чтобы его без труда можно было применить ко всем случаям указанного типа.

По этой причине мы совершенно откажемся от предположения, что продольный изгиб стержня происходит по синусоиде, как об этом можно было бы заключить на основании сравнения с уже рассмотренными случаями. Мы знаем, что при решении задач при помощи теоремы о минимуме работы деформации знание точной формы линии изгиба большой роли не играет, так что в этом отношении руки у нас совершенно развязаны и мы можем задаться тем или другим уравнением линии изгиба, исходя из совершенно других соображений.

Обычно при применении принципа возможных перемещений удобнее всего предполагать, что упругая линия при изгибе представляет алгебраическую кривую. Формула должна быть возможно более простой, но во всяком случае в нее нужно ввести несколько параметров, для того чтобы можно было удовлетворить условиям задачи. Большей частью



Фиг. 132.

для получения окончательного результата с точностью, удовлетворяющей довольно строгим требованиям, достаточно ввести только три параметра.

Примем за уравнение упругой линии при изгибе в рассматриваемом случае следующее:

$$y = a_1 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_3 \left(\frac{x}{l}\right)^4. \quad (20)$$

При выборе такой формы уравнения нами уже учтено, что при $x = 0$ как y , так и $\frac{dy}{dx}$ должны обращаться в нуль в силу того, что стержень внизу зажат. Для производных от y мы получим следующие выражения:

$$y' = \frac{2a_1}{l} \cdot \frac{x}{l} + \frac{3a_2}{l} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{4a_3}{l} \left(\frac{x}{l}\right)^3,$$

$$y'' = \frac{2a_1}{l^2} + \frac{6a_2}{l^2} \cdot \frac{x}{l} + \frac{12a_3}{l^2} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

В рассматриваемом случае верхний конец должен повертываться беспрепятственно, и потому производная y'' при $x = l$ должна обращаться в нуль. Следовательно, три параметра a должны удовлетворять условию

$$a_1 + 3a_2 + 6a_3 = 0, \quad (21)$$

так что независимыми параметрами следует считать лишь два из них.

Вычислим сперва длину осевой линии стержня после изгиба, причем, как и во всех случаях такого рода, предположим, что все ординаты y , а следовательно, и все a в сравнении с длиной l стержня малы. Совершенно так же, как это мы сделали при выводе формулы (5) в предыдущем параграфе, мы получим:

$$\int ds = l + \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx,$$

откуда после простых вычислений найдем:

$$\int ds = l + \frac{1}{2l} \left(\frac{4}{3} a_1^2 + \frac{9}{5} a_2^2 + \frac{16}{7} a_3^2 + 3a_1 a_2 + \frac{16}{5} a_1 a_3 + 4a_2 a_3 \right).$$

Однако в отличие от способа, примененного выше, мы возьмем такие возможные перемещения, чтобы длина осевой линии стержня оставалась такой же, какой она была до перемещений отдельных точек стержня. Так это и должно быть в действительности, если силу P во время этих перемещений считать постоянной. Тогда верхний конец стержня опустится на ту же величину, на которую по предыдущей формуле $\int ds$ отличается от l .

Поэтому работа внешних сил, которая входит в уравнение (3) § 9,

$$\sum \mathfrak{P} \delta \mathfrak{s} - \delta A = 0,$$

выражающее принцип возможных перемещений, в рассматриваемом случае будет иметь следующее выражение:

$$\sum \delta \delta z = \frac{P}{2l} \left(\frac{4}{3} a_1^2 + \frac{9}{5} a_2^2 + \frac{16}{7} a_3^2 + 3a_1 a_2 + \frac{16}{5} a_1 a_3 + 4a_2 a_3 \right),$$

т. е. будет бесконечно малой величиной 2-го порядка, если все a малые величины 1-го порядка.

Работу деформации A_1 стержня, составляющую часть полной работы A , мы опять вычислим по формуле (1) предыдущего параграфа. Она будет состоять из двух членов, из которых первый при выбранной нами возможной деформации не изменится, так как P не изменяется. Второй же член добавляется вновь и представляет δA_1 . Изгибающий момент M мы выразим через деформации, положив

$$M = -EIy'',$$

вследствие чего δA_1 будет иметь следующее выражение:

$$\delta A_1 = \frac{1}{2EI} \int M^2 dx = \frac{1}{2} EI \int (y'')^2 dx.$$

Вместо y'' мы подставим найденное выражение и выполним интегрирование в пределах от $x=0$ до $x=l$. После простых вычислений мы получим:

$$\delta A_1 = \frac{2EI}{l^3} \left(a_1^2 + 3a_2^2 + \frac{36}{5} a_3^2 + 3a_1 a_2 + 4a_1 a_3 + 9a_2 a_3 \right).$$

Кроме работы деформации A_1 самого стержня мы должны еще рассмотреть работу деформации δA_2 тел, удерживающих верхний конец стержня. Точка приложения силы H , противодействующей перемещению, проходит путь f , который по формуле (20) получится равным

$$f = a_1 + a_2 + a_3,$$

и потому на основании формулы (19) для работы деформации δA_2 получится выражение:

$$\delta A_2 = \frac{1}{2} c (a_1 + a_2 + a_3)^2.$$

Обе части полной работы деформации δA представляют бесконечно малые величины 2-го порядка, что мы установили прежде и относительно работы внешней силы P . Таким образом условие равновесия

$$\sum \delta \delta z - \delta A = 0,$$

в которое должны входить лишь бесконечно малые величины 1-го порядка, будет удовлетворяться непосредственно. Равновесие будет неустойчивым, если работа внешней силы P , стоящая в левой части этого равенства, будет больше приращения A , и будет устойчивым в противоположном случае. За критическую силу нужно считать ту силу, при которой один из случаев равновесия переходит в другой, т. е. при которой мы будем

иметь безразличное равновесие. Это и будет то значение P , при котором предыдущее уравнение удовлетворяется с точностью до величин 2-го порядка малости. Условием для этого является выполнение следующего равенства:

$$\begin{aligned} \frac{P}{2I} \left(\frac{4}{3} a_1^2 + \frac{9}{5} a_2^2 + \frac{16}{7} a_3^2 + 3a_1 a_2 + \frac{16}{5} a_1 a_3 + 4a_2 a_3 \right) = \\ = \frac{2EI}{l^3} \left(a_1^2 + 3a_2^2 + \frac{36}{5} a_3^2 + 3a_1 a_2 + 4a_1 a_3 + 9a_2 a_3 \right) + \frac{1}{2} c (a_1 + a_2 + a_3)^2. \end{aligned}$$

Постоянные α , входящие в это равенство, связаны зависимостью (21), при помощи которой можно выразить a_1 через a_2 и a_3 ,

$$a_1 = -3a_2 - 6a_3.$$

Подставив это выражение в уравнение, мы разделим все члены последнего на a_2^2 и затем для сокращения положим:

$$\frac{a_3}{a_2} = u.$$

Тогда уравнение для критической силы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{P}{2I} \left(4 \frac{4}{5} + 24 \frac{2}{5} u + 21 \frac{3}{35} u^2 \right) = \\ = \frac{2EI}{l^3} \left(3 + 15u + 19 \frac{1}{5} u^2 \right) + \frac{1}{2} c (4 + 20u + 25u^2). \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь u представляет пока еще произвольный параметр, от выбора которого зависит форма упругой линии при изгибе, взятой нами при применении принципа возможных перемещений. Свободой в выборе этого параметра мы воспользуемся для того, чтобы возможно более приблизиться к действительной форме упругой линии, а следовательно, и к истинному значению критической силы, насколько это позволяет вообще выбранная по нашему усмотрению формула (20). Этого мы достигнем, если будем рассматривать P как функцию от u , определяемую формулой (22). Продифференцируем P по u , приравняем производную нулю и полученное уравнение вместе с уравнением (22) используем для определения неизвестных P и u ¹⁾. В каждом отдельном случае

1) В отличие от предыдущих примеров здесь, вследствие наличия в исходном выражении возможной формы упругой линии большего количества параметров, задача привела к иной ее постановке. Эти параметры не выходят общим множителем левой части уравнения, выражающего условие безразличного равновесия, в правой части которого будет стоять нуль, а потому критическое значение внешней силы P не определяется сразу, а выражается через эти параметры (вернее, через их отношения). Таким образом величина критической силы остается неопределенной и может быть найдена из условия, что параметры должны принять такие значения, при которых переход от устойчивой к неустойчивой форме равновесия, совершающийся через состояние безразличного равновесия, произойдет при наименьшем значении силы P . В такой постановке проблемы проф. С. П. Тимошенко предложил свой способ применения метода Ритца в задачах устойчивости (см. «Об устойчивости упругих систем», Киев 1910). *Прим. ред.*

решение этой системы уравнений проще всего получить путем ряда проб, именно принимая для u в формуле (22) последовательно ряд положительных и отрицательных значений, вычисляя соответствующие значения P и изображая графически зависимость P от u . Наименьшее значение, которое мы таким путем получим, и будет подходить к истинной критической силе ближе всего.

Чтобы проверить, насколько этот способ решения является точным, мы сделаем сейчас все вычисления полностью для двух предельных случаев: $c=0$ и $c=\infty$. Если мы в формуле (22) положим $c=0$, то получится:

$$P = \frac{4EI}{l^2} \frac{3 + 15u + 19\frac{1}{5}u^2}{4\frac{4}{5} + 24\frac{2}{5}u + 31\frac{3}{35}u^2}.$$

Если это выражение продифференцировать по u и приравнять производную нулю, то мы получим уравнение:

$$2,1943 u^2 - 2,1943 u = 1,2.$$

Корни этого уравнения будут:

$$u_1 = +1,393 \quad \text{и} \quad u_2 = -0,393.$$

Первый из этих корней соответствует минимуму P , причем после подстановки этого значения u и после соответствующих вычислений мы получим:

$$P = 2,468 \frac{EI}{l^2}.$$

Эта формула с весьма удовлетворительной точностью совпадает с точно формулой (18), в которой вместо 2,468 стоит коэффициент $\frac{\pi^2}{4} = 2,467$.

В случае $c=\infty$ стрела прогиба f должна быть равна нулю, следовательно,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

что совместно с равенством (21) приводит к $u = -0,4$. Если это значение подставить в формулу (22), то мы получим:

$$P = 21,00 \frac{EI}{l^2},$$

что также достаточно хорошо совпадает с формулой (17). Впрочем, значение P , как это и должно быть, по этой формуле получается

1) Это значение приблизительно на 4,17% больше даваемого формулой (17), таким образом для упругого закрепления конца при значительной жесткости связи точность решения становится менее удовлетворительной. Получение точного решения и для более общего случая упруго-зашемленного нижнего конца стержня не представляет особых затруднений. *Прим. ред.*

несколько большим, чем по точной. Это сравнение подтверждает, как можно было ожидать и заранее, что выбранная формула (20) вполне пригодна для вывода приближенных решений с достаточной для практики точностью. Поэтому ее можно уверенно применять и в других ранее указанных случаях. Преимущество этой формулы заключается в том, что ее можно применить без каких бы то ни было изменений в самом ходе вычислений и лишь с самыми незначительными изменениями в структуре окончательного уравнения (22).

В заключение дадим еще несколько более детальное обоснование применения трехчленной формулы (20), сделав по этому поводу следующие замечания. Из трех постоянных, которые она содержит, можно, как оказалось, считать независимыми параметрами лишь две из них, так как третья связана с первыми двумя равенством (21). Но формула должна быть достаточно общей, чтобы она могла представить также упругую линию при изгибе с точкой перегиба между $x=0$ и $x=l$, так как согласно условиям задачи существование такой точки можно ожидать заранее; поэтому, чтобы осуществить последнее условие, нам необходимо и достаточно взять трехчленную формулу.

Если мы предположим, что конец стержня на фиг. 132 не может поворачиваться свободно, а упруго защемлен так, что повороту противодействует момент, пропорциональный углу поворота, то, конечно, условие (21) отпадает, и в уравнении работы добавляется новый член, пропорциональный квадрату угла поворота, т. е. квадрату значения y' в точке $x=l$. Для этого случая все вычисления также легко повторить с незначительными изменениями. Следует еще указать, что кроме рассмотренных здесь типичных опор интересен еще случай *призматических опор*¹⁾, при которых соответствующее концевое сечение может поворачиваться только около определенной, лежащей в плоскости сечения оси, в то время как в перпендикулярном направлении стержень нужно считать защемленным. Значения критической силы для таких граничных условий указал Филлунгер (Fillunger) в одной работе, помещенной в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», т. 6, стр. 294, 1926²⁾.

§ 107. Устойчивость сжатых пластинок.

Рассмотрим сперва начерченную на фиг. 133 прямоугольную пластинку со сторонами $2a$ и $2b$, с равномерно распределенной вдоль каждой из боковых сторон сжимающей нагрузкой p_1 в направлении оси y и такой

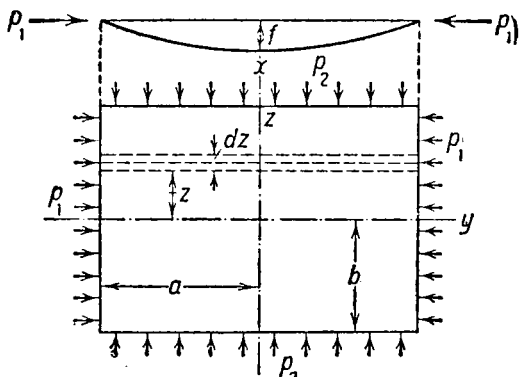
¹⁾ В условиях, близких к этому случаю, работают так называемые листовые шарниры, применяемые в мостах и в металлических конструкциях. *Прим. ред.*

²⁾ Устойчивость стержней при различных случаях приложения нагрузки, для различных законов изменения момента инерции их поперечного сечения, для стержней, ослабленных вырезами, и пр., рассмотрена в многочисленных работах акад. А. Н. Динника и его учеников: Гришковой, Локишина, Лыскова и др. (см. обзорную статью в Сборнике: «Механика за 15 лет», М. Л. 1932, стр. 161, также обзорную статью в «Вест. инж. и тех.» № 11, стр. 181, 1932).

Вопросом устойчивости криволинейных стержней, а также устойчивостью одновременно сжатых и скрученных стержней (первая работа принадлежит Greenhill'у) занимался проф. Николай (см. его диссертацию, а также журнал «Вестник механики и прикладной математики», 1929 и «Математический сборник», 1931, также «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech», 1926). *Прим. ред.*

же нагрузкой p_2 в направлении оси z , причем p_1 и p_2 представляют нагрузку, отнесенную к единице площади кромок пластинки. Спрашивается, как велики могут быть эти сжимающие силы, чтобы плоская форма равновесия пластинки, начерченной в проекции на горизонтальную плоскость, не теряла своей устойчивости при шарнирном закреплении сторон пластинки.

Для ответа на этот вопрос вычислим, насколько увеличится работа деформации, если пластинка действительно выпучится и получится стрела прогиба f , которую можно считать бесконечно малой. Мы уже знаем, что при этом форма изогнутой поверхности не играет большой роли, лишь бы пластинка была искривлена в центре сильнее, чем у сторон контура. Поэтому мы можем применить непосредственно простую формулу, использованную в третьей главе для определения жесткости пластинки при изгибе ее силами, перпендикулярными к ней. Так же безразлично, будем ли мы исходить при этом из тригонометрической формулы § 19 или из алгебраической § 20. В первом случае мы для работы деформации изогнутой пластинки по формуле (17) § 19 должны взять выражение



Фиг. 133.

$$A = 0,258 \cdot \frac{m^2}{m^2 - 1} E h^3 \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^3 b^3} f^2,$$

которое получится, если вычисления продолжить еще несколько далее, чем там, а в другом случае по формуле (32) из § 20 получится:

$$A = 0,254 \frac{m^2}{m^2 - 1} E h^3 \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^3 b^3} f^2,$$

что отличается от предыдущего значения весьма мало.

Конечно, в рассматриваемом случае мы имеем дело не только с одной деформацией изгиба. Еще до выпучивания в пластинке совершена работа деформации A_0 , обусловленная сжатием пластинки в ее плоскости во всех направлениях давлениями p_1 и p_2 . Однако теперь речь идет лишь о приращении A_0 вследствие выпучивания и это приращение будет выражаться как раз формулами, написанными выше. Чтобы доказать это, будем исходить из выражения удельной работы деформации для обобщенного плоского напряженного состояния по формуле (21) § 10:

$$A = \frac{G}{m-1} [m(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) + 2\epsilon_1\epsilon_2].$$

Вследствие выпучивания ϵ_1 изменится на величину $\Delta\epsilon_1 = a_1 x$, которая во всяком случае будет пропорциональна расстоянию x соответствующей точки от срединной поверхности пластинки, и точно так же ϵ_2 изменится на величину $\Delta\epsilon_2 = a_2 x$. Вызванное этим приращение δA будет выражаться формулой

$$\delta A = \frac{G}{m-1} \left\{ 2x [m(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2) + \epsilon_1 a_2 + \epsilon_2 a_1] + x^2 [m(a_1^2 + a_2^2) + 2a_1 a_2] \right\}.$$

Работа деформации dA элемента пластинки, имеющего площадь dF , будет равна

$$dA = dF \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} A dx,$$

а приращение δdA , испытываемое величиной dA вследствие выпучивания, подобно этому выразится формулой

$$\delta dA = dF \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta A dx.$$

Если сюда вставить выражение δA , написанное выше, и выполнить интегрирование, то получится:

$$\delta dA = dF \cdot \frac{Gh^3}{12(m-1)} [m(a_1^2 + a_2^2) + 2a_1 a_2],$$

так как член в δA , содержащий первую степень x , при интегрировании

в пределах между $x = -\frac{h}{2}$ и $x = +\frac{h}{2}$ выпадает. То, что при этом

остается, и представляет как раз значение работы деформации одного изгиба, так как ϵ_1 и ϵ_2 в полученную формулу не входят. Это и доказывает правильность утверждения, высказанного выше. В этом отношении изогнутая пластинка ведет себя так же, как и изогнутая балка, у которой работа деформации при изгибе не зависит от одновременно действующей осевой нагрузки ¹⁾.

Теперь составим выражение для работы, совершенной силами p_1 и p_2 при возможной деформации. На концах полоски шириною dz , проходя-

¹⁾ Указанная здесь независимость действия сил изгибающих и сил продольно-осевых, которая проявляется в том, что в выражение полной работы деформации входят лишь члены с квадратами этих сил, но не входят члены с произведением их, имеет место лишь для малых перемещений от первоначально прямолинейной или плоской формы тела *Прим. ред.*

щей параллельно оси y на расстоянии z от нее, будут действовать силы $p_1 h dz$, а работа, которую они совершат, найдется путем умножения их на уменьшение расстояния между точками их приложения. При выпучивании пластинки полоска прогнется на величину f_1 , которая составит некоторую дробную часть от стрелы прогиба f в центре пластинки.

По формуле (14) из § 19 мы можем положить:

$$f_1 = f \cos \frac{\pi z}{2b},$$

и для произвольной точки, расположенной на расстоянии y от оси z , мы получим перемещение:

$$\xi = f_1 \cos \frac{\pi y}{2a}.$$

Поэтому для длины полоски после деформации получится выражение:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} ds &= 2 \int_0^a dy \sqrt{1 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2} = 2 \int_0^a \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2\right] dy = \\ &= 2 \int_0^a \left(1 + \frac{1}{2} f_1^2 \cdot \frac{\pi^2}{4a^2} \sin^2 \frac{\pi y}{2a}\right) dy = 2a \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \frac{f_1^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Мы рассматривали возможную деформацию, при которой осевая линия полоски не изменяла своей длины. Поэтому член в выражении длины дуги, содержащий f_1 , дает путь, на котором сжимающие силы, приложенные к концам полоски, совершали работу. Следовательно, величина работы составляет:

$$p_1 h dz \cdot \frac{\pi^2 f_1^2}{8a} \text{ или } p_1 h \frac{\pi^2 f^2}{8a} \cos^2 \frac{\pi z}{2b} dz.$$

Чтобы получить работу всех сжимающих сил p_1 , мы должны проинтегрировать это выражение по z в пределах от $z = -b$ до $z = +b$. Таким путем мы получим выражение:

$$p_1 h \cdot \frac{\pi^2 f^2}{8a} b.$$

Сюда добавляется еще работа сил p_2 , действующих на двух других сторонах прямоугольника, которую можно определить совершенно таким же образом, и потому ее можно получить из предыдущего выражения путем простой перестановки букв. Поэтому в результате в уравнении, выражающем принцип возможных перемещений, мы будем иметь член:

$$\sum \mathfrak{B} \delta \mathfrak{B} = \frac{\pi^2}{8} f^2 h \left(p_1 \frac{b}{a} + p_2 \frac{a}{b} \right).$$

Эта величина, так же как и прежняя работа изгиба, будет бесконечно малой величиной 2-го порядка, если f представляет бесконечно малую величину 1-го порядка. При предельной критической нагрузке оба выра-

жения становятся равными, и мы приходим к следующему условию устойчивости плоской формы равновесия пластинки:

$$\frac{\pi^2}{8} h \left(p_1 \frac{b}{a} + p_2 \frac{a}{b} \right) = 0,258 \frac{m^2}{m^2 - 1} E h^3 \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^3 b^3}.$$

Если сюда подставить затем $m = 4$ и проделать соответствующие вычисления, то получится:

$$p_1 b^3 + p_2 a^3 = 0,223 E h^3 \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2}, \quad (23)$$

так что для случая квадратной пластинки формула упрощается и принимает вид:

$$p_1 + p_2 = 0,892 \cdot E \frac{h^2}{a^2}, \quad (24)$$

где a обозначает половину стороны квадрата.

Таким образом сжимающие нагрузки p_1 и p_2 равноценны в смысле их влияния на потерю квадратной пластинкой устойчивой формы равновесия. Например, одна из величин p_1 и p_2 может сделаться равной нулю, если другая будет на столько же больше. Если же они будут одинаковы, то каждая из них должна равняться половине того значения, которое она имела бы при равенстве нулю значения другой. Если положить $p_1 = p_2 = p$, то мы будем иметь:

$$p = 0,446 E \frac{h^2}{a^2}. \quad (25)$$

Если же мы положим $p_1 = 0$, то в случае прямоугольной пластинки

$$p_2 = 0,223 E h^3 \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 b^2}, \quad (26)$$

и в предельном случае $a = \infty$ эта формула переходит в следующую:

$$p_2 = 0,223 E \frac{h^2}{b^2}. \quad (27)$$

В этом случае прямоугольная пластинка находится в сущности в таких же условиях, как и стержень прямоугольного поперечного сечения любой ширины d , длиною $2b$, при продольном изгибе силами $p_2 h d$. Таким образом мы имеем возможность сравнить формулы, выведенные здесь, с формулой (10) § 105:

$$P_0 = \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Если сюда вставить $I = \frac{h^3 d}{12}$, а затем $P_0 = p_2 h d$ и $l = 2b$, то получится:

$$p_2 = 0,206 E \frac{h^2}{b^2}.$$

1) При умножении численного коэффициента этой формулы на $\frac{m^2}{m^2 - 1}$, при $m = 4$, получим 0,2197, что несколько меньше найденного выше для пластинки коэффициента (на 1,5%), как и следовало ожидать, так как для искривленной поверхности было взято приближенное выражение. *Прим. ред.*

Разница в сравнении с формулой (27) объясняется наличием множителя $\frac{m^2}{m^2-1}$ в выражении работы деформации изогнутой пластинки, который выпадает в формуле для стержня шириной d , вырезанного из пластинки. Препятствие поперечному сужению, получающееся в сжатой пластинке и выражающееся наличием этого множителя, оказывает несколько большее сопротивление выпучиванию, чем в случае узкой полочки, которая расширяется или сжимается в поперечном направлении беспрепятственно.

Совершенно аналогично прямоугольной пластинке исследуется и вопрос об устойчивости плоской формы равновесия круглой пластинки. Кто придает большое значение точным решениям, тот в случае круглой пластинки будет чувствовать себя удовлетворенным в большей степени, чем в случае прямоугольной пластинки, так как мы можем совершенно аналогично тому, как это оказалось возможным в третьей главе при рассмотрении изгиба круглых пластинок, симметрично нагруженных силами, перпендикулярными к их поверхности, вывести сравнительно просто точное выражение для критической нагрузки. Но для практических целей это не имеет никакого значения, и потому мы предпочитаем вывести формулу для критической нагрузки круглой пластинки совершенно таким же способом, как и для прямоугольной. Для этой цели нам нужно лишь составить выражение работы деформации при изгибе для такой возможной формы изогнутой поверхности со стрелой прогиба f , которая не очень отличалась бы от получающейся при потере устойчивости плоской формы. В третьей главе такого готового выражения мы непосредственно не имеем, так как там задачу, относящуюся к круглой пластинке, мы решали на основании дифференциального уравнения упругой поверхности, а не на основании теорем о работе упругих сил. Но мы легко можем его вывести дополнительно. По формуле (103), найденной нами в § 27, стрела прогиба f круглой пластинки, нагруженной в центре сосредоточенной силой P и свободно опертой по контуру, выражается следующим образом:

$$f = \frac{3(m-1)(3m+1)}{4m^2 E h^3} a^2 \frac{P}{\pi},$$

где a обозначает радиус пластинки. Мы можем предположить, что форма упругой поверхности не очень отличается от той, которая получается при переходе плоской формы равновесия в искривленную. Для соответствующей полной работы упругих сил мы имеем выражение:

$$A = \frac{1}{2} P f = \frac{2\pi m^2 E h^3}{3(m-1)(3m+1) a^2} \cdot f^2.$$

Далее, нам нужно еще выражение для работы сжимающих сил p , равномерно распределенных по контуру пластинки; это выражение можно вывести таким же образом, как и прежде для прямоугольной пластинки. Если для этой цели мы примем меридиан упругой поверхности за очень

пологую косинусоиду, то после простого повторения прежних вычислений мы получим, что диаметр кругового контура уменьшится на величину $2a \cdot \frac{\pi^2 l^2}{16a^2}$ (1). Поэтому для суммы работ при возможных перемещениях всех сжимающих сил, приложенных на контуре, получится выражение:

$$\sum \delta z \delta z = p \frac{\pi^2 h}{8} f^2.$$

Приравняв его величине A , мы получим критическую нагрузку:

$$p_{кр} = \frac{16m^2}{3\pi^2 (m-1)(3m+1)} E \frac{h^2}{a^2} \quad (28)$$

При $m=4$ эта формула после дальнейших вычислений перейдет в следующую

$$p = 0,222 E \frac{h^2}{a^2} \quad (29)$$

Если сравнить это значение критической нагрузки со значением, найденным для квадратной пластинки со стороной $2a$ по формуле (25), то

1) Принятие указанной величины для определения сближения концов диаметра пластинки будет принципиально неверным, так как равенство работ сил внешних и сил упругих должно быть написано для одной и той же принятой «возможной» формы искривления. Поскольку последняя работа вычислена для формы срединной поверхности пластинки, получившейся от действия сосредоточенной силы, приложенной в центре опертой по контуру пластинки, то надлежит и работу первых сил (давлений по контуру) вычислять для того же искривления пластинки, а не иного, как это сделано автором. Если внести указанное исправление и методом Феппла (т. е. по меридиональной кривой) определить сближение, то, принимая обычную формулу для ξ_0 :

$$\xi_0 = \frac{3P(m^2-1)}{2\pi E h^2 m^2} \left[r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \frac{3m+1}{m+1} (a^2 - r^2) \right],$$

получим для него из формулы

$$\delta(2a) = 2 \int_0^a \left(\frac{d\xi_0}{dr} \right) dr$$

следующую величину:

$$\delta(2a) = \frac{16}{27} \cdot \frac{17m^2 + 10m + 2}{(3m+1)^2} \cdot \frac{f_0^2}{a},$$

где f_0 есть прогиб центра.

Отношение этого выражения к принятому Фепплом равно

$$\frac{16}{27} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{17m^2 + 10m + 2}{(3m+1)^2},$$

которое при $m=4$ оказывается равным 0,893, т. е. действительное значение работы контурных давлений будет меньше принятого Фепплом. Вследствие этого величина критического давления получится в $\frac{1}{0,893} = 1,12$ раза, или, иными словами, на 12% больше найденного Фепплом значения. *Прим. ред.*

2) Более правильным будет определять значение критического давления в соответствии со сказанным в примечании 1) по следующей формуле:

$$p_{кр} = \frac{9}{8} \cdot \frac{(3m+1)m^2}{(m-1)(17m^2+10m+2)} \cdot \frac{Eh^2}{a^2} \quad \text{Прим. ред.}$$

оказывается, что она составляет лишь половину последней. На первый взгляд этот результат кажется неожиданным, так как при изгибе поперечными силами квадратная пластинка была приблизительно равнопрочна круглой, получающейся из квадратной путем обрезывания углов. Но в случае выпучивания сжимающими силами дело обстоит иначе. Причину разного отношения к этим двум видам нагрузки отчасти можно видеть в том, что углы прямоугольной пластинки удерживаются вдоль двух ребер, а поэтому более предохранены от выпучивания, и пластинка получается как бы зажатой в углах. К этому еще добавляется следующее обстоятельство. Сжимающие силы p , приложенные вблизи углов, не могут действовать на выпучивание в значительной степени, так как они действуют в направлении соседних сторон, соответственно подпертых, вследствие чего и затрудняется выпучивание.

В заключение вычислим еще критическую нагрузку для круглой пластинки, защемленной по всему контуру. Для этого мы будем исходить из уравнений (76) и (77) третьей главы (том I, стр. 193) для упругой поверхности защемленной эллиптической пластинки с равномерно распределенной нагрузкой p , вызывающей изгиб пластинки. Если в эти уравнения мы положим $b = a$, от чего эллипс перейдет в круг, то эти формулы будут иметь вид:

$$\xi_0 = \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^2 \cdot f \quad \text{и} \quad f = \frac{3(m^2 - 1)}{16m^2 Eh^3} a^4 p.$$

Мы используем здесь эти формулы для определения работы деформации A при изгибе защемленной пластинки, характеризуем стрелой прогиба f . Эта работа будет выражаться следующим образом:

$$A = \frac{1}{2} p \int_F \xi_0 \, dF = \pi p f \int_0^a r \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^2 \, dr = \frac{\pi}{6} p a^3 \cdot f.$$

Если при помощи формулы для стрелы прогиба выразить p через f , то мы получим для A выражение:

$$A = \frac{8\pi m^2}{9(m^2 - 1)} \cdot \frac{Eh^3}{a^2} f^3,$$

чем и исчерпывается первая часть нашей задачи.

Для длины дуги после выпучивания мы уже известным образом получим формулу:

$$\int_0^a ds = a + \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial r}\right)^2 \, dr = a + \frac{64}{105} \cdot \frac{f^2}{a}.$$

Последний член в этом выражении дает путь, проходимый каждой из сжимающих сил, и потому для работы этих сил мы получим выражение:

$$\sum \mathfrak{F} \delta \mathfrak{z} = \frac{128}{105} \pi h p f^2.$$

Приравнивание этого выражения работе упругих сил при изгибе дает формулу для критического давления:

$$p = \frac{35m^2}{48(m^2 - 1)} E \frac{h^2}{a^2} = 0,778 E \frac{h^2}{a^2}, \quad (30)$$

если положить в последней части равенства $m = 4$. Поэтому в случае защемленной пластинки критическая сила будет в $3^{1/2}$ раза больше, чем в случае пластинки, края которой могут повертываться около опорного контура ¹⁾.

Конечно, нам ничто не мешало бы определить совершенно аналогичным образом критическую нагрузку для защемленной прямоугольной или квадратной пластинки. Но сейчас мы этого делать не будем.

1) Полученные Фепплом в конце этого параграфа значения критических давлений, равномерно распределенных по контуру круглой пластинки, с указанной для опертой по контуру пластинки поправкой (см. примечание редактора на стр. 320) для железных пластинок, при $m = \frac{10}{3}$ принимают следующие значения:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ для опертой пластинки: } P_{кр} = 0,263 \frac{Eh^2}{a^2} \\ 2) \text{ для неповорачивающейся по контуру: } P_{кр} = 0,831 \frac{Eh^2}{a^2} \end{array} \right\} \text{ при } m = \frac{10}{3}.$$

Эти величины сильно отличаются от найденных точным методом (если брать решение для пластинки в бесселевых функциях) акад. Динником А. Н., который получил соответственно:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ для опертого контура: } P_{кр} = 0,384 \frac{Eh^2}{a^2} \\ 2) \text{ для неповорачивающегося контура: } P_{кр} = 1,343 \frac{Eh^2}{a^2} \end{array} \right\} \text{ при } m = \frac{10}{3}.$$

Написанные здесь формулы получены простым преобразованием и пересчетом коэффициентов из формул, приведенных на стр. 285 и 286 его работы «Применение функций Бесселя в задачах теории упругости», «Известия Новочеркасского политехнического ин-та», т. II, 1913 г., в которой рассмотрен ряд важнейших для практики примеров.

Стойкая значительная разница в коэффициентах объясняется тем, что в отличие от Феппла Динник определяет работу контурных давлений как произведение погонной нагрузки на разность площадей срединной поверхности неискривленной пластинки и проекции искривленной срединной поверхности на первоначальное ее положение.

Для элемента это даст:

$$\delta \Delta F = \sqrt{1 - \left(\frac{d\xi_0}{dr}\right)^2} \cdot r \, dr \, d\theta - r \, dr \, d\theta,$$

откуда полная разность найдется по формуле:

$$\delta F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left(\frac{d\xi_0}{dr}\right)^2 r \, dr.$$

Если же, следуя приему Феппла, произвести вычисление разности площадей по разности первоначального диаметра пластинки и проекции меридионального се-

В заключение укажем еще на подробное исследование Тимошенко об устойчивости плоской формы равновесия пластинок, которое он опубликовал в журнале «Ztschr. f. Math. u. Phys.», т. 58, стр. 343, 1910¹⁾. В этой работе рассмотрены также и разные способы закрепления пластинок на опорах.

§ 108. Устойчивость плоской формы изгиба.

Балка, работающая на изгиб, поперечное сечение которой имеет главные оси с разными моментами инерции и плоскость изгиба которой совпадает с плоскостью ее наибольшей жесткости, будет вывертываться в сторону, как только нагрузка, производящая изгиб, перейдет известный предел.

Мы рассмотрим простейший случай, когда поперечное сечение стержня представляет прямоугольник, ширина l которого в сравнении с высотой h мала. Теория устойчивости плоской формы упругого равновесия такого бруса была впервые подробно изучена Прандтлем (Prandtl)²⁾ в его мюнхенской диссертации 1899 г.

чения срединной поверхности, то мы придем к такой формуле:

$$\delta F_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \, d\theta \int_0^a \left(\frac{d\xi_0}{dr} \right)^2 dr,$$

что, как это непосредственно явствует из сравнения, дает большую величину.

Следует отметить, что акад. Динник А. Н. получил при применении метода энергии совершенно те же результаты, что и при решении дифференциального уравнения устойчивости круглой пластинки, нагруженной только контурными силами.

Это уравнение имеет вид:

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 \xi_0 + ph \cdot \nabla^2 \xi_0 = 0,$$

где ∇^2 — лапласов оператор в полярных координатах, p — давление на квадратную единицу торцевой поверхности контура пластинки, h — толщина ее, а D — цилиндрическая жесткость.

Это уравнение легко получается исключением поперечной равномерной нагрузки q , действующей перпендикулярно к срединной плоскости пластинки, из двух следующих уравнений:

$$\nabla \nabla^2 \xi = \frac{q}{D} \text{ — уравнение поперечного изгиба пластинки,}$$

$$\nabla^2 \xi_0 = -\frac{q}{H} \text{ — уравнение для мембраны, где } H = ph \text{ есть погонная, равномерная сила натяжения мембраны.}$$

В цитированной выше работе акад. Динник А. Н. дает решение и последней задачи о провисании круглой мембраны в функциях Бесселя, что при наличии подробных таблиц для них более удобно, чем упомянутое в книге «Сила и деформация», т. I, стр. 252 решение Хенки. *Прим. ред.*

1) Эта работа представляет изложение книги «Об устойчивости упругих систем», Киев 1911, «Изв. Киевск. политехн. ин-та». См. также его старый «Курс теории упругости». *Прим. ред.*

2) Кроме Прандтля этой задачей занимались: Nussbaum F., Das Ausknicken von Trägern, «Ztschr. f. Math. u. Phys.», т. 55, стр. 297—310, 1907; Тимошенко С. П., см. цитированную выше работу; Коробов А., «Изв. Киевск. политехн. ин-та», 1911; Динник А. Н., «Изв. Донск. политехн. ин-та в Новочеркасске», т. II, стр. 47—76, 1913, давший решение в бесселевых функциях, и, наконец, Federhofer K., «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», стр. 43, 1926. *Прим. ред.*

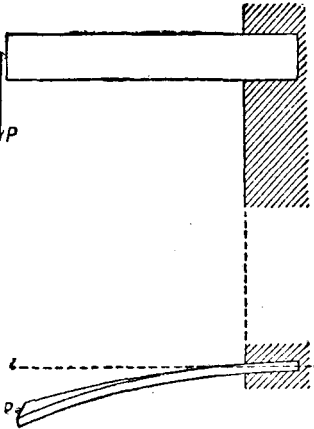
О характере этого явления можно легко составить себе представление при помощи рейшины, зажав один конец так, чтобы плоскость рейшины заняла вертикальное положение, и медленно увеличивая нагрузку на другом конце до тех пор, пока равновесие не потеряет своей устойчивости. Даже если рейшина будет опираться обоими концами и будет нагружена посредине, то и в этом случае при достаточно большой нагрузке произойдет также явление потери устойчивости. Необходимо лишь, чтобы рейшина на обоих концах стояла на ребре. Мы изучим явление на простом примере полосы, защемленной на одном конце и нагруженной на другом, высота h поперечного сечения которой в сравнении с шириной b мала. Мы считаем полосу защемленной таким образом, чтобы сила P на свободном конце проходила в направлении главной оси поперечного сечения, соответствующей наибольшей жесткости балки, по возможности точно, т. е. чтобы кривой нагрузки не было, и потому можно ожидать перемещения полосы лишь в вертикальной плоскости. При помощи пружинных весов можно измерить ту силу, которую нужно приложить в горизонтальном направлении к свободному концу полосы, чтобы отклонить конец полосы в сторону на определенное расстояние. Эта сила с увеличением вертикальной нагрузки полосы будет уменьшаться и, наконец, при определенном значении нагрузки P , при так называемой критической нагрузке, обратится в нуль. В то время как полоса до достижения силой своего критического значения находилась в устойчивом равновесии, так как при прекращении действия боковой силы она снова возвращалась бы в свое первоначальное положение равновесия, при действии критической нагрузки или при переходе за критическое значение этого уже не будет. В первом случае равновесие будет безразличным, а во втором неустойчивым. Если воспользоваться направляющими, препятствующими концу полосы повертываться в сторону, то нагрузку можно сделать даже и больше критического значения, причем примерно при удвоенном значении критической нагрузки произойдет вывертывание в сторону середины полосы. При этом предполагается, что длина и размеры поперечного сечения находятся в таком соотношении между собой, что при действии удвоенной критической нагрузки нормальные напряжения от изгиба не превзойдут предела упругости материала. Вообще о явлении потери устойчивости можно говорить лишь при том условии, что напряжения не превосходят предела упругости материала. Само собой разумеется, что, в первую очередь, важно знать наименьшую критическую силу, производящую опрокидывание полосы в сторону, так как эта критическая сила дает крайний предел допустимой нагрузки.

На фиг. 134 начерчена вертикальная проекция полосы до достижения нагрузкой критического значения. Фиг. 135 показывает пластинку в горизонтальной проекции после перехода нагрузки за критическое значение. Здесь сила P проектируется как точка. Из чертежа видно, что полоса после перехода нагрузки за критическое значение принимает совершенно другое положение равновесия. Одновременно мы видим, что полоса как в своем новом положении равновесия, так и при переходе от старого к новому положению равновесия будет работать не только на изгиб, но и на кручение. Поворот поперечного сечения будет производиться крутящим

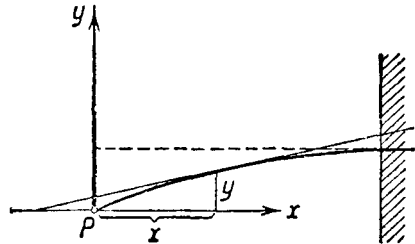
моментом силы P , получающимся вследствие отклонения конца полосы в сторону и имеющим наибольшее значение для поперечного сечения в месте защемления, так как для него плечо силы принимает также наибольшее значение.

После этого рассмотрения явления потери устойчивости плоской формы равновесия с чисто качественной стороны мы перейдем к математическим выкладкам, чтобы исследовать явление и с количественной стороны.

Проведем оси координат x, y, z с началом в точке приложения силы (фиг. 136). Ось x пусть будет параллельна первоначальной оси полосы, ось z пусть идет в направлении приложения силы, а ось y пусть будет перпендикулярна к двум другим осям. Так как мы, как и при рассмотрении любой задачи об устойчивости равновесия, должны исходить из деформированного состояния полосы, то



Фиг. 134—135.



Фиг. 136.

наша задача заключается в том, чтобы выразить равновесие части полосы, расположенной влево от того сечения, положение которого определяется координатами x и y (фиг. 136). Сперва напишем уравнение моментов относительно касательной к упругой линии. Оно имеет вид:

$$C \frac{d\vartheta}{dx} = -M_t, \quad (31)$$

где $C = JG$ обозначает жесткость, J — угловое сопротивление сечения при кручении и G — модуль сдвига. Знак минус при нашем выборе системы координат необходим потому, что с увеличением x погонный угол закручивания ϑ уменьшается. Именно, на свободном конце он имеет наибольшее значение, а на защемленном равен нулю. Так как перемещения y бесконечно малы, то для крутящего момента M_t , получающегося от действия силы P , можно взять следующее выражение:

$$M_t = P \left(y - x \frac{dy}{dx} \right),$$

как это можно видеть непосредственно из фиг. 136. Следовательно, уравнение (31) можно переписать следующим образом:

$$C \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = P \left(x \frac{dy}{dx} - y \right). \quad (32)$$

К этому уравнению добавляются еще два уравнения упругой линии, соответствующие обоим главным осям поперечного сечения. Уравнение, соответствующее главной оси с наибольшим моментом инерции I_2 , имеет вид:

$$EI_2 \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = -Px, \quad (33)$$

а уравнение, соответствующее главной оси с наименьшим моментом инерции I_1 , будет иметь вид:

$$EI_1 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -P\vartheta \cdot x. \quad (34)$$

Эти два уравнения выведены на основании того, что вследствие перехода плоской формы равновесия в рассматриваемую поперечное сечение с координатами x, y, z повернется относительно направления силы на угол ϑ , так что составляющие P в направлениях главных осей этого сечения будут равны $P \cos \vartheta$ и $P \sin \vartheta$. Так как угол ϑ должен быть бесконечно малым, то в обоих уравнениях (33) и (34) $\cos \vartheta$ можно принять за 1, а $\sin \vartheta$ за ϑ .

В уравнение (33) угол ϑ не входит, и потому для процесса потери устойчивости плоской формы равновесия оно значения не имеет. Это уравнение представляет обыкновенное дифференциальное уравнение изгиба балки при плоской форме равновесия, и, конечно, в момент перехода плоской формы в другую оно сохраняется.

Уравнения же (32) и (34) относятся и к процессу перехода от плоской формы равновесия к другой. Чтобы исключить из обоих уравнений y , продифференцируем уравнение (32) по x :

$$C \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = P \cdot x \cdot \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (35)$$

и подставим вместо $\frac{d^2y}{dx^2}$ его выражение из уравнения (34). Тогда мы получим:

$$EI_1 \cdot C \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + P x^2 \cdot \vartheta = 0. \quad (36)$$

Дальнейшее исследование рассматриваемого явления связано с решением этого дифференциального уравнения 2-го порядка. Величины $EI_1 C$ и P^2 являются в дифференциальном уравнении постоянными. При помощи надлежащей подстановки это дифференциальное уравнение можно привести к дифференциальному уравнению Бесселя. Но проще мы придем к цели, разложив ϑ в ряд по возрастающим степеням x :

$$\vartheta = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Подставив это в уравнение (36), мы для определения коэффициентов a_n получим следующую рекуррентную формулу:

$$n(n-1)a_n + \frac{P^2}{EI_1 C} a_{n-4} = 0, \quad (37)$$

так что все коэффициенты будут выражаться через первые. Далее мы видим, что должны выполняться равенства:

$$a_2 = a_3 = 0,$$

и, таким образом, в силу соотношения (37) все коэффициенты, индексы которых при делении на 4 дают в остатке 2 и 3, должны также обращаться в нуль. Поэтому произвольными остаются только два первых коэффициента a_0 и a_1 . Они представляют две постоянных интегрирования. Вводя сокращенное обозначение

$$N = \frac{P^2}{EI\bar{C}}, \quad (38)$$

мы для ϑ получим следующее решение:

$$\begin{aligned} \vartheta = & a_0 \left(1 - \frac{N}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{N^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} x^8 - \frac{N^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} x^{12} + \dots \right) + \\ & + a_1 x \left(1 - \frac{N}{4 \cdot 5} x^4 + \frac{N^2}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} x^8 - \frac{N^3}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} x^{12} + \dots \right). \quad (39) \end{aligned}$$

Величина поперечного перемещения y получится из уравнения (35) путем подстановки значения ϑ с последующим интегрированием два раза по x :

$$\begin{aligned} y = & \frac{C}{P} \left\{ a_0 \left(-\frac{N}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{N^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 - \frac{N^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} x^{11} + \dots \right) + \right. \\ & \left. + a_1 \left(-\frac{N}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{N^2}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} x^8 - \frac{N^3}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} x^{12} + \dots \right) + a_2 x + a_3 \right\}. \quad (40) \end{aligned}$$

Вследствие двукратного интегрирования вошли две новых постоянных интегрирования a_2 и a_3 , из которых, однако, a_3 не может быть произвольной. Именно, если подставить значения ϑ и y в уравнение (32), то мы получим тождественно:

$$a_3 = -a_1, \quad (41)$$

так что остаются произвольными лишь три постоянных a_0 , a_1 и a_2 . Их можно выразить через величины ϑ_0 , y_0 и $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ для начала координат, как это легко видеть, если в формулах (39) и (40) и в формуле для производной $\frac{dy}{dx}$, полученной из формулы (40), положить x равным нулю. Тогда получится:

$$a_0 = \vartheta_0; \quad a_1 = -\frac{P}{C} y_0; \quad a_2 = \frac{P}{C} \left(\frac{dy}{dx}\right)_0. \quad (42)$$

Если мы применим этот результат к первоначальному примеру полосы, зашпеленной одним концом и несущей на другом конце нагрузку P , то при соответствующем выборе системы координат (x, y, z) мы будем иметь $y_0 = 0$ и, следовательно, также

$$a_1 = 0.$$

Для того чтобы на защемленном конце было $\vartheta = 0$, что выражает аналитическое условие полного защемления, на основании формулы (39) выражение

$$z = l \sqrt[4]{N} = l \sqrt[4]{\frac{Pz}{EI_1 C}}$$

должно удовлетворять трансцендентному уравнению

$$0 = 1 - \frac{z^4}{3 \cdot 4} + \frac{z^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{z^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots \quad (43)$$

Из бесконечно большого числа корней этого уравнения нам для определения наименьшей критической силы нужен лишь наименьший корень. Вследствие хорошей сходимости этого ряда мы получим значение этого корня с хорошим приближением, оставив лишь несколько членов ряда. Если в уравнении (43) подставить вместо z значение 2, то сумма бесконечного ряда в правой части, как показывает вычисление даже по небольшому числу членов его, будет отличаться от нуля лишь во втором десятичном знаке после запятой, так что $z = 2$ представляет значение корня с хорошим приближением. Таким образом критическая сила выразилась бы следующей формулой:

$$P = \frac{4}{l^2} \sqrt{EI_1 C}.$$

По Л. Прандтлю точное значение критической силы составляет:

$$P_{кр} = \frac{4,0126}{l^2} \sqrt{EI_1 C}. \quad (44)$$

Если нагрузка остается меньше этого критического значения, то плоская форма равновесия при изгибе остается устойчивой. При нагрузке, равной этому критическому значению, равновесие будет безразличным, а при переходе за критическое значение неустойчивым. В последнем случае полоса будет стремиться занять новое положение равновесия. Уравнение упругой линии для случая действия критической силы, которому соответствует безразличное равновесие, будет выражаться формулой (40), если в нее вставить значения постоянных. При этом нужно иметь в виду, что наши выводы правильны только при бесконечно малых перемещениях, так что уравнение для осевой линии пластинки действительно лишь в непосредственной близости к нормальному состоянию.

Подставив значение постоянных из формул (42), мы получим уравнение упругой линии в следующем виде:

$$y = \frac{C}{P} \vartheta_0 \left(-\frac{N}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{N^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 - \frac{N^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} x^{11} + \dots \right) + \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \cdot x.$$

Значение $\left(\frac{dy}{dx} \right)_0$ зависит от ϑ_0 , как это показывает граничное условие:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=1} = 0.$$

Если подставить сюда значение из последней формулы, то получится соотношение:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\vartheta_0 \left(-\frac{N}{2} l^3 + \frac{N^2}{3 \cdot 4 \cdot 6} l^6 - \frac{N^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10} l^{10} + \dots \right),$$

и дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид:

$$y = \frac{C}{Pl} \vartheta_0 \left(F \cdot \frac{l}{x} - E_1 \cdot \frac{x}{l} \right), \quad (45)$$

где для сокращения мы положили:

$$\left. \begin{aligned} F &= -\frac{N}{2 \cdot 3} x^4 + \frac{N^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^8 - \frac{N^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} x^{12} + \dots, \\ E_1 &= -\frac{N}{2} l^4 + \frac{N^2}{3 \cdot 4 \cdot 6} l^8 - \frac{N^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10} l^{12} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (45a)$$

Так как F и E_1 пропорциональны N , а последняя величина, в свою очередь, пропорциональна P^2 , то ординаты y упругой линии увеличиваются пропорционально P . Чтобы получить величину поперечного перемещения нагруженного конца полосы, нужно в формулу (45) подставить $x = l$. Тогда функция F от x примет значение F_p , и поперечное перемещение f конца полосы составит:

$$f = \frac{C}{Pl} \vartheta_0 (F_l - E_1).$$

Отсюда, принимая во внимание значение критической силы $P_{кр}$ по формуле (44), мы получим:

$$f = 0,697 l \vartheta_0 \sqrt{\frac{C}{El_1}}. \quad (46)$$

Таким образом стрела прогиба f пропорциональна длине полосы и углу поворота ϑ_0 конца пластинки. Последнее относится не только к концу полосы, но и к точке упругой линии с любой ординатой y , как это видно из формулы (45)¹⁾. В зависимости от величины угла ϑ_0 , которую, однако, нужно считать бесконечно малой, получатся разные положения равновесия, все одинаково возможные, так как здесь мы имеем перед собой безразличное состояние равновесия.

¹⁾ Однако здесь эту пропорциональность надо понимать не в обычном смысле, а условно, так как коэффициент пропорциональности не есть постоянная величина; ϑ_0 стоит в формуле множителем, а потому пропорциональность y и ϑ_0 будет иметь место при постоянном отношении $\frac{P}{P_{кр}}$ для одинаковых значений $\frac{x}{l}$, так как

$$N = \frac{4,0126}{l^4} \left(\frac{P}{P_{кр}} \right)^2. \quad \text{Прим. ред.}$$

При выводе формулы (44) для критической силы мы исходили из предположения, что свободный конец защемленной полосы может отклоняться в сторону беспрепятственно. Если же поперечное перемещение конца полосы невозможно из-за вертикальных направляющих, то постоянные в формулах (39) и (40) должны быть определены в соответствии с измененными граничными условиями. При одинаковом выборе системы координат мы теперь снова, как и прежде, будем иметь:

$$a_1 = 0.$$

Новые граничные условия требуют выполнения следующих равенств:

$$y_1 = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = 0,$$

вместо которых, пользуясь сокращениями по формулам (45а), мы можем так же написать:

$$0 = \frac{C}{Pl} \cdot F_1 \cdot \vartheta_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdot l,$$

$$0 = \frac{C}{Pl^2} \cdot E_1 \cdot \vartheta_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0.$$

Отсюда вытекает следующее равенство:

$$F_1 = E_1.$$

Это трансцендентное уравнение имеет наименьший корень для $z = l\sqrt[4]{N}$, равный 2,64, так что для величины критической силы получается формула:

$$P_{кр} = \frac{6,97}{l^2} \sqrt{EI_1 C}. \quad (47)$$

При переходе нагрузки за критическое значение отклонение полосы в сторону при наличии вертикальных направляющих для нагруженного и могущего поворачиваться конца происходит преимущественно в средней части ее длины. Направляющие будут действовать на конец пластинки с силой, имеющей горизонтальное направление; эту горизонтальную силу можно сложить вместе с вертикальной нагрузкой в одну результирующую, которая будет иметь наклонное положение¹⁾.

Л. Прандтль в уже названной диссертации рассмотрел случай полосы, защемленной одним концом, еще для ряда других граничных условий, но здесь мы не можем говорить обо всех них. В частности, следует

¹⁾ В цитированной выше работе акад. А. Н. Динника, а также в более ранней работе А. Коробова «Устойчивость плоской формы изгиба полосы», «Изв Киевск. политехн. ин-та», 1911 г., даны решения и для других случаев граничных условий. С. П. Тимошенко также занимался этим вопросом, решая его с помощью своего приближенного метода. Особому изучению подвергается вопрос о влиянии на устойчивость различного по высоте расположения точки приложения нагрузки. Решения А. Н. Динника даются в замкнутой форме и выражены через бесселевы функции (см. также его книгу «Устойчивость упругих систем», 1935). *Прим. ред.*

указать, что им рассмотрен случай полосы с опорами на обоих концах, не дающими возможности повертываться концам. При этом предполагается, что поперечное сечение представляет длинный узкий прямоугольник. Этот случай нагрузки мы рассмотрим дальше в § 110, где мы разберем вопрос об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки, нагруженной посредине, пренебрегая влиянием горизонтальных полок.

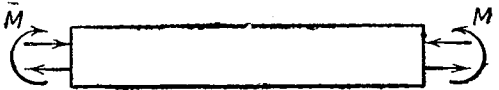
Мы коснемся здесь еще одного очень простого случая нагрузки. Он представляет в своем роде исключение и получается тогда, когда полоса нагружена исключительно двумя парами сил, действующими в плоскости xz (чистый изгиб). Если мы будем рассматривать момент этой пары как момент бесконечно малой силы на бесконечно большом плече x , так что

$$M = Px$$

представляет конечную величину, то основное уравнение (36) для случая неустойчивости плоской формы равновесия можно написать в следующем виде:

$$EI_1 C \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + M^2 \vartheta = 0. \quad (48)$$

Рассматриваемый здесь случай нагрузки поясняет фиг. 137. Изгибающий момент для каждого поперечного сечения x имеет одинаковое значение. Вследствие этого уравнение (48) будет представлять дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, интеграл которого можно написать в замкнутом виде. Он имеет вид:



Фиг. 137.

$$\vartheta = A \sin(\sqrt{\alpha'} x) + B \cos(\sqrt{\alpha'} x), \quad (49)$$

где A и B — постоянные интегрирования и где введено сокращенное обозначение

$$\alpha' = \frac{M^2}{EI_1 C}. \quad (49a)$$

Если оба конца полосы повертываться около оси ее не могут, оставаясь в остальных отношениях свободными, так что они могут изгибаться любым образом, то в силу $\vartheta_0 = \vartheta_l = 0$ мы будем иметь:

$$B = 0 \quad \text{и} \quad \sin \sqrt{\alpha'} l = 0, \quad (50)$$

откуда

$$\sqrt{\alpha'} l = \pi,$$

а критический момент будет равен

$$M_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_1 C}. \quad (51a)$$

Форма упругой поверхности при опрокидывании определяется соотношением

$$\vartheta = A \sin \sqrt{a'} x,$$

причем бесконечно малая величина A , дающая угол поворота среднего значения $\vartheta_{\frac{l}{2}}$, остается неопределенной. Такие неопределенные величины встречаются, как известно, во всех задачах, относящихся к устойчивости ¹⁾. По формуле

$$\frac{d\vartheta}{dx} = A\sqrt{a'} \cos \sqrt{a'} x$$

мы получим крутящий момент $C \cdot \frac{d\vartheta}{dx}$ в каждом сечении полосы. Он имеет наибольшую величину на обоих концах полосы, именно его абсолютная величина равна $A\sqrt{a'}$, а на середине при $x = \frac{l}{2}$ он будет равен нулю. На основании тех же соображений, какие привели нас к формуле (34а), мы получим здесь уравнение, выражающее равновесие моментов всех сил:

$$C \frac{d\vartheta}{dx} = -M \frac{dy}{dx} + (M_t)_0,$$

если через $(M_t)_0$ обозначить крутящий момент, действующий в поперечных сечениях $x=0$ и $x=l$. Из последнего уравнения путем интегрирования его мы получим:

$$C\vartheta = -My + (M_t)_0 \cdot x.$$

Постоянная интегрирования равна нулю на основании граничного условия для $x=0$. В силу $\vartheta_1=0$ и $y_1=0$ мы должны иметь $(M_t)_0=0$. Поэтому упругая линия будет симметрична относительно среднего сечения $x = \frac{l}{2}$. Так как для этого сечения как $\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{\frac{l}{2}} = 0$, так и $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\frac{l}{2}} = 0$,

то это сечение при искривленной форме равновесия можно считать также защемленным, и таким образом мы получим балку, защемленную одним концом, с критическим моментом, который получится по формуле (51а), если в нее подставить $2l$ вместо l :

$$M_{кр} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{EI_1 C}. \quad (51b)$$

Наконец, значение критического момента для случая, когда защемлены оба конца, так что они остаются параллельными, составляет:

$$M_{кр} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{EI_1 C}. \quad (51c)$$

¹⁾ Как выше было указано, причина этого факта кроется в том, что обычно дифференциальное уравнение изогнутой оси балки или стержня принимается в элементарных решениях приближенным. *Прим. ред.*

Уравнение (48), которое мы решили в предположении, что момент M имеет значение, не зависящее от x , будет более общим, если рассматривать M как функцию от x . В этом случае уравнение можно рассматривать как основное уравнение искривленной формы равновесия полосы с узким прямоугольным контуром поперечного сечения.

Ранее рассмотренный случай действия сосредоточенной силы на свободном конце полосы, заземленной другим концом, привел к такому значению момента:

$$M = -Px.$$

Если это значение M вставить в общее уравнение (48), то получится уравнение (36), из которого мы раньше и исходили.

При исследовании явлений устойчивости плоской формы равновесия одно- или многопролетной неразрезной балки, концы которой не могут поворачиваться в плоскости концевых поперечных сечений и которая нагружена вертикальными силами в плоскости, целесообразно исходить из уравнения (48). Но при этом, однако, нужно иметь в виду, что так же, как и в случае дифференциального уравнения (48) для упругой линии, в каждом пролете интегрирование нужно производить особо, так как выражение момента M при переходе через точку приложения силы или через опору изменяется. Обе постоянные интегрирования, получающиеся в каждом пролете, определяются по граничным условиям в начале и в конце соответствующего пролета.

Мы применим еще общее уравнение (48) лишь к случаю балки, заземленной одним концом, когда кроме нагрузки P на свободном конце будет еще действовать нагрузка q кг/см, равномерно распределенная по длине балки. Например, за q можно считать собственный вес балки. В этом случае выражение момента M в поперечном сечении x , т. е. на расстоянии x от левого, свободного конца балки, составляет:

$$M = -\left(Px + \frac{q}{2}x^2\right),$$

и уравнение (48) перейдет в следующее:

$$EI_1 C \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \left(Px + \frac{q}{2}x^2\right)\vartheta = 0. \quad (52a)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только равномерно-распределенной погонной нагрузки q кг/см, т. е. положим $P=0$. Тогда нам придется интегрировать дифференциальное уравнение

$$EI_1 C \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{q^2}{4}x^4\vartheta = 0. \quad (52b)$$

Точно так же по аналогии с уравнением (36) мы представим решение в виде:

$$\vartheta = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Путем подстановки в уравнение (52b) мы получим следующую рекуррентную формулу для определения коэффициентов:

$$a_n = -\frac{q^2}{4n(n-1) \cdot EI_1 C} \cdot a_{n-6},$$

а при введении для сокращения отвлеченной величины

$$\omega = \frac{q^2 l^6}{4EI_1 C} \quad (53)$$

решение будет иметь вид:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left[1 - \frac{\omega}{5 \cdot 6} \left(\frac{x}{l} \right)^6 + \frac{\omega^2}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12} \left(\frac{x}{l} \right)^{12} - \frac{\omega^3}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 17 \cdot 18} \left(\frac{x}{l} \right)^{18} + \dots \right]. \quad (54)$$

Граничное условие на защемленном конце балки требует, чтобы при $x=l$ было $\vartheta=0$. Для того чтобы плоская форма равновесия перешла в искривленную, выражение в скобках в правой части формулы (54) при $x=l$ должно обращаться в нуль. Наименьшая критическая длина $l_{кр}$, при которой это происходит, определяется, следовательно, по наименьшему значению, удовлетворяющему трансцендентному уравнению:

$$1 - \frac{\omega}{5 \cdot 6} + \frac{\omega^2}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12} - \frac{\omega^3}{5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 17 \cdot 18} + \dots = 0. \quad (55)$$

По Л. Прандтлю этот наименьший корень равен 41,3, что для критической длины дает выражение:

$$l_{кр} = 2,345 \sqrt[6]{\frac{EI_1 C}{q^2}}. \quad (56)$$

Так как полоса несет лишь равномерно-распределенную погонную нагрузку интенсивностью q кг/см, то в формулу (56) можно ввести полный вес нагрузки, равный $Q = ql$, и тогда формула (56) перейдет в следующую:

$$Q_{кр} = \frac{12,85}{l^2} \sqrt{EI_1 C}. \quad (57)$$

Сравнение с формулой (44), дающей критическое значение для сосредоточенной силы, действующей на свободном конце, показывает, что полоса, прежде чем она опрокинется, может выдерживать, сохраняя плоскую форму равновесия, действие равномерно-распределенной нагрузки, в 3,2 раза превосходящей сосредоточенную, приложенную на конце.

Так как, следовательно, критическая нагрузка $P_{кр}$ на конце полосы получается путем деления на 3,2 критического значения нагрузки Q , равномерно распределенной по длине полосы, то при учете собственного веса Q всей полосы формулу (44) можно заменить приближенной формулой

$$P_{кр} = \frac{4}{l^2} \sqrt{EI_1 C} - 0,3Q. \quad (58)$$

Чтобы получить точную формулу для критической нагрузки на свободном конце полосы, защемленной свободным концом, с учетом собственного веса, пришлось бы интегрировать дифференциальное уравнение (52a).

§ 109. Устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки.

Балки, работающие на изгиб, на практике предпочитают брать двутаврового профиля, так как такой профиль при сравнительно небольшой затрате материала имеет большой момент сопротивления изгибу и большой момент инерции поперечного сечения, по которым балка рассчитывается при обычной нагрузке, когда плоскость действия внешних сил совпадает со срединной плоскостью вертикальной стенки двутавровой балки. Зато момент инерции для главной оси, перпендикулярной к этой плоскости, у поперечного сечения двутавровой балки сравнительно незначителен, во всяком случае у балок с высокой вертикальной стенкой разница между обоими моментами инерции очень велика. Поэтому, как это следует из выводов предыдущего параграфа, в данном случае осуществлена предпосылка для возможности перехода плоской формы равновесия изгиба двутавровой балки в искривленную.

Если бы мы принимали во внимание только вертикальную стенку балки, то предположения предыдущего параграфа были бы выполнены полностью. Но не принимать во внимание горизонтальных полок нельзя, так как они в рассматриваемом явлении играют существенную роль. Мы на основании предыдущего знаем, что при переходе плоской формы равновесия в искривленную кроме изгиба приходится учитывать и кручение. В шестой главе мы уже детально занимались кручением прокатных балок и в § 70 нашли удобное приближенное решение для двутавровой балки. Но в задаче об устойчивости плоской формы равновесия при изгибе кручение следует рассматривать совершающимся при других граничных условиях на концах балки, чем в случае чистого кручения. Как и в предыдущем параграфе, мы рассмотрим случай балки, защемленной одним концом. Если бы на свободном конце такой балки действовал крутящий момент, ось которого совпала бы с осью балки, то мы не получили бы случая чистого кручения, так как на защемленном конце поперечное сечение вынуждено оставаться плоским, в то время как в случае чистого кручения оно перекашивалось бы ¹⁾. Чтобы осуществить такие граничные условия в точности, можно поступить так: воспрепятствовать повороту обоих концов балки около оси ее, а к среднему сечению приложить некоторый момент. Тогда вследствие симметрии среднее поперечное сечение будет оставаться плоским. Само собой разумеется, что сказанное относится к балке любого сечения. В предыдущем параграфе в случае прямоугольного сечения мы это обстоятельство оставляли без внимания, так как там оно большого влияния не оказывало. В случае же двутавровой балки дело обстоит иначе. Сохранение плоской формы концевое сечения имеет здесь потому большее влияние на угол закручивания балки, который получается от действия на свободный конец крутящего момента, что в силу рассматриваемого граничного условия горизонтальные полки, особенно вблизи места защемления, работают на изгиб. Подобный случай кручения стержня эллиптического сечения при

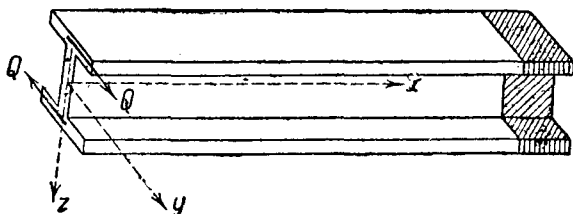
¹⁾ Заделанные полки двутавра будут мешать такому перекашиванию.
Прим. ред.

невозможности искривления поперечного сечения подробно рассмотрен в § 77.

Кроме напряжений от изгиба, получающихся в горизонтальных полках вследствие сохранения сечением в месте защемления плоской формы, получаются еще другие напряжения, которые также имеют заметную величину лишь в непосредственной близости к месту защемления. Они возникают как в случае прямоугольного сечения, так и в других случаях, но мы ими здесь будем пренебрегать.

При названных предположениях и упрощениях проф. С. Тимошенко рассмотрел кручение и переход плоской формы равновесия в искривленную в своей богатой содержанием русской работе ¹⁾, которая в сокращенном виде была опубликована на немецком языке в журнале «Ztschr. f. Math. u. Phys.», стр. 360, за 1910 г. Мы будем следовать в своем изложении его работе.

На фиг. 138 начерчена двутавровая балка, защемленная одним концом, на другой конец которой действует крутящий момент



Фиг. 138.

$$M_t = Qh,$$

причем h представляет высоту профиля балки. Как видно из чертежа, начало координат совпадает с центром тяжести свободного концевого сечения. Если бы и другой конец балки был свободен и на него действовал бы момент M_t одинаковой величины, но противоположного направления, то угол закручивания балки, длину которой мы обозначим через l , выражался бы следующей формулой:

$$\vartheta = \frac{M_t l}{C},$$

причем, как и в предыдущем параграфе, для сокращения положено

$$C = JG,$$

где J обозначает угловое сопротивление сечения двутавровой балки кручению. Для бесконечно малого элемента осевой линии балки соотношение, написанное нами выше, переходит в следующее:

$$C \frac{d\vartheta}{dx} = -M_t, \quad (59)$$

причем отрицательный знак мы должны ввести вследствие уменьшения ϑ с увеличением x .

¹⁾ С. П. Тимошенко, Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки, «Изв. Киевск. политехн. ин-та», 1906. См. также его курс «Теории упругости», ч. II, 1916 и диссертацию «Об устойчивости упругих систем», Киев 1910. *Прим. ред.*

Это уравнение вследствие защемления правого конца и происходящего из-за этого изгиба горизонтальных полок нуждается в некотором исправлении.

Величину прогиба центра тяжести сечения x верхней полки мы обозначим через y_2 ; тогда $-y_2$ будет ордината упругой линии для нижней полки. Дифференциальное уравнение упругой линии полок имеет вид:

$$EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = \pm M_2 \quad (1),$$

причем положительный знак у изгибающего момента относится к верхней полке, а отрицательный к нижней. Так как

$$\frac{dM_2}{dx} = V_2$$

представляет перерезывающую силу, получающуюся в каждом сечении полки вследствие изгиба, то путем дифференцирования по x дифференциального уравнения упругой линии полок мы получим:

$$EI_2 \frac{d^3 y_2}{dx^3} = \pm V_2.$$

Перерезывающие силы $+V_2$ и $-V_2$, действующие в обоих сечениях полок, дают момент

$$M_3 = V_2 h,$$

противодействующий крутящему моменту.

Если еще принять во внимание зависимость между ординатой y_2 упругой линии полок и углом закручивания ϑ

$$y_2 = \frac{h}{2} \vartheta,$$

то получится:

$$EI_2 \frac{d^3 \vartheta}{dx^3} = \frac{2}{h^2} M_3$$

или

$$D \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \vartheta}{dx^3} = M_3, \quad (60)$$

где через $D = EI_2$ обозначена жесткость полок при рассматриваемом изгибе. Так как крутящий момент M_t внешних сил в каждом сечении должен уравниваться суммой обоих моментов M_1 и M_3 , то мы получим:

$$M_t = M_1 + M_3,$$

1) Здесь значок 2 указывает на то, что все величины относятся к одной полке: в частности момент инерции I_2 есть наибольший для одной полки двутавра, взятый относительно оси z_1 (симметрии); V_2 — соответствующая перерезывающая сила в сечении одной полки. *Прим. ред.*

или после подстановки значений моментов из формул (59) и (60)

$$M_t = -C \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{Dh^2}{2} \cdot \frac{d^3\vartheta}{dx^3}. \quad (61)$$

Последний член выражает влияние граничного условия, которое должно удовлетворяться в защемленном сечении.

Величина угла закручивания может быть определена путем интегрирования дифференциального уравнения (61). Для этой цели введем еще обозначение

$$a^3 = \frac{Dh^2}{2C}. \quad (62)$$

Величина a имеет размерность длины, так как C и D имеют одинаковую размерность, именно $кг см^2$. Как a , так и M_t представляют постоянные, не зависящие от x , так что в данном случае мы имеем линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\vartheta}{dx} - a^2 \cdot \frac{d^3\vartheta}{dx^3} = -\frac{M_t}{C}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\text{при } x=l, \quad \vartheta=0 \quad \text{и} \quad \frac{d\vartheta}{dx}=0;$$

$$\text{при } x=0, \quad \frac{d^2\vartheta}{dx^2}=0.$$

Последнее граничное условие для свободного конца балки выражает, что здесь изгибающий момент полог обращается в нуль. Интеграл дифференциального уравнения, удовлетворяющий граничным условиям, будет иметь вид:

$$\vartheta = \frac{M_t}{C} \left[l - x + a \frac{\text{sh} \frac{x}{a}}{\text{ch} \frac{l}{a}} - a \text{th} \frac{l}{a} \right]. \quad (64)$$

В этой формуле гиперболические функции применены вместо показательных для упрощения записи ¹⁾. Что выражение (64) удовлетворяет рассматриваемому дифференциальному уравнению, это можно легко показать путем подстановки; также легко убедиться, что оно удовлетворяет и граничным условиям.

Величина угла закручивания всей балки определяется по формуле (64), для $x=0$ равной

$$\vartheta_0 = \frac{M_t}{C} \left[l - a \text{th} \frac{l}{a} \right].$$

¹⁾ А также потому, что для них имеются более удобные и чаще встречающиеся таблицы (L i g o v s k i, Tafeln d. Hyperbelfunktionen; Х а я с и К., Балка, лежащая на упругом основании (а также специальные семизначные таблицы); К р ы л о в А. Н., акад., Расчет балок на упругом основании, и др.). *Прим. ред.*

Чтобы дать представление о порядке величины a , определяемой по формуле (62), напишем вместо нее подробнее

$$a^2 = \frac{EI_2 h^2}{2GJ}.$$

Так как буквой I_2 был обозначен момент инерции поперечного сечения полки для вертикальной главной оси z , а угловое сопротивление кручению J всего поперечного сечения по формуле (59) шестой главы можно приближенно выразить формулой

$$J = \frac{1}{3} \sum l d^3,$$

то порядок величины множителя при h^2 в выражении для a^2 можно оценить, и мы видим, что в общем a того же порядка, что и h . Поэтому у балки большой длины $\frac{l}{a}$ представляет сравнительно большое число, для которого $\text{th} \frac{l}{a}$ можно с достаточной точностью принять за 1, так что в этом случае для угла закручивания балки получается приближенная формула:

$$\vartheta_0 = \frac{M_t}{C} (l - a). \tag{65}$$

Таким образом угол закручивания вследствие защемления одного конца балки уменьшается и имеет такую же величину, как если бы балка вместо действительной длины l имела длину $l - a$, но зато не была бы защемлена.

Если мы теперь перейдем к рассмотрению явления устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки, то мы можем почти буквально слово в слово повторить выводы предыдущего параграфа. То, что теперь форма поперечного сечения другая, это на уравнении упругой линии (34) не отражается, если только вместо I_1 подставить наименьший момент инерции всего сечения двутавровой балки. Зато уравнение кручения (32) здесь нужно заменить уравнением (61), причем, однако, вместо M_t нужно так же, как и в предыдущем параграфе, подставить значение

$$M_t = P \left(y - x \frac{dy}{dx} \right),$$

что отвечает предположению, что двутавровая балка защемлена одним концом и нагружена на другом силой P . Поэтому уравнение кручения и уравнение изгиба при искривленной форме равновесия двутавровой балки имеют вид:

$$C \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3\vartheta}{dx^3} = P \left(x \frac{dy}{dx} - y \right), \tag{66a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{P}{EI_1} x\vartheta. \tag{66b}$$

¹⁾ Здесь через y обозначены прогибы центра тяжести всего сечения балки. *Прим. ред.*

Чтобы исключить y , поступим так же, как и в предыдущем параграфе. Продифференцируем уравнение (66а) по x ; тогда в правой части равенства будет стоять только член $Px \frac{d^2y}{dx^2}$, в котором мы и заменим вторую производную y ее выражением из уравнения (66б). Тогда получится следующее дифференциальное уравнение 4-го порядка для ϑ :

$$\frac{d^4\vartheta}{dx^4} - \frac{2C}{Dh^2} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{2P^2x^2}{EI_1Dh^2} \cdot \vartheta = 0.$$

Произведение Px , при предположенной нагрузке балки, представляет изгибающий момент, который мы обозначим через M . Так как P входит в дифференциальное уравнение только в виде произведения Px , то после замены этого произведения через M мы получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4\vartheta}{dx^4} - \frac{2C}{Dh^2} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{2M^2}{EI_1Dh^2} \cdot \vartheta = 0, \quad (67)$$

которое можно назвать основным уравнением устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки. Таким образом оно соответствует уравнению (48), которое мы назвали основным для прямоугольного сечения. Уравнение (67) переходит в уравнение (48), если уравнение (67) мы умножим на EI_1Dh^2 и приравняем жесткость D полюс нулю.

Проинтегрируем теперь уравнение (67) для определенных случаев нагрузки, т. е. при определенных функциях от x для изгибающего момента. Простейший случай будет тот, когда изгибающий момент M не зависит от x , т. е. представляет постоянную величину. Внешние силы пусть будут приложены так, как показывает фиг. 137 для балки прямоугольного сечения. В этом случае дифференциальное уравнение (67) будет иметь постоянные коэффициенты. Кроме сокращенного обозначения

$$a^2 = \frac{Dh^2}{2C},$$

уже примененного прежде, мы введем еще следующее:

$$d^4 = \frac{DEI_1h^2}{2M^2}. \quad (68)$$

Как и a , величина d имеет размерность длины. Итак, нам нужно проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4\vartheta}{dx^4} - \frac{1}{a^2} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{1}{d^4} \vartheta = 0;$$

интеграл его можно указать сразу:

$$\vartheta = A \sin ax + B \cos ax + Ee^{\beta x} + Fe^{-\beta x}, \quad (69)$$

где A , B , E и F — постоянные интегрирования, а α и β выражаются следующими формулами:

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}}.$$

Четыре произвольных постоянных определяются по условиям, которые должны быть удовлетворены на концах балки. При $x=0$ и $x=l$ мы должны иметь $\vartheta=0$ и $\frac{d^2\vartheta}{dx^2}=0$.

Первое из двух граничных условий выражает, что оба конца балки не могут повертываться около оси ее, а второе условие выражает, что на концах изгибающий момент в полке исчезнет. Из граничных условий вытекают уравнения для определения постоянных. На основании $\vartheta=0$ и $\frac{d^2\vartheta}{dx^2}=0$ при $x=0$ получается:

$$\begin{aligned} B &= 0, \\ F &= -E, \end{aligned}$$

и таким образом на основании граничных условий на конце $x=l$ получится система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A \sin \alpha l + E (e^{\beta l} - e^{-\beta l}), \\ 0 &= -A \alpha^2 \sin \alpha l + E \beta^2 (e^{\beta l} - e^{-\beta l}). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Этим двум уравнениям можно удовлетворить, положив

$$A = E = 0.$$

Но тогда по формуле (69) получилось бы $\vartheta=0$, т. е. вообще опрокидывания балки не произошло бы. Для того чтобы была возможна искривленная форма равновесия балки, необходимо, чтобы определитель системы уравнений (70) обращался в нуль, что дает:

$$\sin \alpha l = 0$$

или

$$\alpha l = n\pi.$$

Первая возможная искривленная форма равновесия соответствует значению $n=1$, т. е.

$$\alpha l = \pi,$$

или

$$-\frac{l^2}{2a^2} + \sqrt{\frac{l^4}{4a^4} + \frac{l^4}{d^4}} = \pi^2. \quad (71)$$

В эту формулу мы должны подставить выражения a и d . При этом оказывается, что отношение $\frac{l}{a}$ зависит лишь от размеров балки, а также

от упругих свойств материала, в то время как отношение $\frac{l}{a}$ зависит еще и от изгибающего момента M внешних сил. Поэтому, если из последней формулы определить $\frac{l^4}{a^4}$, то получится уравнение для нахождения изгибающего момента M . Во избежание потери устойчивости плоской формы изгиба за это критическое значение M переходить не следует. Если для сокращения положить

$$k^2 = \frac{l^4}{a^4} \cdot \frac{l^2}{a^2} = \frac{M^2 l^2}{EI_1 C},$$

то критическое значение изгибающего момента будет:

$$M_{\text{кр}} = k \frac{\sqrt{EI_1 C}}{l}, \quad (72)$$

причем k^2 можно выразить формулой: $k^2 = \pi^2 \left(1 + \pi^2 \frac{Dh^2}{2Cl^2} \right)$, которую можно вывести из формулы (71) путем возведения обеих частей равенства в квадрат.

На основании этой формулы Тимошенко вычислил для балок разных размеров, т. е. для разных значений отношения $\frac{l^2}{a^2}$, критическое значение момента, а также указал и наибольшее напряжение на краях полок:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}} h_1}{2I_0},$$

соответствующее критическому значению изгибающего момента. Он при этом исходил из отношения:

$$\frac{I_1}{I_0} = 0,01; \quad \frac{h}{l} = 0,1,$$

а также из следующей величины:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2,$$

причем оказалось, что при переходе плоской формы равновесия в искривленную наибольшее напряжение σ_{max} в большинстве случаев, которые рассмотрел Тимошенко, меньше допускаемого напряжения, так что в этих случаях расчет балки на устойчивость плоской формы равновесия дает для допускаемого изгибающего момента меньшее значение, чем обычный способ расчета балки на один изгиб.

Для того случая, когда жесткостью D полок можно пренебречь, формула (72) вследствие равенства $k = \pi$ переходит в формулу (51b) для критического момента полосы прямоугольного сечения при одинаковых

¹⁾ В этой формуле J_0 представляет наибольший момент инерции всего сечения двутавра. *Прим. ред.*

условиях на концах. Точно так же, как и в предыдущем параграфе, мы определили еще критический момент [формула (51с)] для случая, когда защемлены оба конца, так что они не могут повертываться ни около оси x , ни около оси z ; мы сделаем то же для рассматриваемого случая двутавровой балки, вернее наметим схему вычислений. Постоянные интегрирования в решении дифференциального уравнения (69) должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\text{при } x=0: \vartheta=0 \text{ и } \frac{d\vartheta}{dx}=0,$$

$$\text{при } x=l: \vartheta=0 \text{ и } \frac{d\vartheta}{dx}=0.$$

По этим условиям мы можем определить постоянные A, B, E, F . Если мы потребуем, чтобы они были отличны от нуля, то получится уравнение, из которого так же, как и прежде, определяется критическое значение момента

$$M'_{\text{кр}} = k' \frac{\sqrt{EI_1 C}}{l},$$

где теперь k' имеет другое значение, отличное от прежнего значения k .

Теперь займемся другим случаем нагрузки двутавровой балки. Пусть двутавровая балка защемлена одним концом и нагружена сосредоточенной силой P на другом конце. Начало системы координат x, y, z возьмем в центре тяжести свободного концевого сечения и направим ось x вдоль балки так же, как и в предыдущем параграфе. При исследовании явления перехода плоской формы равновесия двутавровой балки, нагруженной таким образом, в искривленную мы будем исходить из уравнения (67).

В этом уравнении мы должны положить:

$$M^2 = P^2 x^2.$$

При сокращенных обозначениях

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{Dh^2}{2C}, \\ b^6 &= \frac{DEI_1 \cdot k^2}{2P^2}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

из которых первое уже было введено раньше, а второе выбрано таким образом, чтобы b опять имело размерность длины, дифференциальное уравнение (67) напишется в таком виде:

$$\frac{d^4\vartheta}{dx^4} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{x^2}{b^6} \cdot \vartheta = 0. \quad (74)$$

Это дифференциальное уравнение заменяет уравнение (36) предыдущего параграфа, в которое оно переходит, если жесткость D полок приравнять

нулю. Так же, как и там, мы разложим решение уравнения (74) по степеням x в следующий ряд:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_0' x + \frac{1}{2} \vartheta_0'' x^2 + \frac{1}{6} \vartheta_0''' x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots \quad (75)$$

Здесь ϑ_0 обозначает полный угол закручивания балки, а ϑ_0' , ϑ_0'' и ϑ_0''' — производные угла закручивания по x для начального сечения $x=0$. Граничные условия для свободного конца $x=0$ будут:

$$\vartheta_0'' = 0,$$

так как при $x=0$ изгибающий момент полог обращается в нуль, и, на основании уравнения (66а),

$$-C\vartheta_0' + \frac{Dh^2}{2}\vartheta_0''' = 0,$$

так как здесь обращается в нуль и крутящий момент; поэтому

$$\vartheta_0''' = \frac{1}{a^2}\vartheta_0'.$$

Поэтому в силу граничных условий для свободного конца формула (75) упрощается и принимает следующий вид:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_0' x + \frac{1}{6a^2}\vartheta_0' x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots \quad (76)$$

Мы должны еще принять во внимание граничные условия на защемленном конце $x=l$, где должны выполняться равенства:

$$\vartheta_l = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta_l' = 0,$$

или

$$0 = \vartheta_0 + \vartheta_0' l + \frac{\vartheta_0'}{6a^2} l^3 + a_4 l^4 + a_5 l^5 + \dots,$$

$$0 = \vartheta_0' + \frac{\vartheta_0'}{2a^2} l^2 + 4a_4 l^3 + 5a_5 l^4 + \dots$$

Подставив выражение (76) в дифференциальное уравнение (74), мы можем выразить постоянные a_4 , a_5 , ... через ϑ_0 и ϑ_0' ; результат вычислений первых коэффициентов будет:

$$a_4 = \frac{1}{12a^2} \cdot \frac{\vartheta_0''}{2} = 0,$$

$$a_5 = \frac{1}{120a^2} \vartheta_0''' = \frac{1}{120a^4} \vartheta_0',$$

$$a_6 = \frac{\vartheta_0}{36ab^4},$$

$$a_7 = \frac{\vartheta_0'}{2140a^6} + \frac{\vartheta_0'}{810b^6}$$

и т. д.

Поэтому оба граничных условия для конца балки $x=l$ мы можем написать также в виде:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \vartheta_0 \cdot A + \vartheta_0' \cdot B, \\ 0 &= \vartheta_0 \cdot C + \vartheta_0' \cdot D, \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

где A , B , C и D представляют бесконечные ряды, которые зависят только от постоянных a и b и которые могут быть вычислены с произвольной степенью точности. Эта система двух уравнений удовлетворяется при значениях $\vartheta_0 = 0$ и $\vartheta_0' = 0$. Это обозначает, что неискривленная форма равновесия балки возможна ¹⁾ даже при достижении силою P ее критического значения. Но кроме этих значений уравнениям могут удовлетворять значения ϑ_0 и ϑ_0' и отличные от нуля, если будет выполнено условие

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0; \quad (78)$$

при этом уже произойдет опрокидывание (потеря устойчивости плоской формы стенки).

Уравнение (78) определяет то критическое значение $P_{кр}$ силы, действующей на свободный конец, при переходе за которое плоская форма равновесия теряет устойчивость, потому что, как показывает формула (73), величина b зависит от P . Если мы положим

$$k^2 = \left(\frac{l^6}{b^6}\right) : \left(\frac{l^2}{a^2}\right) = \frac{P^2 l^4}{EI_1 C},$$

то критическая нагрузка будет выражаться формулой

$$P_{кр} = k \frac{\sqrt{EI_1 C}}{l^2}, \quad (79)$$

причем множитель k , входящий сюда, можно определить из уравнения (78). В работе Тимошенко, указанной выше, дана таблица значений k , удовлетворяющих системе уравнений (78), и значений $P_{кр}$, вычисленных по формуле (79), при разных размерах балки. Таблица эта перепечатана нами дальше.

Для случая, когда жесткостью D полук можно пренебречь, вместо формулы (79) нужно взять формулу (44), данную Грандтлем, которой соответствует $k = 4,0126$. На основании этого сравнения вместо формулы (79) можно дать приближенную формулу, которая особенно хорошо подходит для длинных балок. Мы видели прежде, что при учете влияния жесткости полук крутящий момент в силу граничного условия для

¹⁾ Важность высказанного положения, справедливого во всех задачах устойчивости и не только при пользовании приближенным дифференциальным уравнением, но и при совершенно строгой постановке задачи, должна быть, как это превосходно делает Фейль, особо подчеркнута. В элементарных учебниках очень часто на это обстоятельство совсем не обращается никакого внимания. *Прим. ред.*

зашемленного сечения уменьшается, и притом для длинных балок он с достаточной точностью определяется по формуле для угла закручивания, получающегося при чистом кручении, если вместо l подставить $l-a$, где a имеет прежнее значение. Вследствие этого для $P_{кр}$ получается следующее хорошее приближенное значение:

$$P_{кр} = \frac{4,0126}{(l-a)^2} \sqrt{EI_1 C}, \quad (80)$$

при условии, что балка имеет значительную длину. Если же это условие не выполнено, то нужно применять формулу (79).

Покажем на численном примере применение общих формул. Пусть нужно проверить на устойчивость клепаную двутавровую балку длиной $l=500$ см и высотой $h=50$ см, зашемленную одним концом и нагруженную сосредоточенной силой на другом. Детальные размеры поперечного сечения можно взять из фиг. 139. Главные моменты инерции поперечного сечения двутавра будут:

Фиг. 139.

$$I_1 = 287 \text{ см}^4 \quad \text{и} \quad I_0 = 27\,900 \text{ см}^4,$$

так что полярный момент инерции с достаточной точностью можно положить равным следующей величине:

$$J_p = I_1 + I_0 = 28\,200 \text{ см}^4.$$

Для определения жесткости при кручении

$$C = JG$$

мы можем воспользоваться формулой (144) Сен-Венана ¹⁾ из шестой главы для углового сопротивления кручению; в этой формуле мы должны положить $F=76,1 \text{ см}^2$, так что при значении модуля сдвига материала $G=8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ получится:

$$C = \frac{(76,1)^2 \cdot 8 \cdot 10^5}{40 \cdot 28\,200} \text{ кг см}^2.$$

В выражении

$$\frac{I^2}{a^2} = \frac{2C I^2}{D h^2}$$

жесткость D полок можно с достаточной точностью заменить выражением

$$D = \frac{E \cdot I_1^2}{2},$$

¹⁾ Как было указано автором в § 75, формула Сен-Венана не применима для тонкостенных профилей. Если она дает еще приемлемые значения жесткости для прокатных двутавровых профилей, то для клепаных следует принять формулу (59) § 70. В этом предположении и сделан ниже пересчет приводимого Фейнлем примера. *Прим. ред.*

²⁾ Ибо, пренебрегая наименьшим моментом инерции стенки относительно ее оси симметрии, мы можем приближенно написать:

$$I_1 = 2I_2,$$

в то же время:

$$D = EI_2.$$

Прим. ред.

так что получается:

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{4C}{EI_1} \cdot \frac{l^2}{h^2} = 16,5.$$

После того как мы определили величину $\frac{l^2}{a^2}$, которая зависит лишь от размера и от физических постоянных материала, можно определить значение k^2 и $\frac{l^6}{b^6}$ из уравнения (78). Это сделано для разных значений $\frac{l^2}{a^2}$ в таблице, составленной С. П. Тимошенко. В этой таблице, которую мы здесь перепечатаваем, кроме значений $\frac{l^6}{b^6}$ и k^2 , соответствующих значениям $\frac{l^2}{a^2}$, даны также и критические напряжения σ'_{\max} в защемленном сечении, при которых теряется устойчивость плоской формы изгиба, причем таблица составлена в предположении, что

$$\frac{h}{l} = 0,1, \quad \frac{l_1}{l_0} = 0,01 \quad \text{и} \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	σ'_{\max}	$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{l^6}{b^6}$	k^2	σ'_{\max}
0,1	196	1960	700 $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	10	575	57,5	1200 $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$
1	247	247	785 »	12	623	51,9	1250 »
2	295	148	860 »	14	678	48,4	1300 »
3	342	114	925 »	16	725	45,3	1345 »
4	381	95,3	975 »	24	918	38,3	1515 »
6	453	75,5	1065 »	32	1100	34,4	1660 »
8	516	64,5	1140 »	—	—	—	—

По этой таблице значению $\frac{l^2}{a^2}$, найденному в рассматриваемом примере, соответствует критическое значение наибольшего напряжения:

$$\sigma'_{\max} = 1355 \text{ кг/см}^2.$$

Но это значение наибольшего напряжения соответствует отношению $\frac{h}{l} = 0,1$ и $\frac{l_1}{l_0} = 0,01$, для которых только таблица и составлена. При других значениях этих отношений и значение σ_{\max} будет другим; но его легко вычислить по значению, указанному в таблице, если наибольшее напряжение выразить через момент $P_{\text{кр}}l$ в месте защемления, где $P_{\text{кр}}$ обозначает критическое значение нагрузки при действии ее на конец балки; именно, мы имеем:

$$\sigma'_{\max} = \frac{P_{\text{кр}}lh}{2I_0},$$

или в силу формулы (79):

$$\sigma'_{\max} = k \frac{\sqrt{EI_0 C} \cdot h}{2Il_0}.$$

Если здесь по первой из формул (73) заменить C выражением

$$C = \frac{Dh^2}{2a^2},$$

и затем, в свою очередь, D через $\frac{EI_1}{2}$, то получится:

$$\sigma'_{\max} = \frac{kE}{4} \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{I_1}{I_0} \left(\frac{h}{l}\right)^2.$$

Отсюда следует, что при определенном значении $\frac{l}{a}$, а потому и при определенном значении k , наибольшее напряжение пропорционально отношению $\frac{I_1}{I_0}$ и квадрату отношения $\frac{h}{l}$. Если, например, у балки $\left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{1}{n}$ и $\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{m}$, то значение σ_{\max} получится, если значение σ'_{\max} , взятое из таблицы для соответствующего значения $\frac{l}{a}$, умножить на $\frac{100}{m} \cdot \frac{100}{n}$.

В рассматриваемом примере мы имеем:

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{1}{100} \quad \text{и} \quad \frac{I_1}{I_0} = \frac{287}{27900} = \frac{1}{97,21},$$

так что наибольшее напряжение, соответствующее критической нагрузке, будет иметь значение

$$\sigma'_{\max} = 1355 \cdot \frac{100}{97,21} \text{ кг/см}^2 = 1390 \text{ кг/см}^2.$$

Отсюда сама критическая нагрузка получается равной

$$P_{\text{кр}} = 1740 \text{ кг}^1).$$

¹) Полученное значение P преувеличено вследствие того, что формула Сен-Венана дает преувеличенные значения. Определим значение жесткости C по формуле (59) § 70 в соответствии со сказанным в примечании 1 на стр. 346. При этом воспользуемся более точными выражениями для прямоугольного и уголкового профилей, данных К. Вебером:

а) Для прямоугольного профиля уже была приведена в § 73 формула (87), вместо которой можем написать:

$$C_1 = I_1 G = \frac{\delta_1^3}{3} (h - 0,63\delta_1) G,$$

где h есть высота прямоугольника (стенки), δ_1 — толщина его (стенки), G — модуль сдвига.

б) Для уголкового профиля К. Вебер дает выражение

$$C_2 = I_2 G = \frac{\delta_2^3}{3} (l_1 + l_2 - 1,6\delta_2) G$$

(см., например, его работу «Die Lehre v. d. Drehungsfestigkeit» в Forschungsheft № 249 или взятую отсюда сводную таблицу в литографированном курсе, Профессор Г. Э., Механика изменяемого твердого тела, стр. 412, 1926, или же Н. М. Б е л я е в, Сопротивление материалов, Ленинград 1932, стр. 220), причем здесь l_1

Если бы в рассматриваемом случае мы применили приближенную формулу (80), то ошибка, которую мы при этом сделали бы, была бы довольно значительной. Зато формула (80) вполне применима для значений $\frac{l^2}{2a^2}$ превосходящих значения, указанные в таблице.

§ 110. Двутавровая балка, нагруженная силой посередине.

Случай потери устойчивости плоской формы изгиба балки, опирающейся обоими концами и нагруженной посередине силой, при условии невозможности поворота концевых сечений около оси балки, играет в практике большую роль. Точно так же, как и в предыдущем параграфе, мы при рассмотрении этого случая будем исходить из основного уравнения (67) для искривленной формы равновесия двутавровой балки. Всю длину балки мы обозначим через $2l$, а нагрузку, приложенную посередине балки, через $2P$, так что опорная реакция на каждом конце будет равна P . Если начало системы координат мы поместим в концевом сечении балки, то изгибающий момент, действующий на расстоянии x от конца, будет выражаться формулой

$$M = Px,$$

и l_2 обозначают длины полки, измеренные каждая до обушка, δ_2 — толщину полки угла.

Тогда для изображенного на фиг. 139 сечения получим:

$$C = C_1 + 4C_2 = \left\{ \frac{0,8^3}{3} \cdot (50 - 0,63 \cdot 0,8) + \frac{4}{3} \cdot 0,8^3 \cdot (12 - 1,6 \cdot 0,8) \right\} G \approx 15,77 G = \\ = 15,77 \cdot 8 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2.$$

Вставляя найденное значение C в формулу для $\frac{l^2}{a^2}$ (см. стр. 347), получим после подстановки численных значений $I = 287 \text{ см}^4$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, а также l и h :

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{4C}{EJ_1} \cdot \frac{l^2}{h^2} = \frac{4 \cdot 15,77 \cdot 8 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^6 \cdot 287} \cdot 10^2 \approx 8,79.$$

По этому значению $\frac{l^2}{a^2} = 8,79$ путем интерполяции найдем из таблицы Тимошенко (см. стр. 347) значение:

$$\sigma'_{\max} = 1164 \text{ кг/см}^2,$$

соответствующее принятым при ее составлении значениям $\frac{h}{l} = 0,1$ и $\frac{I_1}{I_0} = 0,01$. Совершенно аналогично сделанному на стр. 347—348 пересчету наибольшего напряжения от изгиба для новых значений $\frac{I_1}{I_0} = \frac{287}{27 \cdot 900} = \frac{1}{97,21}$ получим окончательное значение:

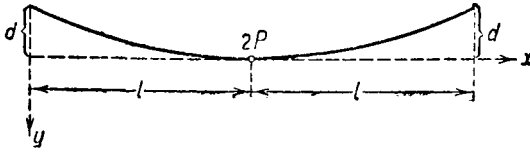
$$\sigma'_{\max} = 1164 \cdot \frac{100}{97,21} \approx 1200 \text{ кг/см}^2.$$

Отсюда значение самой критической нагрузки определится равным

$$P_{\text{кр}} \approx 1501 \text{ кг.}$$

Прим. ред.

т. е. будет иметь такую же величину, как и в рассмотренном в конце предыдущего параграфа случае балки длиной l , защемленной одним концом и нагруженной на другом конце силой P . Поэтому решение и здесь



Фиг. 140.

можно построить аналогично. Только граничные условия здесь будут другие. На фиг. 140 начерчена осевая линия балки в горизонтальной проекции для искривленной формы равновесия.

Три параллельных силы P , $2P$ и P , приложенные на концах балки и посередине ее, должны находиться в равновесии, а это возможно лишь в том случае, если кроме опорных реакций P на концах балки будет действовать момент, имеющий величину Pd , где d есть перемещение в сторону середины балки.

При сделанном выборе системы координат граничные условия будут:

$$\text{при } x=0: \quad \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0'' = 0; \quad y_0 = -d;$$

$$Pd = C\vartheta_0' - \frac{Dh^2}{2}\vartheta_0'''$$

Последнее условие получается на основании уравнения (66а) и выражает, что на конце балки приложен момент Pd . Граничные условия для середины балки будут:

$$\text{при } x=l: \quad y_l = 0; \quad y_l' = 0; \quad \vartheta_l' = 0.$$

Решение мы опять возьмем в форме выражения (75), которое в силу граничных условий $\vartheta_0 = 0$ и $\vartheta_0'' = 0$ упрощается и принимает вид:

$$\vartheta = \vartheta_0'x + \frac{1}{6}\vartheta_0'''x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + \dots \quad (81)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям, относящимся к y , нужно воспользоваться уравнением (66а). Если мы вставим в него значение ϑ из формулы (81), то после двукратного интегрирования получится:

$$\left. \begin{aligned} y' &= -\frac{P}{EI_1} \left[\frac{\vartheta_0'}{3}x^3 + \frac{\vartheta_0'''}{3\cdot 3}x^5 + \frac{a_2}{6}x^6 + \frac{a_3}{7}x^7 + \dots \right] + y_0', \\ y &= -\frac{P}{EI_1} \left[\frac{\vartheta_0'}{12}x^4 + \frac{\vartheta_0'''}{180}x^6 + \frac{a_2}{6\cdot 7}x^7 + \frac{a_3}{7\cdot 8}x^8 + \dots \right] + y_0'x + y_0. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Чтобы удовлетворить другим граничным условиям, мы сперва заменим y_0 на

$$y_0 = -d = -\frac{1}{P} \left[C\vartheta_0' - \frac{Dh^2}{2}\vartheta_0''' \right]$$

и исключим из равенств, выражающих условия при $x=l$, величину y_0' ; мы получим тогда следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{Pl^4}{EI_1} \left[\frac{\vartheta_0'}{3} + \frac{\vartheta_0'''}{30} l^2 + \frac{a_4}{6} l^3 + \frac{a_5}{7} l^4 + \dots \right] + \\ &+ \frac{Pl^4}{EI_1} \left[\frac{\vartheta_0'}{12} + \frac{\vartheta_0'''}{180} l^2 + \frac{a_4}{42} l^3 + \dots \right] + \frac{1}{P} \left[C\vartheta_0' - \frac{Dh^2}{2} \vartheta_0'''; \right]; \\ 0 &= \vartheta_0' + \frac{\vartheta_0'''}{2} l^2 + 4a_4 l^3 + 5a_5 l^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Подставив выражение (81) в дифференциальное уравнение (74), мы получим значения постоянных, выраженные через ϑ_0' и ϑ_0''' , из которых несколько первых мы выписываем ниже:

$$a_1 = 0; \quad a_3 = \frac{\vartheta_0'''}{120a^2}; \quad a_6 = 0; \quad a_7 = \frac{\vartheta_0'}{840b^6} + \frac{\vartheta_0'''}{5040a^4}; \quad a_8 = 0 \dots$$

Все постоянные с четными индексами обращаются в нуль, а все остальные можно выразить через ϑ_0' и ϑ_0''' . Поэтому систему уравнений (83) мы можем написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 \vartheta_0' + B_1 \vartheta_0''', \\ 0 &= C_1 \vartheta_0' + D_1 \vartheta_0''', \end{aligned}$$

где A_1 , B_1 , C_1 и D_1 обозначают бесконечные ряды, в которых можно оставить только любое число первых членов. Условие потери устойчивости плоской формы изгиба на основании этих двух уравнений выразится в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (84)$$

В это уравнение входят лишь величины

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{2Cl^2}{Dh^2} \quad \text{и} \quad \frac{l^6}{b^6} = \frac{2P^2 l^6}{DEI_1 h^2}.$$

Первая из этих двух величин для каждой балки может быть вычислена заранее, а вторая содержит критическую силу $P_{кр}$.

Если мы положим:

$$k^2 = \frac{l^6}{b^6} : \frac{l^2}{a^2},$$

то получится:

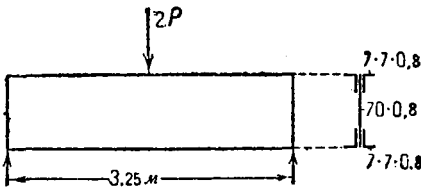
$$P_{кр} = k \cdot \frac{\sqrt{EI_1 C}}{l^2}, \quad (85)$$

причем значение k определяется из уравнения (84). Тимошенко решил уравнение (84) для разных значений $\frac{l^2}{a^2}$ и составил соответствующую таблицу. Кроме того, он принял во внимание, что на практике при проверке

устойчивости балки, нагруженной таким образом, часто сила приложена не в центре тяжести, а выше его на половину высоты балки. В этом случае коэффициент устойчивости плоской формы изгиба балки повышается, на что уже обратил внимание Прандтль в случае балки прямоугольного сечения. Внося эту поправку, Тимошенко на основании уравнения (84) получил следующую таблицу:

$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{I_0}{b^6}$	k^2	σ_{\max} при $E=2 \cdot 10^{10}$ $\frac{I_1}{I_0}=0,01; \frac{h}{2l}=0,1$	$\frac{l^2}{a^2}$	$\frac{I_0}{b^6}$	k^2	σ_{\max} при $E=2 \cdot 10^6$ $\frac{I_1}{I_0}=0,01; \frac{h}{2l}=0,1$
0,1	4,13	41,3	405 $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	8	27,7	3,46	105 $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$
1	6,76	6,36	505 »	10	34,3	3,43	117 »
2	9,05	4,53	600 »	12	41,2	3,43	128 »
3	11,9	3,97	690 »	16	55,3	3,46	1485 »
4	14,9	3,3	770 »	24	84,8	3,53	1540 »
6	21,1	3,52	920 »	32	114,4	3,58	2135 »

Покажем способ применения таблицы на примере. Пусть нужно рассчитать балку, начерченную на фиг. 141, пролетом $2l=3,25 \text{ м}$ и с размерами, указанными на чертеже профиля в миллиметрах.



Фиг. 141.

Чтобы получить из таблицы критическую силу P или критическое значение σ_{\max} , мы должны определить для балки значение $\frac{l^2}{a^2}$.

Моменты инерции поперечного сечения будут иметь следующие значения:

$$I_1 = 446 \text{ см}^4, \quad I_0 = 59\,100 \text{ см}^4,$$

так что полярный момент инерции, который нам необходим при применении формулы Сен-Венана для определения жесткости C , будет иметь значение

$$J_p = 59\,500 \text{ см}^4.$$

Площадь поперечного сечения равна

$$F = 98,2 \text{ см}^2,$$

так что по формуле Сен-Венана жесткость получится равной

$$C = \frac{G \cdot F^3}{40 \cdot J_p} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot (98,2)^3}{40 \cdot 595 \cdot 10^2},$$

что нам даст для $\frac{l^2}{a^2}$ значение

$$\frac{l^2}{a^2} = 0,75.$$

Из таблицы тогда мы получим:

$$\sigma'_{\max} = 480 \text{ кг/см}^2.$$

Если принять во внимание, что здесь, как и в примере предыдущего параграфа, $\frac{l_1}{l_0}$ и $\frac{h}{2l}$ имеют значения, отличные от принятых при составлении таблицы, то максимальное напряжение, соответствующее критической нагрузке, получится равным

$$\sigma_{\max} = 480 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \frac{l_1}{l_0} \cdot \left(\frac{h}{2l}\right)^2 = 1670 \text{ кг/см}^2.$$

1) В соответствии с произведенным в предыдущем примере пересчетом и здесь надлежит при вычислении критического напряжения пользоваться для определения жесткости C при кручении дутаврового сечения клепаной балки не формулой Сел-Венана, а формулами, данными выше для тонкостенных профилей.

Подобно предыдущему, для новых размеров сечения (фиг. 141) найдем для стенки:

$$C_1 = \frac{1}{3} \cdot 0,8^3 (70 - 0,63 \cdot 0,8) \cdot G \approx 11,83 \cdot 8 \cdot 10 \text{ кг см}^2,$$

для четырех уголков:

$$C_2 = \frac{4}{3} \cdot 0,8^3 (2 \cdot 7 - 1,6 \cdot 0,8) \cdot G \approx 8,69 \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ кг см}^2,$$

откуда

$$C = C_1 + C_2 = 20,57 \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ кг. см}^2.$$

При этом значении C величина $\frac{l^2}{a^2}$ получится равной:

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{4C}{E l_1} \cdot \left(\frac{l}{h}\right)^2 = \frac{4 \cdot 20,57 \cdot 8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6 \cdot 446} \cdot \left(\frac{162,5}{70}\right)^2 \approx 0,398.$$

По этой величине $\frac{l^2}{a^2}$ мы, путем интерполяции, найдем из таблицы Тимошенко (см. стр. 352) соответствующее значение

$$\sigma'_{\max} = 438 \text{ кг/см}^2.$$

Учитывая, что в нашем примере $\frac{l_1}{l_0}$ и $\frac{h}{2l}$ имеют значения, отличные от принятых при вычислении таблицы, получим значение σ_{\max} так же, как это сделано на этой странице:

$$\sigma_{\max} = \sigma'_{\max} \cdot 100 \cdot 100 \cdot \frac{l_1}{l_0} \cdot \left(\frac{h}{2l}\right)^2 \approx 1534 \text{ кг/см}^2.$$

Это значение меньше, чем найдено было в приведенном Фепплем примере, так как формула Сел-Венана для жесткости при кручении дает преувеличенные значения. *Прим. ред.*

Пренебрегая жесткостью D полок, мы получим формулы для полосы прямоугольного сечения. Но при этом нужно исходить не из дифференциального уравнения (67), а из того, которое получится, если вычеркнуть в нем член $\frac{d^4\theta}{dx^4}$, так что нам придется решить дифференциальное уравнение всего лишь 2-го порядка.

В заключение следует еще обратить внимание на то, что выводы, относящиеся к устойчивости плоской формы изгиба, действительны лишь пока напряжения не превосходят предела упругости. Если бы, например, значение критического напряжения σ_{\max} получилось при определении по указанному здесь способу больше предела упругости материала, то опрокидывание (потеря устойчивости) произошло бы раньше, чем этого следовало ожидать на основании расчета.

Здесь следует еще обратить внимание на работу Л. Феппля «Beanspruchung eines I—Trägers auf Biegung und Verdrehung», напечатанную в журнале «Bauingenieur», стр. 455, за 1925 г., в которой способ Тимошенко, изложенный в предыдущем и в этом параграфах, был применен для швеллерной балки. Хорошее совпадение результатов, получающихся по теории, с результатами опытов, приведенными в работе инж. Карла Губера (Karl Huber) «Versuche über die Widerstandsfähigkeit von I—Eisen gegen Biegung», которая помещена в журнале «Bauingenieur» вслед за предыдущей работой, показывает, насколько правильна теория рассматриваемых явлений. В противоположность двутавровой балке в случае швеллера играет важную роль положение центра изгиба (центр жесткости) (см. § 78), так как лишь при помощи него можно рассматривать изгиб и кручение балки независимо друг от друга.

Другая задача на устойчивость равновесия, именно задача об устойчивости равновесия замкнутого круглого кольца, будет рассмотрена в § 115. В заключение укажем еще на недавно появившуюся в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.» 1929 г. стр. 369 работу инж. Р. Зонтаг (R. Sonntag) «Über eine durch Torsion hervorgerufene Kipperscheinung».

§ 111. Приближенное решение задач об устойчивости при помощи упругой шарнирной цепи по Г. Генки

Генрих Генки (Heinrich Hencky) в своей диссертации ¹⁾ (Дармштадт 1920) дал приближенный способ решения задач, относящихся к устойчивости упругого равновесия; этот способ мы покажем здесь на одном примере, чтобы ознакомить читателя как с самим способом, так и с теми возможностями, которые он может дать. Прогресс, получаемый при применении этого способа, заключается в том, что представляется возможность перейти от прямого стержня, для которого мы здесь дадим пример, к любому кривому брусу, для которого найти решение задачи об устойчивости упругого равновесия другим путем еще не удалось. Впрочем, для непосредственного определения критической нагрузки способ, рассматриваемый здесь, уже был применен Г. Г. Роде (H. H. Rode)

¹⁾ См. также «Der Eisenbau», стр. 638, 1920.

в его ганноверской диссертации «Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen», Leipzig 1916¹⁾).

Разобьем стержень на ряд неупругих звеньев, соединенных друг с другом упругими шарнирами. При этом мы будем считать, что угол поворота двух соседних звеньев этой «шарнирной цепи» определяется формулой:

$$\Delta\varphi = \frac{M}{EI} \cdot s, \quad (86)$$

где s обозначает длину отдельных звеньев шарнирной цепи, которую мы будем считать у всех звеньев одинаковой. Для бесконечно малого элемента длины ds стержня формула (86) перейдет в известное из элементарной теории изгиба балок соотношение, связывающее угол изгиба, момент и длину элемента балки.

Чтобы провести аналогию между кручением шарнирной цепи и кручением обыкновенного стержня, проведем в плоскости первоначально прямого или кривого стержня в начальном и конечном сечениях звена цепи прямую в направлении главной оси поперечного сечения, расположенной в плоскости стержня. Вследствие кручения эти две прямых повернутся одна относительно другой на угол

$$\Delta t = \frac{M_t}{C} \cdot s, \quad (87)$$

причем s опять обозначает длину звена шарнирной цепи, M_t — крутящий момент, относящийся к соответствующему звену, а C , как и в предыдущем параграфе, — жесткость при кручении $C = JG$. Как это следует из изложенного в шестой главе, угловое сопротивление при кручении J для круглого сечения совпадает с полярным моментом инерции, в то время как для других сечений его можно вычислить по указанным там формулам. Формула (87) при бесконечно малой длине ds звена цепи переходит в формулу для угла закручивания обыкновенного стержня.

Обе формулы (86) и (87) и являются основой приближенного способа, который состоит в том, что вместо шарнирной цепи с бесконечно большим числом бесконечно малых отдельных звеньев, заменяющей непрерывный стержень, мы должны взять шарнирную цепь с небольшим числом звеньев. Вследствие этого дифференциальные уравнения для непрерывной балки перейдут в уравнения в конечных разностях для шарнирной цепи. В остальных отношениях ход вычислений для определения критической нагрузки остается такой же, какой мы применили в первом параграфе этой главы. Как и там, мы сообщим шарнирной цепи, находящейся в равновесии, бесконечно малые возможные перемещения, совместные с граничными условиями, и напишем условия равновесия для

1) Следует отметить, что метод, о котором здесь идет речь, представляет собою распространение на задачи устойчивости метода, который в задачах об изгибе пластинок был предложен Marcus'ом («Die Theorie elastischer Gewebe...», Berlin 1924) и который по настоящее время пользуется широкой популярностью среди конструкторов-строителей. Недавно подобный метод в его частной форме был предложен инж. Власовым В. Г. и проф. Пастернак П. А. для решения задачи о напряжениях в цилиндрических оболочках. *Прим. ред.*

положения, очень близкого к положению равновесия. В то время как в случае непрерывной балки мы приходим к однородному дифференциальному уравнению, здесь мы получим систему однородных уравнений в конечных разностях. В первом случае уравнение для определения критической силы дало нам условие, выражающее возможность существования решений дифференциального уравнения, отличных от нуля, т. е. условий, допускающих существование соответствующих возможных перемещений. Так и во втором случае из условия, чтобы система однородных уравнений в конечных разностях допускала систему решений, отличных от нуля, вытекает обращение в нуль определителя уравнений, что нам и даст приближенную величину критической нагрузки. Таким путем Генки просто определил приближенную величину эйлеровой критической силы, причем, взяв вместо стержня цепь только с четырьмя звеньями, он получил критическую силу с точностью до 5%. С увеличением числа звеньев результат становится точнее, но одновременно увеличивается число уравнений и порядок определителя, от чего вычисления становятся очень длинными. При выводе эйлеровой формулы для критической силы этим путем из двух формул (86) и (87) нужна лишь первая, так как взаимного повертывания отдельных звеньев одного относительно другого здесь не происходит. Иначе обстоит дело при рассмотрении вопросов об устойчивости равновесия плоской формы равновесия, чем мы и займемся еще раз, применив этот способ к простому примеру.

На фиг. 142 начерчена осевая линия стержня, защемленного левым концом; на свободный правый конец стержня действует сосредоточенная сила P . Пусть брус имеет прямоугольное сечение, вертикальный размер которого в сравнении с горизонтальным велик, так что при переходе силы P за критическое значение, получается смещение осевой линии балки в сторону, как это указано на фиг. 142 в горизонтальной проекции для возможных перемещений, связанных с кручением. Заменим стержень шарнирной цепью с четырьмя одинаковыми звеньями длиной s , которые соединяются одно с другим шарнирами 1, 2, 3. Перемещения точек 2, 3 и 4 в горизонтальном направлении обозначим через $s\zeta_2$, $s\zeta_3$ и $s\zeta_4$. Вследствие защемления левого конца балки мы должны иметь $\Delta\varphi_0 = 0$, а следовательно, также и $s\zeta_1 = 0$, так как даже после возможного горизонтального изгиба балки в защемленном сечении не будет никакого момента, производящего изгиб в горизонтальной плоскости.

Если мы применим сперва формулу (87) к точкам 1, 2, 3 и 4, то получатся углы закручивания:

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{Ps^2}{C} \cdot \zeta_1, \\ \Delta t_2 &= \frac{Ps^2}{C} (\zeta_1 - 3\zeta_2), \\ \Delta t_3 &= \frac{Ps^2}{C} (\zeta_1 - 2\zeta_3 + \zeta_2), \\ \Delta t_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

как это можно легко вывести, пользуясь фиг. 142.

Кроме кручения звеньев происходит еще и изгиб. При рассмотрении вопроса об устойчивости равновесия нам нужно принять во внимание лишь изгиб в горизонтальном направлении, показанный в горизонтальной проекции на фиг. 142. Здесь мы также применим формулу (86) к каждому шарниру в отдельности. Для шарнира 1 составляющая изгибающего момента, производящая изгиб в горизонтальной плоскости, будет равна $P \cdot 3s \cdot \Delta t_1$, так что получится первое из трех следующих равенств:

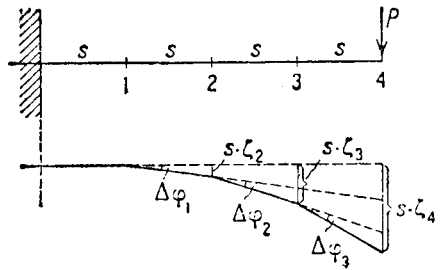
$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= \frac{Ps^2}{EI} \cdot 3\Delta t_1, \\ \Delta \varphi_2 &= \frac{Ps^2}{EI} \cdot 2(\Delta t_1 + \Delta t_2), \\ \Delta \varphi_3 &= \frac{Ps^2}{EI} \cdot 2(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3). \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Два других равенства для шарниров 2 и 3 получаются совершенно аналогично. Если в равенствах (89) мы заменим левые стороны на

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= \zeta_2; \quad \Delta \varphi_2 = \zeta_3 - 2\zeta_2; \\ \Delta \varphi_3 &= \zeta_4 - 2\zeta_3 + \zeta_2, \end{aligned}$$

что получается непосредственно из фиг. 142, и, с другой стороны, заменим в правых частях равенств (89) углы закручивания Δt_1 , Δt_2 и Δt_3 их выражениями из формул (88), то при сокращенном обозначении

$$\frac{Ps^4}{EIC} = \alpha$$



Фиг. 142.

получится следующая система однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \zeta_2 & & - 3\alpha \zeta_4 &= 0, \\ 2(3\alpha - 1)\zeta_2 & + \zeta_3 & - 4\alpha \zeta_4 &= 0, \\ (2\alpha + 1)\zeta_2 + 2(\alpha - 1)\zeta_3 & - (3\alpha - 1)\zeta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы эти три уравнения допускали существование решений, отличных от нуля, т. е. для того чтобы при предположенных возможных перемещениях получилось равновесие, необходимо, чтобы определитель этих трех уравнений обращался в нуль:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3\alpha \\ 2(3\alpha - 1) & 1 & -4\alpha \\ 2(\alpha + 1) & 2(\alpha - 1) & -(3\alpha - 1) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$36\alpha^3 - 62\alpha^2 + 20\alpha - 1 = 0,$$

Из трех корней этого уравнения нам нужен лишь наименьший; он имеет значение

$$a = 0,06123,$$

так что критическая сила будет:

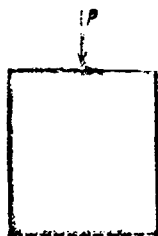
$$P_{кр} = \sqrt{0,06123} \cdot \frac{\sqrt{EIC}}{s^2},$$

или, так как $s = \frac{l}{4}$,

$$P_{кр} \approx 3,96 \frac{\sqrt{EIC}}{l}.$$

Это значение критической нагрузки, которое мы получили при помощи приближенного способа, отличается от точного значения критической силы, определяемого по формуле Прандтля (44), лишь на $1\frac{1}{4}\%$. Чем больше взять звеньев цепи, тем точнее будет результат, причем, конечно, одновременно усложнятся и вычисления.

Применение приближенного способа решения задач, относящихся к устойчивости арки, имеется уже в названной работе Г. Генки. В случае кривого бруса ход вычислений остается таким же, какой мы показали на примере прямого бруса, с тем лишь отличием, что вычисления, необходимые для получения приближенного значения критической силы, становятся значительно длиннее. Особо мы должны указать на рассмотренный в указанной работе пример нагруженной рамы, начерченной на фиг. 143.



Фиг. 143.

Важнейший результат, вытекающий из этого исследования, заключается в том, что обычный способ расчета на продольный изгиб, основанный на предположении бесконечно большой жесткости балки в смысле сопротивления кручению, приводит к значительно большему значению критической силы, чем расчет на устойчивость плоской формы изгиба в предположении конечной жесткости балки при работе на кручение. Конечно, большая чувствительность такой рамы в отношении потери устойчивости плоской формы равновесия приводит вообще не к полному разрушению ее, а лишь к принятию некоторой новой искривленной формы равновесия, так как при больших деформациях угол закручивания увеличивается медленнее, чем крутящий момент.

§ 112. Общая теория устойчивости равновесия оболочек.

В § 107 этой главы мы уже занимались рассмотрением вопроса об условии устойчивости плоской пластинки, сжимаемой силами, действующими в ее плоскости, и нашли приближенное решение для величины критической силы. При этом мы воспользовались критерием устойчивости в такой форме, что при любых возможных перемещениях точек пластинки из положения равновесия полная энергия, состоящая из

потенциальной энергии внешних сил и работы деформации¹⁾, должна увеличиваться. Если потенциал внешних сил обозначить через V , а работу деформации через A , то условие равновесия будет иметь вид:

$$\delta(V + A) = 0,$$

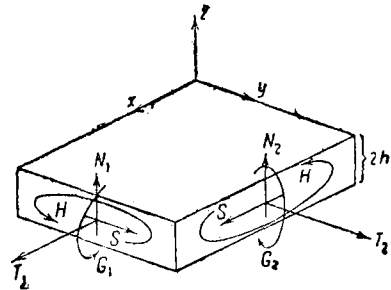
а условие устойчивости этого состояния равновесия

$$\delta^2(V + A) > 0. \quad (90)$$

Эти обе формулы получены во второй главе первого тома [формулы (31) и (32)]²⁾.

Общее условие устойчивости (90) мы применим к случаю тонкой оболочки постоянной толщины $2h$ и произвольной формы, чтобы получить общее представление о характере устойчивости равновесия таких оболочек.

Положение точек срединной поверхности оболочки пусть характеризуется координатами ортогональной системы координат, для чего лучше всего подходят линии кривизны. Вырежем из оболочки бесконечно малый элемент, который на фиг. 144 показан в увеличенном масштабе. Напряжения, действующие на боковых гранях, можно заменить результирующими, причем они считаются положительными, если они имеют направление, указанное на чертеже стрелками. Силы T_1 и T_2 представляют результирующие нормальных напряжений, а N_1 и N_2 — компоненты результирующих³⁾ касательных напряжений, идущие в направлении нормали к поверхности; буквами S обозначены компоненты результирующих³⁾



Фиг. 144.

касательных напряжений, идущие вдоль срединной поверхности, которые, как сопряженные касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам, равны друг другу. Буквы G_1 и G_2 обозначают изгибающие моменты, а буква H — крутящие моменты⁴⁾, из которых последние также равны друг другу. Если относительные удлинения обозначить через ϵ_1 и ϵ_2 , приращения кривизн — через χ_1 и χ_2 ⁵⁾, далее,

1) По вопросу о терминологии: «энергия деформации», «работа упругих сил», «потенциальная энергия» см. предисловие. *Прим. ред.*

2) Применение принципа возможных перемещений к разнообразным задачам устойчивости показано в работе проф. Лейбензон Л. С., О приближенном методе исследования устойчивости упругого равновесия, основанном на прямом приложении начала возможных перемещений, Юрьев 1917. *Прим. ред.*

3) Суммирование произведено только по высоте, почему размерность представляет размерность погонных сил в кг/см. *Прим. ред.*

4) Те и другие моменты суть погонные, почему и имеют размерность сил, т. е. представляется в кг, *Прим. ред.*

5) Согласно введенным в главе пятой обозначениям [формула (36)] $\chi = d \left(\frac{1}{R} \right)$ этой величине можно дать употребленное здесь наименование. *Прим. ред.*

сдвиги, производимые касательными силами S , — через ω и, наконец, угол закручивания, производимый крутящими моментами, — через θ , то закон Гука, связывающий напряжения и деформации, будет выражаться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2Ehm}{m^2 - 1} (m\varepsilon_1 + \varepsilon_2); \\ T_2 &= \frac{2Ehm}{m^2 - 1} (m\varepsilon_2 + \varepsilon_1); \\ S &= \frac{Ehm}{m + 1} \omega, \\ G_1 &= -\frac{2h^3 Em}{3(m^2 - 1)} (m\chi_1 + \chi_2); \\ G_2 &= -\frac{2h^3 Em}{3(m^2 - 1)} (m\chi_2 + \chi_1); \\ H &= \frac{2h^3 E}{3(m + 1)} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Выражения для T_1 , T_2 , G_1 и G_2 такие же, какие мы имели в формулах (72) в пятой главе. Так как там мы рассматривали оболочки, имеющие ось симметрии, и так как нагрузка была также симметричная, то там касательных сил S и крутящих моментов H не было. Выражения для S и H можно вывести так же просто, как и выражения сил T и изгибающих моментов G , но мы здесь ограничимся только сказанным.

Работа упругих сил, отнесенная к единице площади срединной поверхности, может быть выражена формулой:

$$A = \frac{1}{2} T_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} T_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} S \omega - \frac{1}{2} G_1 \chi_1 - \frac{1}{2} G_2 \chi_2 + H \theta. \quad (92)$$

Здесь в первом приближении работой составляющих N_1 и N_2 мы пренебрегли. Если бы мы их приняли во внимание, то результаты, выводимые ниже, не изменились бы. В выражении удельной работы упругих сил члены, зависящие от изгибающих моментов, входят с отрицательным знаком; это объясняется тем, что за положительное направление вращения для изгибающего момента принимается то, при котором кривизна будет уменьшаться¹⁾. Если в формулу (92) подставить значения напряжений из формул (91), то получится:

$$A = \frac{hEm^2}{m^2 - 1} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - \frac{2(m-1)}{m} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4}) \right] + \left. \begin{aligned} &+ \frac{h^3 Em^2}{3(m^2 - 1)} \left[(\chi_1 + \chi_2)^2 - \frac{2(m-1)}{m} (\chi_1 \chi_2 - \theta^2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

1) То-есть то направление, которое изображено на фиг. 144, в то время как обычно принимается за положительное направление изгибающего момента то, которое увеличивает кривизну. *Прим. ред.*

а полная работа деформации получится путем интегрирования по всей срединной поверхности

$$A = \int Adf.$$

Сообщим оболочке, находящейся в состоянии равновесия, возможные перемещения, характеризующиеся деформациями $\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2, \dots$, где приращения $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_2, \dots$ являются бесконечно малыми. Порядок величины их в наших выводах играет существенную роль. Поэтому мы напомним:

$$\Delta\varepsilon_1 = (\Delta\varepsilon_1)_I + (\Delta\varepsilon_1)_{II} + (\Delta\varepsilon_1)_{III} + \dots$$

и аналогичные равенства для других деформаций, где $(\Delta\varepsilon_1)_I$ обозначает бесконечно малое приращение удлинения 1-го порядка, $(\Delta\varepsilon_1)_{II}$ — то же 2-го порядка и т. д. Так как бесконечно малые деформации порядка выше 2-го при исследовании устойчивости не имеют никакого значения, то достаточно написать:

$$\Delta\varepsilon_1 = (\Delta\varepsilon_1)_I + (\Delta\varepsilon_1)_{II}$$

и то же относится к остальным величинам.

Новое значение работы упругих сил оболочки будет иметь вид:

$$\begin{aligned} A + \delta A + \delta^2 A = \int df \left\{ \frac{hEm^2}{m^2 - 1} \left[(\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2(m-1)}{m} \left((\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1)(\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2) - \frac{(\omega + \Delta\omega)^2}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{h^3 Em^2}{3(m^2 - 1)} \left[(\chi_1 + \Delta\chi_1 + \chi_2 + \Delta\chi_2)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2(m-1)}{m} \left((\chi_1 + \Delta\chi_1)(\chi_2 + \Delta\chi_2) - (\beta + \Delta\beta)^2 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда значение $\delta^2 A$, входящее в условие устойчивости (90), выразится следующей формулой:

$$\begin{aligned} \delta^2 A = \int df \left\{ \frac{hEm^2}{m^2 - 1} \left[2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{ (\Delta\varepsilon_1)_{II} + (\Delta\varepsilon_2)_{II} \} + \{ (\Delta\varepsilon_1)_I + (\Delta\varepsilon_2)_I \}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2(m-1)}{m} \left(\varepsilon_1 (\Delta\varepsilon_2)_{II} + \varepsilon_2 (\Delta\varepsilon_1)_{II} + (\Delta\varepsilon_1)_I (\Delta\varepsilon_2)_I - \frac{\omega}{2} (\Delta\omega)_{II} - \frac{(\Delta\omega)^2}{4} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{h^3 Em^2}{3(m^2 - 1)} \left[2(\chi_1 + \chi_2) \{ (\Delta\chi_1)_{II} + (\Delta\chi_2)_{II} \} + \{ (\Delta\chi_1)_I (\Delta\chi_2)_I \}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2(m-1)}{m} \left(\chi_1 (\Delta\chi_2)_{II} + \chi_2 (\Delta\chi_1)_{II} + (\Delta\chi_1)_I (\Delta\chi_2)_I - 2\beta (\Delta\beta)_{II} - (\Delta\beta)^2 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Это длинное выражение можно разложить на три слагаемых, из которых первое содержит 6 членов $(\Delta\varepsilon_1)_{II}$, $(\Delta\varepsilon_2)_{II}$ и т. д., второе — 3 члена

$(\Delta\varepsilon_1)_I$, $(\Delta\varepsilon_2)_I$ и $(\Delta\omega)_I$, а третья — три члена $(\Delta\chi_1)_I$, $(\Delta\chi_2)_I$, $(\Delta\theta)_I$. Эти три слагаемых мы обозначим для сокращения через J_1 , J_2 и J_3 , так что

$$\delta^2 A = J_1 + J_2 + J_3.$$

Выражения для J имеют следующий вид [причем в выражение J_1 введены значения результирующих напряжений из формул (91)]:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \int [T_1 (\Delta\varepsilon_1)_{II} + T_2 (\Delta\varepsilon_2)_{II} + S (\Delta\omega)_{II} - \\ &\quad - G_1 (\Delta\chi_1)_{II} - G_2 (\Delta\chi_2)_{II} + 2H (\Delta\theta)_{II}] df, \\ J_2 &= \int \frac{hEm^2}{m^2 - 1} \left[\{(\Delta\varepsilon_1)_I + (\Delta\varepsilon_2)_I\}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(m-1)}{m} \left\{ (\Delta\varepsilon_1)_I (\Delta\varepsilon_2)_I - \frac{(\Delta\omega)_I^2}{4} \right\} \right] df, \\ J_3 &= \int \frac{h^3Em^2}{3(m^2 - 1)} \left[\{(\Delta\chi_1)_I + (\Delta\chi_2)_I\}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(m-1)}{m} \{(\Delta\chi_1)_I (\Delta\chi_2)_I - (\Delta\theta)_I^2\} \right] df. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

В дальнейшем мы остановимся на одном важном для практики случае, когда в состоянии равновесия, устойчивость которого исследуется, оболочка на изгиб не работает, так что можно положить

$$\chi_1 = \chi_2 = \theta = 0$$

или

$$G_1 = G_2 = H = 0.$$

Тогда выражение для J_1 упрощается и принимает вид:

$$J_1 = \int [T_1 (\Delta\varepsilon_1)_{II} + T_2 (\Delta\varepsilon_2)_{II} + S (\Delta\omega)_{II}] df.$$

Равновесие будет неустойчивым, если можно указать такие возможные перемещения, при которых мы будем иметь:

$$\delta^2 V + J_1 + J_2 + J_3 < 0. \quad (95)$$

Член J_2 связан лишь с растяжением срединной поверхности, а J_3 — с изгибом оболочки. Для определенных бесконечно малых перемещений мы можем непосредственно вычислить все четыре члена, стоящие в левой части последнего неравенства, а вычислив их, сможем указать и величину критической нагрузки для выбранных перемещений. Трудность заключается в нахождении наименьшего значения критической силы, что можно сделать лишь при помощи вариационного исчисления. Но этим вопросом мы здесь заниматься не будем, а пользуясь неравенством (95), выведем общие указания относительно природы задач об устойчивости оболочек.

Из четырех величин, стоящих в левой части неравенства (95), J_2 и J_3 не зависят от напряжений в оболочке, таким образом не зависят от нагрузки, а лишь от деформаций, от размеров оболочки и от физических постоянных ее материала. Величины же $\delta^2 V$ и J_1 зависят и от нагрузки; последняя, в противоположность первым двум, не содержит даже толщины h оболочки. Если мы будем исходить из какого-либо состояния равновесия и увеличим все внешние силы в λ раз, то во столько же раз увеличатся и все напряжения, и мы получим новое состояние равновесия. Если условием неустойчивости первоначального состояния равновесия взять неравенство (95), то для нового состояния равновесия оно перейдет в следующее неравенство:

$$\lambda [\delta^2 V + J_1] + J_2 + J_3 < 0,$$

причем J_1 , J_2 и J_3 имеют такие же величины, как и в первом случае, так как мы предполагаем, что возможные деформации в обоих случаях одинаковы.

Так как J_2 и J_3 , если они отличны от нуля, всегда положительны, то первый результат, который вытекает из рассмотрения этого неравенства, будет тот, что при достаточно малом значении λ неравенство не будет удовлетворено, и оболочка должна находиться в состоянии устойчивого равновесия. Таким образом устойчивое состояние равновесия можно осуществить при любом законе распределения нагрузки, уменьшив в достаточное число раз интенсивности всех внешних сил. Но, с другой стороны, то же неравенство показывает нам, что можно всегда подобрать столь большое положительное или отрицательное значение λ , что написанное неравенство будет удовлетворяться, так что соответствующее равновесие будет неустойчивым.

Мы должны различать две важных группы задач, относящихся к устойчивости, в зависимости от того, будет ли J_2 равняться нулю или нет. Это различие впервые отчетливо выявил Р. Целли (R. Zoelli) в своей цюрихской диссертации 1915 г.

Для первой группы задач из равенства

$$J_2 = 0$$

вытекают равенства

$$(\Delta \varepsilon_1)_I = (\Delta \varepsilon_2)_I = (\Delta \omega)_I = 0, \quad (96)$$

которые должны иметь место во всех точках срединной поверхности оболочки. Так как в этом случае срединная поверхность в первом приближении не растягивается, то соответствующую деформацию мы будем называть деформацией, не сопровождающейся растяжением. Но бесконечно малые удлинения $(\Delta \varepsilon_1)_{II}$, $(\Delta \varepsilon_2)_{II}$ и $(\Delta \omega)_{II}$ 2-го порядка, вообще говоря, не будут обращаться в нуль. В первом приближении оболочка при деформации, не сопровождающейся растяжением, изменит лишь свою кривизну, так что величина J_3 будет отлична от нуля. Если предыдущие выводы мы применим к случаю деформации, не сопровождающейся растяжением, $J_2 = 0$, то получится, что внешняя сила, при которой происходит потеря устойчивости деформации оболочки, т. е.

критическая нагрузка, будет пропорциональна третьей степени толщины $2h$. Так как далее толщина оболочки входит лишь в виде множителя h^3 , то при деформации, не сопровождающейся растяжением оболочки, характер этой деформации не будет зависеть от толщины стенки, и так как, наконец, погонные силы T_1 , T_2 и S , как показывают формулы (91), имеют множитель h , то наибольшее удлинение ϵ_0 , соответствующее критической нагрузке, будет пропорционально величине h^2 , так что при заданной нагрузке потеря устойчивости деформации оболочки произойдет до достижения предела упругости, если только оболочка достаточно тонка.

После того, как мы ознакомились с характерными особенностями деформаций, не сопровождающихся растяжением срединной поверхности оболочки, спросим себя, в каких случаях перемещения точек оболочки возможны без растяжения срединной поверхности. Условия для возможности деформации без растяжения срединной поверхности зависят от формы оболочки и от граничных условий. Первоначально были исследованы как раз задачи об устойчивости оболочки при деформации, не сопровождающейся растяжением срединной поверхности.

Случаи, рассмотренные нами до сих пор, также относятся к таким деформациям, не сопровождающимся растяжением срединной оболочки. Действительно, в примере, рассмотренном в § 107 и относящемся к устойчивости равновесия пластинки, стр. 316, мы видели, что в выражении для работы упругих сил остается только член, происходящий от изгиба, это значит, что $J_3 = 0$. Можно также непосредственно заметить, что в этом случае равенства (96) выполняются. Именно, если бесконечно малые перемещения точек срединной поверхности пластинки в направлении, перпендикулярном к ней, мы обозначим через w , то будем иметь:

$$\Delta\epsilon_1 = \frac{\sqrt{dx^2 + dw^2} - dx}{dx} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2,$$

и точно так же мы найдем:

$$\Delta\epsilon_2 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad \text{и} \quad \Delta\omega \approx \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y},$$

так что мы действительно имеем:

$$(\Delta\epsilon)_I = (\Delta\epsilon_1)_I = (\Delta\omega)_I = 0,$$

т. е. в первом приближении срединная поверхность при деформации растягиваться не будет. Зато бесконечно малые удлинения 2-го порядка будут отличны от нуля, именно:

$$(\Delta\epsilon_1)_{II} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad (\Delta\epsilon_2)_{II} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad (\Delta\omega)_{II} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Точно так же из сказанного в § 107 вытекают и другие указанные выше характерные особенности деформации, не сопровождающейся растяжением срединной поверхности; эти особенности заключаются в том, что характер деформации, получающейся после перехода нагрузки за

критическое значение, не зависит от толщины оболочки и что критическая нагрузка увеличивается пропорционально h^3 . В формулах (24) и (25) критические давления p пропорциональны h^2 ; это происходит оттого, что p обозначает давление, приходящееся на единицу площади, и для получения критического давления, приходящегося на единицу длины контура, давление p нужно умножить на толщину h или в соответствующих случаях на $2h$.

В § 12 первого тома мы рассмотрели пример прямой тонкостенной трубы, находящейся под постоянным внешним избыточным давлением, и нашли для величины критического избыточного давления, при котором труба сплющивается, формулу (40) в предположении, что труба имеет очень большую длину. Если мы проследим за этими вычислениями еще раз, то найдем, что условия (96), характеризующие деформацию, не сопровождающуюся растяжением срединной поверхности оболочки, выполняются и там, так как мы видели, что периметр эллипса, в который переходит вследствие деформации круг, будет отличаться от периметра круга лишь на величины более высокого порядка малости. Точно так же формулы (40) § 12 показывают, что критическое избыточное давление увеличивается пропорционально h^3 , что, как мы знаем, является также признаком деформации, не сопровождающейся растяжением срединной поверхности. В связи с этим обращаем внимание читателя на то, что в формулах (40) и в формулах, выведенных в § 107, буквой h была обозначена полная толщина оболочки, в то время как в предыдущем параграфе она была обозначена через $2h$.

Если форма оболочки или граничные условия не допускают деформации, не сопровождающейся растяжением срединной поверхности, то соответствующая задача будет относиться ко второй группе задач на устойчивость, для которых величина J_2 отлична от нуля. Такие состояния равновесия много устойчивее, чем в случае возможности деформации, не сопровождающейся растяжением срединной поверхности, как это видно уже из того, что в этом случае на левой стороне неравенства появляется отличный от нуля существенно положительный член J_2 . Кроме того, выражения (94) для J_2 и J_3 показывают, что если член J_2 отличен от нуля, то он вообще значительно больше члена J_3 . Здесь оба члена одинакового измерения, но J_2 имеет множитель h , а J_3 множитель h^3 ; таким образом порядок величины J_2 будет относиться к порядку J_3 , как L^2 к h^4 , если через L обозначить второй линейный размер оболочки, например величину радиуса кривизны. Так как вообще L больше, чем h , то и J_2 больше J_3 .

Из этого следует, что оболочки, у которых деформация, не сопровождающаяся растяжением срединной поверхности, невозможна, значительно устойчивее тех оболочек, которые могут терять устойчивую форму при деформации без растяжения (в первом приближении) срединной поверхности, как это мы показали выше на двух примерах.

Очевидно, что в случае $J_2 \neq 0$ будут отсутствовать и другие известные нам признаки деформации, не сопровождающейся растяжением срединной поверхности, так как теперь будет добавляться член J_2 , пропор-

циональный величине h ; поэтому критическая нагрузка уже не будет пропорциональна h^3 , и форма равновесия, соответствующая критической силе, будет зависеть от толщины оболочки. Пример такого случая проблемы устойчивости мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 113. Устойчивость цилиндрической оболочки, равномерно сжатой в направлении образующих.

В случае цилиндрической оболочки, равномерно сжатой в направлении образующих, мы имеем задачу, когда срединную поверхность оболочки деформировать без растяжения (сжатия) нельзя. Мы будем следовать изложению Тимошенко в журнале «Ztschr. f. Math. u. Phys.», стр. 376, 1910¹⁾.

Мы разберем пример, основываясь на общих выводах предыдущего параграфа. Пусть цилиндрическая трубка испытывает равномерное осевое сжатие с интенсивностью P на единицу длины контура поперечного сечения. Если радиус срединной поверхности обозначить через a , то полное сжимающее усилие, которое будет действовать на трубку, будет иметь величину $2\pi aP$. Длину трубки мы обозначим через l , а толщину через $2h$. Мы будем исходить из равновесия трубки в сжатом состоянии. Пусть трубка опирается своими краями $x=0$ и $x=l$ свободно. Если мы обозначим погонные внутренние силы так же, как и в предыдущем параграфе, то при рассматриваемом состоянии равновесия будет отлична от нуля лишь погонная сила T_1 , причем $T_1 = -P$. Поэтому на основании формул (91) предыдущего параграфа для удлинений срединной поверхности получаются следующие выражения:

$$\epsilon_1 = -\frac{P}{2Eh}; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{m} \epsilon_1 = \frac{1}{m} \frac{P}{2Eh}; \quad \omega = 0. \quad (97)$$

Мы составим условие устойчивости этого состояния равновесия, причем ограничимся рассмотрением симметричных (относительно оси) деформаций трубки. Тогда деформированное состояние трубки будет характеризоваться заданием в каждой точке срединной поверхности двух перемещений u и w , причем по аналогии с обозначениями в пятой главе буквой u мы обозначим перемещение в направлении образующей, т. е. в направлении оси x , а буквой w перемещение в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, считая это перемещение положительным, если оно направлено внутрь. Граничные условия при $x=0$ и $x=l$ при помощи перемещения w можно выразить равенствами:

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

1) См. также работу проф. Тимошенко, О деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки, «Изв. Электр. ин-та», т. XI, 1914.

Вопросом устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины занимался проф. Штаерман И. Я., Упругая устойчивость труб и оболочек, Киев 1929. *Прим. ред.*

Первое из этих двух равенств выражает, что края трубки не перемещаются, а второе, что они не защемлены, так что изгибающий момент G_1 на краях обращается в нуль ¹⁾. Эти граничные условия будут удовлетворены, если мы положим:

$$\omega = -A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (98)$$

где n обозначает целое число. Правильнее было бы представить ω в виде ряда Фурье, но можно показать, что формула (98), соответствующая первому члену ряда Фурье, дает для критической нагрузки наименьшее значение, так что мы можем исходить из этой деформации цилиндрической трубы.

В первом приближении приращения удлинений $\Delta \epsilon_1$ и $\Delta \epsilon_2$, получающиеся при потере устойчивости деформации, можно выразить через перемещения u и ω следующими формулами:

$$\Delta \epsilon_1 = \frac{du}{dx} \quad \text{и} \quad \Delta \epsilon_2 = -\frac{w}{a}.$$

Эти формулы получаются непосредственно из определения относительных удлинений, но их можно вывести также и из формул (69) пятой главы, если в них вместо ϵ_r и ϵ_t вставить $\Delta \epsilon_1$ и $\Delta \epsilon_2$ и формулы, относящиеся к любой оболочке с осью симметрии, применить к частному случаю круглого цилиндра.

После того как мы установили зависимость перемещений w от x при помощи формулы (98), можно получить также и зависимость от x перемещения u на основании условия, что форма трубки, получающаяся при переходе нагрузки за критическое значение и отличающаяся от цилиндрической бесконечно мало, будет находиться в равновесии и при действии критической нагрузки $Q = 2\pi aP$. В этом состоянии мы будем иметь:

$$T_1 = -\frac{2\pi aP}{2\pi(a+w)} = -P + P\frac{w}{a},$$

если принять во внимание только бесконечно малые величины 1-го порядка. Следовательно, мы имеем:

$$\Delta T_1 = P\frac{w}{a}.$$

С другой стороны, первая из формул (91) нам дает:

$$\Delta T_1 = \frac{2Ehm}{m^2 - 1} (m\Delta \epsilon_1 + \Delta \epsilon_2) = \frac{2Ehm}{m^2 - 1} \left(m \frac{du}{dx} - \frac{w}{a} \right).$$

Приравнивая оба значения ΔT_1 , мы получим:

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{P}{2Eh} \frac{m^2 - 1}{m^2} + \frac{1}{m} \right) \frac{w}{a}. \quad (99)$$

¹⁾ Заметим, что практическое выполнение обоих принятых граничных условий представляет известные трудности. *Прим. ред.*

Если сжимающее напряжение, отнесенное к единице площади, мы обозначим через $\sigma = \frac{P}{2h}$, то первый член в скобках последней формулы будет с достаточной точностью равен $\frac{\sigma}{E}$. Так как вся теория устойчивости равновесия цилиндрической трубки верна лишь в пределах действия закона Гука, то $\frac{\sigma}{E}$ представляет малую величину, которой в сравнении с $\frac{1}{m}$ можно пренебречь, так что у нас останется лишь член

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{m} \frac{w}{a} = - \frac{A}{ma} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (100)$$

Таким образом мы определили величину u с точностью до не имеющей существенного значения постоянной, которая появится при интегрировании последнего уравнения.

В формуле (98) амплитуда A величины w представляет бесконечно малую величину 1-го порядка. Поэтому то же относится к вышеуказанным значениям $\Delta\varepsilon_1$ и $\Delta\varepsilon_2$. В задачах, относящихся к равновесию и рассмотренных в пятой главе, можно было ограничиться рассмотрением бесконечно малых величин 1-го порядка; при исследовании же устойчивости равновесия нужно принять во внимание также и величины бесконечно малые 2-го порядка. В выражении для $\Delta\varepsilon_1$ бесконечно малый член 2-го порядка получается от перемещения w и точно так же, как и в предыдущем параграфе при рассмотрении устойчивости сжатой пластинки, его можно выразить через $\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2$, так что с точностью до бесконечно малых величин 2-го порядка мы имеем:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2.$$

Для $\Delta\varepsilon_2$ бесконечно малый член 2-го порядка равен нулю, как это видно из определения относительного удлинения

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{2\pi(a-w) - 2\pi a}{2\pi a} = - \frac{w}{a}.$$

Так как мы предположили, что деформация трубки после перехода на грузки за критическое значение имеет ось симметрии, то прямой угол между образующими и окружностями цилиндрической поверхности остается без изменения, так что

$$\Delta\omega = 0.$$

Поэтому при обозначениях предыдущего параграфа мы имеем:

$$\begin{aligned} (\Delta\varepsilon_1)_I &= \frac{du}{dx}; & (\Delta\varepsilon_2)_I &= - \frac{w}{a}; & (\Delta\omega)_I &= 0; \\ (\Delta\varepsilon_1)_{II} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2; & (\Delta\varepsilon_2)_{II} &= 0; & (\Delta\omega)_{II} &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить для данного примера величины, обозначенные в предыдущем параграфе через J_1 , J_2 и J_3 , нам нужны еще значения приращений кривизны $\Delta\kappa_1$, $\Delta\kappa_2$ и $\Delta\theta$. Но здесь достаточно принять во внимание лишь бесконечно малые величины 1-го порядка, так как $(\Delta\kappa_1)_\Pi$, $(\Delta\kappa_2)_\Pi$ и $(\Delta\theta)_\Pi$ входят лишь умноженными на G_1 , G_2 и H , а эти изгибающие моменты при предположенном состоянии равновесия обращаются в нуль. На основании симметрии мы опять имеем:

$$\Delta\theta = 0,$$

в то время как при вычислении $\Delta\kappa_1$ и $\Delta\kappa_2$ мы опять можем исходить из формул (71) пятой главы, которые нам нужно лишь применить к частному случаю цилиндрической оболочки. Мы найдем тогда:

$$\Delta\kappa_1 = \frac{d^2w}{dx^2}; \quad \Delta\kappa_2 = 0.$$

Теперь величины J_1 , J_2 и J_3 , входящие в неравенство (95), легко вычислить. Что же касается δ^2V , то эта вариация 2-го порядка потенциала внешних сил равна нулю, так как пути, которые проходят точки приложения внешних сил и которые мы для обоих концов обозначим через u_0 и u_1 , не содержат никаких бесконечно малых величин 2-го порядка, как это следует из предыдущего.

Теперь мы можем перейти к вычислению J_1 , J_2 и J_3 , причем для элемента площади можем взять выражение:

$$df = dx \cdot a \cdot d\varphi;$$

интегрирование мы можем выполнить по φ сразу, так как предполагается, что деформация симметрична относительно оси. Таким образом мы получим:

$$J_1 = 2a\pi \int_0^l T_1 (\Delta\epsilon_1)_\Pi dx = -2a\pi P \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = -A^3 \cdot \frac{\pi^2 \pi^3}{2} \frac{a}{l} P,$$

$$J_2 = 2a\pi h E \frac{m^2}{m^2 - 1} \int_0^l \left[\left(\frac{du}{dx} - \frac{w}{a} \right)^2 + \frac{(2m-1)}{m} \cdot \frac{w}{a} \cdot \frac{du}{dx} \right] dx = A^3 \pi h E \frac{l}{a},$$

$$J_3 = 2a\pi \cdot \frac{h^3 E m^2}{3(m^2 - 1)} \int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx = A^3 \frac{m^2}{3(m^2 - 1)} h^3 E n^4 \pi^5 \frac{a}{l^3}.$$

Из равенства

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0$$

величина критической нагрузки P , которую мы обозначим через $P_{кр}$, получится равной

$$P_{кр} = \frac{2Eh}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{3(m^2 - 1)} h^3 E \frac{2n^2 \pi^2}{l^2}. \quad (101)$$

Таким образом критическая нагрузка складывается из двух членов, из которых первый пропорционален толщине $2h$ и обязан своим происхождением члену J_2 , входящему в уравнение устойчивости, а второй член пропорционален h^3 и обязан своим происхождением члену J_3 . Оба эти члена получаются во всех задачах, относящихся к устойчивости, в которых деформация оболочки обязательно сопровождается растяжением срединной поверхности.

Для случая, когда радиус a цилиндра в сравнении с длиной l очень велик, первый член в формуле (101) не играет существенной роли, так как у него a^2 стоит в знаменателе. Он при $a = \infty$, т. е. если вместо цилиндра мы имеем бесконечно широкую плоскую равномерно сжатую пластинку, обратится в нуль. Тогда остается только деформация, не сопровождаемая растяжением срединной поверхности, с которой мы познакомились прежде. Если вставить значение обратного коэффициента Пуассона $m = 4$ и положить $n = 1$, то мы получим:

$$P_{кр} = 0,222 E \cdot \frac{(2h)^3}{\left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

т. е. получается хорошее совпадение с формулой (27) из § 107 с точностью до одной единицы в третьем десятичном знаке.

Теперь перейдем от бесконечно широкой полосы к цилиндрической трубке. Пока величина a в сравнении с l еще велика, первый член в формуле (101) будет представлять лишь небольшую поправку ко второму члену и притом он будет увеличивать критическую нагрузку. Минимальная критическая нагрузка в этом случае будет получаться все же при $n = 1$, т. е. цилиндрическая поверхность при потере устойчивости деформации еще не будет подразделяться на несколько волн. Когда же радиус a будет все больше и больше уменьшаться и будет сравним по величине с длиной l , то преобладающее значение получит первый член главным образом потому, что он содержит толщину оболочки лишь множителем первой степени, в то время как второй член зависит от h^3 . В противоположность второму члену, зависящему от изгиба, первый член, зависящий от растяжения, будет тем меньше, чем больше целое число n , так как в первом члене n^2 стоит в знаменателе, в то время как во втором n^2 стоит в числителе. Поэтому, чем больше влияние члена, зависящего от растяжения, т. е. чем меньше радиус цилиндра, тем больше будет число n полуволн, образующихся при потере устойчивости деформации, и тем жестче будет трубка в смысле сопротивления сплющиванию в направлении оси.

Для практики важно знать наименьшее значение $P_{кр}$, получающееся по формуле (101) при различных целых значениях n . Его можно было бы найти, подставляя вместо n последовательно 1, 2, 3 и т. д. Но можно прийти к цели также и путем следующих соображений, которые одновременно позволяют нам углубиться в рассматриваемый вопрос. Представим себе, что в правой стороне формулы (101) l будет постепенно увеличиваться, а все другие размеры цилиндрической трубки будут

оставаться без изменения. Тогда определенному значению l и определенному целому числу n полуволн будет соответствовать наименьшее значение критической силы $P_{кр}$, которое можно определить, пользуясь формулой (101). Чем l больше, тем больше будет и число полуволн n , которое, конечно, всегда будет изменяться через единицу, т. е. скачком. Поэтому для l , заключенного в определенном интервале, n остается постоянным. Значение l , при котором n переходит в $n + 1$, можно определить на основании того, что для этого значения l критическая нагрузка $P_{кр}$ может быть вычислена по формуле (101) двумя способами, подставляя в правую сторону один раз n , а другой раз $n + 1$. Тогда мы получим соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{2Ehl^2}{n^2\pi^2a^2} + \frac{m^2}{3(m^2-1)} h^3 E \cdot \frac{2\pi^2n^2}{l^2} &= \\ &= \frac{2Ehl^2}{(n+1)^2\pi^2a^2} + \frac{m^2}{3(m^2-1)} h^3 E \frac{2(n+1)^2\pi^2}{l^2} \end{aligned}$$

и после упрощения

$$l = \sqrt{n(n+1)} \cdot \frac{\pi \sqrt{ah}}{\sqrt[4]{3 \frac{m^2-1}{m^2}}}. \quad (102)$$

Отсюда предельная длина, при которой будет получаться одна полуволна ($n=1$), окажется равной

$$l_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \sqrt{ah}}{\sqrt[4]{3 \frac{m^2-1}{m^2}}} \approx 3,44 \cdot \sqrt{ah},$$

если мы опять воспользуемся значением обратного коэффициента Пуассона $m=4$. Предельная длина для двух полуволн ($n=2$) получится равной

$$l_2 = \frac{\sqrt{6} \cdot \pi \sqrt{ah}}{\sqrt[4]{3 \frac{m^2-1}{m^2}}} \approx 5,95 \cdot \sqrt{ah} \text{ и т. д.}$$

Чем меньше радиус a цилиндра и чем тоньше стенка трубки, тем большее число волн образуется при продольном сплющивании трубки. При больших значениях n в формуле (102) вместо $\sqrt{n(n+1)}$ можно приближенно положить $\sqrt{n^2}=n$, и тогда после подстановки значения $\frac{l^2}{n^2}$, получающегося из формулы (102), в формулу (101) найдем:

$$P_{кр} = \frac{4E}{\sqrt{3 \frac{m^2-1}{m^2}}} \cdot \frac{h^2}{a}. \quad (103)$$

Так как $P_{кр}$ обозначает давление, приходящееся на единицу длины контура сечения, то критическое давление, приходящееся на единицу площади, будет выражаться формулой

$$P_{кр} = \frac{P_{кр}}{2h} = \frac{E}{\sqrt{3 \frac{m^2 - 1}{m^2}}} \cdot \frac{2h}{a}.$$

Для того чтобы продольное сплющивание происходило в пределах упругости, отношение толщины стенки к радиусу $\frac{2h}{a}$ должно быть столь мало, чтобы, например, для железа удовлетворялось условие:

$$\frac{P_{кр}}{E} = \frac{1}{\sqrt{3 \frac{m^2 - 1}{m^2}}} \cdot \frac{2h}{a} \leq 0,001^1),$$

или, если мы опять подставим $m = 4$,

$$\frac{2h}{a} \leq 0,00168.$$

Если это условие не выполнено, то еще до симметричного сплющивания трубки вдоль оси напряжения перейдут за предел упругости, вследствие чего условия становятся совершенно другими и вышеприведенные выражения для критической нагрузки будут уже не верны.

В связи с этим укажем на возможность и иного характера разрушения трубки. Именно, может произойти продольный изгиб цилиндрической трубки, как стержня, работающего на сжатие и укрепленного своими концами шарнирно. Если мы обозначим критическую силу через $2\pi P'_{кр}$, то по формуле Эйлера получится:

$$2\pi a P'_{кр} = \frac{EI\pi^2}{l^2},$$

причем I , момент инерции кольцевого сечения, выражается формулой

$$I = 2\pi \cdot ah(a^2 + h^2)$$

или с достаточной точностью

$$I = 2\pi a^3 h,$$

так что

$$P_{кр}' = E \cdot \frac{\pi^2 a^2 h}{l^2}. \quad (104)$$

Если $P_{кр}' < P_{кр}$, где $P_{кр}$ определяется по формуле (103), то при повышении нагрузки разрушение произойдет из-за продольного изгиба

¹⁾ Считая предел текучести $\sigma_s = 0,001 E$, т. е. около 2000 кг/см². Прим. ред.

цилиндрической трубки при условии, что напряжения в материале не достигнут предела упругости. Если же $P_{кр} < P_{кр}'$ или если выполнено неравенство

$$\frac{4}{\pi^3 \sqrt{3 \frac{m^2 - 1}{m^2}}} \frac{h}{a} < \frac{a^2}{l^2},$$

вместо которого при $m = 4$ можно также написать:

$$0,24 \cdot \frac{h}{a} < \frac{a^2}{l^2},$$

то разрушение произойдет из-за продольного сплющивания, симметричного относительно оси.

Формулы этого параграфа выведены в предположении, что оба конца трубки укреплены шарнирно. В случае других граничных условий, например, в случае заземленных краев, задачу можно решить таким же образом, задавшись соответственно измененным выражением для ω . Если цилиндрическая трубка длинная, то характер граничных условий на величине критической нагрузки существенно не сказывается, так что формулы (101) и (103) сохраняют свою силу.

Из числа работ, относящихся к предмету этого параграфа, следует назвать работы Р. Лоренца (R. Lorenz), «Ztschr. d. V. d. I.», стр. 1706, 1908 г., и Л. Фепля, Вaug. Ak. d. Wiss., 1926. Случай несимметричного сплющивания рассмотрен Р. Лоренцем для разных граничных условий в статье, помещенной в журнале «Phys. Ztschr.», стр. 225, 1911 г.¹⁾

§ 114. Некоторые другие работы по устойчивости оболочек.

В предыдущем параграфе мы на примере цилиндрической трубки, подвергающейся действию продольного равномерного сжатия, ознакомились с характерными особенностями деформации (выпучивания) оболочки, сопровождающейся растяжением срединной поверхности. Во всех аналогичных случаях выражение для критической нагрузки, как и в формуле (101), будет состоять из двух членов: из члена, зависящего от растяжения и пропорционального h , и из члена, зависящего от изгиба и пропорционального h^2 . Укажем лишь еще на один практически важный пример цилиндрической трубы, подверженной действию постоянного внешнего давления p кг/см², устойчивость которой исследуется так же, как и в предыдущем параграфе. Случай бесконечно длинной цилиндрической трубы мы уже рассмотрели в § 12 первого тома. В § 108 мы уже указали, что потеря устойчивости (сплющивание) в этом случае происходит при деформации, не сопровождающейся растяжением срединной поверхности, так что критическое давление выражается лишь одним

¹⁾ Следует упомянуть еще о работе I. Geckeler в «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 8, S. 341, 1928, который рассмотрел влияние частичного смещения торцов, происходящего из-за деформации плит пресса или недостаточно большого значения коэффициента трения (см. сказанное в примечании на стр. 367). *Прим. ред.*

членом, зависящим от изгиба, т. е. увеличивается пропорционально h^3 . Совершенно иначе будет обстоять дело, если цилиндрическую трубу нельзя считать бесконечно длинной, так что усиление концов трубы при помощи днищ или при помощи внутренних стенок, параллельных днищу, благодаря которому вся труба подразделяется на несколько цилиндрических частей меньшей длины, имеет большое влияние на устойчивость.

Этот случай цилиндрической трубы конечной длины был решен совершенно точно проф. Р. Мизесом¹⁾ (R. v. Mises, «Ztschr. d. V. d. I.», стр. 750, 1914). Мы сообщим здесь лишь результаты его исследований. Критическое давление, при котором происходит сплющивание стенок трубы, по Мизесу выражается следующей формулой²⁾:

$$p_{кр} = \frac{2E}{(n^2 - 1) \left[1 + \left(\frac{nl}{\pi a} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{h}{a} + \frac{2Em^2}{3(m^2 - 1)} \left[n^2 - 1 + \frac{2n^2 - \frac{m+1}{m}}{1 + \left(\frac{nl}{\pi a} \right)^2} \right] \frac{h^3}{a^3}. \quad (105)$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, l , a и $2h$ обозначают длину, радиус и толщину стенки трубы, а n — то целое число, для которого $p_{кр}$ будет иметь наименьшую величину.

Формула (105), которая дает хорошее совпадение с результатами опытов, опять обладает характерными особенностями формулы для критической нагрузки, отвечающей случаю изгиба, сопровождающегося растяжением срединной поверхности: член, зависящий от растяжения, пропорционален h , а член, зависящий от изгиба, пропорционален h^3 . При $l = \infty$ первый член обращается в нуль; при этом имеет место деформация срединной поверхности, не сопровождающаяся в первом приближении растяжением, так что критическое давление будет равно

$$p_{кр} = \frac{2Em^2}{3(m^2 - 1)} (n^2 - 1) \frac{h^3}{a^3}.$$

Наименьшее давление по этой формуле получается при $n = 2$. В этом случае, если заменить $\frac{m^2}{m^2 - 1}$ приближенным значением, равным единице, и принять во внимание, что здесь у нас толщина стенки была обозначена через $2h$, то рассматриваемая формула перейдет в формулу (40) для $p_{кр}$, помещенную в § 12 первого тома, где толщина стенки обозначена через h .

Поэтому в случае очень длинной трубы число полуволн будет $n = 2$. В случае же коротких труб нужно пользоваться точной формулой (105). В зависимости от размеров трубы критическое давление $p_{кр}$, определяемое по формуле (105), будет принимать наименьшее значение при разных целых значениях n . Проф. Р. Мизес составил следующую таблицу для целых значений n , соответствующих наименьшему критическому давлению при разных отношениях $\frac{h}{a}$ и $\frac{a}{l}$:

¹⁾ Приближенные решения дали R. Lorenz, «Physik. Ztschr.», т. 12, стр. 257, 1911, и R. V. Southwell, «Phil. Mag.», 25, 1913, стр. 687. *Прим. ред.*

²⁾ В правой части во втором члене в квадратных скобках перед третьим слагаемым знак плюс стоит правильно. В книгах: Геккелер, Статика упругого тела, ГТТИ 1934, стр. 279 и Динник, Устойчивость упругих систем, 1935, стр. 154 ошибочно стоит знак минус. *Прим. ред.*

$\frac{100h}{a} =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$\frac{a}{l} = 0$	2	2	2	2	2	2	2	2
$\frac{a}{l} = 0,1$	4	3	3	3	2	2	2	2
$\frac{a}{l} = 0,2$	5	4	4	4	3	3	3	3
$\frac{a}{l} = 0,3$	6	5	5	4	4	4	4	4
$\frac{a}{l} = 0,4$	7	6	5	5	5	4	4	4
$\frac{a}{l} = 0,5$	8	6	6	5	5	5	5	4

В этой таблице ¹⁾ горизонтальные строчки дают значения числа полу-волн n для заданного отношения $\frac{a}{l}$ и переменного $\frac{h}{a}$, а вертикальные столбцы дают значения n для заданного значения $\frac{h}{a}$ и переменного $\frac{a}{l}$. Таблица показывает, что при постоянных значениях a и l число волн увеличивается с уменьшением h , а при заданных значениях a и h число волн с увеличением длины l уменьшается.

В одной еще не опубликованной работе, которую автор любезно дал нам просмотреть, Р. Мизес принял во внимание влияние равномерного

¹⁾ В «Handbuch d. Physik», т. VI, стр. 303, 1928 приведена более краткая таблица, интересная, однако, тем, что в ней жирной ломаной линией отделена область значений числа волн, отвечающих переходу предела упругости при сплющивании. Поэтому считаю целесообразным привести ее здесь наряду с подробной, сохранив лишь обозначения Феппла.

100 h/a	0,2	0,5	1,0	2,0
$\frac{a}{l} = 0$	2	2	2	2
$\frac{a}{l} = 0,1$	4	3	2	2
$\frac{a}{l} = 0,2$	5	4	3	3
$\frac{a}{l} = 0,5$	8	6	5	4

Прим. ред.

наружного давления p на днище цилиндра, что имеет место для корпуса подводной лодки. Здесь дело сводится к небольшой поправке κ выражению $p_{кр}$ в формуле (105).

Родственным вопросом об устойчивости цилиндрической трубы, подверженной действию внешнего давления, является вопрос о величине критического давления для тонкой шаровой оболочки. Этот вопрос рассмотрел Роберт Целли (Robert Zoelly) в своей уже упомянутой в § 108 замечательной цюрихской диссертации 1915 г. Он предполагает, что шаровая оболочка испытывает деформацию (сплющивание), имеющую ось симметрии¹⁾. Рассмотрение самого общего случая деформации срединной поверхности шаровой оболочки с целью получить точное решение задачи представляет большие трудности вычислительного характера. Выражение критического давления имеет по Целли следующий вид:

$$p_{кр} = \frac{4E}{N} \cdot \frac{h}{a} + \frac{4Em^2}{3(m^2 - 1)} N \cdot \frac{h^3}{a^3}, \quad (106)$$

где a обозначает радиус срединной поверхности шаровой оболочки, а $2h$ опять толщину стенки и

$$N = 4n^2 + 2n - 1.$$

Выражение (106) опять состоит из члена, зависящего от растяжения срединной поверхности, и из члена, зависящего от изгиба ее. Последний растет вместе с n , а первый с увеличением n уменьшается. Формула (106) показывает, что вследствие большого значения члена, зависящего от растяжения срединной поверхности, сплющивание шаровой оболочки с образованием небольшого числа волн до перехода за предел упругости невозможно. При сплющивании шаровой оболочки должно получиться большое число волн. Чтобы получить наименьшее значение $p_{кр}$ из числа всех возможных при разных значениях n , мы решим относительно N уравнение

$$\frac{\partial p_{кр}}{\partial N} = 0,$$

которое нам даст:

$$N = \sqrt{3 \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}} \cdot \frac{a}{h}, \quad (107)$$

и соответствующее значение $p_{кр}$ получится равным

$$p_{кр \text{ min}} = \frac{8E}{\sqrt{3 \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}}} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2. \quad (108)$$

¹⁾ В отличие от Целли, рассмотревшего только симметричные деформации, проф. Л. С. Лейбензон в работе, указанной в примечании 1 на стр. 378, рассматривает более общий случай вообще несимметричных деформаций. Работа эта была перепечатана в «Математическом сборнике» за 1933 год, т. 40, стр. 378. *Прим. перев.*

Поэтому чем оболочка тоньше, тем больше по формуле (107) значение N и тем больше число волн n . Вообще говоря, формула (107) дает для n не целое значение; в этом случае нужно взять ближайшее меньшее или ближайшее большее целое число в зависимости от того, какое из них, будучи подставлено в формулу (106), дает для $p_{кр}$ меньшее значение. Последнее будет несколько больше, чем $p_{кр \text{ min}}$ по формуле (108). Но разница между ними незначительна и будет тем меньше, чем больше число волн n , так что для большого числа волн, как это следует ожидать в нормальном случае, формула (108) дает вполне удовлетворительную точность.

Формула (108) показывает, что разрушение при потере устойчивости начальной формы шаровой оболочки возможно лишь в том случае, если отношение $\frac{h}{a}$ сравнительно мало, так что величина сжимающих напряжений, действующих в оболочке и соответствующих наружному давлению $p_{кр}$, в оболочке, еще не потерявшей устойчивого равновесия, не превосходит предела упругости. При внешнем давлении p сжимающие напряжения, действующие в шаровой оболочке, имеют во всех точках одинаковую величину

$$\sigma = \frac{a}{4h} p,$$

как это видно непосредственно из условий равновесия половины шаровой оболочки. Если допускаемое напряжение на сжатие составляет

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{E}{500},$$

то условие того, чтобы сплющивание шаровой оболочки произошло еще до достижения допускаемого напряжения материала, будет выражаться неравенством

$$\frac{a}{4h} p_{кр} < \frac{E}{500}$$

или, после подстановки значения $p_{кр}$ из формулы (108),

$$\frac{h}{a} \leq \frac{1}{1000} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}}.$$

Поэтому у материала с указанным значением допускаемого на сжатие напряжения разрушение вследствие потери устойчивости начальной формы еще до достижения предела упругости произойдет лишь при достаточном повышении внешнего давления и притом только у очень тонких шаровых оболочек, размеры которых удовлетворяют написанному выше неравенству. Что у таких тонких шаровых оболочек число волн n велико на это уже было указано выше. Если разрушение оболочки происходит вследствие потери устойчивости начальной формы, то можно ожидать образования складок.

В работе Целли рассмотрен также вопрос об устойчивости шаровой оболочки, имеющей опорным контуром один из параллельных кругов и нагруженной равномерным внешним давлением, но мы этим случаем заниматься не будем.

До сих пор еще не удалось определить устойчивость замкнутой (полной) шаровой оболочки, находящейся под постоянным внешним давлением, в предположении, что возможные перемещения точек оболочки не будут симметричными относительно оси. Так как точное решение этой задачи наталкивается на большие затруднения математического характера, то, быть может, больше надежд на успех мы получим, задавшись приближенным выражением для перемещений, например, типа, применяемого в методе Ритца ¹⁾.

§ 115. Устойчивость круглого кольца.

Пусть дано кольцо радиуса a . Пусть его меридиональное сечение имеет ось симметрии, параллельную оси симметрии кольца, так что ось симметрии меридионального сечения вместе с перпендикулярной к ней осью, проходящей через центр тяжести меридионального сечения, представляют главные оси поперечного сечения. Так как мы предполагаем, что размеры поперечного сечения в сравнении с диаметром $2a$ кольца малы, то к рассматриваемому кольцу можно применить формулы теории изгиба бруса малой кривизны. Пусть нагрузка распределена равномерно вдоль круга радиуса a и направлена к центру этого круга. Пусть 1) все силы нагрузки будут направлены к этой неподвижной точке также и при бесконечно малом отклонении кольца от его круглой формы и пусть 2) на единицу длины окружности приходится нагрузка p кг/см, так что центральному углу da соответствует нагрузка $p \cdot ada$. При очень большой нагрузке кольца образуется «восьмерка», т. е. плоская форма равновесия переходит в искривленную. Так как в данном случае мы имеем задачу об устойчивости, то мы должны исходить из деформированного состояния кольца, бесконечно близкого к состоянию равновесия, и выразить, что для этого близкого состояния также получается равновесие. Это дает нам условие, которому должна удовлетворять критическая нагрузка $p_{кр}$, при переходе через которую начинается потеря устойчивости плоской формы равновесия.

Проведем через центр кольца три взаимно перпендикулярных оси координат, причем пусть плоскость xu совпадает с плоскостью кольца, а ось z пусть совпадает с осью симметрии кольца. Мы можем характеризовать потерю устойчивости плоской формы равновесия бесконечно малыми перемещениями ζ , параллельными оси z , которые и нарушают плоскую круглую форму нейтральной осевой линии кольца. Происходящие при этом перемещения точек нейтральной осевой линии параллельно плоскости кольца будут бесконечно малыми величинами высших порядков, и, следовательно, ими в сравнении с перемещениями ζ можно пренебречь. Перемещение ζ представляет пока еще неизвестную функцию от центрального угла a . Мы применим общие условия равновесия к форме кольца, характеризуемой перемещениями ζ .

¹⁾ Вопросом устойчивости сферических оболочек в связи с проблемами геодинимики занимался проф. Лейбензон Л. С.; см. его работы: «Об условиях устойчивости упругого равновесия сферы» и «О приложении метода гармонических функций к вопросу об устойчивости сжатых сферической и цилиндрической упругих оболочек», Юрьев 1917. *Прим. ред.*

В недеформированном кольце (вернее при плоской форме равновесия) сжимающая нагрузка p создает сжимающую силу

$$T = -p \cdot a, \quad (109)$$

как это следует из равновесия элемента кольца, соответствующего центральному углу $d\alpha$. При отклонении кольца от плоской формы, характеризуемом бесконечно малыми перемещениями ζ , сила T изменится лишь на бесконечно малую величину более высокого порядка. Так как мы такими величинами пренебрегаем, то T можно считать постоянным.

В то время как при неискривленной форме кольца сжимающая сила T будет единственной силой, создаваемой нагрузкой p , в случае искривленной формы кольца добавляется крутящий и изгибающий моменты, которые оба будут представлять бесконечно малые величины 1-го порядка, так что и их нужно будет принять во внимание. Вектор изгибающего момента будет перпендикулярен к оси z , как это следует из предположенного характера перемещений ζ . Крутящий момент можно будет выразить через угол закручивания ϑ ¹⁾ следующим образом:

$$\frac{d\vartheta}{d\alpha} = \frac{M_t \cdot a}{G \cdot J}, \quad (110)$$

где M_t обозначает крутящий момент, J — угловое сопротивление кручению, а G — модуль сдвига. Аналогично выражается и изгибающий момент M_b через угол поворота при изгибе:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{M_b \cdot a}{E \cdot I}, \quad (111)$$

где EI представляет жесткость поперечного сечения кольца для оси, параллельной оси симметрии.

Чтобы получить геометрическую связь между углом закручивания ϑ и углом изгиба φ , с одной стороны, и с перемещениями ζ — с другой, мы предположим сперва, что ζ во всех точках равно нулю, так что ось кольца будет попрежнему кругом радиуса a . Пусть кольцо повернется около своей оси на бесконечно малый угол β , так что оси симметрии меридиональных сечений, первоначально лежавшие в плоскости кольца, будут теперь образующими конической поверхности, вершина которой будет расположена на оси z , причем угол между образующими и осью z будет равен $90^\circ - \beta$. Радиус кривизны этой конической поверхности в точках оси кольца будет $\frac{a}{\beta}$ ²⁾, так что в этом случае:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \beta \quad \text{и} \quad \vartheta = \beta = \text{const.}$$

1) В отличие от обозначений, принимаемых в других местах этой книги, здесь обозначает полный угол закручивания, а не погонный. *Прим. перев.*

2) При бесконечно малом β (вместо $\frac{a}{\sin \beta}$). *Прим. перев.*

Таким образом, вследствие того, что при этой деформации $\frac{d\vartheta}{da} = 0$, крутящий момент будет равен нулю и будет действовать лишь изгибающий момент, имеющий величину

$$(M_b)_0 = \frac{EI}{a} \cdot \beta.$$

При добавлении перемещений ζ , параллельных оси симметрии кольца, получится еще приращение кривизны $\frac{d^2\zeta}{a^2 da^2}$, так что для угла поворота при изгибе φ мы будем иметь в общем случае формулу:

$$\frac{d\varphi}{da} = \beta + \frac{d^2\zeta}{ada^2}. \quad (112)$$

Теперь возьмем β и $\frac{d\beta}{da}$ равными нулю, а перемещения ζ отличными от нуля, но такими, что $\frac{d\zeta}{da} = \text{const.}$, так что нейтральная осевая линия кольца, по крайней мере на коротком протяжении, примет форму винтовой линии с углом подъема, равным $\frac{d\zeta}{da}$. Оси симметрии поперечных сечений, лежавшие первоначально в плоскости кольца, теперь будут образовывать винтовую поверхность. Они все будут пересекать ось симметрии кольца и будут параллельными первоначальной плоскости кольца. Эта деформация будет сопровождаться кручением. При незначительном наклоне, какой мы здесь предполагаем, кручение в первом приближении составляет¹⁾ $\frac{1}{a} \frac{d\zeta}{da}$, что дает крутящий момент

$$M_t = \frac{G \cdot J}{a} \cdot \frac{d\zeta}{da}.$$

Здесь в первом приближении изгибающий момент не получается, так как $\frac{d^2\zeta}{da^2} = 0$.

При одновременном существовании обеих деформаций мы имеем:

$$\frac{d\vartheta}{da} = \frac{d\beta}{da} - \frac{d\zeta}{ada}, \quad (113)$$

или

$$\vartheta = \beta - \frac{\zeta}{a}. \quad (113a)$$

Отрицательный знак перед ζ и $\frac{d\zeta}{da}$ получается потому, что с увеличением ζ и β угол ϑ изменяется соответственно в разном по знаку смысле. Соединяя формулы (110)—(113) вместе, получим:

$$\frac{M_b \cdot a}{EI} = \beta + \frac{d^2\zeta}{ada^2}, \quad (114a)$$

$$\frac{M_t \cdot a}{G \cdot J} = \frac{d\beta}{da} - \frac{d\zeta}{ada}. \quad (114b)$$

¹⁾ См., например, «Hütte», т. I, 25-е нем. изд., стр. 239 (русское 13-е изд., стр. 257).

Сюда еще добавляются условия равновесия деформированного кольца. Формула (109) нам уже дает выражение сжимающей силы, действующей в кольце, через нагрузку p . Если принимать во внимание лишь бесконечно малые величины 1-го порядка, то те же условия останутся без изменения и для деформированного состояния кольца, так что мы можем положить

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0. \quad (115)$$

Для поперечной силы V , параллельной оси z , мы можем написать условие равновесия

$$dV = -p a d\alpha \cdot \frac{\zeta}{a} + T \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{d\zeta}{d\alpha} \right) d\alpha,$$

или

$$\frac{dV}{d\alpha} = -p \cdot \left(\zeta + \frac{d^2\zeta}{d\alpha^2} \right). \quad (116)$$

Первый член в правой стороне этого равенства получился от параллельной оси z составляющей нагрузки, возникшей вследствие деформации кольца, а второй получился от результирующей сжимающих сил T , действующих на два соседних поперечных сечения кольца.

Наконец, уравнение моментов относительно направлений изгибающего и крутящего моментов для элемента кольца дает следующие два равенства:

$$V \cdot a = \frac{dM_b}{d\alpha} + M_t; \quad (117a)$$

$$M_b = \frac{dM_t}{d\alpha}. \quad (117b)$$

Исключая V из равенств (116) и (117a), мы получим:

$$-ap(\zeta + \zeta'') = M_b' + M_t'.$$

Здесь штрих обозначает производные по α . Если сюда вставить выражения M_b и M_t через ζ и β из формул (114), то, введя сокращенные обозначения для безразмерных (отвлеченных) величин:

$$\mu = \frac{a^3 p}{GJ}; \quad \nu = \frac{a^3 p}{EI}, \quad (118)$$

мы получим первое из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{(IV)} \cdot \frac{\mu}{\nu} + \zeta'' (\mu - 1) + \beta'' \cdot a \left(\frac{\mu}{\nu} + 1 \right) + \zeta \cdot \mu &= 0, \\ \beta'' - \beta \cdot \frac{\mu}{\nu} - \zeta'' \cdot \frac{1 + \frac{\mu}{\nu}}{a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Второе из уравнений (119) получается из уравнения (117b) путем замены M_b и M_t их выражениями по формулам (114).

Исключая β из двух последних уравнений, мы получим:

$$\zeta^{(VI)} + \zeta^{(IV)} \cdot (\nu + 2) - \zeta'' (\mu - \nu - 1) - \zeta \cdot \mu = 0; \quad (120)$$

такой же вид имеет и дифференциальное уравнение для β .

Полагая

$$\zeta = \beta = e^{\lambda \alpha}, \quad (121)$$

мы получим характеристическое уравнение для

$$\lambda^2 = x \quad (122)$$

в виде

$$x^3 + (\nu + 2)x^2 - (\mu - \nu - 1)x - \mu = 0. \quad (123)$$

Сперва решим это уравнение для случая бесконечно большой жесткости (в смысле сопротивления кручению), т. е. при $J = \infty$ или $\mu = 0$. В этом случае оно упрощается и переходит в такое:

$$x^3 + (\nu + 2)x^2 + (\nu + 1)x = 0$$

с корнями:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = -(\nu + 1).$$

В этом случае решение для ζ имеет следующий вид:

$$\zeta = A + B \cos \alpha + C \sin \alpha + D \cos \sqrt{\nu + 1} \cdot \alpha + E \sin \sqrt{\nu + 1} \cdot \alpha$$

с постоянными A, B, C, D, E .

Здесь постоянной A соответствует корень $x_1 = 0$; члены, зависящие от постоянных B и C , соответствуют корню $x_2 = -1$, а члены с D и E соответствуют корню $x_3 = -(\nu + 1)$. На образование из кольца восьмерки влияют лишь два последних члена. Вследствие замкнутости кольца величина $\sqrt{\nu + 1}$ должна быть целым числом. Отсюда следует, что наименьшая критическая нагрузка определяется, исходя из уравнения

$$\sqrt{\nu_{\min} + 1} = 2,$$

или $\nu_{\min} = 3$, и получается равной

$$p_{\min} = 3 \frac{EI}{a^3}, \quad (124)$$

причем

$$T_{\min} = 3 \frac{EI}{a^2}. \quad (125)$$

Следует заметить, что критическое давление $p_{кр}$ при искривлении кольца в его плоскости будет выражаться также формулой (124)¹⁾, при-

1) Как показал проф. Е. Л. Николаи в своей работе «Об устойчивости кругового кольца и круговой арки», «Изв. Петроградского политехн. ин-та», стр. 323 и сл. л. 1918, кроме указанной величины $p_{кр}$, найденного в предположении, что нагрузка остается нормальной к искривленной оси кольца, получается еще $p_{кр} = 4,5 \frac{EI}{a^3}$ для случая, если силы всегда (при плоской деформации) остаются направленными к центру кольца. *Прим. ред.*

чем под I нужно будет понимать момент инерции поперечного сечения относительно главной оси, параллельной оси z , т. е. оси симметрии кольца ¹⁾.

В случае, когда жесткость поперечного сечения кольца в смысле сопротивления кручению не бесконечно велика, что мы и имеем всегда на практике, мы должны обратиться к общему уравнению (123). Путем подстановки

$$z = x - \frac{\nu + 2}{3} \quad (126)$$

мы его приведем к нормальному виду алгебраического уравнения третьей степени:

$$z^3 - pz - q = 0 \quad (127)$$

с коэффициентами:

$$p = \frac{1}{3} (3\mu + 1 + \nu + \nu^2),$$

$$q = \frac{1}{27} (9\mu + 2 + 3\nu - 3\nu^2 - 2\nu^3 - 9\nu \cdot \mu).$$

Как легко убедиться, в рассматриваемом случае

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

так что прибегаем к тригонометрическому решению ²⁾. Полагая

$$\cos \Phi = \frac{9\mu + 2 + 3\nu - 3\nu^2 - 2\nu^3 - 9\nu\mu}{2(1 + \nu + \nu^2 + 3\mu)^{\frac{3}{2}}}, \quad (128)$$

мы получим для одного из корней следующее выражение:

$$z = -\frac{2}{3} \sqrt{1 + \nu + \nu^2 + 3\mu} \cdot \cos \frac{\Phi}{3}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{1}{3} \left[\nu + 2 - 2 \sqrt{1 + \nu + \nu^2 + 3\mu} \cdot \cos \frac{\Phi}{3} \right]. \quad (129)$$

Два других корня получатся, если вместо Φ подставить $\pm 180^\circ + \Phi$. Так как в дальнейшем мы угол Φ исключим, то безразлично, каким из трех корней воспользуемся при последующих вычислениях.

Потеря устойчивости плоской формы равновесия получится при

$$\lambda = \sqrt{x} = 2.$$

¹⁾ См., например, R. Mayer, Die Knickfestigkeit, стр. 128 и след., Berlin 1921 (также Тимошенко, Курс теории упругости, ч. II, стр. 162 и след., 1915 Прим. перев.)

²⁾ См., например, «Hütte», т. I, 13-е русское издание, стр. 51 и след.

На основании формулы (129) это нам даст второе выражение для $\cos \frac{\Phi}{3}$:

$$\cos \frac{\Phi}{3} = -\frac{10 - \nu}{2\sqrt{1 + \nu + \nu^2 + 3\mu}}. \quad (130)$$

Исключая Φ из равенств (128) и (130), мы после простых преобразований получим следующую простую формулу:

$$\mu + 4\nu = 12,$$

или

$$p_{кр} = \frac{EI}{a^3} \cdot \frac{12}{4 + \frac{EI}{GJ}}. \quad (131)$$

Следовательно, для критической сжимающей силы получится следующее выражение:

$$T_{кр} = -ap_{кр} = -\frac{EI}{a^2} \cdot \frac{12}{4 + \frac{EI}{GJ}}. \quad (132)$$

При бесконечно большой жесткости при кручении GJ две последних формулы переходят в формулы (124) и (125). Но обычно отношение $\frac{EI}{GJ}$ значительно больше нуля, так что, до того как круговая форма равновесия перестанет быть устойчивой, она перейдет из плоской в вывернутую новую форму равновесия. Часто отношение $\frac{EI}{GJ}$ бывает даже значительно больше единицы, так что потеря плоской формы равновесия наступает еще ранее.

Что касается литературы по данному вопросу, то в первую очередь укажем на работу Г. Генки (H. Hencky), помещенную в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», т. I, стр. 451, 1921, которой мы отчасти и руководствовались при составлении этого параграфа. В последнее время вопросами устойчивости упругих колец при весьма общих предположениях занимался Р. Граммель (R. Grammel), напечатавший свои работы в журнале «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», т. 3, стр. 429, 1923 и т. 7, стр. 198, 1927, ссылкой на которые мы и считаем достаточным здесь ограничиться²⁾.

1) Если нормальное давление $p_{кр}$ остается после потери устойчивости направленным параллельно первоначальной плоскости круглого кольца, то, как показал в цитированной выше работе Е. Л. Николаи, $p_{кр} = \frac{G}{EI} \cdot \frac{EI}{a^3}$. Кроме этого

случая рассмотрен случай кольца в упругой среде, а также ряд случаев устойчивости круговых арок. *Прим. ред.*

2) Следует здесь отметить также работу Е. Л. Николаи, посвященную вопросу устойчивости круговой арки (см. «Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», т. 3, стр. 227, 1923), работу Тимошенко С. П. («Ztschr. f. angew. Math. u. Mech.», т. 3, стр. 359, 1923), появившуюся недавно работу акад. Динника А. Н. (см. «Вестник инженеров и техников», стр. 378, 1933), в которой рассматривается вопрос об устойчивости арок переменной сечения, а также работу проф. Локшина А. Ш. об устойчивости некруговой арки. *Прим. ред.*

О центре изгиба.

Г. Э. Проктор.

Большая актуальность задачи об изгибе без кручения, в особенности тонкостенных профилей, применяемых в авиостроении, заставила искать более точные решения поставленной в настоящем параграфе задачи. Из прежних работ, не упомянутых Фепплом, следует отметить работы А. Гриффитца (A. Griffith) и Г. Тейлора (G. Taylor) («Proc. Inst. Mech. Eng.», 1917, стр. 755 и «Technical. Rep. Advis. Comm. Aeronautics», vol. 3, 1917—1918, стр. 920, 938 и 950), использовавших экспериментально и теоретически аналогию Прандтля. Работа С. П. Тимошенко была выше упомянута (стр. 130) по другому поводу. В § 78 Феппл рассматривает весьма элементарное решение для двутавра и лишь намечает метод, развитый проф. Тимошенко в цитированной статье.

Этот метод, а также приближенный метод В. Ритца являются весьма плодотворными в решении задачи об определении так называемого «центра изгиба» (или центра кручения).

Элементарные методы дают лишь приближенное решение, в котором положение «центра изгиба» определяется в зависимости только от формы сечения и не зависит от материала, из которого выполнен брус, — положение, не подтвердившееся в опытах Дункан. Точное решение, полученное еще в 1933 г. проф. Л. С. Лейбензоном, представляющее обобщение метода проф. Тимошенко, напечатано в «Технических заметках» ЦАГИ, № 45, 1935 г., стр. 53 и сл. в виде очень короткого резюме, мало доступного широким инженерным кругам. Помимо этого профессором Л. С. Лейбензоном была любезно предоставлена редактору рукопись последней еще неопубликованной работы на ту же тему¹⁾.

Так как постановка задачи и методы решения, предложенные проф. Л. С. Лейбензоном, имеют не только большое практическое значение для некоторых отраслей промышленности, но имеют еще и значительный принципиальный интерес, благодаря более строгой трактовке вопроса в духе теории Сен-Венана, мы сочли целесообразным изложить три основных метода с такой подробностью, чтобы наши передовые инженеры могли вполне овладеть ими для решения конкретных задач.

При изложении настоящего вопроса мы сочли необходимым переработать почти все выводы, основываясь на формулах и соотношениях, даваемых в книге Фепплей, ибо в своих статьях проф. Л. С. Лейбензон

¹⁾ Вопросом о центре кручения и изгиба занимался также акад. Б. Г. Галеркин (см. «Изв. Р. А. Н.» за 1919 г. и «Сборник Ленинградского ин-та инж. путей сообщения», 1927 г.), однако в них окончательного решения этого вопроса все же не дается.

основывается на решении задачи в форме, приведенной в курсе «Теории упругости» Лява, совершенно не отвечающей трактовке этой задачи в настоящей книге.

Недостаток места лишает нас возможности остановиться на изложении иных методов, предлагаемых другими авторами. Оправданием этому служит отчасти то обстоятельство, что работы некоторых из них уже освещены в «Теории упругости» Тимошенко (ч. I, гл. X), частью указаны им в библиографических ссылках; с другой стороны, опубликованные позже методы некоторых иностранных авторов или представляются менее строгими и общими, или даже сомнительными с принципиальной точки зрения. Нельзя обойти молчанием двух последних работ, появившихся в «Z. f. ang. M. u. M.» № 3 и 4, 1935 г. Первая принадлежит В. Швальбе (W. Schwalbe), а вторая Е. Трефциу (E. Trefftz). В первой работе автор пытается из неубедительных статических соображений дать статический критерий отсутствия «кручения» при изгибе, ставя требование, чтобы

$$\iint \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial x} x \right\} dx dy = 0,$$

где F есть особая часть функции напряжений, удовлетворяющая условиям:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{2GP}{Elm} \cdot x + GC,$$

а на контуре:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0.$$

Указывая на произвольность и недоказанность этого критерия, Е. Трефци предлагает энергетический критерий, состоящий в том, что если последовательно приложить к брусу крутящую пару сил в торцевом сечении, а затем поперечную силу, проходящую через центр изгиба, то вследствие «отсутствия вращения» торца (по мнению Трефци) взаимная работа этих сил будет равна нулю, что приводит к условию:

$$\iint (t_x \tau_x + t_y \tau_y) dx dy = 0,$$

где t_x и t_y суть компоненты касательных напряжений только от изгиба (без кручения), а τ_x и τ_y — компоненты тех же напряжений только от кручения.

Неверность этого критерия, приводящая к определению особой условной точки (точки Трефци), явствует из того, что в приведенном рассуждении Трефци молчаливо предполагается, что торец бруса при изгибе поворачивается как абсолютно твердая плоскость, ибо только в этом случае касательные напряжения от крутящей пары не совершают работы на перемещениях от изгиба¹⁾.

В самом деле, как будет видно из дальнейшего, каждый элемент поперечного сечения поворачивается при изгибе без кручения на свой особый

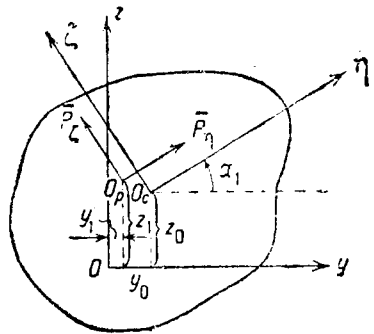
1) Недопустимость в механике изменяемых твердых тел замены действительного распределения сил системой других сил, статически эквивалентной первой, очевидна. Приведенное рассуждение находим и на стр. 138 этой книги.

угол, зависящий от координат элемента линейно. Поэтому естественнее принять вместе с Сен-Венаном, Лявом и Гриффитцом кинематический критерий отсутствия «кручения», который можно свести к условию, что средний погонный угол $\vartheta_{ср}$ закручивания, вычисленный для всего сечения, равен нулю. Любопытно, что у упомянутых выше обоих немецких авторов положение центра изгиба не зависит от пуассонова отношения. Упомянутые недочеты в решениях этой столь актуальной и интересной задачи послужили для нас одним из достаточно веских мотивов для более обстоятельного и пространного освещения задачи о совместном изгибе и кручении, остановив наше внимание на методах, являющихся с нашей точки зрения более строгими, с одной стороны, и, в то же время, достаточно практичными — с другой.

1. Постановка задачи.

Задача ставится следующим образом. Брус длиной l с поперечным сечением произвольной формы зашпелен одним концом, а на свободном конце нагружен поперечной силой¹⁾, лежащей в плоскости торцевого поперечного сечения, нормального к прямолинейной оси бруса.

Пусть ось x направлена (как и на фиг. 93) параллельно осевому волокну бруса, испытывающему, вообще говоря, некоторое продольное напряжение. Пусть (фиг. 93а) оси y и z , расположенные в поперечном сечении, имеют, таким образом, начало O не в центре тяжести O_c (y_0, z_0) заделанного сечения бруса, причем оси y и z не суть главные. Пусть, далее, оси η, ζ суть главные центральные оси инерции поперечного сечения, а точка приложения силы P (с компонентами P_η и P_ζ) пусть имеет пока произвольные координаты y_1 и z_1 .



Фиг. 93а.

Из элементарных соображений очевидно, что мы будем здесь иметь дело с совместным изгибом и кручением, и для этого случая можно принять $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Допустим, как это сделано выше авторами книги в соответствии с теорией, данной Сен-Венаном, что нормальные напряжения от изгиба меняются по линейному закону и определяются, как и выше, для сечения, отстоящего на расстоянии x от заделки, элементарными формулами:

$$\sigma_x = (x - l) \left[\frac{P_\eta}{I_\eta} \eta + \frac{P_\zeta}{I_\zeta} \zeta \right],$$

где l есть длина бруса, а η и ζ — координаты той точки сечения отно-

¹⁾ Здесь и в последующем ради краткости выражения сосредоточенную силу в торцевом сечении следует понимать в смысле Сен-Венана, т. е., что совокупность касательных напряжений, распределенных в нем так же, как и во всех других сечениях, статически эквивалентна сосредоточенной силе с точкой приложения в y_1, z_1 .

нительно центральных главных осей, в которой разыскиваются напряжения σ_x . Произведем замену переменных η и ζ через y и z и обозначим:

$$A = \frac{P_\eta}{I_\zeta} a_1 + \frac{P_\zeta}{I_\eta} a_2,$$

$$B = \frac{P_\eta}{I_\zeta} \beta_1 + \frac{P_\zeta}{I_\eta} \beta_2,$$

где a_1 , a_2 , β_1 и β_2 суть косинусы углов, составляемых главными центральными осями с осями yOz и определяемых по следующей схеме:

	η	ζ
y	a_1	a_2
z	β_1	β_2

Тогда получим следующее выражение для σ_x :

$$\sigma_x = (x - l) [A(y - y_0) + B(z - z_0)]. \quad (1)$$

Используя, как и выше в тексте § 78 (стр. 136), условие равновесия, получим обобщенное уравнение (2) вместо (135) на стр. 136:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -A(y - y_0) - B(z - z_0). \quad (2)$$

Очевидно, этому уравнению нетрудно удовлетворить, введя, как при кручении, функцию φ напряжений, через которую касательные напряжения могут быть представлены формулами:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= x \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{A}{2} [y^2 - 2y_0 y - f_1(z)], \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{B}{2} [z^2 - 2z_0 z - f_2(y)], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $f_1(z)$ и $f_2(y)$ суть некоторые функции, определяемые формой контура поперечного сечения.

Легко убедиться непосредственной подстановкой в том, что единственное не приводящееся к тождеству¹⁾ уравнение равновесия (2) будет удовлетворено.

Также нетрудно убедиться в том, что все уравнения совместности, за исключением двух последних из уравнений (60) тома I, удовлетворяются. Подставляя в эти уравнения выражения для деформаций через напряжения и используя выражение (1) для σ_x , получим:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = -B \frac{1}{1+m}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = -A \frac{1}{1+m}.$$

¹⁾ Это явствует из того, что τ_{xy} и τ_{xz} суть функции только y и z , как это следует из первого из уравнений совместности (60, т. I), и равенств $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$.

Интегрируя эти уравнения и замечая, что искомые компоненты касательных напряжений не должны зависеть от x , мы можем написать:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = -B \frac{1}{1+m} y + c_1 + f_3(z),$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = -A \frac{1}{1+m} z + c_2 + f_4(y).$$

Складывая оба равенства почленно, получаем тождество:

$$-A \frac{1}{1+m} z + f_3(z) - B \frac{1}{1+m} y + f_4(y) + c_1 + c_2 \equiv 0.$$

Отсюда имеем:

$$f_3(z) = \frac{A}{1+m} z, \quad (a)$$

$$f_4(y) = \frac{B}{1+m} y, \quad (b)$$

$$c_2 = -c_1 = -c. \quad (c)$$

Используя полученные соотношения, находим одно и то же выражение для разности частных производных τ :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \frac{A}{1+m} z - \frac{B}{1+m} y + c. \quad (4)$$

Из полученного соотношения можно найти погонный угол закручивания ϑ для любого элемента. Для этого следует дать формуле (19) § 66 несколько иное толкование. Если через η и ζ обозначить компоненты смещения какой-либо точки y, z сечения, то полный угол ψ поворота элемента, взятого у этой точки, будет равен:

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^*.$$

Дифференцируя это равенство по x , получим погонный угол закручивания ϑ из соотношения:

$$2\vartheta = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z}.$$

Замечая, что

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{и} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

дифференцируя первое равенство по z , а второе по y и вычитая одно из другого, придем после несложных преобразований и использования выражения для ϑ к такому соотношению:

$$-2G\vartheta = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}.$$

*) См., например, Ляв, Математическая теория упругости; нетрудно получить также непосредственно по аналогии с вихрем угол поворота элемента, как твердого тела, в соответствии с формулой (38) § 68, если только вместо скоростей взять компоненты смещения точки, откуда путем дифференцирования по времени найдется и угловая скорость [вихрь] — формула (38).

Вставляя сюда значение правой части из уравнения (4), получим:

$$-2G\vartheta = \frac{A}{1+m}z - \frac{B}{1+m}y + c. \quad (5)$$

Полученная формула показывает, что угол закручивания ϑ различен для различных элементов. Если бы изгиб совершался парой сил ($A=B=0$) или же изгиба вовсе не было бы, то при простом кручении из соотношения (5) мы имели бы: $\vartheta = \text{const.}$ для всех элементов сечения, а следовательно, ϑ являлся бы погонным углом закручивания, определяемым в элементарной теории как предел угла поворота одного сечения (как целого) относительно другого, бесконечно к нему близкого, при беспредельном уменьшении расстояния между сечениями.

Введем теперь (что будет найдется в полном соответствии с трактовкой Сен-Венана и Лява задачи о совместном изгибе и кручении) понятие среднего погонного угла закручивания $\vartheta_{\text{ср}}$ всего сечения. Определяем его из следующего соотношения:

$$\vartheta_{\text{ср}} = \frac{1}{F} \iint_F \vartheta \, dy \, dz.$$

Подставляя сюда значение ϑ из последнего соотношения, получим после интегрирования по всей площади сечения, использования выражений для статических моментов площади и по сокращении на площадь F следующее соотношение:

$$-2G\vartheta_{\text{ср}} = \frac{A}{1+m}z_0 - \frac{B}{1+m}y_0 + c,$$

где z_0 и y_0 суть координаты центра тяжести O_c (фиг. 93а).

Таким образом произвольная постоянная c определится равенством:

$$c = -2G\vartheta_{\text{ср}} - \frac{1}{1+m}(Az_0 - By_0). \quad (6)$$

Если мы теперь подставим в уравнение (4), являющееся следствием уравнений совместности, значения касательных напряжений из соотношений (3), то мы получим дифференциальное уравнение для функции φ напряжений:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} A \left[\frac{1}{1+m}z - \frac{1}{2}f'_1(z) \right] - B \left[\frac{1}{1+m}y - \frac{1}{2}f'_2(y) \right] + c. \quad (7)$$

Таким образом наша задача свелась к интегрированию дифференциального уравнения (7), в котором c определяется формулой (6) при граничных условиях (8), выражающих требование, чтобы вектор касательного напряжения совпадал с направлением касательной к контуру поперечного сечения. Это условие, как следует из уравнения, предшествующего уравнению (22) в § 66 (стр. 59), дает:

$$\tau_{xy} \frac{dz}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} = 0,$$

где ds есть элемент дуги кривой контура.

Вставляя сюда значения для τ_{xy} и τ_{zx} из (3), получим граничное условие после простых преобразований в такой форме:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{A}{2} [y^2 - 2y_0 y - f_1(z)] \frac{dz}{ds} - \frac{B}{2} [z^2 - 2z_0 z - f_2(y)] \frac{dy}{ds}. \quad (8)$$

Нормальные напряжения найдутся по формуле (1), а касательные — по формулам (3), если функция $\varphi(y, z)$ будет определена интегрированием уравнения (7) при граничном условии (8). Рассмотрим несколько приемов решения.

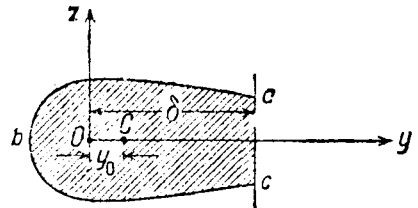
II. Точный метод С. Н. Тимошенко решения задачи.

Для решения обоих уравнений (8) и (7) в частном, им рассмотренном случае ¹⁾ Тимошенко С. П. рекомендует ²⁾ следующий метод.

Задаемся функцией $f(y)$ такой, чтобы правая часть уравнения (8) обратилась в нуль. Тогда будем иметь: $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, т. е. искомая функция напряжений на контуре должна принимать постоянное (как и при простом кручении) значение. Так как значение этой постоянной для нашей задачи несущественно (ибо напряжения выражаются через производные от φ), то мы можем принять ее равной нулю. Тогда задача сводится к разысканию функции φ напряжений из дифференциального уравнения (7) при условии, что на контуре она обращается в нуль.

Рассмотрим именно такой частный случай. Пусть контур abc сечения имеет ось симметрии, вдоль которой направим ось y (фиг. 93б). Центр C тяжести его имеет координаты: y_0 и $z_0 = 0$. Очевидно, что оси yz суть главные. Сила P пусть имеет одну компоненту $P = P_x$, а следовательно, $A = 0$; граничное условие (8) дает поэтому:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{B}{2} [z^2 - f_2(y)] \frac{dy}{ds}.$$



Фиг. 93б.

Примем, что уравнение контура (вследствие симметрии) может быть записано так:

$$z^2 = f_2(y) \quad \text{и} \quad y - \delta = 0,$$

где δ есть расстояние прямой ac от оси z .

Так как при этом либо квадратная скобка, либо $\frac{dy}{ds}$ на прямолинейном участке обращаются в нуль, то наше граничное условие перейдет в уравнение:

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

¹⁾ Напомним, что начало осей принято в центре тяжести сечения, а сила P параллельна одной из осей (z); тогда $A = 0$.

²⁾ См. цитированную выше американскую работу, а также курс Теории упругости, часть I, стр. 318, изд. 1934 г.

интеграл которого, согласно сказанному выше, может быть принят на контуре s равным

$$[\varphi]_s = 0.$$

Тогда уравнение для определения функции φ напряжений примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -B \left[\frac{1}{1+m} y - \frac{1}{2} f'_2(y) \right] + c. \quad (9)$$

Решение этого уравнения следует искать в такой форме, которая на всем контуре обратила бы φ в нуль. Этому требованию мы легко удовлетворим, если положим:

$$\varphi = k(y - \delta) [z^2 - f_2(y)], \quad (10)$$

где k есть постоянная, подлежащая определению.

Надо заметить, что это не есть общее решение, так как оно нашему дифференциальному уравнению (9) может точно удовлетворить лишь для некоторых частных форм функции $f_2(y)$.

Достаточно общее решение приведено на стр. 54 цитированной выше статьи проф. Л. С. Лейбензона, обобщающее решения, приведенные в «Теории упругости» Тимошенко С. П., ч. I, § 90, 91, 93 и 94, на случаи отрезков эллипса (круга), гиперболы, параболы и равнобедренного треугольника при определенном соотношении сторон. Выберем функцию $f_2(y)$ второй степени в такой форме:

$$f_2(y) = ay^2 + 2\beta y + \gamma.$$

Тогда уравнения контура запишутся так:

$$z^2 - ay^2 - 2\beta y - \gamma = 0 \quad \text{и} \quad y - \delta = 0,$$

а искомая функция φ получит вид:

$$\varphi = k(y - \delta) [z^2 - ay^2 - 2\beta y - \gamma].$$

Подставляя это выражение φ в дифференциальное уравнение (9) задачи и замечая, что оно должно удовлетворяться при всяких значениях u , приходим к двум соотношениям:

$$2k(1 - 3a) = \left(a - \frac{1}{1+m} \right) B, \quad (a)$$

$$2k(a\delta - \delta - 2\beta) = B\beta + c, \quad (b)$$

из которых определяем искомую постоянную k :

$$k = \frac{B}{2} \cdot \frac{a - \frac{1}{1+m}}{1 - 3a}$$

и получаем соотношение между постоянными a , β , γ и δ , определяющими форму контура, и постоянными задачи B и c :

$$\left(a - \frac{1}{m+1} \right) [\delta(a-1) - 2\beta] = \left(\beta + \frac{c}{B} \right) (1 - 3a). \quad (11)$$

Таким образом и для выбранной формы функции $f_{\alpha}(y)$ решение возможно не при любых, а только при связанных соотношением (11) значениях параметров α и β .

В частном случае, когда начало координат расположено в центре тяжести фигуры abc (фиг. 93б), $y_0=0$, и если мы остановимся на случае изгиба без кручения и примем средний угол поворота торцевого сечения равным нулю, т. е. $\vartheta_{cp}=0$, то мы придем к более простому соотношению, в котором следует положить $c = By_0 + 2G\vartheta_{cp} = 0$;

$$\left(\frac{1}{1+m} - \alpha\right) [\beta(\alpha - 1) - 2\beta^2] + (1 - 3\alpha)\beta = 0. \quad (11')$$

Составим условие изгиба без кручения в самом общем виде, с точки зрения развиваемой теории. Полагая $\vartheta_{cp}=0$, найдем значение постоянной c решения задачи [см. формулу (6)]:

$$c = -\frac{1}{1+m} [Az_0 - By_0]. \quad (6')$$

Однако условие $\vartheta_{cp}=0$ может быть выполнено лишь при некотором определенном для данного профиля сечения положении центра приложения внешних сил, которое будем называть центром изгиба (центром жесткости).

Для определения его координат, которые обозначим условно через y_1 и z_1 , напишем условие равновесия (равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на отсеченную часть бруса, относительно оси x):

$$\iint_S (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dy dz + Y_1 z_1 - Z_1 y_1 = 0,$$

где компоненты Y_1 и Z_1 внешней силы найдутся по формулам:

$$Y_1 = P_1 \cos(P_1, y) = P_{\eta} a_1 + P_{\zeta} a_2,$$

$$Z_1 = P_1 \cos(P_1, z) = P_{\eta} \beta_1 + P_{\zeta} \beta_2.$$

Из двух других условий равновесия (условия проекций) имеем:

$$Y_1 = - \iint_S \tau_{xy} dy dz$$

и

$$Z_1 = - \iint_S \tau_{xz} dy dz.$$

Подставляя эти значения в предыдущее уравнение, найдем:

$$\iint_S (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dy dz + y_1 \iint_S \tau_{xz} dy dz - z_1 \iint_S \tau_{xy} dy dz = 0. \quad (12)$$

В уравнение (12) входят искомые координаты центра изгиба y_1 и z_1 и компоненты P_{η} и P_{ζ} внешней силы, через которые посредством A и

B будут выражены напряжения τ_{xy} и τ_{xz} . Так как уравнение (12) должно удовлетворяться при любом значении вектора внешней силы, т. е. при произвольных значениях компонент P_x и P_z , то уравнение (12) распадается на два уравнения, получающиеся путем приравнивания нулю коэффициентов при каждой компоненте силы и включающие только y_1 и z_1 . Из этих уравнений искомые координаты центра изгиба смогут быть легко найдены. Некоторые результаты подобных вычислений для ряда сечений будут приведены ниже.

III. Приближенный метод Ритца-Тимошенко.

Для сведения задачи об изгибе и кручении к задаче нахождения экстремума определенного интеграла применим принцип возможных перемещений к элементу, вырезанному из нашего стержня, длиной в единицу и сечением, равным сечению бруса. Обозначая через U накопленную вырезанным элементом потенциальную энергию, а через L — работу внешних (торцевых) сил, на него действующих, получим:

$$\delta U = \delta L.$$

Составим выражения для U и L , в которых выделим заранее части, не зависящие от φ , как, например, потенциальную энергию и работу внешних сил простого изгиба:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \int \int \sigma_x^2 dy dz$$

и

$$L_0 = \frac{1}{2} \int \int \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sigma_x dy dz.$$

В нашем случае будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2G} \int \int (\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) dy dz + U_0, \\ L &= \int \int \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \tau_{xy} \right] dy dz + L_0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Вычислим последовательно эти выражения, подставляя вместо τ_{xz} и τ_{xy} найденные выше общие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= + \frac{\partial \eta}{\partial z} - \Phi_1(v, z), \\ \tau_{xz} &= - \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \Phi_2(y, z), \\ \Phi_1(v, z) &= \frac{A}{2} [y^2 - 2y_0 y - f_1(z)], \\ \Phi_2(y, z) &= \frac{B}{2} [z^2 - 2z_0 z - f_2(y)]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

Тогда для U получим после несложных преобразований, интегрирования по частям и умножения на $2G$ обеих частей равенства:

$$2GU = \int \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz - 2 \oint [\varphi \Phi_{1z}]_s dy + 2 \int \int \varphi \Phi_{1z} dy dz + \\ + \int \int \Phi_1^2 dy dz + 2 \oint [\varphi \Phi_{2y}]_s dz - 2 \int \int \varphi \cdot \Phi_{2y} dy dz + \int \int \Phi_2^2 dy dz + U_0,$$

где $[\varphi \Phi]_s$ обозначает, что берется значение выражения в скобках на контуре s , а $\Phi_{1z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}$ и $\Phi_{2y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$. Замечая, что, как выше было получено, на контуре $[\varphi]_s = 0$, вследствие чего контурные интегралы пропадают, а также, что единственной неизвестной и в то же время искомой функцией является φ , мы можем легко получить простое выражение вариации $2G\delta U$; при ее нахождении следует иметь в виду, что вариация членов, не содержащих φ , должна обратиться в нуль (это относится и к U_0).

После всех преобразований получаем:

$$2G\delta U = \delta \int \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz + 2 \int \int \left[\delta \varphi \Phi_{1z} dy dz - 2 \int \int \delta \varphi \Phi_{2y} dy dz, \quad (15)$$

где $\Phi_{1z} = -\frac{A}{2} f_1'(z)$, а $\Phi_{2y} = -\frac{B}{2} f_2'(y)$.

Теперь перейдем к разысканию работы внешних для рассматриваемого элемента сил. Для этого прежде всего необходимо определить $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ и $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, которые для сокращения обозначим через η_x и ζ_x . Мы имеем следующие соотношения для нашей задачи (см. стр. 389):

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\mu}{E} \sigma_x; \quad \varepsilon_x = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\mu}{E} \sigma_x; \\ 2\theta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z}.$$

Подставляя сюда значение σ_x из формулы (1), дифференцируя первые два соотношения по x и вводя принятые обозначения, получим:

$$\frac{\partial \eta_x}{\partial y} = -\frac{1}{2(1+m)G} [A(y-y_0) + B(z-z_0)], \\ \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} = -\frac{1}{2(1+m)G} [A(y-y_0) + B(z-z_0)]$$

и

$$2\theta = \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} - \frac{\partial \eta_x}{\partial z}.$$

Интегрируем первые два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \eta_x &= -\frac{1}{2(1+m)G} \left[\frac{A}{2} (y-y_0)^2 + B(z-z_0)y \right] + \psi_1(z), \\ \zeta_x &= -\frac{1}{2(1+m)G} \left[A(y-y_0)z + \frac{B}{2} (z-z_0)^2 \right] + \psi_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для нахождения функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(y)$ вставляем найденные выражения и значение 2ϑ из формулы (5) в третье из вышенаписанных уравнений:

$$-\frac{1}{2(1+m)G}(Az - By) + \psi'_2(y) - \psi'_1(z) \equiv \frac{-1}{(1+m)G}(Az - By) - \frac{c}{G}.$$

Будем решать задачу в предположении, что имеем изгиб без кручения, так что сила P приложена в центре изгиба. Вследствие этого $\vartheta_{cp} = 0$ и c определится из формулы (6):

$$c = -\frac{1}{1+m} [Az_0 - By_0].$$

Вставляя это значение в найденное уравнение и замечая, что оно должно удовлетворяться тождественно при любых значениях y и z внутри и на контуре, приходим к следующим уравнениям:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \psi'_1(z) &= +\frac{A}{(1+m)G} \left(\frac{1}{2}z - z_0 \right) \\ \psi'_2(y) &= \frac{B}{(1+m)G} \left(\frac{1}{2}y - y_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Так как дальнейшее интегрирование для наших целей несущественно, мы перейдем к разворачиванию выражения для вариации δL работы внешних сил; подставляя значения напряжений и замечая, что $\delta L_0 = 0$, получим:

$$\delta L = \delta \iint \left[-\zeta_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \Phi_2 \right) + \eta_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \Phi_1 \right) \right] dy dz.$$

Принимая во внимание, что ζ_x и η_x , а также Φ_1 и Φ_2 являются определенными функциями от y и z и не зависят от φ , почему вариации интегралов от их произведений будут равны нулю, получим:

$$\delta L = \iint \eta_x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z} dy dz - \iint \zeta_x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} dy dz,$$

или

$$\delta L = \oint [\eta_x \delta \varphi]_z dy - \iint \frac{\partial \eta_x}{\partial z} \delta \varphi dy dz - \oint [\zeta_x \delta \varphi]_y dz + \iint \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} \delta \varphi dy dz.$$

Но так как на контуре всюду $\delta \varphi = 0$, то мы, подставляя вместо $\frac{\partial \eta_x}{\partial z}$, $\frac{\partial \zeta_x}{\partial y}$, $\psi'_1(z)$ и $\psi'_2(z)$ их значения из формул (16) и (17), будем иметь:

$$2G\delta L = \frac{2}{1+m} \iint [B(y - y_0) - A(z - z_0)] \delta \varphi dy dz. \quad (18)$$

Теперь, подставляя значения вариаций потенциальной энергии и работы внешних сил в уравнение принципа возможных перемещений, после несложных преобразований получим условие:

$$\begin{aligned} &\delta \iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz = \\ &= \iint \left\{ B \left[\frac{2}{1+m} (y - y_0) - f'_2(y) \right] - A \left[\frac{2}{1+m} (z - z_0) - f'_1(z) \right] \right\} \delta \varphi dy dz, \end{aligned}$$

которое можно, как условие экстремума, записать в общем виде так:

$$\left. \begin{aligned} \delta I = 0^*), \\ I = \frac{1}{2} \int \int [\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2] dy dz - \int \int F_1(y, z) \varphi dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

причем функция F_1 определяется соотношением:

$$F_1(y, z) = B \left[\frac{1}{1+m} (y - y_0) - \frac{1}{2} f'_2(y) \right] - A \left[\frac{1}{1+m} (z - z_0) - \frac{1}{2} f'_1(z) \right].$$

В статье проф. Л. С. Лейбензона рассмотрено два частных случая этого общего решения: А. Случай симметричного контура с осью симметрии y и силой, к ней перпендикулярной и приложенной в центре изгиба; Б. Случай несимметричного профиля, для которого принято

$$f_1(z) = f_2(y) = 0.$$

А. Случай симметричного контура. Пусть в этом случае

$$A = 0; \quad B = \frac{P}{I_y}; \quad \vartheta_{cp} = 0; \quad c = \frac{P}{I_y} \cdot \frac{y_0}{1+m}.$$

Как и прежде, принимаем уравнение контура:

$$z^2 - f_2(y) = 0$$

и, вводя встречавшееся обозначение $\psi(y) = \sqrt{f_2(y)}$, можем написать приближенное решение для искомой функции напряжений в форме:

$$\varphi = D(z^2 - \psi^2)^{**},$$

где D есть постоянная, подлежащая определению из вариационного уравнения (19), которое дает:

$$D = \frac{P}{2(1+m) \cdot I_y} \cdot \frac{\int y \psi^3 dy - y_0 \int \psi^3 dy}{\int \psi^3 dy + 8 \int \psi^3 \psi^2 dy}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{P}{2(1+m) I_y} \cdot \omega \cdot (z^2 - \psi^2), \\ \omega &= \frac{\int y \psi^3 dy - y_0 \int \psi^3 dy}{\int \psi^3 dy + 3 \int \psi^3 \psi^2 dy}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Чтобы найти координату y_1 центра изгиба, необходимо воспользоваться условием (12).

*) Варьируется функция φ , являющаяся, следовательно, аргументом функции I .
**) Ясно, что при этом на контуре как φ , так и $\delta \varphi$ всюду равно нулю.

Совершенно очевидно, что для нашего симметричного профиля $z_0 = z_1 = 0$; подставляя в условие (12) значения напряжений из (14), получим:

$$\iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y \right) dy dz + \iint \Phi_2 y dy dz + y_1 \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \Phi_2 \right) dy dz = 0.$$

Первый интеграл после интегрирования по частям и подстановки значения φ из (20) дает¹⁾:

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y \right) dy dz &= -2 \iint \varphi dy dz = -\frac{B}{(1+m)} \omega \iint (z^2 - \psi^2) dy dz = \\ &= +\frac{2}{3} \frac{B}{1+m} \omega \int \psi^3 dy. \end{aligned}$$

Остальные интегралы дадут:

$$\begin{aligned} \iint \Phi_2 y dy dz &= -\frac{B}{3} \int \psi^3 y dy \\ \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \Phi_2 \right) dy dz &= -\frac{B}{3} \int \psi^3 dy. \end{aligned}$$

Тогда условие для определения y_1 дает:

$$y_1 = \frac{\int \psi^3 y dy}{\int \psi^3 dy} - \frac{2}{1+m} \omega, \quad (21)$$

где ω имеет то же значение, что и в (20).

Если профиль очень тонок, то можно принять $(\psi')^2 \approx 0$; тогда

$$\omega \approx y_0 - \frac{\int y \psi^3 dy}{\int \psi^3 dy},$$

откуда найдем:

$$y_1 = y_0 - \left(y_0 - \frac{\int y \psi^3 dy}{\int \psi^3 dy} \right) \frac{3+m}{1+m}. \quad (22)$$

Если контур (как на фиг. 93б) пересечен прямой линией с уравнением $y + a = 0$, то функцию напряжений следует выбрать в виде:

$$\varphi = D(z^2 - \psi^2)(y + a).$$

Б. Случай несимметричного контура. Задача легко решается в тех случаях, когда можно принять

$$f_1(z) = f_2(y) = 0.$$

¹⁾ Здесь для сокращения письма введено обозначение $B = \frac{P}{2l_y}$.

Вариационное уравнение (19) сохраняется, только значение функции F_1 будет для случая изгиба без кручения следующим:

$$F_1(y, z) = \frac{B}{1+m}(y-y_0) - \frac{A}{1+m}(z-z_0). \quad (23)$$

Искомую функцию φ выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям, а также требованиям, чтобы на контуре $[\varphi]_s = 0$ и $[\delta\varphi]_s = 0$. Если контур задан уравнениями:

$$z = a\psi(y) \quad \text{и} \quad z = 0,$$

то, принимая

$$\varphi = D \cdot z(z - \psi) + \frac{z \cdot \theta(y)}{\psi(y)},$$

где

$$\theta = A \left[\frac{a^2}{2} \int \psi^2 dy - z_0 a \int \psi dy \right] - B \left[a \left(\frac{y^2}{2} - y_0 y \right) \psi - a \int (y - y_0) \psi dy \right],$$

можем найти из вариационного уравнения (19) произвольную постоянную D .

IV. Метод проф. Л. С. Лейбензона.

Предложенный проф. Л. С. Лейбензоном метод состоит в своеобразном интегрировании с помощью экстремального условия Ритца основного уравнения (7), которое можно записать для краткости так:

$$\nabla^2 \varphi = F(y, z),$$

где

$$F(y, z) = A \left[\frac{1}{1+m} z - \frac{1}{2} f_1'(z) \right] - B \left[\frac{1}{1+m} y - \frac{1}{2} f_2'(y) \right] + c$$

и

$$c = -2G\vartheta_{cp} - \frac{1}{1+m} [Az_0 + By_0].$$

При прежних же граничных условиях (8) имеем:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{A}{2} [y^2 - 2y_0 y - f_1(z)] \frac{dz}{ds} - \frac{B}{2} [z^2 - 2z_0 z - f_2(y)] \frac{dy}{ds}.$$

Для изгиба без кручения симметричного контура, проходящего через начало координат, имеющего в качестве оси симметрии ось O_y и пересеченного прямой $y = b$, будем иметь:

$$A = 0, \vartheta_{cp} = 0, F_1(y, z) = \frac{B}{1+m}(y-y_0) - \frac{B}{2} \frac{d}{dy}(\psi^2), \quad z_0 = 0,$$

если контур имеет уравнение:

$$z^2 - \psi^2(y) = 0^*.$$

*) Уравнение контура взято в такой форме, чтобы удовлетворить граничному условию, что будет иметь место, если положить $f_2(y) = \psi^2(y)$.

Нетрудно показать непосредственным вариированием, что дифференциальное уравнение (7) может быть получено непосредственно из вариационного уравнения (19), а тогда задача может быть решена с помощью экстремального условия, в которое вместо φ вставим следующее выражение:

$$\varphi = (z^2 - \psi^2)f(y), \quad (24)$$

где $f(y)$ есть искомая функция, удовлетворяющая условию:

$$f(b) = 0.$$

В силу выбранной формы функции φ напряжений и наложенного на искомую функцию $f(y)$ упомянутого граничного условия будут выполняться два основных требования: а) на контуре $[\varphi]_s = 0$ и $[\delta\varphi]_s = 0$; б) граничное условие типа (8). Для разыскания функции $f(y)$ проф. Л. С. Лейбензон предлагает развернуть экстремальное условие (19), что приводит к дифференциальному уравнению относительно $f(y)$:

$$4\psi^2 \frac{d^2f}{dy^2} + 10 \frac{d}{dy}(\psi^2) \cdot \frac{df}{dy} + 10 \left[\frac{1}{2} \frac{d^2(\psi^2)}{dy^2} - 1 \right] f + 5F_1(y) = 0 \quad (25)$$

при соблюдении условия:

$$\left| (\psi'' \cdot \psi' f + \frac{2}{5} \psi^3 \cdot f') \delta f \right|_0^b = 0. \quad (26)$$

Последнее условие будет выполнено вследствие того, что на всем контуре, а следовательно, и при $y=0$ и $y=b$ должно быть удовлетворено условие:

$$\delta\varphi = \delta \{ (z^2 - \psi^2)f(y) \} = (z^2 - \psi^2) \delta f(y) = 0.$$

Так, для равнобедренного треугольника с вершиной в O , с углом при вершине 2α имеем ¹⁾:

$$\psi = \pm ky, \quad k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Уравнение (25) примет вид:

$$4k^2 y^2 \frac{d^2f}{dy^2} + 20ky^2 \frac{df}{dy} + 10(k^2 - 1)f + \frac{B}{2(1+m)} \cdot (y - v_r) - 5Bk^2 y = 0.$$

Интеграл его (в силу условия конечности при $y=0$) будет:

$$f = C_1 + C_2 y + C_3 y^{r_1},$$

где

$$r_1 = -2 + \sqrt{\frac{5 + 3k^2}{2k}},$$

¹⁾ Ось Oy направлена по биссектрисе угла 2α .

а постоянные равны:

$$C_1 = \frac{B}{1+m} \cdot \frac{y_0}{2(k^2-1)}; \quad C_2 = \frac{Bk^2}{2(3k^2-1)} - \frac{B}{2(1+m)} \cdot \frac{1}{3k^2-1}$$

и

$$C_3 = -b^{-r_1} [C_1 + C_2 b],$$

где b есть высота треугольника. Координата центра изгиба найдется теперь общим приемом из уравнения (12) и после вычислений определится по формуле:

$$y_1 = \left[\frac{5k^2-1}{3k^2-1} - \frac{2}{(1+m)(3k^2-1)} \right] \frac{\int y \psi^3 dy}{\int \psi^3 dy} + \frac{2}{1+m} \frac{y_0}{k^2-1} - \frac{8}{r_1+4} \left[\frac{k^2 b}{3k^2-1} - \frac{b}{(1+m)(3k^2-1)} + \frac{1}{1+m} \cdot \frac{y_0}{k^2-1} \right]. \quad (27)$$

В качестве примера асимметричного профиля рассматривается неравнобедренный прямоугольный треугольник, определяемый уравнениями контура:

$$z = ky \quad \text{и} \quad y = b,$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ (вершина в O). Интегрируя по контуру граничное условие (8), получим для точек контура функцию напряжений:

$$[\varphi]_s = \frac{z}{6} \cdot \Phi(y), \quad \text{где} \quad \Phi(y) = Bky(y-b) - Ay(y-2b).$$

Для решения задачи принимаем:

$$\varphi = \frac{z}{6} \cdot \Phi(y) - z(z-ky) \cdot f(y)$$

при условии, что $f(b) = 0$. Такая форма функции напряжений удовлетворяет также условию, чтобы на контуре $[\varphi]_s = 0$ и $[\delta\varphi]_s = 0$.

Подстановка в экстремальное уравнение (19) $\delta I = 0$ приводит к дифференциальному уравнению относительно $f(y)$:

$$k^2 y^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + 5k^2 y \frac{df}{dy} - 10f + \frac{5}{6} (Bk - A) ky + \frac{5A}{2(1+m)} ky - \frac{5B}{1+m} (y - y_0) = 0 \quad *).$$

Интеграл этого уравнения ищется в форме:

$$f = c_1 y + c_2 + c_3 y^{r_1},$$

где

$$r_1 = -2 + \sqrt{4 + \frac{10}{k^2}}, \quad c_1 = \frac{Bk^2 - Ak}{6(k^2 - 2)} + \frac{A}{2(1+m)} \cdot \frac{k}{k^2 - 2} - \frac{B}{1+m} \cdot \frac{1}{k^2 - 2},$$

$$c_2 = \frac{1}{2(1+m)} (By_0 - Az_0).$$

*) Интегралы, не зависящие от $f(y)$, после варьирования пропадают.

Из уравнения моментов (12) определяются координаты y_1 и z_1 центра изгиба как корни двух следующих уравнений:

$$z_1 - 2ky_1 + \frac{6}{5}kb - 24E_1kb = 0, \quad 2z_1 - ky_1 - 24bk^3E_2 = 0,$$

где

$$E_1 = \frac{1}{12(1+m)} - \frac{1}{5(k^2-2)} \left(\frac{k^2}{6} - \frac{1}{1+m} \right) - \frac{1}{r_1+4} \left[\frac{1}{3(1+m)} - \frac{1}{(k^2-1)} \left(\frac{k^2}{6} - \frac{1}{1+m} \right) \right],$$

$$E_2 = -\frac{1}{24(1+m)} - \frac{1}{5(k^2-2)} \left[\frac{1}{2(1+m_2)} - \frac{1}{6} \right] + \frac{1}{r_1+4} \left[\frac{1}{6(1+m)} + \frac{1}{(k^2-2)} \left(\frac{1}{2(1+m)} - \frac{1}{6} \right) \right].$$

При достаточно малом угле α , а следовательно, малом k , получим:

$$y_1 - y_0 = \frac{2b}{15} \frac{3+m}{1+m}, \quad z_1 - z_0 = \frac{b}{15} \frac{3+m}{1+m}.$$

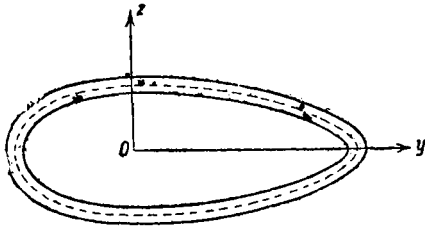
Отсюда можно показать, что для этого случая центр жесткости лежит на медиане, проходящей через центр тяжести.

V. Метод проф. Л. С. Лейбензона¹⁾ для определения положения центра изгиба замененных тонкостенных профилей.

Предлагая излагаемый ниже метод, проф. Л. С. Лейбензон указывает на то, что в некоторых случаях метод Ван-дер-Неутена (Van der Neuten), пользующийся в настоящее время широкой популярностью в кругах авиоконструкторов, может привести к неточным результатам.

Рассмотрим изгиб (без кручения) консольного бруса тонкостенного профиля поперечного сечения, нагруженного поперечной силой, лежащей в плоскости свободного торца его. Начало координатных осей yz поместим теперь в центре тяжести сечения и направим их по главным осям инерции сечения (фиг. 93в).

Пусть компоненты поперечной (изгибающей) силы по осям координат будут P_y и P_z . Так как принятые оси суть главные центральные, то



Фиг. 93в.

¹⁾ Этот метод теперь опубликован в кратком изложении в «Докладах» А. Н. СССР, 1935 г., том IV (IX), № 1—2 (70—71). Рукопись этой работы, а также решения с помощью развитого в ней метода двух примеров были любезно предоставлены мне автором для использования при составлении настоящего доклада.

имеем для величин, введенных в начале настоящего добавления, следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} z_0 = y_0 = 0; \quad P_\eta = P_y; \quad P_\zeta = P_x; \quad a_2 = 0; \quad \beta_2 = 1; \quad a_1 = 1; \quad \beta_1 = 0; \\ I_\eta = I_y; \quad I_\zeta = I_x; \quad A = \frac{P_y}{I_x}; \quad B = \frac{P_x}{I_y}. \end{aligned} \right\} (28)$$

Вычислим теперь контурный интеграл (циркуляцию) вектора τ_s , взятый вдоль всей срединной линии, преобразуя выражение его (см. начало § 69) по теореме Римана-Стокса:

$$\oint_s \tau_s ds = \oint_s (\tau_{xy} dy + \tau_{xz} dz) = \iint_S \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) dy dz, \quad (29)$$

где двукратный интеграл распространен по площади S , заключенной внутри контура s срединной линии.

На основании формулы (4), в которой постоянная c для нашей задачи, определяемая формулой (6), обратится в нуль, так как мы выше приняли в качестве критерия отсутствия кручения условие $\vartheta_{op} = 0$, и принимая во внимание равенства (28), получим:

$$\oint_s \tau_s ds = \frac{P_x}{I_y(1+m)} \iint_S y dy dz - \frac{P_y}{I_x(1+m)} \iint_S z dy dz. \quad (30)$$

Для непосредственного вычисления циркуляции вектора τ_s можно пользоваться двумя приемами: точным и приближенным.

а) Первый прием сводится к применению точного способа, развитого выше, т. е. к нахождению функции φ напряжения. Действительно, подставляя в левую часть выражения (29) выражение (30), а в правую — значения τ_{xy} и τ_{xz} из формул (3), получим:

$$\begin{aligned} - \iint_S \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dy dz = \frac{P_x}{I_y(1+m)} \iint_S y dy dz - \frac{P_y}{I_x(1+m)} \iint_S z dy dz + \\ + \frac{P_y}{2I_x} \iint_S f'_1(z) dy dz - \frac{P_x}{2I_y} \iint_S f'_2(y) dy dz. \end{aligned}$$

Преобразуя левую часть по формуле Грина¹⁾, найдем:

$$\begin{aligned} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \left\{ \frac{P_x}{I_y} \iint_S \left[\frac{y}{1+m} - \frac{1}{2} f'_2(y) \right] dy dz - \right. \\ \left. - \frac{P_y}{I_x} \iint_S \left[\frac{z}{1+m} - \frac{1}{2} f'_1(z) \right] dy dz \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

¹⁾ См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, ч. II, стр. 497 (изд. 1931 г.), формулу (6), в которой надо положить $U=1$, объемный интеграл заменить двойным, а поверхностные — контурным, так как в рассматриваемой нами задаче функция напряжений зависит только от двух переменных.

Если мы решаем задачу точным методом, то, полагая на одном из контуров тонкостенного профиля (например, на внутреннем) $\varphi = 0$, из граничных условий получим, что для другого (внешнего) $\varphi = \varphi_1 = \text{const}$. Эту постоянную и можно будет определить из уравнения (31), имея общее решение для φ вплоть до неизвестной постоянной φ_1 .

Для определения координат y_1 и z_1 центра изгиба воспользуемся теперь условием равновесия (12), замечая, что $Y_1 = P_y$, а $Z_1 = P_z$:

$$\iint_S (\tau_{zy}z - \tau_{zx}y) dy dz - P_z y_1 + P_y z_1 = 0. \quad (32)$$

Подставляя в это уравнение выражения для τ_{zy} и τ_{zx} из (3), получим:

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y \right) dy dz + \frac{P_z}{2I_y} \iint_S [z^2 - f_2(y)] y dy dz - \\ - \frac{P_y}{2I_x} \iint_S [y^2 - f_1(z)] z dy dz - P_z y_1 + P_y z_1 = 0. \end{aligned}$$

Беря первый интеграл по частям и интегрируя по тому контуру, на котором $\varphi = 0$, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -2 \iint_{S_0} \varphi dy dz + \frac{P_z}{2I_y} \iint_{S_0} [z^2 - f_2(y)] y dy dz - \\ - \frac{P_y}{2I_x} \iint_{S_0} [y^2 - f_1(z)] z dy dz - P_z y_1 + P_y z_1 = 0. \quad (33) \end{aligned}$$

Здесь двойные интегралы должны быть взяты по площади S_0 , ограниченной тем контуром, вдоль которого $\varphi = 0$.

Если решение для функции φ напряжений разложить на два слагаемых, ϕ_1 и ϕ_2 , каждое из которых имеет множителем соответственно P_y и P_z , т. е.

$$\varphi = P_y \phi_1 + P_z \phi_2, \quad (34)$$

которые в свою очередь являются функциями y и z , то, замечая, что уравнение (33) должно быть удовлетворено для любых значений P_y и P_z , т. е. при любом значении и любом направлении внешней силы P_1 , лишь бы она проходила через центр изгиба, придем к заключению, что оно должно распадаться на два, каждое из которых дает формулу для определения координаты центра изгиба:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -2 \iint_{S_0} \phi_1 dy dz - \frac{1}{2I_x} \iint_{S_0} [y^2 - f_1(z)] z dy dz, \\ z_1 &= +2 \iint_{S_0} \phi_2 dy dz - \frac{1}{2I_y} \iint_{S_0} [z^2 - f_2(y)] y dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

При этом надо помнить, что интегралы берутся по площади S_0 , ограниченной тем контуром, на котором $\varphi = 0$.

б) Вместо изложенного точного приема можно для профилей с очень тонкими стенками воспользоваться приближенным приемом, состоящим в том, что при разыскании интеграла $\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$, стоящего в левой части уравнения (31), мы, определив из него постоянное значение φ_1 для второго контура и зная, таким образом, функцию φ , применяем преобразованное уравнение (32), в котором берем интегралы по площади S_c , ограниченной срединной линией c , причем пользуемся соотношением:

$$\iint_{S_c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y \right) dy dz = \oint_c [\varphi z]_c dy + \oint_c [\varphi y]_c dz - 2 \iint_{S_c} \varphi dy dz.$$

В контурных интегралах приближенно принимаем значение φ на срединной линии постоянным и равным φ_c (в некоторых случаях φ_c можно взять даже равным среднему арифметическому между $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_1$); тогда:

$$\iint_{S_c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} z + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y \right) dy dz \approx 2\varphi_c S_c - 2 \iint_{S_c} \varphi dy dz.$$

Вместо уравнения (33) для определения координат y_1 и z_1 центра изгиба будем иметь:

$$2\varphi_c S_c - 2 \iint_{S_c} \varphi dy dz + \frac{P_z}{2I_y} \iint_{S_c} [z^2 - f_2(y)] y dy dz - \\ - \frac{P_y}{2I_z} \iint_{S_c} [y^2 - f_1(z)] z dy dz + P_y z_1 - P_z y_1 = 0,$$

где интегралы берутся по всей площади S_c , ограниченной срединной линией. Первые два члена, очевидно, также будут состоять из двух членов каждый, множителями у которых будут P_y и P_z . В ряде случаев этот прием может принести некоторые упрощения в выкладках.

Наибольшего упрощения можно добиться, применяя формулы К. Вебера (С. Weber) для касательных напряжений.

с) Третий прием, предложенный проф. Л. С. Лейбензоном, состоит в том, что мы для вычисления левой части уравнения (30) применяем приближенные формулы, данные Вебером для полной касательной силы T , действующей в сечении, сделанном плоскостью, проходящей через образующую боковой поверхности бруса и перпендикулярной к срединной линии:

$$T_1 = T_{01} + \int_0^s \frac{P_y}{I_x} \zeta \delta ds$$

и

$$T_2 = T_{02} + \int_0^s \frac{P_z}{I_y} \tau_1 \delta ds,$$

где $T_{01} = \delta_0 \cdot \tau_1^{(01)}$ и $T_{02} = \delta_0 \cdot \tau_2^{(02)}$ суть силы в сечении, проходящем через начальную точку срединной линии, в которой толщина δ стенки равна δ_0 ,

а напряжения равны $\tau_s^{(01)}$ и $\tau_s^{(02)}$ и вызваны соответственно компонентами P_y и P_x внешней силы; наконец ζ и η суть координаты точек срединной линии. Имея уравнения Р. Бредта (R. Bredt):

$$\delta\tau_s' = \delta_0\tau_s^{(01)}$$

и

$$\delta\tau_s'' = \delta_0\tau_s^{(02)},$$

где δ есть толщина стенки в соответственном месте, определяем из них τ_s' и τ_s'' и вносим их в уравнение (30), замечая, что полное напряжение равно:

$$\tau_s = \tau_s' + \tau_s''.$$

Далее пользуемся уравнением (32), двукратный интеграл по площади сечения профиля которого может быть теперь представлен в следующей форме:

$$\iint (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dy dz = \oint \tau_s \rho \delta ds, \quad (36)$$

где через ρ обозначено плечо элементарной касательной силы $\tau_s \delta ds$ (перпендикуляр, опущенный из начала координат на касательную к срединной линии). Этот интеграл распадется на два, множителями перед которыми будут P_y и P_x . Тогда, вставляя его значение в уравнение (32) и приравнявая нулю порознь коэффициенты при P_y и P_x , получим линейные уравнения для определения координат y_1 и z_1 центра изгиба.

Чтобы иллюстрировать теперь удобство применения последнего приема для тонкостенных многосвязных контуров, рассмотрим пример, решенный проф. Л. С. Лейбензоном.

Пусть дан тонкостенный двухполостный профиль с постоянной толщиной всех стенок, условно принятой за единицу, срединная линия которого изображена на фиг. 93г и представляет дугу I полуокружности, диаметр II и две прямые III и IV . Главные оси y и z имеют начало в центре тяжести сечения O , определяемого расстоянием

$$a_1 = \frac{l^2 \cos \alpha - 2c^2}{c(\pi + 2) + 2l}.$$

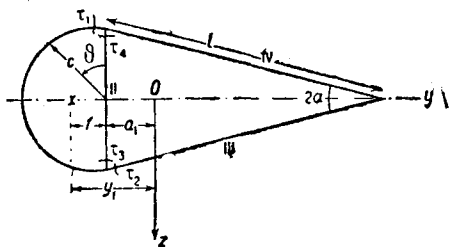
Центр изгиба обозначен крестиком с искомой абсциссой y_1 .

Полагая приложенной в центре изгиба лишь одну компоненту P_x

внешней силы, обозначим $\frac{P_x}{I_y} = B$. Разрежем в двух узлах все стенки нашего профиля и введем напряжения у сечений, обозначив их через τ_1 , τ_4 , τ_2 и τ_3 , как показано на фиг. 93г.

Применяя формулу Вебера к нашему случаю, можем в общем виде написать:

$$\tau = \tau_0 - B \int_0^{\zeta} \zeta ds. \quad (37)$$



Фиг. 93г.

Применим ее для определения напряжений τ через τ_1 , рассматривая последовательно участки *I*, *II*, *III* и *IV* и составляя затем выражения для циркуляции вдоль *I* и *II*, а также вдоль *II*, *III*, *IV*. Соответственно будем иметь:

$$I) \zeta = -c \cos \vartheta; \quad \tau = \tau_1 + Bc^2 \sin \vartheta; \quad \tau_1' = \tau_1; \quad \int_I \tau ds = \tau_1 \pi c + 2Bc^3.$$

$$II) \tau = \tau_2 - B \left(cs_1 - \frac{s_1^2}{2} \right),$$

где s_1 есть расстояние от нижнего конца диаметра *II* до точки, в которой определяется напряжение τ ; тогда:

$$\int_{II} \tau ds_1 = 2c\tau_2 - \frac{2B}{3} c^3.$$

$$III) \zeta = (l - s_2) \sin \alpha; \quad \tau = \tau_2 - B \sin \alpha \left(ls_2 - \frac{s_2^2}{2} \right); \quad \int_{III} \tau ds_2 = \tau_2 l - \frac{B l^3}{3} \sin \alpha.$$

$$IV) \zeta = -s_3 \sin \alpha; \quad \tau = \tau_2 - \frac{B}{2} l^2 \sin \alpha + B \sin \alpha \frac{s_3^2}{2}; \quad \int_{IV} \tau ds_3 = \tau_2 l - \frac{B l^3}{3} \sin \alpha.$$

V) Для участка *II* в обратном направлении (сверху вниз)

$$\tau = \tau_4 + B \left(cs_4 - \frac{s_4^2}{2} \right) \int_V \tau ds_4 = 2c\tau_4 + \frac{2B}{3} c^3.$$

Для определения неизвестных τ_1 , τ_2 , τ_3 и τ_4 имеем четыре уравнения. Первые два получаются из рассмотрения равновесия (проекция на ось x бруса) отрезков *I* и *II*, сделанных сечениями, показанными на фиг. 93г, у которых стоят соответственно обозначения напряжений τ_1 , τ_2 и τ_3 , а затем τ_3 и τ_4 . Они дают:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 + \tau_3, \\ \tau_4 &= -\tau_3. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Применяя теперь уравнение (30) дважды, получим по подстановке значений $\int \tau ds$ для участков *I*, *II*, *III*, *IV* и *V* следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 \pi c + 2c\tau_2 &= -\frac{4Bc^3}{3} + \frac{B}{1+m} \frac{\pi c^2}{2} \left(a_1 + \frac{4c}{3\pi} \right), \\ 2\tau_2 l + 2c\tau_4 &= -\frac{2Bc^3}{3} + \frac{2Bl^3}{3} \sin \alpha - \frac{B}{1+m} \cdot cl \cos \alpha \left(\frac{l \cos \alpha}{3} - a_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

В частном случае, когда $\alpha = 30^\circ$, $l = 2c$, $\sin \alpha = 0,5$, $a_1 \approx 0,16c$, решение уравнений (38) и (39) дает:

$$\tau_1 = Bc^2 \left(-0,149 + \frac{1}{1+m} \cdot 0,152 \right),$$

$$\tau_2 = Bc^2 \left(0,284 - \frac{1}{1+m} \cdot 0,069 \right).$$

Составляя выражение момента M касательных сил не относительно начала координат, а относительно центра дуги l , найдем по формуле, аналогичной (36):

$$\begin{aligned} \frac{M}{c^2} &= \pi \tau_1 + 2 \left(\frac{l}{c} \right) \tau_2 \cos \alpha + Bc^2 \left[2 - \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{3} \left(\frac{l}{c} \right)^2 \right] = \\ &= Bc^2 \left[0,205 + \frac{1}{1+m} \cdot 0,238 \right]. \end{aligned}$$

Так как $I_y \approx 3,57c^3$ ($\delta = 1$), то, подставляя найденное значение для M в уравнение типа (32), в котором вместо y_1 надо подставить f (см. фиг. 93г), получим для него

$$f = - \left(0,0575 + \frac{1}{1+m} \cdot 0,0667 \right),$$

а отсюда координата y_1 центра изгиба найдется так:

$$y_1 = f - a_1 \approx - \left(0,217 + \frac{1}{1+m} \cdot 0,0667 \right) c. \quad (40)$$

При $m \approx 3$ влияние на координату y_1 его составляет около 8% .

Из полученного результата явствует, что в ряде случаев влияние пуассонова отношения на координату центра изгиба ощутительно. Это обстоятельство может быть использовано для постановки эксперимента, который позволит решить вопрос о выборе более правильного критерия¹⁾, определяющего положение центра изгиба, если в качестве экспериментального объекта выбрать брус такой формы поперечного сечения, при которой влияние пуассонова коэффициента было бы наибольшим. Таким образом необходимо признать, что вопрос нуждается в дальнейшем углублении анализа кинематически-геометрических соотношений задачи.

¹⁾ Выше уже указывалось, что согласно критериям, предложенным Швальбе и Треффцом, положение центра жесткости не зависит от пуассонова коэффициента.