Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1936

München 1936
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Beiträge zur griechischen Logistik.

Erster Teil.

Von Kurt Vogel in München.

Vorgelegt von H. Tietze in der Sitzung vom 5. Dezember 1936.

Dem Andenken Heinrich Wieleitners.

Inhalt

Vorwort.

Zusammenfassende Darstellungen über den Umfang und den Inhalt der griechischen Rechenkunst liegen schon geraume Zeit zurück. Neben dem wertvollen Werk von Nesselmann,[2] das in den Anfängen stecken blieb, ist vor allem zu nennen das Buch von G. Friedlein: „Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer“ (1869), das – soweit damals möglich – das Thema erschöpfend behandelte, während Heath

[1] Ein Index Graecitatis ist für Teil II vorgesehen.

[2] „Die Algebra der Griechen“ erschien im Jahre 1842 als erster Teil einer kritischen Geschichte der Algebra. (Die genauen Titel wollen aus dem Literaturverzeichnis [S. 457] entnommen werden.)

und Tropfke in ihren großen für die Mathematikgeschichte grundlegenden Werken naturgemäß auf die Einzelheiten nicht eingehen konnten. Es ist klar, daß in den seit Friedleins Arbeit verflossenen 67 Jahren vieles überholt und manches zu ergänzen ist. Man kannte damals u. a. die Metrika Herons noch nicht, die großenteils noch unedierten Mathematici Graeci minores blieben unberücksichtigt, und vor allem waren die Kenntnisse der vorgriechischen Mathematik noch gering. Gerade die neueren Forschungsergebnisse auf diesem Gebiet zeigen aber, welche Kenntnisse den Griechen schon zur Verfügung standen.[1] Aus diesen Gründen erscheint es vielleicht nicht überflüssig, das alte Thema wieder aufzugreifen. Besonders soll die Arbeit zur Zerstreuung der alten Legende beitragen, daß man über die griechische praktische Rechenkunst fast nichts wüßte.[2] Es wird sich im Gegenteil ergeben, daß sie zu der Höhe entwickelt war, die man brauchte, um den elementaren Aufgaben des täglichen Lebens gerecht zu werden.

Der vorliegende erste Teil wird die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Brüchen behandeln. In einem zweiten Teil sollen dann die anderen Teile der Logistik, insbesondere die Anwendungen an Hand des bereits bekannten und des großen noch unveröffentlichten Materials untersucht werden. Ich muß noch darauf hinweisen, daß es nicht möglich war, jedes griechische Wort in Übersetzung wiederzugeben; dies hätte den Umfang der Arbeit unnötig vergrößert, unnötig deshalb, weil aus dem zusammenhängenden Text alles Wichtige ersichtlich ist.

Zu besonderem Dank bin ich Herrn A. Rehm und E. Wüst verpflichtet, die mir stets mit philologischer Hilfe zur Seite standen. Gleichzeitig spreche ich meinen Dank der Akademie der Wissenschaften und der Universität München aus, die die Drucklegung der im Frühjahr 1933 als Habilitationsschrift vorgelegten Arbeit erst ermöglichten.

München, 1. Dezember 1936.

---

[1] Hierzu siehe besonders die Arbeiten Neugebauers, dem das Hauptverdienst an diesen Fortschritten zukommt, in den Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie u. Physik. Berlin 1929 ff.

[2] Schmidt S. 138, Tropfke II[3] S. 64, 169, Tannery, M. sc. IV S. 62–64.

Einleitung.

Wenn wir nach einem angenommenen Untergang der derzeitigen Kulturen uns die Arbeit der dereinstigen Archäologen und Wissenschaftshistoriker vorstellen, die versuchen sollen, aus dem Schutt der Städte u. a. auch die mathematischen Kenntnisse im 20. Jahrhundert wieder herzustellen, so wird das hierbei für die niederen Gebiete der Mathematik gewonnene Bild wohl sehr bald den geschichtlichen Tatsachen entsprechen, während die Klarlegung der anderen Zweige – schon wegen der gegenüber der Volksschulliteratur geringen Verbreitung der in Betracht kommenden Schriften – nicht so leicht gelingen wird. So sollte man meinen, daß auch wir über die griechische praktische Rechenkunst, die jeder brauchte, der Handel trieb oder mit Verwaltungsangelegenheiten zu tun hatte, zum mindesten ebenso genau unterrichtet wären wie über die „wissenschaftlichen“ und philosophischen Teile der griechischen Mathematik, deren Entwicklung zu der staunenswerten Höhe, wie sie erst wieder das 17. Jahrhundert erreichte, als eine der Hauptleistungen griechischen Geistes, neben bildender und dichtender Kunst, für immer anerkannt bleiben wird.

Aber gerade die Werke, deren Verständnis sich naturgemäß nur Wenigen erschloß, sind großenteils erhalten, während die elementare Literatur fehlt. Der Gründe sind verschiedene. Einmal war die Herstellung der kostbaren Abschriften zeitraubend und lohnte nur bei wertvollem Stoff. Der Volksschulunterricht, der, wie wir aus Platon wissen, auch das praktische Rechnen umfaßte, spielte sich meist im mündlichen Verfahren ab. Da der Unterrichtsstoff lange Zeit derselbe blieb, weil der Aufgabenkreis keinen Veränderungen unterworfen war, konnte die Lehrtradition gut ohne Bücher auskommen. Zur Durchführung einfacher Rechnungen war die Hilfe des Rechenbrettes vollkommen hinreichend. Vor allem aber hatten die Kreise in den Philosophenschulen und Universitäten, denen die Wissenschaft anvertraut war, von Ausnahmen (z. B. Aristoteles, Eudoxos, Geminos, Proklos) abgesehen, wenig Interesse an den primitiven Stadien der mathematischen Wissenschaft, so daß eben nur die klassischen Werke studiert und abgeschrieben wurden. Wenn es der Zufall gewollt hätte, wäre trotz allem ein Elementarbuch der Logistik, wie die praktische Rechenkunst im Gegensatz zu der Arithmetik genannt wurde, oder zum mindesten ein Rechenheft, wie es z. B. für die ägyptische Mathematik der Fall ist, auf uns gekommen. Über die anderen Zweige der praktischen Mathematik (theoretische Mechanik, Astronomie, Optik, Musik, Geodäsie) sind wir ja auch unterrichtet. Wie aber die Verhältnisse nun liegen, müssen wir die Kenntnisse dieses Gebietes bei den Griechen aus Einzelstellen mühselig zusammentragen. Es konnte sogar der Eindruck entstehen, als ob wir über die griechische Logistik so gut wie nichts wüßten. Bei einer genaueren Betrachtung aller zur Verfügung stehenden Quellen ergibt sich aber, daß wir doch ein ziemlich vollständiges Gesamtbild erhalten können, Hierzu soll der folgende Versuch einen Beitrag liefern.

Erst in die Zeit der Entstehung des mathematischen Systems, also etwa um −450, fällt die Trennung zwischen den theoretischen und praktischen Gebieten der Mathematik. Vorher umfaßte sowohl die Geometrie (γεωμετρία) die geodätischen Probleme wie auch die Arithmetik (ἀριθμητική) die praktischen Zahlenrechnungen. Solange noch kein Bedürfnis nach einer theoretischen Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen vorlag, bestand auch kein Grund, eine theoretische Arithmetik in Gegensatz zu setzen zu einer praktischen Logistik. Wenn es bei Proklos[1] heißt, daß bei den Phoinikern wegen ihres Handels und Verkehrs die genaue Kenntnis der Zahlen ihren Anfang genommen hat (ὥσπερ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξιν διὰ τὰς ἐμπορείας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις), so darf man hier nicht an eine Zahlentheorie denken. Hier handelt es sich um die praktische Rechenkunst, freilich auch nicht um die viel älteren ersten Anfänge, die jedes Volk sich erarbeiten mußte und konnte. Die Stelle bei Proklos bezieht sich vielleicht auf die Buchstabenziffern oder auf die einzelnen Rechnungsarten, die erst mit der Verbreitung der Schrift entwicklungsfähig wurden und den Abstand von der grundlegenden Operation, dem „Zuzählen", „Aufreihen" (ἀριθμεῖν) gewannen, daß sie eigene Rechenoperationen wurden. Dagegen ist der Aufbau des Zahlen-

[1] Proklos S. 65. (Die genauen Titel der zitierten Quellen wollen im Literaturverzeichnis S. 457 nachgesehen werden.)

systems bis zu einer für die Bedürfnisse des Alltags hinreichenden Höhe und die Ausbildung der Grundrechnungen viel früher, und zwar schon gleichzeitig mit der Entwicklung der Sprache, anzusetzen. Den Anfang bildet die Vorstufe, in der Größen- und Mengenunterschiede gesehen und verstandesmäßig erfaßt wurden. Auch in der Schöpfung eines konkreten Äquivalentes für die Zahlen bzw. für die gezählten Gegenstände in Gestalt von Steinchen oder Marken und damit in der Erfindung des Abakus kann jedes denkende Volk selbständig gewesen sein. Die Terminologie der mathematischen Begriffe bei Homer zeigt, daß lange vor der Einführung der Schrift das griechische Zahlensystem entwickelt war. Man kannte bereits den Begriff der Multiplikation und führte einfache Teilungen aus. Alles dies war „Arithmetik".

Ein grundlegender Wandel trat ein, als sich die Philosophie der Mathematik bemächtigte; nach Proklos (bzw. Geminos) war es Pythagoras, der die Geometrie stofflos und mit reinen Gedanken untersuchte (ὁ Πυθαγόρας . . . ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος.[1] Wenn wir statt des sagenhaften Pythagoras die „sogenannten Pythagoreer" setzen, so haben wir gerade den Kreis, von dem das mathematische System geschaffen worden zu sein scheint. Da mußte sich auch der Unterschied herausbilden zwischen der einen mathematischen Disziplin, die es sich zur Aufgabe macht, die reinen mathematischen Gedanken (τὰ νοητά) zu untersuchen, und der anderen, die nur die sinnlich wahrnehmbaren Gegenstände (τὰ αἰσθητά) betrachtet. Wie sich jetzt die Geometrie abtrennt von der Geodäsie, so wird – und zwar erstmalig im Gorgias nachweisbar[2] – auch unterschieden zwischen Arithmetik und Logistik. Jene ist eine Wissenschaft (ἐπιστήμη), die sich mit dem Ewigen, Reinen beschäftigt, diese eine Fertigkeit (τέχνη), die für die Erfordernisse des Alltags notwendig ist und schon deshalb allgemein geübt werden muß. Am schärfsten drückt Platon den Gegensatz aus,[3] wenn er der Erkenntnis den Krämergeist (γνωρίζειν und καπηλεύειν) gegenüberstellt.

[1] Heron IV S. 108 und Proklos S. 65.

[2] Platon, Gorgias 451; B, C, über die Scholien des Olympiodoros siehe Fußnote 7 auf S. 455.

[3] Platon, Republik 525 D.

Gleichzeitig mit dieser klaren Scheidung in die praktische Logistik und die nur mehr die Eigenschaften der Zahlen untersuchende Arithmetik vollzieht sich die Verdrängung des rechnerischen Elementes aus der Geometrie, und es beginnt die wissenschaftliche, d. h. geometrische Behandlung der arithmetischen Gesetze und der algebraischen Probleme. Auch verschwinden jetzt aus der Arithmetik die Brüche, die der Logistik vorbehalten bleiben. Sie werden durch die Verhältnisse (λόγοι) ersetzt, die auch das nur in Annäherungen berechenbare Irrationale mit umfassen.[1]

So kommt es, daß in den Elementen des Euklid alles Logistische verschwunden oder nur noch schwer erkennbar ist. Doch schon mit Archimedes tritt ein Umschwung ein. Er, der die empirische Forschung neben der reinen Mathematik, die sich des logischen Beweises bedient, gelten läßt, scheut vor Näherungen ebensowenig zurück wie vor Brüchen, und neben der Theorie kommen wieder die Anwendungen zu ihrem Recht. So spricht sein Kommentator Eutokios von der „Kreismessung" als von einem für das tägliche Leben notwendigen Buch (πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον).[2] Ähnliches drückt auch Anatolios bzw. Geminos aus,[3] wenn er berichtet, daß gegenüber dem früheren Wissenschaftsbegriff die „Späteren die Benennung weiter ausdehnten, indem sie verlangten, daß der Mathematiker sich nicht lediglich mit dem unkörperlichen und gedanklichen Stoff befassen solle, sondern auch mit dem das körperliche und sinnliche Dasein Berührenden". Ferner verlangten sie, daß der Mathematiker auch Feldmesser und Rechner sein solle (οἱ δὲ νεώτεροι περιέσπασαν ἐπὶ πλεῖον τὴν προσηγορίαν οὐ μόνον περὶ τὴν ἀσώματον καὶ νοητὴν ὕλην ἀξιοῦντες πραγματεύεσθαι τὸν μαθηματικόν, ἀλλὰ καὶ περὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς σωματικῆς καὶ αἰσθητῆς οὐσίας, ferner . . . δεῖν ᾤοντο καὶ γεωδαίστην καὶ λογιστικόν . . .) Ein solcher Mann ist wohl auch der „Geometer", von dem im Epigramm 45 der Anthologie[4] die Lösung der „Gleichung" verlangt wird.

[1] Über die Beziehungen zwischen den λόγοι und den Brüchen siehe unten S. 449.
[2] Archimedes III S. 228.
[3] Heron IV S. 162, hierzu Tannery, M. sc. IV S. 65.
[4] Wertheim S. 343 und Diophant II S. X.

Späterhin, besonders mit dem Auftreten der neupythagoreischen Philosophie, treten die alten Unterscheidungen erneut in den Vordergrund. Die Arithmetik (εἰσαγωγὴ ἀριθμητική) des Nikomachos, die bis in das Mittelalter hinein das kanonische Werk der Arithmetik geblieben ist, ist eine Zahlentheorie (ohne Logistik), durch die eine für das Studium der Philosophie notwendige mathematische Schulung erreicht werden soll. Demgegenüber wirkt bei Heron und seinen Nachfolgern der Einfluß des Archimedes nach. Zwar werden auch hier die „edleren und höchsten" Hauptteile der Mathematik, die Arithmetik und Geometrie, den anderen sich mit dem Sinnlichen beschäftigenden Anwendungsgebieten gegenübergestellt[1] (τῆς μὲν τιμιωτέρας καὶ πρώτης ὁλοσχερέστερα μέρη δύο, ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρία, τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ ἀσχολουμένης ἕξ, λογιστική, γεωδαισία, ὀπτική, κανονική, μηχανική, ἀστρονομική), doch wird die Verwandtschaft von Arithmetik und Logistik ausdrücklich betont (συνεγγίζει μᾶλλον τῇ μὲν ἀριθμητικῇ ἡ λογιστική κ. τ. λ.). Bezeichnend für den grundlegenden Wandel gegenüber dem Standpunkt zur Zeit Platons ist es, daß Diophant, dessen Werk den Gipfelpunkt griechischer Rechenkunst darstellt, diesem den Namen ἀριθμητικά gibt.

Was ist nun über den Umfang der λογιστικὴ τέχνη aus den Quellen in Erfahrung zu bringen? Der Name selbst gibt keine Auskunft. Das Zeitwort λέγειν, zu dem λόγος gehört, bedeutet ursprünglich ganz ähnlich wie ἀριθμεῖν (Stamm: αρ = aneinanderreihen) das Auflesen, Sammeln, Zählen der u. U. in einer Reihe angeordneten Gegenstände. Die Bedeutung von λόγος ist dementsprechend sehr vielseitig. Außer Wort, Rede, Erzählung, Buch, Lehrsatz,[2] Begriff, Vernunft finden sich in unserem Zusammenhang λόγοι als Rechnungen, als Summe (ἐς ἑξήκοντα ταλάντων λόγον). Vor allem aber ist λόγος das Zahlenverhältnis, durch das zwei Größen (Strecken, Zahlen usw.) miteinander verglichen werden (λόγῳ συντιθέναι). So ist λογίζεσθαι ein auf vernünftigen Gedankenschlüssen beruhendes Berechnen. Zu συλλογισμός (logischer Schluß) gehört συλλογίζεσθαι: sich zusammenrechnen, bedenken, z. B. περιμέτρους συλλογιζόμενοι.[3] Die Rechnungen heißen

[1] Heron IV S. 164. [2] Rudio S. 26.
[3] Proklos S. 38 Z. 23.

außerdem λογισμός, λογισμοί[1] und λογαριασμός.[2] Der Plural λογισμοί steht bei Suidas[3] als Synonym für λογιστικὴ τέχνη. Der im Denken und Rechnen Erfahrene ist ein λογιστικός[4] oder ein λογιστής.[5] Was also die vernunftgemäße Rede oder Überlegung anlangt, so ist in diesem Punkte kein Unterschied zwischen Arithmetik und Logistik. Dies wird auch von Platon[6] zum Ausdruck gebracht, wenn er sagt: εἰ δ' αὖ ἔροιτο · τὴν δὲ λογιστικὴν τίνα καλεῖς τέχνην; εἴποιμ' ἂν ὅτι καὶ αὕτη (genau wie die Arithmetik) ἐστὶ τῶν λόγῳ τὸ πᾶν κυρουμένων. Sonst aber ist der obenerwähnte Gegensatz zwischen der elementaren Logistik und der wissenschaftlich hochstehenden Arithmetik bei Platon besonders ausgeprägt. Eine Parallele hierzu sehen wir in der Geometrie. Da es Platon um die Geometrie als reine Wissenschaft zu tun ist, betreibt er die Loslösung des geodätischen Teiles.

Dies alles schließt aber nicht aus, daß er sich auch für die gründliche Beschäftigung mit den praktischen Zweigen der Mathematik einsetzt. Denn es darf nicht übersehen werden, daß die diesbezüglichen Bemühungen lediglich die Erhöhung des allgemeinen Bildungsstandes bezwecken und nichts mit der Förderung der Wissenschaft, der sich die Oberschicht der Philosophen und Staatsmänner widmen sollen, zu tun haben. So kommt es, daß wir gerade von ihm wertvollste Aufschlüsse über den Inhalt der Logistik erhalten.

In einer in einigen Punkten noch unklaren Stelle in den Gesetzen,[7] in der er die ägyptische Unterrichtsmethodik als Vorbild darstellt (τοσάδε τοίνυν ἑκάστων χρὴ φάναι μανθάνειν δεῖν τοὺς ἐλευθέρους, ὅσα καὶ πάμπολυς ἐν Αἰγύπτῳ παίδων ὄχλος ἅμα γράμμασιν μανθάνει) wird hervorgehoben, daß die logistisch Ausgebildeten geweckter als andere sind und daß sie die für Truppen- und Haushaltsführung notwendigen Kenntnisse besitzen (. . . ὠφελοῦσι τοὺς μανθάνοντας εἴς τε τὰς τῶν στρατοπέδων τάξεις καὶ ἀγωγὰς καὶ στρατείας[1] καὶ εἰς οἰκονομίας αὖ, καὶ πάντως χρησιμωτέρους αὐτοὺς αὑτοῖς καὶ ἐγρηγορότας μᾶλλον τοὺς ἀνθρώπους ἀπεργάζονται). Über die in Frage kommenden Rechnungen (λογισμοί) erfahren wir aus dieser Platonstelle, daß es sich neben planimetrischen und stereometrischen Vermessungsaufgaben (μετὰ δὲ ταῦτα ἐν ταῖς μετρήσεσιν, ὅσα ἔχει μήκη καὶ πλάτη καὶ βάθη, περὶ ἅπαντα ταῦτα ἐνοῦσάν τινα φύσει γελοίαν τε καὶ αἰσχρὰν ἄγνοιαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσι ταύτης ἀπαλλάττουσιν) hauptsächlich um Verteilungen drehte, deren Kenntnis den Kindern spielend beigebracht werden sollte. Es heißt im Text: „Zuerst handelt es sich beim Rechnen darum, daß man die gerade für Kinder ausgedachten Aufgaben spielend und mit Freude lernt; dann um die Verteilung von Äpfeln und Kränzen, wobei dieselbe Anzahl einmal an viele oder wenige verteilt (= angepaßt) wird; ferner um die (Verteilung) der Ring- und Faustkämpfer und um die der Gegnerlosigkeit und des Auslosens, entweder einzeln oder der Reihe nach oder wie es sonst gemacht wird." (πρῶτον μὲν γὰρ περὶ λογισμοὺς ἀτεχνῶς παισὶν ἐξευρημένα μαθήματα μετὰ παιδιᾶς καὶ ἡδονῆς μανθάνειν, μήλων τέ τινων διανομαὶ καὶ στεφάνων πλείοσιν ἅμα καὶ ἐλάττοσιν ἁρμοττόντων ἀριθμῶν τῶν αὐτῶν, καὶ πυκτῶν καὶ παλαιστῶν ἐφεδρείας τε καὶ συλλήξεως ἐν μέρει[2] καὶ ἐφεξῆς καὶ ὡς πεφύκασι γίγνεσθαι). Derartige Aufgaben, bei denen die Gegenstände entweder in gleiche Anteile oder nach irgendeinem Schlüssel verteilt werden, kommen in der antiken Mathematik häufig vor. In der babylonischen, ägyptischen wie in der griechischen Mathematik finden sich sogar schon Verteilungen in Anteilen, die in arithmetischer Reihe wachsen. Weiterhin spricht die Platonstelle von Schalen aus verschiedenem Metall (bzw. Metallinhalt), die entweder als Ganzes verteilt werden oder erst, nachdem man ihren Inhalt (oder die Schalen selbst) gemischt hat (καὶ δὴ καὶ παίζοντες, φιάλας ἅμα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ καὶ ἀργυρίου καὶ τοιούτων τινῶν ἄλλων κεραννύντες, οἱ δὲ καὶ ὅλας πως διαδιδόντες, ὅπερ εἶπον, εἰς παιδιὰν ἐναρμόττοντες τὰς τῶν ἀναγκαίων ἀριθμῶν χρήσεις κ.τ.λ.).

---

[1] Platon, Phädrus 274 C u. Gesetze VII, 819.
[2] Rhabdas S. 195.
[3] Suidas sub λογισμός.
[4] Proklos S. 40 und Platon, Euthydemos 290 B.
[5] Λογιστής war im 5. Jahrhundert der Titel der attischen Beamten, denen die Finanzverwaltung übertragen war. Siehe R.-E. XIII, 1020.
[6] Platon, Gorgias 451 B; vgl. auch Hippias minor 366–368.
[7] Platon, Gesetze VII, 819.

[1] Über die Beziehung der Logistik zur Taktik s. Proklos S. 38–39.
[2] Heath 1, I S. 20 Fußn. 1 liest: ἐν ἐφεδρείας τε καὶ συλλήξεως μέρει.

Noch ausführlicher verbreitet sich über die einzelnen Zweige der Logistik ein altes Charmidesscholion,[1] das entweder der θεωρία τῶν μαθημάτων des Geminos direkt entnommen ist oder von Anatolios stammt, der Geminos mehr oder weniger benützt hat. Der Anfang des Scholions ist auch in den Heron zugeschriebenen „Definitionen" mit geringfügigen Abweichungen zu finden und lautet folgendermaßen:[2] λογιστική ἐστι θεωρία τῶν ἀριθμητῶν οὐχὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν μεταχειριστική, οὐ τὸν ὄντως ἀριθμὸν λαμβάνουσα, ἀλλ' ὑποτιθεμένη τὸ μὲν ἓν ὡς μονάδα, τὸ δὲ ἀριθμητὸν ὡς ἀριθμόν, οἷον τὰ τρία τριάδα εἶναι καὶ τὰ δέκα δεκάδα . ἐφ' ὧν ἐπάγει τὰ κατὰ ἀριθμητικὴν θεωρήματα. θεωρεῖ οὖν τοῦτο μὲν τὸ κληθὲν ὑπ' Ἀρχιμήδους βοεικὸν πρόβλημα, τοῦτο δὲ μηλίτας καὶ φιαλίτας ἀριθμούς, τοὺς μὲν ἐπὶ φιαλῶν, τοὺς δὲ ἐπὶ ποίμνης · καὶ ἐπ' ἄλλων δὲ γενῶν τὰ πλήθη τῶν αἰσθητῶν σωμάτων σκοποῦσα, ὡς περὶ τελείων ἀποφαίνεται. Vor allem ist also die Logistik eine Theorie nicht der Zahlen, sondern des Zählbaren, wobei die sinnlich erfaßbaren Gegenstände nach ihrer Quantität (πλῆθος) betrachtet werden;[3] dies stimmt überein mit dem obengenannten Gegensatz zwischen den Teilen der Mathematik, die das Gedachte (νοητόν), und den andern, die das Wahrnehmbare (αἰσθητόν) zum Inhalt haben. Proklos hat dasselbe unter Berufung auf Geminos ausgesprochen.[4] Ausführlicher beschäftigt er sich kurz darauf[5] mit dem gleichen Gegensatz. Zuerst sagt er hier, daß Geodäsie und Logistik ihre Überlegungen nicht mit gedachten Zahlen und Figuren, sondern mit wahrnehmbaren anstellen. Nicht Zylinder und Kegel werden in der Geodäsie gemessen, sondern Haufen (σωροί) in Kegelform und Brunnen als Zylinder; nicht gedachte Gerade werden verwendet, sondern wahrnehmbare, teils dünne wie Sonnenstrahlen (!) oder dicke wie Schnüre. Über die Logistik fährt er nun fort:[6] οὐδ' αὖ ὁ λογιστικὸς αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ θεωρεῖ τὰ πάθη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ ἐπὶ τῶν αἰσθητῶν, ὅθεν καὶ τὴν ἐπωνυμίαν αὐτοῖς ἀπὸ τῶν μετρουμένων τίθεται, μηλίτας καλῶν τινας καὶ φιαλί-

[1] Platon, (Schol. zu Charmides 165 E.) Vol. VI, S. 290.

[2] Heron IV S. 98.

[3] Platon, Gorgias 451 C sagt: . . . ὅτι καὶ πρὸς αὑτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα πῶς ἔχει πλήθους ἐπισκοπεῖ τὸ περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον ἡ λογιστική. Siehe auch unten S. 454.

[4] Proklos S. 38. [5] Proklos S. 39. [6] Proklos S. 40.

τας. Es werden also hier die benannten Zahlen wieder μηλῖται- und φιαλῖται-Zahlen genannt. Es handelt sich wohl um „Äpfel" und „Schalen", nicht um „Schafe" und „Schalen". Denn gerade die Verteilung von Äpfeln und Schalen war in der oben angeführten Platonstelle als ein wichtiges Kapitel des Unterrichtes aufgezählt worden. Die genannte Ergänzung des Charmidesscholiasten: τοὺς μὲν ἐπὶ φιαλῶν τοὺς δὲ ἐπὶ ποίμνης beruht demnach auf einem Mißverständnis.[1]

Nach dem Hinweis auf das Rinderproblem sowie der Hervorhebung der Melites- und Phialiteszahlen führt das Charmidesscholion im Gegensatz zu dem Heronischen Geminosfragment die Teilgebiete der Logistik noch weiter aus: ὕλη δὲ αὐτῆς πάντα τὰ ἀριθμητά · μέρη δὲ αὐτῆς αἱ Ἑλληνικαὶ καὶ Αἰγυπτιακαὶ καλούμεναι μέθοδοι ἐν πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, καὶ αἱ τῶν μορίων συγκεφαλαιώσεις καὶ διαιρέσεις, αἷς ἰχνεύει τὰ κατὰ τὴν ὕλην ἐμφωλευόμενα τῶν προβλημάτων τῇ περὶ τοὺς τριγώνους καὶ πολυγώνους πραγματείᾳ, d. h.: „Ihr Stoff ist alles Zählbare, ihre Teile sind die sogenannten griechischen und ägyptischen Multiplikations- und Divisionsmethoden sowie die Addition und Zerlegung der Brüche, womit sie die Geheimnisse der Probleme aufspürt, die ihr die Behandlung der Dreiecks- und Vieleckszahlen aufgibt." Mit einem Hinweis auf die praktische Bedeutung der Logistik (τέλος δὲ αὐτῆς τὸ κοινωνικὸν ἐν βίῳ καὶ χρήσιμον ἐν συμβολαίοις, εἰ καὶ δοκεῖ περὶ τῶν αἰσθητῶν ὡς τελείων ἀποφαίνεσθαι) schließt das aufschlußreiche Dokument.

Es erhebt sich die Frage, was im einzelnen unter den im Charmidesscholion genannten Teilgebieten zu verstehen ist, vor allem aber auch, ob eine vollständige Aufzählung vorliegt. Diese letzte Frage ist zu verneinen, da gerade die einfachsten für das tägliche Leben notwendigen Rechenaufgaben, nämlich die Addition und Subtraktion der ganzen Zahlen, unerwähnt bleiben. Auch wird das Abakusrechnen ebensowenig genannt wie eine Einführung in den Aufbau des Zahlensystems.[2] Sonst aber ist die Aufzäh-

[1] Tannery, M. sc. IV S. 68.

[2] Der Aufbau des Zahlensystems ist natürlich auch Voraussetzung einer theoretischen Arithmetik, in der hauptsächlich die Eigenschaften der Zahlen „in bezug auf sie selbst oder in Beziehung zu anderen Zahlen" untersucht werden. Aus einer solchen Arithmetik sind Brüche ausgeschlossen

lung ziemlich vollständig. Über die Durchführung der genannten Multiplikations- und Divisionsmethoden sind wir aus ägyptischen Quellen unterrichtet. Bei der Addition und Zerlegung der Stammbrüche handelt es sich darum, das Ergebnis einer Stammbruchsumme entweder als einen einzigen Stammbruch darzustellen (z. B.: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$), oder, wo das nicht möglich war, den erhaltenen allgemeinen Bruch in eine geeignete Stammbruchreihe umzuwandeln (z. B.: $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$). Auch Aufgaben, die die Zerlegung eines Stammbruches in eine vorgeschriebene Anzahl von anderen Stammbrüchen verlangen, sind erhalten (z. B.: $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$). Bei der Erwähnung der Dreiecke und Vielecke in der Aufzählung des Scholions zeigt das Maskulinum (οἱ τρίγωνοι usw.), daß Dreieckszahlen gemeint sind, deren Behandlung aber nicht eigentlich zur Logistik, sondern zur Zahlentheorie gehört. Man erwartet also hier eher einen Hinweis auf die Probleme der rechnenden Geometrie, die sicher der Logistik zuzurechnen ist. Nun wurden aber die Formeln für die figurierten Zahlen auch zur Berechnung des Flächeninhaltes verwendet,[1] so daß die genannte Stelle doch einigermaßen am Platze ist. Das Rinderproblem ist eine schwierige Aufgabe der unbestimmten Analytik und soll in diesem Zusammenhang wohl nur diese Aufgabengruppe bezeichnen, die man später in nicht ganz richtiger Weise Diophantische Gleichungen nannte, da dieser auch Brüche als Lösungen zuläßt. Unter den genannten Rechnungen mit den „Äpfel-“ und „Schalenzahlen“ sind Verteilungsaufgaben gemeint, die auf Gleichungen ersten Grades führen. Solange es sich nur um eine Unbekannte handelt, können sie bequem durch „Ausklammern“ und Division „arithmetisch“ gelöst werden.[2] Treten aber mehrere Unbekannte auf, so kommt man ohne algebraische Gedankengänge nicht aus. Diophant wird in genialer Weise unter Verwendung geeigneter Substitutionen mit mehreren Unbekannten fertig. Ein erst vor

und durch die λόγοι ersetzt (s. u. S. 449ff.). Domninos 1 (S. 416) schließt seine arithmetische Abhandlung über das Zahlensystem mit den Worten: ἀλλὰ περὶ μὲν τούτων ἐπιπλέον εἰπεῖν τῆς λογιστικῆς ἔχεται θεωρίας.

[1] Pediasimos S. 21 f.

[2] Zahlreiche Beispiele finden sich in den Epigrammen der Anthologie.

einiger Zeit interpretierter Papyrus[1] zeigt sogar bereits eine algebraische Symbolik, die bei Diophant erst in den allerersten Anfängen vorhanden ist. Nicht genannt werden in dem Scholion die Verwendung von Tafelwerken (besonders Multiplikations- und Bruchtabellen), dann die Potenzlehre, die der Multiplikation zuzurechnen ist, die Methode des Wurzelziehens sowie schließlich die Schlußrechnungen (πολιτικὸς λογαρισμός), die die Grundlage alles und jeden Rechnens bilden, ohne die weder ein Bruch verwandelt werden konnte, noch die einfachsten Aufgaben des täglichen Lebens – wie z. B. die Entlohnung einer geleisteten Arbeit nach Verdienst oder die Berechnung des Zeitbedarfs für eine Arbeit – zu erledigen waren.[2]

Es sind also bei der griechischen Logistik folgende Kapitel zu unterscheiden:

A. Die grundlegenden Operationen mit ganzen Zahlen:
   1. Zählen (Zahlensystem, Abakusrechnen);
   2. Addition;
   3. Subtraktion;
   4. Multiplikation (mit Potenz als Sonderfall);
   5. Division;
   6. Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzel.

B. Rechnen mit Brüchen.

C. Anwendungen auf:
   1. Feldmessung;
   2. auf die politische Arithmetik (πολιτικὸς λογαρισμός) des täglichen Lebens.

D. Algebraische Probleme (zuerst mit Bezugnahme auf benannte Größen, später bei Diophant meist ohne diese).

[1] Papyrus Michigan 620, s. Robbins S. 321 ff. und Vogel 4, S. 266 ff.

[2] Eines muß hier noch besonders hervorgehoben werden: Wenn sich auch die Logistik im Gegensatz zur Arithmetik mit dem Stofflichen, Wahrnehmbaren beschäftigt, so schließt dies nicht aus, daß die notwendigen Rechenmethoden an unbenannten Zahlen studiert und ausgebildet werden. Im Anfangsunterricht aber wird man aus pädagogischen Gründen auch dabei auf die benannten Zahlen, die „Äpfel“ des Charmidesscholiasten, zurückgreifen, was sicher der geschichtlichen Entwicklung entspricht. Nur in der theoretischen Arithmetik werden die Eigenschaften der Zahlen (gerade – ungerade, prim – zusammengesetzt usw.) „stofflos“ untersucht. Hier handelt es sich

Wo sind nun die Fundstellen für die einzelnen Methoden, nach denen diese verschiedenen Zweige der Logistik behandelt und gelehrt wurden? Eigene Werke über die Logistik sind aus klassischer Zeit nicht erhalten. Zwei Bücher von Pappos, die das praktische Rechnen behandelt haben sollen, gingen verloren.[1] Eutokios[2] erwähnt die Logistik eines sonst unbekannten Magnes (Magnos?), ohne deren Studium man die Myriadenmultiplikationen und Divisionen nicht leicht verstehen könne (. . . οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου Λογιστικῶν ἠγμένον). Verloren ist auch das 'Ωκυτόκιον des Apollonios von Perge, in dem[3] Kreisberechnungen mit großer Genauigkeit ausgeführt wurden. Voraussetzung dafür war die Beherrschung der Rechnungen mit großen Zahlen (ähnlich denen der Sandrechnung des Archimedes) unter Verwendung von festen Regeln für die genannten Operationen mit Myriaden verschiedener Ordnung. Mit solchen Rechnungen soll auch Philon von Gadara den Kreis genauer ausgerechnet haben. Wenigstens sagt Eutokios,[4] daß diese Nachricht in den Κηρία des Sporos stünde. Es ist sehr zu bedauern, daß all dies verloren ist; denn gerade die Kreismessung mit den dabei notwendigen umfangreichen Berechnungen müßte klare Einblicke in die verwendete Rechentechnik gestatten. In der Kreismessung fehlen bei Archimedes selbst zwar alle Zwischenrechnungen, doch hat sein Erklärer Eutokios uns wertvolle Beispiele für die Addition, Subtraktion und Multiplikation von ganzen Zahlen und Brüchen aufbewahrt, die lange als die einzigen erhaltenen Beispiele griechischen praktischen Rechnens angesehen wurden. Für die fehlenden Divisionen und Wurzelberechnungen bieten die allerdings im Sexagesimalsystem durchgeführten Beispiele in Theons (von Alexandria) Almagestkommentar einen guten Ersatz, da sie Schlüsse auf die Durchführung dieser Rechnungen im dezimalen System – mutatis mutandis – gestatten. Aber mit Eutokios und Theon sind unsere Quellen für die Rekonstruktion der griechischen Logistik noch keineswegs erschöpft. Fast alle Texte liefern Beiträge zur Terminologie, insbesondere die zahlentheoretisierenden Philosophen von Nikomachos an bis zu den späten und spätesten Byzantinern. Auch die Schriften der rechnenden Geometer dürfen nicht vernachlässigt werden. Bei Heron und seinen Nachfolgern findet sich verstreut manches Beispiel, das einen Einblick in die damalige Terminologie und in die Technik der Rechenoperationen gestattet. Beste Fundgruben sind die wenigen erhaltenen Papyri, die zuverlässiger als die von den Abschreibern vielfach veränderten Klassiker die alte Schreibung von ganzen Zahlen, Brüchen und Abkürzungen wiedergeben. Über algebraische Probleme geben besonders die Epigramme der griechischen Anthologie und die Arithmetik des Diophant Aufschluß. Daneben findet sich auch in den „arithmetischen" Büchern Euklids manches Arithmetische und Algebraische in geometrischem Gewand. Zwei weitere wichtige Quellen (aus dem 14. Jahrhundert) sind noch anzuführen. Einmal die Logistik des Mönches Barlaam, von der sich Tannery[1] wegen der darin verwendeten geometrischen Beweisführung nichts für die Kenntnis der antiken Rechenkunst verspricht. Ein genaues Studium dieses im Jahre 1600 von Chamber herausgegebenen und übersetzten Werkes gibt aber doch wertvolle Auskunft über das Rechnen mit Brüchen sowie über den Zusammenhang zwischen diesen und den Logoi, so daß es nicht übergangen werden darf. Auch ist an Hand der Terminologie festzustellen, daß sich hier tatsächlich altes Gut erhalten hat, wie es Tannery wenigstens bei dem anderen Schriftsteller sogar aus einer etwas späteren Zeit, bei Nikolaos Rhabdas, mit Recht annimmt. Zwar fällt die Abfassung der beiden Briefe, die Tannery vorzüglich edierte,[2] bereits in die Zeit, in der das indische Rechnen im Vor-

nicht um die Zahlen „Eins", „Zwei", „Drei" usf., sondern Objekte der Überlegung sind die „Einheit", „Zweiheit", „Dreiheit" usw. In der Arithmetik bedeutet $2 \cdot 3 = 6$ (δὶς τριὰς ἑξάς), daß die „Sechsheit" die doppelte „Dreiheit" ist, während in der Logistik die Multiplikation $2 \cdot 3 = 6$ (δὶς τρία ἕξ), wenn auch an unbenannten Zahlen durchgeführt, sich doch immer auf das Rechnen mit wahrnehmbaren Dingen bezieht. Über den Unterschied zwischen μονάς und ἕν und die Verwendung der μονάδες bei Diophant s. u. S. 454.

[1] Siehe Nesselmann S. 108.

[2] Archimedes III S. 258 f.

[3] Archimedes III S. 258.

[4] Eutokios spricht von den aristotelischen κηρία (Archimedes III S. 228); hierzu Tannery, M. sc. I, S. 178 f.

[1] Tannery, M. sc. IV S. 71. [2] Tannery, M. sc. IV S. 61–198.

dringen war.[1] Doch enthält die Schrift altes griechisches logistisches Wissen. In dem ersten Brief an Georgios von Chatzyke (Χατζύκη), den Rhabdas – wie auch den zweiten – mit den die „Arithmetik" einleitenden Worten des Diophant beginnt, beschäftigt er sich mit dem Zahlensystem, dem Fingerrechnen, den Grundoperationen einschließlich des Wurzelziehens und gibt die auf alter Überlieferung beruhenden Hilfstabellen für die Addition (Substraktion), Multiplikation (Division) und Bruchrechnung. Im zweiten Brief an Theodor Tzabuche (Τζαβούχη) von Klazomenai will er dem Schüler dreierlei vermitteln:

1. den πολιτικὸς λογαρισμός,
2. den μαθηματικὸς λογαρισμός, der die „vier großen mathematischen Wissenschaften", das Quadrivium, umfaßt;

und 3. die Diophantische Mathematik.

Im einzelnen behandelt er aber nur einige schwierige Beispiele der Multiplikation und Division mit gemischten Zahlen, ferner das Wurzelziehen, die Osterrechnung sowie zahlreiche Beispiele der „politischen Arithmetik", in denen Tannery wieder alte Probleme sieht. Als Hauptstütze dafür, daß bei Rhabdas die alte logistische Tradition weiterlebte, ist anzuführen, daß gerade diejenigen Rechenoperationen, die nach dem neuen indischen Verfahren leichter erledigt werden können, nämlich die Multiplikation und Division mehrzifferiger Zahlen, von ihm nicht beschrieben werden. Für diese wird auf die große indische Rechenkunst (Ἰνδικὴ μεγάλη ψηφοφορία) verwiesen. Die tatsächlich mitgeteilten Rechnungen mit einfachen Zahlen sind also sicher alte griechische Logistik.

Im folgenden soll nun in erster Linie festgestellt werden, was über die Terminologie und die Methoden der Grundrechnungsarten für ganze und gebrochene Zahlen sich aus den Quellen ergibt, nach der auf S. 369 gemachten Einteilung im wesentlichen also die Kapitel A und B.[2]

[1] Maximos Planudes schrieb seine ψηφοφορία etwa um 1280.

[2] Für Kap. A 6 (s. S. 369) liegen bereits erschöpfende Untersuchungen vor (s. Heath 1, I S. 425 sowie die Literatur in Rehm-Vogel S. 51/52); s. auch u. S. 425. Eine eingehende Behandlung von Kap. C und D ist in Aussicht genommen.

Das Zählen.

(Zahlen- und Ziffernsystem, Fingerrechnen, Abakus).

Die ersten arithmetischen Errungenschaften eines Volkes bestehen in der Schöpfung eines Zahlensystems, dadurch daß man Mengenunterschiede bezeichnete, zuerst durch Substantivformen (Dual usw.), dann durch eigene Zahlwörter. Sie stellen ursprünglich Adjektiva dar. Das „Vier-in-Anzahl-sein" eines Objektes war eine ihm zugehörige Eigenschaft, wie etwa sein Schwersein oder sein Rundsein. Je nach den Bedürfnissen wurde das Zahlwortsystem erweitert, wobei man, um die Reihe nicht endlos ausdehnen zu müssen, Stufen einschaltete. Auf dem Gedanken der relativen Einheit beruht die Zusammenfassung von etwa 4, 10, 12, 60, 100 usw., Untereinheiten zu einer Übereinheit, zu einer neuen „Eins", in deren Bereich man wieder mit den alten Zahlwörtern weiterzählen konnte. Das griechische System war ein dekadisches mit den Stufen 10, 100, 1000 usw. Reste eines älteren Vierersystems sind nachweisbar (ὀκτώ als Dual., ἐννέα = 8 + 1 Neues).[1]

Zur Durchführung einer einfachen Rechnung brauchte man nur abzählen zu können (ἐξαρίθμησις). Ἀριθμεῖν = Zählen und Rechnen war ursprünglich identisch.[2] Zur Erleichterung der Rechnung durch konkrete Versinnbildlichung dienten die Finger; es konnten auch Steinchen (ψῆφος) und andere kleine Gegenstände, die auf einem Brett niedergelegt wurden, verwendet werden. Dabei ist es denkbar, daß man die höheren Einheiten durch Steine von anderer Größe oder Farbe darstellte. Übersichtlicher wird diese Zahlenfixierung durch kolumnenweise Anordnung der Steinchen, d. h. durch Verwendung eines Abakus. Wie man mit einem solchen Rechenbrett auch schwierige Operationen (Multiplikationen und Divisionen mit Brüchen) durchführen kann, hat Nagl in seiner gründlichen Bearbeitung des Stoffes an Hand der überlieferten griechischen Abaci dargelegt. Im allgemeinen wird sich die Praxis des täglichen Lebens auf

[1] Die erst jüngst entdeckte Harappa-Kultur (etwa –3000) zeigt im Maßsystem eine Vermischung des Dezimalen mit dem Zweier- bzw. Vierersystem.

[2] Vgl. die von Friedlein S. 74 genannte Stelle aus Lukian.

Additionen und Subtraktionen beschränkt haben, da ja auch die anderen beiden Operationen leicht auf diese zurückgeführt werden. Eine Erleichterung des Rechnens wurde durch Einschaltung von Zwischenstufen erreicht (5, 50, 500 usw.), deren erste schon beim Abzählen an den Fingern sich aufdrängte. Die Bildung des griechischen dekadischen Zahlensystems liegt in vorschriftlicher und für die ersten Anfänge in vorhistorischer Zeit. Bei Homer ist es bereits bis 1000 ausgebildet. Dagegen ist μυρίοι (10 000) noch ein unbestimmter Zahlbegriff „sehr viele", wie auch noch öfters ἑκατόν (100). Das „Abfünfen" (πεμπάζεσθαι) in δ 412 zeigt den Gebrauch der Finger beim Abzählen der Seehunde durch den Meergott Proteus. Daß man in einfachen Fällen mit Fingerrechnen auskam und nur für schwerere die Rechensteine verwendete, zeigt eine Stelle in den „Wespen" des Aristophanes,[1] wo es heißt: καὶ πρῶτον μὲν λόγισαι φαύλως μὴ ψήφοις, ἀλλ' ἀπὸ χειρός.

Nach Einführung der Schrift sind in Griechenland zwei Ziffernsysteme in Gebrauch gekommen. Das ältere ist das „Herodianische" System.[2] In ihm sind für die Einheiten der einzelnen Stufen und Zwischenstufen (5, 10, 50, 100 usw. bis 50 000) Abkürzungen der Zahlwörter verwendet. Die Eins selbst wird, wie z. B. in Ägypten, durch einen einfachen Strich dargestellt.[3] Die Hauptformen sind folgende:

1	I	attisch und	I	böotisch.
5	𐅃		Π	
10	Δ		▷	
50	𐅄 𐅄 𐅄		𐅄, F	
100	H		HE	
500	𐅅		ΠHE	
1000	X		↓	
5 000	𐅆		↓Π	
10 000	M		—	
50 000	𐅇		—	

[1] Aristophanes, Vesp. 656: Rechne zuerst ganz einfach, nicht mit Steinen, sondern von der Hand weg.

[2] Nach dem Grammatiker Herodian (2. Jahrhundert n. Chr.), der das System beschreibt.

[3] Siehe Tod S. 125 ff.

Das Herodianische System steht in engem Zusammenhang mit der Darstellung der Zahl auf dem Abakus; die Kolumnen der überlieferten Rechenbretter, z. B. bei der Salaminischen Tafel, zeigen die entsprechenden Überschriften. Dieses System, das sich in Abrechnungen und Inschriften noch im 1. Jahrhundert v. Chr. vorfindet, wird durch das zweite, alphabetische verdrängt. Hier stehen für

1–9: α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, ϑ (6 = ϛ = Vau, Stigma);
10–90: ι, ϰ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϙ (90 = ϙ = Koppa);
100–900: ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ (900 = ϡ = Sampi).

Die Tausender wurden durch die Einer mit einem vorgesetzten Strich bezeichnet (,α, ,β, usw.).[1] Zur Unterscheidung der Zahlbuchstaben von den gewöhnlichen Buchstaben konnte noch ein Querstrich oder Strichindex angefügt werden, z. B. 3 = $\bar{\gamma}$ oder γ'.

Voraussetzung zu einer raschen Verwendung dieser Ziffern, die natürlich mit ihrem Zahlwortnamen ausgesprochen wurden (z. B. $\bar{\alpha}$ καὶ $\bar{\beta}$ γίγνεται $\bar{\gamma}$ ist: ἓν καὶ δύο γίγνεται τρία) war die gedächtnismäßige Beherrschung des „Eins-und-eins" und später des „Ein-mal-eins". Gegenüber dem alten Herodianischen System besaß das neue den Vorteil großer Kürze.[2] Beim Gebrauch ist es gar nicht so unpraktisch, wie es auf den ersten Blick erscheinen möchte. Freilich mußte bei Multiplikationen und Divisionen mehrzifferiger Zahlen erst der Wert der neuen Einheit (= Stellenwert) gefunden werden. Zu diesem Zweck wurde der Begriff der „Wurzelzahl" (Anzahl der jeweiligen Einheit, πυθμήν) geschaffen. So hat 900 den Pythmen 9, wie auch 90, 9000 usw. Die Multiplikation von 900 · 70 erfolgt als 9 (Hekatonden) mal 7 (Dekaden) = 63 Chiliaden. Die neue Stelle ergibt sich durch Abzählen: 9 an der dritten Stelle mal 7 an der zweiten Stelle gibt 63 an der (3 + 2 — 1)ten Stelle. Für die Schreibung größerer Zahlen schritt man von 4 zu 4 Stellen vorwärts. Apollonios unterscheidet einfache, doppelte usw. Myriaden, z. B. 7381 5671 6013 0000 = M^{Γ},ζτπα M^{B},εχοαM^{A},ϛιγ. Auch das Ab-

[1] Über eine andere Tausenderschreibung im Pap. Vindobonensis 19 996 s. Gerstinger-Vogel S. 48.

[2] Vgl. z. B. 987 = ϡπζ mit 𐅅HHHH𐅄ΔΔΔ𐅃II.

setzen der Myriaden durch einen Punkt ist gebräuchlich wie 1 507 984 = $\overset{\Upsilon}{\mathrm{M}}$ρν·,ζϡπδ oder 36 621 = γ·,ϛχκα.[1] Ferner konnte die Zahl der betreffenden Myriaden als Index über dem M geschrieben werden, z. B. $\overset{,\zeta\rho o\varepsilon}{\mathrm{M}}$,εωοε = 71 755 875.[2] Rhabdas setzt zur Bezeichnung der Myriaden 2 Punkte über den Zahlbuchstaben. Für jede höhere Myriade kommen zwei weitere Punkte dazu. So ist 50 000 = $\ddot{\varepsilon}$, $7 \cdot 10\,000^2$ = $\overset{\ddot{}}{\ddot{\zeta}}$.[3] Zur Bewältigung noch größerer Zahlen hat Archimedes in der Sandrechnung (ψαμμίτης) ein Oktadensystem geschaffen. Die „ersten“ Zahlen gehen von 1 bis 99 999 999. Die folgende Zahl 10^8 ist die Einheit der „zweiten“ Zahlen, $(10^8)^2$ die der „dritten“ Zahlen usw. bis $(10^8)^{10^8}$, was die Einheit der 10^8ten Zahlen ist. Alle diese Zahlen bilden die erste Periode, auf die weitere Perioden bis zur 10^8ten folgen. Die größte auf diese Weise darstellbare Zahl ist $(10^{8 \cdot 10^8})^{10^8}$; Archimedes beschreibt sie als αἱ μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες; es ist eine 1 mit 80 000 Billionen Nullen![4] Solche große Zahlen haben freilich in der Logistik nichts zu suchen, hier endet die Zahlenreihe mit 1 Billion = μυριάκις μύριαι μυριάδες.[5]

Die Terminologie bestätigt die grundlegende Rolle des Abakus. Das Rechnen ist ein Legen von Steinen (ψήφους τιθέναι) = ψηφίζειν, ψήφοισι λογίζεσθαι,[6] die Rechnung selbst heißt ψηφοφορία. Daß die Verwendung von Rechensteinen das Naturgegebene ist, zeigt die Terminologie aus anderen Sprachen, z. B. bei den Römern: calculus, calculare, calculum ponere et subducere. Das Rechenbrett scheint auch überall da verwendet worden zu sein, wo in den Quellen nur das Resultat bei Rechnungen steht, die im Kopf allein nicht gut ausführbar waren. Ein Zitat aus

[1] Diophant I S. 222, 256.

[2] Siehe Heath 1, I S. 39.

[3] Tannery M. sc. IV S. 90. In der Schreibung der Punkte auf S. 112 (letzte Zeile) ist nicht alles in Ordnung.

[4] Zur schriftlichen Wiedergabe dieser Zahl würde eine Strecke von 1000 Erdbahndurchmessern nicht ausreichen, wenn jede Null einen halben Millimeter beansprucht.

[5] Über die Ziffernsysteme s. Heath 1, I S. 29 ff. und das Buch von Löffler.

[6] Herodot II S. 36.

Theophrast[1] zeigt, daß (so wie bei uns in einer Nebenrechnung) auf einem Nebenblatt das Teilresultat gewonnen wurde, das man dann in die Hauptrechnung (Heft, Liste, Buch) eintrug. Es heißt da: ἀμέλει δὲ καὶ λογιζόμενος πρός τινα τῷ παιδὶ συντάξαι τὰς ψήφους διωθεῖν (= τάχιστα τιθέναι?) καὶ κεφάλαιον ποιήσαντι γράψαι αὐτῷ εἰς λόγον. Die Verwendung des Rechenbrettes oder einer ähnlichen Vorrichtung (Knotenabakus) könnte als die Grundlage der modernen Positionsschreibung angesehen werden, in der die Lage der Steinchen nachgeahmt erscheint, wenn bei den Babyloniern, die das erste wenn auch noch unvollkommene Positionssystem hatten, ein Abakus nachgewiesen wäre. Die Hauptleistung der Inder auf diesem Gebiete ist die Einführung der Null, die beim Abakus unnötig war, für die aber das Auslassen einer Ziffer im Schriftbild nur ein unvollkommener Ersatz war.[2] In der griechischen Mathematik tritt eine Null nicht auf. Zwar verwendet Ptolemaios das Zeichen ο (= οὐδέν?) als Stellenfüllung (wie schon im späten Babylon) für eine fehlende Einheit in der sexagesimalen Schreibung der Brüche, doch ist es noch keine Zahl Null, mit der gerechnet werden kann.

Für πυθμήν, das bei Nikomachos[3] auch das auf die einfachste Form gebrachte Verhältnis bezeichnet, finden sich später auch die Ausdrücke: θεμέλιος und βάθρον (Grundlage).[4]

Im Unterricht bildet die Bekanntmachung des Schülers mit den einzelnen Zahlensymbolen und dem Aufbau des Ziffernsystems den ersten Lehrstoff. Rhabdas schreibt in seinem 1. Brief:[5] πρῶτον μὲν μαθεῖν πόσα στοιχεῖά εἰσιν τὰ συμβαλλόμενα εἰς αὐτὴν (nämlich die Arithmetik) καὶ πόσον ἀριθμὸν σημαίνει ἕκαστον αὐτῶν κ. τ. λ. Auch im 2. Brief[6] wird als erstes Kapitel die ἔκθεσις τῶν σημείων genannt, durch die die Werte der einzelnen Zahlen erklärt werden (δηλοῦσα τὴν ποσότητα καὶ τὸ μέτρον ἑνὸς

[1] Charaktere 24, 12 (ed. Immisch 1923 S. 35, 36).

[2] Bei Nesselmann findet sich an Stelle einer fehlenden Ziffer bei der griechischen Addition ein Querstrich. Für diese Nulldarstellung geben die Quellen keinerlei Handhabe.

[3] Desgleichen bei Iamblichos. Z. B. 3:2 statt 6:4; hierzu d'Ooge, S. 216.

[4] Bei Rhabdas S. 104.

[5] Tannery, M. sc. IV, S. 86.

[6] Ebenda M. sc. IV S. 118.

ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν). In einem weiteren Kapitel (περὶ τῆς τῶν ἀριθμῶν ἀναλογίας καὶ τάξεως) behandelt er den Aufbau des Zahlensystems;[1] hier werden vor allem umständliche Regeln für die Multiplikationen der einzelnen Stufeneinheiten gegeben. Rhabdas unterscheidet ähnlich wie Apollonios einfache, doppelte usw. Myriaden, z. B. 9000 · 9000 = 8100 einfache Myriaden (,ηα̈). In einem anderen Kapitel (ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου) wird gelehrt, wie man mit den Fingern 1–9999 darstellen kann. Doch kommt diesem eigenartigen Dokument keine Bedeutung mehr für die logistische Praxis zu.

Die Addition.

Bei Rhabdas wird folgendermaßen definiert:[2] Die Addition ist die Vereinigung von zwei oder drei Zahlen zu einem Zahlenwert (σύνθεσις μὲν οὖν ἐστιν ἕνωσις δύο καὶ τριῶν ἀριθμῶν εἰς ἑνὸς ἀριθμοῦ ποσότητα) oder an anderer Stelle[3] für beliebige Gliederzahl: σύνθεσις εἴτουν (= εἴτ' οὖν) κοινωνία καὶ ἕνωσις πολλῶν ἀριθμῶν εἰς . . . κ.τ.λ.

Der Hauptterminus συντιθέναι weist auf das ursprüngliche Zusammenlegen der Steinchen der beiden Summanden hin. Er blieb auch dann noch bestehen, als man längst von der ausschließlichen Verwendung des Abakus abgekommen war. Mit der Zeit stand wohl jedermann das Eins-und-eins zur raschen Erledigung der Addition zur Verfügung. Beim Addieren auf dem Rechenbrett hatte man nichts weiter zu tun als die untereinanderstehenden Summanden bzw. die sie darstellenden Marken in den einzelnen Kolumnen zusammenzuschieben und schließlich noch die überschießenden Beträge gegen größere Einheiten auszuwechseln. Rhabdas sagt:[4] ἑνοῦμεν τὰς δύο ταύτας πλευρὰς καὶ εἰς ἕνα ἀριθμὸν περιιστῶντες (! = περιιστάντες) usw.; also die beiden Zahlen werden beim Addieren zu einer einzigen umgeändert. Auf dem Rechenbrett erscheint das Resultat oben am Platze des 1. Summanden als κεφάλαιον (Summe). Beim schrift-

[1] Ebenda M. sc. IV S. 102.
[2] Ebenda S. 96.
[3] Ebenda S. 118.
[4] Ebenda S. 130.

lichen Rechnen steht das Ergebnis, wenn die Rechnung nicht im fortlaufenden Text durchgeführt wird, – schon mit Rücksicht auf den vorhandenen Raum – wie bei uns unten. Die Addition von 91 800 und 1836 sieht bei Eutokios[1] folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{r} \overset{\vartheta}{\mathrm{M}}\;,\overline{\alpha\omega} \\ ,\overline{\alpha\omega\lambda\varsigma} \\ \text{ὁμοῦ}\ \overset{\vartheta}{\mathrm{M}},\overline{\gamma\chi\lambda\varsigma}. \end{array}$$

Dieses und andere Beispiele auf derselben Seite zeigen, daß es den Griechen gar nicht darauf ankam, die einzelnen Stellen sauber untereinander zu stellen, wie man es nach Nesselmann[2] annehmen muß. Die Addition (40 000 + 12 000 + 1000) + (12 000 + 3600 + 300) + (1000 + 300 + 25) bei Eutokios[1] zeigt folgendes Bild:

$$\begin{array}{r} \overset{\delta}{\mathrm{M}}\,\overset{\alpha}{\mathrm{M}},\bar{\beta},\bar{\alpha} \\ \overset{\alpha}{\mathrm{M}},\bar{\beta},\bar{\gamma}\bar{\chi}\bar{\tau} \\ ,\overline{\alpha\tau\kappa\varepsilon} \\ \text{ὁμοῦ}\ \overset{\zeta}{\mathrm{M}}\ \overline{\sigma\kappa\varepsilon}. \end{array}$$

Das von Nesselmann angegebene Additionsschema, das von späteren Bearbeitern übernommen wurde, gibt auch nach zwei anderen Richtungen hin ein falsches Bild. Weder wird unter die Summanden ein Additionsstrich gesetzt, noch werden fehlende Stellen durch einen Querstrich bezeichnet. Dies würde schon der Verwendung einer Null als Fehlzeichen gleichkommen. Der Text gibt bei der Addition 326 041 + 23 409 = 349 450 deutlich[3]: ἐκ τούτων (unter bezug auf $\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}},\overline{\varsigma\mu\alpha}$ und $\overset{\beta}{\mathrm{M}},\overline{\gamma\upsilon\vartheta}$) συνάγεται . . . $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}},\overline{\vartheta\upsilon\nu}$ und nicht wie bei Nesselmann:

$$\begin{array}{l} \overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}},\varsigma-\mu\alpha \\ \underline{\overset{\beta}{\mathrm{M}},\gamma\upsilon-\vartheta} \\ \overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}},\vartheta\upsilon\nu. \end{array}$$

[1] Archimedes III S. 234.
[2] Nesselmann S. 119.
[3] Archimedes III S. 236.

Immerhin nähern sich manche Beispiele unserer heutigen Darstellung darin, daß wenigstens die Summanden auf verschiedene Zeilen verteilt sind. Vor Eutokios ist in den Quellen etwas derartiges nicht zu sehen. Meist wird, z. B. bei Heron und in Papyrustexten, die Addition wie überhaupt jede Rechnung im fortlaufenden Text vollzogen. Beispiele: Pap. Graec. Vind. 19 996[1] σύνθες τὰ β καὶ τὰ ιβ ⊤ (= γίνεται) ιδ oder Heron[2] σύνθες δ καὶ ἕν· γίγνεται ε. Wenn statt dieser und anderer ausführlicher Wendungen (καὶ γίγνεται μετὰ τῶν Β τὰ ὅλα Γ, ὁ Α μετὰ τῶν Β τὸν Γ ἀριθμὸν ἀπήρτισαν) die verkürzten Formen γ̄ καὶ γ̄ ς̄ oder nur γ̄γ̄ ς̄ sich finden, so deutet dies auf das Vorliegen von Eins-und-eins-Tabellen hin, deren gedächtnismäßige Beherrschung das umständliche Abakusrechnen oder das Herzählen an den Fingern entbehrlich machte. Dies mußte auch ein Ziel des Elementarunterrichtes sein. So weisen schon Aristoteles und Diophant auf die Notwendigkeit des Auswendiglernens, das den Schülern allerdings wenig Freude macht, eindringlich hin.[3] Eine solche Eins-und-eins-Tabelle, die gleichzeitig als Subtraktionstafel zu gebrauchen war, findet sich bei Rhabdas.

α	ι	ϑ
α	ϑ	η
α	η	ζ
α	β	α

ist ein Teil dieser mit σύνθεσις μετὰ ἀφαιρέσεως (Addition und Subtraktion) überschriebenen Tabelle.

Derartige Hilfstabellen existierten sicher schon lange. Dies ergibt sich schon aus der Bezeichnung bei Rhabdas als „Erfindung des Palamedes". Der Name soll sicher nur die alte Überlieferung zum Ausdruck bringen.[4] Urkundlich ist eine Additions-

[1] Gerstinger-Vogel S. 22.

[2] Heron III S. 176.

[3] Siehe unten S. 387.

[4] Tannery, M. sc. IV S. 110. Herrn E. Wüst verdanke ich den Hinweis auf zwei Stellen in der Literatur, aus denen hervorgeht, daß mit Palamedes der Sohn des Nauplios gemeint ist, offenbar also der, welcher am trojanischen Krieg teilnahm. Er wird deswegen gerühmt, weil er die phönikischen Ziffern (Buchstaben?) lehrte und in der Lage war, richtige Verteilungen der Lebensmittel vorzunehmen. Er war also des praktischen Dividierens kundig. Außerdem erfand er eine „Tafel". Die beiden Stellen sind: Schol. Eurip. Or. 432: ὁ δὲ Παλαμήδης ἀπελθὼν εἰς Τροίαν τὰ μέγιστα ὤνησε τὸν Ἑλληνικὸν λαόν. λιμωσσόντων γὰρ ἐν Αὐλίδι καὶ περὶ τὴν διανομὴν τοῦ σίτου δυσχεραινόντων τε καὶ στασιαζόντων πρῶτον μὲν τὰ Φοινίκια διδάξας γράμματα αὐτοὺς ἴσην τε καὶ ἀνεπίληπτον τὴν διανομὴν ἐν τούτοις ἐπραγματεύσατο und Schol. Stat. Ach. I 93: tabulam ipse invenit ad comprimendas otiosi seditiones exercitus. Es handelt sich in dieser verderbten Stelle wohl um die „Tafel des P.", von der Rhabdas spricht. Mit einer solchen Multiplikationstafel konnten auch die genannten Verteilungen (nach der ägyptischen Methode) vorgenommen werden.

tabelle aus früherer Zeit auf einem Papyrusstück belegt, das später zum Text des Papyrus Vindobenensis 19 996 mitverwendet wurde, das also aus der Zeit vor der 2. Hälfte des ersten vorchristlichen Jahrhunderts stammt. Es steht dort[1] in derber Unzialschrift:

Α	Α	Β	d. i.	1	1	2
Α	Β	Γ		1	2	3
Α	Γ	Δ		1	3	4
Α	Δ	Ε		1	4	5 usw.

Im einzelnen sind bei der Addition folgende Termini in Gebrauch:

Addition:	σύνθεσις, πρόσθεσις, συγκεφαλαίωσις.
Addieren:	ἐπιτιθέναι, συντιθέναι, ἐπισυντιθέναι, προστιθέναι, συγκεφαλαιοῦν, συγκεφαλοῦν, σύνδυο λαμβάνειν, συναθροίζειν, συνάγειν, προσαριθμεῖν, προστάττειν, μιγνύναι, συμμιγνύναι.
Summe:	ἀθροισμός, κεφάλαιον, συγκεφαλαίωμα, συγκεφαλαίωσις, ὁ συγκείμενος, τὸ συγκείμενον ἐκ τοῦ κεφαλ., τὸ κατὰ σύνθεσιν, σύμπας, τὸ ὅλον, τὸ σύνολον, ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, ὁ γενόμενος.

Die Summe wird oft eingeleitet durch ὁμοῦ (zusammen) und ἰδοῦ (siehe!) oder, wie auch das Resultat anderer Rechenoperationen, durch γίγνεσθαι (als Siglum: ⊤), ἀποβαίνειν, ἀποδιδόναι (Nikomachos), ὡς εἶναι usw. bezeichnet. Ein Pluszeichen existiert nicht, ebensowenig wie ein Terminus für Summanden. Diese werden mit καί oder ohne jede Verbindung aneinandergereiht. Auch die Wendung: τὸ Α μετὰ τοῦ Β ist gebräuchlich.

[1] Gerstinger-Vogel S. 14.

Die Subtraktion

Die Terminologie der Subtraktion zeigt wieder deutlich die hängigkeit vom Abakusrechnen. Das Subtrahieren ist ein „V nehmen, Wegheben", ein „Hinauswerfen" des „kleineren größeren". Rhabdas definiert:[1] ἐκβολὴ δέ ἐστιν ἀφαίρεσις ἥτι ἀριθμοῦ ἀπὸ μείζονος und später unter Ausdehnung der Subt tion auf den Fall der Gleichheit von Minuend und Subtrah ἀφαίρεσις ἤγουν ἐκβολὴ ὅταν ἐξ ἀριθμῶν ἀριθμοὺς ὑφαιρῶμεν ἢ ἴ αὐτοῖς ἢ ἐλάσσονας.[2] Auf dem Rechenbrett kann die Rechnur ausgeführt worden sein, daß man beide „Zahlen" untereina legte und dann in jeder Kolumne je einen Stein gleichzeitig l Minuenden und Subtrahenden „hinauswarf". Später stand, die obengenannte Tafel des Palamedes zeigt, die Subt tionstabelle (umgekehrte Eins-und-eins-Tabelle) zur Verfüg Nesselmann[3] gibt folgendes selbstgewählte Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \overset{\vartheta}{\mathrm{M}},\gamma\chi\lambda\varsigma & 93\,636 \\ \overset{\beta}{\mathrm{M}},\gamma\upsilon-\vartheta & 23\,409 \\ \hline \overset{\zeta}{\mathrm{M}}-\sigma\kappa\zeta & 70\,227. \end{array}$$

Heath[4] gibt es besser wieder als

$$\begin{array}{l} \overset{\vartheta}{\mathrm{M}},\gamma\chi\lambda\varsigma \\ \overset{\beta}{\mathrm{M}},\gamma\upsilon\ \ \vartheta \\ \hline \overset{\zeta}{\mathrm{M}}\ \ \sigma\kappa\zeta, \end{array}$$

wobei er den nirgends belegten Nullstrich wegläßt und vorsi bemerkt: „a subtraction would be represented. . . ." Aber bei ihm gilt das (bezüglich des Untereinandersetzens der zu mengehörenden Einheiten sowie des Striches vor dem Res oben bei der Addition Gesagte; schon Friedlein[5] hat d

[1] Tannery, M. sc. IV S. 96.
[2] Ebenda S. 118.
[3] Nesselmann S. 119.
[4] Heath 1, I S. 52.
[5] Friedlein S. 75.

hingewiesen, daß die vorgeschlagene schematische Anordnung durch keinerlei Quellen belegt ist. Überall da, wo eine Subtraktion auftritt, erscheint sie im fortlaufenden Text. So steht bei Heron[1] für die Subtraktion $169 - 129\frac{160}{164}$: ταῦτα $\left(\text{sc. } \rho\kappa\vartheta \text{ καὶ } \frac{\rho\xi\delta}{\rho\xi}\right)$ ἄφελε ἀπὸ τῶν ρξθ. λοιπὰ λθ καὶ $\frac{\rho\xi\delta}{\delta}$. Man weiß auch nichts darüber, welches Verfahren man einschlug, wenn eine „Stelle" des Minuenden weniger Einheiten enthielt als die entsprechende des Subtrahenden. Auf dem Rechenbrett ergab sich sofort ein Ausweg durch Umwechseln (Entlehnen) einer größeren Einheit. Wie war es aber beim schriftlichen Rechnen? Heron gibt z. B. an einer Stelle[2] als Ergebnis von 625–333 sofort 292 an. Entweder wurde wohl die Nebenrechnung auf einem Abakus erledigt oder man wird an folgende Kopfrechnung denken: $625 - 300 - 33 = 325 - (25 + 8) = 300 - 8 = 292$.

Die Multiplikationen zweier Differenzen führen bei Diophant zu dem Terminus λεῖψις für eine abzuziehende Größe (= Subtrahend) und zu der hieraus entspringenden Regel: λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.[3] Dabei darf man aber noch nicht an den Begriff einer negativen Zahl denken, wie es auch nach der Übersetzung von Tannery (minus multiplicatum in minus facit plus) den Anschein hat. In der griechischen Mathematik wird nie, auch nicht in spätester Zeit, etwas Größeres von etwas Kleinerem subtrahiert.[4] An derselben Stelle führt Diophant ein Zeichen für die abzuziehende Größe ein. Es heißt hier: καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον, ⋔. Dies wird nun zum Symbol des Minuszeichens, z. B. $2x - 3 = ς\bar{\beta} ⋔ \overset{o}{\mathrm{M}}\bar{\gamma}$.[5]

[1] Heron III S. 46.

[2] Heron III S. 44, ebenso S. 40: $169 - 72\frac{1}{5} = 96\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10}$.

[3] Diophant I S. 12. In einem Scholion (Diophant II S. 199) wird $(10 + x) \cdot (10 - x)$ nach der „indischen Methode" vorgerechnet; hier heißt es z. B., daß $(-x) \cdot x$ zu x^2 wird: ἡ ⋔ τοῦ $\bar{\alpha}$ ς^{οῦ} ἐπὶ τὸν $\bar{\alpha}$ ς^{ον}, ⋔ $\Delta^{Y}\bar{\alpha}$. Hier ist $-x^2$ bereits eine negative Zahl!

[4] Von dieser Subtraktion spricht nur der Skeptiker Sextos Empirikos, S. 275 ff.

[5] Diophant I S. 94; ς ist das Symbol des Unbekannten (ἀριθμός), die Zahlen haben den Zusatz: μονάδες ($\overset{o}{\mathrm{M}}$). Über ⋔ s. Heath 3, S. 71 ff.

Folgende Termini zur Subtraktion finden sich in den Texten:

Subtraktion:	ἀφαίρεσις, ἐκβολή, ἐλάττωσις, ὑπεροχή, ὑφαίρεσις.
Subtrahieren:	αἴρειν, ἀφαιρεῖν, ὑφαιρεῖν, ὑπεξαιρεῖν, ἐκβάλλειν ἀπό, παρεκβάλλειν, λαμβάνειν ἔκ τινων.
Minuend:	ohne eigenen Terminus.
Subtrahend:	λεῖψις.
Rest, Differenz:	τὸ λειπόμενον, τὸ καταλειπόμενον, λειφθέν, διάστημα, ἔλλειψις, τὸ λοιπόν, τὰ λοιπά, ὑπεροχή, διαφορά, ἀποτομή.

Weiterhin heißt das Übrigbleiben des Restes:
λείπεσθαι, ἀπολείπειν, καταλείπειν, καταλιμπάνεσθαι, ὑπερέχειν, ὑπερφέρειν, μένειν (μένουσι λοιπόν).

Als Siglum findet sich ⌒ = περίεστιν (?) im Papyrus Graecus Vindob. 19 996 und im Ayer Papyrus.[1]

Die Multiplikation.

Der erste Zweig der Logistik, der von dem Charmidesscholiasten angeführt wird, ist die Multiplikation, bei der zwei Arten unterschieden werden, die ägyptische und die griechische.

Über die Durchführung dieser Rechnungsart bei den Ägyptern sind wir aus den dortigen Quellen genau unterrichtet. Das Verfahren ist noch eng mit dem der Addition verbunden, nur daß man zur rascheren Durchführung der Rechnung von ständigen Verdoppelungen Gebrauch machte. Soll z. B. $39 \cdot 61$ ausgerechnet werden, so ergibt sich folgendes Schema:

/1	61
/2	122
/4	244
8	488
16	976
/32	1952
zusammen	2379.

[1] S. 35. Vielleicht ist ⌒ = Λ = λείψει.

In der ersten Reihe stehen die Multiplikatoren, in der zweiten die Teilprodukte, von denen das erste gleichzeitig den Multiplikanden darstellt. Da der auf $32 \cdot 61$ folgende Schritt $(64 \cdot 61)$ schon einen Multiplikator größer als 39 liefert, wird hier haltgemacht. Dann werden diejenigen Multiplikatoren, deren Summe 39 ergibt (also $1+2+4+32=39$), mit einem Merkstrich versehen (Kennziffern); die Summe der dazugehörigen Teilprodukte ergibt das Resultat. Der bei der Problemstellung verwendete Terminus lautet: „Rechne mit 61 neununddreißigmal."[1] Da die vorkommenden Verdoppelungen bequem in einer Kopfrechnung (oder auf dem Abakus?) erledigt werden, unterscheiden sie sich von den schwierigeren allgemeinen Multiplikationen, so daß es erklärlich ist, wenn sich diese spezielle Multiplikation als eine eigene Rechenoperation duplatio („Zwiefachung") noch weit in die Neuzeit hinein erhalten hat.[2]

Die Entwicklung der Addition mehrerer gleicher Summanden zu einer neuen Rechnungsart höherer Stufe, der Multiplikation, ging nur ganz allmählich vor sich; sie hat die gedächtnismäßige Beherrschung des kleinen Einmaleins zur Voraussetzung. Bei der Definition der Multiplikation wird stets auf den inneren Kern, auf die fortgesetzte Addition, zurückgegriffen. So definiert Rhabdas – genau wie wir –[3] ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος καὶ γένηταί τις ἕτερος. Ähnlich heißt es bei einem Anonymos,[4] der nach dem 5. Jahrhundert lebte: πολλαπλασιασμός ἐστι σύνθεσις ἀριθμοῦ τινος δοθέντος καθ' ἕτερον ἀριθμὸν δοθέντα· οἱονεὶ ὅταν ὁ ἕτερος τοσαυτάκις συντιθέμενος ᾗ ὁπόσος ἐστὶν ὁ ἕτερος ἐν τῷ πλήθει τῶν μονάδων καὶ ποιῇ τινα κατὰ τὸ πλῆθος τῆς συνθέσεως, ὁ γενόμενος λέγεται πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑτέρου κατὰ τὸν ἕτερον. Es wird also eine Zahl gemäß, zufolge einer anderen, also so oft wie die andere angibt, addiert.

Auf diesem Gedanken der fortgesetzten Addition scheint auch die Terminologie der Multiplikation aufgebaut zu sein. Das

[1] Oder: „lege hinzu, angefangen mit 61, neununddreißigmal". Über die Terminologie der ägyptischen Arithmetik siehe Vogel 2, bes. S. 11–21.
[2] Heath 1, I S. 53, Tropfke I³ S. 70.
[3] Tannery, M. sc. IV S. 98.
[4] Anonymus 1, s. Diophant II S. IV und 6.

hauptsächliche Fachwort ist πολλαπλασιάζειν, dessen Stamm derselbe ist wie der der Zahladjektiva διπλοῦς, διπλάσιος. Das Zeitwort πλέκειν (St. πλαγ, plic) heißt „zusammenfalten", πολλαπλασιάζειν wäre dann ein „multas plicas facere", ein „vervielfältigen". Die Sprachwissenschaft müßte entscheiden, ob nicht vielleicht πελ hinter πλαγ steckt. Gerade das „Umwenden", das „Herumschwingen" (πέλομαι) z. B. des Mantels ruft doch die Falte und damit ein doppeltes Stück hervor. Denken wir an das ebenfalls von πέλομαι abgeleitete πλέθρον. Dieser schmale Streifen, die „Ackerfurche", wurde zum Längenmaß. Wird nun beim Umpflügen eines rechteckigen Ackers Streifen an Streifen aneinandergereiht, so ist das Bild gerade das eines fortgesetzten Zusammensetzens, eines Addierens aller dieser kleinen Streifenflächen.[1] Das Ergebnis der Addition durch „vielmaliges Umwenden" ist gleichbedeutend mit einem „Produkt" aus Länge und Breite. In diesem Zusammenhang ist es bezeichnend, daß neben den quadratisch aufgebauten Flächenmaßen (z. B. ein Plethron als Quadrat von je einem Längenplethron Seitenlänge) auch rechteckige Streifen als Flächenmaße vorkommen. So hat Tannery bei Didymos einen δάκτυλος χυδαῖος festgestellt, der in einem Rechteck von 1 Elle Länge und 1 Zoll Breite bestand.[2] Auch andere Termini sprechen für diese Erklärung der Multiplikation. Das Multiplizieren ist ein ἐπαναλαμβάνειν, also ein „Wiederholen". Die Wendung ποιεῖν ἀριθμὸν ἐπί τινα zeigt, daß eine Zahl auf oder an die andere gelegt oder „herangeworfen" (παραβάλλειν) wird. Überall steht demnach die geometrische Vorstellung im Vordergrund, die sich auch auf die rein arithmetischen Ausdrücke überträgt, wie es z. B. auch die Termini für die figurierten Zahlen (ἐπίπεδος ἀριθμός, ἑτερομήκης ἀριθμός) erweisen.[3]

Bei Homer findet sich noch kein Zeitwort für vervielfältigen. Dagegen kommen dort die multiplikativen Zahladverbien auf

[1] πλάξ, vom gleichen Stamm ist „Fläche".

[2] Über die Landelle bei den Ägyptern s. Gerstinger-Vogel S. 52. Die Fortführung dieses Gedankens führt zu Schichtkörpermaßen, die in der babylonischen und griechischen Mathematik nachweisbar sind.

[3] Auch in der babylonischen Mathematik ist das Produkt eine „Fläche" (a–ša).

-κις (τετράκις usw.) sowie die Zahladjektiva (διπλοῦς usw.) vor. Bezeichnend für die oben geschilderte „streifenmäßige" Multiplikation ist das zweimal verwendete τετραθέλυμνος, aus vier Lagen bestehend, also „vierfältig".[1]

Beispiele für die Durchführung einer Multiplikation nach der ägyptischen dyadischen Methode sind mir in der griechischen Mathematik nicht bekannt. Sie wurde im Unterricht wohl auch bald durch die nicht so umständliche griechische Methode ersetzt, die freilich eingehend geübt werden mußte, während die ägyptische Multiplikation für jemand, der die Addition beherrschte, selbstverständlich war. Die Notwendigkeit eingehender Übungen auch in der Multiplikation hebt Diophant hervor, wenn er sagt:[2] καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας συνθέσει καὶ ἀφαιρέσει καὶ πολλαπλασιασμοῖς . . . γεγυμνάσθαι. Hauptsächlich handelte es sich dabei um die Beherrschung des kleinen Einmaleins, dessen Kenntnis besonders bei mehrzifferigen Faktoren Voraussetzung war, wenn man nicht bei der Bildung jedes Teilproduktes zu einer Nebenrechnung auf dem Abakus oder auf einem Beiblatt seine Zuflucht nehmen wollte. In einer Stelle bei Aristoteles wird dies treffend illustriert.[3] Er spricht davon, daß ein Redner auf die hauptsächlichsten Einwände gerüstet sein müsse. Wie ein Geometer die Elemente und ein Rechner das Einmaleins, so müsse auch ein Diskussionsredner die ἀρχαί und die προτάσεις sofort zur Hand haben. Der Text lautet: πειρατέον δὲ καὶ εἰς ἃ πλειστάκις ἐμπίπτουσιν οἱ (ἄλλοι) λόγοι κατέχειν· ὥσπερ γὰρ ἐν γεωμετρίᾳ πρὸ ἔργου τὸ περὶ τὰ στοιχεῖα γεγυμνάσθαι καὶ ἐν ἀριθμοῖς τὸ περὶ τοὺς κεφαλισμοὺς προχείρως ἔχειν μέγα διαφέρει πρὸς τὸ καὶ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν γινώσκειν πολλαπλασιούμενον, ὁμοίως καὶ ἐν τοῖς λόγοις τὸ πρόχειρον εἶναι περὶ τὰς ἀρχὰς καὶ τὰς προτάσεις ἀπὸ στόματος ἐξεπίστασθαι. Der Kommentator Alexander erklärt die Kopfrechnungen, von denen Aristoteles spricht und die für die anderen Multiplikationen nützlich sind, als die Multiplikationen im kleinen Einmaleins. Aus ihnen kann man die größeren Multiplikationen herleiten. Er sagt: κεφαλισ-

[1] Homer O 479 und χ 122.

[2] Diophant I S. 14.

[3] Aristoteles, Top. VIII, 14 (ed. Wallies S. 186); hierzu Alexander S. 586.

μοὺς δὲ λέγει ['Αριστοτέλης] τοὺς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν μέχρι δεκάδος πολλαπλασιασμούς· διὰ γὰρ τῆς περὶ τούτων γυμνασίας καὶ οἱ τῶν ὑστέρων καὶ μειζόνων καὶ ὁμοίων αὐτοῖς πολλαπλασιασμοὶ κατὰ μετάβασιν γνωρίζονται· ἀπὸ γὰρ τοῦ „δὶς δύο τέσσαρα" γνωρίζεται ὁ „δὶς κ' μ'" καὶ ὁ „εἰκοσάκις κ' υ'" καὶ ὁ „διακοσιοντάκις κ' τετρακισχίλια" καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Also aus 2·2 = 4 folgt für die „ähnlichen" Zahlen 2·20 = 40, 20·20 = 400, 200·20 = 4000 usw.[1]

Zur Erleichterung der Rechnung standen auch Einmaleinstabellen zur Verfügung, wie sie ein Fragment des Britischen Museums zeigt, das auf das zweite Jahrhundert zurückgeht, aber auch älter sein kann.[2] Bei Rhabdas finden sich ausführliche Einmaleinstabellen vor, die als ψηφοφορικά · εὕρεμα Παλαμήδους bezeichnet werden (s. o. S. 380). Den Anfang bilden die Einermultiplikationen (ἀρχὴ τῶν ἀπὸ μονάδος μέχρι μυριάδος ἁπλῶν πολλαπλασιασμῶν). Zuerst wird 1 (α) mit allen 37 Buchstabenziffern

α β γ δ ε ς ζ η ϑ
ι κ λ μ ν ξ ο π ϟ
ρ σ τ υ φ χ ψ ω ϡ
͵α ͵β ͵γ ͵δ ͵ε ͵ς ͵ζ ͵η ͵ϑ und α̈

kombiniert, was die Produkte von 1 · 1 bis 1 · 10 000 ergibt. Dann folgt 2 · 2 bis 2 · 10 000 usw. bis 9 · 9 bis 9 · 10 000. In den nächsten Tafeln kommen die Multiplikationen der Zehner, der Hunderter und der Tausender bis zu 10 000 · 10 000 = 100 000 000 (= α̈ α̈ α̈). Überall steht der Multiplikator in der ersten, der Multiplikand in der zweiten, das Produkt in der dritten Kolumne, also z. B.: 100 · 400 = 40 000, also ρ υ δ̈.

Bei Nikomachos stehen Tabellen, in denen die Zahlen gleicher Eigenschaften zusammengestellt werden, z. B. die durch 5 teilbaren Zahlen. Sie lassen sich auch als Einmaleinstabellen verwenden. Eine von ihnen enthält das Einmaleins von 1 · 1 bis 10 · 10:[3]

[1] Über die πυθμένες s. o. S. 375, 377.
[2] Tropfke I³ S. 143.
[3] Nikomachos 1, S. 51.

μῆκος

βάϑος

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ	ι
β	δ	ς	η	ι	ιβ	ιδ	ις	ιη	κ
γ	ς	ϑ	ιβ	ιε	ιη	κα	κδ	κζ	λ
δ	η	ιβ	ις	κ	κδ	κη	λβ	λς	μ
ε	ι	ιε	κ	κε	λ	λε	μ	με	ν
ς	ιβ	ιη	κδ	λ	λς	μβ	μη	νδ	ξ
ζ	ιδ	κα	κη	λε	μβ	μϑ	νς	ξγ	ο
η	ις	κδ	λβ	μ	μη	νς	ξδ	οβ	π
ϑ	ιη	κζ	λς	με	νδ	ξγ	οβ	πα	ϟ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ	ρ

Aus den erhaltenen Texten sieht man allenthalben, wie bei der schriftlichen Durchführung einer einfachen Multiplikation die betreffende Tabellenzeile – entweder aus der Tabelle entnommen oder aus dem Gedächtnis heraus – in die jeweilige Rechnung übertragen wurde. So heißt es z. B. bei Rhabdas τετράκις τὰ δ̄ ις̄, πεντάκις τὰ η̄ μ̄ oder vereinfacht ϑ ͵α ͵ϑ (9 · 1000 = 9000). Diese verkürzte Form steht auch bei Heron, z. B. γ'ζ'κα' (3 · 7 = 21), während sonst im allgemeinen die vollständigen Wendungen: τὰ A ἐπὶ τὰ B γίνονται C u. a. vorherrschen, wie bei Archimedes, Heron, im Papyrus Gr. Vind. 19 996 usw.

Die uns erhaltenen Beispiele mehrzifferiger Multiplikationen zeigen neben der Verwendung des Einmaleins ein zweites Hauptmerkmal der griechischen Multiplikation. Es besteht darin, daß im Gegensatz zu unserem „indischen" Verfahren bei der höchsten Stelle begonnen wird. In „Heron"s Geometrie[1] wird das Produkt 14 23/33 · 14 23/33 gerechnet als 14 · 14 + 14 · 23/33 + 23/33 · 14 + 23/33 · 23/33. Ebenso[2] 4 4/5 · 4 4/5 = 4 · 4 + 4 · 4/5 + 4/5 · 4 + 4/5 · 4/5 oder mit verschiedenen Faktoren:[3] 4 33/64 · 7 62/64 = 4 · 7 + 4 · 62/64 + 33/64 · 7 + 33/64 · 62/64. Auch bei Eutokios stehen zahlreiche Beispiele. Von den 3 nebeneinanderstehenden Multiplikationen 306 · 306, 153 · 153 und 265 · 265[4] lautet die letzte folgendermaßen:

τὰ δὲ $\overline{\sigma\xi\varepsilon}$		265
ἐπὶ $\overline{\sigma\xi\varepsilon}$		265
$\overset{\delta}{M}\overset{\alpha}{M}\,,\beta\,,\bar{\alpha}$	also:	40 000 12 000 1 000
$\overset{\alpha}{M}\,,\beta\,,\bar{\gamma}\bar{\chi}\bar{\tau}$		12 000 3600 300
$,\overline{\alpha\tau\kappa\varepsilon}$		1 000 300 25
ὁμοῦ $\overset{\zeta}{M}\overline{\sigma\kappa\varepsilon}$		zusammen 70 225.

Das Beispiel zeigt, daß die Berechnung in der Reihenfolge: (200 · 200 + 200 · 60 + 200 · 5) + (60 · 200 + 60 · 60 + 60 · 5) + (5 · 200 + 5 · 60 + 5 · 5) also von links nach rechts vor sich ging.[5] Man hat auf die so gerichtete Multiplikation die bekannte Äußerung Herodots (II, 36) bezogen, in der erzählt wird, daß die Griechen im Gegensatz zu den Ägyptern von links nach rechts „rechnen": γράμματα γράφουσι, καὶ λογίζονται ψήφοισι Ἕλληνες μὲν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ φέροντες τὴν χεῖρα, Αἰγύπτιοι δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά. In diesem Fall kann man an eine Abakusmultiplikation analog dem Eutokiosbeispiel denken, wobei der Multiplikator in die auf der Salaminischen Tafel seitlich befindliche Kolumnenreihe eingetragen gewesen sein kann. Nagl hat die wahrscheinliche Ausführung einer solchen Multiplikation vorgerechnet.[6] Da aber von einem ägyptischen Abakus nichts Sicheres bekannt ist, kann λογίζονται ψήφοισι auch lediglich

[1] Heron IV S. 322.
[2] Ebenda IV S. 256.
[3] Ebenda IV S. 266.
[4] Archimedes III S. 234.
[5] Nagl S. 48.
[6] Ebenda S. 56 f.; Heath 1, I S. 51 ist anderer Ansicht.

„rechnen" bedeuten, und dann bezieht sich die Stelle wohl nur auf die verschiedene Schriftrichtung.

Nesselmann und andere[1] setzen unter den 2. Faktor sowie vor die Gesamtsumme wieder Querstriche, die sich aber in den Texten selbst nicht vorfinden.

In der geschilderten Weise sind bei Eutokios noch folgende Beispiele ausgeführt:

571 · 571	153 · 153 (dreimal)
591 1/8 · 591 1/8	1162 1/8 · 1162 1/8
1172 1/8 · 1172 1/8	2334 1/4 · 2334 1/4
2339 1/4 · 2339 1/4	1560 · 1560
780 · 780 (zweimal)	1351 · 1351
2911 · 2911	3013 1/2 1/4 · 3013 1/2 1/4
1823 · 1823	240 · 240
1838 1/9 1/11 · 1838 1/9 1/11	1007 · 1007
66 · 66 (zweimal)	1009 1/6 · 1009 1/6
2016 1/6 · 2016 1/6	2017 1/4 · 2017 1/4.

Dabei ist überall zu sehen, daß der Rechner das Einmaleins beherrschte bzw. in Tabellen nachschlagen konnte.[2]

Multiplikationsbeispiele mit gebrochenen Faktoren, die weiter unten besprochen werden sollen, finden sich besonders im Papyrus Akhmîm und bei Rhabdas. Im übrigen beschränkt sich der letztere in seinem ersten Brief auf die einfachen Multiplikationen, d. h. auf solche mit Faktoren, die nur mit einer Buchstabenziffer geschrieben werden können. Für solche hat er auch die genannten Einmaleinstabellen aufgestellt. Im Anschluß daran heißt es nun:[3] καὶ οὕτω μὲν ὁ ἁπλοῦς γίνεται πολλαπλασιασμός, ὁ δὲ διπλοῦς καὶ τριπλοῦς καὶ ὁ ἐπέκεινα τούτων διὰ μεθόδου προβαίνει τινός, ἣν ἐν τῷ Περὶ πολλαπλασιασμοῦ λόγῳ τῆς Ἰνδικῆς Μεγάλης Ψηφοφορίας ἀκριβῶς μετελθὼν εἴσῃ σαφέστατα. Der Hinweis auf die bessere Eignung der indischen Methode zur Bewältigung der „mehrfachen", d. h. der mehrzifferigen Multiplikationen und die Tatsache, daß in den Briefen des Rhabdas auf diese neue Methode

[1] Nesselmann S. 116; Heath 1, I S. 57 f.
[2] Archimedes III S. 250; hier sieht man z. B. bei der Multiplikation 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ die Kenntnis des Einmaleins mit 13.
[3] Tannery, M. sc. IV S. 114.

nicht eingegangen wird, ist ein Beweis für das Vorliegen echt griechischer Kenntnisse bei den von ihm tatsächlich beschriebenen anderen Rechenoperationen. Daraus ergibt sich der Schluß, daß man Rhabdas zum Studium der alten griechischen Logistik mit heranziehen darf.

Die Untersuchung von Multiplikationen mit Sexagesimalbrüchen sowie die Multiplikationen von Brüchen und das diesen entsprechende „Zusammensetzen" der λόγοι wird unten bei der Bruchrechnung durchgeführt werden. Die Multiplikationsbeispiele bei Maximos Planudes in dessen „großer indischen Rechenkunst" gehören nicht mehr zur griechischen Logistik, wenn auch meist noch die alten Termini vorliegen.

Zu der Beherrschung des Einmaleins kommt noch als grundlegender Faktor der griechischen Multiplikation die Bestimmung des Stellenwertes. So zerfällt die Multiplikation in zwei Teile; erstens in die Multiplikation der „Wurzelzahlen" (alle die genannten „ähnlichen" Zahlen 2, 20, 200, 2000 usw. haben denselben πυθμήν)[1] und zweitens in die Einreihung an den richtigen Platz der Reihe 1, 10, 10^2, 10^3 usw. Hierüber schreibt Archimedes[2] im ψαμμίτης: χρήσιμον δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. εἴ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζωντί τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει, ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάττονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους, d. h.: „Es ist auch nützlich, folgendes zu wissen: wenn Zahlen von der Einheit an in einer geometrischen Reihe angeordnet sind und einige (= zwei) aus derselben Reihe miteinander multipliziert werden, so wird das Produkt zu derselben Reihe gehören, und zwar steht es von dem größeren der beiden Faktoren so weit ab, wie der kleinere der Faktoren von der Einheit im Verhältnis absteht; von der Einheit wird es um eins weniger abstehen als die Summe der Zahlen (angibt), um die beide Faktoren von der Einheit abstehen." Zum Verständnis dieser Stelle ist zu beachten, daß der Grieche bei

[1] Siehe oben S. 375.
[2] Archimedes II S. 240.

dem Abzählen des „Abstandes" eines Gliedes der Reihe das Anfangsglied mitzählt.[1] In der Reihe $\underset{1}{1}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a^2}, \underset{4}{a^3}, \underset{5}{a^4}, \underset{6}{a^5}, \underset{7}{a^6}, \underset{8}{a^7} \ldots$ hat z. B. a^2 den Abstand 3, a^5 den Abstand 6, was unserer Numerierung der Glieder entsprechen würde. Die Regel besagt dann, daß das Produkt $a^2 \cdot a^5$ ($= a^7$) auch ein Glied der genannten Reihe ist, und zwar hat es von a^5 denselben Abstand wie a^2 von 1, nämlich 3; ferner hat das gesuchte Produkt von 1 einen Abstand, der sich hier aus $6 + 3 - 1 = 8$ errechnet. Das Resultat ist also a^7. Mit dieser Regel war man in der Lage, nach der Multiplikation der πυθμένες das Resultat richtig in die Potenzreihe von 10 bzw. von 60 einzureihen.[2]

Ein Apollonios-Kommentar von Pappos gibt über die Multiplikation der πυθμένες und die dann noch notwendige Einordnung an den richtigen Platz seines Myriadensystems eingehende Auskunft.[3] Es soll z. B. $200 \cdot 300 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot \mathrm{E}$ berechnet werden. Als Produkt (στερεός) der πυθμένες ergibt sich $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 144$. Da $100 \cdot 100 = 10\,000$ (nach Archimedes: Abstand von 1 ist $3 + 3 - 1$) ist, folgt als Ergebnis 144 einfache Myriaden = 1 440 000 (ἁπλῶν οὖν μυριάδων ρμδʹ ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν ΑΒΓΔΕ στερεός). In einem anderen Beispiele wird das Produkt aller Zahlenwerte der Buchstaben der Verse: Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι und Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου bestimmt. Im letzten Fall sind die Wurzelzahlen: 4, 8, 5, 1, 5; 1, 5, 1, 4, 5; 9, 5, 1; 4, 8, 4, 8, 3, 5, 1, 7, 2; 1, 3, 3, 1, 7, 2, 1, 1, 8, 7, 4. Ihr Produkt ergibt: 2 1849 4402 5600 0000, also $2 \cdot 10000^4 + 1849 \cdot 10\,000^3 + 4402 \cdot 10\,000^2 + 5600 \cdot 10\,000^1$. Dies muß jetzt noch mit $10\,000^5 \cdot 100$ multipliziert werden, da das Produkt der in den Zehner- und Hunderterzahlen enthaltenen Potenzen 10^{22} ergibt. Das Ergebnis ist demnach:

$$218 \cdot 10\,000^9 \text{ (Myriaden 9. Ordnung)} + 4944 \cdot 10\,000^8 \text{ (Myriaden 8. Ordnung)} + 256 \cdot 10\,000^7 \text{ (Myriaden 7. Ordnung).}$$

Es ist nicht unmöglich, daß die in der verlorenen Logistik des

[1] Vgl. 8 Tage = 1 Woche, quinze jours = 14 Tage.
[2] Z. B. $20 \cdot 300$; $2 \cdot 3 = 6$; $10 \cdot 100 = 1000$; also $20 \cdot 300 = 6000$.
[3] Pappos I S. 2–29.

Magnes[1] enthaltenen Myriadenrechnungen sich mit demselben Problem befassen.

Nach all dem, was wir aus den Quellen in Erfahrung bringen können, besteht wohl das Wesen der griechischen Multiplikationsmethode gegenüber der ägyptischen in der Bildung von Teilprodukten (in der Reihenfolge vom Großen zum Kleinen, also von links nach rechts) nach dem Schema: $(a_1 + b_1 + c_1 \ldots) \cdot (a_2 + b_2 + c_2 + \ldots) = a_1a_2 + a_1b_2 + a_1c_2 + \ldots + b_1a_2 + b_1b_2 + b_1c_2 + \ldots c_1a_2 + c_1b_2 + c_1c_2 \ldots$, wobei außer der Beherrschung des kleinen Einmaleins (oder der Verwendung der entsprechenden 1 · 1 -Tabelle) die genaue Bestimmung des Stellenwertes eine Hauptrolle spielen mußte.

Die bei der Multiplikation auftretenden Termini fußen hauptsächlich auf zwei Gedanken: Entweder nehmen sie Bezug auf das oben geschilderte wiederholte Aneinanderlegen der einzelnen Summanden oder sie knüpfen an die Geometrie an, wobei sich „Seite, Rechteck, Quadrat, Würfel" usw. zu Fachwörtern für „Faktor, Produkt, zweite und dritte Potenz" usw. herausbilden. Folgende Termini finden sich in den Texten:

Multiplikation: πολλαπλασιασμός, πολλαπλασίασις, πολυπλασιασμός, παραβολή;
speziell: διπλασίασις, διπλασιασμός, διπλασιότης.
Multiplizieren: πολλαπλασιοῦν, πολυπλασιάζειν, πολλαπλασιάζειν;
mit Akkusativ: ἐπί, μετά, διά, πρός; συμπολλαπλασιάζειν, ἐπαναλαμβάνειν ἐπί, συντιθέναι, συνάγειν, ἐπιμετρεῖν, καταμετρεῖν;
allgemeine Wendungen: ἀριθμεῖν ἐπί, ποιεῖν ἀριθμὸν ἐπί τινα, γίγνεσθαι ἐπί τινα;
ἐπί ohne Verbum: τὸ δὲ ἐπὶ τόδε, τὶ ἐπί τι;
speziell: verdoppeln usw.: διπλασιάζειν, δὶς γενόμενος, τριπλασιάζειν, τετραπλασιάζειν, πενταπλασιάζειν;
ins Quadrat erheben: δύνασθαι τὰ Α ἐφ' ἑαυτά;
in die 3. Potenz erheben: κύβον πολλαπλασιάζειν.
Multiplikand: ὁ πολλαπλασιαζόμενος.
Faktor: οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους, πλευραί, εὐθεία δυνάμει τὸ χώριον, ἡ δυναμένη τὸ χώριον.

[1] Siehe oben S. 370 und 465.

Produkt: τὸ γινόμενον (ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ), ὁ γενόμενος, κεφάλαιον, τὸ συντελούμενον, ὁ ὑπὸ ἀριθμός, τὸ ὑπό, ὁ ὑπὸ Α καὶ Β περιεχόμενος ἀριθμός, ὁ ἐξ, χώριον;
ab = ἐπίπεδος πολλαπλασιασμός, ἑτερομήκης ἀριθμός;
$a \cdot b$ = ἐπίπεδος;
a^2 = τετράγωνος ἀριθμός, τετράγωνος ἰσόπλευρος ἀριθμός, τὸ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον, τὸ ἀπό, ὁ ἀπό, δύναμις,
a^3 = στερεὸς ἀριθμός, [ὁ ἐξ αὐτῶν στερεός] κύβος;
a^n = στερεὸς ἀριθμός, ὁ ἐξ αὐτῶν στερεός.

Für die niederen Potenzen hat Diophant besondere Namen:
Δ^y = δύναμις, K^y = κύβος, $\Delta^y\Delta$ = δυναμοδύναμις,
ΔK^y = δυναμόκυβος, K^yK = κυβόκυβος.

Produkt als Vielfaches: πολλαπλάσιος, διπλάσιος, τριπλάσιος.

Ferner sind hier noch zu nennen:

Die Zahladjektiva: ἁπλοῦς.

Die Zahladverbien: ἅπαξ, δίς, τρίς.

Die Division.

Bei der methodischen Einführung der Division wird nach moderner Auffassung großes Gewicht auf die Unterscheidung zwischen Teilung und Messung gelegt. Bei jener wird eine benannte Größe in eine bestimmte Anzahl von Teilen mit gleicher Benennung eingeteilt, während bei einer Messung ein Vergleich zwischen zwei gleichbenannten Größen angestellt wird. Wollen wir etwas über die Beziehungen dieser beiden Divisionsarten erfahren, so müssen wir auf die beim Auftreten einer Division vorliegenden psychologischen Vorgänge eingehen.

Treten Teilungsprobleme auf, was in jedem geordneten Wirtschafts- und Staatswesen beim Verteilen von Lebensmitteln, Land, Beute, Erbschaften usw. schon früh anzunehmen ist, so liegt es nahe, vorerst praktische Durchführungsmethoden mit den bereits geläufigen Rechenoperationen auszubilden. Erst viel später konnte ein selbständiges Verfahren mit eigener Terminologie geschaffen werden. Ein sofortiges Teilen in eine beliebige Anzahl gleicher Teile ist eine schwere Aufgabe. Wie soll man z. B. einen Stab rasch in 5 oder einen Verpflegungsvorrat in 27 gleiche Teile teilen? Konnte oder wollte man nicht schon vorher die genaue

Größe des zu teilenden Gegenstandes durch Ausmessen oder Auswiegen feststellen, so blieb nichts übrig, als nach dem Augenmaß die Teilung vorzunehmen. Schon der δαιτρός bei Homer, der jedem seinen gebührenden Teil Fleisch vorzuschneiden hatte, mußte seine Kunst (δαιτροσύνη) wohl verstehen.[1] Nur eine Teilung macht eine Ausnahme, nämlich die Halbierung. Es ist verhältnismäßig leicht, mit dem Augenmaß die Mitte anzugeben und hier den Gegenstand „abzubrechen" oder, wenn ein Falten möglich ist, ihn in der Mitte umzubiegen. So ist es erklärlich, wenn die Einteilung antiker Maße vielfach auf dem dichotomischen Prinzip beruht (1/2, 1/4, 1/8, 1/16 . . .), das sich in den Noten der Musik bis auf den heutigen Tag erhalten hat.

Schwieriger wird schon die Teilung durch 3; soll man aber eine sofortige Teilung in 5, 6, 7 usw. Stücke vornehmen, so führt das Problem auf Schwierigkeiten, denen mit anderen Mitteln zu Leibe gegangen werden muß.

Was muß z. B. geschehen, wenn 135 Nüsse unter 5 Leute verteilt werden sollen? Bei dieser als Teilung auftretenden Division 135 Nüsse: 5 kann ein sofortiges Zerteilen nach dem Augenmaß nicht statthaben. Macht man aber aus der Teilung eine Messung, indem man jedem der 5 Empfänger zuerst eine Nuß gibt, dann wieder eine und so fort, bis der Vorrat erschöpft ist, so wird durch Abzählen der Zahl, welche angibt, wieoftmal jeder eine Nuß bekommen hat, also durch die Messung 135 Nüsse: 5 Nüsse, die Aufgabe leicht erledigt. Das Resultat 27 sagt uns, daß jeder 27mal je eine Nuß, also im ganzen 27 Nüsse, erhalten hat. Es ist klar, daß ein gewandter Verteiler, um rascher fertig zu werden, auch 2 und mehr Nüsse, soviel er eben übersehen kann, auf einmal austeilt. Die Durchführung der Division geschieht also hier als fortgesetzte Subtraktion einer benannten Zahl von einer gleichbenannten größeren bis zum Erschöpfen des Vorrates. Stellen wir uns auf die Seite der Empfänger, so zeigt sich die bisherige Subtraktion als die Addition $\underbrace{5}_{1}+\underbrace{5}_{2}+\underbrace{5}_{3}+\underbrace{5}_{4}\cdot\cdot\underbrace{5}_{27}$, die zu Ende ist, wenn der Gesamtvorrat bei den Empfängern sich befindet. In dieser additiven Weise erledigt die ägyptische Division das Teilungsproblem. Es heißt dort: Rechne mit 5 so lange, bis du 135 findest.

[1] Über den sagenhaften Palamedes, dem man nachrühmte, daß er schwierige Verteilungen zustande gebracht habe, s. oben S. 380.

Sowohl die Terminologie als auch die praktische Ausführung der Division bei primitiven Völkern bestätigen die oben gemachte Feststellung, daß die Division hauptsächlich als Messung erledigt wird; auch ein Versuch, den man mit Kindern in einem Alter vornehmen kann, in dem sie noch nie etwas von dem Vorhandensein zweier Divisionsarten gehört haben, wird dasselbe zeigen. Man kann eben nicht anders dividieren als auf die geschilderte Weise. Zwar kann man vereinfachende Algorithmen bilden,[1] letzten Endes geht aber jedes Verfahren, auch unsere heutige Methode, auf diese subtraktive Erledigung hinaus. Nur nützen wir die Kenntnis des Einmaleins aus und nehmen möglichst viel auf einmal weg, wobei auch die in der dezimalen Schreibung liegenden Vorteile die Rechnung wesentlich verkürzen.

Bei der Division ergibt sich eine Schwierigkeit dann, wenn die Verteilung mit einem Rest endigt, der auch noch zu verteilen ist. Hat man 18:7 zu berechnen, so erhält jeder der Empfänger 2. Bei der noch fehlenden Division „des Kleineren durch das Größere" 4:7 entsteht der „Bruch", und zwar ist der „Stammbruch" (hier 1/7) Träger der weiteren Rechnung.[2] Jede der 4 Einheiten wird in 7 Teile geteilt. Ein solches Siebtel bildet eine neue Einheit, von der jeder Empfänger noch 4 bekommen kann.

Der Begriff des Bruches ist so enge mit dem der Division verbunden (μέρος und μερίζειν), daß z. B. die Babylonier (bzw. Sumerer) diese als Bruchrechnung erledigten.[3] Auch bei den Griechen steht statt „Dividiere m durch n" häufig: „Nimm ein n-tel von m", so daß die Ansicht entstehen konnte,[4] daß diese über-

[1] Der Babylonier rechnet 3A/5 als 3A · 1/5, wobei der Bruch 1/5 vermittels einer Tabelle in die sexagesimale Entwicklung 0;12 übergeführt wird, was aus der Division eine Multiplikation mit dem reziproken Wert macht. Aber eine Verteilung ist es immer noch, nur wird jetzt zuerst unter die Empfänger 1 A verteilt, wobei jeder A/5 erhält; der ganze Anteil ist demnach 3A/5.

[2] Die ägyptische Mathematik unterscheidet zwei Arten der Division, die Division des Größeren durch das Kleinere und die des Kleineren durch das Größere. Auch in der griechischen und indischen Literatur kann man die gleiche Gliederung feststellen.

[3] Siehe Fußn. 1.

[4] Friedlein S. 79.

haupt nicht den Begriff des Quotienten, sondern nur den des Bruches gehabt hätten.

Inwiefern entspricht nun in der griechischen Logistik der quellenmäßige Befund den geschilderten psychologischen Vorgängen? Wenn noch Diophant erklärt,[1] daß die Division jedem klar ist, der die Multiplikation beherrscht (καὶ τῶν πολλαπλασιασμῶν σοι σαφηνισθέντων, φανεροί εἰσιν οἱ μερισμοί . . .), so dürfen wir nicht erwarten, daß sich schon bei Homer Termini für diese Rechnungsart gebildet haben. Es finden sich nur die allgemeinen Ausdrücke für „teilen", „zerschneiden" (δαίειν, δαΐζειν, διαιρεῖν). Die späteren wichtigen Fachwörter μερίζειν, μέρος sind noch nicht entwickelt. Nur der diesen zugrunde liegende Stamm ΜΕΡΩ kommt bei μοῖρα und dem dazugehörenden Verbum (διεμοιρᾶτο, ἔμμορε, εἵμαρτο) vor. Man sieht hier wieder die Verteilung als Grundlage der Division; denn die μοῖρα ist der Anteil, der jedem beim Zumessen, beim Verteilen der Brote, des Essens (hier auch δαίς von δαΐζειν), des Lebensloses zugeteilt wird, und zwar so, wie er es gerechterweise verdient (vgl. merere und ἀπ-αμείρεται).[2] Auch μετρεῖν = „messen" bzw. μετρεῖσθαι = „sich zumessen lassen" ist eng mit dem Gedanken der Division verbunden. Der Teil, der durch die Teilung des Ganzen entsteht, also der Stammbruch, muß seinerseits wieder das Ganze messen. Euklid hat dies folgendermaßen ausgesprochen:[3] μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Bei Diophant heißt die Division überhaupt nur μέτρησις. So soll in einer Aufgabe[4] $x^2-6\frac{1}{2}x$ durch x dividiert werden. Der Text sagt: ἡ μέτρησις · μετρεῖ ϛ ᾱ κατὰ ϛ ᾱ ⋔ $\overset{o}{M}$ ϛ̄ L′. Es mißt (dividiert) also x die Differenz $x^2-6\frac{1}{2}x$ nach je $(x-6\frac{1}{2})$ Teilen. An anderen Stellen ist μετρεῖ ausgelassen. Es heißt z. B.[5] nur: ἡ μέτρησις · ϛᾱ κατὰ ϛ ᾱ ⋔ $\overset{o}{M}$ ιδ̄. Während bei der vollständigen Fassung Heiberg mit „dividit A secundum B" übersetzt, heißt es bei der Division (x^2-14x): x „factores, x et $x-14$". Dies ist

[1] Diophant I S. 14.
[2] Homer ρ 322 = ἀπαίνυται.
[3] Euklid V. Buch, Def. 1.
[4] Diophant I S. 310, 312.
[5] Diophant I S. 404, 406.

mathematisch freilich richtig, da die Multiplikation identisch ist mit einer Umkehrung der Division, aber der Text spricht ausdrücklich von einer Messung (μέτρησις).

Die Division wurde also als „Messen", als „Vergleichen" empfunden, wie es in den Worten ἀντισυγκρίνειν und ἐν συγκρίσει bei Nikomachos[1] zum Ausdruck kommt. In der einen Stelle heißt es: χρὴ ἀντισυγκρίνειν τοὺς προτεθέντας ἀριθμοὺς καὶ τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀεὶ ἀφαιρεῖν, ὁσάκις δυνατόν. Wir sehen also ein ganz dem unseren entsprechendes Verfahren, wenn man von der Ausnützung der dezimalen Positionsschreibung absieht.

Rhabdas gibt auch eine klare Definition der Division. Er sagt:[2] μερισμὸς δὲ ἔστιν, ὅταν μερίζοντες ἀριθμὸν πρὸς ἀριθμὸν σκοπῶμεν τί ἑκάστῃ μονάδι τοῦ, παρ' ὃν μερισμὸς γίνεται, ἐπιβάλλει. οἷον ὅταν τὸν ιβ̄ ἐπὶ τὸν γ̄ μερίζοντες σκοπῶμεν τί ἑκάστῃ μονάδι τοῦ γ̄ ἐπιβάλλει · ἐπιβάλλουσι δὲ δ̄ μονάδες, ἐπειδὴ καὶ τρὶς τὰ δ̄, ιβ̄. Das Teilen ist also wirklich ein „Zuteilen", ein „Zumessen". Es wird bestimmt, was jeder Einheit des Divisors (= Zahl der Empfänger) zukommt, zufällt, wobei das Verteilen „über eine bestimmte Anzahl hin" (παρά, πρός, εἰς,[3] ἐπί mit Akk.) erfolgt. Auch für die Division des Kleineren durch das Größere wird dieselbe Definition gegeben und als Beispiel 4:16 angeführt[2] (οἷον ὅταν τὸν δ̄ ἐπὶ τὸν ις̄ μερίζοντες, σκοπῶμεν, τί μέρος μονάδος ἑκάστῃ τοῦ ις̄ ἐπιβάλλει). Man muß dabei sehen, nämlich durch Vergleichen, welcher Teil von 1 auf jede der 16 Einheiten trifft.[4] (ἐπιβάλλει δὲ τέταρτον, ἐπεὶ τετράκις τὰ δ̄, ις̄).

Die des öfteren – wie eben bei Rhabdas – am Schluß der Division durchgeführte Multiplikationsprobe zeigt den engen Zusammenhang der beiden Rechnungsarten. Die Division wird sogar als Addition bzw. Multiplikation aufgefaßt, was dem additiven ägyptischen Divisionsverfahren entspricht. Im Pariser Codex 453 heißt es in dem Kapitel: τί ἐστι μερισμός[5] folgendermaßen:

[1] Nikomachos 1, S. 34, 39.
[2] Tannery, M. sc. IV S. 98.
[3] Bei der Division 12:6 = 2 sagt der Grieche 12 in 6 (Anteile eingeteilt) gibt 2. Wir sagen meist: 6 in 12 (geht) zweimal.
[4] Die dritte Divisionsart: Gleiches durch Gleiches (ἀπὸ ἴσων εἰς ἴσους) wird rasch abgetan. Rhabdas (S. 100) sagt, weil sie klar sei . . . καὶ τοῖς νηπιώδη ἔχουσιν ἔτι τὸν νοῦν.
[5] Anonymus 1, s. Diophant II S. 10 f.

τοῦτο δὲ ἦν τὸ λεγόμενον ὅτι οὐδὲν ἕτερόν ἐστι τὸ μερίσαι ἢ τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν ὃς συντεθεὶς ἐπὶ τὸν παρ' ὃν γίνεται ὁ μερισμός, οἷον ὁ $\bar{\kappa}$ ὃς εὕρηται (es handelt sich um 100 : 5 = 20), ἐπὶ τὸν $\bar{\varepsilon}$ ποιῆσαι ὀφείλει τὸ τοῦ μεριζομένου πλῆθος. Später heißt es weiter: ὥστε δεῖ ἐπιστῆσαι ὅτι μέλλων μερίζειν τι πρότερον ἀποβλέπει εἰς τὸ βάθος τῆς γενέσεως τοῦ μέλλοντος μερίζεσθαι· ἦν γὰρ ὁ πολλαπλασιάσας τὸν μέλλοντα μερίζεσθαι ἡ γένεσις αὐτοῦ. Oder mit anderen Worten: man sieht zu, ob man nicht den Dividenden als Produkt, dessen einer Faktor der Divisor ist, darstellen kann. Die Kenntnis des Einmaleins wird auch hier wieder wesentliche Dienste leisten.

Die für die Feststellung der einzelnen Zweige der griechischen Logistik so wichtige Charmidesscholionstelle spricht von den sogenannten griechischen und ägyptischen Divisionsmethoden (Ἑλληνικαὶ καὶ Αἰγυπτιακαὶ καλούμεναι μέθοδοι ἐν μερισμοῖς). Worin besteht ihr Unterschied? Für die ägyptische Divisionsmethode sehen wir vollkommen klar. Es finden sich nämlich in den Quellen zahlreiche Beispiele, die erkennen lassen, daß dort die Division noch das war, was sie nach ihrer geschichtlichen Stellung sein mußte, nämlich eine Multiplikation, die als Addition unter Verwendung dyadischer Schritte durchgeführt wurde. Das oben[1] gegebene Multiplikationsbeispiel 39 . 61 sieht in seinem Schema genau so aus wie die Division 2379 : 61. Nur ist jetzt die Fragestellung geändert in: Wie oft muß ich 61 addieren, um 2379 zu erhalten? Beim Ansetzen der dyadischen Teilproduktenreihe

/1	61
/2	122
/4	244
8	488
16	976
/32	1952

mußte nur vor der Zeile abgebrochen werden, die ein Teilprodukt größer als 2379 ergeben hätte. Weiterhin müssen aus den vorhergehenden Teilprodukten (in der 2. Kolumne) diejenigen ausgewählt werden, deren Summe den gegebenen Dividenden ergibt, hier also die aus Zeile 1, 2, 3 und 6. Die Summe der zugehörenden Multiplikatoren — durch den Merkstrich gekennzeichnet — ergeben den gesuchten Quotienten. Dabei verwendete der ägyptische Rechner, um rascher die „zu findende" Zahl zu erreichen, auch manchmal Zehnerschritte, wie z. B. bei der Division 1120 : 80 in der Aufgabe 69 des Papyrus Rhind, die folgende Ausführung zeigt:

[1] Siehe oben S. 384.

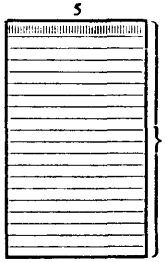
1	80
/10	800
2	160
/ 4	320.

Eine solche Division entspricht also ganz einer vom Standpunkt des Empfängers aus betrachteten Messung 1120a : 80a = 14mal. Schwierigkeiten ergaben sich erst, wenn die Division nicht aufging. Doch auch dies wurde vom Ägypter durch Erweiterung der 1. Kolumne auf Bruchteile erledigt.

In den griechischen Quellen finden sich leider keine Beispiele, die dieses ägyptische Schema aufweisen. Doch ist nicht daran zu zweifeln, daß im Charmidesscholion diese Methode gemeint ist. Bei der in den Texten zutage tretenden Übung, meist gleich das Resultat anzugeben, läßt sich die Rechentechnik in diesem Punkte im einzelnen nicht verfolgen. Die notwendigen Additionen wird man in einer Nebenrechnung (Abakus) oder bei der inzwischen erworbenen Kenntnis des Einmaleins großenteils auch im Kopf ausgeführt haben. Daß in den Erklärungen der Division aber der ägyptische Standpunkt zutage tritt, haben wir oben[1] gesehen. Ein weiterer Beleg hierfür ist eine andere Stelle des Pariser Codex 453, in der es heißt:[2] τοῦτο γὰρ τέλος τοῦ μερισμοῦ, τὸ εὑρεῖν ἀριθμόν τινα ὃς πολλαπλασιαζόμενος ἤτοι συντιθέμενος ἐπὶ τὸν παρ' ὃν γίνεται ὁ μερισμός, ποιήσει τὸ τοῦ μεριζομένου πλῆθος. Ähnlich bei Barlaam:[3] ἐὰν ὁτιοῦν παρ' ὁτιοῦν μερισθῇ ποιήσει τοσοῦτον ὅσον τὸ μερίζον (Divisor) πολλαπλασιάζον ποιήσει τὸ μεριζόμενον. Den engen Zusammenhang von Division und fortgesetzter Addition (Multiplikation) sehen wir auch bei dem Gebrauch der multiplikativen Zahladverbien in Divisionswendungen (z. B. δίχα τέμνειν) sowie bei dem Terminus παραβολή, den wir als Fachwort der Multiplikation oben gesehen haben. Da die geometrische

[1] Siehe oben S. 399.
[2] Diophant II S. 11.
[3] Barlaam II. Buch Satz 29.

Idee des Rechtecks zugrunde liegt (παραβάλλειν = längsseits legen, nebeneinander aufschichten, dann vergleichen), so ist seine Verwendung auch als Terminus für die additiv ausgeführte Division verständlich. Der schon mehrfach herangezogene Pariser Codex schreibt hierüber:[1] καλεῖται δὲ (nämlich die Division) παρὰ τοῖς γεωμέτραις παραβολὴ χωρίου · τὸ γὰρ δοθὲν χωρίον παραβάλλεται, οἷον, εἰ τύχοι, τὸ τῶν ρ̄ μ̊(= μονάδων) παρά τινα, ὑπόθου τὸν ε̄ ἀριθμόν, καὶ ποίει τὸν κ̄ ἀριθμὸν πλάτος γινόμενον τοῦ χωρίου · ἦν δὲ ὁ κ̄ ὁ ἐπιζητούμενος ὃς καὶ εὕρηται ἤδη. διὰ γὰρ τούτου ὁ μερισμὸς παντελῶς ἀνεφάνθη.



Nebenstehende Figur macht den Vorgang klar. Gibt man der Fläche 100 die eine Seite 5, dann ist nach dem Nebeneinanderlegen der 20 Flächenstreifen zu je 5×1 Fl.-E. die ganze Fläche überdeckt, so daß die Breite (πλάτος) das Ergebnis der Division 100 : 5 darstellt.

Das Nebeneinanderlegen einer Größe, bis die andere gegebene Größe erreicht ist, und das Vergleichen der beiden ist ja gerade ein „Ausmessen", das wir als Grundidee der Division erkannt haben.

Was unter der griechischen Division zu verstehen ist, die zu der ägyptischen in Gegensatz gestellt ist, wird nirgends explicite erklärt. Von Rhabdas erfährt man nur, daß die leichten und einfachen Divisionen in seinen Lehrbriefen vorausgesetzt werden. Für die schwereren wird ähnlich wie bei der Multiplikation auf die „indische" Methode verwiesen. Also gab es jedenfalls auch eine griechische Methode alter Tradition, die in den einfacheren Beispielen zutage treten muß. Tatsächlich zeigt z. B. die Ausführung der Division 72 : 13,[2] daß das subtraktive Verfahren verwendet wurde. Es heißt hier: σ̅β̅ (= 72), ἃ παρὰ τὸν ι̅γ̅ (13) μεριζόμενα, ἐκβάλλομεν $\varepsilon^{\kappa\iota\varsigma}$ (= πεντάκις) αὐτὸν καὶ μένουσιν ζ (= 7) κ.τ.λ. Da auch wir 5 . 13 von 72 abziehen, so scheint mir der von Rhabdas genannte Vorteil der indischen Methode im wesentlichen in der Ausnützung der Positionsschreibung und in der Einführung des in den Hauptpunkten auch heute noch verwendeten Schemas zu bestehen. Denn die 3 Grundgedanken, nämlich

[1] Diophant II S. 11.

[2] Tannery, M. sc. IV S. 148.

1. Vergleich von Dividend und Divisor und dadurch Bestimmung des Teilquotienten,
2. Multiplikation von Divisor und Teilquotient,
3. Subtraktion des Teilproduktes vom Dividenden,

waren auch für die griechische Division dieselben. So zeigt es auch das größere — allerdings im sexagesimalen Bruchrechnen ausgeführte — Beispiel, das uns in dem Ptolemaioskommentar des Theon von Alexandria erhalten ist.[1] In ihm wird $1515^{\circ}20'15''$ durch $25^{\circ}12'10''$ dividiert. Der Text heißt: ἔστω καὶ ἀνάπαλιν δοθέντα ἀριθμὸν μερίσαι παρά τε μοίρας (bei Halma μοῖρας, desgl. viele Drucknachlässigkeiten) καὶ πρῶτα καὶ δεύτερα ἑξηκοστά. Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ,αφιε κ′ ιε″, καὶ δέον ἔστω μερίσαι αὐτὸν ἐπὶ τὸν κε ιβ′ ι″, τουτέστιν εὑρεῖν ποσάκις ἐστὶν ὁ κε ιβ′ ι″ ἐν τῷ ,αφιε κ′ ε″.

Die ohne Schema nur im fortlaufenden Text durchgeführte Berechnung entspricht folgenden Einzeloperationen:

$$\begin{array}{l}
1515^{\circ}20'15'' : 25^{\circ}12'10'' = 60^{\circ}7'33'' \\
-1500\ (= 60^{\circ} \cdot 25^{\circ}) \\
\hline
15^{\circ} = 900' \\
\quad + 20' \\
\hline
\quad 920' \\
\quad -720'\ (= 60^{\circ} \cdot 12') \\
\hline
\quad 200' \\
\quad -\ \ 10'\ (= 60^{\circ} \cdot 10'') \\
\hline
\quad 190' \\
\quad -175'\ (= 7' \cdot 25^{\circ}) \\
\hline
\quad 15' = 900'' \\
\qquad + 15'' \\
\hline
\qquad 915'' \\
\qquad -\ 84''\ (= 7' \cdot 12') \\
\hline
\qquad -831'' \\
\qquad -\ 70'''\ (= 7' \cdot 10'') \\
\hline
\qquad 829''50''' \\
\qquad -825''\ (= 33'' \cdot 25^{\circ}) \\
\hline
\qquad\quad 4''50''' = 290''' \\
\qquad\qquad -396'''\ (= 33'' \cdot 12') \\
\hline
\end{array}$$

[1] Theon von Alexandria S. 118 f.

Hier wird die Rechnung abgebrochen, der Quotient ist also nur annähernd („ὡς ἔγγιστα“) $60^0 7' 33''$. Eine Multiplikationsprobe bildet den Schluß dieses einzigartigen Divisionsbeispieles. Das Verfahren beginnt mit dem ersten Abschätzen von Dividend und Divisor, indem $1515^0 20' 15''$ versuchsweise durch 60^0 geteilt wird (μερίζομεν αὐτὸν πρῶτον παρὰ τὸν ξ). Halma übersetzt: „nous mettons 60 pour quotient.“ Der Text zeigt aber, daß nicht $1515:25 = 60$, sondern die Umkehrung $1515:60 = 25$ genommen wurde. Da $1515:61 = 24$ ergibt, ist 61 zu groß. So wird auch die Wahl von 60 begründet: ἐπειδήπερ ὁ περὶ τὸν ξα ὑπερπίπτει. Bei den späteren Abschätzungen heißt es ähnlich: γίνεται ὁ μερισμὸς περὶ τὸν ζ, ὑπερπίπτει γὰρ περὶ τὸν η. Dann wird der Reihe nach $60^0 \cdot 25^0$, $60^0 \cdot 12'$, $60^0 \cdot 10''$ vom Dividenden abgezogen (καὶ ἀφαιροῦμεν ἑξηκοντάκις τὸν κε καὶ τὸν ιβ′ καὶ ἔτι τὸν ι″), weiterhin der neue Teilquotient $7'$ ermittelt und das Verfahren wiederholt. Die bei dieser Division durchgeführten 3 Schritte (Abschätzen, Multiplizieren, Subtrahieren) sind dieselben wie in dem genannten Beispiel[1] bei Rhabdas und entsprechen genau dem ἀντισυγκρίνειν und ἀφαιρεῖν ὁσάκις δυνατόν bei Nikomachos. Auch Barlaam[2] spricht es in ähnlicher Weise aus. Er sagt bei der Division $A:B = \Gamma$: ὁσάκις ἔνεστι ἐκβαλεῖν τὸ Β ἀπὸ τοῦ Α τοσαῦται μοῖραι (= Einheiten) κείσθωσαν ἐν τῷ Γ.

Sonst ist in der mathematischen Literatur wenig über die Ausführung der Division zu erfahren. Wo solche auftreten, ist meist das Resultat sofort angegeben, so daß sich nicht sagen läßt, ob ein additives oder subtraktives Verfahren eingeschlagen wurde.

Häufig wurde auch aus der Division eine Bruchrechnung gemacht. Statt 40 durch 8 zu dividieren heißt es[3] λαβὲ τῶν μ̄ τὸ ὄγδοον. Besonders zahlreich sind die Beispiele aus dem Papyrus Akhmîm. In Nr. 9 steht für $4\ 1/3 : 11$ τῶν δ γ″ τὸ ια″. Das Resultat wird sofort mit den Worten ὡς εἶναι γ″ κβ″ ξς″ (= 1/3, 1/22, 1/66) angegeben. Daß umfangreiche Tabellen für diesen Zweck zur Verfügung standen, zeigt die häufige Bemerkung ἐν ποίᾳ ψήφῳ = in welcher Tabelle kommt die zu teilende Zahl vor? In Aufgabe Nr. 18 soll 1/187 von 6 1/15 1/40 ausgerechnet werden. Aus einer Tafel wird 1/15 1/40 als 1/120 von 11 entnommen. Bei der weiteren Ausführung werden die Ganzen auf den „Hauptnenner“ gebracht, so daß das Problem der Bruchrechnung zuzuweisen ist.[1]

[1] Siehe S. 402.

[2] Barlaam II. Buch Satz 38. Ähnlich bei Maximos Planudes (S. 19): ποσάκις ὁ ἐλάττων ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεῖσθαι δύναται.

[3] Heron IV S. 210.

Aus dem geschilderten gesamten Quellenbefund halte ich es für gesichert, daß man unter der im Charmidesscholion genannten griechischen Divisionsmethode — im Gegensatz zu der additiv durchgeführten ägyptischen — das mit der Subtraktion arbeitende Verfahren zu verstehen hat. Bei der Bildung der Teilprodukte und wohl auch beim Abschätzen standen, soweit das Kopfrechnen nicht ausreichte, Einmaleinstabellen und vielleicht auch der Abakus zur Erledigung der Nebenrechnungen zur Verfügung.

Zusammenstellung der Fachwörter.

Sie nehmen meist Bezug auf das Vergleichen, das gegenseitige Verhalten. Weitere Ausdrücke verwenden den Begriff des Teilens = Auseinandernehmens, oder sie sind auf geometrischer Grundlage aufgebaut.

Division:	μέτρησις, σχέσις (vgl. λόγος), παραβολή, μερισμός, διαίρεσις, τμῆμα.
Dividieren:	μετρεῖν, μετρεῖν ὑπό (z. B. τετράδος), θεωρεῖν καὶ ἐπιβάλλειν (τουτέστι μερίζειν), ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρεῖν, ἀντισυγκρίνειν, παραβάλλειν τι πρός τι, εἶναι ἐν, μερίζειν τι παρά τι, πρός, ἐπί (Akk.), ἐπί (Dativ), εἰς; διαιρεῖν παρά, εἰς, πρός; εἰς n-tel ποιεῖν (z. B. εἰς ἕβδομα) τὸν μερισμόν, λαμβάνειν τὸ ζ′, χωρίζειν εἰς, nur εἰς: n εἰς m.
Halbieren:	διέχειν δίχα, διαιρεῖν μέσον, διχάζειν.
Dividend:	ὁ μεριζόμενος ἀριθμός, τὸ μεριζόμενον.
Divisor:	ὁ ἀριθμὸς τοῦ μερισμοῦ, ὁ ἀριθμὸς παρ' ὃν ὁ μερισμὸς γίνεται, ὁ μερισμός, τὸ μερίζον.
Quotient:	μέτρον, τὸ πηλίκον, μερισμός, ὁ ἐκ τοῦ μερισμοῦ, ὁ ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ, ὁ ἀποβαίνων ἀριθμὸς ἐκ τοῦ μερισμοῦ, μέρος, durch γίνεται oder ὡς εἶναι eingeleitet.

[1] Siehe unten S. 433.

Die Bruchrechnung.

Allgemeiner Überblick.

Bei der Behandlung der Division war oben schon angedeutet worden, daß eine Teilung, die nicht ohne Rest aufgeht, auf den Begriff des Bruches führt. Solche, eine weitere Teilung der Einheit verlangenden Aufgaben sind schon für die frühesten Zeiten anzusetzen. Die endgültige Erledigung dieses Problemes, die allen Völkern viel zu schaffen machte, brachte die erste dem Altertum vollständig gelungene Erweiterung des Zahlbegriffes über die bisherige Beschränkung auf die positiven ganzen Zahlen hinaus mit sich.

Soll eine Größeneinheit, z. B. ein Tag, eine Elle, ein Brot aus den Bedürfnissen des täglichen Lebens heraus in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zerlegt werden, so kann die Aufgabe rechnerisch eigentlich schon durch Definition erledigt werden, indem man für diesen Teil eine eindeutige Bezeichnung schafft, also einen Namen festsetzt. So entstehen die Maßuntereinheiten. Durch diese gestaltet sich die Lösung des in Frage stehenden Problems (Teilung des Kleineren durch das Größere) sehr einfach. Da nämlich der benannte Dividend 1 jetzt in kleinere Untereinheiten zerlegt ist, ist eine gewöhnliche Division des Größeren durch das Kleinere entstanden,[1] die in einfachen Fällen ohne Rest (oder unter Vernachlässigung des Restes) aufgeht, besonders wenn ein praktisches Verhältnis zwischen Einheit und Untereinheit gewählt wurde.[2] Das Umrechnen der Maßeinheiten beruht auf der grundlegenden Idee der Relativität zwischen Einheit und Vielheit, die sich für die babylonische, ägyptische und griechische[3] Mathematik quellenmäßig nachweisen läßt. Durch sie wird die Rechnung mit den Teilen zu einer Rechnung mit ganzen Zahlen einer anderen Größenordnung.

Eine Übertragung derselben Denkvorgänge auf unbenannte Zahlen gibt dem Rechner das Mittel an die Hand, in analoger

[1] Maximos Planudes sagt S. 17: ἐπεὶ ὁ μεριζόμενος μείζων εἶναι ὀφείλει τοῦ παρ' ὃν μερίζεται.

[2] Die hauptsächlichsten Reduktionszahlen waren 2, 4, 8 usw., dann 10, 100 usw., 6, 12, 60 usw. Auch 7 kam vor (bei den Ägyptern).

[3] Theon v. Smyrna S. 18. Zur „Relativität" s. Vogel 2, S. 8 ff.

Weise Untereinheiten einzuführen, die allerdings nicht wie bei den Maßen normiert sind, sondern der jeweils vorliegenden Rechnung angepaßt werden. Es ist zu erwarten, daß in dem Namen eines solchen Teiles die Anzahl der Teile sowie der Hinweis auf die Entstehung (Durchführung einer Teilung) zum Ausdruck kommt. Der grundlegende Bruch 1/n, den wir als Stammbruch bezeichnen (Zähler 1 und Nenner n) heißt bei den Griechen μέρος, μόριον oder vorerst auch μοῖρα. Er bildet den Träger der gesamten Bruchrechnung. Τὸ τέταρτον (sc. μέρος) entspricht unserer Wortbildung das Viertel (= der vierte Teil).

Das Rechnen mit Brüchen verdankt so seine Entwicklung hauptsächlich dem Rechnen mit Maßuntereinheiten. Ein schönes Beispiel für den Übergang von konkreten Brüchen (Teilmaßen) zu den abstrakten zeigt die babylonische und die römische Mathematik, wo die ursprünglichen „Gewichtsbrüche" auch auf die Teile anderer Größen übertragen werden.[1]

Handelte es sich nicht um die Teilung einer Einheit, sondern waren mehrere Gegenstände zu verteilen, die vielleicht bei einer Division als Rest übrigblieben, so genügten die Stammbrüche, um den jedem Empfänger zukommenden Teil festzusetzen. Die Aufgabe 3:7 wurde so zu der Einheitsteilungsrechnung $1:7 + 1:7 + 1:7$. Das Ergebnis war dann $1/7 + 1/7 + 1/7 =$ drei Siebtel, in unserer Symbolik als allgemeiner Bruch 3/7 geschrieben.

Die einzelnen Kulturvölker erledigten das Bruchproblem in verschiedener Weise. Die Babylonier verwendeten im Anschluß an den Aufbau ihres Maß- und Zahlensystems Sexagesimalbrüche, die vieles mit unseren Dezimalbrüchen gemeinsam haben und die heute noch in unseren Zeit- und Winkelmaßen (Minute und Sekunde: [primae] minutae [partes] und secundae [partes]) fortleben. Die Römer gebrauchten die unbeholfenen Zwölferteile der Asrechnung. Die Ägypter verstanden es meisterhaft, die bei solchen Divisionen des Kleineren durch das Größere sich ergebenden Summen gleicher Stammbrüche in eine nach abnehmenden Stammbrüchen geordnete Reihe ungleicher Stammbrüche zu verwandeln. Der Grund, warum eine Darstellung wie z.B. 7/13 als $1/13 + 1/13 + 1/13 + 1/13 + 1/13 + 1/13 + 1/13$ (die

[1] Thureau-Dangin III. Kap., über die römische Asrechnung s. auch Vogel 2, S. 22.

gelegentlich auch vorkommt) zugunsten der Form 1/2 + 1/26 zurücktreten mußte, scheint neben der noch unentwickelten graphischen Symbolik die beabsichtigte Übersichtlichkeit und Abschätzbarkeit des Resultates gewesen zu sein. Für eine solche Darstellung mußte man 2/13 als Summe verschiedener abnehmender Stammbrüche zerlegen können. Zur Erleichterung solcher Rechnungen wurden Tabellen ausgearbeitet, deren älteste die berühmte 2/n-Tabelle des Papyrus Rhind ist, in der alle diese Zerlegungen für ungerades n = 3 bis n = 101 aufgeführt waren. Wie man die vorliegenden Zerlegungen erhielt, die mit der Zeit als Norm unter der Menge aller möglichen Zerlegungen bevorzugt wurden, steht nicht vollständig fest.[1] Doch scheint dabei der Begriff des Komplementbruches, dessen Bedeutung für das Altertum Sethe[2] eingehend untersucht hat, eine wesentliche Rolle gespielt zu haben. Zu 1/7 ist 6/7 der Komplementbruch, zu 1/n gehört (n—1)/n. Da 1 = 7/8 + 1/8 ist, ist 1/7 = 1/7 von 7/8 + 1/7 von 1/8 oder 1/8 + 1/56; 2/7 ist demnach 1/4 + 1/28, wie es auch tatsächlich in der Rhind-Tabelle steht und auch später in ägyptischen und griechischen Beispielen vorkommt. Dies ist ein Zeichen dafür, daß die Ägypter nicht nur in der Stammbruchdarstellung des allgemeinen Bruches, sondern auch in der Einzelausführung dieser Zerlegungen maßgebend waren. Hieraus ergibt sich auch klar, was der Charmidesscholiast unter der Zerlegung der Brüche versteht, nämlich eben diese Umwandlung des allgemeinen Bruches 1/n + 1/n + ... + 1/n in die absteigende Reihe 1/a + 1/b + ... + 1/d (a<b<...d). Eine besondere Eigentümlichkeit der ägyptischen und babylonischen Bruchrechnung ist die Tatsache, daß auch 2/3 (τὸ δίμοιρον) als Stammbruch gilt.

Die Einführung der Stammbrüche wurde auch dadurch begünstigt, daß die Aufstellung eines Symboles für die neuen „Zahlen" besonders einfach war. Ein diakritisches Zeichen genügte, um aus der ganzen Zahl n den dazugehörenden — oder wie es bei Diophant heißt gleichnamigen (= ὁμώνυμον) — Stammbruch 1/n zu machen: Der Ägypter schrieb über der Zahl die Hieroglyphe ro = Teil (⬭, hieratisch zusammengezogen zu ●). Bei den Griechen wurden ganze Zahlen und Brüche unterschieden

[1] Siehe Vogel 2, S. 173.

[2] Siehe Sethe S. 103 ff. und Vogel 2, S. 178 ff.

entweder als n ($\bar{n}$) und n′ ($\bar{n}'$) oder als n′ und n″. Auch andere Darstellungsformen kommen vor, wobei aber zu beachten ist, daß die Abschriften der Klassiker der Mathematik erst aus einer so späten Zeit stammen, daß ein Beweis für die früher geltende Schreibung sich fast nur auf die erhaltenen Papyri stützen kann. Hier findet sich neben der Stammbruchschreibung aber auch schon sehr früh die Schreibung als allgemeiner Bruch (z. B. $\frac{7}{6}$ = unser $\frac{6}{7}$), die seit Archimedes an Boden gewinnt, vollständig aber die Stammbruchform während der ganzen Lebensdauer der griechischen Mathematik nicht zu verdrängen vermag.

Wenn bei den überlieferten Beispielen allgemeine Brüche wenig auftreten, sondern meist nur die ihnen äquivalenten Stammbruchsummen, so darf dies nicht zu der Ansicht führen, daß der allgemeine Bruch nicht bekannt gewesen wäre. Denn eine Möglichkeit, verschiedene ungleichnamige Stammbrüche in einem logischen Verfahren unter Umgehung des allgemeinen Bruches zu addieren, gibt es nicht. So mußte bei der Addition von Brüchen, die der Scholiast des Charmides ausdrücklich als ein Aufgabengebiet der Logistik bezeichnet, erst durch Einführung eines „Hauptnenners" das Resultat gefunden werden. Später konnte freilich ein solches wohl durchdachtes Verfahren zu einem mechanischen Rezept zurechtgemacht werden, das für die Praxis genügte; genau so haben auch heutzutage viele, die z. B. die algebraischen Regeln richtig handhaben, keine Ahnung mehr von den logischen Gedanken, aus denen sie entstanden sind. Daran, daß neben der Stammbruchrechnung auch der allgemeine Bruch in der griechischen Arithmetik bekannt war, ist kein Zweifel. Seit Euklid finden sich für die beiden Brucharten die Termini μέρος und μέρη, als „Teil" und „Teile" aller Größen (nicht bloß der Zahlen) voneinander deutlich unterschieden vor.

Es erhebt sich weiterhin die Frage, ob eigentlich die Griechen den Bruch als eine „Zahl" auffaßten,[1] da sie doch sonst nur die natürlichen (ganzen positiven) Zahlen als solche anerkannten, ob sie also den Begriff des abstrakten Bruches hatten. Dazu ist in erster Linie zu sagen, daß von einer modernen Definition als Zahlenpaar, das nach bestimmten Rechenregeln zu behandeln

[1] Siehe u. S. 452.

ist, keine Rede sein kann. Eine solche Definition wird dem Nichtmathematiker gar nichts sagen. Für diesen ist auch heute wie damals der allgemeine Bruch wirklich eine natürliche Zahl, die nur in einem anderen Bereich abgezählt wird, in einem Bereich, dessen Ausgangseinheit der zugehörige Stammbruch ist. Wollen wir dagegen einen beliebigen Bruch als eine Zahl in die Zahlenreihe einordnen, so müssen wir ihn in einen Dezimalbruch verwandeln oder ihn als Punkt in die Zahlenreihe zwischen die ganzen Zahlen stellen und dadurch geometrisch festhalten; in ähnlicher Weise sind auch die irrationalen Zahlen leicht faßbar. Übertragen wir aber die für die ganzen Zahlen entwickelten Rechenmethoden auf Brüche, multiplizieren wir also z. B. 6 mit dem Multiplikator 5/7, während doch eigentlich nur die Anzahl der bei der Multiplikation vorkommenden gleichen Summanden durch eine ganze Zahl angegeben werden kann, dann ist aus dem Bruch eine abstrakte Zahl geworden. Wenn in gleicher Weise der Grieche seine Rechenoperationen auf die Brüche überträgt und z. B. $\frac{1}{2}$ einhalbmal nimmt (ἡμισάκις ἥμισυ), so bezeugt dies bereits das Vorhandensein des abstrakten Bruches.

Eine eigenartige Wandlung im Gebrauch der Brüche ist hervorzuheben. Während sich in der „vorwissenschaftlichen" Zeit das Rechnen mit Brüchen für die Zwecke des täglichen Lebens entwickelte, wofür sie auch ständig in Gebrauch blieben, ist ein solches in der wissenschaftlichen Mathematik, z. B. in den Elementen des Euklid, vollständig ausgeschaltet, so daß sogar die Ansicht entstehen konnte, die Griechen hätten Brüche überhaupt nicht gekannt. Es ist richtig, daß in den wissenschaftlichen Werken die Brüche möglichst ferngehalten wurden, einmal da — wie es Junge[1] ausdrückte — die Vornehmheit der ganzen Zahlen ein philosophisch begründeter Glaubenssatz war, aber auch wohl hauptsächlich deshalb, weil gleich mit dem Auftreten des Irrationalen (z. B. im Verhältnis von Quadratseite und Diagonale) sich die Unmöglichkeit zeigte, diese neuartige Größe in einer wie bisher exakten Weise zahlenmäßig zu erfassen. Dies führte zu einer Bevorzugung der λόγοι (Zahlenverhältnisse), die einen Ersatz für den allgemeinen Bruch boten und deren Verwendung durch die

[1] Junge 2, S. 253.

geniale Eudoxische Verhältnislehre auch auf das Irrationale ausgedehnt wurde. Hand in Hand damit ging die vorläufige Verdrängung des rechnerischen, d.h. logistischen Elementes aus und ein Hervortreten der geometrischen Arithmetik in der wissenschaftlichen Mathematik. Die Brüche selbst hörten aber niemals auf, nur blieb ihre Anwendung auf die Logistik beschränkt. Was in der Praxis des Rechnens der Bruch 5/6 war (τὰ πέντε μέρη sc. von 6 bzw. τὰ πέντε τῶν ἓξ μερῶν), figuriert in der Wissenschaft als ein ὑπεπιμερὴς λόγος bzw. ἀριθμός 5 : 6. So war auch z. B. in dem ἐπιμόριος λόγος 1 1/3 vier gegenüber drei der ἐπίτριτος ἀριθμός. Schon die Namen sowie die von den Theoretikern gegebenen Definitionen zeigen, daß man letzten Endes doch an das Zerlegen einer ganzen Zahl und an das zugehörige μόριον bzw. die zugehörigen μέρη dachte, was wieder die Kenntnis des Bruches und den grundlegenden Gedanken der Relativität von Einheit und Vielheit zur Voraussetzung hatte. Im übrigen hat auch der Logos seinen Zahlenwert, seine ποσότης bzw. πηλικότης,[1] woraus seine Verwandtschaft mit einem Bruch hervorgeht.

Mit Archimedes, also gar nicht so lange nach Euklid,

[1] Ursprünglich scheint man einen klaren Unterschied zwischen dem „Wievielsein" (ποσότης) und dem „Wiegroßsein" (πηλικότης) gemacht zu haben. Die ποσότης bedeutet die Menge (πλῆθος), die Quantität, den Zahlenwert einer ganzen Zahl oder eines rationalen Verhältnisses. Da, wie wir sehen werden, die Logoi in engster Beziehung stehen zu den Brüchen, so ist es nicht verwunderlich, wenn bei Heron (z. B. IV S. 256) auch der Bruch 4 4/5 eine ποσότης hat. Demgegenüber bezieht sich die umfassendere πηλικότης auf das nicht immer rationale Verhältnis von Größen (μεγέθη) oder auf diese Größen selbst. Der Fuß, die Elle, die Strecke haben eine πηλικότης (z. B. Heron IV S. 116), Euklid spricht im Buch V Def. 3 von dem Verhältnis zweier Größen (λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις; vgl. das Scholion Euklid V S. 285: πηλικότης γὰρ πέρας τοῦ ἀπείρου συνεχοῦς καὶ ποσότης τοῦ διωρισμένου). So äußert sich auch Proklos (S. 35) und Iamblichos (2, S. 30), daß zu der Arithmetik das πόσον, zur Geometrie das πηλίκον gehöre. Später wurde dann dieser terminologische Unterschied nicht mehr aufrechterhalten. Eutokios gibt dem Logos einen Zahlenwert, der bei ihm nicht mehr ποσότης, sondern πηλικότης heißt. – In anderer Bedeutung findet sich bei Barlaam manchmal (Buch II, Satz 13) die Wendung πόσον καὶ ἡλίκον, wobei unter πόσον das Wieviel, der Zahlenwert des Bruches, nämlich der Zähler, und unter ἡλίκον die Größe des Bruchteils, also der Nenner, verstanden wird. Sonst spricht aber auch er von dem Zahlenwert (πηλικότης) des Logos (Buch V Def. 1; siehe S. 450ff.).

tritt wieder eine Wandlung ein. Wie der größte Mathematiker des Altertums sich nicht scheute, mit dem „vorwissenschaftlichen" mathematischen Experiment[1] oder mit Approximationen für die irrationalen Quadratwurzeln zu arbeiten, so hat er auch die bei den Philosophen bisher verpönte Logistik in den Bereich der Wissenschaft gezogen und wieder die allgemeinen Brüche verwendet. Etwa seit dieser Zeit ist auch eine neue Symbolik in der Darstellung des allgemeinen Bruches durch senkrechte Anordnung von Nenner über Zähler nachweisbar. Freilich wird später wieder unter dem Einfluß der neupythagoreischen Philosophie neben der geometrischen Arithmetik die Logosrechnung in den Vordergrund gestellt, in dem sie bis zum Ende der griechischen mathematischen Literatur und weiterhin in der abendländischen Mathematik bleibt. So verwendet der Barlaam, der am Abschluß der griechischen Mathematik steht, noch ausgiebig die Logoi, für die er alle notwendigen Rechenregeln aufstellt. Und doch ist bei ihm, z. B. in den Kapiteln über die Brüche (die unter Verwendung von Verhältnisgleichungen behandelt werden) an allen Ecken und Enden deutlich zu sehen, daß er doch eigentlich an die Brüche denkt und das Rechnen mit ihnen beherrscht. Besonders muß hervorgehoben werden, daß für ihn jeder λόγος einen Zahlenwert hat, der durch Division berechnet wird, wodurch allein schon der innere Zusammenhang mit dem Bruch hergestellt ist.

Im folgenden sollen die Brüche in den verschiedenen Perioden der griechischen Mathematik untersucht und die Beweise für die aufgestellten Behauptungen erbracht, die einschlägigen Termini aufgezeigt sowie die quellenmäßig nachweisbaren Methoden der Bruchrechnung behandelt werden.

Der Stammbruch.

Der hauptsächliche Terminus für den Stammbruch, den Träger der gesamten Bruchrechnung, ist μέρος, also „Teil" schlechthin; er muß in dem Ganzen ohne Rest aufgehen, wie es

[1] Siehe seine Ausführungen in der Methodenlehre (ἔφοδος), Archimedes II S. 426 ff.

*) Jhr. p 461

die oben gegebene[1] klassische Definition von Euklid schon ausspricht, die sich durch die ganze griechische und mittelalterliche Mathematik hindurch verfolgen läßt. Noch Barlaam setzt den Satz als Definition 1 an den Anfang des 1. Buches seiner Logistik, das von der Addition und Subtraktion der Brüche handelt. Ein aus der Verhältnislehre übernommener Ausdruck für den Stammbruch ist das ὑποπολλαπλάσιον, das „Untervielfache", das sowohl im Ganzen wie im Vielfachen enthalten sein muß. Τὸ πολλαπλάσιον μεριζόμενον παρὰ τὸ ὑποπολλαπλάσιον μοίρας (hier = Ganze) ποιεῖ sagt Barlaam im Satz 34 des 2. Buches. Ein Synonym zu μέρος ist μόριον.[2] Besondere Bezeichnungen existieren noch für den Stammbruch mit geradem oder ungeradem Nenner (μέρος ἀρτιώνυμον und περιττώνυμον[3] sowie für den nach der entsprechenden ganzen Zahl benannten Stammbruch. So gehört zu 7 das μέρος ὁμώνυμον (auch παρώνυμον) 1/7. Barlaam definiert:[4] πᾶν μέρος παρώνυμον ὀνομάζεται ἀπ' ἀριθμοῦ ὃς τοσαύτας ἔχει μονάδας, ὁσάκις αὐτὸ τὸ μέρος καταμετρεῖ τὸ ὅλον; da 7 sieben Einheiten hat, geht 1/7 in 1 siebenmal, also ist 1/7 das zu 7 παρώνυμον μέρος. Schon Diophant verwendet diese Bezeichnung auch in bezug auf die Unbekannten und ihre Potenzen. Er sagt:[5] ὥσπερ δὲ τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρομοίως καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς, τοῦ μὲν τρία τὸ τρίτον, τοῦ δὲ τέσσαρα τὸ τέταρτον, οὕτως καὶ τῶν νῦν ἐπονομασθέντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρομοίως τοῖς ἀριθμοῖς· τοῦ μὲν ἀριθμοῦ (x), τὸ ἀριθμοστόν $\left(\frac{1}{x}\right)$, τῆς δὲ δυνάμεως (x^2), τὸ δυναμοστόν, $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ κ.τ.λ.

Eine ältere Bezeichnung für „Teil" und „Stammbruch" ist μοῖρα. Es heißt z. B. bei Homer:[6] παρῴχηκεν δὲ πλέων νὺξ τῶν δύο μοιράων, τριτάτη δ' ἔτι μοῖρα λέλειπται d. h. 2 Teile (= 2/3) der Nacht sind vorbei, der dritte Teil bleibt noch übrig. Barlaam gibt eine Definition der μοῖρα: παντὸς ὡρισμένου μεγέθους πρώτη

[1] Siehe oben S. 398.

[2] Bei Diophant I S. 6; bei Barlaam, bei Rhabdas. Über ein verlorengegangenes Buch über die Brüche (τὰ Μοριαστικά) siehe Diophant II S. 72.

[3] Barlaam I. Buch, Def. 5 u. 6.

[4] Ebenda I. Buch Def. 3.

[5] Diophant I S. 6.

[6] Homer K 253 f.

εἰς ἴσα ὁσαδηποτοῦν διαίρεσις, εἰς μοίρας λέγεται εἶναι.[1] Dabei ist ein wichtiger Bedeutungswandel eingetreten; denn diese μοῖραι, die hauptsächlich als Teile der Peripherie oder des Durchmessers (bei Ptolemaios auch τμήματα[2]) auftreten, werden nämlich für die weitere Einteilung als Einheiten (unsere „Grade") aufgefaßt, wie es in der Fortsetzung der Barlaamschen Definition zum Ausdruck kommt: καὶ ἓν μὲν ἁπλῶς καὶ ὅλον, τὴν μοῖραν καλῶ· μέρη δὲ καὶ μέρος τὰ τῆς μοίρας, ἢ τὸ τῆς μοίρας. Also die Einheit heißt jetzt μοῖρα, der allgemeine Bruch und der Stammbruch sind die Teile oder der Teil der μοῖρα. Hier ist deutlich die Relativität zwischen Einheit und Vielheit sichtbar, die schon bei dem ersten Auftreten logischer Unterteilungen in Erscheinung trat und die erst das Rechnen mit Brüchen ermöglichte.

Die griechischen Namen für die einzelnen Stammbrüche werden wie im Deutschen unter Verwendung der Ordnungszahlwörter gebildet, wenigstens vom Nenner 3 aufwärts. Das Wort für $^1/_2$, das auch sonst eine Sonderrolle spielt, ist ältestes Sprachgut (ἥμισυ = sēmi = ahd. sâmi). Die Bezeichnung τὸ τρίτον μέρος, τὸ τέταρτον μέρος oder τὸ τεταρτημόριον[3] zeigen an, daß das Ganze in 3, 4 usw. Teile eingeteilt ist. Diese Abzählung durch die Ordinalia ist für den Aufbau einer Bruchrechnung von ausschlaggebender Bedeutung. Wenn 1/4 als der vierte Teil bezeichnet wird, so müssen 3 andere vorhergehen, das Viertel muß also das letzte in einer Gruppe von 4 gleichartigen Gliedern sein. Wird nun dieses Viertel von der Einheit 1 genommen, so ist offensichtlich, daß eben diese 1 in eine Vielheit von 4 Untereinheiten geteilt wird, deren Größe man dadurch bezeichnet, daß man eine, und zwar die letzte der vier nennt. Ein Viertel ist also ursprünglich der letzte von 4, ein Fünftel der letzte von 5 Teilen usw. Hieraus erklärt sich einmal die hervorragende Rolle, die der Stammbruch im ganzen Altertum spielt. Weiterhin ergibt sich aber auch, daß die dem Stammbruch 1/n vorhergehenden (n—1) Teile zusammengehören; sie bilden den zum Stammbruch gehörenden Komplementbruch, der jenen zu der Einheit ergänzt. Der sprachliche Befund, der besonders für die ägyptische Mathe-

[1] Barlaam II. Buch, Def. 1.
[2] Ptolemaios I S. 31.
[3] Aristarch S. 352.

matik von Sethe[1] eingehend klargelegt wurde, bestätigt dies alles einwandfrei. Hervorzuheben wäre nur noch, daß auch für die babylonische Mathematik dasselbe gilt. Auch hier ist z. B. igi -6- gala der Teil,[2] der die Gesamtheit der 6 Teile „vollmacht". Die Bezeichnung 2 Drittel ist also ursprünglich sinnlos, da unter 3 Größen nur eine die letzte, die dritte sein kann. Erst als man den Stammbruch als eine kleinere Einheit und somit als Anfang einer neuen Reihe von natürlichen Zahlen einer kleineren Ordnung auffaßte, hat sich aus der naturgegebenen Stammbruchrechnung, die nur Stammbrüche und Komplementbrüche kannte und ausdrücken konnte, die umfassendere Rechnung mit allgemeinen Brüchen entwickelt.

Bei der schriftlichen Wiedergabe der Stammbrüche wird ursprünglich der vollständige Name in Worten gegeben. 1/100 ist bei Archimedes[3] τὸ ἑκατοστὸν μέρος, 1/200 = διακοσιοστὸν μέρος, dann auch ohne μέρος: 1/3 = τὸ τρίτον, 1/42 = τὸ τεσσαρακοστόδυον. Diese umständliche Schreibung wird durch Verwendung der Buchstabenziffern vereinfacht, denen noch bei Diophant die grammatikalischen Endungen angehängt werden. So ist 1/3 = τὸ γ^{ov} μέρος oder nur τὸ γ^{ov}. Am häufigsten findet sich aber zur Stammbruchbezeichnung der Strichindex: 1/3 = γ′, 1/4 = δ′ (schon seit Archimedes). Diophant gebraucht auch das Zeichen $^{\chi}$. Er schreibt:[4] ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν (sc. μερῶν) ἐπὶ τὸ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον γραμμὴν $^{\chi}$ διαστέλλουσαν τὸ εἶδος. Also 1/3 = γ^{χ}, 1/16 = $\iota\varsigma^{\chi}$.[5] Auch die Schreibung mit einem Doppelindex (ζ″ = 1/7, ϑ″ = 1/9) kommt vor, aber erst seit dem Auftreten der allgemeinen Brüche. Hier blieb der Gebrauch des einfachen Index für die Zähler vorbehalten, wodurch diese als ganze Zahlen erscheinen, was sie ja auch – allerdings in einem anderen Bereich – tatsächlich sind.

Auch sonst sind die Brüche in Gegensatz gestellt zu den ganzen Zahlen, die ὁλόκληρος[6] und σῶος (ἀριθμός) heißen.[7] Andere Wen-

[1] Sethe S. 91 ff.
[2] Thureau-Dangin S. 27.
[3] Archimedes II S. 230.
[4] Diophant I S. 6.
[5] Ebenda I S. 300, 164. Auch $\frac{1}{x} = \varsigma^{\chi}$, $\frac{1}{x^2} = \Delta^{Y\chi}$ (I S. 160, 380).
[6] Diophant I S. 306 und Apollonios (Eutokios) II, S. 218.
[7] Rhabdas S. 148.

dungen sind: ἀριθμὸς πλήρης καὶ μόριον, μοῖραι καὶ λεπτά,[1] μονάδες καὶ λεπτά.[2] Dieser Gegensatz kommt auch deutlich bei der Verwendung der Zahlensymbole zum Ausdruck, z. B.:

$$\bar{\gamma}\gamma^{\urcorner} = \bar{\gamma}\,\gamma' = 3\ 1/3$$
$$\bar{\gamma}\,\vartheta'' = 3\ 1/9$$
$$\varsigma\,\delta'' = 6\ 1/4$$
$$\bar{\varepsilon}\,\varepsilon'' = \varepsilon'\,\varepsilon'' = 5\ 1/5$$
$$\bar{\eta}\,\rho\nu\varsigma'' = 8\ 1/156$$

Für den speziellen Stammbruch 1/2 existiert eine Reihe von Sigeln; hauptsächlich wird verwendet: ∠[3] und ∠′[4] oder ∠″,[5] dann aber auch:

C′ (halbe Obole?)
Ↄ′[6]
ꝫ[7]
ꝫ′
S″[8]
◡[9]

Bei Diophant wird 1/2 auch wie die allgemeinen Brüche, nämlich als $\bar{\alpha}^{\beta}$ dargestellt.

Der allgemeine Bruch.

Unser allgemeiner Bruch m/n wird, wenn wir von der mathematischen Definition (Zahlenpaar, das nach bestimmten Rechenregeln verknüpft ist) absehen, in doppelter Weise definiert. Einmal als das m-fache des Stammbruches 1/n und dann als m:n, was aus der ersten Erklärung hervorgeht; denn $\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\cdots+\frac{1}{m}\right):n = \frac{1/n}{1}+\frac{1/n}{2}+\frac{1/n}{3}+\cdots+\frac{1/n}{m} = m\cdot 1/n$. So ist es auch bei den Griechen. Der allgemeine Bruch ist einmal eine Summe gleicher Stammbrüche (also m · 1/n), wenn es heißt: τὸ ἐκ συνωνύμων ὁσωνδηποτοῦν μορίων συγκείμενον.[1] An anderer Stelle[2] wird das Ergebnis der Subtraktion 2/3 — (1/9 + 1/11) als τῶν $\overline{\mu\varsigma}$ τὸ ϙϑ″ (= 1/99 von 46) bezeichnet; hier ist also der allgemeine Bruch 46/99 als das Resultat der Division 46:99 aufgefaßt, was für die Zeit der reinen Stammbruchrechnung noch die Zerlegung in eine Stammbruchreihe verlangte. Dagegen ist z. B. 3/5 als τρία πέμπτα bei Archimedes[3] bereits der wirkliche allgemeine Bruch, in dem der „Zähler" 3 eine ganze Zahl vorstellt, mit der Objekte eines anderen Bereiches, die Fünftel, abgezählt werden. Wenn man meist noch die Darstellung in einer abnehmenden Stammbruchreihe verlangte, eben die im Charmidesscholion genannte διαίρεσις τῶν μορίων, so hat das seinen Grund in dem Wunsche, sich eine gute Vorstellung von dem Wert des Ergebnisses zu verschaffen. Auch uns sagt die Stammbruchsumme 1/10 + 8/100 + 7/1000 + 5/10 000 = 0,1875 mehr als der allgemeine Bruch 3/16, für dessen Vorstellung man auch erst an die Entstehung aus einer Teilung durch 16 und an die an einem solchen Teil vorgenommene Multiplikation mit 3 wird denken müssen. Die hierdurch erreichte Abschätzbarkeit[4] und Übersichtlichkeit ist wohl ein Hauptgrund – neben der naturgemäßen Entwicklung – dafür, daß sich die Stammbruchdarstellung so hartnäckig erhalten hat, als längst schon der allgemeine Bruch geschaffen war.[5]

Daß das Vielfache eines Stammbruches identisch ist mit einer Division, deren Ergebnis der zugehörige allgemeine Bruch (bzw. eine gemischte Zahl) ist, der seinerseits wieder in eine Stammbruchsumme aufgelöst werden kann, zeigt genau eine Stelle bei Rhabdas.[6] Hier steht: καὶ γίνονται $\overline{\varphi o\varsigma}$ (576) ἕβδομα τῶν ἑβδόμων (Siebtel von Siebteln) ἤγουν τεσσαρακοστοέννατα (49tel) μερίζω οὖν τὰ $\overline{\varphi o\varsigma}$ εἰς τὰ $\overline{\mu\vartheta}$ (= 576:49) καὶ ποιοῦσι μονάδας $\overline{\iota\alpha}$ καὶ λζ μϑ^{x} (11 37/49), ἅτινα γίνονται μέρος μονάδος ω, ιβ″ καὶ ρϙς″ (= 2/3 1/12 1/196). Daß der allgemeine Bruch nicht erst eine byzanti-

[1] Archimedes III S. 260.
[2] Heron IV S. 236.
[3] Michig. Pap. 621, S. 329.
[4] Diophant II S. XLIII; Archimedes I, S. 242.
[5] Heron V S. CXXII.
[6] Hultsch I S. 173.
[7] Nesselmann S. 112.
[8] Rhabdas S. 148.
[9] Diophant II S. XLIII.

[1] Barlaam I. Buch, Satz 7.
[2] Papyrus Akhmim, Aufg. Nr. 7.
[3] Archimedes II S. 192.
[4] Z. B. Archimedes III S. 236: $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{64}\right)=\frac{15}{64}\approx\frac{14}{60}=\frac{7}{30}=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$.
[5] Siehe Vogel 2, S. 181 ff.
[6] Rhabdas S. 120.

nische Errungenschaft ist, beweist die Stelle bei Archimedes. Auch Pappos, der sonst die Brüche meist mit den λόγοι umschreibt, drückt 2/5 und 4/5 eines rechten Winkels als allgemeine Brüche aus. Es heißt da:[1] ἡ γωνία δύο πέμπτων ὀρθῆς und ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΓΔ ΕΔΓ τεσσάρων πέμπτων ὀρθῆς ἐστιν.

Nach der schon mehrfach genannten Definition von Euklid wird eine Größe (bei Nikomachos auch eine Zahl) dann μέρη (Teile) einer anderen genannt, wenn sie in dieser nicht enthalten ist. Dabei wird im allgemeinen kein Unterschied gemacht zwischen μέρη a) als Summe verschieden benannter Stammbrüche, z. B. $1/3 + 1/15$, und b) als Summe gleichartiger Stammbrüche, z. B. $1/5 + 1/5 = 2/5$. Μέρη ist also nach b) Terminus des allgemeinen Bruches, in den ja die Stammbruchreihe a) verwandelt werden kann. In beiden Fällen ist μέρη die Mehrzahl eines Stammbruches μέρος. Nur Barlaam unterscheidet genauer.[2] Den Fall a) heißt er ἑτερώνυμα μέρη, den Fall b) συνώνυμα μέρη. Unsere aus Ganzen und einem allgemeinen Bruch bestehende gemischte Zahl ist für Rhabdas ἀριθμοὶ ἔχοντες μέρη μονάδος καὶ μόρια.[3]

Sollte ein allgemeiner Bruch korrekt benannt werden, so mußte man (bevor man sich an die ursprünglich sinnlose, aber als symbolische Abkürzung mathematisch gut brauchbare Bezeichnung, z. B. $2/5 = 2$ fünfte Teile, gewöhnte) entweder die Entstehung des Bruches selbst schildern oder den allgemeinen Bruch durch additive, subtraktive oder multiplikative Verknüpfung von Stammbrüchen, zu denen auch 2/3 gehörte, darstellen, wie es sich aus zahlreichen Problemstellungen der ägyptischen und griechischen Mathematik ergibt. Im Papyrus Rhind bedeutet der Text der Aufgabe Nr. 28: „2/3 hinzu, 1/3 hinweg" $= (x + 2/3 \cdot x) - (x + 2/3 \cdot x) \cdot 1/3$ unser $5x/3 - 5x/9$.[4] Bei Aristarch[5] wird

[1] Pappos I S. 418.

[2] Barlaam I. Buch, Def. 8 und 9.

[3] Rhabdas S. 124. Auch λεπτά heißen die Brüche, z. B. Heron V S. 254. Rhabdas S. 130, Anonymus 2, S. XIV.

[4] Eine Besonderheit der Problemstellung ist, daß bei allen solchen Aufgaben der betreffende Stammbruchteil immer von dem ganzen vorhergehenden Ausdruck genommen wird. Diese „Schachtelung" findet sich auch sonst in der antiken Mathematik.

[5] Aristarch S. 352.

29/120 als $1/4 - 1/30 \cdot 1/4$ (ἔλασσον τεταρτημορίου τῷ τοῦ τεταρτημορίου τριακοστῷ) bezeichnet, und in einer noch ausführlicheren Weise beschreibt Archimedes[1] den allgemeinen Bruch durch die Angabe seiner Entstehung. Ein Winkel größer als 99/20 000 Rechte heißt hier: μείζων ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς δυσμύρια τούτων $\overline{\text{ϙθ}}$ μέρεα oder ein solcher größer als 1/203: μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς $\bar{\sigma}$ καὶ $\bar{\gamma}$ τούτων ἓν μέρος, wobei auch wieder – wie oben bei Diophant – der Stammbruch als allgemeiner Bruch mit dem Zähler 1 aufgefaßt ist. Daß Archimedes schon die übertragene Bedeutung des Stammbruches als beliebigen – nicht mehr nur letzten – Teil der Einheit kennt und daraus eine Formulierung für den allgemeinen Bruch gewinnt, zeigte das genannte Beispiel 2/5. Andere Wendungen bei Archimedes: τὰ δύο πεμπταμόρια,[2] an der gleichen Stelle τρία πέμπτα, ferner $10/71 =$ δέκα ἑβδομηκοστόμονα.[3] Diese mit Worten umschriebene umständliche Bezeichnung findet sich noch bei Rhabdas, ein Zeichen dafür, daß er wirklich alte Tradition vermittelt. Er schreibt für 14/42: δεκατέσσαρα τεσσαρακοστόδυα, für 26/5: πέμπτα $\overline{\kappa\varsigma}$.[4] Gerade hier zeigt die Darstellung von 26 als $\overline{\kappa\varsigma}$, daß die Zähler ganze Zahlen sind, mit denen die Fünftel abgezählt werden.

Der nächste Schritt zu einer vereinfachten Darstellung ist ererreicht, wenn statt der Zahlwörter auch für den Nenner die Zahlensymbole verwendet werden, wobei der Nenner vor oder nach dem Zähler stehen kann. Beispiele sind:

$$\delta^{\omega\nu}\,\bar{\varsigma} = 6/4$$

$$\rho\kappa\alpha^{\omega\nu}\ \overline{,\alpha\omega\lambda\delta\,\angle'} = 1834\tfrac{1}{2}/121$$

$$\bar{\nu}\,\kappa\gamma^{\omega\nu} = 50/23$$

$$\overline{\iota\eta}\,\mu\beta^{\varkappa} = 18/42^{5}$$

Nachdem hier die Kasusendung als Index dem Zahlensymbol des Nenners angehängt ist, ist die Lesung eindeutig; wird dagegen nur der Strichindex verwendet, so können leicht Unklar-

[1] Archimedes II S. 232.

[2] Ebenda II S. 192. Aus πέμπτα μόρια ist bereits πεμπταμόρια geworden.

[3] Ebenda I S. 236.

[4] Rhabdas S. 120 und 124.

[5] Diophant I, S. 328; 306; 56; Rhabdas S. 120.

heiten entstehen. Man kann δύο μέ bei Aristarch[1] sowohl als $2+1/45$ wie als $2/45$ auffassen; $\bar{\iota}$ οά bei Archimedes[2] soll $10/71$ bedeuten, könnte aber gerade so gut als $10+1/71$ gelesen werden. Daß $\bar{\delta}$ ιγ′ $4/13$ (und nicht $4\ 1/13$) sowie ϑ ια′ $9/11$ (und nicht $9\ 1/11$) heißen soll, kann nur der Zusammenhang ergeben. Noch größer wird die Verwirrung, wenn die Querstriche und Strichindices für Ganze und Brüche nicht unterschieden oder falsch gesetzt werden. So kommt vor $\delta = 1/4$,[3] $\bar{\iota}\delta = 1/14$,[4] γ′γ′ $= 3\ 1/3$, ιγ′ $= 1/13$,[5] λ′β′ $= 1/32$.[6] Hier scheint die unklare Schreibung mit den beiden Strichen von dem Doppelstrich ″ herzurühren, der in späterer Zeit zur Bezeichnung des Nenners verwendet wurde (s. u.) und der, wie z. B. in dem berühmten Nürnberger Ptolemaios-Codex aus dem Besitz des Kardinals Bessarion (nachmalig im Besitz Regiomontans), auch in die Mitte über die Zahl statt als angehängter Exponent gesetzt wird (z. B. $\overset{\prime\prime}{\lambda\beta} = \lambda\beta''$).

Diophant vermeidet Unklarheiten, indem er auch manchmal den Nenner mit den Worten ἐν μορίῳ oder μορίου einführt. So z. B.:

$$47/90 = \mathring{M}\ \overline{\mu\zeta} \text{ ἐν μορίῳ μονάδος } \varsigma^{\varphi}$$
$$3x/(x-3) = \text{Ϛ}\bar{\gamma} \text{ ἐν μορίῳ } \text{Ϛ}\bar{\alpha} \pitchfork \mathring{M}\ \bar{\gamma}$$
$$2x^4/(x^2-2)^3 = \Delta^Y \Delta\bar{\beta} \text{ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ } \Delta^Y\bar{\alpha} \pitchfork \mathring{M}\beta \text{ κύβῳ}$$
$$8/(x^2+x) = \mathring{M}\bar{\eta} \text{ μορίου } \Delta^Y\bar{\alpha}\ \text{Ϛ}\bar{\alpha}.^7$$

Ebenso heißt die Gleichung $x = 65/12\,768$[8] bei Diophant: γίνεται ὁ Ϛ μορίου $\overset{\alpha}{M}{}^Y$. $\mathring{M}\ \overline{,\beta\psi\xi\eta}, \overline{\xi\varepsilon}$. Wird noch weiter abgekürzt[9], wie bei $3x/(x-3) = \text{Ϛ}\bar{\gamma}$ μορ. $\text{Ϛ}\bar{\alpha} \pitchfork \mathring{M}\ \bar{\gamma}$, so ist μορ geradezu zu einem unserem Bruchstrich entsprechenden Symbol des Nenners geworden.

Während diese eindeutige aber doch umständliche Schreibung hauptsächlich bei zusammengesetzten Nennern vorkommt, findet sich in dem ältesten Diophant-Codex aus dem 13. Jahrhundert

1 Aristarch S. 386.
2 Archimedes I S. 242.
3 Papyrus Ayer S. 36.
4 Berliner Papyrus 11529, Aufg. Nr. 2.
5 Michigan Papyrus 621, S. 329.
6 Tebtunis Papyrus 87, S. 391; weiteres hierzu siehe Gerstinger-Vogel S. 49.
7 Diophant I S. 60, 286, 442, 246.
8 Diophant I S. 186.
9 Ebenda I S. 288.

eine senkrechte Anordnung des Nenners über dem Zähler. Beispiele: $65/9 = \overset{\vartheta}{\xi\varepsilon}$, $58/484 = \dfrac{\upsilon\pi\delta}{\nu\eta}$, $\dfrac{1878}{484} = \dfrac{\upsilon\pi\delta}{,\alpha\omega o\eta}$.[1] In dieser schon recht vollkommenen Darstellungsform des allgemeinen Bruches brauchte man nur Zähler und Nenner zu vertauschen, um die indische Schreibung zu erhalten, aus der dann unter Hinzufügung des Bruchstriches die unsere geworden ist. Tannery, der in seiner Diophantausgabe konsequent den Bruchstrich setzt, der seit Leonardo von Pisa im Abendlande nachweisbar ist, bemerkt dazu:[2] De transversa linea inter numeratorem et denominatorem vix quicquam diiudicari potest. Ad libitum librarii tum addita tum neglecta videtur, sicut supra numeros integros. Auch in manchen Aufgaben Herons[3] findet sich diese „indische" Bruchschreibung. Da man aber aus den Codices nichts über die im Original tatsächlich angewandte Form des Bruches schließen kann, würden wir über diesen Punkt im unklaren bleiben, wenn nicht ein Papyrus aus dem 1. Jahrhundert n. Chr. weitere Beispiele brächte.[4] Den Bruchstrich kennt der Papyrus aber nicht. Woher dieser stammt, ist nicht bekannt. Ich halte es für möglich, daß der Strich über dem Zähler nichts anderes ist als der Querstrich, der die ganzen Zahlen von den Buchstaben unterscheidet, was genau dem Wesen des Zählers als einer natürlichen Zahl in einem anderen Bereich entsprechen würde. Vielleicht muß man auch die Entstehung der neuen Schreibung aus der Exponentenschreibung in Betracht ziehen. Sie ist bei dem Diophant-Codex A nur einmal[5] nachzuweisen ($15/4 = \iota\varepsilon^{\delta}$), während sie in dem erst von Planudes redigierten Codex ständig verwendet wird. Eine Verschiebung des „Exponenten" über den Zähler bewirkt sofort die Form $\dfrac{\delta}{\iota\varepsilon}$, die bis auf die Vertauschung von Nenner und Zähler vollständig mit unserer Schreibung über-

1 Ebenda I S. 272, 306.
2 Ebenda II S. XLV.
3 Heron III S. 46, 48 u. p.; im Kenyon-Pap. II, Nr. CCLXV, 40 steht für $\dfrac{100}{128}\ \dfrac{\rho\kappa\eta}{\rho}$, s. Heath 1, I. S. 44.
4 Papyrus Vindobonensis 19996 (ed. Gerstinger-Vogel), S. 51 f.
5 Diophant I S. 78; II S. XLIV.

einstimmt. Nötig war der Bruchstrich nicht unbedingt, da ja eine Verwechselung zwischen Zahlen und Buchstaben nicht eintreten konnte. Die genannte Schreibung wird sogar für den Stammbruch verwendet. So ist bei Diophant $1/512 = \overset{\varphi\iota\beta}{\alpha}$.[1] Die Auffassung eines Bruches als Darstellung der in einem anderen Bereich gezählten Ganzen steht im Einklang mit der Übung, als Zähler selbst wieder eine gemischte Zahl anzuerkennen. Es wird z. B. $1834\frac{1}{2}/121$ als $\overset{\omega\nu}{\rho\kappa\alpha}\ \overline{,\alpha\omega\lambda\delta\angle'}$ bezeichnet, was der Rechner dann noch zu $7338/484 = \overset{\upsilon\pi\delta}{,\zeta\tau\lambda\eta}$ erweitert.[2]

Ein anderes Mittel, die allgemeinen Brüche eindeutig wiederzugeben, war die Wiederholung des Nenners:

$$2/5 = \varepsilon'\ \varepsilon'\ \overline{\beta} \qquad 5/13 = \overline{\varepsilon}\ \iota\gamma'\ \iota\gamma' \qquad 6/7 = \varsigma\zeta'\zeta'$$

oder mit Kasusbezeichnung: $24/7 = \zeta\zeta^{\alpha}\ \overline{\kappa\delta}$.[3]

Manchmal wird auch der Deutlichkeit halber das Vorhandensein von Brüchen im Gegensatz zu den Ganzen durch μονάδες — λεπτά hervorgehoben:

$$12\ 12/13 = \text{μονάδες}\ \overline{\iota\beta}\ \text{καὶ λεπτὰ}\ \iota\gamma'\ \iota\gamma'\ \overline{\iota\beta}.^{4}$$

In späterer Zeit[5] wurden die Nenner durch Doppelschreibung und Doppelindex von den Zählern unterschieden:

$$21/5 = \varepsilon''\ \varepsilon''\ \kappa\alpha' \qquad 4/5 = \delta'\ \varepsilon''\ \varepsilon''.$$

Derartige Schreibungen finden sich vor allem in byzantinischer Zeit;[6] auch Hultsch hat sie in seiner Heronausgabe übernommen.

Hervorzuheben ist noch das zur Vermeidung von Mißverständnissen gehandhabte Verfahren,[7] die Brüche in Doppelschreibung zu geben, einmal als allgemeinen Bruch und dann

[1] Diophant I S. 256.
[2] Ebenda S. 306.
[3] Heron IV, S. 238, 236; Heath 1, I S. 43; Rhabdas S. 120.
[4] Heron IV, S. 236.
[5] Es ist nicht erweisbar, ob diese in den Heronischen Codices schon vorkommende Schreibung aus der Zeit Herons selbst stammt.
[6] Heron IV S. XIV
[7] Auch für die babylonische und spätägyptische Mathematik sind Doppelformulierungen der Resultate – allerdings in anderer Weise – erhalten.

als Stammbruchsumme. So steht bei Heron[1] $\overline{\beta}\ \gamma'\ \iota\varepsilon''$ (2 1/3 1/15) ἤτοι $\overline{\beta}$ καὶ $\varepsilon'\ \varepsilon'\ \overline{\beta}$ (2 2/5); ebenso[2] 14 2/3 1/33 = 14 23/33. Bei Eutokios findet sich[3] τρία τέταρτα (3/4), τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον (1/2 1/4).

Eine besondere Rolle spielte der „Stammbruch" 2/3, der, obwohl er „in der Einheit nicht enthalten" ist, doch als μέρος galt. Für diesen ersten Komplementbruch (τὰ δύο μέρη) gab es zahlreiche Symbole, bei denen ursprünglich die Zahl 2 den Hauptbestandteil bildete:

$$\beta' \qquad \overline{\beta} \qquad \beta \qquad \beta.$$

Später scheint aus B' o' und u' dann o〉, ·〉 und ꭚ, y, ɘ, ɔ entstanden zu sein. Die Form ꭚ hat Tannery auch für den ältesten Codex des Diophant nachgewiesen.[4] Im 4. Jahrhundert findet sich ꟼ und ꟼ'[5]. Die spätere byzantinische Form ist ω, ω' (= u' oder ∠ + ς') ω'', υ''.[6] Eine singuläre Schreibung ist ∓.[7]

Allmählich verschwindet die Sonderstellung von $\frac{2}{3}$ als Stammbruch. Schon Diophant hat δύο τρίτα und Planudes erklärt ausdrücklich: δύο τρίτα ἅ ἐστι δίμοιρον.

Ein besonderer Terminus für den Zähler des allgemeinen Bruches ist für die ältere Mathematik nicht nachweisbar, während der Nenner von Diophant mit demselben Namen wie der Stammbruch (μόριον) bezeichnet wird. Die Darstellung des Bruches 5/8 durch $\overline{\varepsilon}$ μορίου ή (vgl. o. S. 420) ist nichts anderes als „5 mit dem Nenner 8". Einmal werden einige Zahlen mit demselben Nenner behandelt.[8] Es heißt da: $\overset{,\alpha\psi\iota\gamma}{M^{y}}\cdot\overset{\circ}{M},\overline{\varsigma\chi}$ μορίου τοῦ αὐτοῦ . . $\overset{\omega\nu\alpha}{M^{y}}\cdot\overset{\circ}{M},\overline{\zeta\chi}$ μορίου τοῦ αὐτοῦ · τὸ δὲ μόριον $\overset{\alpha}{M}\ M^{y}\cdot\overset{,\varsigma\tau\beta}{M^{y}}\cdot\overset{\circ}{M},\overline{\alpha\omega\kappa\delta}$; also: 17 136 600/163 021 824 und 8 517 600/163 021 824 sind die „Zahlen" 17 136 600 bzw. 8 517 600 mit dem Nenner (= μόριον)

[1] Heron IV S. 322.
[2] Archimedes III S. 124.
[3] Heron IV S. 256.
[4] Diophant II S. XLIII.
[5] Pap. Michigan 621, S. 329.
[6] Heron V S. CXXII.
[7] Heron V S. CXIX–CXX.
[8] Diophant I S. 186.

163 021 824. Eine andere Stelle[1] besagt: ἐὰν θέλῃς αὐτοὺς εἶναι ἑνὸς μορίου: „Wenn du willst, daß ein gemeinsamer Nenner vorhanden ist.“ In einer anderen Aufgabe[2] werden die Brüche $3x/x - 3$ und $4x/x - 4$ addiert. Es heißt da: οἱ ς τοῦ μέρους ἐπὶ τὰ ἐναλλὰξ μόρια πολλαπλασιασθήσονται; also „die x des Bruches (μέρος ist hier allgemeiner Bruch!), werden mit den Nennern abwechselnd oder wie wir sagen „übers Kreuz“ multipliziert.[3] Es heißt dann weiter: οἷον ς γ̄ ἐπὶ τὰ τοῦ ἑτέρου (sc. μέρους) μόρια τουτέστι ἐπὶ ς ᾱ ⋔ Μ̊ δ̄.[4] Da ja μέρος und μόριον Synonyma sind, während aber hier μέρος den Bruch, μόρια den Nenner bedeutet, so sieht man, daß die Ausdrucksweise noch recht unentwickelt ist, zudem auch noch μέρος bzw. μέρη als Nenner vorkommt:[5] τὰ μέρη πρὸς ἄλληλα. Meist wird in einem solchen Fall gleich der spezielle Nenner angegeben: αἴρω τὰ ιγ^α[6] = ich beseitige die Dreizehntel.

Die späteren Bezeichnungen sind klarer. Hier ist der Nenner die Zahl, nach der der Bruch benannt ist, z. B.:

ἀριθμὸς ἀφ' οὗ τὰ μέρη ὀνομάζεται,
ὁ ἀριθμὸς ἀφ' οὗ . . . παρονομάζεται
ἀριθμὸς ὧν τὰ μέρη παρώνυμα,[7]
τὸν ὁμωνυμοῦντα τῷ μορίῳ ἀριθμόν,
οἱ ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ τῶν μορίων.[8]

Wenn Rhabdas[9] beim Bruch 2/6 sagt, daß er den 2 Einheiten den Namen 6 gibt (καὶ καλῶ τὰς δύο μονάδας ὡς ἀπὸ τοῦ ς̄, ἕκτα δύο), so erinnert dies nicht nur an die lateinische Bezeichnung als „denominator“, sondern auch an die ägytische Ausdrucksweise:

[1] Ebenda I S. 284.
[2] Ebenda I S. 288.
[3] Tannery übersetzt nur dem Sinn nach: numeratores in denominatores invertendo multiplicabuntur. Chamber (S. 26): χιαστικῶς.
[4] D. h.: nämlich 3 x mit den Teilen (= dem Nenner) des anderen (Bruches), das ist mit x—4.
[5] Heron IV S. XV; ebenso δι' ἀλλήλων τὰ λεπτά (S. XIV) und τὰ μέρη δι' ἀλλήλων (S. XVII). Vgl. auch S. 439.
[6] Diophant I S. 206.
[7] Barlaam I. Buch Satz 7, 2 und 3.
[8] Rhabdas S. 150, 124.
[9] Ebenda S. 102.

Nijś 2 ḥnt 7 = „benenne 2 nach 7“, die schon in der 2:n-Tabelle des Papyrus Rhind sich findet und die auch sonst hauptsächlich bei der Teilung des Kleineren durch das Größere vorkommt, die ja mit einem allgemeinen Bruch identisch ist. Besonders deutlich drückt dies Planudes einmal aus.[1] Er sagt an einer Stelle, in der $\sqrt{a^2+b}$ als $a + \frac{b}{2a}$ berechnet wird, daß er dem Rest b den Namen 2a gibt, (καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν (b) ὀνόμαζε τῷ ὀνόματι τοῦ ἀπὸ τοῦ διπλασιασμοῦ τῆς πλευρᾶς (= 2a) τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ). Eine weitere Umschreibung des Nenners ist ὁ σύστοιχος ἀριθμός.[2]

In später Zeit finden sich auch Bezeichnungen für den Zähler. Dieser ist entsprechend der Auffassung des allgemeinen Bruches als Summe gleicher Stammbrüche: ὁ ἀριθμὸς τοῦ πλήθους τῶν μορίων.[3] Dasselbe zeigt eine andere Stelle,[4] in der nach dem Ergebnis der Multiplikation zweier gleicher allgemeiner Brüche gefragt wird (σκέψασθαι πόσον καὶ ἡλίκον ἐστὶ τὸ γενόμενον). In der Antwort heißt es nun, daß die „Menge“, also der Zähler ebenso wie der Nenner eine Quadratzahl sein muß: πλῆθος ποιεῖ συνωνύμων μερῶν καὶ ἰσοπληθὲς τετραγώνῳ ἀριθμῷ καὶ παρώνυμον ἀπὸ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

Einen Spezialfall der allgemeinen Brüche stellen die Sexagesimalbrüche dar. Sie sind babylonischen Ursprungs und wurden von der griechischen Astronomie etwa um —200 übernommen; sie fanden auch sonst Verwendung, wie es u. a. ein Quadratwurzelbeispiel bei Theon zeigt.[5] Ptolemaios, ferner sein ebengenannter Kommentator, dann Barlaam und Maximos Planudes sind die Hauptquellen, aus denen wir Näheres erfahren. Es war schon die Rede davon, daß die Grade (μοῖραι, τμήματα) ursprünglich Teile darstellten, die dann zu Einheiten wurden. Planudes geht bei der Erklärung der diesbezüglichen Rechenoperationen von dem Tierkreis (ζῳδιακὸς κύκλος) aus. Es ist τὸ ζῴδιον = 30 μοῖραι, der ganze Kreis also 360^0. Die weiteren Teile

[1] Maximos Planudes S. 30.
[2] Barlaam II. Buch Satz 2 u. 11.
[3] Barlaam I. Buch Satz 7.
[4] Ebenda II. Buch Satz 14.
[5] Theon von Alexandria, S. 185 f.; Tropfke II[3], S. 171 ff.

schreiten nach Sechzigerschritten fort, die alle λεπτά heißen. 1 μοῖρα = 60 λεπτὰ πρῶτα (erste Teile), 1 λεπτὸν πρῶτον = 60 δεύτερα λεπτά (zweite Teile) usw. Die Beispiele $47^0 42' 40''$ = μοιρῶν μζ μβ′μ″, $67^0 4' 55''$ = τμημάτων ξζ δ′ νε″) zeigen, daß die Angabe des Nenners durch die Indexschreibung ersetzt ist, πρῶτα = ′, δεύτερα = ″, τρίτα = ‴, τέταρτα = ⁗ usw. Die Grade selbst werden vorerst noch nicht bezeichnet. Barlaam (III, Def. 1) definiert folgendermaßen: τῆς μιᾶς μοίρας εἰς ἑξήκοντα ἴσα διαιρεθείσης, τὰ τοιαῦτα μόρια, πρῶτα λεπτὰ λέγεται. δεύτερον δὲ λεπτὸν τὸ τοῦ πρώτου ἑξηκοστὸν, καὶ τρίτον τὸ τοῦ δευτέρου, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Eine Fortführung dieses Prinzips nach der anderen Seite hätte ein vollständiges Positionssystem geschaffen, da der Übergang von den Ganzen zu den Brüchen (das „Sexagesimalkomma") sowie der Stellenwert aus den Indizes ersichtlich ist. Die Zusammenfassung von 60 Graden zu einer Sexagena erfolgte nachweislich erst im 13. Jahrhundert.[1] So ist 227 015 = 1‵‵‵ 3‵‵ 3‵ 35^0. Wenn man so auch die Null entbehren konnte, die Übersichtlichkeit wurde doch wesentlich dadurch erleichtert, daß man einen Platz frei ließ oder durch das Fehlzeichen ausfüllte. Es ist[2] $0^0 2' 7'' 0''' 4''''$ = οὐδεμία μοῖρα, δύο πρῶτα, ἑπτὰ δεύτερα, οὐδὲν τρίτον, τέσσαρα τέταρτα (sc. ἑξηκοστά) = μοιρῶν ο β′ ζ″ ο‴ δ⁗.

Es ist anzunehmen, daß die konsequente Durchführung des sexagesimalen Prinzips, das bei den Babyloniern noch mangelhaft war,[3] sowie der Gebrauch des Abakus mit seiner dezimalen Einteilung unser modernes indisches Positionssystem entscheidend vorbereitet hat.

Die Grundlage für jedes überlegte – nicht mechanisch algorithmisierte – Rechnen mit Brüchen ist das klare Erfassen der Relativität zwischen Einheit und Vielheit. Sollen Brüche addiert werden, so bringen wir sie durch Erweitern auf einen Hauptnenner. Dieser gibt an, in wieviele Teile die bisherige Einheit zer-

[1] Tropfke I³ S. 61 ff.; Thureau-Dangin S. 74.

[2] Vgl. Heath 1, I S. 45.

[2] Es fehlten die „Indizes", so daß der Stellenwert nicht eindeutig war, desgleichen in älterer Zeit das Nullzeichen. Auch die indische Schreibung war noch unvollkommen, da hier das Positionssystem auf die Ganzen beschränkt blieb, wie umgekehrt das griechische (astronomische) Sexagesimalsystem auf die Brüche. Erst mit der Einführung der Dezimalbrüche ist die höchste Vervollkommnung erreicht.

legt werden muß. Eine solche Untereinheit ist der Anfang einer neuen Zahlenreihe, in deren Bereich die Zähler als natürliche Zahlen auftreten. Schon oben sahen wir, wie die μοῖρα (Teil) zu einer neuen Einheit wurde. Besonders deutlich wird dies von Rhabdas dargelegt bei der Betrachtung der gemischten Zahl 8 2/3 1/4 1/156. Er sagt:[1] πάλιν ὁμοίως ἀναλύω καὶ τὰ τοῦ η̄ μείζονα μέρη εἰς τὸ παρακείμενον αὐτοῖς ἔσχατον μόριον, ὅπερ ἐστὶν ρνϛ″. ἕνι γοῦν ρνϛ″ ἡ μονάς. Also 1/156 ist jetzt die neue Einheit; kurz vorher ist bei 5 2/3 1/33 1/110 1/330 jetzt 1/330 ἡ μονάς, 1/110 ἡ τριάς, 1/33 ἡ δεκάς, 1/5 τὰ ξϛ, 2/3 τὰ σκ. Auch im Bruch 2/6 bezeichnet er die 2 als μονάδες, denen er den Namen Sechstel gibt. Übrigens war den Griechen die Relativität schon von den ganzen Zahlen her geläufig, wo auf dem Abakus die Eins je nach der Kolumne, in der sie stand, die verschiedensten absoluten Werte hatte. Bei Iamblichos[2] werden ausdrücklich 10, 100, 1000 als die Einheiten: δευτερωδουμένη, τριωδουμένη, τετρωδουμένη μονάς bezeichnet.

Das Verfahren des Erweiterns besteht für Ganze in einem Auflösen = ἀναλύειν in die entsprechenden Teile; soll ein Stammbruch auf einen größeren Nenner gebracht werden, so ist der neue Zähler gleich dem Erweiterungsfaktor. In einem Beispiel bei Rhabdas werden Ganze zu Brüchen erweitert. Es heißt hier:[3] ἀναλύω ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ παρακείμενον αὐτῷ μέρος, ἤγουν τὸν ε̄ εἰς πέντε διὰ τὸ ε″, καὶ γίνονταί μοι τὰ ὅλα μετὰ τοῦ ε^ου, πέμπτα $\overline{\text{κϛ}}$ usw. In einem anderen Beispiel[4] soll 3 1/3 1/14 1/42 in 42tel umgeformt werden. Der Text sagt: ἀνάλυσον εἰς τὸ ἔσχατον μόριον (1/42) καὶ τὰ μείζονα μέρη (1/3 1/14), ἤγουν εἰς τὸ τεσσαρακοστόδυον τὸ τρίτον καὶ τὸ ιδ″· καὶ γίνεται τὸ μὲν τρίτον δεκατέσσαρα τεσσαρακοστόδυα · τὸ δὲ ιδ″, τρία · καὶ τὸ τεσσαρακοστόδυον, ἓν · ἅπερ γίνονται ὁμοῦ ιη̄ τεσσαρακοστόδυα (nun wird zu 3/7 gekürzt) καὶ τὰς τρεῖς μονάδας εἰς ζζ^α, καὶ γίνονται μετὰ τῶν τριῶν ἑβδόμων τὰ ὅλα ζζ^α $\overline{\text{κδ}}$. Schon bei Heron ist das gleiche Verfahren bekannt.[5] In dem Beispiel 6 1/4 · 4 1/8 · 2 1/3, das auch in dem Pariser Codex 387[6] angeführt ist, heißt es: τὰ ϛ̄ δ″ εἰς τέταρτα

[1] Rhabdas S. 122.

[2] Iamblichos 1 S. 88.

[3] Rhabdas S. 124.

[4] Ebenda S. 120 ff.

[5] Heron V S. 94.

[6] Heron IV S. XVII.

(6¼ in Viertel) usw. Im gleichen Codex[1] wird auch 24 zu Fünfteln erweitert (πεντάκις τὰ κδ′· γίνονται ρκ′) sowie 3 1/3, 4 1/4, 5 1/5, 2 1/4, 4 1/5, 6 1/7 und 9 1/8 zu Brüchen umgeformt. Im ersten dieser Beispiele wird das Verfahren als Methode des Diophant bezeichnet.[2] Wenn dies auch nicht wörtlich zu nehmen ist, so steht doch fest, daß Diophant sie beherrschte. Denn wenn er es versteht, 3x/x—3 und 4x/x—4 auf den Hauptnenner (x—3) (x–4) zu erweitern, so ist wohl kein Zweifel, daß er auch die Stammbrüche oder erst recht die Ganzen erweitern kann. In einer anderen Aufgabe[3] werden 57/12, 17/5 und 92/12 zu 60tel gemacht. Es heißt da: ἔσται ὁ μὲν α^{ος} (= πρῶτος ἀριθμός) $\overset{\iota\beta}{\nu\zeta}$, ὁ δὲ β^{ος} $\overset{\varepsilon}{\iota\zeta}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\overset{\iota\beta}{\text{ϙ}\beta}$· καὶ ἐὰν θέλῃς αὐτοὺς εἶναι ἑνὸς μορίου, πάντα εἰς ξ^{α}, ἔσται ⟨ὁ α^{ος}⟩ $\overline{\sigma\pi\varepsilon}$, ὁ β^{ος} $\overline{\sigma\delta}$, ὁ γ^{ος} $\overline{\upsilon\xi}$. In einem anderen Fall[4] sollen bei den Brüchen 1834½/121, 469½/121 und 14½/121 die Brüche im Zähler beseitigt werden, was durch Erweitern mit 4 (auch 2 hätte genügt) geschieht. Im Text steht: καὶ ἐὰν ἐν ὁλοκλήροις θέλῃς ἵνα μὴ τὸ ∠′ ἐπιτρέχῃ, εἰς δ^{α} ἔμβαλε. Rhabdas[5] erweitert 122½/42 zu 245/84: διὰ γοῦν τὸ S″, διπλασιάζω τὰ $\overline{\rho\kappa\beta}$ S″, καὶ γίνονται $\overline{\mu\sigma\varepsilon}$ οὐκέτι τεσσαρακοστόδυα ἀλλὰ ὀγδοηκοστοτέταρτα. Das Erweitern mit 2 ist also ein διπλασιάζειν von Zähler und Nenner. In ähnlicher Weise wird τριπλασιάζειν, τετραπλασιάζειν, πενταπλασιάζειν[6] verwendet. Auch aus den Ausführungen Barlaams[7] sieht man, wie er Brüche gleichnamig macht. Dabei tritt ὁ σύστοιχος ἀριθμός als Name für den Hauptnenner auf.[8] Auch das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen erfordert die Kenntnis des Erweiterns, wie es z. B. aus dem Divisionsbeispiel bei Theon ersichtlich war. Planudes[9] spricht davon, daß eine aus der höheren Stufe entlehnte (= δανείζειν) 1 Sechzig bedeutet (ἥτις σημαίνει ϥο = 60).

[1] Ebenda IV S. XIV.
[2] Vielleicht ist auch die ganze Aufgabe $a:\frac{b}{c}$ gemeint.
[3] Diophant I S. 284.
[4] Ebenda I S. 306.
[5] Rhabdas S. 126.
[6] Ebenda S. 150.
[7] Barlaam I. Buch, Satz 11 ff.; II. Buch, Satz 1 ff.
[8] Siehe S. 425. Bei Barlaam II, 11 bedeutet σύστοιχος ἀριθμός nur Nenner. In einer anderen Bedeutung (s. unten S. 442) steht es in III, 3 (κανὼν ἐκ παρατηρήσεως).
[9] Planudes S. 25.

Auch für die umgekehrte Operation des Kürzens, das in der Division von Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl besteht, finden sich einige Beispiele. Schon bei Aristarch werden die λόγοι gekürzt:[1] 1958:20250 wird zu 979:10125 (καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν, 979:10125). Diophant[2] verändert 11007/726 durch πάντων οὖν τὸ ἕκτον in 1834½/121. Ausführlicher ist wieder Rhabdas[3] in seinen Erklärungen. Der Zweck des Kürzens ist bei ihm die einfachere und klarere Darstellung (διὰ τὸ εὐληπτότερον καὶ σαφέστερον). Er kürzt 18/42 in 3/7, ohne näher anzugeben, wie er den fraglichen Faktor findet: ἀλλ’ ἐπειδὴ τὰ $\overline{\iota\eta}$ μβ^{α} τρία ποιοῦσιν ἕβδομα ἀφίημι τὰ μβ^{α} καὶ κρατῶ (behalte) τὰ ζζ^{α}. Gleich darauf erhält er für 2/3 1/5 1/33 1/110 1/330 den Bruch 300/330, worauf er fortfährt: ταῦτα δὲ σκοπῶ ἐὰν δύναμαι ἵνα περιστήσω εἰς μειζόνων μορίων ποσότητα καὶ εὑρίσκω ὅτι ποιοῦσι δέκα ἑνδέκατα. Hier fügt er noch zum Beweise hinzu: $\bar{\lambda}$ γὰρ τλ^{α} ποιοῦσιν ἑνδέκατον ἕν, ὥστε ἀπὸ τούτου δῆλον ὅτι τὰ $\bar{\tau}$ ποιοῦσι $\bar{\iota}$ ἑνδέκατα. Die Elftel sind richtig als die „größeren“ Brüche bezeichnet. Im nächsten Absatz kürzt er 144/156 εἰς ὀλιγωτέραν ποσότητα, nämlich zum Bruch 12/13, in dem die Zahlen kleiner sind.

In dem Charmidesscholion sind als besondere Zweige der Logistik die Addition und die Zerlegung der Brüche (συγκεφαλαίωσις und διαίρεσις) aufgeführt. Bei der ersten Operation handelt es sich darum, eine Stammbruchsumme zusammenzufassen. Zur Erleichterung der Rechnung werden Hilfstabellen (ψῆφοι) verwendet. In einer Aufgabe[4] soll von 2/3 die Summe 1/4 1/44 subtrahiert werden. Im Text wird gefragt, in welcher Tabelle 1/4 1/44 vorkommt (ἐν ποίᾳ ψήφῳ δ′ μδ″). Die Tabelle gibt 1/4 1/44 = 3/11 (τοῦ γ′ τὸ ια″). Das Ergebnis der Subtraktion $\frac{4\,1/3}{11}$ wird noch in einer Zerlegung (διαίρεσις) zu 1/3 1/22 1/66 umgewandelt, was sich an den tatsächlich erhaltenen Tabellen verfolgen läßt. Aus einer im Papyrus Akhmîm erhaltenen Tafel entnimmt man 4/11 = 1/3 + 1/33, also ist $\frac{4\,1/3}{11}$ = 1/3 1/33 1/33;

[1] Aristarch S. 398. Über die gekürzte Form des λόγος s. o. S. 377.
[2] Diophant I S. 306.
[3] Rhabdas S. 120.
[4] Pap. Akhmîm Aufg. Nr. 9.

aus einer 2:n-Tabelle (z. B. der des Papyrus Rhind) ersieht man $2/33 = 1/22 + 1/66$, so daß dann das Endergebnis entsteht.

Von den erhaltenen Tabellentexten ist die des Papyrus Akhmîm (etwa 6. Jahrhundert) die umfangreichste.[1] Sie enthält die Stammbruchentwicklungen für die allgemeinen Brüche $m \cdot \frac{1}{n}$. Dabei läuft n von 3 bis 10 für m = 1, 2, 3, ... 9, 10, 20, 30, ... 90, 100, 200, ... 900, 1000, 2000 ... 9000, 10 000. Während n = 2 fehlt, weil wohl die Mediatio leicht im Kopfrechnen durchführbar war, ist noch eine 2/3-Tabelle vorhanden, die ebenfalls für m = 1 bis 10 000 die 2/3-Werte enthält. Von n = 11 bis n = 20 läuft die Tafel nur von m = 1 bis m = n. Eine ganz ähnliche Tafel ist im Papyrus Michigan 621[2] (4. Jahrhundert) erhalten. Sie beginnt bei den Siebteln und endigt bei der Überschrift ἐννεακαιδέκατα, also bei den 19teln. Beide Tafeln zeigen nur geringe Abweichungen, z. B. $2/3\ 1/10\ 1/30 = 1/2\ 1/4\ 1/20$ u. a., die meist darauf zurückzuführen sind, daß in der einen Fassung das Bestreben zutage tritt, den größtmöglichen Teil 2/3 aus dem allgemeinen Bruch herauszuziehen. Der erste Brief des Rhabdas enthält ebenfalls ähnliche Tabellen für n = 2 bis 10 und m = 1 bis 10 sowie eine 2/3-Tabelle und eine hierzu inverse 3/2-Tabelle, die mit τὰ ἀκεραιοδίμοιρα γίνονται δὲ ἀντιστρόφως[3] überschrieben ist. Die gleichen Normalzerlegungen wie der Papyrus Akhmîm und der Michigan-Papyrus 621 zeigen Bruchstücke einer 7tel- und 11tel-Tabelle etwa aus + 600[4] sowie solche für 15tel und 16tel ebenfalls aus byzantinischer Zeit.[5] Daß diese Tabellen auch noch für höhere n bearbeitet waren, zeigen Fragmente für n = 25, 31 und 49[6] sowie Aufgaben bei Proklos, Heron usw., in denen solche Umwandlungen vorkommen. Eine Aufgabe des Papyrus Akhmîm[7] zeigt, daß aus einer ψῆφος die entsetzliche Stammbruchreihe $1/10 + 1/11 + 1/20 + 1/22 + 1/30$

[1] Pap. Akhmîm S. 24 ff.
[2] Pap. Michigan 621 S. 330.
[3] Rhabdas S. 113 f.
[4] London Papyrus 2241 Nr. 24–26.
[5] Thomson S. 52; hierzu Sethe S. 70.
[6] Für 25 u. 49 im London Papyrus Nr. 2241 Nr. 27; für 31 in Coptic Ostraca Nr. 480 (S. 46, 78; hierzu Sethe S. 71).
[7] Pap. Akhmîm, Aufg. Nr. 12.

$+ 1/33 + 1/40 + 1/44 + 1/50 + 1/55 + 1/60 + 1/66 + 1/70 + 1/77 + 1/88 + 1/90 + 1/99 + 1/100 + 1/110$ als 1/110 von 60 1/10 1/30 entnommen wurde.*)

Die griechischen Bruchtabellen stammen offensichtlich von den ägyptischen ab, mit denen sie inhaltlich, sogar in den Einzelheiten, in hohem Grade übereinstimmen. Ein solches aus demotischer Zeit stammendes Fragment[1] enthält die Zerlegungen für n = 7 bis n = 15 und m = 1 bis n. Die 2:n-Tabelle des Papyrus Rhind, der aus dem 17. Jahrh. v. Chr. stammt, enthält die Stammbruchreihen für ungerades n = 3 bis n = 101, allerdings nur für m = 2. Außerdem existieren in der ägyptischen Mathematik auch noch 1/n-Tabellen, wie die „Lederrolle" zeigt.[2] Sie enthält die Zerlegungen für n = 2 bis 16, dann n = 20, 30, 32, 64 sowie die triviale Zerlegung $2/3 = 1/3 + 1/3$. Die Entstehung einer solchen 1/n-Tabelle läßt sich aus dem Komplementgedanken erklären.[3] Nimmt man den xten Stammbruch von 1/n, so ist dieser 1/xn, der zugehörende Komplementbruch (x — 1)/xn. Ist ferner x = n + 1, so entsteht die Zerlegung:

$$(1) \qquad \boxed{1/n = 1/(n+1) + 1/(n+1) \cdot n}\,.$$

Mit dieser Formel ergibt sich bereits eine große Anzahl brauchbarer m/n-Zerlegungen. So ist $1/2 = 1/3 + 1/6$ oder $1/3 = 1/4 + 1/12$, $1/5 = 1/6 + 1/30$ oder in griechischer Index-Schreibung:

$$\begin{aligned} 5' &= 6' + 30'. \text{ Hieraus folgt sofort:} \\ 2/5 &= 3' + 15' \\ 3/5 &= 3' + 6' + 15' + 30' = 2' + 10' \\ 4/5 &= 2' + 6' + 10' + 30' = 2/3 + 10' + 30' \text{ usw.} \end{aligned}$$

Desgleichen ergibt sich in einer anderen Reihe $15' = 18' + 90'$ (aus „dreimal" $5' = 6' + 30'$) oder auch $15' = 20' + 60'$ (aus fünfmal: $3' = 4' + 12'$). Bei ungeraden n der Formel (1) entsteht die 2:n-Zerlegung $2/n = 1/\frac{n+1}{2} + 1/\frac{(n+1)n}{2}$, die auch im Papyrus Rhind nachgewiesen ist. Die dort vorliegenden Zerlegungen, die auch weiterhin in der griechischen Mathematik erhalten

[1] Siehe Revillout S. LXIX ff.
[2] Siehe Glanville, Vogel 1.
[3] Siehe oben S. 408.

*) Det var vist en vild slutning, beroende på en fejloversættelse – jfr. note i papyrus Akhmîm-kopien (… 1890).

blieben, wurden eingehend untersucht.[1] Es ergab sich dabei, daß die Wahl des ersten Stammbruches der Reihe ohne ein erkennbares Bildungsgesetz erfolgte, während dann die folgenden Glieder einer eindeutigen Methode sich fügen.

Alle diese Tabellen waren für das praktische Bruchrechnen von großer Bedeutung, besonders bei der διαίρεσις (im Pap. Akhmîm: χωρισμός) des allgemeinen Bruches (oder auch eines Stammbruches; hierzu s. u.) in eine Stammbruchreihe. Außer ihnen standen aber noch eine Reihe von „Formeln" zur Verfügung, mit denen man umgekehrt wieder Tabellen berechnen konnte. Außer der obengenannten Formel (1) finden sich im Akhmîm-Papyrus noch weitere, die Baillet[2] untersucht hat.

(2) ist eine Zerlegungsformel, die nach einer subtraktiven Methode arbeitet. Sie heißt:

$$(2) \qquad \boxed{\frac{m}{n_1\, n_2} = \frac{m - n_2}{n_1\, n_2} + \frac{n_2}{n_1\, n_2}}.$$

Es soll nach ihr 66/550 entwickelt werden.[3] Zu diesem Zweck wird 550 in Faktoren zerlegt (10 · 55, "ἄλλως": 11 · 50) also

$$66/550 = \frac{66}{10 \cdot 55} = \frac{66 - 55 + 55}{10 \cdot 55} = \frac{11}{10 \cdot 55} + \frac{55}{10 \cdot 55} = \frac{1}{50} + \frac{1}{10}.$$

In einer anderen Aufgabe[4] soll $\frac{239}{6460}$ entwickelt werden. Da $6460 = 85 \cdot 76$ ist, wird gerechnet $\frac{239}{85 \cdot 76} = \frac{239 - 76}{85 \cdot 76} + \frac{76}{85 \cdot 76}$ $= \frac{163}{85 \cdot 76} + \frac{1}{85}$. Da das Verfahren nur zum Ziel führt, wenn die Differenz $m - n_2$ in $n_1 \cdot n_2$ enthalten ist, so wird beim nächsten Schritt das Produkt 95 · 68 genommen, also:

$$\frac{163 - 68}{95 \cdot 68} + \frac{68}{95 \cdot 68} + \frac{1}{85} = \frac{1}{68} + \frac{1}{95} + \frac{1}{85}$$

oder geordnet 1/68 + 1/85 + 1/95.

[1] Die Arbeiten bis 1929 wurden aufgeführt bei Vogel 2 S. 132 ff.; s. bes. S. 173 ff. Über die Bruchzerlegungen bei Heron siehe Tannery, M. sc. II S. 137 ff.

[2] Papyrus Akhmîm S. 38 ff.

[3] Ebenda Aufgabe Nr. 12.

[4] Ebenda Aufgabe Nr. 21.

x) Ikke generelt; pap. Akhmîm har 13' af 2 som 7' 91', i overensstemmelse med formlen; RMP har 2:13 = $\bar{4}$ $\overline{28}$

Die nächste Formel ist

$$(3) \qquad \boxed{\frac{m}{n_1 \cdot n_2} = \frac{1}{n_1 \cdot \dfrac{n_1 + n_2}{m}} + \frac{1}{n_2 \cdot \dfrac{n_1 + n_2}{m}}}.$$

Beispiel: $2/35 = \dfrac{1}{5 \cdot \dfrac{5+7}{2}} + \dfrac{1}{7 \cdot \dfrac{5+7}{2}} = 1/30 + 1/42.$[1]

oder $3/110 = \dfrac{1}{10 \cdot \dfrac{10 + 11}{3}} = \dfrac{1}{11 \cdot \dfrac{10 + 11}{3}} = 1/70 + 1/77.$[2]

Die nächste Formel, in der noch ein Faktor k auftritt, lautet:

$$(4) \qquad \boxed{\frac{m}{n_1 \cdot n_2} = \frac{1}{n_1 \cdot \dfrac{k n_1 + n_2}{m}} + \frac{1}{\left(n_2 \cdot \dfrac{k n_1 + n_2}{m}\right) : k}}.$$

In einem Beispiel, dessen erster Teil die subtraktive Zerlegung verwendet,[3] wird $\frac{28}{11 \cdot 120}$ umgewandelt in:

$$\frac{1}{11 \cdot \dfrac{12 \cdot 11 + 120}{28}} + \frac{12}{120 \cdot \dfrac{12 \cdot 11 + 120}{28}} = \frac{1}{99} + \frac{12}{12 \cdot 90} = \frac{1}{99} + \frac{1}{90}.$$

Für solche Zerlegungen, die in zahlreichen weiteren Beispielen vorkommen, wird das Synonym χωρισμός für διαίρεσις gebraucht. Auch die Aufgabe, einen Stammbruch in eine vorgeschriebene Anzahl von Stammbrüchen zu zerlegen, wird so bezeichnet. Es läuft dies auf die Herstellung einer 1/n-Tabelle hinaus. Eine Aufgabe[4] heißt: χορις (= χώρισον) κβ'' εἰς γ⟨μόρια⟩, also: 1/22 = 1/x + 1/y + 1/z. Der Rechner erweitert 1/22 zu 5/110. Nach (2)

[1] Papyrus Akhmim, Aufgabe Nr. 23; vgl. hierzu die 2:35-Zerlegung im Papyrus Rhind.

[2] Ebenda Aufgabe Nr. 38.

[3] Ebenda Aufgabe Nr. 18.

[4] Ebenda Aufgabe Nr. 16.

wird $5/110 = \frac{5-2}{110} + \frac{2}{2\cdot 55}$, dann nach (3) $\frac{3}{110} = \frac{1}{10\cdot\frac{10+11}{3}} + \frac{1}{11\cdot\frac{10+11}{3}} = \frac{1}{70} + \frac{1}{77}$; die Gesamtlösung ist deshalb: $5/110 = 1/55 + 1/70 + 1/77$. In anderen Aufgaben wird ein Stammbruch in 4,6, ja sogar 8 Stammbrüche zerlegt.

Auch aus anderen Texten ersieht man den Gebrauch von Zerlegungstabellen. So ist bei Rhabdas $7/13 = 1/2 + 1/26$, $37/49 = 2/3 + 1/12 + 1/196$, $104/143 = 2/3 + 1/18 + 1/429 + \langle 1/429\rangle + 1/2574$.[1] Bei Eutokios[2] wird $15/64$ sofort als $1/6 + 1/15$ angegeben.

Bei der συγκεφαλαίωσις, also bei der Addition der Stammbrüche, handelt es sich um die umgekehrte Verwendung der Tabellen, wodurch man das auf dem Hauptnenneralgorithmus aufgebaute Erweitern (nebst nachfolgender Addition ganzer Zahlen eines anderen Zählbereiches) vermeiden konnte. Barlaam[3] behandelt die Vereinigung von Stammbrüchen zu einer Summe in dem Kapitel: τὸ δοθὲν πλῆθος ἑτερωνύμων μερῶν ἀναλῦσαι εἰς συνώνυμα μέρη. Hierbei ist für das Resultat auch wieder ein Stammbruch zu erstreben:[4] ὅταν μέρος μέρει συνθεὶς σκέπτωμαι εἰ γίνεται ἐξ αὐτῶν μέρος. Sollen zwei allgemeine Brüche addiert werden, so wird am besten jeder von ihnen zuerst in einer διαίρεσις in lauter Stammbrüche zerlegt, die dann ihrerseits wieder in einer συγκεφαλαίωσις zusammengefaßt werden. In diesem Verfahren wird aus $2/7 + 3/11$ die Reihe $1/4 + 1/28 + 1/4 + 1/44 = 1/2 + 1/28 + 1/44$. Das Hauptnennerverfahren gibt dasselbe Ergebnis: $\frac{22+21}{77} = \frac{43}{77} = \frac{38^1/_2 + 4^1/_2}{77} = \frac{1}{2} + \frac{9}{154}$. Der letzte Summand wird noch umgeformt in: $\frac{18}{308} = \frac{18-11}{28\cdot 11} + \frac{11}{28\cdot 11} = \frac{1}{44} + \frac{1}{28}$.

Daß man aber auch die allgemeinen Brüche direkt addieren konnte, zeigt das oben schon behandelte Beispiel von Diophant,[5]

[1] Rhabdas S. 148, 121, 123; bei Tannery 1/2374.

[2] Archimedes III S. 236; 1/960 ist vernachlässigt.

[3] Barlaam II. Buch Satz 1.

[4] Ebenda I. Buch Def. 4.

[5] Diophant I S. 288.

dessen vollständiger Text folgendermaßen lautet: ὅταν γὰρ δεήσῃ συνθεῖναι μόρια, οἷον · ϛγ̄ μορ ϛᾱ ⋔ Μ̊ γ $\left(= \frac{3x}{x-3}\right)$ καὶς ϛδ̄ μορ ϛᾱ ⋔ Μ̊ δ̄ $\left(= \frac{4x}{x-4}\right)$, οἱ ϛ τοῦ μέρους ἐπὶ τὰ ἐναλλὰξ μόρια πολλαπλασιασθήσονται, οἷον ϛγ̄ ἐπὶ τὰ τοῦ ἑτέρου μόρια τουτέστιν ἐπὶ ϛᾱ ⋔ Μ̊ δ̄, καὶ πάλιν οἱ ϛδ̄ ἐπὶ τὰ μόρια τοῦ ἑτέρου, ἐπὶ ϛᾱ ⋔ Μ̊ γ̄. οὕτως ἐποίησεν ἡ σύνθεσις Δ^Υ ζ̄ ⋔ ϛκδ̄ $(= 7x^2 - 24x)$ μορίου τοῦ ὑπὸ τῶν μορίων, τουτέστι Δ^Υ ᾱ Μ̊ ιβ̄ ⋔ ϛ ζ̄ $(= x^2 + 12 - 7x)$.

Das Schema beim Addieren von Sexagesimalbrüchen nähert sich unserem dezimalen darin, daß hier – ganz wie bei den Potenzen von 10 – die Potenzen von 60 untereinander angeordnet werden, was beim Rechnen mit den gewöhnlichen Brüchen ohne Vorteil für eine raschere Ausführung gewesen wäre. Wir dürfen hier auch Maximos Planudes, den Verkünder der neuen indischen Rechenkunst, zu Rate ziehen. Denn in dem Kapitel: Περὶ τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου vermittelt er altes Wissen, das mit dem Buchtitel: Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς nichts zu tun hat. Er verlangt, daß die Zahlen in eine Kolumne geschrieben werden sollen (γράφειν κατὰ συστοιχίαν).[1] Überschreiten die Einheiten der einzelnen Kolumne die Zahl 60, so werden die größeren Einheiten durch eine Division mit 60 herausgezogen (ἀναβιβάζειν, μοιράζειν).[2]

Wie die Additionstabellen[3] gleichzeitig als Subtraktionstafeln Verwendung fanden, so können auch die Stammbruchtafeln in dieser Umkehrung gebraucht werden. Aus $1/2 = 1/3 + 1/6$ ergibt sich sofort: $1/2 - 1/3 = 1/6$ und $1/2 - 1/6 = 1/3$. Verschiedene Regeln für das Subtrahieren von Brüchen gibt wieder Barlaam.[4] So spricht er aus, daß zwei Stammbrüche, deren Nenner (σύστοιχοι ἀριθμοί) unter sich prim sind, kein Stammbruchresultat ergeben. Auch weiß er, daß die Differenz zweier Stammbrüche, deren Nenner zwei in der Zahlenreihe aufeinanderfolgende Zahlen (οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοί) bilden – z. B. 1/2 und 1/3 oder 1/3 und 1/4 – als Summe einen Stammbruch ergeben, dessen Nenner das Produkt der beiden alten Nenner ist, also $1/3 - 1/4 = 1/12$. Gerade dies ergibt sich aus der subtraktiven

[1] Planudes S. 24.

[2] Euklid V, S. 322.

[3] Siehe oben S. 380. [4] Barlaam I. Buch Satz 21–27.

Umkehrung unserer Formel (1): $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)n}$. Die erhaltenen Beispiele aus Heron und Rhabdas bringen sofort das Endergebnis, ohne daß man feststellen könnte, ob es in einer Kopfrechnung oder unter Verwendung einer Tabelle gefunden wurde. Beispiele sind:

$3 - 1/12 = 2 + 2/3 + 1/4$;[1]

$[104 + 1/2 + 1/7 + 1/14 + 1/21] - [21 + 1/2 + 1/3 + 1/12]$
$= 82 + 1/2 + 1/3 + 1/84$;[2]

$64 - (40 + 4/5 + 4/25) = 23 + 1/25$.[3]

Dagegen ist aus dem Papyrus Akhmîm das Verfahren der Stammbruchsubtraktion ersichtlich in den Aufgaben Nr. 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 25, 29, 30, 31, 32. In Nr. 31 z. B. wird gerechnet: $1/2 + 1/3 + 1/42 - (1/6 + 1/66) = 6/7 - 2/11 = 66/77 - 14/77 = 52/77$. Das Ergebnis ist also hier: τῶν νβ τὸ οζ''. In der Aufgabe Nr. 8 wird das Resultat $2^{1}/_{3}/11$ noch in 1/6 1/33 1/66 verwandelt (ὡς εἶναι ϛ''λγ''ξϛ'').

Bei der Multiplikation zweier oder mehrerer Brüche oder gemischter Zahlen können die beiden im Charmidesscholion genannten Methoden (die ägyptische und die griechische) verwendet werden. Doch ist auch hier wieder, wie bei der Multiplikation von ganzen Zahlen, kein Beispiel der recht umständlichen ägyptischen Methode erhalten. Die Rechnung $2\frac{1}{4}\frac{1}{28} \cdot 6\frac{1}{2}$ hätte folgendermaßen ausgesehen:

1	$6\frac{1}{2}$
/ 2	13
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$
/ $\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{8}$
/ $\frac{1}{28}$	$\frac{1}{7}\frac{1}{14}\frac{1}{56}$

zusammen $14\frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{8}\frac{1}{14}\frac{1}{56}$ oder $\left(\text{da } \frac{1}{8} + \frac{1}{56} = \frac{1}{7}\right) = 14\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{14}\frac{1}{28}$.

[1] Rhabdas S. 126. [2] Heron IV S. 372. [3] Heron IV S. 304.

Dagegen sind für die griechische Multiplikation von Brüchen oder gemischten Zahlen Beispiele bei Heron, Eutokios und Rhabdas erhalten. Man machte von zwei verschiedenen Methoden Gebrauch.

Die erste entspricht dem griechischen Multiplikationsverfahren für ganze Zahlen, wobei wieder von links nach rechts die Teilprodukte gebildet werden. In der älteren Zeit wird alles im Text ohne Anwendung eines Schemas ausführlich beschrieben. Eine von den zahlreichen Multiplikationen bei Heron (4 33/64 · 7 62/64) lautet folgendermaßen:[1] πολυπλασιάζονται δὲ οὕτως · δζ κη · (aus dem 1 × 1: „4 · 7 = 28") · καὶ τετράκις τὰ ξβ ξδ' ξδ' σμη ξδ' ξδ' (4 · 62/64 = 248/64) · καὶ λγ ξδ' ξδ' τῶν ἑπτὰ μονάδων σλα ξδ' ξδ' (33/64 · 7 = 231/64) · καὶ λγ ἑξηκοστοτέταρτα τῶν ἑξηκονταδύο ξδ' ξδ' ,βμϛ ξδ' ξδ' τῶν ξδ' ξδ' (33/64 · 62/64 = 2046/64 · 1/64) γινόμενα καὶ ταῦτα ξδ' ξδ' λα καὶ ἑξηκονταδύο ξδ' ξδ' τῶν ξδ' ξδ' (= 31/64 + 62/64 · 1/64) · ὁμοῦ μονάδες κη ἑξηκοστοτέταρτα πεντακόσια δέκα καὶ ἑξηκονταδύο ξδ' ξδ' τῶν ξδ' ξδ' (= 28 + 510/64 + 62/64 · 1/64) γινόμενα καὶ ταῦτα μονάδες ἑπτὰ ἑξηκοστοτέταρτα ξβ καὶ ἑξηκονταδύο ξδ' ξδ' τῶν ξδ' ξδ' (= 7 + 62/64 + 62/64 · 1/64) ἤτοι τὰ ὅλα μονάδες λε ξδ' ξδ' ξβ καὶ ξβ ξδ' ξδ' τῶν ξδ' ξδ' (= 35 62/64 + 62/64 · 1/64). Bei dieser umständlichen Berechnung fällt auf, daß im Endergebnis die 64tel von 64teln nicht (wie es Heiberg übersetzt) zu 4096teln zusammengefaßt werden, sondern daß die Entstehung der Teile in der gewählten Form deutlich sichtbar bleibt; diese Ausdrucksweise ist uns aus der muslimischen und mittelalterlichen Mathematik geläufig. Andere Beispiele hierfür gibt Heron: 1/5 · 1/5 (Heiberg: 1/25) = ε' τὸ ε' oder 2/5 · 1/5 (2/25) = β ε' ε' τῶν ε' ε' bzw. δύο ε' τὸ ε'.[2] Dagegen führt Rhabdas die Berechnung des Nenners noch weiter durch.[3] So ist: ἑπτακισμύρια φξ ὀγδοηκοστοτέταρτα τῶν ὀγδοηκοστοτετάρτων, τουτέστιν ,ζνϛ$^{\alpha}$ (70 560/84 · 1/84 d. i. 7056tel); oder[4] ἕβδομα τῶν ἑβδόμων ἤγουν τεσσαρακοστοέννατα. Hier wird auf die Berechnung des Nenners durch Multiplikation noch besonders aufmerksam gemacht: πολλαπλασιάζω καὶ τὸ ζ'' ἐφ' ἑαυτό, καὶ γίνονται μθ$^{\alpha}$.

[1] Heron IV S. 266.
[2] Ebenda IV S. 256 u. 258.
[3] Rhabdas S. 126.
[4] Ebenda S. 120.

In einer weit übersichtlicheren schematischen Form sind uns Multiplikationen gemischter Zahlen bei Eutokios erhalten. Sie werden nach der Reihenfolge $(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots) \cdot (a_2 + b_2 + c_2 \ldots) = (a_1a_2 + a_1b_2 + a_1c_2 + \ldots) + (b_1a_2 + b_1 b_2 + b_1 c_2 + \ldots) + (c_1a_2 + c_1b_2 + c_1c_2 + \ldots) + (\ldots)$ durchgeführt. Das Beispiel 3013 1/2 1/4 · 3013 1/2 1/4[1] sieht folgendermaßen aus:

1. ,$\overline{\text{γιγ}}$ ∠′ δ′
2. ἐπὶ ,$\overline{\text{γιγ}}$ ∠′ δ′
3. $\overset{\text{ϡ}}{\text{M}}$ $\overset{\gamma}{\text{M}}$,θ ,αφ ψν $= 9\,000\,000 + 30\,000 + 9000 + 1500 + 750$ $(= 3000 \cdot 3000 + 3000 \cdot 10 + 3000 \cdot 3 + 3000 \cdot \frac{1}{2} + 3000 \cdot \frac{1}{4})$
4. $\overset{\gamma}{\text{M}}$ $\overline{\text{ρλε}}$ β ∠′ $= 30\,000 + 100 + 30 + 5 + 2\frac{1}{2} (= 10 \cdot 3000 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{4})$
5. ,$\overline{\text{θλθ}}$ $\bar{\alpha}$ ∠′ ∠′ δ′ $= 9000 + 30 + 9 + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} (= 3 \cdot 3000 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4})$
6. ,$\overline{\text{αφ}}$ $\bar{\varepsilon}$ $\bar{\alpha}$ ∠′ δ′ η′ $= 1500 + 5 + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} (= \frac{1}{2} \cdot 3000 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4})$
7. $\overline{\text{ψν}}$ $\bar{\beta}$ ∠′ ∠′ δ′ η′ ιϛ′ $= 750 + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} (= \frac{1}{4} \cdot 3000 + \frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4})$
8. ὁμοῦ $\overset{\text{ϡη}}{\text{M}}$,$\overline{\text{βχπθ}}$ ιϛ′ $= 9\,082\,689\,\frac{1}{16}$.

Hier mußte bei der Multiplikation der Ganzen wieder die Stellenregel verwendet werden. Ein Untereinandersetzen der Posten erfolgte nicht; es wäre auch nur für die Ganzen möglich gewesen. Man sieht ferner, daß bei den Additionen Kopfrechnungen in weitgehendem Maße durchgeführt wurden.

[1] Archimedes III S. 250.

Die zweite griechische Methode, Brüche oder gemischte Zahlen zu multiplizieren, besteht darin, daß die beiden Faktoren zuerst in allgemeine Brüche verwandelt werden, die dann ganz wie in unserem Verfahren nach der Regel: „Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner" behandelt werden. Sie heißt für die Nenner: τὰ μέρη πρὸς ἄλληλα.[1]

Rhabdas spricht von einer „wunderbaren" Methode, die meist noch unbekannt sei:[2] ἐγὼ δὲ σοὶ ἀφθόνως ὑποδείξω θαυμασίαν τινὰ περὶ τούτου μέθοδον καὶ τοῖς ἄλλοις, ὡς ἐγὼ οἴομαι, ἄγνωστον.

Doch stammt sie sicher nicht von ihm, da sie im Pap. Akhmîm belegt ist und auch an anderer Stelle πολυπλασιασμὸς θαυμάσιος σὺν τοῖς μετ' αὐτῶν λεπτοῖς genannt wird.[3] Das Beispiel 3 1/3 · 4 1/4 · 5 1/5 wird folgendermaßen beschrieben: καὶ λέγομεν οὕτως · διὰ τὰ ἐπακολουθοῦντα λεπτὰ πολυπλασιάζεις ἓν ἕκαστον ἐπὶ μέρος οὕτως · τὰ γ′γ″ διὰ τὸ γ″ γίνονται ι′ (sc. Drittel), τὰ δ′δ″ διὰ τὸ δ″ γίνονται ιζ′, καὶ τὰ ε′ε″ γίνονται κϛ′ · εἶτα τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους (also Regel: Zähler mal Zähler) · δεκάκις τὰ ιζ′ ρο′ (10 · 17 = 170) · καὶ ταῦτα ἐπὶ τὰ κϛ′ γίνονται ,δυκ′ (170 · 26 = 4420). εἶτα δι' ἀλλήλων τὰ λεπτὰ (Nenner mal Nenner) γ′ δ′ ιβ′ (3 · 4 = 12), καὶ ταῦτα πεντάκις ξ′ (12 · 5 = 60). τῶν γοῦν ,δυκ′ τὸ ξ″ λαβὼν ἔχεις τὸ ζητούμενον, καὶ ἔστι τὸ ξ″ ογ′ ω (4420/60 = 73 2/3). Ein weiteres Beispiel an der gleichen Stelle ist: 2 1/4 · 4 1/5 · 6 1/7 · 9 1/8; ferner bei Heron[4] 7 1/7 · 4 1/5 · 2 1/9 und 6 1/4 · 4 1/8 · 2 1/3; dies auch im Pariser Codex 387.[5] Rhabdas führt einige z. T. schwierige Aufgaben vollständig durch. Diese Multiplikationsmethode (περὶ τῶν πολλαπλασιασμῶν τῶν ἐχόντων μέρη μονάδος καὶ μόρια)[6] wird als εὐμήχανος μέθοδος bezeichnet.[7] Die Beispiele sind: (3 1/3 1/14 1/42) · (3 1/3 1/14 1/42), dann (5 2/3 1/5 1/33 1/110 1/330) · (8 2/3 1/4 1/156) und (5 1/5 · 7 1/7) · (9 1/6 1/18). Bei der 2. Aufgabe z. B. wird die Stammbruchreihe 2/3 1/5 1/33 1/110 1/330 in den allgemeinen Bruch 300/330 verwandelt, der

[1] Siehe S. 424; vgl. Rhabdas S. 124.
[2] Rhabdas S. 120.
[3] Heron IV S. XIV.
[4] Heron V S. 96, 94.
[5] Ebenda IV S. XVII.
[6] Rhabdas S. 124.
[7] Rhabdas S. 120.

zu 10/11 gekürzt wird. Aus dem 2. Faktor macht Rhabdas 8 144/156 = 8 12/13. Die weitere Rechnung ist nun: 5 10/11 · 8 12/13 = 65/11 · 116/13 = 7540/11 · 1/13[1] = 7540/143 = 7540 : 143 = 52 104/143 (= $\overline{\nu\beta}$ καὶ $\overline{\rho\delta}$ ἑκατοστοτεσσαρακοστότριτα, ἅτινα ποιοῦσι μέρη μονάδος ω ιη'' υκθ'' ⟨υκθ''⟩ καὶ ͵βφοδ'' . . .) = 52 2/3 1/18 1/429 1/429 1/2574. Bei der Multiplikation[2] 122 ½/42 · 144/42 wird der Doppelbruch beseitigt, indem 122 ½/42 zu 245/84 erweitert wird. Es heißt jetzt weiter: ἐξ ἀναγκῆς(!) οὖν διπλασιάζω καὶ τὰ $\overline{\rho\mu\delta}$ μβ$^{\alpha}$ (144/42) καὶ γίνονται πδ$^{\alpha}$ $\overline{\sigma\pi\eta}$ (288/84). Wir sehen also, wie hier beim Multiplizieren überflüssigerweise ein gemeinsamer Nenner hergestellt wird, was zudem noch als „notwendig" bezeichnet wird.

Auch der Papyrus Akhmîm enthält ein größeres Beispiel für die Multiplikation nach der zweiten Methode, womit nachgewiesen ist, daß Rhabdas auch in diesem Punkte alte logistische Technik vermittelt. Es soll hier[3] 1 2/3 1/11 1/22 1/66 mit 1 1/2 1/29 1/58 multipliziert werden. Zuerst wird für die Stammbruchreihen das Äquivalent 9/11 bzw. 16/29 aus Tabellen entnommen. Die weitere Rechnung ist dann: 1 9/11 · 1 16/29 = 20/11 · 45/29, worauf nach der Regel: „Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner" die Produkte 20 · 45 = 900 und 11 · 29 = 319 gebildet werden.

Das Multiplizieren von Sexagesimalbrüchen konnte nach der oben beschriebenen ersten griechischen Methode vollzogen werden. So wäre $37^0 4' 55'' \cdot 37^0 4' 55'' = 37^0 \cdot 37^0 + 37^0 \cdot 4' + 37^0 \cdot 55'' + 4' \cdot 37^0 + 4' \cdot 4' + 4' \cdot 55'' + 55'' \cdot 37^0 + 55'' \cdot 4' + 55'' \cdot 55''$. Bei einer solchen Anordnung hätte man sich aber einen Vorteil, die Kolumnenschreibung gleicher Potenzen von Sechzig, entgehen lassen. Es scheint, daß schon in dem Originaltext dieses Beispieles bei Theon eine ähnliche Gruppierung eingehalten wurde. Zwar werden die Rechnungen immer noch umständlich im Text Wort für Wort beschrieben, so daß man die schematischen Anordnungen, wie sie Halma (und nach ihm Nesselmann und Friedlein) gibt, als Zusätze späterer Abschreiber ansehen könnte. Doch gerade bei dem genannten Beispiel wird im Text (wenigstens in dem zu Rate gezogenen Nürnberger

[1] ἑνδέκατα τῶν τρισκαιδεκάτων ἤτοι ἑκατοστοτεσσαρακοστότριτα.

[2] Rhabdas S. 126.

[3] Pap. Akhmîm Aufg. Nr. 25.

Codex)[1] durch die Wendung ὡς ὑπογέγραπται auf ein Schema hingewiesen, das dann allerdings nur mit Abweichungen dem von Halma angegebenen entspricht. Es steht dort statt:

37^0	$4'$	$55''$		
37^0	$4'$	$55''$		
1369	148	$2035''$		
	148	16	$220'''$	
		2035	$220''$	$3025''''$
1375^0	$4'$	$14''$	$10'''$	$25''''$

auf fol. 72 verso des gen. Codex:[2]

nur $\overline{\lambda\zeta}$ δ' νε''

λζ δ' νε''

͵ατξθ ρμη ͵βλε σκ ͵γκε

ρμη ⟷ ιξ ⤢ σκ ⤢

͵βλε ⤢

Wir sehen die Angabe der Benennungen (Indices) über den Zahlen, vor allem aber fehlt die Schlußaddition (mit Strich), die nebst den noch nötigen Umwandlungen wieder im Haupttext vollzogen wird. Außerdem stehen die aus den einzelnen Teilprodukten entstandenen Summen (z. B. 148′16″220‴) nicht in jedem Fall in derselben Zeile, sondern man sieht z. B. bei der 4. Zeile an der Summe 148′16″220‴, daß der jeweils freie Platz ausgenützt ist. Wenn also auch schon das Bedürfnis nach übersichtlichen Gruppierungen nachweisbar ist, so kann doch von einer konsequenten Durchführung noch keine Rede[3] sein. Ein anderes Beispiel bei Theon zeigt dies ebenfalls. Es soll $103^0 55' 23''$ mit $48^0 31' 55''$ multipliziert werden. Das zur Ergänzung der Rechnung im fortlaufenden Text beigegebene Schema zeigt die folgende von der anderen ganz verschiedene Form:

$\overline{\rho\gamma}$ νέ κ''γ $\overline{\mu\eta}$ λά ν''ε	$\overline{͵\delta\,\lambda\mu\delta}$	͵γρϙγ ͵βχμ	͵ε''χξε ͵αψε ͵α''ρδ	͵γκ'''ε ψι'''γ	͵ασξ''''ε

Das Ergebnis ist (in unserer Anordnung):

4944^0	$3193'$	$5665''$		
	$2640'$	$1705''$	$3025'''$	
		$1104''$	$713'''$	$1265''''$
5043^0	$35'$	$15''$	$39'''$	$15''''$.

[1] Norimb. cent. 5, 8 app. 2°.

[2] Richtungspfeile zwischen den zusammengehörenden Brüchen sind von mir ergänzt! Theon von Alexandria S. 117.

[3] Ebenda S. 254, Cod. Norimb. fol. 82 v.

Man sieht, es werden die höheren Einheiten (hier Sechzigstelpotenzen) herausgezogen, wobei wieder die Kopfrechnung je nach der Fähigkeit des Rechners Hilfe leistete.

Schwierigkeiten machte bei der sexagesimalen Multiplikation höchstens die Bestimmung des Stellenwertes (εἶδος). Alle Schriftsteller, die die Sexagesimalrechnung behandeln (Theon, Maximos Planudes, Barlaam, der Anonymus des Pariser Codex 453), geben zur Bestimmung des εἶδος des Produkts ausführliche Regeln, die für ganze Zahlen ihre Parallele in der erwähnten Stellenregel des Archimedes haben. Bei Barlaam ist eine solche in Proportionsform ausgesprochen:[1] ἐὰν πλῆθος πολλαπλασιάσῃ πλῆθος, ἔσται ὡς ἓν τοῦ πολλαπλασίαντος(!) πρὸς τὴν μοῖραν, οὕτως ἓν τῶν ἐν τῷ γινομένῳ πρὸς ἓν ἐν τῷ πολλαπλασιασθέντι, also für $1/60^m \cdot 1/60^n = 1/60^x$ gilt: $1/60^n : 1 = 1/60^x : 1/60^m$. Da die Produktengleichung bekannt war, folgt: $x = m + n$. Im nächsten Theorem (τὸ δοθὲν πλῆθος λεπτῶν ἐπὶ τὸ δοθὲν πλῆθος λεπτῶν πολλαπλασίαντα(!) σκέψασθαι τί τὸ γενόμενον) ergibt sich als Regel für den praktischen Gebrauch, die schon ohne Beweis empirisch feststellbar war (κανὼν ἐκ παρατηρήσεως), daß man die Exponenten, die auch wieder als σύστοιχοι ἀριθμοί bezeichnet sind (sie stehen ja auch über den Zahlen!) addieren muß. In ermüdend ausführlicher Weise werden die Multiplikationsregeln beim Anonymos des Par. Cod. 453 besprochen. Der Anfang lautet: ἀλλ' ἡ μὲν μοῖρα ἐφ' ὃ ἂν εἶδος πολλαπλασιασθῇ, τὸ αὐτὸ εἶδος ποιεῖ · ἐπὶ γὰρ πρῶτα λεπτὰ πολυπλασιαζομένη ἡ μοῖρα ἢ μοῖραι πρῶτα λεπτὰ ποιοῦσιν · καὶ ἀνάπαλιν λεπτὰ πρῶτα ἐπὶ μοῖραν ἢ μοίρας ποιεῖ πρῶτα λεπτά, καὶ ἑξῆς ὁμοίως · μοῖρα ἐπὶ δεύτερα, δεύτερα ποιεῖ καὶ ἐπὶ τρίτα, τρίτα καὶ ἑξῆς · πρῶτα δὲ ἐπὶ πρῶτα ποιεῖ δεύτερα κ.τ.λ.[2]

Ähnliche Ausführungen stehen bei Theon von Alexandria und Maximos Planudes.[3] Die Reihe der verwendeten Sechzigstel schließt meistens bei den ἕκτα. Hierüber sagt Planudes:[4]

[1] Barlaam III. Buch Satz 2.

[2] Diophant II S. 6.

[3] Planudes S. 26; Theon (S. 111 ff.) bezieht sich hierbei auf Diophant (s. II S. 35), der (in I S. 8 ff.) die entsprechenden Regeln für $1/x$, $1/x^2$ usw. ausführlich behandelt hat. Siehe auch das „Opusculum", ed. C. Henry.

[4] Planudes S. 28.

μέχρις ἂν ἕκτα · τὸ δ' ὑπὲρ ταῦτα περίεργόν τε καὶ ἄλλως περιττόν. Eine Hilfstafel, die alle diese Einzelregeln zusammenfaßt und die auch die Sexagenae enthält, ist für die griechische Mathematik nicht nachweisbar. Eine solche findet sich in der kommentierten lateinischen Übersetzung der Logistik von Barlaam durch J. Chamber.[1] Sie umfaßt die Produkte $60^m \cdot 60^n$ für m und n von 6 bis —8 und sieht (auf 3 bis —3 verkürzt) folgendermaßen aus:

	3`	2`	1`	ō	1′	2′	3′
3`	6`	5`	4`	3`	2`	1`	ō
2`	5`	4`	3`	2`	1`	ō	1′
1`	4`	3`	2`	1`	ō	1′	2′
ō	3`	2`	1`	ō	1′	2′	3′
1′	2`	1`	ō	1′	2′	3′	4′
2′	1`	ō	1′	2′	3′	4′	5′
3′	ō	1′	2′	3′	4′	5′	6′

Im übrigen waren die Multiplikationen auch ohne Tabellen leicht ausführbar, wenn man bei den μοῖραι begann und sorgfältig die Teilprodukte Schritt für Schritt weiterrückte, wobei der Wert der Einführung des οὐδέν-Symbols „o" sich deutlich zeigt.

Die Division einer gemischten Zahl oder einer Stammbruchreihe durch eine ganze Zahl ist identisch mit einer Multiplikation mit dem zugehörigen Stammbruch und macht keinerlei Schwierigkeit, besonders wenn Tabellen zur Hand sind. So ist z. B. $(3\ 1/8\ 1/12) : 7 = 3/7 + 1/56 + 1/84 = 1/3 + 1/14 + 1/42 + 1/56 + 1/84$. Wesentlich schwieriger ist dagegen die Division durch eine gemischte Zahl bzw. eine Stammbruchreihe. Als ein ausführliches Beispiel steht bei Rhabdas[2] die Division $10 : (3\ 1/3\ 1/14\ 1/42)$. Eine Durchführung nach dem ägyptischen Verfahren wäre recht umständlich, obwohl die ägyptischen Texte zeigen, daß man die Methode beherrschte. Hier wird stattdessen ein Hauptnenner zu der Bruchreihe des Divisors gesucht und dann (wieder

[1] Chamber S. 78 u. 102.

[2] Rhabdas S. 124 f.

überflüssigerweise wie bei der Multiplikation, wenigstens von unserem Standpunkt aus) der Dividend auf denselben Nenner gebracht. Es heißt im Text: ἀναλύω τὸν τοιοῦτον ἀριθμὸν εἰς τὰ συγκείμενα αὐτῷ μόρια, πλὴν σκοπῶ ποῖόν ἐστι τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν μέρος . . . καὶ ἀναλύω καὶ τὸν μεριζόμενον ἀριθμὸν ὁμοίως εἰς τὰ αὐτά. . . . Es liegt also folgende Rechnung vor: 3 1/3 1/14 1/42 = 144/42, was zu 24/7 gekürzt wird. Nachdem der Dividend 10 zu 70/7 erweitert ist, heißt die Division 70/7:24/7. Damit ist der Zweck des uns überflüssig erscheinenden gemeinsamen Hauptnenners sichtbar: Man will vergleichen, und zwar die 70 Siebtel mit 24 Siebtel, hat also nur noch die Messung 70:24 zu erledigen. Der Schluß der Aufgabe ist dann: 70:24[1] = 3 — 2/24 = 2 2/3 1/4.

Ein weiteres Divisionsbeispiel mit einem Bruch als Divisor steht in dem schon mehrfach erwähnten Pariser Codex 387,[2] wo das verwendete Verfahren als Methode des Diophant bezeichnet wird. Um auszurechnen, welcher Teil von 24 der Bruch 4/5 ist (also 24:x = 4/5), wird 24:4/5 bestimmt, was, „da von Fünfteln die Rede ist," mit dem Hauptnenner 5 durchgeführt wird. Es ist nun 120 Fünftel: 4 Fünftel = 30. Der Text lautet: τὰ τέσσαρα ε″ε″ τί μέρος εἰσὶ πρὸς τὰ κδ′; ἐροῦμεν οὖν οὕτως κατὰ τὴν τοῦ Διοφάντου μέθοδον · ἐπειδὴ περὶ ε″ε″ ὁ λόγος, πεντάκις τὰ κδ′ · γίνονται ρκ′. καὶ ἐπειδὴ δ′ε″ε″, λάβε μέρος δ′ τῶν ρκ′, ὅπερ ἐστὶ τρίαντα · καὶ ἔστι τὰ δ′ε″ε″ εἰς τὰ κδ′ μέρος λ″. Am Schluß folgt die Anweisung: Οὕτω ποίει κατὰ παντὸς ψήφου, ὅτε λεπτὰ εἶεν: „Mache es so in jeder Rechnung, in der Brüche vorkommen!"

Auch Barlaam beschäftigt sich mit der Division allgemeiner Ausdrücke: ὁτιοῦν παρ' ὁτιοῦν δυνατόν ἐστι μερίσαι.[3] Später[4] stellt er sich die Aufgabe: τὸ δοθὲν παρὰ τὸ δοθὲν μερίσαντα, σκέψασθαι τί γίνεται. Der bei der Division übrigbleibende Rest $\left(\frac{a}{b}\right)$ muß als neuer Dividend wieder mit dem Divisor $\left(\frac{c}{d}\right)$ gleichnamig gemacht werden. Das Resultat ist ein Bruch, aus den neuen Zählern *ad* u. *bc* gebildet, also $\left(\frac{ad}{bc}\right)$.

[1] Es wird also hier zuerst 24 mit 3 · 24 = 72 verglichen.
[2] Heron IV S. XIV; hiezu S. 429 Fußn. 2.
[3] Barlaam II. Buch Satz 28.
[4] Ebenda II. Buch Satz 38.

Die Division von Sexagesimalbrüchen wird von verschiedenen Autoren eingehend erklärt. Das Beispiel von Theon war schon oben (S. 403) behandelt worden, da es lange Zeit überhaupt als einziges Beispiel für die Division in der griechischen Logistik galt. Während Theon erst bei Bedarf die Umwandlung in die kleineren Einheiten (Potenzen von 60) vornimmt, wird bei Planudes[1] bei der Division $3^0 23' 54'' : 2^0 34' 24''$ alles sofort in Sekunden verwandelt und dann die Division $12\,234'' : 9264''$ durchgeführt. Die Rechnung nimmt folgenden Verlauf:

$$\begin{array}{rrlr}
 & 12\,234'' & \text{also 1mal} = & 1^0 \\
- & 9\,264'' & & \\
\hline
\text{Rest} & 2\,970'' & & \\
 & = 178\,200''' & & 19' \\
 & 9\,264'' & & \\
\hline
\text{Rest} & 2\,184''' & & \\
\text{Rest} = & 131\,040'''' & & 14'' \\
 & 9\,264'' & & \\
\hline
\end{array}$$

Das Ergebnis ist $1^0 19' 14''$. Es wird dabei der Rest in Sekunden bzw. Terzen verwandelt, da „der Dividend größer sein muß als der Divisor".[2]

Auch hier ist es wieder nur die Bestimmung des εἶδος, die Schwierigkeiten machen kann. Die diesbezüglichen Regeln werden mit derselben Breite wie die für die Multiplikation besprochen. So von Planudes,[3] Barlaam, Theon[4] und dem Anonymos des Pariser Codex 453.[5] Eine dieser Regeln lautet: $1/60^4 : 1/60^3 = 1/60^{4-3}$, eine andere $1/60^5 : 1/60^3 = 1/60^{5-3}$, also allgemein[5]: $1/60^m : 1/60^n = 1/60^{m-n}$. Derartige Regeln, die sich empirisch aus der Praxis ergaben und an deren Beweis man wohl erst später heranging,[6] sind als Vorläufer der Potenzrechnungen anzusehen ebenso wie die Archimedische Stellenregel bei der Multiplikation. Barlaam spricht dies folgendermaßen aus:[7] πᾶν εἶδος

[1] Planudes S. 27 f.
[2] Ebenda S. 17.
[3] Ebenda S. 28 f.
[4] Theon v. Alexandria S. 116.
[5] Diophant II S. 11 ff.; ἀπὸ τῶν ε̄ ἀφαιρουμένων γ̄ καταλείπονται β̄ (S. 14).
[6] Theon S. 112 ff. [7] Barlaam III. Buch S. 9 (πόρισμα δεύτερον).

dividiert durch eine μοῖρα, ergibt dasselbe εἶδος; πᾶν εἶδος dividiert durch πρῶτα, gibt das vorhergehende εἶδος (τὸ προσεχῶς πρὸ αὐτοῦ); πᾶν εἶδος dividiert durch δεύτερα ergibt τὸ δὶς πρὸ αὐτοῦ, durch τρίτα, τὸ τρὶς πρὸ αὐτοῦ usw.[1] Damit konnte man auch ohne die sonst recht umständlich in Proportionsform gegebene Regel[2] die vorkommenden Divisionsaufgaben erledigen.

Die Logoi.

Im Zusammenhang mit der Betrachtung der Brüche muß auch auf die λόγοι eingegangen werden, die vielfach da auftreten, wo wir Brüche erwarten. Ihre Einteilung in 5 Hauptgruppen wird von allen Autoren, die „zur Einführung in die Philosophie" Arithmetikbücher verfaßten, ausführlich geschildert. Boetius übernimmt diese Einteilung, aus der wir die lateinischen Namen der griechischen Termini erfahren.[3]

In seiner Theorie der Arithmetik betrachtet Nikomachos zuerst die Zahlen für sich (τὸ καθ' αὐτὸ ποσόν) und dann in ihrem Verhalten zueinander (μετερχόμεθα καὶ ἐπὶ τὸ πρός τι).[4] Hier geht er bei der Behandlung des ungleichen „gegenseitigen Verhältnisses" auf die fünf verschiedenen Arten (εἶδος) des Verhältnisses ein.

Ia) Im πολλαπλάσιος λόγος a:b ist der πρόλογος a ein Vielfaches des ὑπόλογος (= ὑπαριθμός) b. Die einzelnen Glieder werden auch ὅροι genannt. Iamblichos definiert so: ..., ὅταν δυεῖν ὅρων ὁ ἕτερος τὸν ἕτερον πλεονάκις ἢ ἅπαξ καταμετρῇ πληρούντως.[5] Zu dem πολλαπλάσιος λόγος gehört als Gegenstück

Ib) der ὑποπολλαπλάσιος λόγος. Hier ist b ein Vielfaches von a, so daß der Zahlenwert (ποσότης, πηλικότης)[6] des ὑποπολλαπλάσιος

[1] Also: $60^{m}/60^{-3} = 60^{m+3}$.

[2] Barlaam III. Buch Satz 9.

[3] Boetius S. 46 ff.

[4] Nikomachos 1 S. 44f.

[5] Über den ἐπιμόριος λόγος in einer voreuklidischen arithmetischen Schrift siehe Tannery, M. sc. III S. 244 ff. Die Logoi werden behandelt von Nikomachos, Theon v. Smyrna, Iamblichos, Domninos, Pseudopsellos, Boetius, Martianus Capella; ferner geometrisch bei Euklid und numerisch in den Euklidscholien.

[6] Siehe oben S. 411.

λόγος immer ein Stammbruch ist, während er für den πολλαπλάσιος λόγος die „gleichnamige" ganze Zahl war.

IIa) Der ἐπιμόριος λόγος ist dann gegeben, wenn a die mit ihr verglichene Zahl einmal ganz enthält und noch einen Stammbruchteil von ihr dazu, also $a = b + 1/n \cdot b = \frac{n+1}{n} \cdot b$. Es ist die ratio superparticularis von Boetius. Nikomachos definiert: ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ τὸν συγκρινόμενον ὅλον καὶ μόριον αὐτοῦ ἕν τι;[1] eine andere Definition, die dasselbe besagt, lautet: λόγος, ὅταν τῶν συγκρινομένων ὅρων ὁ μείζων ἔχῃ τὸν λοιπὸν καὶ ἔτι ἓν αὐτοῦ μόριον γενικῶς.[2]

IIb) Der ὑπεπιμόριος λόγος liegt vor, wenn umgekehrt $b = a + 1/n \cdot a$ ist, oder $a = \frac{n}{n+1} \cdot b$.

IIIa) Die nächste Gruppe umfaßt den ἐπιμερὴς λόγος (superpartiens). Hier ist $a = b + \frac{m}{n} \cdot b = \frac{m+n}{n} \cdot b$. Ein ἐπιμερὴς λόγος ist z. B. der ἐπιδίτριτος λόγος 5:3. Zu 3 kommen beim πρόλογος noch 2/3 von 3 dazu (ἐπί und δίτριτος), was unter dem Gesichtspunkt der Komplementbrüche auch als ἐπιδιμερής (es kommen noch die 2 Teile dazu!) bezeichnet wird (sogar δὶς ἐπίτριτος!).

IIIb) Im ὑπεπιμερὴς λόγος (subsuperpartiens) ist umgekehrt $a = \frac{n}{m+n} \cdot b$.

IVa) Im πολλαπλασιεπιμόριος λόγος (multiplex superparticularis) enthält der πρόλογος den ὑπόλογος öfter als einmal ganz sowie noch einen Stammbruchteil desselben dazu, also z. B. 16:5; hier ist $16 = \left(3 + \frac{1}{5}\right) \cdot 5$.

IVb) Die Umkehrung ist der ὑποπολλαπλασιεπιμόριος λόγος (multiplex subsuperparticularis); z. B. 5:16 = 1:3 1/5.

Va) Beim πολλαπλασιεπιμερής λόγος (multiplex superpartiens) ist der πρόλογος ein Vielfaches des ὑπόλογος, der noch um „μέρη" von ihm vergrößert ist, z. B. 17:5. Es ist $17 = \left(3 + \frac{2}{5}\right) \cdot 5$.

[1] Nikomachos 1 S. 49. Wir haben also denselben Terminus (συγκρίνειν) wie beim Dividieren! Siehe oben S. 399.

[2] Iamblichos 1 S. 40.

Vb) Die Umkehrung 5:17 = 5:[(3 + 2/5) · 5] heißt: ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς λόγος (multiplex subsuperpartiens).

Einige Beispiele seien noch mit ihren griechischen und lateinischen Namen angegeben. Es gehören zu:

I a) πολλαπλάσιος = multiplex 2 : 1 = 2 διπλάσιος duplus (numerus); 3:1 = 3 τριπλάσιος triplus; 4:1 = 4 τετραπλάσιος quadruplus; n:1 = n πολυπλάσιος (ὁσαπλάσιος) multiplus.

I b) ὑποπολλαπλάσιος = submultiplex 1:2 = 1/2 ὑποδιπλάσιος subduplus; 1:3 = 1/3 ὑποτριπλάσιος subtriplus; 1:4 = 1/4 ὑποτετραπλάσιος subquatruplus.

II a) ἐπιμόριος = superparticularis 3:2 = 1 1/2 ἡμιόλιος[1] sesqualter, superdimidius; 4:3 = 1 1/3 ἐπίτριτος sesquitertius; 5:4 = 1 1/4 ἐπιτέταρτος sesquiquartus.

II b) ὑπεπιμόριος = subsuperparticularis 2:3 = 2/3 ὑφημιόλιος subsesqualter; 3:4 = 3/4 ὑπεπίτριτος subsesquitertius; 4:5 = 4/5 ὑπεπιτέταρτος subsesquiquartus.

III a) ἐπιμερής = superpartiens 5:3 = 1 2/3 ἐπιδιμερής = ἐπιδίτριτος = δισεπίτριτος superbipartiens, superbitertius. 7:4 = 1 3/4 ἐπιτριμερής = ἐπιτριτέταρτος = τρισεπιτέταρτος supertripartiens, supertriquartus; 7:5 = 1 2/5 δισεπίπεμπτος; 8:5 = 1 3/5 τρισεπίπεμπτος = ἐπιτρίπεμπτος; 9:5 = 1 4/5 ἐπιτετραμερής = ἐπιτετράπεμπτος superquadripartiens, superquadriquintus.

III b) ὑπεπιμερής = subsuperpartiens 3:5 = 3/5 ὑπεπιδίτριτος[2]; 5:8 = 5/8 ὑπεπιτρίπεμπτος.

IV a) πολλαπλασιεπιμόριος = multiplex superparticularis 5:2 = 2 1/2 διπλασιεφήμισυς duplex sesqualter; 7:3 = 2 1/3 διπλασιεπίτριτος duplex sesquitertius; 7:2 = 3 1/2 τριπλασιεφήμισυς triplex sesqualter; 16:5 = 3 1/5 τριπλασιεπίπεμπτος triplex sesquiquintus.

IV b) ὑποπολλαπλασιεπιμόριος = submultiplex superparticularis 2:5 = 2/5 ὑποδιπλασιεφήμισυς subduplex sesqualter; 3:7 = 3/7 ὑποδιπλασιεπίτριτος subduplex sesquitertius.

[1] ὁ πρὸς τῷ ὅλῳ καὶ τὸ ἥμισυ ἔχων.

[2] Hierfür konnte ich keine speziellen Beispiele finden.

V a) πολλαπλασιεπιμερής = multiplex superpartiens 8:3 = 2 2/3 διπλασιεπιδιμερής = διπλασιεπιδίτριτος duplex superbipartiens; 11:4 = 2 3/4 διπλασιεπιτριμερής = διπλασιεπιτριτέταρτος duplex supertripartiens; 19:5 = 3 4/5 τριπλασιεπιτετραμερής = τριπλασιεπιτετράπεμπτος triplex superquadripartiens.

V b) ὑποπολλαπλασιεπιμερής = submultiplex superpartiens 3:8 = 3/8 ὑποδιπλασιεπιδίτριτος subduplex superbipartiens; 4:11 = 4/11 ὑποδιπλασιεπιτριτέταρτος; 6:23 = 6/23 ὑποτριπλασιεπιπένθεκτος.

Die *λόγοι* als Brüche, der Bruch als *ἀριθμός*.

Es war oben[1] davon die Rede, daß die griechische Mathematik keine Brüche gekannt haben soll, sie habe dafür immer die Logoi verwendet. Es ist richtig, daß die wissenschaftliche Mathematik die Brüche auszuschalten suchte, wenigstens für die Zeit ihrer ersten Blüte. Daß aber der beabsichtigte Zweck nur unvollkommen erreicht wurde, zum Teil wohl wegen der Unmöglichkeit, sich vollständig von logistischen Gedanken freizumachen, zeigen zahlreiche Beispiele von Archimedes bis in die Spätzeit. Ein Teil der Autoren wollte aber vielleicht den philosophischen Glaubenssatz von der Vornehmheit der ganzen Zahl[2] bewußt nicht mitunterschreiben.

Daß man bei der Festsetzung der Terminologie immer an die Brüche dachte, ist schon daraus zu sehen, daß alle Fachwörter mit μόριον und μέρη gebildet sind. Schon dadurch ist ein enger Zusammenhang zwischen den Logoi und den Brüchen, insbesondere mit dem Komplementbruch (ὑπεπιμόριος) hergestellt.*) Im ἐπιμόριος λόγος a:b = (n + 1):n ist der πρόλογος gleichbedeutend mit der gemischten Zahl $1\frac{1}{n}$ b. Wenn Archimedes davon spricht, daß BΔ „gegenüber EZ ein Drittel dazu an Größe ist" (= ἐπίτριτος τᾶς EZ μάκει), so meint er nicht nur BΔ:EZ = 4:3, sondern ebenfalls BΔ = 4/3 EZ[3]. Des Archimedes Kommentator

[1] Siehe oben S. 410ff.

[2] Siehe oben S. 410, Fußn. 1.

[3] Archimedes II S. 302.

*) Dette er en komplementbrøk; men hele gruppen af navne tyder på, at denne specielle kategori blot er udskilt som analog til επιμοριος, med 2. led i forholdet som det der var "en μόριος extra"

Eutokios weist ausdrücklich darauf hin, daß man bei den Logoi ohne Teilung der Einheit nicht auskommt.[1]

Auch die Entstehung der beiden Formen (des arithmetischen Logos sowohl wie des Bruches) aus derselben Operation, dem Dividieren, zeigt ebenfalls die nahe Verwandtschaft. Wie dem Berechnen des allgemeinen Bruches ein συγκρίνειν vorhergehen muß, so werden auch beim gegenseitigen Verhältnis zweier Zahlen diese miteinander „verglichen".[2] Genau wie bei dem Dividieren heißt es auch hier ἀριθμὸς ἐπειδὰν ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρῆται . . . oder ἐπειδὰν μείζονι συγκρίνηται.[3] Auch bei den Logoi kommt, wenn sein Wert untersucht werden soll, wie bei der Division nach dem συγκρίνειν das ἀφαιρεῖν des Kleineren von dem Größeren (εἰ δὲ πλεονάκις ἢ ἅπαξ ἀφαιρεθεὶς ὁ ἐλάττων ἀπὸ τοῦ μείζονος. . . .).[4] Der Logos hat genau wie der Bruch seinen Zahlenwert, seine Quantität (πηλικότης; ποσότης). So ist die πηλικότης des ἡμιόλιος λόγος 1 ½ (μονὰς ᾱ καὶ ἥμισυ). Von ihr sprechen Domninos[5] und Barlaam;[6] dieser definiert die πηλικότης – genau wie bei der Division den Quotienten – als die Zahl, mit der man den ὑπόλογος (Divisor) multiplizieren muß, um den πρόλογος (Dividenden) zu erhalten: πηλικότης λόγου ἐστὶ ἀριθμός, ὃς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν τοῦ λόγου ὑπόλογον ὅρον, ποιεῖ τὸν πρόλογον. An einer anderen Stelle[7] wird zur Aufgabe: εὑρεῖν τοῦ δοθέντος λόγου A:B τὴν πηλικότητα angegeben, daß A durch B geteilt werden muß (μερισθήτω ὁ A παρὰ τὸν B). Daß es sich dabei nicht um eine spätbyzantinische Auffassung handelt, zeigen die Zeugnisse früherer Zeit. So wird bei Archimedes[8] der λόγος 6336 :2017 1/4 der Zahl 3 10/71 in Annäherung gleichgesetzt. Es heißt da: ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ, ϛτλϛ πρὸς ͵βιζ δ' (= 6336:2017 1/4) ἅπερ τῶν ͵βιζ δ' μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα' (= 3 10/71).

[1] Siehe u. S. 455.
[2] Siehe o. S. 447.
[3] Nikomachos 1 S. 46, 47.
[4] Domninos 1 S. 420.
[5] Domninos 2 § 3 „αἱ τῶν λόγων πηλικότητες".
[6] Barlaam V. Buch, Def. 1.
[7] Ebenda V. Buch, Satz 1.
[8] Archimedes I S. 242.

An einer anderen Stelle[1] ist das Verhältnis 11:1148 ungefähr der Zahl 1/100 (= 11/1100) gleichgesetzt. Noch eine dritte Stelle ist dafür anzugeben. Sie lautet:[2] εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ μείζων ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας ἐς δισμύρια τούτων ϙθ μέρεα.

Es wird hier aus der Verhältnisungleichung ΟΘΜ:ΛΔΞ > 99 :100 gefolgert, daß ΟΘΜ > 99/100 ΛΔΞ oder, da ΛΔΞ > 1/200 R, daß ΟΘΜ > 99/20 000 R ist. Hieraus ergibt sich wenigstens für Archimedes die Identität von Bruch und Verhältnis, das ja auch wie ein Bruch gekürzt werden kann.[3] Dasselbe sehen wir auch bei Pseudo-Psellos.[4] Wenn dieser bei der Behandlung des regelmäßigen Fünfecks sagt, daß ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου (γωνία) ἐπίπεμπτος ἔσται ὀρθῆς, so will er damit das gleiche sagen wie 7 Seiten später, wo es heißt: Der rechte Winkel und ein Fünftel (γωνία ὀρθὴ καὶ πέμπτον).

Auch Eutokios spricht in einem Kommentar zu den Kegelschnitten des Apollonios[5] von dem Zahlenwert des Logos: Wenn man ihn mit dem zweiten Glied des Verhältnisses multipliziert, erhält man das erste (ὅτι αὐτὴ ἡ πηλικότης πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου ποιεῖ τὸν ἡγούμενον). Nikomachos,[6] ein sonst unbekannter Heronas[7] und Barlaam[8] sprechen dasselbe aus.

Sollen, was z. B. für die Akustik von Bedeutung ist, Verhältnisse miteinander multipliziert oder dividiert werden, so entwickeln sich Rechnungen, die der Multiplikation und Division von Brüchen entsprechen. Man hieß dies „zusammenlegen" und „wegnehmen" der Logoi. So ist bei Domninos zu lesen: „Man sagt, ein Logos ist aus Verhältnissen zusammengesetzt, wenn die miteinander multiplizierten Quantitäten[9] der Verhältnisse ein solches machen" (λόγος δὲ ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν

[1] Ebenda II S. 230.
[2] Ebenda II S. 233.
[3] Siehe oben S. 377, 429.
[4] S. 79.
[5] Apollonios II S. 218.
[6] Nikomachos 2; nach Eutokios (Archimedes III S. 120).
[7] Archimedes III S. 120.
[8] Barlaam V. Buch, Def. 1.
[9] Über ποσότης und πηλικότης siehe auch oben S. 411.

λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα)[1]. In der nachträglich, aber doch vor Theons Redaktion,[2] eingesetzten fünften Definition des VI. Buches der „Elemente" steht derselbe Satz; Archimedes,[3] Eutokios,[4] die Scholien zu Euklid[5] und Barlaam[6] beschäftigen sich mit ihm. Man kann also die Zahlenwerte der Logoi, wobei es sich nicht immer um die Abmessungen von geometrischen Größen handelt,[7] multiplizieren und dividieren. In einem Beispiel[8] werden die Logoi 2:40 und 40:8 zu 2:8 „zusammengesetzt", also $(2:40) \cdot (40:8) = 2:8$ berechnet. Im Text steht: $2:40 = 1/20$ (εἰκοστόν μέρος, nicht vielleicht ὑπεικοσιπλάσιος) und $40:8 = 5$; da nun $1/20 \cdot 5 = 1/4$ ist, ergibt sich das Resultat $2:8 = 1/4$ (τέταρτον μέρος). Dies alles entspricht genau dem Multiplizieren eines Bruches; man sieht deutlich, wie der Rechner immer dann, wenn es sich um die wirkliche Durchführung der Berechnung eines Logos handelte, nicht von dem Gedanken an die Brüche loskommt. Und daß dies nicht etwa nur die Ansicht von Rechenmeistern war, dafür bürgen die Namen eines Eutokios oder eines Domninos, der in wohltuendem Gegensatz zu den philosophierenden Zahlenmystikern steht.[9]

Auch unter einem andern Gesichtspunkt sind die Stellen, die das Vorhandensein von Brüchen neben den Logoi dartun, bedeutungsvoll. Sie können zum Beweise dienen, daß man nicht immer nur die ganze Zahl als „Zahl" (ἀριθμός) auffaßte. Eutokios spricht an der genannten Stelle[10] von Logoi, deren Quantität eine ganze Zahl ist (δυνατόν ἐστιν ἀριθμὸν ὁλόκληρον εἶναι τὴν πηλικότητα). Also gibt es auch Logoi, deren Quantität keine ganzen Zahlen sind. Zur Beruhigung derer, die an arithmetisch ge-

[1] Domninos 2 § 3; in den Euklidscholien (V, S. 324) ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου.

[2] Euklid II S. 73 Fußn. 2.

[3] Archimedes I S. 190, statt συγκεῖσθαι steht hier συνῆπται.

[4] Archimedes III S. 120 ff.

[5] Euklid VI S. 321 ff. Die πηλικότης von $6:4 = 1\ 1/2$ (S. 330).

[6] Barlaam V. Buch, Def. 2.

[7] Thaer II S. 37 übersetzt „Abmessungen".

[8] Domninos 2 § 5.

[9] Tannery, Mém. sc. II S. 107.

[10] Apollonios II S. 220.

führten Beweisen für Verhältnisregeln Anstoß nehmen, teilt er mit, daß die „Alten" solche Beweise verwendet hätten (μὴ ταραττέτω δὲ τοὺς ἐντυγχάνοντας τὸ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδεῖχθαι τοῦτο· οἵ τε γὰρ παλαιοὶ κέχρηνται ταῖς τοιαύταις ἀποδείξεσι); überhaupt gehörten die Logoi und ihre Quantitäten (πηλικότητες) in den Bereich der Zahlenlehre (λόγοι γὰρ καὶ πηλικότητες λόγων . . . τοῖς ἀριθμοῖς πρώτως ὑπάρχουσιν). An anderer Stelle drückt er sich noch deutlicher aus.[1] Er sagt: „Quantität des Logos heißt die Zahl, nach der der gegebene Logos benannt ist" (. . . πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστι ὁ διδόμενος λόγος). Der Wert des Logos 12:3 wäre beispielsweise 4, da ja der Logos 4:1 (τετραπλάσιος) vorliegt. Die Erklärung beschränkt sich aber nicht auf diese ganzzahligen Logoi. So ist bei ihm die Quantität des Logos $9:12 = 3/4$ (ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ ϑ πρὸς τὴν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα) oder die des Logos $3:2 = 1\frac{1}{2}$ (ἓν ἥμισυ).[2] Man sieht, daß nach der gegebenen Definition der Quantität jetzt auch Brüche zu den „Zahlen" gerechnet werden.

Mit der fortschreitenden Anwendung der für ganze Zahlen gültigen Rechengesetze auf die Zahlen, „die Brüche bei sich haben", scheinen jetzt auch diese zu den „Zahlen" gerechnet worden zu sein. Rhabdas[3] bezeichnet 3 1/3 1/14 1/42 bzw. das Quadrat davon als Arithmos. Auch bei Domninos ist dasselbe zu sehen.[4] Er nennt $1\frac{1}{2}$: „den $1\frac{1}{2}$" (τὸν α' S''), nämlich Arithmos, und nicht „das" (τό). Besonders klar tritt diese Auffassung bei Heron hervor. Soll man geometrische Aufgaben praktisch durchführen, nicht nur theoretisch, wie es Euklid macht, so genügt es nicht, nur die geometrischen Größen (μεγέθη) zu betrachten. Man muß auch die zugehörenden Zahlenwerte heranziehen. Heron spricht da von „Zahlen, die auf den Größen liegen (ἐπικείμενοι ἀριθμοί).[5] Das sind natürlich meist keine ganzen Zahlen. So wird

[1] Archimedes III S. 120.

[2] Archimedes III S. 124, 126. Vgl. S. 452 Fußn. 5.

[3] Rhabdas S. 120.

[4] Domninos 2, § 16. Eine mir während der Drucklegung bekannt gewordene Äußerung Tannerys in einem Brief an Hultsch [Isis 25, 1936, 57–59] zeigt, daß tatsächlich der Logos als Arithmos angesehen werden konnte, womit dieser eben nicht mehr auf den Bereich der ganzen Zahlen beschränkt blieb.

[5] Heron IV S. 80: . . . ἤτοι τῶν μεγεθῶν ἢ τῶν ἐπικειμένων αὐτοῖς ἀριθμῶν. Schon Euklid (III S. 16) verknüpft im Satz X, 5 kommensurable Größen

tatsächlich z. B. 4 4/5 explizit als „Zahl" (ἀριθμός) bezeichnet.[1] Und wenn ein Bruch als Multiplikator auftritt, der ursprünglich nur als ganze Zahl verstanden werden konnte, so ist er eben auch schon zu einer „Zahl" geworden.[2]

Wie sind diese Gegensätze in der Beurteilung von Zahl und Bruch bei den Griechen zu erklären? Sicher war für Euklid nur die ganze Zahl ein Arithmos und Brüche aus der strengen Wissenschaft ausgeschlossen, vor allem wohl deshalb, weil nur so das Irrationale exakt zu fassen war. Aber die „Alten", von denen Eutokios spricht, waren anderer Meinung. Er nennt sogar Archytas[3] als Zeugen dafür, daß Arithmetik und Geometrie verwandte Wissenschaften seien. Deshalb dürfe man – das war die Schlußfolgerung des Eutokios – die eigentlich in das Gebiet der Geometrie (μαθήματα) gehörenden Logoi auch numerisch behandeln, indem man statt der Logoi ihre Quantitäten, ihre Zahlenwerte (πηλικότητες) setzt.

Daß Eutokios damit die richtige Meinung des Archytas wiedergibt, läßt sich sogar aus einer Stelle bei Archytas selbst nachweisen.[4] Er spricht nämlich darüber, daß die Logistik vor den andern Künsten, was den wissenschaftlichen Gehalt anlange, den Vorzug verdiene. So könne sie Beweise führen, wo die Geometrie es nicht fertig brächte, da die logistische Behandlung der Sätze klarer sei (καὶ δοκεῖ ἁ λογιστικὰ ποτὶ τὰν ἄλλαν σοφίαν τῶν μὲν ἀλλᾶν τεχνῶν καὶ πολὺ διαφέρειν, ἀτὰρ καὶ τᾶς γεωμετρικᾶς ἐναργεστέρω πραγματεύεσθαι ἃ θέλει ... καὶ ἃ ἐκλείπει αὖ ἁ γεωμετρία, καὶ ἀποδείξιας ἁ λογιστικὰ ἀπιτελεῖ (!) ...).

Es war schon davon die Rede,[5] daß die neupythagoreische Überlieferung immer wieder den Unterschied zwischen Zahlen und dem Zählbaren hervorhebt. So ist die Einheit (μονάς), die zu dem Gedachten (νοητόν) gehört, vom Standpunkt des Philosophen aus unteilbar, während man die Eins (ἕν) teilen kann, da sie sich auf Wahrnehmbares (αἰσθητόν) bezieht, mit dem es die Logistik zu tun hat, die mit benannten Zahlen rechnet oder mit Zahlen,

mit den zugehörigen Zahlen. Bei Iamblichos 2 (z. B. S. 96 f.) haben die Flächenstücke ihre ποσότης.

[1] Heron IV S. 256.

[2] Siehe o. S. 409.

[3] Apollonios II S. 220, 221 Fußn. 1, hiezu Nikomachos 1, S. 4 u. 5.

[4] Diels, Vorsokratiker. S. 273 (nach 1. Aufl. zitiert). [5] Siehe S. 366.

die „Leiber haben", wie es bei Platon[1] heißt. Diese Auffassung, die den Gegensatz zwischen theoretischer Arithmetik und praktischer Logistik wiedergibt, stimmt überein mit der Beschränkung der Brüche auf die Logistik, an deren Stelle in der Arithmetik die Logoi stehen. Auch in diesem Punkt müssen sich die Ansichten geändert haben; denn es wird ausdrücklich betont,[2] daß dieser Unterschied zwischen „Einheit" und „Eins" früher nicht bestand. Auch hier wird Archytas (und dazu Philolaos) als Zeuge angeführt. Damals war wohl der Unterschied zwischen Arithmetik und Logistik noch nicht klar herausgearbeitet.[3] Später scheint dieser Gegensatz wieder verschwunden oder wenigstens zurückgedrängt zu sein, wenigstens wenn man von den neupythagoreischen Arithmetikbüchern zur Einführung in die Philosophie absieht. Sonst hätte nicht Diophant bei seinen „arithmetischen" Aufgaben den Zahlen, die keine Koeffizienten von x oder x^2 sind, immer ausdrücklich den Zusatz „Monaden" gegeben,[4] auch in einer Aufgabe, in der er mit benannten Zahlen rechnet.[5] Desgleichen muß auch Eutokios die Monas teilen, wenn eine Rechnung (wie z. B. im Satz des Archimedes über Kugelsegmente) wirklich durchgeführt werden soll. Er sagt da, daß man eine Teilung der Einheit zulassen müsse; wer es nicht für die Arithmetik tun wolle, müsse es wenigstens in der Logistik erlauben (ὥστ' ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα, ὃ εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει.[6] Gleichzeitig sieht man, daß jetzt die Logistik nicht mehr wie früher eine Angelegenheit der Rechenmeister ist, sondern daß sie jetzt wieder ein wichtiges Hilfsmittel für die Betrachtung mathematischer Probleme darstellt,[7] wie es bei den „Alten" gewesen war, bei denen Arith-

[1] Platon, Staat VII, 525 D. Zum Unterschied von μονάς und ἕν siehe Theon von Smyrna S. 19 f.

[2] Theon von Smyrna S. 20.

[3] Des Archytas Lebenszeit wird von 428 bis 365 angesetzt, Platons Dialog Gorgias (s. o. S. 361) vielleicht auf 390.

[4] Z. B. $5x^2+13-8x$ ist $\Delta^{Y}\,\bar{\varepsilon}\,\mathring{M}$ (= μονάδες) $\overline{\iota\gamma}$ ⋀ ϛ $\bar{\eta}$ (Diophant I S. 94).

[5] Aufgabe 30 im 5. Buch (Diophant I S. 384).

[6] Archimedes III S. 120.

[7] In dem Gorgiasscholion des Olympiodoros (S. 131) heißt es, daß die Arithmetik sich mit den Arten der Zahlen beschäftigt (z. B. gerade und ungerade), während die Logistik es mit dem Stofflichen (ὕλη) zu tun hat. Und

metik und Logistik ja auch von denselben Lehrern gelehrt wurde.[1]

Aus all dem kann man schließen, daß Eutokios unter den „Alten" die vor der strengen Fundierung des wissenschaftlichen Systems lebenden Mathematiker versteht. Dann folgt die Zeit der ausschließlichen Verwendung der Logoi in der reinen Mathematik, aus der jetzt die Logistik ausgeschlossen ist. Später aber, von der Zeit des Archimedes an, der die Logoi schon hin und wieder durch Brüche, die in der Rechenpraxis nie verschwunden waren, ersetzte und der sich nicht scheute, auch das Irrationale durch numerische Annäherungen zu erfassen, fielen die aus theoretischen Gründen der philosophischen Sauberkeit geschaffenen Beschränkungen des Arithmos auf die ganze Zahl fort, so daß die Brüche wieder zu Ehren kamen und der ausschließliche Gebrauch der Logoi auf die reine Geometrie beschränkt blieb. Nur in den mathematisch wenig hochstehenden, für die Philosophiestudierenden bestimmten Arithmetiklehrbüchern der Neupythagoreer lebt die alte Überlieferung weiter fort. Es scheint überhaupt, daß jetzt (bei Diophant, Eutokios, Domninos usw.) die Logistik zu einer den andern Teilen der Mathematik ebenbürtigen Stellung sich wieder erhoben hat, die sie schon einmal, bei den „Alten", innegehabt hatte, bei denen neben den Geometern auch die Logistiker θηρευτικοί[2] waren, Männer, die der Wahrheit nachjagten.

So glaube ich, daß die Behauptung der Unmöglichkeit, ein Verhältnis einem Bruch gleichzusetzen, und damit auch die der Sonderstellung des Arithmos als ganze Zahl nur mit Einschränkungen gültig ist. Hierbei genügt m. E. der Hinweis auf den Gegensatz zwischen wissenschaftlicher und praktischer Mathemathik nicht, sondern es muß vor allem der Wandel in der Einschätzung der Logistik im Laufe der Entwicklung von Archytas bis Eutokios berücksichtigt werden.

zwar ist bei ihm das Stoffliche in den Zahlen „die Menge der Monaden". Also auch hier gehören die μονάδες nicht mehr zur theoretischen Arithmetik.

[1] Hippias minor 366–368; hiezu Tannery, M. sc. IV 61.

[2] Euthydemos 290 B.

Literaturverzeichnis.[1]

Alexander: Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Topicorum libros octo commentaria, ed. M. Wallies (Comm. in Arist. Graec. II 2), 1891.

Anonymus 1: Anonymus des Pariser Codex 453; in Diophant II S. 3–15.

Anonymus 2: Anonymus des Pariser Codex 387; in Heron IV S. XIV –XVII.

Anonymus 3: Anonymi Logica et Quadrivium, cum scholiis antiquis edidit J. L. Heiberg. Det kgl. Danske Vidensk. Selsk. Hist.-fil. Meddel. XV 1, Kopenhagen 1929. Früher fälschlich Psellos zugeschrieben (ed. Xylander, Basel 1556).

Anthologie: Ad epigrammata arithmetica Scholia Palatini codicis Anthologiae; in Diophant II S. 43–72 sowie in Wertheim S. 330–44.

Apollonios: Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. Leipzig, Vol. I 1891, Vol. II 1893.

Archibald, R. Cl. 1: Outline of the History of Mathematics, 3. Aufl. The Mathem. Assoc. of America, Oberlin 1936.

Archibald, R. Cl. 2: The Cattle Problem of Archimedes, Amer. Math. Monthly 25, 1918, S. 411–14.

Archimedes: Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii iterum edidit J. L. Heiberg, Leipzig, Vol. I 1910, Vol. II 1913, Vol. III 1915.

Aristarch: Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus, a history of Greek astronomy to Aristarchus together with Aristarchus's treatise on the sizes and distances of the sun and the moon. A new Greek text with translation and notes by Sir Thomas Heath, Oxford 1913.

Aristophanes: Aristophanis comoedias edidit Th. Bergk. Vol. I continens Acharnenses, Equites, Nubes, Vespas, Pacem, editio altera correctior, Leipzig 1884.

Aristoteles: Aristotelis Topica cum libro de sophisticis elenchis edidit M. Wallies, Leipzig 1923.

Baillet: Siehe Papyrus Akhmîm.

Barlaam: Barlaami monachi logistica nvnc primvm Latinè reddita, & scholijs illustrata à Joanne Chambero Collegij Etonensis apud Anglos socio. Parisiis M. VI. C. (= 1600). ΒΑΡΛΑΑΜΟΥ ΤΟΥ ΜΟΝΑΧΟΥ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΙΣ ἓξ ὡς εὐφυέστατα περιειλημμένη, ΝΥΝ ΠΡΩΤΟΝ ΕΚΔΟΘΕΙΣΑ ΠΡΟΣ ΙΟΑΝΝΟΥ ΤΟΥ ΧΑΜΒΕΡΟΥ ΑΓΓΛΟΥ, Parisiis M. VI. C (auf der Schlußseite 96 steht M·D·XCIX = 1599).

[1] Außer den im Text genannten Arbeiten sind auch die wichtigsten Bücher und Aufsätze hier aufgenommen, die die griechische Mathematik behandeln.

Becker, O. 1: Mathematische Existenz, Jahrb. Philos. u. phän. Forsch. *8*, 1927, 439–809.

Becker, O. 2: Die diairetische Erzeugung der Platonischen Idealzahlen. Quell. Stud. Gesch. Math. Astron. Phys. B *1*, 1931, 464–501.

Boetius: Boetii de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque. Accedit geometria quae fertur Boetii, edidit G. Friedlein, Leipzig 1867.

Cajori Fl.: A History of Mathematical Notations, Vol. I, Chicago 1928.

Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I³, Leipzig 1907.

Chamber: Siehe Barlaam.

Codex Leidensis: Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt G. Junge, J. Raeder, W. Thomson. Partis III fasc. II. Hauniae 1932.

Codex Paris. 387: Siehe Anonymus 2.

Codex Paris. 453: Siehe Anonymus 1.

Coptic Ostraca: W. E. Crum, Coptic Ostraca from the Collections of the Egypt. Exploration Fund, the Cairo Museum and others, London 1902.

Demel, S.: Platons Verhältnis zur Mathematik (Forschungen zur Geschichte der Philos. u. d. Pädag., *4*. Heft 1: Der ganzen Reihe Heft 10), Leipzig 1929.

Didymos: Mathematici Graeci minores, edidit J. L. Heiberg, Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Hist.-fil. Meddel. XIII 3, Kopenhagen 1927.

Diels, H.: Die Fragmente der Vorsokratiker, 3. Aufl., Berlin 1912.

Dijksterhuis, E. J.: Het getal in de Grieksche wiskunde, Groningen 1930.

Diophant: Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. Tannery, Leipzig, Vol. I 1893, Vol. II 1895.

Domninos 1: ΔΟΜΝΙΝΟΥ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ, in: Anecdota Graeca *4*, 1832, S. 413–29 (ed. J. Fr. Boissonade). Hierzu Übersetzung von Tannery, Mém. sc. III, S. 255–81.

Domninos 2: Πῶς ἐστὶ λόγον ἐκ λόγου ἀφελεῖν, in: Ch.-Em. Ruelle, Texte inédit de Domninus de Larisse sur l'arithmétique avec traduction et commentaire, Revue de Philol. *7*, 1883, S. 82–94.

Euklid: Euclidis elementa. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg, Leipzig, Vol. I–VII 1883–96.

Fettweis, E.: Wie man einstens rechnete, Leipzig und Berlin 1923.

Frank, E.: Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle 1923.

Friedlein, G.: Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert, Erlangen 1869.

Fritz, K. von: Platon, Theaetet und die antike Mathematik, Philologus *87*, 1932, S. 40–62 und 136–78.

Gerstinger, H.-Vogel, K.: Siehe Papyrus Vindobonensis 19996.

Glanville, S. R. K.: The mathematical leather roll in the British Museum. The Journal of Egyptian Archaeology *13*, 1927, S. 332–39.

Günther, S.: Geschichte der Mathematik I, Leipzig 1908.

Hankel, H.: Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874.

Hasse, H.-Scholz, H.: Die Grundlagenkrisis der Griechischen Mathematik, Charlottenburg 1928.

Heath, Sir Th. L. 1: A History of Greek Mathematics, Vol. I: From Thales to Euclid; Vol. II: From Aristarchus to Diophantus, Oxford 1921.

Heath, Sir Th. L. 2: A Manual of Greek Mathematics, Oxford 1931.

Heath, Sir Th. L. 3: Diophantos of Alexandria; a study in the History of Greek Algebra, Cambridge 1885.

Heiberg, J. L.: Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum, München 1925.

Henry, C.: Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum primum editit et notis illustravit C. Henry, Halis Saxoniae 1879.

Herodot: Herodoti historiarum libri IX, edidit H. R. Dietsch. Editio altera curavit H. Kallenberg, Leipzig, Vol. I 1885, Vol. II 1886.

Heron: Heronis Alexandrini opera qvae svpersvnt omnia. Vol. III. Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica, ed. H. Schoene, Leipzig 1903. Vol. IV. Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur geometrica, ed. J. L. Heiberg, Leipzig 1912. Vol. V. Heronis qvae fervntvr stereometrica et de mensuris, ed. J. L. Heiberg, Leipzig 1914.

Homer 1: Homeri Odyssea, edidit G. Dindorf, editio quarta correctior, Leipzig 1878.

Homer 2: Homeri Ilias, edidit G. Dindorf, editio quarta correctior, Leipzig 1878.

Hultsch: Metrologicorum scriptorum reliquiae, ed. F. Hultsch, Vol. I quo scriptores Graeci continentur, Leipzig 1864.

Iamblichos 1: Iamblichi in Nicomachi arithmeticam introductionem liber, ed. H. Pistelli, Leipzig 1894.

Iamblichos 2: Iamblichi de communi mathematica scientia, ed. N. Festa, Leipzig 1891.

Junge, G. 1: Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? (S.-A. aus den Novae Symbolae Joachimicae), Halle a. d. S. 1907.

Junge, G. 2: Besonderheiten der griechischen Mathematik. Jahresb. d. d. Mathem.-Vereinigg. *35*, 1926, S. 66–80, 150–72, 251–68.

Junge, G. 3: Das Euklidische Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Teilers. Forschungen und Fortschritte *8*, 1932, S. 331–32.

Karpinski, L. C.: Michigan Papyrus Nr. 621, Iris *13*, 1922, S. 20–25.

Karpinski, L. C.-Robbins, F. E.: Michigan Papyrus 620: The introduction on algebraic equations in Greece, Science 70, 1929, S. 311–14.

Lietzmann, W.: Eine stereometrische Aufgabensammlung aus vorchristlicher Zeit, Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. *64*, 1933, S. 34–35.

Löffler, E.: Ziffern- und Ziffernsysteme. I. Teil: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1928.

Loria, G.: Storia delle Matematiche I, Torino 1929.

Luria, S.: Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten, Quell. Stud. Gesch. Mathem. Astron. Physik. B *2*, 1932, S. 106–85.

Martianus Capella: Edidit A. Dick, Leipzig 1925.

Mathematici Graeci minores: Siehe Didymos.

Maximos Planudes: Siehe Planudes.

Nagl, A.: Die Rechentafel der Alten, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Phil.-Hist. Kl. *177*, 1914, 5. Abh.

Nesselmann, G. H. F.: Die Algebra der Griechen, Berlin 1842.

Neugebauer, O.: Apollonius-Studien ⟨Studien zur Geschichte der antiken Algebra II⟩, Quell. Stud. Gesch. Mathem., Astron. Technik B *2*, 1932, S. 215–54.

Nikomachos 1: Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri II, recensuit R. Hoche, Leipzig 1866.

Nikomachos 2: Νικομάχου ἁρμονικὸν ἐγχειρίδιον, in: Musici Graeci scriptores, ed. C. Janus, Leipzig 1895, S. 209–82.

d'Ooge, M. L.-Robbins, F. E.-Karpinski, L. Ch.: Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic, New York 1926.

Pachymeres: Georgii Pachymerae arithmetices capitula viginti (ex Veneto codice Naniano 255), in Diophant II S. 78–122.

Pappos: Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt, ed. F. Hultsch, Berlin, Vol. I 1876, Vol. II 1877, Vol. III 1878.

Papyrus Akhmîm: Le papyrus mathématique d'Akhmîm par J. Baillet. Mém. Miss. Arch. Fr. au Caire, *9* (fasc. I), Paris 1892.

Papyrus Ayer: E. J. Goodspeed, The Ayer Papyrus: A mathematical fragment. The Amer. Journ. of Philology, *19*, 1898, S. 25–39.

Papyrus Berlin 11529: W. Schubart, Mathematische Aufgaben auf Papyrus. Amtl. Berichte aus den kgl. Kunstsammlungen, *37*, Berlin 1915–16, Kol. 161–70.

Papyrus London 267: F. G. Kenyon, Greek papyri in the British Museum, London, Vol. II 1898.

Papyrus London 2241: W. E. Crum-H. J. Bell, Wadi Sarga, Coptic and Greec texts from the excavations ... Hauniae, 1922, S. 53–57.

Papyrus Michigan 620: F. E. Robbins, P. Mich. 620: A series of arithmetical problems, Classical Philology *24*, 1929, S. 321–29.

Papyrus Michigan 621: F. E. Robbins, A Greco-Egyptian Mathematical Papyrus, Classical Philology *18*, 1923, S. 328–33.

Papyrus Tebtunis 87: B. P. Grenfell-A. S. Hunt-J. G. Smily, The Tebtunis Papyri, Vol. I London 1902.

Papyrus Graecus Vindobonensis 19996: H. Gerstinger-K. Vogel, Eine stereometrische Aufgabensammlung im Papyrus Graecus Vindobonensis 19996, Mitteilung aus der Papyrussammlung Erzherzog Rainer, Neue Serie, I. Folge, Wien 1932, S. 11–76.

Pediasimos: G. Friedlein, Die Geometrie des Pediasimus, Programm Ansbach 1866.

Planudes: Das Rechenbuch des Maximus Planudes, herausgeg. von C. J. Gerhardt, Halle 1865. (se ogrà Wäschke)

Platon: Platonis dialogi secundum Thrasylli tetralogias dispositi. Ex recognitione C. F. Hermanni, Leipzig, Vol. I 1881, Vol. II 1873, Vol. III 1885, Vol. IV 1887, Vol. V 1877, Vol. VI 1884.

Proklos: Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii ex recognitione G. Friedlein, Leipzig 1873.

Pseudo-Psellos: Siehe Anonymus 3.

Ptolemaios: Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia Vol. I. Syntaxis mathematica; ed. J. L. Heiberg, Leipzig, 1. Teil 1898, 2. Teil 1903.

R.-E.: Paulys Real-Encyklopädie der classischen Altertumswissenschaft, Neue Bearbeitung, herausgeg. von G. Wissowa, Stuttgart 1894 ff.

Rehm, A.-Vogel, K.: Exakte Wissenschaften, in Gercke-Norden, Einleitung in die Altertumswissenschaft, II. Bd., 2. Teil, 5. Heft, Leipzig-Berlin 1933, 4. Auflage.

Revillout, E.: Mélanges sur la métrologie, l'économie politique et l'histoire de l'ancienne Égypte, Paris 1895.

Rey, A.: La Jeunesse de la science grecque, Paris 1933.

Rhabdas: Tannery, P., Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte grec et traduction); in: Tannery, M. sc. IV S. 61–198.

Robbins, F. E.: P. Mich. 620: A series of arithmetical problems, Classical Philology *24*, 1929, S. 321–29.

Rome, A.: Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. Texte établi et annoté par A. R., Tome I Pappus d'Alexandrie, Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste [Studi e testi 54], Rom 1931.

Rudio, F.: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates, Leipzig 1907.

Sachs, E. 1: De Theaeteto Atheniensi mathematico scripsit E. Sachs, Diss. Berlin 1914.

Sachs, E. 2: Die 5 platonischen Körper, Berlin 1917.

Sandford, V.: A short history of mathematics, Boston 1930.

Sarton, G.: Introduction to the History of Science, Volume I, from Homer to Omar Khayyam, Baltimore 1927.

Schmidt, M. C. P.: Kulturhistorische Beiträge zur Kenntnis des griechischen und römischen Altertums, 1. Heft: Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik, Leipzig 1914.

Schol. Ach. Stat. I 93: P. Papinii Statii Achilleis et Thebais rec. Ph. Kohlmann, Leipzig 1879.

Schol. Eurip. Or. 432: Schol. Eurip. ed. E. Schwartz, Berlin 1887. 1891.

Sethe, K.: Von Zahlen und Zahlwörtern bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Schriften d. Wiss. Ges. Straßburg, 25. H., Straßburg 1916.

Sextos Empirikos: Sexti Empirici opera rec. H. Mutschmann, Vol. II adversus dogmaticos libros quinque continens, Leipzig 1914.

Smith, D. E. 1: History of Mathematics, Boston 1923, 1925, 2 Bd.

Smith, D. E. 2: Note on a Greek Papyrus in Vienna, Amer. Math. Monthly *39*, 1932, 425.

Solmsen, F.: Platos Einfluß auf die Bildung der mathematischen Methode, Quell. Stud. Gesch. Mathem. Astron. Phys. B *1*, 1929, S. 93 bis 107.

Stenzel, Jul. 1: Anschauung und Denken in der klassischen Theorie der griechischen Mathematik, Forschungen und Fortschritte *9*, 1933, S. 94–95.

Stenzel, Jul. 2: Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Leipzig-Berlin 1933, 2. Aufl.

Suidas: Suidae Lexicon graece et latine edidit Th. Gaisford-Bernhardy, Halle 1853.

Tannery, P.: Pour l'Histoire de la Science hellène, Paris 1930.

Tannery, M. sc.: Mémoires scientifiques, publiés par J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen, Toulouse-Paris I 1912, II 1912, III 1915, IV 1920.

Thaer, Cl.: Die Elemente von Euklid. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Cl. Th., Leipzig, I. Teil 1933 (Buch I–III), II. Teil 1933 (Buch IV–VI).

Theon von Alexandria: ΘΕΩΝΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΗΣ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ. Commentaire de Théon d'Alexandrie, sur le premier livre de la composition mathématique de Ptolemée, par M. l'abbé Halma, Tome I, Paris 1821.

Theon von Smyrna: Theonis Smyrnaei expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, rec. E. Hiller, Leipzig 1878.

Theophrast: Theophrastus Characteres edidit O. Immisch, Leipzig 1923.

Thomson, H.: A Byzantine Table of Fractions, Ancient Egypt *1*, 1914, S. 52–54.

Thureau-Dangin, F.: Esquisse d'une histoire du système sexagésimal, Paris 1932.

Tod, M. N.: The Greek numeral notation, The Annual of the British School at Athens Nr. XVIII (1911–12) S. 98–132.

Töplitz 1: Mathematik und Antike, Die Antike *1*, 1925, S. 175–203.

Töplitz 2: Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato, Quell. Stud. Gesch. Math., Astron. Phys. B *1*, 1929, S. 3–33.

Tropfke, Joh.: Geschichte der Elementarmathematik, 2. Aufl. Bd. I–VII, Berlin-Leipzig 1921–24, 3. Aufl. Bd. I 1930, Bd. II 1933.

Vasconcellos, F. de Almeida e: História das Matemáticas na Antiguidade, Paris-Lisboa 1925.

Vogel 1: Erweitert die Lederrolle unsere Kenntnis ägyptischer Mathematik? Arch. f. Gesch. d. Math., d. Naturw. u. d. Techn. *11*, 1929, S. 386–407.

Vogel 2: Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik, München 1929.

Vogel 3: Die algebraischen Probleme des P. Mich. 620, Classical Philol. *25*, 1930, S. 373–75.

Vogel 4: Eine neue Quelle ältester griechischer Algebra, Zeitschr. f. d. math. u. naturw. Unterr. *62*, 1931, S. 266–71.

Wäschke, H.: Das Rechenbuch des Maximus Planudes aus dem Griechischen übersetzt, Halle 1878.

Wertheim, G.: Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria, Leipzig 1890.

Wieleitner, H.: Geschichte der Mathematik I, Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts, Berlin-Leipzig 1922.

Zeuthen, H. G. 1: Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896.

Zeuthen, H. G. 2: Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter, Leipzig-Berlin 1912.[1]

---

[1] Hinzuweisen ist noch auf die inzwischen erschienene schöne Arbeit von J. Klein, Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra (Quell. Stud. Gesch. Math., Astr. u. Ph. B *3*, 1934, 18–105).

Namenverzeichnis

[1] Zum Namen s. Friedlein S. 73.

Sachverzeichnis