

WERKSTATTBÜCHER

HERAUSGEBER H.HAAKE

HEFT 90

V. HAPPACH

**TECHNISCHES
RECHNEN**

II. TEIL

ZWEITE AUFLAGE



SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

WERKSTATTBÜCHER

FÜR BETRIEBSBEAMTE, KONSTRUKTEURE U. FACHARBEITER
HERAUSGEGEBEN VON DR.-ING. H. HAAKE VDI

Jedes Heft 50—70 Seiten stark, mit zahlreichen Textabbildungen
Preis: RM 2.— oder, wenn vor dem 1. Juli 1931 erschienen, RM 1.80 (10% Notnachlaß)
Bei Bezug von wenigstens 25 beliebigen Heften je RM 1.50

Die Werkstattbücher behandeln das Gesamtgebiet der Werkstattstechnik in kurzen selbständigen Einzeldarstellungen; anerkannte Fachleute und tüchtige Praktiker bieten hier das Beste aus ihrem Arbeitsfeld, um ihre Fachgenossen schnell und gründlich in die Betriebspraxis einzuführen. Die Werkstattbücher stehen wissenschaftlich und betriebstechnisch auf der Höhe, sind dabei aber im besten Sinne gemeinverständlich, so daß alle im Betrieb und auch im Büro Tätigen, vom vorwärtsstrebenden Facharbeiter bis zum leitenden Ingenieur, Nutzen aus ihnen ziehen können. Indem die Sammlung so den einzelnen zu fördern sucht, wird sie dem Betrieb als Ganzem nutzen und damit auch der deutschen technischen Arbeit im Wettbewerb der Völker.

Einteilung der bisher erschienenen Hefte nach Fachgebieten

I. Werkstoffe, Hilfsstoffe, Hilfsverfahren

	Heft
Das Gußeisen. 2. Aufl. Von Chr. Gilles	19
Einwandfreier Formguß. 2. Aufl. Von E. Kothny	30
Stahl- und Temperguß. 2. Aufl. Von E. Kothny	24
Die Baustähle für den Maschinen- und Fahrzeugbau. Von K. Krekeler	75
Die Werkzeugstähle. Von H. Herbers	50
Nichteisenmetalle I (Kupfer, Messing, Bronze, Rotguß). 2. Aufl. Von R. Hinzmann	45
Nichteisenmetalle II (Leichtmetalle). 2. Aufl. Von R. Hinzmann	53
Härten und Vergüten des Stahles. 4. Aufl. Von H. Herbers	7
Die Praxis der Warmbehandlung des Stahles. 5. Aufl. Von P. Klostermann. (Im Druck)	8
Elektrowärme in der Eisen- und Metallindustrie. Von O. Wundram	69
Brennhärten. 2. Aufl. Von H. W. Grönegreß. (Im Druck)	89
Die Brennstoffe. Von E. Kothny	32
Öl im Betrieb. 2. Aufl. Von K. Krekeler	48
Farbspritzen. Von R. Klose	49
Rezepte für die Werkstatt. 4. Aufl. Von F. Spitzer	9
Furniere — Sperrholz — Schichtholz I. Von J. Bittner	76
Furniere — Sperrholz — Schichtholz II. Von L. Klotz	77

II. Spangebende Formung

Die Zerspanbarkeit der Werkstoffe. 2. Aufl. Von K. Krekeler	61
Hartmetalle in der Werkstatt. Von F. W. Leier	62
Gewindeschneiden. 3. Aufl. Von O. M. Müller	1
Wechselräderberechnung für Drehbänke. 5. Aufl. Von E. Mayer. (Im Druck)	4
Bohren. 3. Aufl. Von J. Dinnebieer	15
Senken und Reiben. 3. Aufl. Von J. Dinnebieer. (Im Druck)	16
Innenräumen. 2. Aufl. Von L. Knoll	26
Außenräumen. Von A. Schatz	80
Das Sägen der Metalle. Von H. Hollaender	40
Die Fräser. 3. Aufl. Von E. Brödner	22
Das Fräsen. Von Dipl.-Ing. H. H. Klein	88
Das Einrichten von Automaten I (Die Automaten System Spencer und Brown & Sharpe). Von K. Sachse. (Vergriffen)	21
Das Einrichten von Automaten II (Die Automaten System Gridley [Einspindel] und Cleveland und die Offenbacher Automaten). Von Ph. Kelle, E. Gothe, A. Kreil	23
Das Einrichten von Automaten III (Die Mehrspindel-Automaten, Schnittgeschwindigkeiten und Vorschübe). Von E. Gothe, Ph. Kelle, A. Kreil	27
Das Einrichten von Halbautomaten. Von J. v. Himbergen, A. Bleckmann, A. Wassmuth	36
Die wirtschaftliche Verwendung von Einspindelautomaten. Von H. H. Finkelnburg	81
Die wirtschaftliche Verwendung von Mehrspindelautomaten. Von H. H. Finkelnburg	71
Werkzeugeinrichtungen auf Einspindelautomaten. Von F. Petzoldt	83
Maschinen und Werkzeuge für die spangebende Holzbearbeitung. Von H. Wichmann	78

III. Spanlose Formung

Freiformschmiede I (Grundlagen, Werkstoff der Schmiede, Technologie des Schmiedens). 2. Aufl. Von F. W. Duesing und A. Stodt	11
Freiformschmiede II (Schmiedebeispiele). 2. Aufl. Von B. Preuss und A. Stodt	12
Freiformschmiede III (Einrichtung und Werkzeuge der Schmiede). 2. Aufl. Von A. Stodt	56

(Fortsetzung 3. Umschlagseite)

WERKSTATTBÜCHER
FÜR BETRIEBSBEAMTE, KONSTRUKTEURE UND FACH-
ARBEITER. HERAUSGEBER DR.-ING. H. HAAKE VDI
===== HEFT 90 =====

Technisches Rechnen

Zweiter Teil

**Zeichnerische Darstellungen als Rechenhilfsmittel
(Graphisches Rechnen) mit Beispielen aus der
Technik und ihren Hilfswissenschaften**

Von

Dr. phil. Vollrat Happach

Oberingenieur, Stettin

Zweite, umgearbeitete Auflage
(7. bis 12. Tausend)

Mit 141 Abbildungen im Text



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1943

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einführung	3
I. Geometrische Konstruktion algebraischer Ausdrücke	4
1. Allgemeines S. 4. — 2. Darstellung von Einzelwerten durch Strecken S. 5. —	
3. Darstellung allgemeiner algebraischer Beziehungen S. 6.	
II. Die graphische Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem	8
4. Graphische Ausgleichung der auf Grund von Messungen aufgestellten Kurven	
S. 8. — 5. Die Verstreckung von Kurven und Kurvenscharen S. 10. — 6. Der	
Vorwärtsabschnitt als Messungsprinzip S. 13.	
III. Linien- und Parallelkoordinaten	15
A. Funktionsleitern	15
7. Allgemeine arithmetische Zusammenhänge S. 15. — 8. Der Teilungsmodul	
S. 18. — 9. Die projektive Teilung S. 19. — 10. Die graphische Interpolation	
S. 21. — 11. Die logarithmische Teilung S. 21. — 12. Trigonometrische Teilungen	
S. 24.	
B. Rechentafeln für drei und mehr Veränderliche	26
13. Zusammenhang zwischen Parallel- und rechtwinkligen Koordinaten S. 26. —	
14. Fluchtlinientafeln für $f_1 + f_2 = f_3$ S. 28. — 15. Zusammenhänge der Form	
$f_1 f_3 + f_2 \varphi_3 + \psi_3 = 0$ S. 30. — 16. Andere funktionelle Zusammenhänge S. 33. —	
17. Gekoppelte Funktionen S. 34. — 18. Empirische Zusammenhänge S. 35.	
19. Umformen von Diagrammen S. 37. — 20. Graphische Darstellungen als	
Grundlage für mechanische Rechenhilfsmittel S. 40.	
IV. Die Aufgabenstellung der Praxis	48
21. Technische Aufgaben mit vorwiegend mathematischem Kern S. 48. —	
22. Das Meßinstrument als Rechenmaschine S. 50.	

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN 978-3-662-41734-8

ISBN 978-3-662-41875-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-41875-8

Einführung.

Die Rechenhilfsmittel der Technik lassen sich etwa wie folgt einteilen:

1. Mathematisch-technische Formeln.
2. Zahlentafeln.
3. Graphische Darstellungen.
4. Mechanische Rechenhilfsmittel.

Die mathematisch-technischen Formeln und Tabellen sind vorwiegend Hilfsmittel des numerischen Rechnens; auch die mechanischen Hilfsmittel im engeren Sinne (Rechenmaschinen) gehören hierher.

Die Zeichnung als Rechenhilfsmittel soll im folgenden eingehender behandelt werden. Es wird sich erweisen, daß auch viele mechanische Vorrichtungen in Verbindung mit graphischen Darstellungen zur Ausführung bestimmter Rechnungen mit Vorteil verwendet werden können.

Die numerische Rechnung kommt vorwiegend dort zur Anwendung, wo es sich um die Ermittlung von Einzelwerten handelt und wo die erstrebte hohe Genauigkeit oder die Eigenart des Rechenvorganges die Verwendung bequemerer Hilfsmittel nicht zuläßt.

Die bei technischen Rechnungen erforderlichen Genauigkeiten liegen etwa bei $\frac{1}{1000}$; für viele Rechnungen genügen indes schon Genauigkeiten von $\frac{1}{100}$ bis $\frac{0,5}{100}$; und diese können durch eine Zeichnung unschwer eingehalten werden. Überall also, wo eine höhere Rechengenauigkeit als etwa $\frac{5}{1000}$ nicht notwendig ist, wo des öfteren ein und dieselbe Rechnung — nur immer mit jeweils anderen Zahlen — auszuführen ist, wird man zur Zeichnung als Rechenhilfsmittel greifen. Das tut z. B. die Statik schon lange. Aber auch die übrige Technik bedient sich mehr und mehr dieses anschaulichen und bequemen Hilfsmittels, zumal — seit etwa 1895 — in der Nomographie ein Verfahren gefunden wurde, das in der Ausführung und Anwendung überaus einfach und dabei so außerordentlich vielseitig ist, daß seine Anwendungsgebiete bei weitem noch nicht alle erschlossen sein dürften.

Man kann das graphische Rechnen in der Technik in folgende Arbeitsgebiete einteilen:

1. Die Zeichnung als Hilfsmittel zur Veranschaulichung funktioneller Zusammenhänge. Was die numerische Rechnung nur jeweils für den Einzelfall aufzuzeigen vermag, das kann die Zeichnung für einen weiten Bereich zusammenhängend darstellen und anschaulich machen. Hierzu dienen vorwiegend die Darstellungen von Einzelkurven und von Kurvenscharen im kartesischen Koordinatensystem (Diagramme).

2. Die Zeichnung als Mittel zur Berechnung von Einzelwerten gegebener Funktionen mit zwei, drei und mehr Veränderlichen. Die Abhängigkeiten brauchen dabei gar nicht einmal formelmäßig festgelegt zu sein. Auch empirisch gefundene Zusammenhänge (z. B. Geschößflugbahnen usw.) können in eine solche Form gebracht werden, daß leicht bestimmte Rechnungen damit

Anmerkung: In der ersten Auflage (1933) war dieser II. Teil noch mit dem I. Teil in Heft 52 vereinigt. Heft 52 behandelt in der 2. Auflage ausschließlich das „Rechnen mit Zahlen und Buchstaben“.

durchgeführt werden können. Es dienen hierzu beispielsweise die Funktionsleitern und die Nomogramme nach der Methode der fluchtrechten Punkte.

3. Die Zeichnung als Teil von Maschinen, Apparaten oder Instrumenten zur Auswertung irgendwelcher mit Meßgeräten ermittelter und von ihnen angezeigter Größen. Hierzu gehören insbesondere die Teilungen der Zeigerinstrumente; ferner jene Geräte, die irgendwelche gesuchten Werte aus zwei, drei oder mehr Meßelementen ableiten. Die Geräte dieser Art sind also vielfach gleichzeitig Meßinstrumente und Rechenmaschinen; denn Messen und Rechnen gehören immer zusammen!

Je nach dem Zweck wird man also zu dem einen oder dem anderen Auswertungsverfahren greifen; wir stellen diese entsprechend noch einmal zusammen:

	Zahl der Variablen	Zahl der zu bestimmenden Endwerte	geforderte Genauigkeit in % der Endergebnisse	Auswertungsverfahren	Auswertehilfsmittel
1	beliebig	beschränkt	$1/10^6$ bis $1/10^4$	numerische Berechnung	Multiplikationstafeln, Logarithmentafeln, mechanische Rechenmaschinen
2	wenig (bis etwa 6)	beliebig	$1/10^4$ bis $1/5 \cdot 10^2$	graphische Berechnung	Rechenschieber, Rechenskalen, Rechentrommeln, Nomogramme
3	beschränkt	beliebig	$1/10^3$ bis $1/10^2$	mechanische Auswertung	Spezielle teils selbständige, teils mit dem Meßgerät gekoppelte Auswertevorrichtungen

Das gesamte Technische Rechnen gliedert sich somit in drei Gebiete: In das numerische Rechnen, das wir im I. Teil (Heft 52) behandelten, das graphische Rechnen, mit dem wir uns in dem vorliegenden Bande beschäftigen wollen, und schließlich die mechanische Auswertung, die zweckmäßig im Rahmen einer „Meßtechnik“ behandelt wird.

I. Geometrische Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

1. Allgemeines. a) Das graphische Rechnen, d. h. die Ermittlung von Zahlenwerten auf Grund einer Zeichnung, stützt sich auf Sätze sowohl der euklidischen wie auch der analytischen Geometrie und ihre Folgerungen.

b) Der Zusammenhang zwischen den numerischen Werten und einer geometrischen Figur ist gegeben durch die Tatsache, daß man einer beliebigen Strecke stets einen bestimmten Zahlenwert zuordnen kann. Die verschiedenen Rechenoperationen werden alsdann in der Zeichnung dargestellt durch die verschiedenen geometrischen Beziehungen.

c) Die wichtigsten beim graphischen Rechnen zur Anwendung gelangenden Lehrsätze der euklidischen Geometrie sind vornehmlich die Sätze von der Proportionalität und Ähnlichkeit bei ebenen Figuren, insbesondere

die Strahlensätze,

die Sätze von den Proportionalitäten am rechtwinkligen Dreieck (Höhensatz des EUKLID usw.),

der Lehrsatz des PYTHAGORAS,

die Lehrsätze vom Kreise

und einige andere. Daneben werden natürlich auch gelegentlich die Hauptsätze der Goniometrie und der Trigonometrie gebraucht.

d) Die wichtigsten Sätze der analytischen Geometrie sind bereits im 1. Teil, S. 40ff. zusammengestellt.

e) Wenn nun eine Zeichnung als Grundlage für die Ausführung numerischer Rechnungen dienen soll, so müssen bestimmte Forderungen an sie gestellt werden. Diese sind

1. Exaktheit der Darstellung (z. B.: parallel geforderte Linien müssen auch tatsächlich haarscharf parallel sein usw.).

2. Geeignete, der geforderten Rechengenauigkeit angepaßte Maßstäbe.

Die Forderung zu 1 bedingt die Verwendung geeigneten Zeichenmaterials (Bleistift Nr. 4 und härter, Zirkel, genaue Zeichendreiecke, gutes Zeichenpapier); die zu 2: Überlegung!

2. Darstellung von Einzelwerten durch Strecken. a) Die in Abb. 1 gegebenen Strecken mögen die Zahlenwerte a , b und c maßstäblich darstellen. Es lassen sich dann ohne weiteres folgende algebraischen Zusammenhänge zeichnen:

$$x = a + b \quad (\text{Abb. 2})$$

$$x = b + c - a \quad (\text{Abb. 3})$$

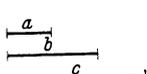


Abb. 1.

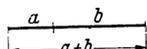


Abb. 2.

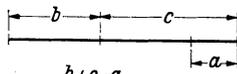


Abb. 3.

Ferner durch Anwendung der Strahlensätze

$$x = \frac{c}{3} \quad (\text{Abb. 4})$$

$$x = \frac{a \cdot b}{c} \quad (\text{Abb. 5}).$$

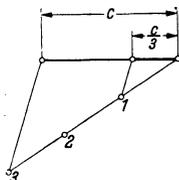


Abb. 4.

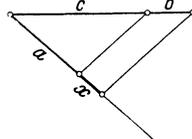


Abb. 5.

Weiter durch Anwendung der verschiedenen Sätze vom rechtwinkligen Dreieck:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Abb. 6})$$

$$x = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Abb. 7})$$

$$x = \sqrt{ab} \quad (\text{Abb. 8}).$$

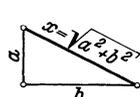


Abb. 6.

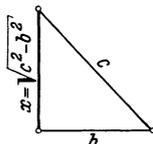


Abb. 7.

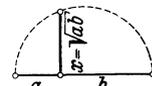


Abb. 8.

Oft müssen auch mehrere Lehrsätze zugleich angewandt werden, z. B.

$$x = \frac{5}{8} a + \sqrt{b^2 + \left(\frac{3}{4} c\right)^2} \quad (\text{Abb. 9}).$$

b) In den bisherigen Beispielen behandelten wir ausnahmslos lineare Ausdrücke. Sind die darzustellenden Ausdrücke nicht mehr linear, sondern, wie man sagt, irgendwie funktionell, so muß man, um sie zeichnerisch darstellen zu können, noch die Länge der Einheit kennen. Unter Benutzung einer gegebenen Einheit sind dann in Abb. 10 die Werte für

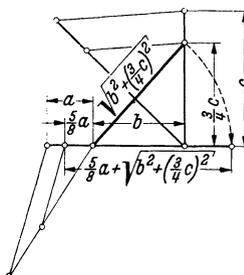


Abb. 9.

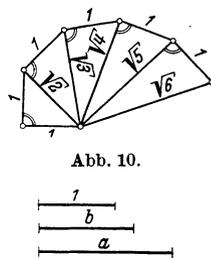


Abb. 10.

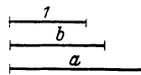


Abb. 11.

$$x = \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{4} \quad \text{usw.}$$

dargestellt.

Ferner wurden unter Zugrundelegung der in Abb. 11 für 1, a und b gegebenen Werte folgende algebraische Ausdrücke durch eine geometrische Figur dargestellt:

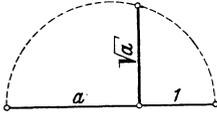


Abb. 12.

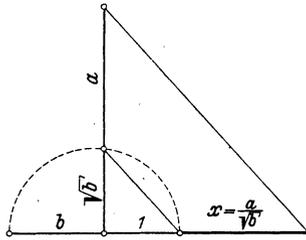


Abb. 13.

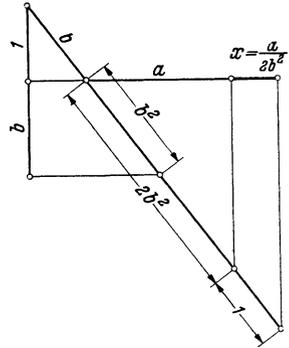


Abb. 14.

$$x = \sqrt{a} \quad (\text{Abb. 12})$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{b}} \quad (\text{Abb. 13})$$

$$x = \frac{a}{2b^2} \quad (\text{Abb. 14})$$

3. Darstellung allgemeiner algebraischer Beziehungen. a) Eine Linie, welche in allen ihren Punkten eine bestimmte Bedingung erfüllt, nennt man den „geometrischen Ort“ oder kurz den „Ort“. Es ist im allgemeinen nicht schwer, diese Bedingung an Hand der Zeichnung in eine algebraische Form zu kleiden.

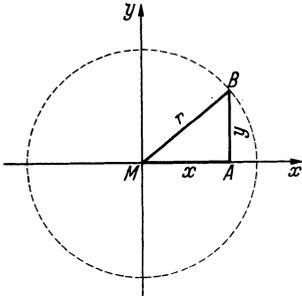


Abb. 15.

b) So ist z. B. der Kreis der Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte — dem Kreismittpunkte — eine konstante Entfernung¹ haben.

Die gesuchte algebraische Beziehung zeigt Abb. 15 auf; der Mittelpunkt des Kreises fällt hier mit dem Ursprung des kartesischen Koordinatensystems zusammen. Durch Betrachtung des Dreiecks $MA B M$, in welchem

$$\begin{aligned} MA &= x, \\ AB &= y, \end{aligned}$$

findet man unmittelbar

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

oder, wenn der Mittelpunkt M beliebige Koordinaten hat (Abb. 16),

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (2)$$

Dieses letzte Beispiel stellt zugleich die früher im 1. Teil, S. 45 aufgestellte These unter Beweis: Die Gleichung einer in Richtung der x -Achse um den Betrag a in Richtung von y um b verschobenen Kurve

$$y = f(x)$$

wird erhalten, wenn man statt x den Wert $(x - a)$, statt y den Wert $(y - b)$ in die vorgelegte Gleichung einführt.

¹ Merke: Zwei Punkte haben eine Entfernung, die kürzeste Entfernung eines abseits von einer Geraden gelegenen Punktes von dieser Geraden heißt Abstand. Konstant heißt eine mehrfach angewendete Größe; gleich sind zwei oder mehrere einmal oder mehrfach angewendete Größen!

hieraus, nach Multiplikation mit $\frac{a^2}{2}$

$$\begin{aligned} a^4 + f^2 x^2 &= a^2 f^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 \\ a^4 + x^2 (a^2 - b^2) &= a^2 (a^2 - b^2) + a^2 x^2 + a^2 y^2 \\ a^4 + a^2 x^2 - b^2 x^2 &= a^4 - a^2 b^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Dieses ist die gesuchte Gleichung der Ellipse.

f) Auch die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

läßt sich auf die nämliche Weise finden. Man braucht nur zu wissen, daß die Hyperbel definiert ist als der Ort jener Punkte, deren Entfernungsdifferenz von zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 (Abb. 20) eine Konstante ($= 2a$) ist. Für unsere Abbildung gilt also

$$S_1 - S_2 = 2a.$$

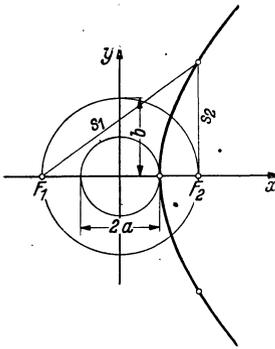


Abb. 20.

g) Die hier behandelten Kurven: Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel zählen zu den Kegelschnitten; auch die gerade Linie und der Punkt müssen dazu gerechnet werden, denn

ein Punkt entsteht, wenn die Schnittebene durch die Spitze des (geraden Kreis-) Kegels geht;

eine gerade Linie, wenn die Ebene den Kegelmantel tangiert.

Ein Kreis entsteht, wenn eine zur Kegelachse senkrechte Ebene den Kegel irgendwo schneidet;

eine Ellipse, wenn die Ebene stärker als die Mantellinie gegen die Kegelachse geneigt ist,

eine Parabel, wenn sie gleiche Neigung hat,

eine Hyperbel, wenn ihre Neigung zur Achse kleiner ist.

Punkt, gerade Linie, Kreis, Parabel und Hyperbel sind letzten Endes als Spezialfälle der Ellipse aufzufassen.

II. Die graphische Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem.

4. Graphische Ausgleichung der auf Grund von Messungen aufgestellten Kurven.

a) Wenn man zwei voneinander abhängige Größen messend untersucht und die Messungsergebnisse in Abhängigkeit von der willkürlich geänderten Meßgröße in einem kartesischen Koordinatensystem — einem sog. Diagramm — darstellt, so werden die Verbindungen der einzelnen Meßpunkte gewöhnlich — vor allem bei entsprechend gewähltem Maßstab — keine stetige Kurve ergeben. Will man nun die derart festgestellte Abhängigkeit weiter verwenden — z. B. hinsichtlich ihrer mathematischen Eigenschaften untersuchen od. dgl. —, so muß man die Messungsergebnisse zuvor einer Ausgleichung unterwerfen, d. h. man muß jene Kurve auffindig machen, die sich am besten dem empirisch festgestellten Verlauf anschmiegt. Nun kann man durch eine gegebene Punktreihe eine unendliche Zahl „ausgleichender Kurven“ legen. Nach den Sätzen der von GAUSS begründeten „Fehler-

theorie“ ist nun von allen den durch eine gegebene Punktreihe gelegten Kurven jene die „wahrscheinlichste“, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der gegebenen ein Minimum wird. Ist der Zusammenhang als linear, hyperbolisch, logarithmisch od. dgl. bekannt, so lassen sich die Konstanten des betreffenden Zusammenhanges nach den von GAUSS aufgestellten Regeln im Wege der Ausgleichung rechnerisch ermitteln (Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate). Die hierbei anzuwendenden rechnerischen Verfahren sind jedoch recht umständlich,

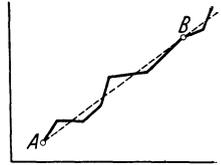


Abb. 21.

Tabelle 1.

T sek	s hm ¹	Δs	Δs	s hm	$\Delta \Delta s$
1	2	3	4	5	6
0	0			0	
1	7,9	7,9	7,9	7,9	1,2
2	14	6,1	6,7	14,6	0,8
3	20	6	5,9	20,5	0,5
4	25,3	5,3	5,4	25,9	0,4
5	30,6	5,3	5,0	30,9	0,3
6	35	4,4	4,7	35,6	0,4
7	40	5	4,3	39,9	0,2
8	43,5	3,5	4,1	44,0	0,3
9	48	4,5	3,8	47,8	0,2
10	51,5	3,5	3,6	51,4	0,2
11	55	3,5	3,4	54,8	0,2
12	58,3	3,5	3,2	58,0	0,1
13	61,5	3,2	3,1	61,1	0,1
14	63,7	2,2	3,0	64,1	0,2
15	66,5	2,8	2,8	66,9	0,1
16	70	3,5	2,7	69,4	0,0
17	72,5	2,5	2,7	72,3	0,1
18	75	2,5	2,6	74,9	0,0
19	77,5	2,5	2,6	77,5	0,1
20	80	2,5	2,5	80,0	

und man bedient sich ihrer eigentlich nur bei sehr wertvollen Rechnungen, z. B. in der Astronomie, Geodäsie, Physik usw. In der Technik genügt im allgemeinen die graphische Ausgleichung nach Augenmaß. In Abb. 21 z. B. soll die Reihe der Meßpunkte in einer Geraden liegen. Die durch die Punktreihe nach Augenmaß gezogene ausgleichende Gerade verbindet etwa die Punkte A und B.

b) Es gibt aber noch ein anderes bequemes Verfahren zum exakteren Ausgleich jener Widersprüche, die in der Zeichnung der Kurve in Erscheinung treten, ein Verfahren, das auch dort mit Vorteil angewendet wird, wo es sich darum handelt, die Genauigkeit der Meßwerte zu verbessern. Man bildet für gleiche Intervalle der Abszissen die zugehörigen Ordinatenunterschiede (= 1. Differenzenreihe), zeichnet sie als Kurve auf und gleicht nach Augenmaß aus. Mit den auf diese Weise ausgeglichenen Ordinatenunterschieden verbessert man alsdann die einzelnen Meßwerte. Dadurch, daß man die ausgeglichene erste Differenzenreihe auf die nämliche Weise untersucht und verbessert, läßt sich der Ausgleich der in den Messungsergebnissen auftretenden Widersprüche beliebig weit treiben. Bedingung ist, daß wenigstens ein Wert, besser zwei Werte — je einer am Anfang und am Ende der Messungsreihe — sicher sind oder wenigstens als sicher angesehen werden können.

c) Das Verfahren möge an einem Beispiel erläutert werden. In der nebenstehenden Tabelle 1 sind in der ersten Spalte unter T jene Zeiten eingetragen, während welcher ein Geschöß die in der zweiten Spalte unter s zusammengestellten Wege durchfliegt. Trägt man die Kurve $s = f(T)$ in ein rechtwinklig kartesisches Koordinatensystem ein (Abb. 22), so ergeben sich nur unwesentliche Unregelmäßigkeiten. Bildet man aber die erste Differenzenreihe und trägt diese Differenzen in geeignetem Maßstab als Ordinaten

¹ hm = Hektometer (1 hm = 100 m).

über den Abszissen T auf, so erhält man eine Zickzacklinie (Abb. 23), durch die sich leicht eine ausgleichende Linie legen läßt. Man geht dabei in der Weise vor, daß man zunächst einmal die Mittelpunkte der die „Zickzackkurve“ bildenden Geradenstücke verbindet. Es ergibt sich dabei bereits eine leidlich stetige Kurve,

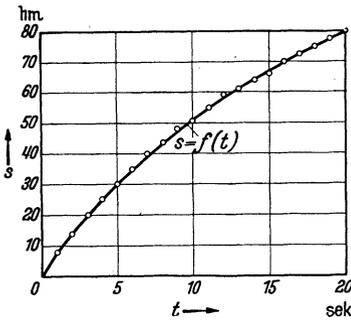


Abb. 22.

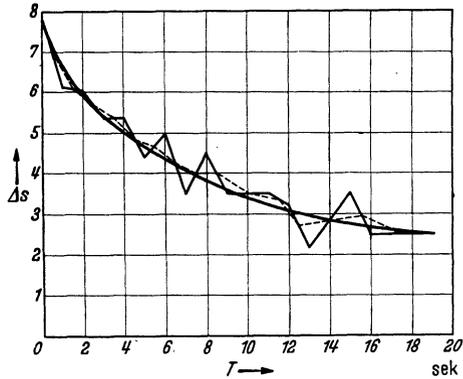


Abb. 23.

die leicht nach Augenmaß weiter ausgeglichen werden kann. Dieser ausgeglichenen Kurve für die erste Differenzenreihe entnimmt man die ausgeglichenen Ordinatenunterschiede, die man alsdann zur Berechnung der ausgeglichenen Weglängen s benutzt. Daß der so erreichte Fehlerausgleich schon ein ganz befriedigender ist, beweist die Bildung der Differenzen $\Delta\Delta s$ (Tabelle 1, Spalte 6 = 2. Differenzenreihe).

d) Trägt man die Differenzen $\Delta\Delta s$ wiederum in ein r.K.S. ein, so kann man die auftretenden Unstetigkeiten erneut auf die beschriebenen Kreise ausgleichen und danach zunächst die Δs und dann weiter über diese die Werte von s nochmals verbessern.

5. Die Verstreckung von Kurven und Kurvenscharen. a) Die Aufgabe, eine vorgelegte Kurve in eine Gerade umzuformen oder, wie man sagt, die Kurve zu verstrecken, kann auf zwei Wegen gelöst werden, nämlich einmal rechnerisch, dann aber auch rein zeichnerisch: graphisch. Beide Lösungsmöglichkeiten gehen vielfach Hand in Hand.

b) Die Gleichung einer Geraden im regulären rechtwinkligen Koordinatensystem (r.K.S.) liegt vor, wenn irgendeine Beziehung ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y gegeben ist, also etwa die Form

$$y = ax + b. \quad (6)$$

Aus dieser Gleichung entsteht nun die gerade Linie in der Weise, daß man bei gegebenem a und b für die eine Veränderliche, gewöhnlich für das Argument x , beliebige Werte annimmt, die zugehörigen Werte für y errechnet und die gefundenen Wertpaare in ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichmäßig (regulär) geteilten Achsen einträgt; die y -Werte als Ordinaten und die x -Werte als Abszissen. Dort, wo die Ordinate und die Abszisse sich schneiden, liegt jeweils der durch diese Koordinaten bestimmte Punkt. Durch Verbindung der Einzelpunkte entsteht dann die Gerade, deren Lage in der Ebene durch die Parameter a und b in jedem Einzelfalle eindeutig bestimmt ist. Die Richtungskonstante a bestimmt die Richtung, b den Abschnitt der Geraden auf der y -Achse. Für die Richtungskonstante a und den Winkel α , den die Gerade mit der $+x$ -Achse einschließt, besteht die Beziehung

$$a = \operatorname{tg}\alpha. \quad (7)$$

Sobald es also gelingt, eine vorgelegte Gleichung auf die Form $y = ax + b$ zu bringen, läßt sich diese auch als Gerade in einem regulären r.K.S. darstellen.

c) Nichtlineare Zusammenhänge lassen sich aber nicht ohne weiteres auf die Normalform der Gleichung (6) bringen; durch keinen rechnerischen Kniff wäre das möglich, wohl aber formal, rein äußerlich. Wir betrachten z. B. den quadratischen Zusammenhang

$$y = ax^2 + b.$$

Setzt man hierin

$$Y = y \quad \text{und} \quad X = x^2,$$

so geht die gegebene Gleichung mit

$$Y = aX + b$$

zunächst einmal der Form nach in die Gleichung einer geraden Linie über.

d) Wie wirkt sich diese „rechnerische Verstreckung“ nun in der Aufzeichnung der Kurve aus? In der Zeichnung wird die Kurve nur dann zur geraden Linie, wenn die Achsenteilungen entsprechend geändert werden. Die Art der Änderung schreiben offenbar die Substitutionsgleichungen

$$Y = y \quad \text{und} \quad X = x^2$$

vor; sie fordern, daß, um die Gleichung $y = ax^2 + b$ als Gerade in einem r.K.S. zu erhalten, die Y -Achse wie bisher regulär nach y geteilt werde. Die X -Achse hingegen muß nach x^2 , also quadratisch geteilt werden. Das geschieht auf die Weise, daß man die X -Werte an Stelle der x^2 -Werte schreibt, d. h. den X -Wert 5 schreibt man dahin, wo bei regulärer Teilung x^2 , also hier 25 stehen würde. Die Abb. 24 und 25 zeigen die Gleichung $y = x^2$ in beiden Darstellungen, nämlich einmal als Parabel im regulären r.K.S., dann als Gerade in einem r.K.S. mit quadratisch geteilter Abszissenachse.

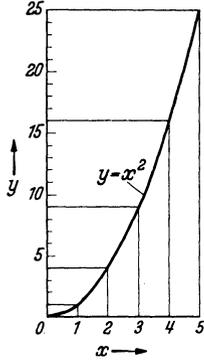


Abb. 24.

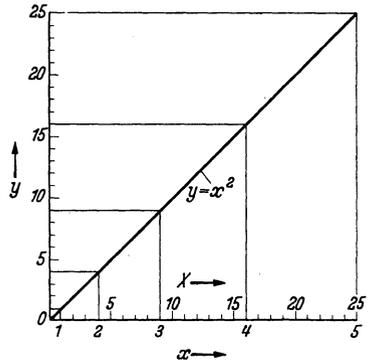


Abb. 25.

e) Die Teilung der Ab-

szissenachse in unserem Beispiel heißt also „quadratisch“; entsprechend den verschiedenen Zusammenhängen zwischen x und y sind noch viele andere funktionelle Teilungen möglich, algebraische und transzendente. Von den algebraischen nennen wir: die linearen, quadratischen, kubischen, reziproken, einfachen und zusammengesetzten; von den transzendenten die logarithmischen und die trigonometrischen Teilungen. Sie alle spielen für das graphische Rechnen eine wichtige Rolle. Ihre Fertigung im Einzelfalle wird im nachstehenden eingehend besprochen.

f) Auch Kurvenscharen kann man auf die gleiche Weise in Scharen von geraden Linien verwandeln. Beispielsweise sei der Zusammenhang

$$(x + y)(y - x) = C$$

zu verstrecken. Eine einfache arithmetische Umformung führt zu

$$y^2 = x^2 + C,$$

und wir erkennen, daß mit

$$Y = y^2 \quad \text{und} \quad X = x^2$$

die gegebene Gleichung in die einer Geraden übergeht. Beide Achsen sind also quadratisch zu teilen. Alle Geraden sind alsdann um 45° gegen die X -Achse geneigt. Sie schneiden die y -Achse bei den einzelnen C -Werten. Da aber eine y -Teilung nicht vorhanden ist, sondern nur eine solche für $Y = y^2$, werden die einzelnen Geraden die Y -Achse jeweils bei \sqrt{C} schneiden.

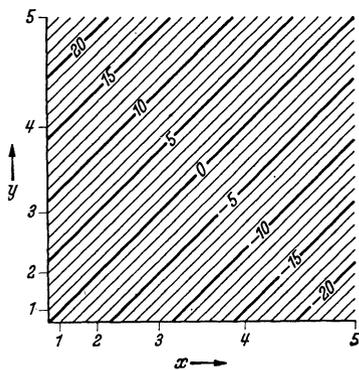


Abb. 26.

Abb. 26 bestätigt die Richtigkeit dieser Überlegungen. In unseren Beispielen sind die Teilungen und die Teilwerte für Y und X nicht mit eingetragen worden. Das ist auch nicht nötig, denn die funktionellen Teilungen geben in Verbindung mit den Geraden zahlenmäßig genau dieselben Verhältnisse wieder wie die Kurvenscharen im regulären r.K.S.

g) Die Verstreckung gegebener Kurven kann auch rein graphisch erfolgen. Das graphische Verfahren kommt vor allem dann zur Anwendung, wenn der Zusammenhang formelmäßig nicht be-

kannt ist, also vorwiegend bei empirisch, d. h. durch Versuche ermittelten Zusammenhängen. Abb. 27 bis 29 erläutern das Verfahren an einer Einzelkurve. Man zeichnet zunächst die die Kurve ersetzende Gerade, die eine beliebige

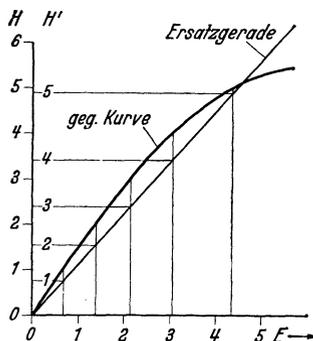


Abb. 29.

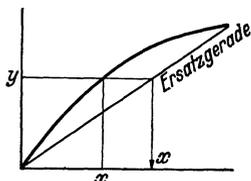


Abb. 27.

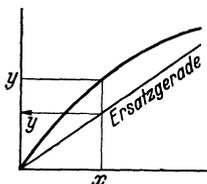


Abb. 28.

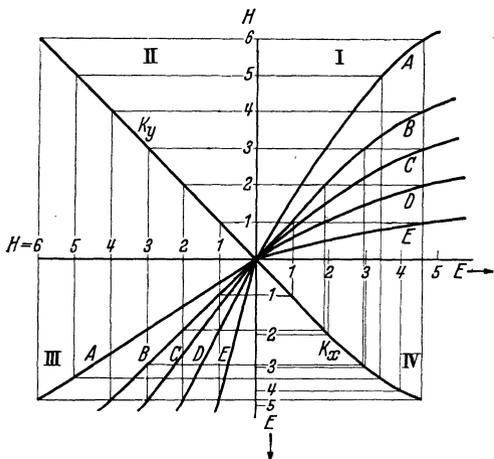


Abb. 30.

Neigung gegen die x -Achse haben kann. Dann wählt man die Teilung der einen Achse beliebig und entwickelt dann die Teilung der anderen Achse unter Beachtung des Gesichtspunktes, daß jetzt die Gerade genau dieselben x - und y -Werte einander zuordnen muß, wie es die Kurve tat.

h) Bei der Verstreckung von Einzelkurven kommt man unter allen Umständen mit der Umteilung einer Achse aus. Auch bei gegebenen Kurvenscharen ist das bisweilen der Fall, wie dies Abb. 30 zeigt. Es handelt sich bei der Verstreckung in diesem Beispiel um genau dasselbe Verfahren, wie es im vorangehenden Absatz besprochen wurde.

Nur ist diesmal die Entwicklung der Teilungen nicht in dem Quadranten mit den gegebenen Kurven vorgenommen worden, sondern in den angrenzenden

Quadranten *II* und *IV*. Dort sind zur Entwicklung der neuen Teilungen Hilfslinien eingezeichnet worden; in dem einen Quadranten (*II*) ist dies eine Gerade, im andern (*IV*) eine Kurve, die sog. Verzerrungskurve für die x -Achse. In dem letzten Quadranten (*III*) endlich erscheinen die die Kurven ersetzenden geraden Linien. Eine derselben ist willkürlich eingezeichnet. An Hand dieser ersten Geraden der Kurvenschar und jener Kurve, die sie ersetzen soll, sowie der Verzerrungskurve K_y (hier Gerade!) wurde dann die Verzerrungskurve K_x entwickelt. Schließlich wurden dann die übrigen gegebenen Kurven über die Verzerrungskurven K_x und K_y in den Quadranten *III* übertragen.

i) Für viele Zwecke reicht das beschriebene Verfahren aus, zumal in praktischen Fällen meist nur ein Teil der Kurven für die auszuführenden Berechnungen in Frage kommt. Es kann jedoch auch einmal notwendig werden, beide Achsenteilungen umzuformen und somit zwei Verzerrungskurven zu entwickeln. Man wird jedoch erst dann diesen letzten Versuch machen, wenn die übrigen Hilfsmittel versagen; diese Hilfsmittel sind: Änderung der Neigung der Anfangsgeraden, Vertauschung von K_1 und K_2 , Darstellung im logarithmisch geteilten Achsenkreuz. Auch die graphische Ausgleichung der Ersatzgeraden, die sich als schwach gekrümmte Kurven erweisen, ist oft tragbar, doch muß die Entscheidung hierüber von Fall zu Fall getroffen werden.

6. Der Vorwärtsabschnitt als Messungsprinzip. a) Unter einem „Vorwärtsabschnitt“ versteht man in der Geodäsie die Lösung der Aufgabe, von zwei gegebenen Festpunkten aus die Lage eines dritten Punktes zu bestimmen.

b) Diese Aufgabe ist für die gesamte Messungspraxis von grundlegender Bedeutung; auf ihr beruht z. B. das räumliche Sehen mit zwei Augen, die Photogrammetrie und die Luftbildmessung, beruhen die Peilverfahren zum Zweck der Flugzeugortung vom Boden aus, die optisch-mechanischen Entfernungsmesser und viele andere Geräte; ja sogar jedes Zeigerinstrument benutzt zur Messung das Prinzip: von zwei gegebenen Festpunkten die Lage eines dritten Punktes zu bestimmen.

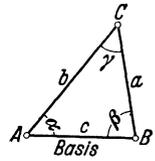


Abb. 31.

c) Die geometrische Lösung der Aufgabe ist nicht schwierig; gegeben seien mit Bezug auf die Abb. 31 die Strecke c , die Winkel α und β ; gesucht sind die Strecken a und b .

Die gegebene Strecke $AB = c$ heißt allgemein Basis; α und β sind die Basiswinkel und γ , der Winkel, unter dem von dem gesuchten Punkt C aus die Basis gesehen wird, der parallaktische Winkel.

d) Zunächst ermittelt man aus den Daten den parallaktischen Winkel; er ist

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta),$$

und somit wird nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie

$$a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

oder, da

$$\sin (180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

$$a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

und entsprechend

$$b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

} (8)

e) Die graphische Lösung dieser Aufgabe kann durch eine Rechentafel (Nogramm) nach Abschnitt 14 erfolgen:

$$\lg a = \lg \sin \alpha - \lg \sin (\alpha + \beta) + \lg c$$

oder, wenn man bei einer konstanten Basis setzt

$$\begin{aligned} \lg c &= C \\ \lg a &= \lg \sin \alpha - \lg \sin (\alpha + \beta) + C. \end{aligned}$$

Abb. 32 zeigt die grundsätzliche Anordnung der Leitern, deren Fertigung im III. Kapitel ausführlich behandelt wird.

f) In der Praxis kommt nun häufig der Fall vor, daß die parallaktischen Winkel sehr klein, die Seiten also gegen die Basis sehr lang sind, wie beispielsweise bei den Basisentfernungsmessern für topographische Zwecke. Bei solchen Instrumenten ist die Basis etwa 1 bis 10 m lang, und der Meßbereich umfaßt viele Kilometer. Der eine Basiswinkel ist konstant, und zwar (Abb. 33)

$$\beta = 90^\circ;$$

durch Messung des andern findet man aus

$$\varepsilon = 90^\circ - \alpha$$

unmittelbar den parallaktischen Winkel ε , wegen dessen Kleinheit man statt

$$E = \frac{B}{\operatorname{tg} \varepsilon} \tag{9}$$

mit ausreichender Genauigkeit setzen darf:

$$E = B \cdot \frac{\varrho}{\varepsilon}, \tag{10}$$

worin ϱ und ε in Minuten gemessen werden und

$$\varrho = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} = 3438'$$

eine Konstante ist (s. I. Teil, S. 20).

Die Gleichung (10) gilt auch für den Fall, daß das Bestimmungsdreieck nicht ein rechtwinkliges, sondern ein gleichschenkeliges ist. Die numerische Auswertung der Gleichung wird unmittelbar vom Instrument bei der Messung des Winkels ε ausgeführt (s. Abschn. 20).

g) Auch alle Zeigerinstrumente fallen, wie bereits gesagt, unter das Messungsprinzip des Vorwärtsabschnitts (Abb. 34). Nur ist hier das „vorwärtsabgeschnittene Stück“ b nicht mehr eine Gerade, sondern ein Stück eines Kreisbogens (Abb. 35). Die Länge dieses linear oder funktionell geteilten Bogens ist proportional dem Meßwinkel β .

h) Die Skalenteilungen der Zeigerinstrumente entstehen

auf folgende Weisen: Entweder auf empirischem Wege, durch Bestimmung einer Anzahl von Skalenwerten durch einen Versuch, bei graphischer Interpolation der übrigen. Oder auf rein deduktivem (mathematischem) Wege. Man teilt (oder interpoliert) zunächst eine Gerade von derselben Länge des Kreisbogens.

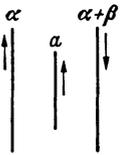


Abb. 32.

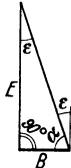


Abb. 33.

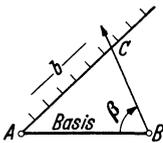


Abb. 34.

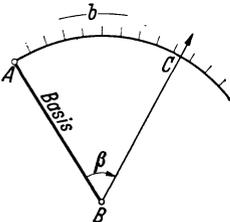


Abb. 35.

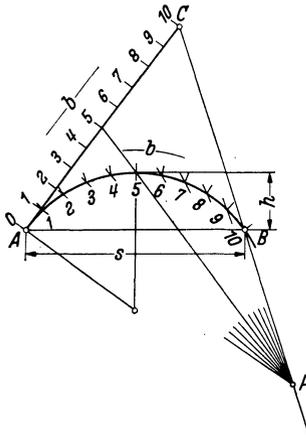


Abb. 36.

Die gewonnene Teilung überträgt man alsdann auf den letzteren. Bei flachen Kreisbögen kann diese Übertragung ebenfalls graphisch erfolgen, und zwar nach demselben Verfahren, das bei der projektiven Teilung (Abschn. 9) beschrieben wird. Abb. 36 zeigt die graphische Übertragung einer linearen Teilung auf einen Kreisbogen. Das Verfahren ist kein absolut strenges und hat zur Voraussetzung,

1. daß $AC = \widehat{AB}$,
2. daß $h \leq \frac{s}{4}$.

i) Je flacher der Kreisbogen ist, desto weiter liegt der Pol P , den man als Schnittpunkt der durch zwei Punktpaare gezogenen Strahlen ermittelt, von diesem entfernt. Wenn nun der Pol außerhalb der Zeichenfläche fällt, muß man zu einer Hilfskonstruktion greifen, wie dies in Abb. 37 angedeutet ist. Man zieht zur Symmetrielinie irgendwo eine Senkrechte, teilt sie proportional der zu übertragenden Teilung und findet so die Schnittpunkte der Polstrahlen.

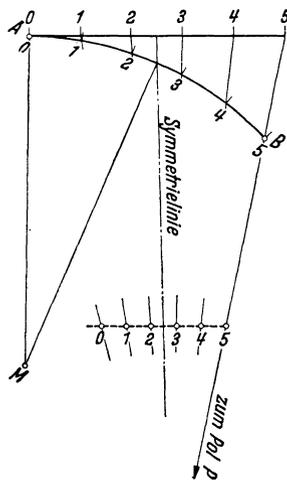


Abb. 37.

III. Linien- und Parallelkoordinaten.

A. Funktionsleitern.

7. Allgemeine arithmetische Zusammenhänge. a) Die Gleichung

$$y = f(x)$$

sagt zunächst lediglich aus, daß y von x irgendwie abhängig sei, und zwar kann dieser Zusammenhang linear, quadratisch oder sonstwie algebraisch sein oder aber auch transzendent. Ein Bild von dem Zusammenhang $y = f(x)$ kann man sich im speziellen Falle machen durch Berechnung einer Anzahl zusammengehöriger Wertpaare x und y und durch Zusammenstellung dieser Werte in einer Tabelle oder aber, sinnfälliger, durch Eintragung der Wertpaare als Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem und Verbindung der einzelnen Punkte durch einen Linienzug, eine Kurve.

b) Tabellen und Darstellungen in einem Koordinatensystem sind also wesentliche Hilfsmittel zum Nachweise des Verlaufs irgendeines durch eine Gleichung $y = f(x)$ gegebenen Zusammenhanges.

Nehmen wir die Gleichung

$$y = 3x.$$

Stellt man diese Gleichung — etwa über eine Tabelle — in einem r.K.S. bildlich dar, so kann man ein derartiges Diagramm als Rechenhilfsmittel benutzen, das zwar wegen der Brechung der bestimmenden Größen — Ordinate und Abszisse — nicht sonderlich bequem ist, dafür aber die Möglichkeit einer Interpolation nach Augenschein bietet.

Nun kann man durch Vermittlung der Geraden in unserem Beispiel die Teilung der x -Achse auf die y -Achse projizieren, wie dies in Abb. 38 geschehen ist. Es entsteht eine Doppelskala, die den Vorteil hat, daß die jeweils zusammengehörigen Wertpaare unmittelbar beieinander liegen und damit eine bequeme Ablesung zusammengehöriger Wertpaare und auch eine leichte Interpolation

gestatten — ausreichenden Maßstab und hinreichend weit getriebene Unterteilung vorausgesetzt.

c) Betrachten wir die Teilungen der Doppelskala in Abb. 38 genauer, so erkennen wir, daß bei beiden die Intervalle zwischen zwei benachbarten Teilstrichen jeweils gleich groß sind: die Teilungen sind linear! Allerdings kommen auf eine x -Einheit drei Einheiten der y -Teilung; die Teilungen sind zwar in ihrer Art gleich, aber sie haben verschiedene Teilungsmaßstäbe oder Teilungsmoduln (μ), die sich wie 3:1 verhalten (vgl. Abschn. 8):

$$\mu_x : \mu_y = 3 : 1.$$

Offenbar spielt hier der Koeffizient der Variablen x eine Rolle. Daß dem wirklich so ist, läßt sich leicht allgemein nachweisen. Wir wollen hier auf diesen Beweis verzichten und lediglich die Tatsache feststellen, daß ein Faktor (Koeffizient, Beiwert) bei einer Variablen keinen Einfluß auf ihre Art an sich, sondern lediglich auf den Teilungsmodul der sie darstellenden Skala hat.

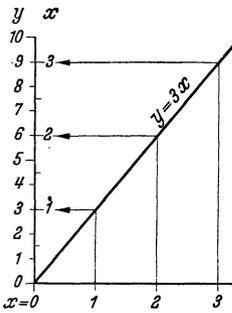


Abb. 38.

d) Wir betrachten nun die auf die gleiche Weise entstandene Doppelskala für $y = 3x + 2$

(Abb. 39). Wir stellen fest, daß durch die additive Konstante eine Änderung weder des Charakters noch der Moduln der Teilungen eingetreten ist, daß aber die y -Skala gegen die x -Skala verschoben ist, und wir ziehen den — gleichfalls wieder allgemeingültigen — Schluß, daß eine additive Konstante bei einer der Variablen lediglich eine Verschiebung der Skalen gegeneinander zur Folge hat.

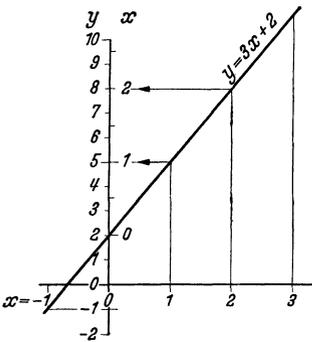


Abb. 39.

e) Das beschriebene Verfahren der Ableitung einer Doppelskala aus einer vorgelegten Geraden oder Kurve ist immer möglich, auch da, wo lediglich die Kurve gegeben und der formelmäßige Zusammenhang nicht bekannt ist. Auch bei nichtlinearen Zusammenhängen ist es in der gleichen Weise anwendbar.

f) Für manche Zusammenhänge hat man auch besondere Verfahren erdacht, die unter Umgehung der Kurvenaufzeichnung auf Grund besonderer geometrischer Beziehungen unmittelbar die gesuchten funktionellen Teilungen zu entwickeln gestatten. Unsere Abb. 40 zeigt die Entwicklung der quadratischen Teilung für $y = x^2$ und x_0^{10} auf Grund einer Parabelkonstruktion. Den Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion erbringen wir an Hand der Abb. 41: Hier sind gegeben:

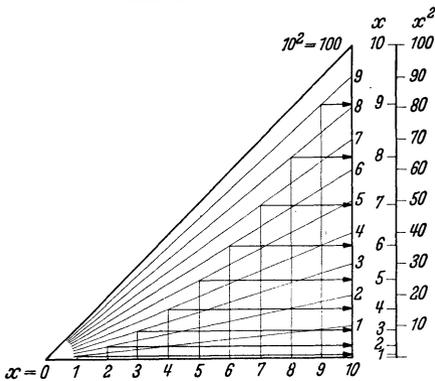


Abb. 40.

Aus der Abbildung ist unmittelbar abzulesen

$$\frac{EJ}{DB} = \frac{AJ}{AB}$$

1. Die Strecke $AB = a$, und
2. die Strecke $BC = a^2$, senkrecht zu AB und von der für a^2 vorgeschriebenen Länge.

oder, nach Einführung der Werte für diese Strecken,

$$\frac{y}{n \cdot a^2} = \frac{n \cdot a}{a}; \quad (n < 1).$$

Hieraus:

$$y = (n \cdot a)^2,$$

das heißt: ist BC auf der einen Seite regulär von 0 bis a , auf der anderen Seite ebenso von 0 bis a^2 geteilt, so ordnet die in der Abb. 41 angedeutete und in Abb. 40 ausgeführte Konstruktion auf der Doppelskala BC grundsätzlich den x -Werten auf der einen Seite grundsätzlich die zugehörigen x^2 auf der anderen Seite zu.

g) Meist ist es aber bequemer und liegt auch im Interesse der Genauigkeit, wenn auf eine geometrische Konstruktion verzichtet und die gesuchte Skala unmittelbar auf Grund der Tabelle gefertigt wird. Die Abb. 42 zeigt die so entstandene Doppelskala für

$$y = x^3$$

für x_0^4 . Man geht aus von der linearen Teilung für $f(x)$ und trägt die Werte für x auf Grund der Tabelle an den entsprechenden Stellen ein.

h) Für die Praxis wird man die Unterteilung der Skalen so weit treiben, wie es der Zweck jeweils erfordert. Auch der Maßstab ist diesem Zweck anzupassen, da ja der Maßstab für die Genauigkeit der Ablesungen ausschlaggebend ist.

Die Abstände zweier benachbarter Teilstriche auf der x -Skala sind in den betrachteten Beispielen nicht mehr gleich; die Teilung ist nicht mehr linear, sondern funktionell. Man nennt solche Skalen von nicht linearen Zusammenhängen auch Funktionsleitern.

Beispiele: 1. Wenn man im Punkte A (Abb. 43) an die Erde eine Tangente legt, so entfernt sich diese mit zunehmender Entfernung E von der Erdoberfläche. Welches Gesetz besteht hierfür?

Lösung: Die gesuchte Beziehung $H = f(E)$ läßt sich für den Fall, daß α klein ist ($\alpha < 2^\circ$), einfach durch eine Proportionalrechnung oder auch mit Hilfe des Höhensatzes für rechtwinklige Dreiecke ableiten. Man findet

$$H_m = 0,0785 E_{km}^2,$$

wobei man also, wie angedeutet, H in Metern erhält, wenn man E in Kilometern einführt. Die diese Formel auswertende Funktionsleiter kann über eine Tabelle bzw. Kurve, wie dies umstehend geschehen, entwickelt werden (Tabelle 2 u. Abb. 44).

2. Bei manchen Arbeiten entsteht auch die Frage: Um wieviel ist der auf der Erdoberfläche gemessene Bogen kürzer als die Tangente?

Lösung: Aus den beiden, unmittelbar aus der Zeichnung (Abb. 45) abzulesenden Beziehungen

$$\frac{B}{R} = \alpha$$

(α im Bogenmaß!) und

$$\frac{E}{R} = \text{tg } \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$$

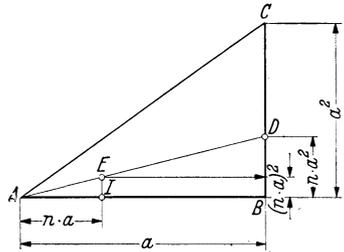


Abb. 41.

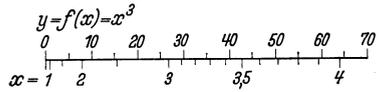


Abb. 42.

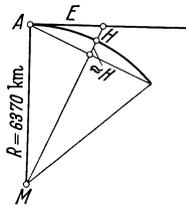


Abb. 43.

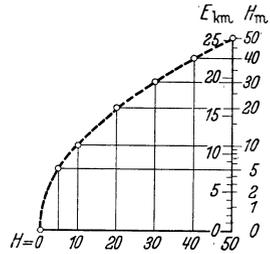


Abb. 44.

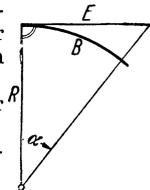


Abb. 45.

Tabelle 2		Tabelle 3.	
H	E	E-B	B
m	km	m	km
0	0	0	0
5	8	50	182
10	11,3	100	230
20	16	200	290
30	19,1	300	332
40	22,6	400	365
50	25,25	500	394
49,2	25		

folgt

$$\frac{E}{B} = 1 + \frac{\alpha^2}{3}$$

$$E = B + B \cdot \frac{\alpha^2}{3}$$

und weiter

$$E - B = B \cdot \frac{\alpha^2}{3} = B \cdot \frac{B^2}{3R^2}$$

$$E - B = \frac{B^3}{3R^2}$$

Mit $R = 6370 \text{ km} = 6370000 \text{ m}$ wird

$$(E - B)_m = \frac{B_{\text{km}}^3 \cdot 10^9}{3 \cdot 40,7 \cdot 10^{12}}$$

$$(E - B)_m = \frac{B_{\text{km}}^3}{122000} \tag{II}$$

Die Darstellung dieser Gleichung als Funktionsleiter unter Verwendung der Tabelle 3 zeigt Abb. 46.

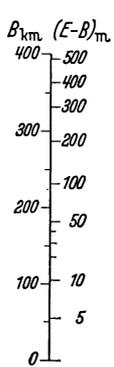


Abb. 46.

Wir werden jedoch später (Abschn. 11) sehen, daß sich solche rein exponentiellen Zusammenhänge mit Hilfe logarithmischer Teilungen fast ohne Rechenarbeit erheblich bequemer und mit derselben Genauigkeit herstellen lassen wie nach dem hier beschriebenen — allerdings grundlegenden — Verfahren.

8. Der Teilungsmodul. a) In Abb. 44 ist für die Abszisse H ein anderer — größerer — Teilungsmaßstab gewählt worden als für die Ordinate. Es geschah dies, um der Darstellung etwa die gleiche Höhe wie Breite zu geben. Man darf das allgemein tun, weil dadurch der Charakter der Kurve nicht geändert wird, d. h. eine Gerade bleibt eine Gerade usw., lediglich die Neigungsverhältnisse der Tangenten an die dargestellte Kurve werden in der Zeichnung geändert. Auch bei der Doppelskala für $y = 3x$ bemerken wir Ähnliches. Die Einheit für x ist hier dreimal so lang wie die Einheit für die y -Werte. Wir nennen die Zahlen μ_x und μ_y , die das Teilungsmaßstabsverhältnis — hier 3 : 1 — ausdrücken, wie schon im Abschn. 7 angegeben, die Teilungsmoduln. Also

$$\mu_x : \mu_y = 3 : 1.$$

b) Allgemein verstehen wir unter dem Teilungsmodul die relative Länge der Einheit einer gezeichneten oder zu zeichnenden Größe. Die absolute Länge, die man für die Einheit wählt, spielt keine Rolle; es ist also gleich, ob diese Einheit das Millimeter, das Zentimeter oder sonst eine Größe ist. Beim Vergleich mehrerer Funktionsleitern ist lediglich das Verhältnis der Teilungsmoduln von Wichtigkeit. Dieses Verhältnis kann man bei linearen Zusammenhängen unmittelbar aus den Koeffizienten der Variablen ablesen; aus

$$y = 3x - 7$$

folgt z. B.

$$\mu_y : \mu_x = 1 : 3 = 2 : 6 \text{ usw.}$$

oder

$$\mu_y = 1; \quad \mu_x = 3.$$

Beispiel: Es seien die Skalen $y = 2x$ und $y = x^2$, und zwar beide für das Intervall x_0^{100} zu zeichnen; beide Skalen sollen je 100 mm lang werden. Das Verhältnis ihrer Teilungsmoduln berechnet sich dann wie folgt:

a) $y = 2x$ nimmt für $x = 100$ den Wert 200 an.

200 Einheiten sollen demnach 100 mm lang gezeichnet werden,

1 Einheit wird mithin $100/200 = 0,5 \text{ mm}$ lang zu zeichnen sein.

- b) $y = x^2$ gibt für $x = 100$ den Wert 10^4 .
 10000 Einheiten sollen hier als Länge von 100 mm gezeichnet werden,
 1 Einheit wäre demnach $100/10000 = 0,01$ mm lang zu zeichnen.
 Die Teilungsmoduln beider Skalen verhalten sich somit wie

$$\mu_1/\mu_2 = 0,5/0,01 = 50/1 = 500/10 \text{ usw.}$$

9. Die projektive Teilung. a) Projiziert man — Abb. 47 — von dem Projektionszentrum O die auf einer Geraden G_1 liegenden Punkte A, B, C und D auf die Gerade G_2 , wo sich die Punkte A', B', C' und D' ergeben, so sagt man, die beiden Punktreihen seien projektiv verwandt, und es läßt sich zeigen, daß entsprechende Doppelverhältnisse auf beiden Geraden gleich sind.

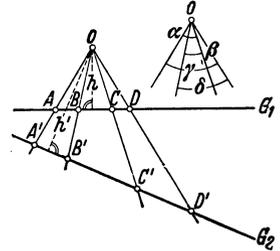


Abb. 47.

b) Fällt man nämlich von O die Höhe h und h' auf die beiden Geraden, so lassen sich die Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke je zweimal ausdrücken, und durch Insverhältnissetzen beider Ergebnisse erhält man aus

$$\frac{AC \cdot h}{BC \cdot h'} = \frac{OA \cdot OC \cdot \sin \alpha}{OC \cdot OB \cdot \sin \beta}$$

die Gleichung

$$\frac{AC}{BC} = \frac{OA \sin \alpha}{OB \sin \beta}$$

und weiter, für zwei andere Dreiecke

$$\frac{AD}{BD} = \frac{OA \sin \gamma}{OB \sin \delta}$$

Durch Division beider Gleichungen erhalten wir dann das Doppelverhältnis

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} : \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}$$

Genau dasselbe Doppelverhältnis besteht aber auch für die Dreiecke an der Geraden G_2 :

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} : \frac{\sin \gamma}{\sin \delta},$$

so daß wir schließlich haben

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}, \tag{12}$$

das heißt: Bei projektiven Punktreihen sind entsprechende Doppelverhältnisse gleich.

c) Kennt man also auf einer Geraden G_1 die Punkte A, B, C und D , auf einer anderen Geraden G_2 die den genannten projektiv zugeordneten Punkte A', B' und C' , so läßt sich der dem vierten Punkte D zugeordnete Punkt D' mit Hilfe des Projektionspoles O und des durch O und D gezogenen Projektionsstrahles finden.

d) Es läßt sich nun zeigen, daß in dem Ausdruck

$$F(x) = \frac{m f(x) + n}{p f(x) + q}, \tag{13}$$

worin¹ $mq = np \neq 0$, die Werte $F(x)$ und $f(x)$ projektiv verwandt sind. Es besteht nämlich zwischen vier Punkten x_1, x_2, x_3 und x_4 auf der Geraden für $F(x)$ und vier Punkten auf der für $f(x)$ die Doppelverhältnisgleichung

$$\frac{F(x_1) - F(x_3)}{F(x_2) - F(x_3)} : \frac{F(x_1) - F(x_4)}{F(x_2) - F(x_4)} = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{f(x_2) - f(x_3)} : \frac{f(x_1) - f(x_4)}{f(x_2) - f(x_4)},$$

¹ Das Zeichen \neq bedeutet: nicht gleich.

was sich dadurch erweisen läßt, daß man für

$$F(x_1) \text{ den Wert } \frac{m f(x_1) + n}{p f(x_1) + q} \text{ usw.}$$

einsetzt und feststellt, daß nach entsprechender Vereinfachung die linke Seite gleich der rechten wird.

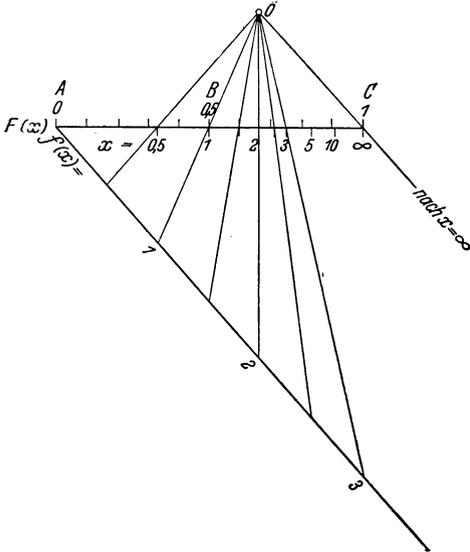


Abb. 48.

ten Geraden in A unter einem beliebigen Winkel gegen AC. Teilung derselben nach f(x), also hier regulär nach x. Die Nullpunkte beider Teilungen fallen zusammen (= 1. Wertpaar!).

4. Konstruktion des Projektionspols O durch Verbinden der Punkte x = 1 und F(x) = 0,5 sowie x = ∞ und F(x) = 1.

5. Unterteilung der F(x)-Skala durch Ziehen der Projektionsstrahlen durch die übrigen Punkte der f(x)-Teilung.

Man beachte, daß bei derartigen Leitern die Teilung für F(x) regulär, die für f(x) funktionell erscheint!

Beispiel: Die Teilung für ein Flüssigkeitsräometer folge der Gleichung

$$l_{mm} = 215 \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right).$$

Die Lösung gestaltet sich nach der zum vorigen Beispiel gegebenen Anweisung wie folgt:

1. Berechnung der Wertpaare:

Punkt	γ	$1/\gamma$	$1/\gamma - 1$	l_{mm}
P_1	0,8	1,25	0,25	53,7
P_2	1,0	1,0	0,00	0,0
P_3	1,2	0,833	-0,167	-35,8

2. Auftragen (Abb. 49) der regulären Teilungen für l in natürlicher Größe, für γ in beliebigem Maßstab. Aufsuchen des Pols O, Ziehen der Polstrahlen zu den Zwischenpunkten der regulären γ -Teilung und damit Auffinden der zugehörigen Längen l.

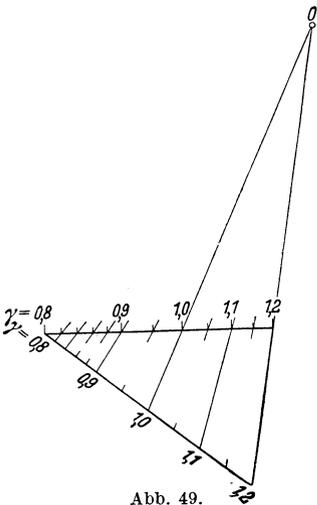


Abb. 49.

f) Gelegentlich kommt es vor, daß der Pol außerhalb der Zeichenebene zu liegen kommt. In diesem Falle muß man zu einer Hilfskonstruktion greifen, um die Polstrahlen der Zwischenpunkte zeichnen zu können. Das folgende Beispiel erläutert das Verfahren.

Gegeben seien auf der projektiv zu teilenden Geraden g_0 die Punkte A, B

und C (Abb. 50). Die linear geteilte Gerade zur Übertragung der Zwischenpunkte sei g_1 . D und E sind darauf die Punkte, die den Punkten B und C auf der Geraden g_0 entsprechen. Der Pol, den man als Schnitt der Verlängerungen von BD und CE finden würde, liegt außerhalb der Zeichenebene. Die Hilfskonstruktion nun besteht darin, daß man parallel zu g_1 eine Hilfsgerade g_2 zieht, die die beiden, den Pol bestimmenden Strahlen BD und CE in F und G schneidet. Das Stück FG teilt man in genau so viel Teile wie DE enthält und extrapoliert bis zu dem dem Punkte A entsprechenden Punkte H . Dann verbindet man die entsprechenden Punkte der Geraden g_2 und g_1 und findet die gewünschte Unterteilung der Geraden g_0 als Schnittpunkte dieser Verbindungen mit g_0 . (Vgl. auch Abb. 37!)

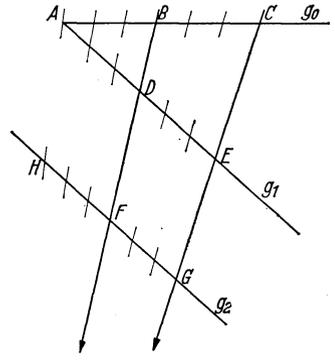


Abb. 50.

10. Die graphische Interpolation. a) Außer zur Darstellung tatsächlich hyperbolischer Zusammenhänge wird die projektive Teilung auch mit Vorteil zur graphischen Interpolation von Teilungen beliebigen Ursprungs benutzt. Daß dies mit guter Annäherung möglich ist, hat seine Ursache darin, daß die Hyperbel sich wegen ihrer eigenartigen Krümmungsverhältnisse vielen Kurven innerhalb weiter Bereiche eng anschmiegt und diese daher innerhalb dieser Bereiche zu ersetzen vermag. Sogar die logarithmische Linie kann innerhalb weiter Grenzen durch die Hyperbel ersetzt werden (vgl. Abschn. 11). Vor allem bei empirisch, d. h. durch Versuch gefundenen Teilungen wird man von der angedeuteten Möglichkeit Gebrauch machen.

vielen Kurven innerhalb dieser Bereiche zu ersetzen weiter Grenzen durch die

b) Wenn nun der untersuchte Zusammenhang nicht streng hyperbolisch ist, so zeigt sich das bei der Bestimmung des Poles aus einer Mehrzahl von Bestimmungspunkten dadurch, daß sich mehrere Pole ergeben. Sie liegen auf einer Kurve, auf der dann jedem Punkt der Teilung ein besonderer Pol zugeordnet ist. Die hiernach erforderliche Teilung dieser Polkurve läßt sich unschwer empirisch durchführen. Oft genügen schon zwei Pole, um die Teilung mit ausreichender Genauigkeit vorzunehmen. Ein Beispiel möge das Gesagte erläutern:

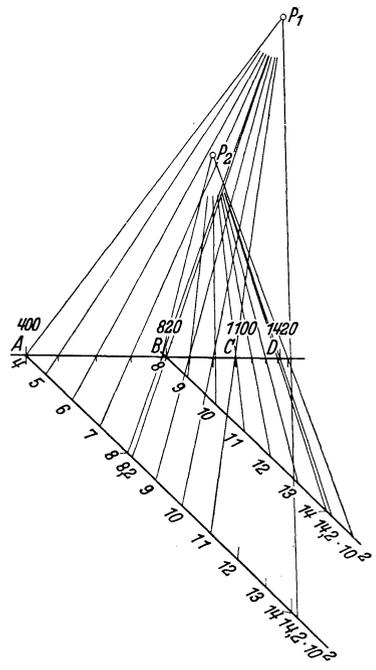


Abb. 51.

Von einer zu fertigenden Teilung (Abb. 51) seien zunächst nur die empirisch bestimmten Punkte A , B , C und D bekannt. Die Zwischenpunkte sollen durch eine Interpolation gefunden werden.

Faßt man die Punktreihe als projektiv auf, so erhält man für die gegebenen Punkte A , B und C den Pol P_1 , für B , C und D den Pol P_2 . Damit wurden dann die Unterteilungen ermittelt, und zwar für das Stück BC zweimal, um zu zeigen, daß die von den verschiedenen Polen erhaltenen Unterteilungen für dieses Mittelstück befriedigende Übereinstimmung zeigen. Die Entwicklung einer Polkurve und darauf die Bestimmung der Pole für jeden einzelnen Teilpunkt verbot sich hier wegen des Fehlens weiterer Punktpaare von selbst.

11. Die logarithmische Teilung. a) Die logarithmische ist eine der für das gra-

phische Rechnen wichtigsten Teilungen überhaupt, da man durch Logarithmieren potentielle und auch exponentielle Zusammenhänge leicht in eine für die graphische Auswertung bequeme Form bringen kann.

b) Genau können logarithmische Teilungen nur auf Grund einer Tabelle gefertigt werden. Abb. 52 zeigt die auf Grund der nebenstehenden Tabelle gefertigte Teilung. Für praktische Zwecke dürfte indes die hier gewählte Unterteilung kaum ausreichen; wie man die Unterteilung auch ohne eine Tabelle rein graphisch weiter treiben kann, wird weiter unten gezeigt.

x	$\lg x$
1	0
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
6	0,778
7	0,846
8	0,903
9	0,954
10	1,000

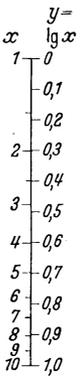


Abb. 52.

Auch die logarithmischen Teilungen werden fast immer als selbständige Achsenteilungen und dann ohne die lineare Skala für die Funktionswerte verwendet; auch beim logarithmischen Rechenschieber ist das ja der Fall.

c) Wenn man des öfteren logarithmische Teilungen braucht, wird man sich solche mit verschiedenen Teilungsmoduln auf Zeichenpapier aufzeichnen, wie dies Abb. 53 zeigt, und von dort jeweils an die Stelle übertragen, wo die betreffende Teilung benötigt wird. Dem Modul 1 entspricht für praktische Zwecke etwa die Teilungslänge von 25 cm.

1. Beispiel: Es sei der Zusammenhang

$$f = 0,3 \cdot B^{1,4}$$

für den Bereich $B_{10}^{10^5}$ als Doppelskala darzustellen.

Lösung: Durch Logarithmieren geht die vorgelegte Gleichung über in

$$\lg f = 1,4 \cdot \lg B + \lg 0,3.$$

Aus dieser Gleichung sind nach früheren Ausführungen die erforderlichen Teilungsmoduln unmittelbar abzulesen:

$$\mu_f = 1; \quad \mu_B = 1,4.$$

Die Teilung für f ist also eine logarithmische im Modul $\mu_f = 1$; die für B eine ebensolche, aber im Modul $\mu_B = 1,4$. Wegen der additiven Konstanten $\lg 0,3$ fallen die Anfangspunkte der logarithmischen Einheiten (Zehnerpotenzen für f und B !) nicht zusammen, sondern sind um den Betrag $\lg 0,3$, gemessen auf der f -Teilung, gegeneinander verschoben.

Nun ist der Teilungsmodul 1,4 bzw. 1:1,4 derart ausgefallen, daß man ihn gewöhnlich nicht „vorrätig“ haben wird.

Er ist aber leicht in die Zeichnung Abb. 53 einzutragen. Ist nämlich die Länge $AP = L = 250$ mm, so käme die Teilung mit dem Modul 1:1,4 nach einem Punkte, der um

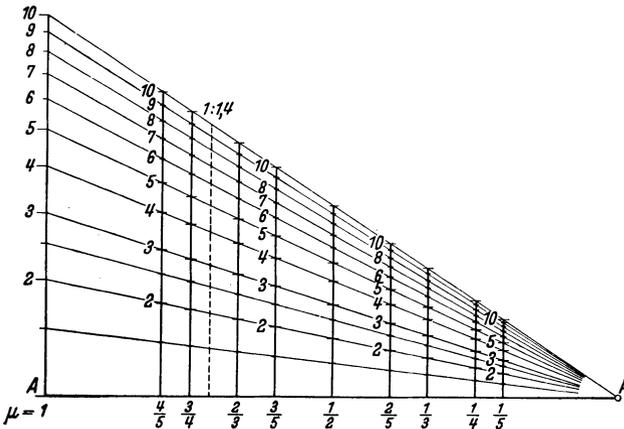


Abb. 53.

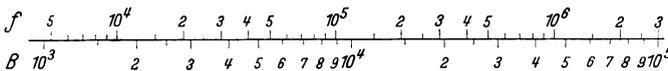


Abb. 54.

$\frac{L}{1,4}$, im Beispiel also um $\frac{250}{1,4} = 178,5$ mm von P entfernt ist. (Abb. 53 ist im Maßstabe 1:3,33 gezeichnet.)

Die auf Grund dieser Überlegungen gefertigte Funktionsleiter zeigt Abb. 54.

2. Beispiel: Die bereits früher (Abschn. 7) behandelte Gleichung

$$H_m = 0,0785 E_{km}^2$$

soll durch eine logarithmische Skala dargestellt werden.

Lösung: Aus

$$\lg H = 2 \cdot \lg E + \lg 0,0785$$

folgt

$$\mu_H = 1; \mu_E = 2.$$

Die H -Skala ist um $\lg 0,0785$ gegen die B -Skala verschoben, doch wird man auch hier wieder die Verschiebung besser durch Berechnung von ein oder zwei Werten bestimmen. Die gezeichnete Skala siehe Abb. 55.

3. Beispiel: Die Gleichung (11)

$$(E - B)_m = \frac{B_{km}^3}{122000}$$

soll als logarithmische Doppelskala dargestellt werden.

Lösung:

$$\lg(E-B) = 3 \lg B - \lg 122000$$

$$\mu_{(E-B)} = 1; \mu_B = 3,$$

Die Verschiebung der Skalen gegeneinander wird wieder auf Grund der Berechnung eines oder zweier Beispiele bestimmt (Abb. 56).

4. Beispiel: In dem hyperbolischen Zusammenhang

$$y = \frac{a}{x}$$

soll a ein veränderlicher Parameter sein. Die Darstellung in einem regulären r.K.S. ergibt alsdann eine Schar von Hyperbeln. Durch Logarithmieren geht die vorgelegte Gleichung über in

$$\left. \begin{aligned} \lg y &= -\lg x + \lg a \\ \lg y &= Y \\ \lg x &= X \\ \lg a &= A \end{aligned} \right\} Y = -X + A, \tag{14}$$

oder mit

in

das ist aber eine Gerade mit der Richtungskonstanten

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -1 \\ \alpha &= 135^\circ, \end{aligned}$$

d. h. die Gerade ist um 135° gegen die X -Achse geneigt.

Durch Logarithmieren ist es also gelungen, die Gleichung der Hyperbel in die einer Geraden überzuführen. Auch als gerade Linie kann die Hyperbel gezeichnet werden, wenn man nach Aussage der Gleichungen (14) die Koordinatenachsen nicht regulär, sondern logarithmisch teilt. Bei veränderlichem Parameter a erhalten wir eine Schar paralleler Geraden, die auf der Y -Achse Stücke abschneiden, die ebenfalls gemäß (14) dem logarithmischen Gesetz folgen.

Die hiernach gezeichnete Schar der Geraden zeigt Abb. 57. Die Tafel kann bei hinreichender Größe und entsprechender Unterteilung der Achsen als „Multiplikationstafel“ verwendet werden gemäß der Beziehung

$$\begin{aligned} x \cdot y &= a \\ 4,3 \cdot 7,2 &= 31 \end{aligned}$$

beispielsweise

usw. Da die Ziffernfolge sich bei den verschiedenen Zehnerpotenzen nicht ändert, ist die Tafel auch für jede beliebige andere Zehnerpotenz, als für die sie gezeichnet



Abb. 55.

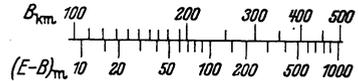


Abb. 56.

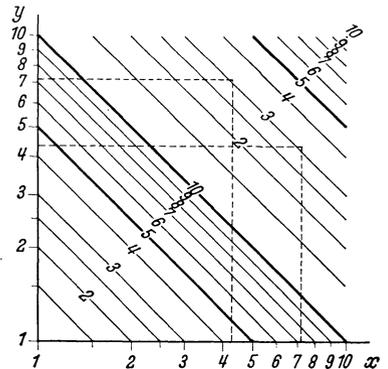


Abb. 57.

wurde, verwendbar. Die richtige Stellung des Kommas findet man — wie beim Rechenschieber — durch eine Überschlagsrechnung. Zum Beispiel

$$0,37 \cdot 46\,500 \left(\approx \frac{45\,000}{3} = 15\,000 \right) = 17\,200.$$

Auch für die reziproke Rechnungsart, also das Dividieren, ist die Tafel brauchbar.

c) Näherungsweise können erhebliche Stücke auch der logarithmischen durch eine projektive Teilung ersetzt werden. Für die logarithmische Teilung einer gegebenen Strecke über eine ganze Zehnerpotenz ist es indes zweckmäßig, sie aus zwei Teilen unter Benutzung zweier Skalen zu entwickeln, wie dies in Abb. 58 geschehen ist.

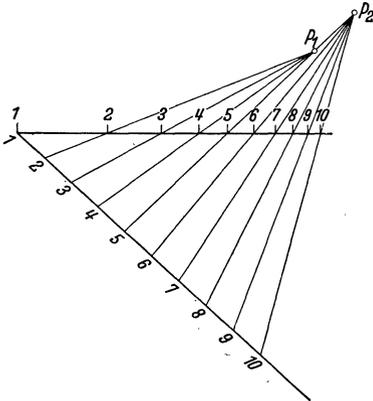


Abb. 58.

Die Abweichungen der projektiven gegenüber der exakten logarithmischen Teilung bleiben bei diesem Verfahren unter $\frac{5}{1000}$. Das Verfahren ist also weitgehend brauchbar und stellt erneut unter Beweis, daß größere Bereiche jeder beliebigen Kurve mit einer für praktische Rechenzwecke ausreichender Genauigkeit durch eine Hyperbel ersetzt werden dürfen.

d) Eine rohe Aufzeichnung logarithmischer Teilungen kann auf Grund lediglich der Kenntnis erfolgen, daß $\lg 2 = 0,30$ ist; daraus folgt ja, daß $\lg 4 = 0,60$, $\lg 5 = 0,70$, $\lg 8 = 0,90$; bekannt ist schließlich weiter, daß

$\lg 1 = 0$ und $\lg 10 = 1,00$. Damit lassen sich schon die wichtigsten Punkte einer logarithmischen Teilung zeichnen, z. B. für 100 mm Teilungslänge:

$N =$	1	2	4	5	8	10
$\lg N$ in mm	0	30	60	70	90	100

Zwischenwerte interpoliert man entweder graphisch nach dem Verfahren des vorigen Abschnittes oder auch einfach nach Augenschein. Für rohe Entwürfe und überschlägige Orientierungen leistet das Verfahren ausgezeichnete Dienste.

12. Trigonometrische Teilungen. a) Auch die trigonometrischen Teilungen wird man gewöhnlich an Hand einer Tabelle der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen anfertigen, weil die graphische Darstellung etwa nach Abb. 32 im 1. Teil doch zu umständlich und auch weniger genau wäre.

b) Abb. 59 zeigt eine Doppelskala für $f(x) = \sin x$, $x_0^{90^\circ}$; sie gestattet selbst bei dieser groben Unterteilung bereits eine Angabe der Funktionswerte auf etwa 1% genau.

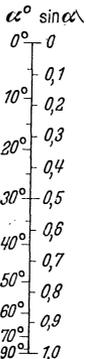


Abb. 59.

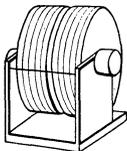


Abb. 60.

c) Allerdings wird gerade von trigonometrischen Teilungen oftmals eine wesentlich höhere Genauigkeit gefordert. Es fragt sich, wie das erreicht werden kann, ohne sich des Vorteils der geringen Platzinanspruchnahme zu begeben. Da hat sich denn die Anbringung der Skalen auf einer Trommel als recht praktisch erwiesen. Eine Trommel von 32 cm Durchmesser hat ja bereits einen Umfang von rund 1 m. Wenn man nun die ganze Skala in 10 gleiche Teile teilt, jeden Teil 1 m lang zeichnet und nebeneinander auf der Trommel anordnet (Abb. 60), so hat man denselben Effekt, als ob man eine 10 m lange Skala in der Ebene hätte. Das ist ein gewaltiger Vor-

teil.

teil, kann man doch auf derartigen Skalen bequem noch $\frac{1}{2}$ mm schätzen, was einer Genauigkeit von $\frac{5}{100\,000}$ entspricht.

d) Oft ist es möglich, trigonometrische Skalen durch algebraische zu ersetzen, wie das folgende, der praktischen Vermessungstechnik entnommene Beispiel zeigt.

Wenn man bei trigonometrischen Netzen 2. und 3. Ordnung exzentrisch gemessene Winkel auf das Zentrum umrechnen will, so geschieht das mit Hilfe des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie. Mit Bezug auf Abb. 61 gilt für den Korrektionswinkel ε die Beziehung

$$\sin \varepsilon = \frac{e \cdot \sin \alpha}{s} \tag{15}$$

Die Berechnung von ε wird formularmäßig, und zwar mit vier- bis sechsstelligen Logarithmen durchgeführt. Um die Richtigkeit der Rechnung nachzuprüfen, wiederholt man sie mit natürlichen Werten, wobei man wegen der meist sehr geringen Größe von ε statt $\sin \varepsilon$ den Winkel ε im Bogenmaß in die Rechnung einführt; man verwendet die Gleichung (15) in der Form

$$\varepsilon = \frac{\varrho \cdot e \cdot \sin \alpha}{s} \tag{16}$$

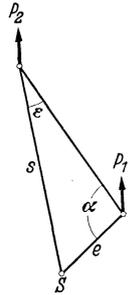


Abb. 61.

Diese Art der Rechnung ist indes nur angängig, wenn ε nur eine gewisse Größe nicht überschreitet. Im anderen Falle liefert die Formel zu kleine Werte. Die erforderliche Korrektur $\Delta \varepsilon$ wird mit zunehmendem ε schnell größer; sie berechnet sich, wenn man $\Delta \varepsilon$ in Sekunden (a. T.)¹, ε selbst in Graden einführt, zu

$$\Delta \varepsilon = 0,1827 \varepsilon^3. \tag{17}$$

Entwickelt man nämlich die Differenz $f(\varepsilon) = (\sin \varepsilon) - \varepsilon$ nach TAYLOR, so erhält man mit $f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3!} - \frac{\varepsilon^5}{5!} + \dots$ eine Reihe, die so stark konvergiert, daß bereits das zweite Glied vernachlässigt werden kann; der Fehler, den man dadurch begeht, beträgt für $\varepsilon = 10^\circ$ erst $0,2''$. — Rechnet man die Gleichung $f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3!}$ in Gradmaß um, so ergibt sich aus $f(\varepsilon) = \Delta \varepsilon = \frac{(\varepsilon^\circ)^3 \cdot 206\,000}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (57,3)^3}$ die obige Beziehung (17), wobei $\Delta \varepsilon$ in Sekunden herauskommt, wenn ε in Graden eingeführt wird.

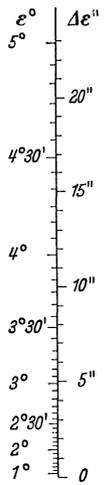


Abb. 62.

Den genauen Wert für ε erhält man also, wenn man die nach den Gleichungen (16) und (17) berechneten Werte addiert. Diese Art der Kontrollrechnung ist indes nur bequem, wenn das Korrektionsglied (17) aus einer Tafel od. dgl. direkt entnommen werden kann. Die nebenstehende Doppelskala (Abb. 62) gestattet dies, und zwar auf $0,1''$ genau, was für die gedachten Zwecke i. A. ausreichen dürfte.

Nachstehend ist ein Beispiel durchgerechnet:

Es sei $e = 25,350$ m
 $\alpha = 118^\circ 25' 26,0''$
 $s = 310,35$ m.

1. Berechnung (logarithmisch):

e	1,40398
$\sin \alpha$	9,94421
cpl. s	7,50815
	8,85634
$\sin \varepsilon$	8,85634
	$\varepsilon = 4^\circ 07' 10''$.

¹ Man unterscheidet „alte“ Teilung ($1^\circ = 60'$, $1' = 60''$) und „neue“ Teilung, bei der Grade und Minuten in je 100 Teile geteilt werden. Hier gilt „alte“ Teilung (a. T.). Vgl. Techn. Rechnen I. Teil, S. 19.

2. Berechnung (mit der Rechenmaschine):

$$\frac{\rho e \sin \alpha}{s} = \frac{206265 \cdot 25,35 \cdot 0,4760}{310,35} = 14817''$$

$$= 4^{\circ} 06' 57''$$

hierzu das Korrektionsglied aus Abb. 62

$$\frac{13.0}{\varepsilon = 4^{\circ} 07' 10.0''}$$

B. Rechentafeln für drei und mehr Veränderliche.

13. Zusammenhang zwischen Parallel- und rechtwinkligen Koordinaten. a) Die Funktion $z = f(x, y)$ läßt sich in einem r.K.S. als Kurvenschar, in einem solchen mit entsprechend funktionell geteilten Achsen als Schar gerader Linien darstellen. Auf diese Weise werden also durch jeden Punkt der Ebene jeweils ein bestimmter Wert der drei Variablen x, y und z einander zugeordnet. Die Einanderzuordnung dreier zusammengehöriger Werte kann aber auch noch auf andere Weise erfolgen. Jede Schar gerader Linien läßt sich nämlich im sog. Parallelkoordinatensystem durch drei Skalen so darstellen, daß jeweils drei zusammengehörige Werte auf derselben Geraden liegen (Abb. 63). Man nennt solche Darstellungen Fluchtlinientafeln oder auch „Nomogramme nach der Methode der fluchtrecten Punkte“ („Fluchtrect“ nennt man drei und mehr Punkte, wenn sie in einer Geraden liegen).

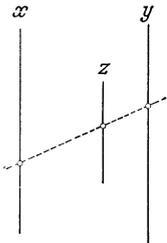


Abb. 63.

b) Im Parallelkoordinatensystem entsprechen der x - bzw. y -Achse des rechtwinkligen Systems die parallelen, gewöhnlich mit u und v bezeichneten geradlinigen Skalenträger; der Skalenträger für z verläuft geradlinig oder auch als Kurve zwischen den beiden anderen. Den Zusammenhang zwischen der Darstellung einer Funktion mit drei Variablen einmal im rechtwinkligen und dann im Parallelkoordinatensystem zeigen die Abb. 64 und 65. Für beide gilt

$$\overline{OB/OB'} = \overline{OA/OA'}$$

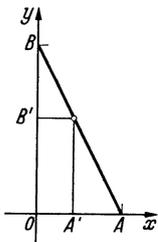


Abb. 64.

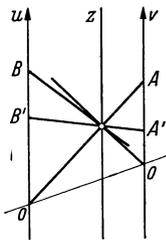


Abb. 65.

Das bedeutet aber nichts anderes, als daß eine Gerade des r.K.S. im Parallelkoordinatensystem (P.K.S.) durch einen Punkt, die Schar durch eine Linie dargestellt wird. Damit ist die Möglichkeit gegeben, jede Schar gerader Linien in einem r.K.S. in eine Fluchtlinientafel mit äußeren geraden und parallelen Skalenträgern rein empirisch umzuzeichnen.

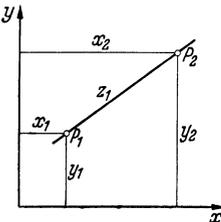


Abb. 66.

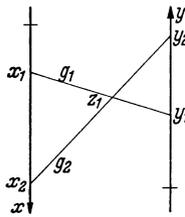


Abb. 67.

Um beispielsweise die Gerade Z_1 der kartesischen Darstellung in einem Parallelkoordinatensystem als Punkt, also als bestimmten Skalenwert abzubilden, teilt man die Achsen des Parallelkoordinatensystems genau ebenso wie die entsprechenden Achsen des r.K.S. Der Punkt P_1 auf der Geraden Z_1 (Abb. 66) wird dann im P.K.S. (Abb. 67) durch die Gerade g_1 , der Punkt P_2 durch die Gerade g_2 dargestellt, und ihr Schnittpunkt entspricht der Geraden Z_1 . Durch Übertragung ganzer Geradenscharen lassen sich auf diese Weise die diese darstellenden Skalen punktweise entwickeln.

Sind die Winkel, um die die Geraden gegen die x -Achse geneigt sind, kleiner als 90° (wie in Abb. 66), so laufen im Nomogramm die x - und y -Teilungen entgegengesetzt; bei Neigungen zwischen 90° und 180° hingegen sind die Teilungsrichtungen gleich, wie z. B. in den einander entsprechenden Abb. 57 und 72.

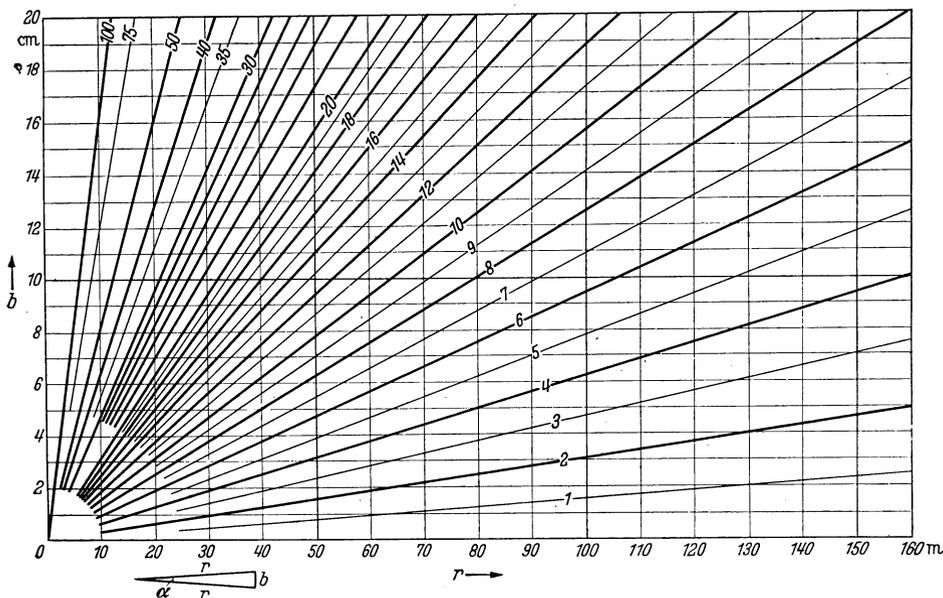


Abb. 68.

Beispiel: In einem Kalender für Vermessungskundige (herausgegeben von R. REISS, Liebenwerda) findet sich die in Abb. 68 dargestellte Tafel. Es handelt sich um eine Auswertung der Beziehung

$$\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{\varrho}$$

für $\alpha]_0^{100^\circ}$. Abb. 69¹ zeigt das daraus rein empirisch entwickelte Nomogramm: Es entstand in der Weise, daß zunächst — im beliebigen Abstand — die beiden äußeren Skalenträger für b und r gezeichnet wurden. Sie sind beide regulär geteilt in denselben Bereiche wie die beiden Achsen der Darstellung im r.K.S. Von der Mittelskala für α wurden nur die Hauptpunkte — 1, 5, 10, 20 und 50 Neuminuten — übertragen, die Zwischenpunkte wurden nach Abschn. 10 graphisch interpoliert. Um beispielsweise den Ort für $\alpha = 5^\circ$ zu finden, sucht man in der Darstellung im r.K.S. (Abb. 68) zwei Punkte auf dieser Geraden auf, etwa $P_1(b = 10; r = 127)$ und $P_2(b = 3; r = 38,5)$. Dann zeichnet man die diesen Punkten entsprechenden Geraden in die Fluchtlinientafel ein, indem man die zusammengehörigen Punkte der b -Skala und der r -Skala miteinander verbindet. Dort, wo sie sich schneiden, liegt der gesuchte Punkt 5° der α -Skala. Es hätte übrigens zu seiner Bestimmung bereits nur ein Wertpaar genügt. Da nämlich zu $r = 0$ und $b = 0$ der Wert $\alpha = 0$ gehört, die Werte $r = 0$ und $b = 0$ zu jedem Wert von α zugeordnet sind, müssen alle α -Werte auf der Verbindungsgeraden $b = 0$ und $r = 0$ liegen. Ähnliche Überlegungen kann man auch bei anderen Entwicklungen oftmals anstellen; sie führen gewöhnlich zu erheblichen Erleichterungen, zum mindesten zu bequemeren Kontrollen der durchgeführten Konstruktion.

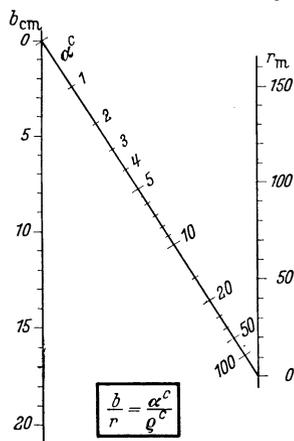


Abb. 69.

¹ ° ist das Zeichen für den 100. Teil eines Grades n. T. (Neuminute).

14. Fluchtlinientafeln für $f_1 + f_2 = f_3$. a) In Abb. 70 ist eine grundsätzliche Fluchtlinientafel gezeichnet, nämlich die für den Zusammenhang

$$x + y = z. \tag{18}$$

Die äußeren Achsen sind in dem gleichen Modul regulär nach x und y geteilt, die mittlere Achse für z ist ebenfalls regulär, aber nach dem halben Modul, wie die andern Achsen geteilt.

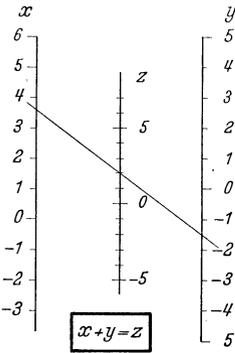


Abb. 70.

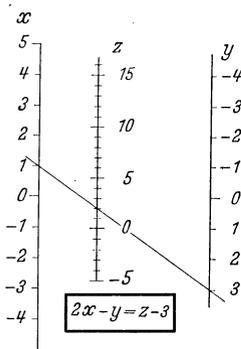


Abb. 71.

b) Der Abstand der z -Achse von der x - und der y -Achse sind in Abb. 70 gleich. Das ist aber nicht notwendig. Ändert man indes die Abstände, so ändert sich auch der Teilungsmodul für z (oder für die eine der anderen Achsen). Man erkennt auch, daß eine freie additive Konstante auf der rechten Seite der Gleichung (18) lediglich den Nullpunkt der z -Skala verschiebt. Es läßt sich weiter zeigen, daß ein Faktor bei einer der Variablen deren Teilungsmodul verändert, und daß die Vor-

zeichen der Variablen die Richtung ihrer Teilungen bestimmen. Auf Grund dieser Überlegungen wurde ein Nomogramm für die Beziehung

$$2x - y = z - 3$$

gezeichnet. Das in Abb. 71 eingetragene Beispiel löst die gegebene Gleichung für $x = 1$; $y = 3$; danach ist $z = +2$, in Übereinstimmung mit der numerischen Rechnung, nach der $z = 2x - y + 3 = 2 \cdot 1 - 3 + 3 = 2$.

c) Auch funktionelle Zusammenhänge von der Form

$$a f(x) + b f(y) = c f(z) + d \tag{19}$$

lassen sich auf Grund derselben Überlegungen als Fluchtlinientafeln darstellen, nur sind dann die Achsen nicht mehr regulär, sondern nach $f(x)$ bzw. $f(y)$ bzw. $f(z)$ zu teilen. Die (relativen) gegenseitigen Abstände der Skalen und ihre Moduln werden von den Koeffizienten a , b und c bestimmt, während die additive Konstante d die Verschiebung der Skala für z angibt.

d) Ein sehr einfaches Beispiel für eine Rechentafel mit funktionell geteilten Skalenträgern ist die Beziehung

$$x \cdot y = z. \tag{20}$$

Durch Logarithmieren geht die Gleichung über in

$$\lg x + \lg y = \lg z$$

oder, mit

$$\lg x = X; \lg y = Y; \lg z = Z,$$

in

$$X + Y = Z,$$

in welcher Form sie identisch ist mit unserer Ausgangsgleichung (18). In Anlehnung an unsere Abb. 70 hätten wir also drei parallele Skalenträger — für x , y und z — zu zeichnen. Ihren Abstand machen wir gleich. Die äußeren Skalenträger erhalten je eine logarithmische Teilung des gleichen Moduls, für x bzw. für y . Die Teilung des mittleren Skalenträgers für z ist ebenfalls logarithmisch, aber nur mit dem halben Teilungsmodul wie die beiden anderen gezeichnet. Den

Anfangspunkt der mittleren Teilung bestimmen wir aus einem einfachen Zahlenbeispiel, etwa aus $1 \times 1 = 1$. Das fertige Nomogramm, das für die Ausführung von Multiplikation und Division, Quadrieren und Wurzelziehen die besten Dienste leistet und bei entsprechender Ausführung Rechengenauigkeiten von etwa 0,5% zuläßt, zeigt Abb. 72.

e) Die Fertigung einer Fluchtlinientafel für einen auf die Form der Gleichung (19) gebrachten Zusammenhang läßt sich nun auf folgendes Schema bringen (Abb. 73):

1. Annahme der Teilungsmoduln μ_x und μ_y an sich beliebig, jedoch so, daß die für x bzw. y vorgeschriebenen Intervalle ausreichend groß und deutlich dargestellt werden können; Berechnung des dritten Teilungsmoduls μ_z zu

$$\mu_z = \mu_x \mu_y / (\mu_x + \mu_y). \quad (21)$$

2. Berechnung des Abstandsverhältnisses der drei Skalenträger zu

$$\delta_1 / \delta_2 = \mu_1 / \mu_2. \quad (22)$$

Zeichnung der drei Skalenträger in diesem Abstandsverhältnis.

3. Multiplikation der einzelnen Funktionen der Gleichung (19) mit den zugeordneten Teilungsmoduln, so daß die Gleichung übergeht in

$$a \mu_x f(x) + b \mu_y f(y) = c \mu_z f(z) + d \mu_z$$

oder durch Ausmultiplizieren $m_x f(x) + m_y f(y) = m_z f(z) + C$.

(23)

4. Zeichnung der Funktionsskalen:

u -Achse: $f(x)$ mit dem Teilungsmodul m_x ,
 v - „ $f(y)$ „ „ „ „ m_y ,
 w - „ $f(z)$ „ „ „ „ m_z .

Negative Vorzeichen erfordern Auftragen der Skalen in entgegengesetzter Richtung; die Konstante C hat lediglich eine Verschiebung der mittelsten Skala zur Folge; ein Punkt der z -Skala wird am besten berechnet und danach festgelegt.

Im übrigen trifft man die Anordnung der Teilungen so, daß die Rechentafel etwa ebenso lang wie hoch wird.

Beispiel: Es sei eine Fluchtlinientafel für $R = \frac{c \cdot l}{d^2 \pi / 4}$, wenn $c = 0,0175$;

$l_{0,1}^{1000 \text{ mm}}$ und $d_{0,03}^{3,0 \text{ mm}}$, zu entwerfen. Man erhält für $\frac{c}{\pi/4} = 0,0223$ und

somit $\lg R = \lg l - 2 \lg d + \lg 0,0223$ oder $\lg l - 2 \lg d = \lg R + C$.

Damit hat der gegebene Zusammenhang die Form der Gleichung (23).

1. Man wähle $\mu_x = \mu_y = 1$, dann ist $\mu_z = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$.

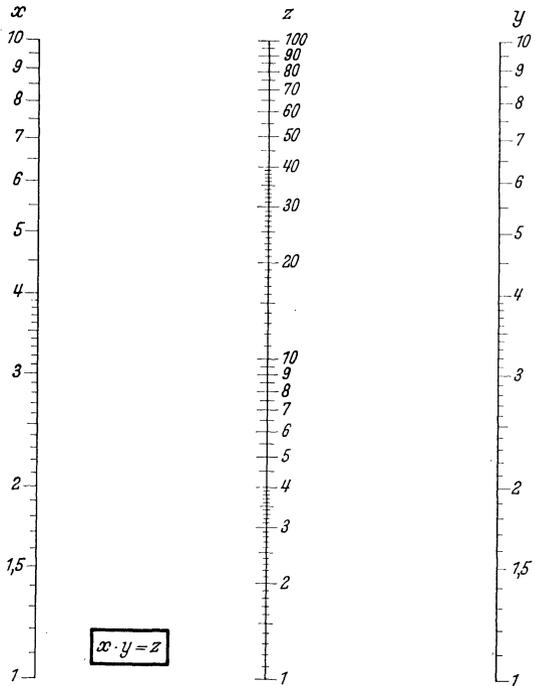


Abb. 72.

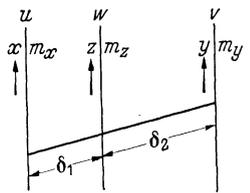


Abb. 73.

2. $\delta_1/\delta_2 = 1/1$; d. h. $\delta_1 = \delta_2$; der Skalenträger für R befindet sich genau in der Mitte zwischen dem für l und dem für d .

3. $1 \cdot \lg l - 1 \cdot 2 \cdot \lg d = \frac{1}{2} \lg R + C'$ oder $\lg l - 2 \cdot \lg d = \frac{1}{2} \lg R + C'$.

Es ist also zu zeichnen

- a) Skalenträger für l : logarithmisch in positiver Richtung mit dem Teilungsmodul $m_l = 1$,
- b) „ „ „ d : „ „ negativer „ „ „ „ „ $m_d = 2$,
- c) „ „ „ R : „ „ positiver „ „ „ „ „ $m_R = \frac{1}{2}$.

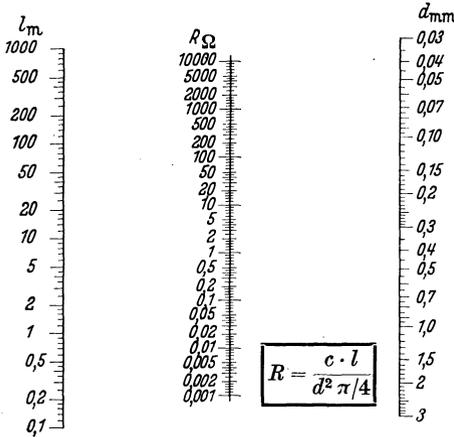


Abb. 74.

Um einen Punkt der R -Skala zu bestimmen, berechne man

$$l = Rd^2/0,0223$$

etwa für $R = 1$; $d = 1$; damit wird

$$l = 1/0,0223 = 44,8,$$

d. h. verbindet man die Punkte $d = 1$ und $l = 44,8$ durch eine Gerade, so schneidet diese den z -Skalenträger im Punkte $R = 1$. Von diesem Punkte ausgehend kann alsdann die R -Skala gezeichnet werden.

Das fertige Nomogramm zeigt — stark verkleinert — Abb. 74.

Allgemein wäre noch zu bemerken, daß es den fertigen Nomogrammen oftmals nicht ohne weiteres anzusehen ist, welchen mathematischen oder naturgesetzlichen Zusammenhang sie eigentlich darstellen. Es ist deswegen notwendig, grundsätzlich die

Formel usw. auf den einzelnen Rechentafeln zu bemerken, wie wir dies bei unseren Beispielen durchgeführt haben.

15. Zusammenhänge der Form $f_1 \varphi_3 + f_2 \varphi_3 + \psi_3 = 0$. a) Die Gleichung

$$f_1 \varphi_3 + f_2 \varphi_3 + \psi_3 = 0, \tag{24}$$

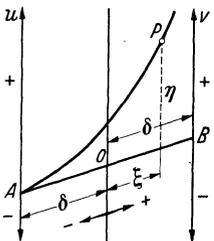
in welcher

f_1 = eine Funktion der ersten Variablen,

f_2 = eine Funktion der zweiten Variablen,

f_3, φ_3 und ψ_3 = verschiedene Funktionen einer dritten Variablen

bedeuten, läßt sich in Form einer Fluchtlinientafel darstellen, wenn in Abb. 75



1. die u -Achse des Parallelkoordinatensystems funktionell nach f_1 ,

2. die v -Achse funktionell nach f_2 geteilt wird und

3. die Koordinaten des mittleren Skalenträgers den Gleichungen

$$\xi = \delta \frac{\varphi_3 \mu_1 - f_3 \mu_2}{\varphi_3 \mu_1 + f_3 \mu_2}, \tag{25}$$

$$\eta = \frac{\mu_1 \mu_2 \psi_3}{\varphi_3 \mu_1 + f_3 \mu_2} \tag{26}$$

Abb. 75.

entsprechen.

Es bedeutet darin:

$\delta = -OA = +OB$ (= halbe Länge der ξ -Achse),

μ_1 = Teilungsmodul für f_1 (u -Achse), beliebig zu wählen,

μ_2 = „ „ „ f_2 (v -Achse), „ „ „ „

Der mittlere Skalenträger ist hier gewöhnlich eine Kurve.

Beispiel: Die Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ hat die Form der Gleichung (24), wenn man schreibt: $b + ax + x^2 = 0$.

Es ist alsdann:

$$f_1 = b; \quad f_3 = 1; \\ f_2 = a; \quad \varphi_3 = x; \quad \psi_3 = x^2.$$

Auf der u -Achse ist also b aufzutragen mit $\mu = 1$, auf der v -Achse ist a aufzutragen. Auch für die a -Teilung wird man, wenn kein besonderer Grund vorliegt, den Teilungsmodul $\mu_2 = 1$ wählen. Damit ergibt sich

$$\xi = \delta \cdot \frac{x-1}{x+1} \quad (= \text{projektive Teilung!}), \quad \eta = \frac{x^2}{x+1}.$$

Diese Ordinaten η brauchen nicht einzeln berechnet zu werden; man kann sie vielmehr einfach konstruieren wie folgt. Für $b = 0$ geht die gegebene Gleichung über in

$$x^2 + ax = 0; \quad x = -a.$$

Das bedeutet: Verbindet man den Punkt A ($b = 0$) folgeweise mit den Punkten $a = -1, -2, -3$ usw., so schneiden die Verbindungsgeraden die Ordinaten η jeweils in den Punkten des mittleren Skalenträgers, die den Werten $x = 1, 2, 3$ usw. zugeordnet sind. Das hiernach entworfene Nomogramm zeigt Abb. 76. Danach hat die Gleichung

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

die Wurzeln

$$x_1 = +2; \quad x_2 = -6.$$

Man findet sie mittels der Geraden durch $b = -12$ und $a = 4$.

b) Beispiel: Für die Beziehung $a = \frac{\rho \cdot y}{x^2 + y^2}$ ist eine Rechentafel aufzustellen.

Lösung: In der Form

$$x^2 - \rho \cdot y \cdot a^{-1} + y^2 = 0$$

entspricht die Gleichung unserer Grundform (24).

Setzt man darin

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2; & f_3 &= 1 \\ f_2 &= -\rho a^{-1}; & \varphi_3 &= y \end{aligned}$$

so bedeutet das (Abb. 77):

1. die u -Achse ist quadratisch zu teilen gemäß

$$u = \mu_1 x^2,$$

2. die v -Achse ist projektiv zu teilen gemäß

$$v = -\mu_2 \frac{\rho}{a},$$

3. die Koordinaten des mittleren Skalenträgers berechnen sich zu

$$\xi = \delta \frac{\mu_1 y - \mu_2}{\mu_1 y + \mu_2},$$

d. h. die Abszisse ist ebenfalls projektiv zu teilen; endlich

$$\eta = \frac{\mu_1 \mu_2 y^2}{\mu_1 y + \mu_2},$$

d. h. die Ordinaten folgen einem verwickelteren hyperbolischen Gesetz und müßten einzeln berechnet werden; wie man diese Berechnung umgehen kann, wird weiter unten angegeben.

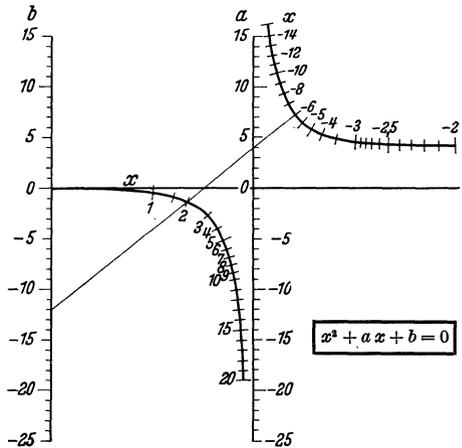


Abb. 76.

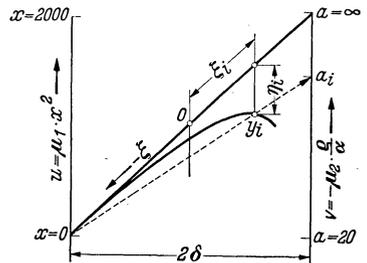


Abb. 77.

Bezüglich der Konstruktion der einzelnen Skalen ist folgendes zu bemerken:

Der Teilungsmodul μ_1 kann frei gewählt werden; seine Größe hängt von der beabsichtigten Genauigkeit der Darstellung sowie dem gewählten Bereich für x ab. Es möge die u -Skala $u = \mu_1 x^2$ gezeichnet werden für den Bereich

$$x]_0^{2000} \text{ m};$$

sie möge eine Länge von 400 mm erhalten. Da nun $x_{x=2000}^2 = 4 \cdot 10^6$ Einheiten 400 mm in der Zeichnung entsprechen, so ist

$$1 \text{ mm Zeichnung} \equiv \frac{4 \cdot 10^6}{400} = 10^4 \text{ darzustellenden Einheiten}^1.$$

Diesen Teilungsmaßstab wollen wir gleich 1 setzen; also:

$$\mu_1 = 1 \equiv 10^4 \text{ Einh./mm Zchnng.}$$

Die u -Skala wird nach Festlegung des Anfangs- und Endpunktes entweder rein graphisch oder an Hand einer Quadrattafel gezeichnet. Nach dem Gesagten liegt der Punkt $x_1 = 0$ bei 0; $x_2 = 2000$ bei 400 mm. Will man die Zwischenpunkte nicht konstruieren, sondern berechnen, so benutzt man dazu nebenstehendes Schema.

Tabelle 5.

x	x^2	v
100	10^4	1 mm
200	$4 \cdot 10^4$	4 mm
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Um den Teilungsmodul μ_2 für die v -Skala zu bestimmen, gehen wir wie folgt vor:

a möge dargestellt werden für das Intervall

$$a]_{20}^{\infty}$$

dann ist

$$\text{für } a = \infty \quad v = \frac{\varrho}{\infty} = 0$$

$$\text{für } a = 20 \quad v = \frac{\varrho}{20} = 1,03 \cdot 10^4,$$

d. h. beim Modul $\mu_2 = 1$ würde diese Skala 1,03 mm lang werden. In dieser Länge ist sie nicht brauchbar; wir wählen

$$\mu_2 = 500,$$

sie wird damit $500 \cdot 1,03 = 515,1$ mm lang.

Der Abstand der beiden Parallelskalen ist beliebig; um später nicht zu spitzwinklige Schnitte zu erhalten, wähle man ihn nicht zu klein. Etwa

$$2 \delta' = 350 \text{ mm.}$$

Nunmehr kann die projektive Skala v gezeichnet werden. Bemerkt sei noch, daß die Richtung der u - und v -Skalen durch das Vorzeichen der Variablen bedingt ist, wie dies für unser Beispiel die Abb. 77 andeutet. Die gegenseitige Lage der Punkte $x^2 = 0$ und $\frac{\varrho}{a} = \infty$ ist beliebig. In der Zeichnung sei ihre Entfernung

$$2 \delta = 600 \text{ mm.}$$

Die Verbindungslinie stellt die ξ -Achse des Koordinatensystems dar. Sie ist zu teilen gemäß Gleichung (25), welche mit $\delta = 300$; $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 500$ übergeht in

$$\xi = 300 \frac{y - 500}{y + 500}.$$

Die Teilung ist also wieder projektiv; man wird sie demgemäß konstruktiv durchführen, und zwar für die Mehrzahl der auf dem mittleren Skalenträger erscheinenden Punkte.

¹ Das Zeichen \equiv bedeutet: entspricht, oder entsprechend.

Die Ordinaten η der einzelnen Punkte der mittleren Skala müßten einzeln nach Gleichung (26) berechnet werden. Einfacher führt aber folgende Überlegung zum Ziele: Setzt man in die vorgelegte Gleichung $x = 0$, so geht sie über in

$$a = \frac{ay}{x^2 + y^2} = \frac{a}{y}; \quad \text{hieraus}$$

$$y = \frac{a}{a};$$

das bedeutet, die Punkte des mittleren Skalenträgers liegen auf Strahlen, die vom Punkte $x = 0$ zu jenen Punkten auf der a -Skala führen, welche dieser Gleichung entsprechen. Einige Wertpaare sind nebenstehend zusammengestellt. Wem die Ablesungen für $a > 300$ zu unsicher erscheinen, mag die Ordinatenwerte $y < 1000$ nochmals nach Formel (26) berechnen, welche mit $\mu_1 = 1; \mu_2 = 500$ übergeht in

$$\eta = \frac{500y^2}{y + 500}.$$

Die Punkte des Skalenträgers y findet man also:

Entweder:

Als Schnittpunkte der auf der ξ -Achse parallel zu u und v errichteten Ordinaten und den durch die obige Gleichung gekennzeichneten Linien.

Oder unmittelbar durch die Koordinaten ξ und η .

Das fertige Nomogramm zeigt Abb. 78.

c) Der Gebrauch der Tafel Abb. 78 erhellt aus ihrer Theorie: da jeweils drei zusammengehörige Werte für x, y und a auf einer Geraden liegen müssen, braucht man, um etwa a aus gegebenen x und y zu bestimmen, die beiden letzteren in der Tafel nur aufzusuchen, durch eine Gerade zu verbinden und in deren Schnitte mit der a -Skala den gesuchten a -Wert abzulesen; den b -Wert erhält man in der gleichen Weise, indem man x und y ihrem Werte nach einfach vertauscht und wie beschrieben verfährt. An der Abb. 78 ist a für $x = 1500, y = 500$ mit $a = 41,2$ bestimmt; den gleichen Wert erhält man übrigens für $y = 4500$ bei gleichem x . In der beschriebenen Ausführung liefert die Tafel brauchbare Werte, solange a und b zwischen 3 und 200 liegen. Aber auch die außerhalb dieses Intervalls liegenden Werte findet man leicht durch Verwendung einer mittleren Hilfsskala bzw. durch Multiplikation zweier der Variablen (etwa y und a) mit einer entsprechenden Zehnerpotenz. Doch soll hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Tabelle 6.

y	a
200	1031,3
400	515,6
1000	206,3
2000	103,13
4000	51,56

man, um etwa a aus gegebenen x und y zu bestimmen, die beiden letzteren in der Tafel nur aufzusuchen, durch eine Gerade zu verbinden und in deren Schnitte mit der a -Skala den gesuchten a -Wert abzulesen; den b -Wert erhält man in der gleichen Weise, indem man x und y ihrem Werte nach einfach vertauscht und wie beschrieben verfährt. An der Abb. 78 ist a für $x = 1500, y = 500$ mit $a = 41,2$ bestimmt; den gleichen Wert erhält man übrigens für $y = 4500$ bei gleichem x . In der beschriebenen Ausführung liefert die Tafel brauchbare Werte, solange a und b zwischen 3 und 200 liegen. Aber auch die außerhalb dieses Intervalls liegenden Werte findet man leicht durch Verwendung einer mittleren Hilfsskala bzw. durch Multiplikation zweier der Variablen (etwa y und a) mit einer entsprechenden Zehnerpotenz. Doch soll hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

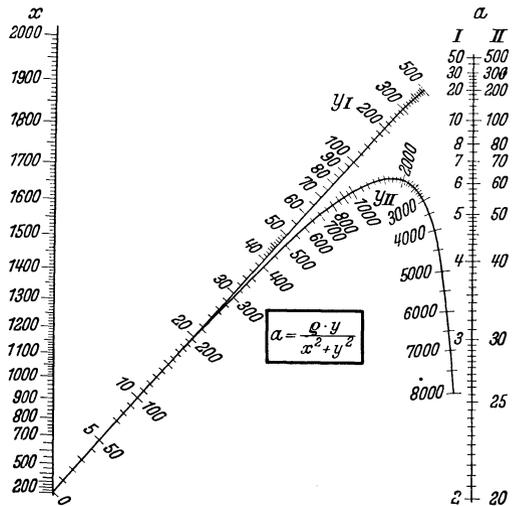


Abb. 78.

16. Andere funktionelle Zusammenhänge. a) Wenn auch mit den Zusammenhängen

$$f_1 + f_2 = f_3$$

und

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + \psi_3 = 0$$

die beiden wichtigsten Typen von Fluchtlinientafeln behandelt wurden, so gibt es doch noch recht viele andere, für die besondere Konstruktionsanweisungen erdacht wurden. So für

$$f_1 : f_2 = f_3 : f_4 \tag{27}$$

$$f_1 f_2 = f_3 \tag{28}$$

$$1/f_1 + 1/f_2 = 1/f_3 \tag{29}$$

usw.

Wir müssen hier darauf verzichten, sie eingehender zu betrachten. Es mögen folgende Hinweise genügen.

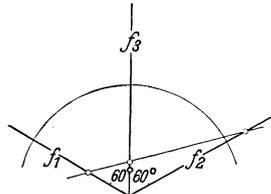


Abb. 79.

b) Die Gleichung (27), die ja eine Proportion darstellt, könnte man mit Hilfe der Strahlensätze zu lösen suchen. Ein Beispiel für die Gleichungsform (28) behandelten wir — ohne das dort besonders zu betonen — im Abschnitt 13; auch im Abschnitt 19 kommen wir noch einmal auf diese Gleichungsform zurück.

c) Die Darstellung der Gleichung (29) in einer Fluchtlinientafel mit drei in einem Punkte zusammenlaufenden Skalenträgern deutet Abb. 79 an; es kann z. B. hiernach die Linsenformel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

überraschend bequem ausgewertet werden.

17. Gekoppelte Funktionen. a) Sind mehr als drei Variable vorhanden, so führt man als Bindeglied zwischen je zwei Variablen Hilfsfunktionen $f(H_1)$, $f(H_2)$ usw. ein, für welche nur die (geradlinigen) Skalenträger, nicht aber deren Teilungen, gezeichnet zu werden brauchen.

b) Ist beispielsweise die Gleichung $f(u) + f(v) + f(x) + f(y) + f(z) = 0$ als Rechentafel darzustellen, so geht man schrittweise vor, indem beispielsweise gesetzt wird: $f(u) + f(v) + f(H_1) = 0$ und zunächst diese Rechentafel entwickelt.

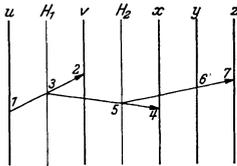


Abb. 80.

Alsdann setzt man weiter:

$$f(H_1) + f(x) + f(H_2) = 0$$

und zeichnet unter Benutzung des im ersten Berechnungsgange gefundenen Skalenträgers für H_1 auch dieses Nomogramm; daran schließt sich endlich die dritte Rechentafel für

$$f(H_2) + f(y) + f(z) = 0.$$

Auf diese Weise können Rechentafeln für beliebig viele Veränderliche entworfen werden; die grundsätzliche Anordnung der Skalenträger und der Auswertungsgeraden zeigt Abb. 80.

c) Durch geeignete Wahl der Kopplungsfunktionen, ferner durch Verwendung eines Skalenträgers für zwei Variable und ähnliche Kunstgriffe lassen sich die Rechentafeln oftmals überraschend einfach gestalten.

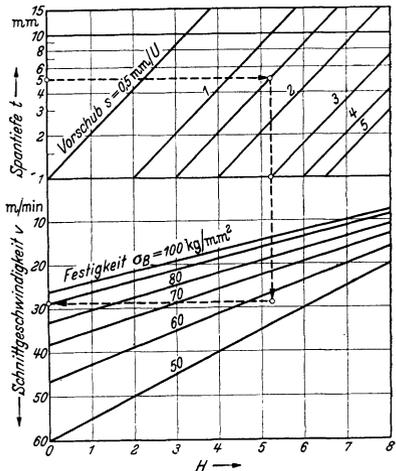


Abb. 81.

Beispiel: WALLICHS und DABRINGHAUS haben in der Z. VDI 1930 eine graphische Tafel zur Bestimmung der Schnittgeschwindigkeit v_{60} (m/min) eines Werkstoffs gegebener Festigkeit σ_B (kg/mm²) aus der Spantiefe t (mm) und dem Vorschub s (mm/U) veröffentlicht.

Aus dieser Tafel sind die in Tabelle 7 zusammengestellten Zahlenwerte entnommen. H ist eine Hilfsgröße, welche die Variablen t und s einerseits, σ_B und v_{60} andererseits miteinander verbindet (= Kopplungsfunktion).

Tabelle 7.

t	s	H	H	σ_B	v_{60}
1	0,5	0	0	30	—
1	2	4	0	50	60
1	4	6	0	100	26
2	0,5	1	4	30	80
2	2	5	4	50	40
2	4	7	4	100	17
8	0,5	3	5	30	48
8	2	7	5	50	34
8	4	9	5	100	15
16	0,5	4	8	30	70
16	2	8	8	50	20
16	4	10	8	100	—

In Abb. 81 sind nun die Werte dieser Tabelle in zwei rechtwinkligen K.S. dargestellt, welchen die nach der Hilfsgröße H regulär geteilte Abszisse gemeinsam

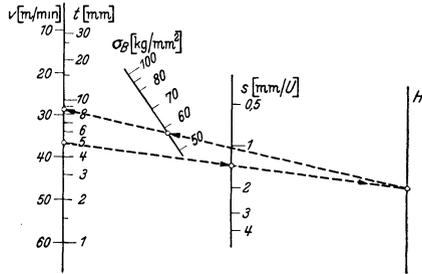


Abb. 82.

ist. Es ergeben sich zwei Scharen von Geraden, die unmittelbar unter Verwendung der gefundenen Teilungen für v_{60} und t in die Rechentafel Abb. 82 umgezeichnet wurde. Die in Abb. 81 und 82 eingezeichneten Geraden dienen zur Berechnung von v_{60} für $t=5$; $s=1,5$; $\sigma_B=57$. Ergebnis: $v=29$ m/min.

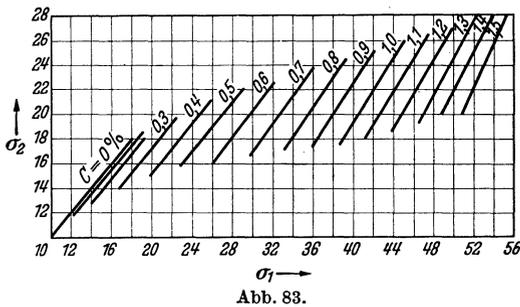


Abb. 83.

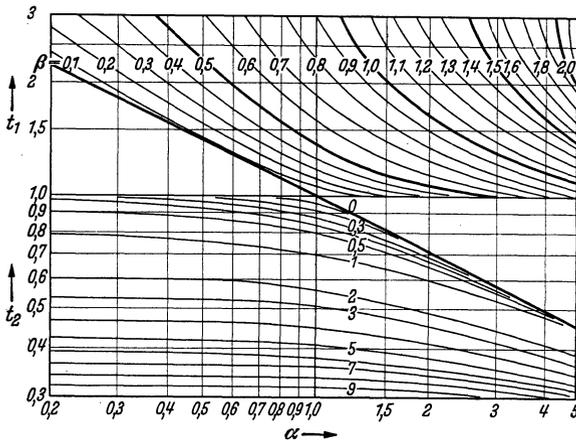


Abb. 85.

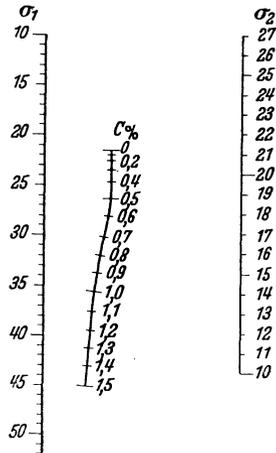


Abb. 84.

18. Empirische Zusammenhänge. a) Auch Zusammenhänge, die lediglich zahlenmäßig bekannt sind, für die also eine mathematische Formel nicht gegeben oder nicht bekannt ist, lassen sich nomographisch darstellen, und zwar entweder dadurch, daß man die den Zusammenhänge darstellenden Kurvenscharen verstreckt, oder auch dadurch, daß man das Nomogramm rein empirisch, also durch Probieren, entwickelt.

Beispiel: ENLUND bestimmte auf empirischem Wege die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes einer gehärteten und einer nichtgehärteten Stahlprobe vom Kohlenstoffgehalt.

Die graphische Darstellung seiner Ergebnisse in kartesischen Koordinaten zeigt Abb. 83; das hiernach empirisch entwickelte Nomogramm veranschaulicht Abb. 84.

Beispiel: Abb. 85 zeigt den Zusammenhang zwischen den Größen t_1 , t_2 , α und β in karte-

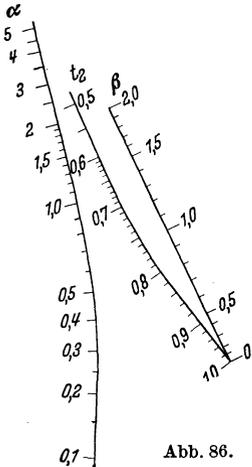


Abb. 86.

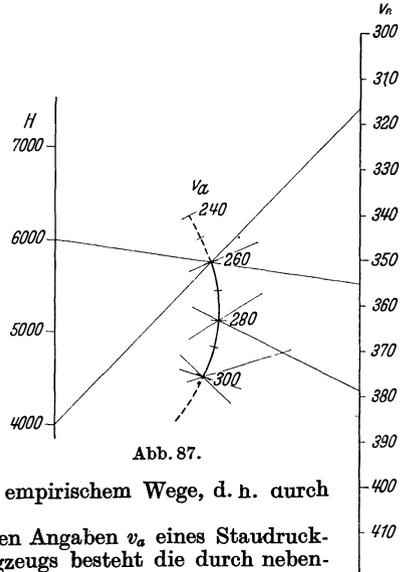


Abb. 87.

sicher Darstellung, Abb. 86 die daraus auf rein empirischem Wege, d. h. durch Probieren gefundene Fluchtlinientafel.

Beispiel: Für den Zusammenhang zwischen den Angaben v_a eines Staudruckmessers und der Eigengeschwindigkeit v_n eines Flugzeugs besteht die durch nebenstehende Tabelle gegebene Abhängigkeit. Die hieraus abgeleitete

Fluchtlinientafel zeigt Abb. 87.

Tabelle 8.

H	$v_a =$		
	260	280	300
4000	317	349	365
5000	335	359	385
6000	354	378	408

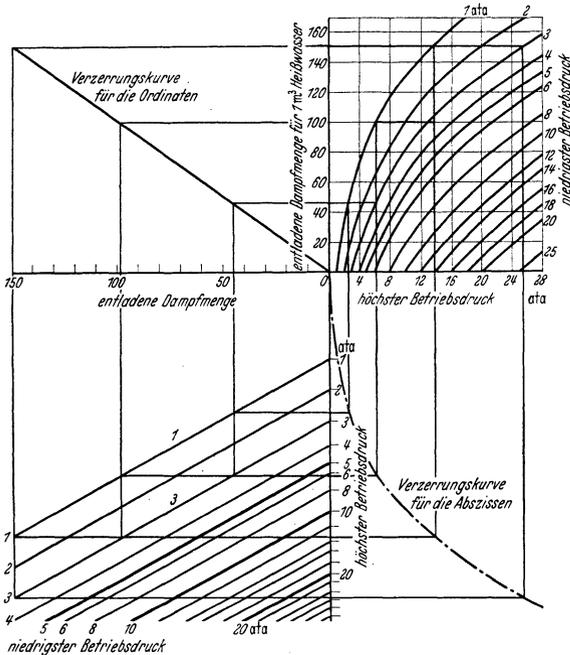


Abb. 88.

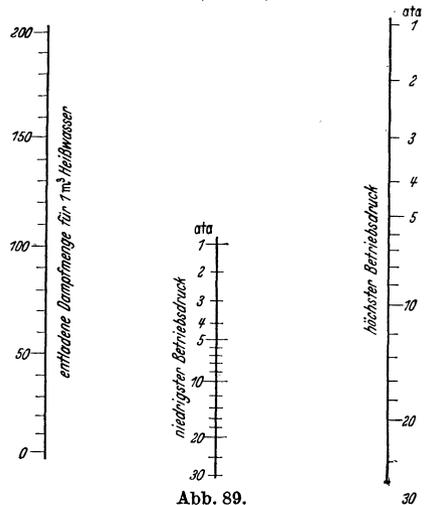


Abb. 89.

Beispiel: Die Kurventafel der Abb. 88 ist einer Arbeit von WALTHER: Verwandlung von Kurventafeln in Leitertafeln (Z. VDI 1937 Nr. 39) entnommen. In folgenden Arbeitsgängen ist die Tafel in ein Nomogramm umgewandelt worden:

1. Wahl der Geraden 1 und 3 als Basis für die Ableitung der Teilungen für die Achsen des neuen Koordinatensystems.

2. Entwicklung der Verzerrungskurven; im Beispiel wird wegen der gewählten Parallelität der Geraden 1 und 3 die Verzerrungskurve für die Ordinaten eine Gerade; der Charakter der Teilung für die Ordinate bleibt somit unverändert.

3. Bestimmung der Abszissenteilung mit Hilfe der Verzerrungskurve für die Abszisse.

4. Umzeichnung der gefundenen Geradenschar in eine Leitertafel durch Übernahme der neuen Achsteilungen als Außenleitern und punktweise Konstruktion der mittleren Skala aus einer der beiden Darstellungen.

Das hiernach gefertigte Nomogramm zeigt Abb. 89.

19. Umformung von Diagrammen. a) Im Abschnitt 13 ist von dem Zusammenhang zwischen der Darstellung in kartesischen Koordinaten (r.K.S.) und der in Parallelkoordinaten (P.K.S.) die Rede gewesen. Nachstehend stellen wir einmal die wichtigsten Fälle in beiden Darstellungsformen nebeneinander. Wir gehen dabei aus von einer Schar von geraden Linien im r.K.S.

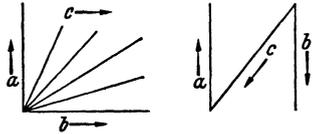


Abb. 90.

1. Die Linien schneiden sich sämtlich im Ursprung. Bei der Darstellung in Parallelkoordinaten erhalten wir ein Nomogramm in N-Form nach Abb. 90.

2. Die Geraden sind unter sich parallel. Die Darstellung im P.K.S. ist ein Nomogramm mit drei parallelen Skalenträgern, entweder nach Abb. 91 oder nach Abb. 92 — je nachdem die Neigung der Geraden gegen die Abszissenachse des r.K.S. kleiner oder größer ist als 90° .

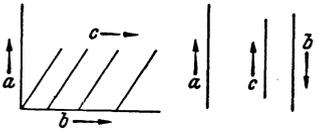


Abb. 91.

Kurvenscharen lassen sich nach Abschn. 18 in eine Schar gerader Linien verwandeln.

Bei gekoppelten Funktionen kann oft jeder einzelne Skalenträger zur Darstellung von zwei, unter Umständen sogar drei Variablen verwendet werden, so daß es möglich ist, Nomogramme mit nur drei Skalenträgern für 4, 5 oder sogar 6 Veränderliche einzurichten.

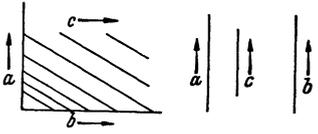


Abb. 92.

Beispiel: In den Werkstattbüchern, Heft 71, S. 53 befindet sich die in der Abb. 93 wiedergegebene Rechentafel zur Ermittlung der Hauptzeit für Dreharbeiten. Der hierin dargestellte Zusammenhang zwischen den Variablen $v, d, n; L, s$ und t_h ist in einer Leitertafel darzustellen.

Lösung: Da das Diagramm ausschließlich gerade Linien zeigt, kann es sich nur um einen einfachen mathematischen Zusammenhang handeln, der leicht aufzudecken ist. Wir besprechen zunächst die Achsteilungen der gegebenen Darstellung und stellen fest:

1. Alle Teilungen sind logarithmisch.

2. Die Teilungen für v und L sind identisch, d. h. sie haben den gleichen Teilungssinn und denselben Modul. Auch die Teilung für t_h ist die gleiche wie für v und L ; die Argumente dieser Teilung unterscheiden sich lediglich durch den Faktor 10 gegen die der beiden anderen Variablen.

3. Auch die Teilungen für s und n haben den gleichen Modul; sie sind einander reziprok gemäß der Beziehung

$$s = \frac{10}{n}.$$

4. Wegen der in dem Diagramm (Abb. 93) dargestellten Scharen von geraden Linien schließen wir auf folgende Zusammenhänge:

$$u = f(u, d) = C_1 \cdot v^p \cdot d^q$$

$$t_h = f(L, s, n) = C_2 \cdot L^x \cdot s^y \cdot n^z.$$

Die Exponenten p, q, x, y und z können nur $+1$ oder -1 sein. Um sie festzustellen, werten wir das Diagramm in eine Zahlentafel um und erhalten umstehende Tabelle 9:

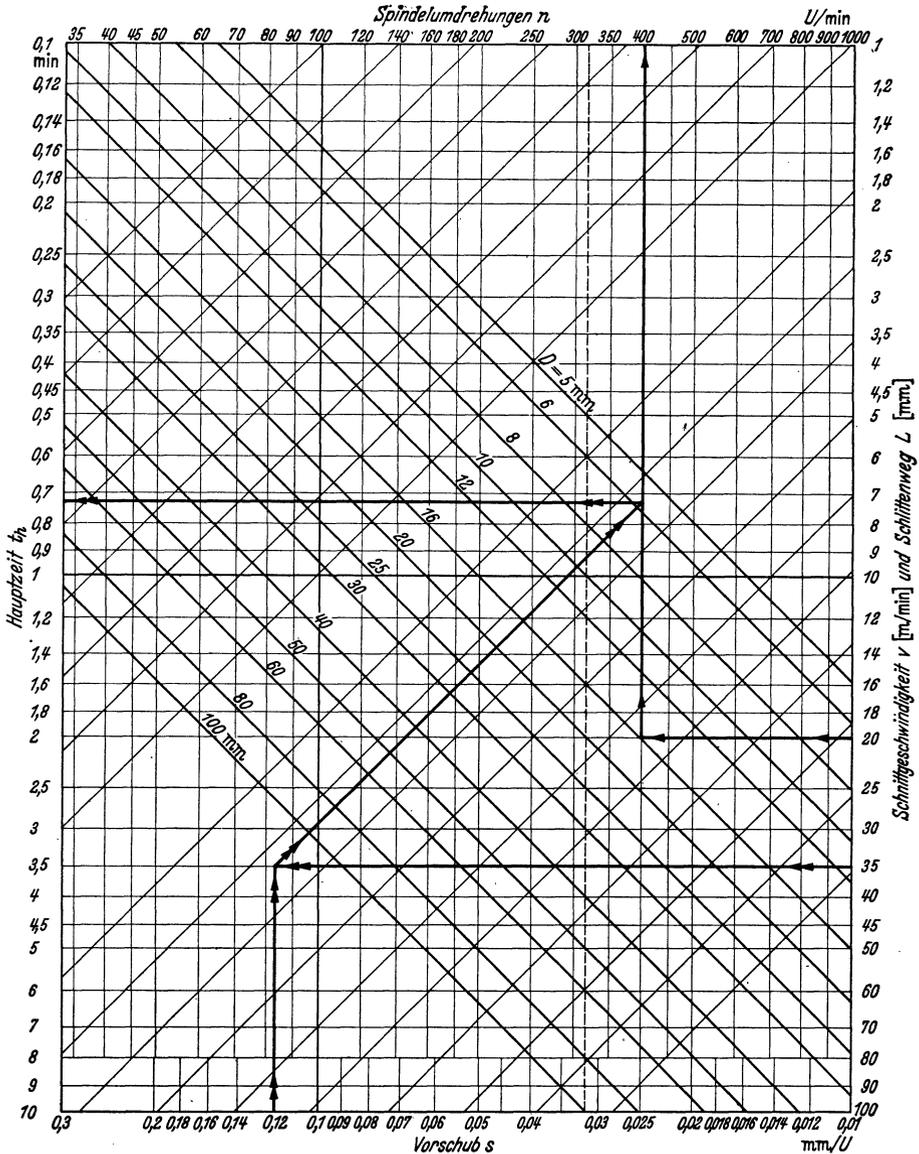


Tabelle 9.

Abb. 93.

v	d	n	L	s	t_h für $n =$			
					500	200	100	50
10	20	160	20	0,02	2	5	10	20
20		320	40		4	10	20	40
30		480	60		6	15	30	60
10	50	64	20	0,1	0,4	1	2	4
20		128	40		0,8	2	4	8
30		192	60		1,2	3	6	12
10	100	32	20	0,2	0,2	0,5	1	2
20		64	40		0,4	1	2	4
30		96	60		0,6	1,5	3	6

Wir erkennen daraus ohne weiteres die direkten und die umgekehrten Proportionalitäten und finden unschwer folgende Beziehungen

$$n = 320 \frac{v}{d}$$

$$t_h = \frac{L}{s \cdot n}$$

Die Kombination der beiden Gleichungen führt zu der Endformel

$$t_h = \frac{L \cdot d}{320 \cdot s \cdot v} \quad (30)$$

Damit berechnet sich für die Daten des in das Diagramm eingezeichneten Beispiels ($v = 20$; $d = 16$; $L = 35$; $s = 0,12$) t_h zu

$$t_h = \frac{35 \cdot 16}{320 \cdot 0,12 \cdot 20} = 0,73.$$

Wir überlegen nun, wie das Nomogramm anzulegen wäre unter Berücksichtigung der eingangs zusammengestellten Tatsachen:

Das Nomogramm für $n = f(a, v)$ macht keinerlei Schwierigkeiten; das Schema dafür zeigt Abb. 94. Will man nun, von n ausgehend, zu t_h gelangen, so macht sich die Einführung einer Hilfsgröße $H = f(L, n)$ erforderlich, über die dann erst t_h als Funktion von H und s ($t_h = f(H, s)$) gefunden werden kann. Das würde, selbst wenn man beispielsweise für s und d denselben Skalenträger benutzt (Abb. 95), immerhin 5 Skalenträger erfordern, von denen allerdings der eine —

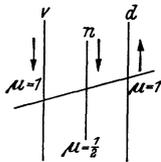


Abb. 94.

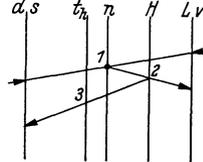


Abb. 95.

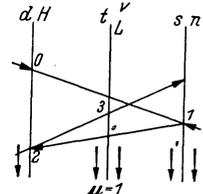


Abb. 96.

nämlich der für H — nicht geteilt zu werden brauchte. Ebenso, wie aber in dem gegebenen Diagramm bereits ein und dieselbe Achsenteilung für mehrere Variablen verwendet wurde, läßt sich dieses auch bei dem Nomogramm durchführen und die Zahl der Skalenträger läßt sich dann auf drei reduzieren, wie dies grundsätzlich die Abb. 96 andeutet. Das hier-

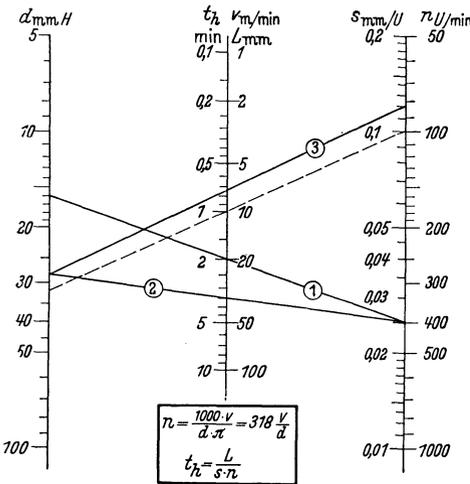


Abb. 97.

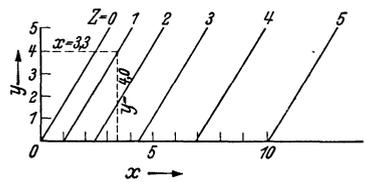


Abb. 98.

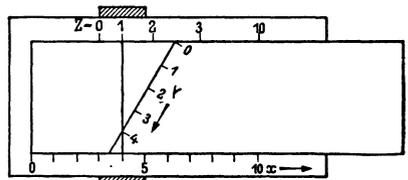


Abb. 99.

nach ausgeführte Nomogramm, in das dasselbe Beispiel eingezeichnet ist, wie es das Diagramm zeigte, bringen wir in Abb. 97. Man erkennt, daß die Zuordnung der Skalen auf den einzelnen Skalenträgern die nämliche ist wie in dem Diagramm, von dem wir ausgingen.

b) Diagramme nach Abb. 98 lassen sich dadurch, daß man statt der vielen Geraden nur eine benutzt, die man dann aber in Richtung der Abszissenachse verschiebbar einrichtet, leicht in eine Art Rechenschieber umbilden (Abb. 99).

Beispiel: Für den Zusammenhang

$$H = E_M \sin \gamma$$

soll ein Rechenschieber entworfen werden, bei dem nach Einstellung der Werte E_M und γ unmittelbar der zugehörige Wert H abgelesen werden kann.

Lösung: In einem r.K.S. mit logarithmisch nach E geteilter Abszisse und ebenso nach H geteilter Ordinate erhält man für γ eine Schar paralleler Gerade (Abb. 100). Den hier nach entwickelten Rechenschieber zeigt Abb. 101.

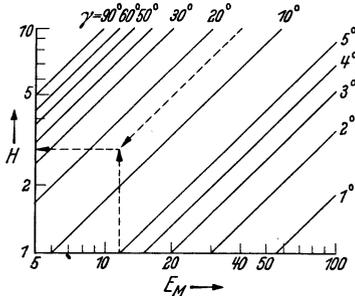


Abb. 100.

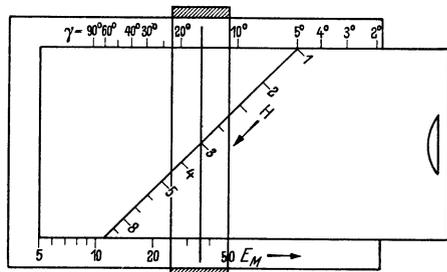


Abb. 101.

20. Graphische Darstellungen als Grundlage für mechanische Rechenhilfsmittel.

a) Die graphischen Darstellungen sind nicht allein selbständige Rechenhilfsmittel, sondern bilden auch vielfach die mathematische Grundlage für die Mechanisierung von Auswerte- und sonstigen Rechenvorgängen. Wenn wir es uns auch an dieser Stelle versagen müssen, auf die rein mechanischen Rechenhilfsmittel — deren Hauptmerkmale ja im wesentlichen technische sind — näher einzugehen, so wollen wir sie doch wenigstens kurz einmal von ihrer mathematischen Seite betrachten. Denn solche mathematischen Untersuchungen sind teils die Voraussetzung für die Mechanisierung irgendeines Rechenhilfsmittels, teils sind sie die Folge irgendeines zur Anwendung gebrachten technischen Prinzips. Wir behandeln hier lediglich die grundlegenden Möglichkeiten zur Ausführung der mechanischen Addition und Subtraktion, der Multiplikation und Division und schließlich das Linearformen funktioneller Zusammenhänge mit Hilfe von Steuerkurven.

b) Die mechanische Addition und Subtraktion erfolgt entweder durch Addition bzw. Subtraktion von Strecken oder von Winkeln. Als Beispiel für die mechanische Addition von Strecken nennen wir den logarithmischen Rechenschieber mit seinen vielfachen Abwandlungen. Zur Addition von Winkeln dienen zunächst Kreisscheiben (z. B. Rechenscheiben), aber auch die verschiedenen Zahnradübertragungen — z. B. die schrittweise fortgeschalteten Zahnräder der auf den Mathematiker LEIBNIZ zurückgehenden mechanischen Rechenmaschinen — gehören hierher.

1. Beispiel: 1. Die Berechnung des zu einem gegebenen Datum zugehörigen Wochentages ist recht einfach auf Grund folgender Überlegungen:

Der 1. 1. 1900 war ein Montag.

Man setze nun für die einzelnen Wochentage folgende Zahlen:

Tabelle 10.

Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Sa.	So.
$d = w = 1$	2	3	4	5	6	7 oder 0

Alle 7 Tage wiederholen sich diese Zahlen, so daß z. B. die Zahl 38 einem Mittwoch entspricht, weil ja $0, 7, 14, 28, 35$ usw., also jeweils jedes ganze Vielfache von 7, einem Sonntag entspricht; $38 = 35 + 3 = 0 + 3$ also Mittwoch.

Jeder Monat hat zwischen 28 und 31 Tage; der für die Wochentagberechnung in Frage kommende Überschuß über $4 \times 7 = 28$ beträgt m Tage (Tabelle 11).

Tabelle 11.

Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
$m = 0$	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

Die Zahlen 3 für März, 6 für April usw. gelten indes nur für gewöhnliche Jahre; für jedes Schaltjahr kommt noch ein überschüssiger Tag — der 29. Februar! — hinzu. Die Zahl der zu berücksichtigenden Schaltjahre bezeichnen wir mit s .

Aus diesen Feststellungen ergibt sich folgendes Verfahren zur Berechnung der Wochentage aus dem Datum für die Jahre von 1900 ab:

1. Jahr (ohne das Jahrhundert) . . . = j oder der Rest von $\frac{j}{7}$.
2. Zahl der Schaltjahre = $s = \frac{j}{4}$ (ganze Zahlen, ohne den Rest!).
3. Monatsüberschuß nach Tabelle 11. = m .
4. Datum = d oder Rest von $\frac{d}{7}$.

Diese vier Zahlen zählt man zusammen, teilt durch 7 und schließt aus dem Rest w auf den Wochentag:

$$\frac{j + s + m + d}{7} = n + w. \tag{31}$$

Danach fiel der 4. Mai 1943 auf einen Dienstag, denn $j = 1$; $s = 10$; $m = 1$; $d = 4$;
 $\frac{1 + 10 + 1 + 4}{7} = \dots$ Rest 2, also Dienstag; oder der 19. April 1915 war ein Montag,

denn $\frac{1 + 3 + 6 + 5}{7}$ hat den Rest 1.

Um diese einfache Rechnung zu mechanisieren, wird man zweckmäßig eine Kreisscheibe benutzen, die entsprechend der Schritte, die man durch Striche oder eine Zahnung oder Lochung markiert, derart teilt, daß auf den Kreisumfang 7, 14 oder 21 Teile entfallen (Abb. 102). Die Handhabung ist einfach:

1. Einstellung der Ausgangszahl 0.
2. Drehen der Scheibe nacheinander um die Schritte j , s , m und d .
3. Ablesen des Wochentags in dem Fenster.

2. Beispiel: In der Photographie spielt die Vorausbestimmung der richtigen Belichtungszeit eine wesentliche Rolle. Diese Zeit ist abhängig von der Blendenöffnung, von der Empfindlichkeit des verwendeten Filmmaterials und endlich von der Objektivhelligkeit. Diese letztere wieder ist bedingt durch die Aktivität des Tageslichts, also abhängig von der Jahres- und Tageszeit, von der Bewölkung, nicht zuletzt auch von der Art, Lage und Farbe des Objekts, so daß also die gesuchte Belichtungszeit — mathematisch gesprochen — eine Funktion von mehr als einem halben Dutzend Variablen ist.

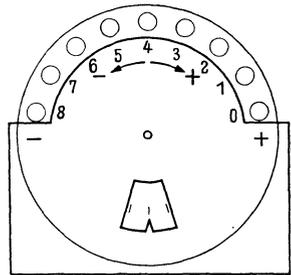


Abb. 102.

Die Bewertung all dieser Einflüsse wird erheblich vereinfacht, wenn man die einzelnen Variablen jeweils in solchen Intervallen verändert, daß der Funktionswert — also die Belichtungszeit — durch jedes Intervall für jede Variable in immer der nämlichen Weise verändert wird. Am einfachsten wäre es also, wenn man die „Sprünge“ der einzelnen Argumente so wählt, daß die zwei aufeinanderfolgenden Argumenten zugeordneten Belichtungszeiten sich wie 1 : 2 verhalten. Tatsächlich hat man das auch getan; die üblichen, an den Verschlüssen angeschriebenen und dort einstellbaren Belichtungszeiten sind nämlich:

$$\frac{1}{100} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \text{ sek.} \tag{32}$$

Diese Reihe weicht allerdings von der strengen Potenzreihe für die Basis 2:

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \dots$$

etwas ab, doch sind diese Abweichungen, die bis zu 25 % betragen, praktisch belanglos, schon weil die automatischen Verschlüsse auch nur innerhalb von Fehlergrenzen der gleichen Größenordnung präzise arbeiten.

1. Blendenöffnung. Die Blendenöffnungen werden angegeben als Bruchteile der Objektivbrennweite f . Die Bezeichnung „Blende 4,5“ besagt also, daß der Durchmesser der Blendenöffnung $\frac{1}{4,5} \cdot f = f : 4,5$ beträgt. Da bei doppeltem Blendendurchmesser die Blende die vierfache Menge Lichts hindurchläßt, die Belichtungszeit also auf den vierten Teil der ursprünglichen herabgeht, müssen in der Reihe der Blendenöffnungen zwei aufeinanderfolgende

sich wie $1:\sqrt{2}$ verhalten, wenn die ihnen zugeordneten Belichtungszeiten sich wie 2:1 verhalten sollen. Daher die Reihen

$$\begin{matrix} f: & 2,8 & 4 & 5,6 & 8 & 11 & 16 & 22 & \text{usw.} & \text{oder} & \} \\ f: & 4,5 & 6,3 & 9 & 12,5 & 18 & \text{usw.} & & & & \} \end{matrix} \quad (33)$$

Von Blende 4 zur Blende 11 sind es also drei Schritte oder „Sprünge“, von Blende 4 bis zur Blende 18 sind es vier usw.

2. Filmempfindlichkeit. Die Empfindlichkeit des Aufnahmematerials wird heute nach DIN¹-Graden (⁰ DIN) gemessen. Die Reihe der Empfindlichkeiten, die Belichtungszeiten erfordern, die sich jeweils wie 1:2 verhalten, ist

$$^0 \text{ DIN} \quad \frac{24}{10} \quad \frac{21}{10} \quad \frac{18}{10} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{12}{10} \quad \text{usw.}$$

3. Objektivhelligkeit. Als dritte und letzte Variable, die die Belichtungszeit bestimmt, bleibt die Objektivhelligkeit, die ihrerseits wieder von mehreren Faktoren abhängig ist. Man hat rein empirische Tabellen aufgestellt, die die Sprünge für die einzelnen Monate, Tagesstunden, Bewölkungsgrade sowie für die einzelnen Objekte enthalten. Man entnimmt diesen Tabellen die für die gegebenen Verhältnisse in Rechnung zu setzenden Sprünge, addiert sie und berechnet daraus die erforderliche Belichtungszeit t — numerisch oder mit einem einfachen Rechenhilfsmittel, das grundsätzlich genau so aufgebaut ist wie das des vorigen Beispiels — auf Grund der Beziehung

$$t = 2^{i-q}, \quad (34)$$

wobei q eine Konstante, i die vorstehend beschrieben gefundene Summe der Sprünge bedeutet. Die in Sekunden gemessene Belichtungszeit ist je länger, je größer die Summe i ist. Die Teilwerte, aus denen i sich zusammensetzt, können aus folgender Zusammenstellung entnommen werden:

Tabelle 12. Jahreszeit und Stunde.

Monat	7 ^h	10 ^h	12 ^h	14 ^h	16 ^h MOZ. ²
November, Dezember, Januar	—	3	2	3	—
Februar, Oktober	3	2	1	2	3
März, April, August, September . . .	2	1	0	1	2
Mai, Juni, Juli	1	0	0	0	1

Tabelle 13. Sonne.

Wolkenlos bis 1/4 bedeckt	1/2 bedeckt	3/4 bis ganz bedeckt	trübe
0	1	2	3

Tabelle 14. Gegenstand.

Strand off. Schnee-Landsch.	Landschaft	enge Gassen lichter Wald	dunkler Wald helles Zimmer
0	3 ± 1	6 ± 2	9 ± 2

Tabelle 15. Blende.

6,3	9	12,5	18
0	1	2	3

Tabelle 16. Die Empfindlichkeit.

21° 10	18° 10	15° 10	12° 10
0	1	2	3

Für die Werte dieser Tabellen — die wohl-gemerkt lediglich Relativzahlen sind — gilt die Beziehung

$$t = 2^{i-11} = 2^n. \quad (35)$$

Zur numerischen Auswertung der Formel müßte man die höheren Potenzen von 2 auswendig wissen:

Tabelle 17. Gelbfilter

0	hell	mittel	dunkel
0	1	2	3

¹ DIN = Deutsche Industrie-Norm.

² MOZ. = mittlere Ortszeit (im Gegensatz zu MEZ. = mitteleuropäische Zeit und DSZ. = Deutsche Sommerzeit).

Tabelle 18.

$n = \dots\dots 0$	1	2	3	4	5	6	7
$2^n = \dots\dots 1$	2	4	8	16	32	64	128

Will man beispielsweise im Mai vormittags um 11, bei klarem Wetter und Sonnenschein, bei Blende 9 und der Filmempfindlichkeit $\frac{21^0}{10}$ einen offenen Platz photographieren, so wird

$$i = 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3, \text{ somit } t = 2^{3-11} = 2^{-8} = \frac{1}{250} \text{ sek.}$$

Die gegebenen 6 Einzeltabellen lassen sich zu einer einzigen zusammenziehen, etwa so

Tabelle 19.

Jahreszeit und Stunde	0 — 3
Sonne	0 — 3
Gegenstand	0 — 3 — 6 — 9

Für Blende 6,3 und die DIN-Empfindlichkeit $\frac{21}{10}$ gilt

$$t = 2^{i-11}$$

Es ist t für

$n =$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$t =$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8 sek

Die Möglichkeit, diese Tabelle genau auf die gleiche Weise zu „mechanisieren“, wie dies im vorigen Beispiel beschrieben wurde, haben wir oben bereits nachgewiesen (Abb. 102).

Die praktische Auswertung derartiger Tabellen ist nun eine durchaus subjektive Angelegenheit; selbstanzeigende Belichtungsmesser, deren photometrisches Element eine lichtempfindliche Zelle ist, bewerten die Objekthelligkeit objektiv. Sie sind so eingerichtet, daß sie die erforderliche Belichtungszeit für das betreffende Objekt und für eine bestimmte Blendenöffnung sowie Empfindlichkeit direkt abzulesen gestatten, und zwar nach der oben begründeten Reihe (32).

Die Umrechnung auf eine andere Blendenöffnung oder Filmempfindlichkeit erfordert also nur die Bestimmung der Zahl der Sprünge, um welche sich die Belichtungszeit verlängert (+) oder verkürzt (-). Nehmen wir beispielsweise an, daß für die Blende $B = 1 : 8$ und die Empfindlichkeit $E = \frac{15^0}{10}$ DIN eine Belichtungszeit von $\frac{1}{10}$ sek gemessen wurde

und wollen wir diese Belichtungszeit auf $B = 1 : 6,3$ und $E = \frac{21^0}{10}$ DIN umrechnen, so überlegen wir:

$$\begin{aligned} \text{von } B = 1 : 8 \text{ bis } 1 : 6,3 \text{ ist es } 1 \text{ Sprung, also } -1 \\ \text{von } E = \frac{15}{10} \text{ bis } \frac{21}{10} \text{ sind es } 2 \text{ Sprünge, also } -2 \end{aligned}$$

$$\text{zusammen: } -3$$

Also ist die Belichtungszeit um 3 Sprünge zu verkürzen und beträgt somit $\frac{1}{100}$ sek.

Man kann die Umrechnung auch mit Hilfe einer kleinen Tabelle vornehmen, in der man

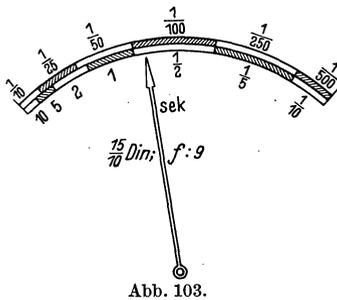


Abb. 103.

Tabelle 20.

F	Δi	E	Δi
6,3	-1	12	+1
8	-	15	-
11	+1	18	-1
16	+2	21	-2

die Blendenöffnungen und Empfindlichkeiten sowie die zugehörigen „Sprünge“ zusammenstellt. Danach bestimmt man die erforderlichen Sprünge, die man bei der gemessenen Belichtungszeit vor- oder zurückgehen muß, und kann dann direkt von der Meßskala die umgerechnete Belichtungszeit ablesen (Abb. 103 bzw. Tabelle 20).

Eine graphische Lösung deutet Abb. 104 an: Eine feste Kreisteilung ist teils nach den Belichtungszeiten, teils nach den Empfindlichkeiten in DIN-Graden geteilt.

Auf der Peripherie einer darüber zentrisch drehbaren Kreisscheibe sind ferner in der gleichen Weise und mit den gleichen Intervallen die Blendenöffnungen und genau die gleichen Belichtungszeiten aufgetragen, und zwar derart, daß bei Übereinanderstellung der Blenden-

öffnung und der Empfindlichkeit, für welche der Belichtungsmesser richtig anzeigt, auch die gleichen Belichtungszeiten übereinanderstehen. Stellt man dann, durch Drehen der Kreisscheibe, andere Blendenöffnungen und Empfindlichkeiten übereinander, so ordnet man damit gleichzeitig auch die zusammengehörigen Belichtungszeiten, also auch die gemessene und die umgerechnete Belichtungszeit einander zu.

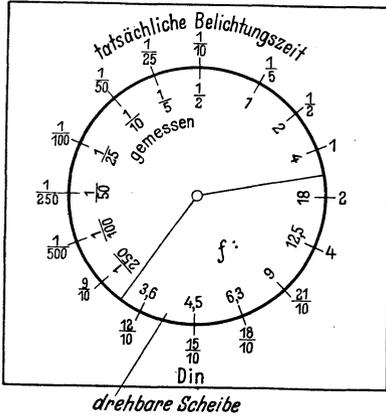


Abb. 104.

c) Wir kommen zur Mechanisierung der Multiplikation und Division und besprechen hier lediglich einige technische Einrichtungen, die man bei Nomogrammen vorgenommen hat, um ihre Anwendung zu erleichtern. Denn wenn auch die Nomogramme in ihrer gebräuchlichen, unmittelbar vom Zeichner gelieferten Ausführung an sich schon einen großen Fortschritt in bezug auf die Bequemlichkeit der Durchführung numerischer Berechnungen bedeuten, so geht das Bestreben doch vielfach dahin, den Gebrauch dieser Rechenhilfsmittel noch weiter zu vereinfachen und ihre Benutzung auch Nichtfachleuten zu

ermöglichen. Auch die Steuerung irgendwelcher anderer Rechenvorrichtungen durch nomographisch ermittelte Zwischenwerte wäre denkbar.

d) Ein erster Schritt zur Mechanisierung der Nomogramme ist die Verbindung des auswertenden Lineals mit der Rechentafel, wie dies Abb. 105 zeigt. Es handelt sich hier um eine gewöhnliche Rechentafel mit logarithmischen Teilungen zur Auswertung der Gleichung

$$v = \frac{s}{t}. \tag{36}$$

Die Tafel ist unsymmetrisch, d. h. die Skala für s ist nicht in der Mitte zwischen den beiden anderen angeordnet, sondern teilt deren Abstand im Verhältnis 1 : 2. Es ist das die Folge der verschiedenen Bereiche für t und v ; t erstreckt sich über eine ganze Zehnerpotenz, v hingegen nur über etwa eine halbe, so daß, wollte man gleiche Längen für die Teilungen haben, sich die Einführung verschiedener Moduln als notwendig erwies. Die Verschiedenheit der Moduln der äußeren Skalen bedingte dann nach Gl. (22) die verschiedenen Abstände.

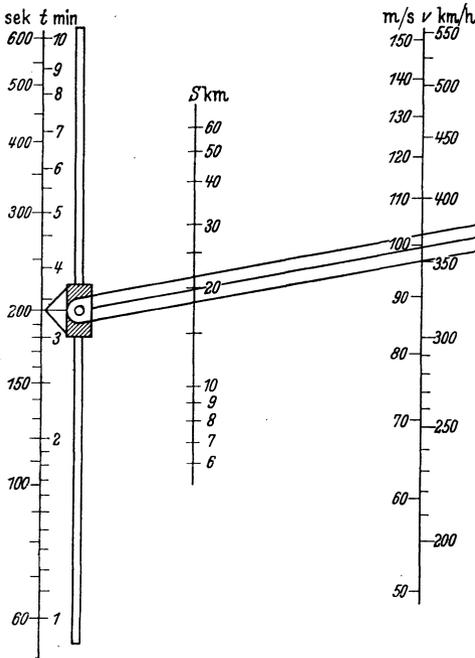


Abb. 105.

Die Teilung für t ist hier nun als Führungsschlitz ausgebildet, in dem ein Schieber läuft. Auf diesem Schieber, der eine Ablesemarke für die seitlich herausgerückte t -Teilung besitzt, ist drehbar das Auswertelineal angeordnet; es besteht aus Zellon oder Plexiglas und trägt einen feinen Strich in der Mitte. Über den Gebrauch dieses Nomogramms ist nichts Neues zu sagen.

e) Auch für verwickeltere Zusammenhänge lassen sich ähnlich mechanisierte Nomogramme angeben. In Abb. 106 ist ein mechanischer Zeitrechner „Kalkulus“ der Fa. Hahn & Kolb in Stuttgart dargestellt. Er dient zur Berechnung der bei Dreh- und Hobelarbeiten aufzuwendenden Arbeitszeit t , wenn gegeben sind: die Hublänge bzw. der Durchmesser d , die Schnittgeschwindigkeit v , die Drehlänge bzw. Hobelbreite L und der Vorschub bzw. Hub s ; als Zwischenwert kann noch die Zahl n der Umdrehungen bzw. Hube abgelesen werden.

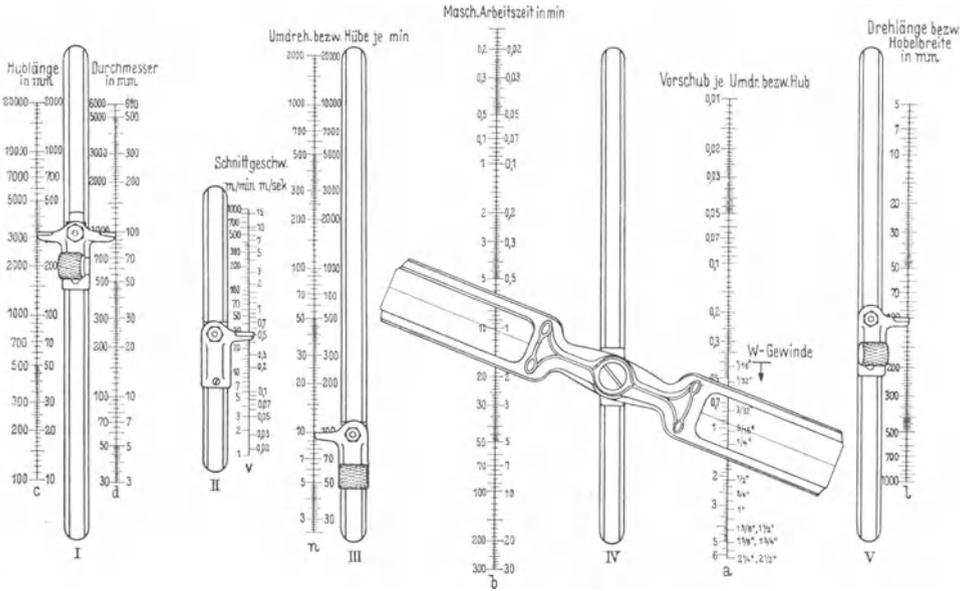


Abb. 106.

Die Anordnung der Skalen bei dem ursprünglichen Nomogramm zeigt Abb. 107. Die eingeschriebenen Zahlen geben die Reihenfolge der Einstellungen bzw. Ablesungen an. H ist eine nicht bezifferte Hilfsteilung (vgl. Abschn. 17).

f) Eine andere Möglichkeit, die Einstellung der Werte bei Nomogrammen zu mechanisieren, zeigt Abb. 108. Da es sich hierbei jedoch lediglich um eine tech-

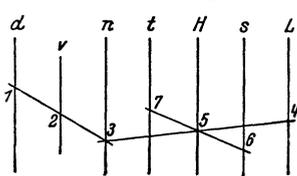


Abb. 107.

nische Besonderheit — die Art der Werteeinstellung durch einen Trieb — handelt, braucht darauf nicht näher eingegangen zu werden.

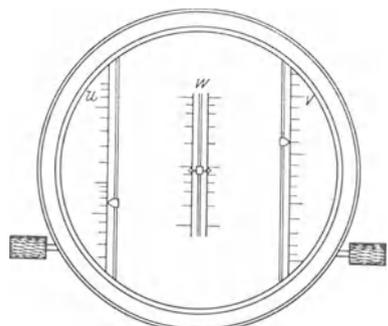


Abb. 108.

g) Von den graphischen Darstellungen, die als Grundlage für die Mechanisierung von Auswerte- und sonstigen Rechenvorrichtungen dienen, besprechen wir als letzte die sog. Steuerkurven. Das Problem ist hier die mechanische Umformung irgendwelcher Funktionsskalen in lineare oder anders funktionell geteilte Skalen. Gerade bei noch weitergehender Mechanisierung von Nomogrammen und sonstigen Auswertehilfsmitteln, als wir sie hier behandelten,

spielt diese Aufgabe eine überaus wichtige Rolle. Wir befassen uns hier lediglich mit der mathematischen Seite des Problems und beschäftigen uns zunächst mit dem konkreten Fall der Umformung der logarithmischen Teilung in eine lineare. Das Problem besteht hier darin, durch Einstellung einer Marke oder dergleichen auf einer logarithmischen Teilung eine andere Marke so zu steuern, daß sie sich auf ihrem Skalenträger in linearer Prozession bewege; oder auch — was in

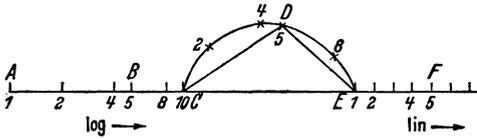


Abb. 109.

praktischen Fällen meistens gefordert sein wird — umgekehrt. Die Aufgabe kann mit Rücksicht auf eine bestimmte technische Ausführung auf mannigfache Art gelöst werden; immer läuft indes die Lösung über eine sog. Steuer-

kurve. Wir haben auch hier wieder die beiden grundsätzlichen Lösungsmöglichkeiten: Man kann fordern, daß die lineare Progression der einen — steuernden oder gesteuerten — Marke auf einer geraden Linie oder daß sie auf einem Kreisbogen erfolge.

h) In Abb. 109 sei AC eine logarithmische, EG die ihr zugeordnete lineare Teilung. Beide Teilungen seien gleich lang. Das Stück CE sei ebenfalls gleich der Teilungslänge AC bzw. EG . Es soll nun eine Steuer-

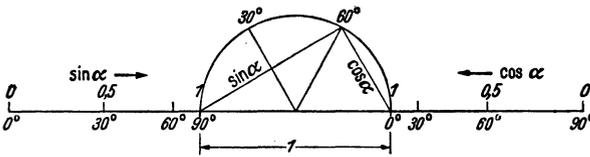


Abb. 110.

kurve entwickelt werden, die den Werten B der logarithmischen Skala die gleichen Werte F auf der linearen Skala zuordnet, und zwar dadurch, daß in jedem Falle

die Länge $B-C-D-E-F$ dieselbe, also konstant, und zwar gleich AE bzw. CG sei.

Diese Forderungen schließen bereits die Lösung in sich. Bewegt sich beispielsweise die Marke auf der logarithmischen Teilung von 1 nach 2 , so darf die auf der linearen Teilung sich auch nur von 1 nach 2 bewegen. Die direkte Entfernung von 2 (log) nach 2 (lin) ist aber kürzer als die von 1 (log) nach 1 (lin).

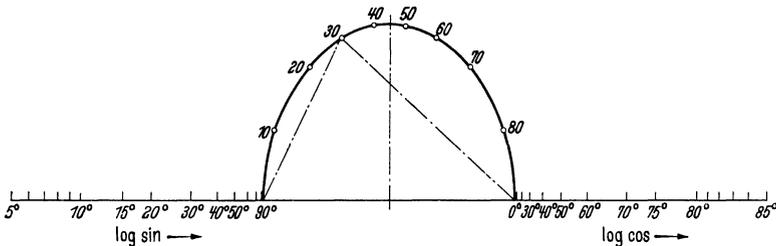


Abb. 111.

Um den Unterschied ist der Weg CDE über die betreffenden Punkte der Steuerkurve länger als die unmittelbare Verbindung CE . Für den Punkt 5 der Steuerkurve hat man also: $CD = AB$ und $ED = FG$. Auf die nämliche Weise sind auch die übrigen Punkte der Steuerkurve entstanden.

Die Steuerkurve hat hier annähernd die Form eines Kreisbogens, was zu wissen für die technische Ausführung nicht unwichtig ist. Damit drängt sich aber sofort die Frage auf: Wie große Fehler entstehen, wenn die genaue Steuer-

kurve durch einen Kreis ersetzt wird? Und noch eine ganze Reihe anderer Fragen könnten gestellt werden, deren Diskussion indes erst im Zusammenhang ganz bestimmter Aufgaben akut wird und deshalb hier unterbleiben kann.

i) Abb. 110 zeigt die Umformung der \sin -Teilung in die \cos -Teilung. Die Steuerkurve ist hier aus leicht einzusehenden Gründen ein genauer Kreis. Abb. 111 endlich zeigt die Lösung der gleichen Aufgabe für $\lg \sin$ und $\lg \cos$.

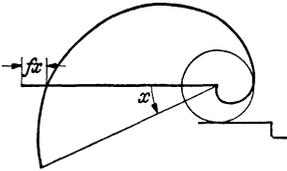


Abb. 112.

k) Das Verfahren der Umformung ändert sich mit der Problemstellung. Abb. 112 löst z. B. die Aufgabe, eine Steuerkurve zu finden, die bei der

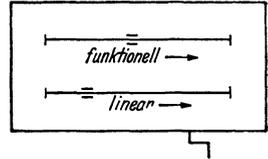


Abb. 113.

Drehung um einen bestimmten Punkt auf einer Funktionsskala dieselben Werte abschneidet, wie dem linearen Drehungswinkel entspricht (Abb. 113).

Auch hier deutet die Problemstellung bereits die Lösung an: die linearen Drehungswinkel, die entsprechend den Argumenten der Funktionsskala beziffert sind, sind entweder auf dem ganzen Kreisumfang (= 360°) oder nur auf einem Teile desselben (Abb. 114) verteilt. Die Radien der Steuerkurven sind gleich den Entfernungen vom Drehpunkt bis zu dem zugeordneten Wert der funktionellen Teilung.

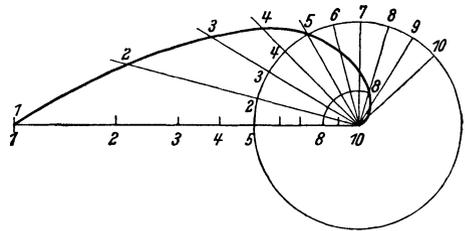


Abb. 114.

Mit dieser grundsätzlichen Lösung treten wiederum eine Anzahl andere, vor allem für die technische Durchführung wichtige Probleme auf; so interessiert hier z. B. die Abhängigkeit der Größe des Winkels, unter dem die Steuerkurve die gegebene Funktionsteilung schneidet, die Änderung der Verhältnisse durch Verlagerung des Drehpunktes usw.

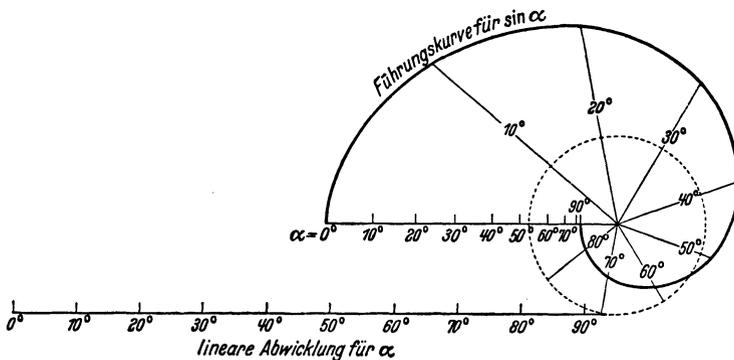


Abb. 115.

l) Abb. 114 zeigt die nach dem oben besprochenen Prinzip aus den linearen Drehwinkeln α entwickelte Steuerkurve für $\lg \alpha$ und Abb. 115 die nach dem gleichen Prinzip entwickelte Steuerkurve für $\sin \alpha$.

IV. Die Aufgabenstellung der Praxis.

Im vorstehenden ist innerhalb des gesteckten Rahmens das Wesentliche über die Theorie des graphischen Rechnens gesagt, und es wurden die Methoden behandelt, die zur Verfügung stehen, um einen gegebenen — d. h. durch eine mathematische Formel festgelegten oder empirisch gefundenen — Zusammenhang zwischen zwei oder mehr Variablen so darzustellen, daß auf bequeme Weise zusammengehörige Werte einander zugeordnet werden.

Die Aufgaben, die die Praxis stellt, sind meist erheblich weniger einfach. Als wesentliches Moment tritt hier noch die Zeit in die Erscheinung, d. h. es wird verlangt, daß eine bestimmte Aufgabe nicht nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen überhaupt gelöst werde, sondern daß außerdem die zur Lösung erforderliche Zeit ein Minimum betrage. Oft liegt dabei die Sache so, daß das zur Messung irgendwelcher Variablen verwandte Meßinstrument gleichzeitig als Rechenmaschine ausgebildet und durch Messung der betreffenden Variablen gleich das Resultat an dem Meßzeiger od. dgl. abgelesen wird. Bei derartigen Aufgaben geht der technischen Lösung immer erst die physikalisch-mathematische Behandlung des Problems voraus. Allgemeine Richtlinien für die Lösung solcher Aufgaben lassen sich naturgemäß nicht geben, weil letzten Endes jede Lösung dem Zweck, der geforderten Genauigkeit und anderen Sonderforderungen, angepaßt werden muß. Oft führt die Darstellung des Meßvorganges usw. in kleinem Maßstab zum Ziele. Wir geben im folgenden aus den angeführten Aufgabenkategorien einige charakteristische Beispiele.

21. Technische Aufgaben mit vorwiegend mathematischem Kern. a) Die nachstehenden Beispiele sollen zeigen, daß der physikalische und mathematische Kern vieler technischer Aufgaben überraschend einfach ist. Er muß allerdings immer erst herausgeschält werden.

Beispiel: Eine photographische Meßkammer mit einer Objektivbrennweite $f = 210$ mm zeichne das Bildformat 30×30 cm² aus. Mit dieser Meßkammer werden senkrechte Luftbildaufnahmen aus verschiedener Höhe H gemacht. Es ist anzugeben, welche Flächen aus den verschiedenen Höhen (H)_{600 m}^{6000 m} aufgenommen werden und in welchem Maßstab.

a) **Mathematische Lösung:** Setzen wir wegen der relativen Kleinheit der in Frage kommenden Flächen die Sehne gleich dem Bogen auf der Erdoberfläche, so läßt sich aus der Abb. 90 die Proportion ablesen:

$$\frac{b}{f} = \frac{B}{H},$$

hieraus

$$B = H \cdot \frac{b}{f} = H \cdot \frac{300}{210} = 1,43 H.$$

Für die Fläche F hat man dann

$$F = B^2 = 2,04 H^2$$

und für den Maßstab

$$1 : M = b : B = 0,300 : 1,43 H = 1 : 4,77 H$$

oder auch

$$1 : M = f : H = 0,210 : H = 1 : 4,77 H.$$

b) **Praktische Lösung:** Die Gleichungen

$$F = 2,04 H^2 \quad \text{und} \quad M = 4,77 H$$

lassen sich ohne Schwierigkeit als Doppelskalen zeichnen. In Abb. 117 ist das auf Grund einer logarithmischen Teilung für H geschehen. Auch für jede andere Form der Skala für H lassen sich die F - und die M -Skala zeichnen.

Nicht immer liegt der mathematische Kern der Aufgabe so klar zutage wie in dem soeben behandelten Beispiel. Bei der „Schallmessung“ z. B. handelt es

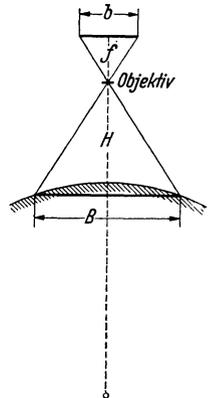


Abb. 116.

Ebenso verfährt man für B_2 . Den gesuchten Geschützort S findet man jeweils als Schnitt zweier den Beobachtungen t_1 und t_2 bzw. r_1 und r_2 zugeordneten Hyperbeln.

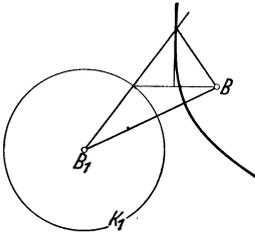


Abb. 120.

Die Praxis hat sich während des Weltkrieges 1914—1918 mit diesem Lösungsverfahren begnügt und gute Erfolge damit erzielt. Es hindert indes nichts, die Hyperbelscharen durch Eintragen in ein doppelt logarithmisch geteiltes Achsenkreuz in eine Schar gerader Linien und diese wieder nach Abschn. 18 in eine Leitertafel zu verwandeln, so daß man schließlich aus den — gegebenenfalls zuvor korrigierten — Werten t_1 und t_2 unmittelbar, ohne jede Zwischenrechnung, die Kartenkoordinaten des gesuchten Geschützortes S ablesen kann.

22. Das Meßinstrument als Rechenmaschine. a) Nachstehend wird eine Anzahl praktischer Aufgaben behandelt

und gezeigt, wie erst der meist einfache mathematische Kern herausgeschält und dann das Meßinstrument als Rechenmaschine ausgebildet wird. Die letzten Aufgaben zeigen, wie durch kleinmaßstäbliche Wiederholung der Verhältnisse, die der Messung zugrunde lagen, eine praktisch verwertbare Lösung erzielt wird, ohne daß die hier recht verwickelten mathematischen Verhältnisse bis zum letzten untersucht zu werden brauchen.

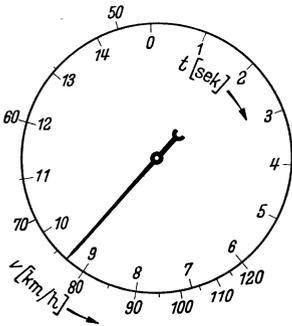


Abb. 121.

Beispiel. Es soll die Geschwindigkeit der eine gerade Stoppstrecke durchfahrenden Kraftfahrzeuge wie folgt festgestellt werden. Die Stoppstrecke sei genau $s = 200$ m lang. Am Anfang derselben schließt der vorbeifahrende Kraftwagen einen elektrischen Stromkreis, der eine Stoppuhr in Gang setzt. Am Ende der Stoppstrecke betätigt der Wagen abermals einen Kontakt, wodurch der Lauf des Uhrzeigers angehalten wird. Der Uhrzeiger beschreibt einen vollen Kreis in 15 Sekunden. Das Zifferblatt der Uhr soll statt

der Sekunden gleich die Stundengeschwindigkeiten der durchfahrenden Wagen ablesen lassen ($v \overset{120 \text{ km/h}}{=} \underset{50 \text{ km/h}}{}$). Wie ist das Zifferblatt zu teilen?

Lösung. Es ist

$$s = 200 = v t$$

$$v = \frac{200}{t} \text{ m/s} = \frac{200}{t} \cdot \frac{3600}{1000} = \frac{720}{t_s} \text{ km/h.}$$

Tabelle 21.

v km/h	t s
120	6,00
110	6,54
100	7,20
90	8,00
80	9,00
70	10,3
60	12,0
50	14,4

Hieraus die nebenstehende Tabelle. Gegeben ist durch die Stoppuhr die reguläre Teilung für $t \overset{15}{=} \underset{10}{}$. Statt der Werte für t sind bei den t -Werten die aus der Tabelle 20 zu entnehmenden v -Werte anzuschreiben (Abb. 121).

Übrigens: Wie zeichnet man die kreisförmige reguläre 15-Sekunden-Teilung? — Es ist (Abb. 122)

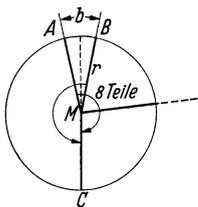


Abb. 122.

$$b = r \cdot \frac{360^\circ}{15 \cdot \rho^\circ} = 0,419 r.$$

Damit oder auch direkt mit dem Winkel $AMB = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$ lassen sich die Punkte A und B auf der Kreisperipherie finden. Die Verlängerung der Halbierungslinie dieses Winkel gibt den Punkt C . Der Winkel AMC (rechts herum gemessen!) ist nun in acht Teile zu teilen, was unschwer mit Zirkel und Lineal geschehen kann und in der Abb. 122 angedeutet ist.

Beispiel: Bei einer noch nicht geeichten Briefwaage findet man, daß eine Belastung von $P_1 = 10$ g einen Ausschlag von $\beta_1 = 8,0^\circ$ erzeugt und eine Belastung von $P_2 = 50$ g einen solchen von $\beta_2 = 40,0^\circ$. Die Skala habe einen Radius von 70 mm. Sie ist für Belastungen P_{100}^{100} zu entwerfen.

Lösung: Mit Bezug auf Abb. 123 ist β als Funktion von P darzustellen: $\beta = f(P)$.

Die Physik lehrt, daß Gleichgewicht herrscht, wenn das Moment von Q gleich ist dem von P :

$$\begin{aligned} L_q \cdot Q &= l_p \cdot P \\ L_q &= L \sin \beta; \quad l_p = l \sin(\alpha + \beta); \\ L \sin \beta \cdot Q &= l \sin(\alpha + \beta) \cdot P. \\ \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} &= \frac{L \cdot Q}{l \cdot P} \\ \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta} &= \frac{L \cdot Q}{l \cdot P} \\ \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta + \cos \alpha &= \frac{L \cdot Q}{l \cdot P} \\ \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta &= \frac{L \cdot Q}{l \cdot P} - \cos \alpha \\ \operatorname{ctg} \beta &= \frac{L \cdot Q}{l \cdot P \cdot \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Setze $\frac{L \cdot Q}{l \sin \alpha} = C_1; \quad \operatorname{ctg} \alpha = C_2$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{C_1}{P} - C_2.$$

Im gegebenen Falle, wo

$$\begin{aligned} P_1 &= 10 \text{ g} \\ \beta_1 &= 8^\circ; \quad \operatorname{ctg} \beta_1 = 7,115 \\ P_2 &= 50 \text{ g} \\ \beta_2 &= 40^\circ; \quad \operatorname{ctg} \beta_2 = 1,192 \end{aligned}$$

hat man also die beiden Gleichungen

$$7,115 = \frac{C_1}{10} - C_2$$

$$1,192 = \frac{C_1}{50} - C_2$$

hieraus

$$C_2 = \frac{C_1}{10} - 7,115$$

und weiter

$$1,192 = \frac{C_1}{50} - \frac{C_1}{10} + 7,115$$

$$59,6 = C_1 - 5C_1 + 355,75$$

$$-59,6 + 355,75 = 4C_1$$

$$C_1 = 74,0$$

$$C_2 = 0,2885$$

also

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{74,0}{P} - 0,2885.$$

Hiernach wurde die nachstehende Tabelle berechnet und auf Grund dieser dann die Teilung entworfen (Abb. 124). Die Werte $\operatorname{tg} \beta$ wurden der bequemerer Konstruktion wegen berechnet.

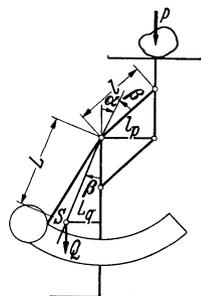


Abb. 123.

Wesentlich einfacher wäre die Entwicklung der Teilung gewesen, wenn nicht nur zwei Punkte der Skala, sondern drei oder mehrere durch einen Versuch bestimmt worden wären. Dann hätte die ganze Rechnung gespart werden und die Teilung rein graphisch entwickelt werden können, wie dies auf S. 20 und 15 gezeigt wurde.

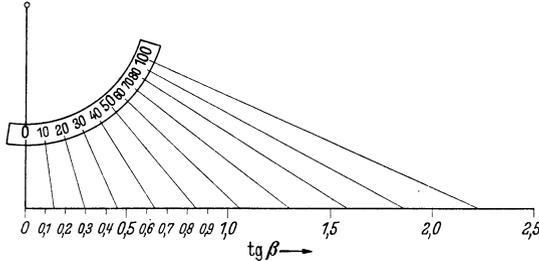


Abb. 124.

Tabelle 22.

P	$\frac{74}{P}$	$\text{ctg } \beta$	$\text{tg } \beta$
0	∞	∞	0
10	7,4	7,112	0,141
20	3,7	3,412	0,293
30	2,47	2,179	0,459
40	1,85	1,562	0,640
50	1,48	1,192	0,842
60	1,23	0,945	1,058
70	1,05	0,769	1,300
80	0,93	0,637	1,570
90	0,83	0,534	1,873
100	0,74	0,452	2,212

Beispiel: Um die Geschwindigkeit v_v zu bestimmen, die in der Luft befindliche Flugzeuge haben, trägt man die Orte, über denen sich die Flugzeuge zu bestimmten gemessenen Zeiten befinden, in eine maßstäbliche Karte ein. Aus den aus der Karte zu entnehmenden Flugwegen s und der zum Durchfliegen derselben erforderlichlich gewesenen Zeit ließe sich die Flugzeuggeschwindigkeit v_v ohne weiteres berechnen zu $v_v = \frac{s}{t}$. Es soll jedoch aus bestimmten Gründen der Zirkel, mit dem s aus der Karte abgegriffen wird, gleich so eingerichtet werden, daß an ihm unmittelbar die gesuchte Geschwindigkeit sowohl in m/s als auch in km/h abgelesen werden kann (speziell für $v_v]_{70 \text{ m/s}}^{150 \text{ m/s}}$ 1: $M = 1 : 50000$; $t]_{0 \text{ s}}^{60 \text{ s}}$).

Tabelle 23.

m	$v = \frac{s}{t}$ (m/s) für $t =$					
	10s	20s	30s	40s	50s	60s
1000	100	50	—	—	—	—
2000	—	100	67	50	—	—
3000	—	150	100	75	60	50
4000	—	—	135	100	80	67
5000	—	—	—	125	100	83
6000	—	—	—	150	120	100
7000	—	—	—	—	140	117

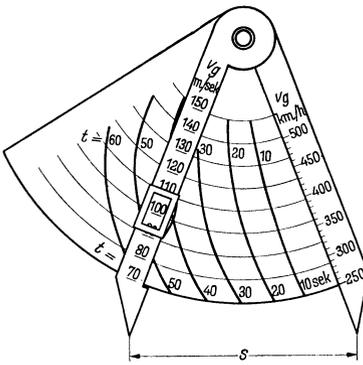


Abb. 125.

Lösung: Die mögliche Einrichtung eines solchen Zirkels zeigt die Abb. 125. Die gesuchte Geschwindigkeit ergibt sich als Schnittpunkt

der Meßkarte des beweglichen Lineals mit der betreffenden t -Kurve. Als Ausgang für die Konstruktion der t -Kurven dient eine Tabelle, die wie obenstehend angelegt ist. Die Umrechnung der in m/s angegebenen Geschwindigkeiten in km/h erfolgt auf Grund der Beziehung:

$$v_{\text{km/h}} = 3,6 \cdot v_{\text{m/s}} \quad (37)$$

Übrigens wird dieses Rechenhilfsmittel noch ganz erheblich einfacher, wenn man noch eine der Variablen — praktisch etwa die Zeit t — dadurch eliminiert, daß man sie beim Messen konstant hält. Der Meßtechniker nennt dieses Vorgehen das „Prinzip der Verminderung der Variablen“. Den hiernach entwickelten vereinfachten Geschwindigkeitszirkel für $t = 60$ bzw. 30 sek sowie für einen bestimmten Kartenmaßstab zeigt Abb. 126.

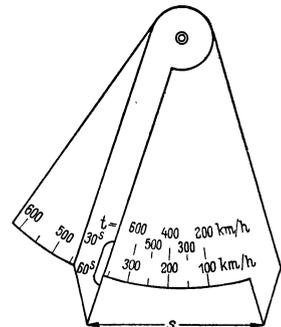


Abb. 126.

Beispiel: Ein Flugzeug, das keine Sichtverbindung zur Erdoberfläche hat und daher etwa nach einem Kompaßkurs fliegen muß, wird diesen Kurs nur dann einhalten, wenn es nicht durch Seitenwind abgetrieben wird. Das Flugzeug erfährt durch den Seitenwind eine gewisse Abdrift. Es ist ein Rechenhilfsmittel anzugeben, das gestattet, aus

- der Eigengeschwindigkeit v_e des Flugzeugs,
- der Kompaßrichtung σ_e des Flugzeugs,
- der Windgeschwindigkeit v_w und
- der Windrichtung σ_w

den Abdriftwinkel δ und die aus v_e und v_w resultierende Flugzeuggeschwindigkeit über Grund, v_g , zu bestimmen.

Lösung: Die Geschwindigkeiten v_e und v_w addieren sich nach den Lehren der Mechanik geometrisch. Danach ergibt sich die grundsätzliche Lösung der Aufgabe gemäß Abb. 127. In Abb. 128 sehen wir die Lösung für den Fall, daß

$$v_e = 100 \text{ m/s}$$

$$v_w = 20 \text{ m/s}$$

für alle Flugrichtungen von 45° zu 45° durchgeführt.

Aus der Abbildung ist für die eingezeichneten Richtungen zu entnehmen:

1. die tatsächliche Geschwindigkeit über Grund v_g ,
2. die Korrekturen δ , die dem vom Flugzeug gehaltenen Eigenkurs σ_e hinzugefügt werden müssen, um den tatsächlich geflogenen Kurs σ_g zu erhalten:

$$\sigma_g = \sigma_e + \delta$$

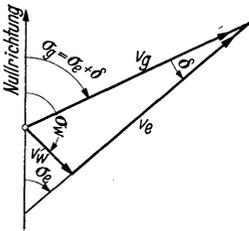


Abb. 127.

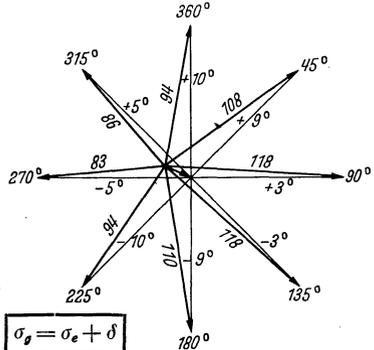


Abb. 128.

Auch einfache Geräte, die die Aufgabe für alle Fälle rein mechanisch lösen, sind mehrfach erdacht und ausgeführt worden. In Abb. 129 zeigen wir einen solchen mechanischen Abdriftrechner, der kaum noch einer Erläuterung bedarf. Die Scheibe Sch_1 läßt sich durch Verschieben auf die Geschwindigkeit v_e und durch Drehen auf den Sollkurs σ_e einstellen. Weiter stellt man das nach Werten von v_w geteilte Lineal L_3 auf die Windrichtung σ_w ein. Ist das geschehen, so kann man auf dem Lineal L_2 , das man nur noch auf die betreffende v_w einzustellen hat, die gesuchte v_g und auf der Scheibe Sch_2 den Abdriftwinkel δ ablesen, um welchen man σ_e korrigieren muß, um den wahren Kurs σ_g über Grund zu erhalten. Man kann die Mechanisierung auch noch weiter treiben und über der σ_e -Teilung einen beweglichen Zeiger spielen lassen, von dem gleich die von dem Gerät ausgerechneten richtigen σ_g -Werte abgelesen werden können.

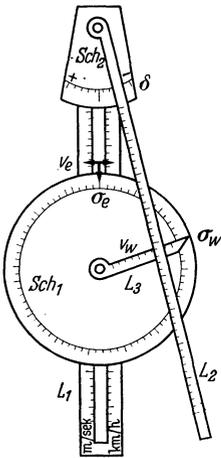


Abb. 129.

Beispiel: Ein Gerät bestimmt die Lage eines Punktes im Raum — etwa eines Flugzeuges — durch die Ermittlung der Seitenrichtung σ (Abb. 130), des Höhenwinkels γ sowie der Schrägentfernung E_M . Benötigt werden aber für die weitere rechnerische Behandlung die Zielhöhe H und die Kartentfernung E_K . Wie findet man diese?

Lösung: Es könnte das Meßgerät so eingerichtet werden (Abb. 131), daß die gemessene Schrägentfernung E_M durch irgendeine mechanische Steuerung auf das senkrecht stehende Lineal L übertragen wird. Im einfachsten Falle stellt man den Schieber Sch des Lineals L von Hand auf die Entfernung E_M ein. Das Lineal spielt über einer Tafel T , die sich automatisch nach γ einstellt und auf

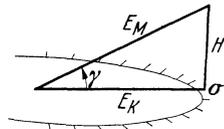


Abb. 130.

der man dann an der Ablesemarke des Schiebers Sch unmittelbar die gesuchten Werte abliest.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man — getrennt von dem Meßgerät — das Bestimmungsdreieck $E_M - E_K - H$ in die Ebene von O umklappt (Abb. 132), γ und E_M mit den entsprechenden Linealen einstellt und E_K und H abliest.

b) Führt man den hier zuletzt behandelten Gedanken der Mechanisierung der Rechengерäte weiter, so kommt man bald auf bestimmte, immer wiederkehrende Probleme, bei denen es sich darum handelt, gewisse mathematische ein-

fache Aufgaben, wie beispielsweise die Vergrößerung oder Verkleinerung, ferner die Umwandlung linearer in bestimmte, durch einen mathematischen Zusammenhang vorgeschriebene Bewegungsvorgänge usw. durch mechanische Vorrichtungen ausführen zu lassen. Hier greift also das Rechnerische schon stark in das Mechanische

und Konstruktive über: Es ist aber klar, daß solche mechanische Auswertevorrichtungen in ihren Grundlagen auf bestimmte mathematisch-physikalische Prinzipien zurückgehen, von denen wir einige grundsätzliche besprechen wollen.

c) Um beispielsweise Längenänderungen mechanisch zu vergrößern, bedient man sich in der Praxis irgendwelcher Hebelvorrichtungen. Die z. B. als Rollen ausgebildeten Hebel gestatten gleichzeitig eine oft erwünschte Änderung der Kraftrichtung. Sehr kleine Längenänderungen

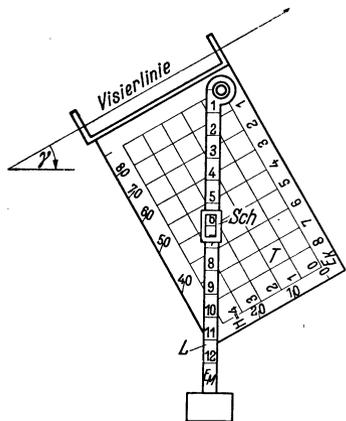


Abb. 131.

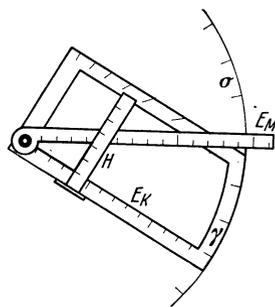


Abb. 132.

von feinen Drähten usw. werden stark — allerdings nicht proportional — vergrößert dargestellt durch die in Abb. 133 skizzierte Auswanderung h des nach der Seite gezogenen Mittelpunktes des gespannten Drahtes. Zwischen seiner Längenänderung Δl und der Auswanderung h bestehen die Beziehungen:

$$\Delta l = \frac{h^2}{l} \quad \text{und} \quad h = \sqrt{l \cdot \Delta l}. \quad (30)$$

Für $l = 100$ und Längenänderungen von 0,1 bis 1% errechnen sich danach die in untenstehender Tabelle zusammengestellten Auswanderungen. In der letzten Spalte sind noch die Vergrößerungen V angegeben, die die einfache Vorrichtung, von der man z. B. beim Hitzdrahtamperemeter Gebrauch macht, hergibt. Man erkennt, daß die Vergrößerungen sehr schnell absinken. Andererseits setzen die starken

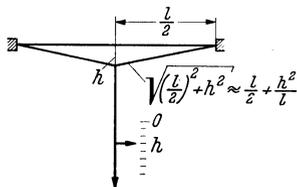


Abb. 133.

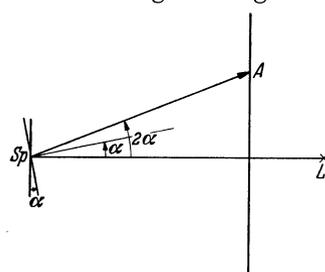


Abb. 134.

Vergrößerungen kleine Anfangsauswanderungen voraus, doch diese bedingen wieder hohe Zugspannungen, die nicht immer zulässig sind.

d) Die Verdoppelung eines Drehwinkels läßt sich — optisch — mit einem Spiegel erzielen. Man macht von dieser Tatsache beim Spiegelgalvanometer Gebrauch. Dreht sich der Spiegel Sp (Abb. 134) um den Winkel α , so wird ein von einer Licht-

Tabelle 24.

Δl in %	h	$V = \frac{h}{\Delta l}$
0,1	3,2	32
0,2	4,5	22
0,3	5,5	18
0,4	6,4	16
0,5	7,1	14
0,6	7,8	13
0,7	8,4	12
0,8	9,0	11
0,9	9,5	10,5
1,0	10	10

quelle L auf den Spiegel auftreffender Lichtstrahl um den doppelten Drehwinkel, also um 2α abgelenkt.

e) Für die Abbildung eines Gegenstandes durch eine Konvexlinse mit der Brennweite f gilt die dioptrische Hauptformel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (38)$$

Wenn nun die Aufgabe besteht, die Einstellung der Bildweiten b durch die Gegenstandsweiten a unmittelbar steuern zu lassen, so kann das nur auf Grund bestimmter geometrischer Beziehungen, die sich leicht „mechanisieren“ lassen, geschehen. In Abschn. 16 ist gesagt worden, daß mit Bezug auf die Abb. 135 für jede durch den Punkt D gelegte Gerade g die Beziehung gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Nachstehend der Beweis für diese Behauptung:

Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{y}{\sin \alpha}$$

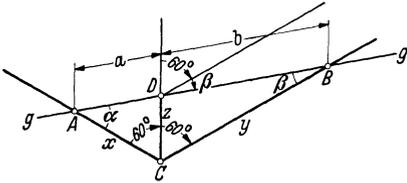


Abb. 135.

Somit also

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{1}{y}.$$

Weiter ist

$$\frac{z}{\sin \beta} = \frac{y}{\sin(60^\circ + \beta)}$$

und somit

$$\frac{1}{y} = \frac{\sin \beta}{\sin(60^\circ + \beta)} \cdot \frac{1}{z}$$

Die Addition der Ausdrücke für $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ gibt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(60^\circ + \beta)} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\sin \beta}{\sin(60^\circ + \beta)} \cdot \frac{1}{z}$$

oder wegen

$$\alpha = 60^\circ - \beta$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\sin(60^\circ - \beta) + \sin \beta}{\sin(60^\circ + \beta)} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z}.$$

z liegt auf der Winkelhalbierenden des großen Dreiecks, und diese teilt die Gerade g im Verhältnis der Anseiten x und y . Um die Abschnitte der Geraden g gleich a und b zu machen, müßte z entsprechend vergrößert werden, und zwar so, daß beim rechtwinkligen Schnitt der Winkelhalbierenden durch die Gerade g deren Teile a und b gleich $2f$ werden. Aus dieser Erkenntnis folgt

$$z = 2 \cdot f \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2 \cdot 0,5774 f$$

(39)

Damit wäre die Aufgabe mathematisch gelöst. Die Lösung führt zu folgender Konstruktion:

Die abbildende Linse befindet sich bei D . Bei A befindet sich der Gegenstand, bei B der Bildschirm od. dgl., auf dem das Bild von A aufgefangen wird. A und B gleiten auf einer der Geraden g entsprechenden Gleitschiene; beide werden gleichzeitig geführt durch zwei miteinander starr verbundene, den Winkel von 120° einschließende Führungsschienen, also durch einen Winkelhebel, dessen Drehpunkt D sich im Abstand $z = 1,155 f$ von der Geraden g befindet.

Auf sonstige technische Einzelheiten brauchen wir uns hier nicht einzulassen.

f) Um die außerordentlich vielseitigen Möglichkeiten zu zeigen, die für die Auswertung praktischer Aufgaben bestehen, diskutieren wir einmal die Frage: Wie kann die Gleichung

$$H = E_M \cdot \sin \gamma \tag{40}$$

ausgewertet werden?

Die Antwort auf diese Frage geben die Abb. 136 bis 149. Es stellt dar:

Abb. 136: Die elementar-mechanische Umwandlung der Polarkoordinaten E_M und γ in orthogonale. E_M ist durch Kreisbögen dargestellt; die γ sind angedeutet durch die im Ursprung zusammenlaufenden Linien.

Abb. 137: Die Mechanisierung des Auswertvorganges durch kleinmaßstäbliche Wiederholung des Messungsvorganges.

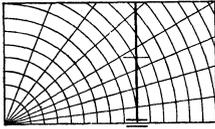


Abb. 136.

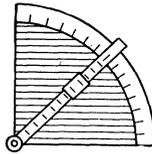


Abb. 137.

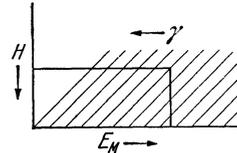


Abb. 138.

Abb. 138: Darstellung der gegebenen Gleichung im orthogonalen, logarithmisch geteilten Achsenkreuz.

Abb. 139: Mechanisierung der vorigen Darstellung.

Abb. 140: Nomographische Darstellung mit regulären Teilungen für H und E_M .

Abb. 141: Nomographische Darstellung mit logarithmischen Teilungen für H und E_M .

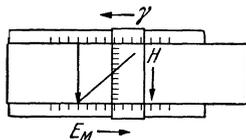


Abb. 139.

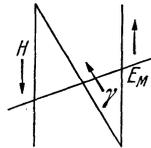


Abb. 140.

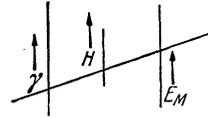


Abb. 141.

g) Die Praxis bleibt natürlich bei diesen Lösungen nicht stehen. Sie wird die Mechanisierung noch weiter treiben und verlangen, daß die Einstellung der Argumente nicht von Hand, sondern automatisch von den Meßgeräten, die E_M und γ ermitteln, auf die Auswertgeräte übertragen werde, so daß also lediglich das Ergebnis abgelesen zu werden braucht. Zu untersuchen, wie das gemacht werden kann, liegt nicht mehr im Rahmen der vorliegenden Arbeit, aber wir können hier einmal feststellen, daß die graphischen Verfahren vielfach die Grundlage bilden für die angedeutete weitergehende Mechanisierung.

Abschließend kann über die graphischen Rechenhilfsmittel gesagt werden,

1. daß ihre Herstellung nur wenige mathematische Sonderkenntnisse und keinerlei besondere Fertigkeiten voraussetzt;
2. daß die Genauigkeit, mit der sie die Resultate zu ermitteln gestatten, für die meisten technischen Zwecke voll ausreicht (um $\pm 0,5\%$);
3. daß sie im Gebrauch überaus bequem sind.

Der so einfache Gebrauch der graphischen Rechenhilfsmittel erspart dem Rechner viele zwar verantwortungsvolle, aber nicht gerade qualifizierte Geistesarbeit, von der der Philosoph SCHOPENHAUER einmal behauptete, daß sie „die niedrigste aller Geistestätigkeiten weil die einzige wäre, die durch eine Maschine ausgeführt werden könne“. Wir wollen noch hinzufügen: Und sogar durch eine Zeichnung ausgeführt werden kann, wobei wir uns bewußt bleiben wollen, daß die Zeichnung sowohl wie auch die Maschine Kinder jenes Geistes sind, der eben hin und wieder auch einmal solche Tätigkeit ausüben muß, wie die arithmetische eine ist.

Einteilung der bisher erschienenen Hefte nach Fachgebieten (Fortsetzung)

III. Spanlose Formung (Fortsetzung)

	Heft
Gesenkschmiede I (Gestaltung und Verwendung der Werkzeuge). 2. Aufl. Von H. Kaessberg	31
Gesenkschmiede II (Herstellung und Behandlung der Werkzeuge). Von H. Kaessberg	58
Das Pressen der Metalle (Nichteisenmetalle). Von A. Peter	41
Die Herstellung roher Schrauben I (Anstauchen der Köpfe). Von J. Berger	39
Stanztechnik I (Schnittechnik). 2. Aufl. Von E. Krabbe	44
Stanztechnik II (Die Bauteile des Schnittes). 2. Aufl. Von E. Krabbe	57
Stanztechnik III (Grundsätze für den Aufbau von Schnittwerkzeugen). Von E. Krabbe	59
Stanztechnik IV (Formstanzen). Von W. Sellin	60
Die Ziehtechnik in der Blechbearbeitung. 3. Aufl. Von W. Sellin	25
Hydraulische Preßanlagen für die Kunstharzverarbeitung. Von H. Lindner	82

IV. Schweißen, Löten, Gießerei

Die neueren Schweißverfahren. 5. Aufl. Von P. Schimpke	13
Das Lichtbogenschweißen. 3. Aufl. Von E. Klosse	43
Praktische Regeln für den Elektroschweißer. 2. Aufl. Von R. Hesse. (Im Druck)	74
Widerstandsschweißen. Von W. Fahrenbach	73
Das Schweißen der Leichtmetalle. Von Th. Ricken	85
Das Löten. 3. Aufl. Von W. Burstyn. (Im Druck)	28
Das ABC für den Modellbau. Von E. Kadlec	72
Modelltischlerei I (Allgemeines, einfachere Modelle). 2. Aufl. Von R. Löwer	14
Modelltischlerei II (Beispiele von Modellen und Schablonen zum Formen). 2. Aufl. Von R. Löwer	17
Modell- und Modellplattenherstellung für die Maschinenformerei. Von Fr. und Fe. Brobeck	37
Der Gießerei-Schachtofen im Aufbau und Betrieb. 3. Aufl. von „Kupolofen-Betrieb“. Von Joh. Mehrrens	10
Handformerei. Von F. Naumann	70
Maschinenformerei. Von U. Lohse	66
Formsandaufbereitung und Gußputzerei. Von U. Lohse	68

V. Antriebe, Getriebe, Vorrichtungen

Der Elektromotor für die Werkzeugmaschine. Von O. Weidling	54
Hohe Drehzahlen durch Schnellfrequenz-Antrieb. Von F. Beinert und H. Birett	84
Stufengetriebe an Werkzeugmaschinen mit kreisender Hauptbewegung. 2. Aufl. Von H. Rognitz. (Im Druck)	55
Maschinelle Handwerkzeuge. Von H. Graf	79
Die Zahnformen der Zahnräder. 2. Aufl. Von H. Trier	47
Die Kraftübertragung durch Zahnräder. Von H. Trier	87
Einbau und Wartung der Wälzlager. Von W. Jürgensmeyer	29
Dichtungen. Von K. Trutnovsky	92
Teilkopfarbeiten. 3. Aufl. Von W. Pockrandt	6
Spannen im Maschinenbau. Von F. Klautke	51
Der Vorrichtungsbau I (Einteilung, Einzelheiten und konstruktive Grundsätze). 4. Aufl. Von F. Klautke †	33
Der Vorrichtungsbau II (Typische Einzelvorrichtungen, Bearbeitungsbeispiele mit Reihen planmäßig konstruierter Vorrichtungen). 4. Aufl. Von F. Klautke †	35
Der Vorrichtungsbau III (Wirtschaftliche Herstellung und Ausnutzung der Vor- richtungen). 3. Aufl. Von H. Mauri. (Im Druck)	42

VI. Prüfen, Messen, Anreißen, Rechnen

Werkstoffprüfung (Metalle). 3. Aufl. Von P. Riebensahm. (Im Druck)	34
Metallographie. 2. Aufl. Von O. Mies	64
Technische Winkelmessungen. 2. Aufl. Von G. Berndt	18
Messen und Prüfen von Gewinden. Von K. Kress	65
Schnittkraft- und Drehmomentmesser für Werkzeugmaschinen. Von H. Schallbroch und H. Balzer. (Im Druck)	91
Das Anreißen in Maschinenbau-Werkstätten. 3. Aufl. Von H. Mauri. (Im Druck)	3
Das Vorzeichnen im Kessel- und Apparatebau. 2. Aufl. Von A. Dorl. (Im Druck)	38
Technisches Rechnen I. 3. Aufl. Von V. Happach. (Im Druck)	52
Technisches Rechnen II. 2. Aufl. Von V. Happach	90
Der Dreher als Rechner. 3. Aufl. Von E. Busch	63
Feinstarbeit, Rechnen und Messen im Lehren-, Vorrichtungs- und Werkzeugbau. Von E. Busch und F. Kähler	86
Prüfen und Instandhalten von Werkzeugen und anderen Betriebsmitteln. 2. Aufl. Von P. Heinze. (Im Druck)	67