ТОГО ЖЕ АВТОРА:

1. **Свѣтъ и матерія.** Общедоступный очеркъ спектральнаго анализа. XV + 251 стр. съ 2 портретами и 78 рисунками. Съ предисловіемъ А. Цингера. Цѣна 1 р. 25 к. 1912 г.

Ученымъ Комитетомъ М. Н. П. допущена въ фундаментальныя библіотеки среднихъ учебныхъ заведеній М. Н. П.

2. **Учебникъ теоретической ариѳметики.** Для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. XII + 138 стр. Цѣна 75 коп. 1912 года.

Главнымъ Управленіемъ Военно - Учебныхъ заведеній допущена въ фундаментальныя библіотеки военно-учебныхъ заведеній.

3. **Воздухъ, его жизнь и свойства.** Съ 9-ю рисунками. Цѣна 40 коп.

4. **Концентрическій учебникъ Алгебры.** *Часть I.* 324 стр. съ 30 рисунками и портретами. Цѣна 1 р. 20 к. 1912 года.

5. **Концентрическій учебникъ Алгебры.** *Часть II.* 288 стр. съ 30 рисунками и портретами. Цѣна 1 р. 1913 г.

6. **Учебникъ Ариѳметики.** Курсъ III класса мужскихъ или IV класса женскихъ гимназій. 77 стр. Цѣна 40 коп. 1913 года.

М 33/233

801-13
423

В. Г. ФРИДМАНЪ.

Преподаватель Московскихъ Женскихъ Гимназій Н. Е. Шписсъ и М. Г. Брюхоненко и Первыхъ Московскихъ Электротехническихъ Курсовъ.

УЧЕБНИКЪ
МЕТОДИКИ АРИѲМЕТИКИ.

Для VIII дополнительнаго класса Женскихъ Гимназій, для Педагогическихъ классовъ Институтовъ и для самообразованія.

9/IX 34 D

МОСКОВСКІЙ ПУБЛИЧНЫЙ И РУМЯНЦЕВСКІЙ МУЗЕЙ
XIII-38824

Москва.
Книгоиздательство „НАУКА".
1914.

Типографія П. П. Рябушинскаго, Путинковскій пер., собств. домъ.

ПОСВЯЩАЕТСЯ

МОЕЙ ДОРОГОЙ ЖЕНѢ

Надеждѣ Николаевнѣ ФРИДМАНЪ

(рожд. ГЖЕЛЬСКОЙ).

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ настоящее время въ русской учебной литературѣ существуетъ много «Методикъ Ариѳметики»; таковы Методики ариѳметики гг. Гольденберга, Шохоръ-Троцкаго, Арженникова, Егорова, Беллюстина, Мукалова, Евтушевскаго и другихъ. Эти Методики представляютъ собой объемистые курсы, въ которыхъ содержатся очень подробныя указанія о способахъ практическаго преподаванія ариѳметики; въ виду этого онѣ являются чрезвычайно полезными для учительницъ и учителей ариѳметики, какъ лицъ близко соприкасающихся съ практикой преподаванія. Но вмѣстѣ съ тѣмъ названные курсы совершенно непригодны для веденія занятій по Методикѣ Ариѳметики въ VIII дополнительномъ классѣ Женскихъ гимназій Министерства Народнаго Просвѣщенія и въ Педагогическихъ классахъ Институтовъ Вѣдомства Императрицы Маріи: разсмотрѣніе мельчайшихъ подробностей практики преподаванія является здѣсь излишнимъ и поэтому скучнымъ дѣломъ; въ то же время въ этихъ курсахъ очень мало разработаны нѣкоторыя отвлеченныя и историческія проблемы, лежащія въ основѣ преподаванія ариѳметики въ нашихъ школахъ.

Непригодность обширныхъ курсовъ Методики Ариѳметики для веденія занятій съ ученицами-педагогичками сознана преподавателями уже давно. Въ послѣднее время появились одинъ за другимъ два учебника Методики Ариѳметики, предназначенные для занятій съ ученицами-педагогичками—это «Введеніе въ Методику Ариѳметики» г. Галанина и «Очерки по Методикѣ Ариѳметики» г. Эрна. Оба эти учебника обладаютъ одинаковымъ недостаткомъ:

они слишкомъ отвлеченно подходятъ къ вопросамъ Методики, почти игнорируя вопросами практики; въ виду этого изложенiе дѣлается труднымъ и нѣсколько висящимъ въ воздухѣ, ибо, по нашему убѣжденiю, отвлеченныя проблемы должны въ средней школѣ разсматриваться лишь на базѣ практическихъ знанiй; если такой практической подготовки нѣтъ, то отвлеченныя познанiя лишены здороваго фундамента. Особенно труднымъ является трудъ г. Галанина.

Выпуская настоящiй учебникъ Методики Ариѳметики, авторъ руководился желанiемъ дать на руки ученицамъ-педагогичкамъ достаточно простой учебникъ, въ которомъ онѣ, на ряду съ практическими указанiями о преподаванiи ариѳметики, могли бы найти и разсмотрѣнiе нѣкоторыхъ основныхъ проблемъ, лежащихъ въ основѣ преподаванiя: таковы вопросы объ опредѣленiи числа, о развитiи числовыхъ представленiй, о сущности и цѣли дѣйствiй, объ основныхъ принципахъ преподаванiя и т. д. Учащiйся найдетъ въ выпускаемомъ учебникѣ общiй обзоръ современныхъ методовъ преподаванiя, а также историческiе очерки развитiя этихъ методовъ. Авторъ полагаетъ, что ознакомленiе съ этимъ учебникомъ было бы небезполезно и для матерей, воспитателей и воспитательницъ и вообще для лицъ, такъ или иначе соприкасающихся съ дѣломъ развитiя и воспитанiя дѣтей. Будущiе учительницы и учителя смогутъ воспользоваться этимъ учебникомъ, какъ общедоступнымъ введенiемъ въ болѣе подробное изученiе Методики Ариѳметики.

Авторъ позволяетъ себѣ питать надежду, что выпускаемый учебникъ посодѣйствуетъ постановкѣ преподаванiя Методики Ариѳметики въ Педагогическихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведенiй.

Вл. Г. Фридманъ.

Москва, 10 ноября 1913 года.

ГЛАВА I.

Цѣль преподаванiя ариѳметики и значенiе методики ариѳметики.

§ 1. За много вѣковъ до Р. Х. греческая ученая школа пиѳагорейцевъ учила, что *число есть мѣра всѣхъ вещей:* ученики Пиѳагора обожествляли число, приписывая различнымъ числамъ тѣ или иныя свойства, то или иное влiянiе на людей. Мы въ настоящее время не можемъ раздѣлять мистическаго отношенiя пиѳагорейцевъ къ числамъ, но должны согласиться съ тѣмъ утвержденiемъ ихъ, которое приписываетъ числу свойство быть мѣрой всѣхъ вещей. Дѣйствительно, уже съ самаго ранняго дѣтства человѣкъ вынужденъ *численно* относиться къ явленiямъ и вещамъ внѣшняго мiра; ребенокъ считаетъ число своихъ игрушекъ, конфектъ и т. д., считаетъ число пойманныхъ имъ насѣкомыхъ, собранныхъ камней, рѣшаетъ незамысловатыя численныя задачи вродѣ, напримѣръ, такой задачи: «у меня 3 яблока, мама обѣщала мнѣ дать еще 2 яблока—сколько же у меня тогда будетъ яблоковъ?»

Занимаясь покупкой товаровъ, ребенокъ интересуется числомъ купленныхъ фунтовъ товара, числомъ купленныхъ вещей, разсчитываетъ, сколько денегъ у него останется послѣ покупки и т. д. Жизнь, рано или поздно, заставляетъ ребенка приступать къ измѣренiю: онъ измѣряетъ, напримѣръ, длину своего стола или комнаты, измѣряетъ длину веревки, канавки, изгороди, своего роста и т. д. Безъ измѣренiя мы не можемъ точно оцѣнивать вещи и явленія природы. Полагаться на сужденія «на глазъ» нашихъ органовъ чувствъ—дѣло рискованное; наши органы чувствъ часто вводятъ насъ въ заблужденіе даже въ тѣхъ случаяхъ, когда нужно только рѣшить на глазъ, равны ли двѣ длины или два вѣса. Если же нужно оцѣнить, *во сколько разъ* одна длина больше другой, или во сколько разъ одинъ грузъ тяжелѣе другого, или во сколько разъ лампа ярче свѣчи, то здѣсь мы безъ измѣренія совершенно безсильны.

Лишь измѣреніе, а, слѣдовательно, полученное въ результатѣ *число*, можетъ дать отвѣтъ на такіе вопросы.

§ 2. Итакъ съ числомъ человѣку приходится имѣть дѣло во всѣхъ тѣхъ многочисленныхъ случаяхъ, когда нужно болѣе точно и опредѣленно отнестись къ явленіямъ природы, къ явленіямъ повседневной жизни. Это выясняетъ громадное значеніе Ариѳметики—*науки о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними*. Всякій взрослый человѣкъ долженъ (черезъ школьное обученіе) обладать цѣлымъ рядомъ ариѳметическихъ познаній. Вотъ, приблизительно, тѣ познанія въ области ариѳметики, которыя должны быть у современныхъ интеллигентныхъ людей.

1) *Умѣнье считать*. Когда мы считаемъ, мы перебираемъ подъ рядъ сосчитываемые предметы и произносимъ слова: одинъ, два, три и т. д. Ясно, что этотъ счетъ возможенъ лишь въ томъ случаѣ, если мы обладаемъ знаніемъ такъ-называемаго *натуральнаго ряда* чиселъ: 1, 2, 3, 4...

Считая, мы устанавливаемъ попарно соотвѣтствіе между каждымъ изъ сосчитываемыхъ предметовъ и однимъ изъ чиселъ натуральнаго ряда. Рисунокъ № 1 изображаетъ процессъ счета 6-ти яблоковъ.

Считая, напримѣръ, удары маятника часовъ, мы также относимъ къ каждому удару подъ рядъ по одному числу натуральнаго ряда: послѣднее число натуральнаго ряда, отнесенное къ послѣднему удару, и показываетъ число всѣхъ ударовъ.

Итакъ умѣніе считать предполагаетъ *знаніе натуральнаго ряда чиселъ;* это знаніе должно заключаться въ слѣдующемъ: a) нужно ясно представлять себѣ послѣдовательность чиселъ натуральнаго ряда; в) нужно быть знакомымъ съ письменнымъ начертаніемъ чиселъ ряда, с) нужно наглядно представлять себѣ (главнымъ образомъ зрительно) нѣсколько наименьшихъ чиселъ ряда (напримѣръ, до 10), или въ видѣ фигуры, составленной изъ соотвѣтствующаго числа точекъ (см. рис. № 2), или осязательно на пальцахъ; d) нужно быть хорошо знакомымъ съ десятичнымъ составомъ чиселъ натуральнаго ряда, превышающихъ число 10. Число вродѣ 352 должно отчетливо рисоваться воображенію, какъ состоящее изъ 3 сотенъ, 5 десятковъ

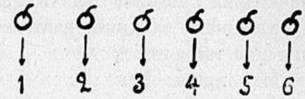


Рис. 1.

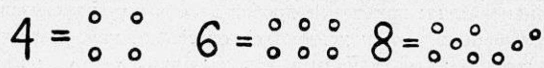


Рис. 2.

и 2 единицъ; иными словами, нужно знать десятичную систему счисленія, ея способы называть и обозначать числа и дѣлать ихъ болѣе доступными для умственнаго воспріятія.

§ 3. 2) **Умѣнье сознательно производить основныя четыре дѣйствія** (сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе) **надъ числами**. Складывая, напримѣръ, числа 15421 и 3452, мы должны знать, что производство этого сложенія основано на томъ, что мы производимъ отдѣльно дѣйствіе сложенія отдѣльныхъ десятичныхъ группъ числа (единицъ, десятковъ и т. д.) и, что, слѣдовательно, въ конечномъ результатѣ дѣло сводится къ *дѣйствіямъ надъ* *однозначными числами*. Умножая, напримѣръ, въ умѣ 498 на 3, мы сначала множимъ 500 на 3 и изъ полученнаго произведенія вычитаемъ 6 (2 . 3): здѣсь мы основываемся на томъ *свойствѣ умноженія*, что если мы множимое увеличимъ на нѣсколько единицъ, то произведеніе увеличится на это число единицъ, взятое столько разъ, сколько единицъ во множителѣ.

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что сознательное умѣніе производить дѣйствія надъ числами основывается 1) на знаніи результатовъ дѣйствій надъ однозначными числами, 2) на знаніи свойствъ дѣйствій, 3) на знаніи десятичной группировки чиселъ.

§ 4. 3) **Наглядно-реальное знакомство съ дробями обыкновенными и десятичными.** Дроби должны отчетливо представляться, какъ совокупности тѣхъ или иныхъ одинаковыхъ долей единицы; ясно должна представляться зависимость величины дроби отъ величины ея числителя и знаменателя; приведеніе дробей къ общему знаменателю должно быть ясно и конкретно понимаемо, какъ выраженіе дробей въ одинаковыхъ доляхъ цѣлой единицы; дѣйствія умноженія и дѣленія должны быть ясно представляемы въ связи съ нахожденіемъ части числа и всего числа по данной его части.

Современный интеллигентъ долженъ быть хорошо знакомъ съ техникой дѣйствій надъ десятичными дробями, понимать связь записи десятичныхъ дробей съ десятичной записью цѣлыхъ чиселъ; нужно также проникнуться убѣжденіемъ въ громадномъ преимуществѣ десятичныхъ дробей передъ обыкновенными, давшемъ громадное сбереженіе времени людямъ, часто имѣющимъ дѣло съ вычисленіями. *Культурный* человѣкъ долженъ понимать, что успѣхи *культуры* тѣсно связаны съ удобствами счисленія и производства дѣйствій, и что, слѣдовательно, введеніе десятичныхъ дробей было большимъ прогрессомъ человѣчества.

§ 5. 4) **Умѣнье рѣшать не слишкомъ сложныя задачи.** Это умѣнье должно основываться на пониманіи характера зависимости различныхъ величинъ задачи. Такъ, если мы рѣшаемъ простую задачу: «купецъ купилъ 5 фунтовъ товара стоимостью по 3 руб. фунтъ и продалъ его по 3 р. 50 к. фунтъ; сколько онъ получилъ прибыли на всемъ товарѣ», то мы рѣшаемъ эту задачу, исходя изъ знанія слѣдующихъ зависимостей: 1) прибыль на всемъ товарѣ равна прибыли на одномъ фунтѣ, умноженной на число фунтовъ, 2) прибыль есть разность между продажною цѣною и «своей» цѣной товара. Знаніе такихъ зависимостей величинъ является съ одной стороны результатомъ постепенно накапливаемаго житейскаго опыта, а съ другой— вдумчиваго рѣшенія цѣлаго ряда ариѳметическихъ задачъ: жизнь и специальное рѣшеніе ариѳметическихъ задачъ переплетаются здѣсь другъ съ другомъ.

Въ связи съ этимъ находится рядъ специальныхъ знаній: такъ, нужно быть знакомымъ съ *процентомъ* и съ практическими простѣйшими примѣненіями этого понятія, съ пропорціональнымъ дѣленіемъ. Сюда же относится знаніе основныхъ мѣръ протяженія, вѣса, времени и т. д., сознательное умѣніе измѣрять *площади* и *объемы* тѣлъ. Въ настоящее время, къ сожалѣнію, нерѣдки случаи, когда человѣкъ, считающій себя интеллигентнымъ, не умѣетъ, напримѣръ, выразить одно число въ процентахъ другого, или, напримѣръ, не можетъ объяснить, почему при умноженіи 5 аршинъ длины комнаты на 3 аршина ширины получается 15 *квадр*. аршинъ (вмѣсто линейныхъ).

§ 6. **Цѣль обученія ариѳметикѣ.** Если мы вспомнимъ, что ребенокъ 2—3 лѣтъ не обладаетъ совершенно ариѳметическими познаніями, что въ эту пору у него лишь начинаютъ развиваться числовыя представленія, и если сопоставимъ съ этимъ необходимую для интеллигентнаго человѣка сумму ариѳметическихъ знаній (см. §§ 3, 4, 5), то мы легко установимъ цѣль обученія ариѳметикѣ въ современной школѣ. Цѣль эта двоякая:

1) Обучая ариѳметикѣ, мы должны стремиться къ тому, чтобы облегчить человѣку *численное* отношеніе къ житейской практикѣ и міру явленій природы; для этого мы должны сообщить учащемуся слѣдующій рядъ умѣній и знаній: a) знаніе (устное и письменное) натуральнаго ряда чиселъ, являющагося основнымъ счетнымъ аппаратомъ человѣка, b) умѣніе считать, c) умѣніе сознательно производить дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, d) умѣнье рѣшать не слишкомъ сложныя задачи и въ связи съ этимъ знаніе зависимости различныхъ величинъ.

2) Не слѣдуетъ забывать, что занятія ариѳметикой развиваютъ умъ и сообразительную способность дѣтей; рѣшая задачи, изучая пріемы ариѳметическихъ дѣйствій, ребенокъ пріучается (при надлежащемъ веденіи преподаванія) къ цѣлесообразному употребленію своихъ силъ, къ извѣстнаго рода находчивости и умѣнію распутывать тѣ или иныя сочетанія обстоятельствъ. Эти результаты обученія ариѳметикѣ являются весьма цѣнными, и къ полученію такихъ результатовъ нужно стремиться всѣми силами.

Итакъ, преподаваніе ариѳметики должно имѣть въ виду слѣдующія двѣ цѣли: 1) *матеріальную*, заключающуюся въ сообщеніи учащемуся ряда знаній и практическихъ умѣній и 2) *формальную*, заключающуюся въ надлежащемъ развитіи ума и характера ребенка.

§ 7. Значеніе методики ариѳметики, какъ учебнаго предмета. Методика ариѳметики имѣетъ своей цѣлью *научить преподавать ариѳметику;* въ виду этого методика даетъ указанія о томъ, какъ происходитъ развитіе числовыхъ представленій и представленій о дѣйствіяхъ у малыхъ ребятъ, и какъ слѣдуетъ воспользоваться этимъ естественнымъ развитіемъ ума ребенка для расширенія и углубленія его ариѳметическихъ познаній.

Широко разработанные курсы методики ариѳметики содержатъ подробныя указанія относительно того, какъ и въ какой послѣдовательности слѣдуетъ излагать различные отдѣлы ариѳметики дѣтямъ: здѣсь мы найдемъ совѣты, какъ научить производству четырехъ основныхъ дѣйствій надъ отвлеченными и именованными числами, какими пріемами слѣдуетъ рѣшать задачи, какъ и когда знакомить дѣтей съ мѣрами, съ дробями и т. д.; здѣсь же мы сможемъ найти изложеніе тѣхъ основныхъ принциповъ, на которыхъ нужно строить преподаваніе дѣтямъ ариѳметики.

Уже этотъ краткій перечень матеріала методики ариѳметики показываетъ, насколько важны задачи методики. Въ интеллигентномъ обществѣ, къ сожалѣнію, часто высказывается взглядъ, что хорошее знаніе ариѳметики (и математики вообще) требуетъ особыхъ къ этому способностей и что такія способности встрѣчаются сравнительно рѣдко.

Съ одной стороны слѣдуетъ признать нѣкоторую долю истины въ этихъ сентенціяхъ; дѣйствительно, обыкновенно большинство дѣтей очень затрудняетъ изученіе ариѳметики, и, выходя изъ школы, они нерѣдко выносятъ не особенно пріятныя воспоминанія о горѣ и слезахъ, съ которыми соединялась ихъ работа на поприщѣ ариѳметики.

Но виновата въ такомъ положеніи дѣла не ариѳметика, а постановка преподаванія дѣтямъ ариѳметическихъ истинъ. Еще въ дошкольномъ возрастѣ ребенокъ часто страдаетъ отъ неумѣлаго обученія его ариѳметикѣ со стороны его родныхъ (матери, сестеръ, братьевъ и т. д.) или со стороны неумѣлыхъ воспитателей: ребенку даются непосильныя для его пониманія задачи, и когда непониманіе ребенка обнаруживается, на него сыплются упреки и наказанія. Съ какимъ непріязненнымъ чувствомъ долженъ послѣ этого относиться ребенокъ къ ариѳметикѣ. И это чувство будетъ поддержано въ такой школѣ, въ которой учителя или учительницы обнаруживаютъ при своемъ преподаваніи неумѣлость и незнаніе основныхъ элементовъ дѣтской психологіи.

Мы утверждаемъ, что, при надлежащей постановкѣ преподаванія ребенку ариѳметики съ самаго ранняго дѣтства, не должно возникать никакихъ особыхъ затрудненій въ усвоеніи этого предмета, ибо по существу своему ариѳметическія познанія вполнѣ доступны уму всякаго нормально развитого умственно ребенка. Вотъ что говоритъ по этому поводу извѣстный русскій педагогъ, покойный Александръ Ивановичъ Гольденбергъ: «Счисленіе есть предметъ, по преимуществу, посильный дѣтскому пониманію; отвлеченія въ немъ просты, непосредственны и естественны. Обученіе счисленію имѣетъ еще и ту особенность, что, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, дѣтскій умъ въ состояніи овладѣть всецѣло тѣмъ, надъ чѣмъ ему приходится работать; ничто не остается недосказаннымъ и предоставленнымъ послѣдующимъ разсужденіямъ.

Обучаясь пріемамъ вычисленія, дѣти ясно видятъ передъ собою цѣль, которую въ каждомъ данномъ случаѣ имъ предстоитъ достигнуть, отдаютъ себѣ полный отчетъ въ тѣхъ средствахъ, при помощи которыхъ они могутъ самостоятельно достигнуть цѣли».

Но чѣмъ доступнѣе дѣтскому уму ариѳметика при надлежащемъ ея усвоеніи, тѣмъ труднѣе и непріятнѣе становится этотъ предметъ, если внушать его ребенку насильно, безъ предварительной подготовки, не считаясь съ особымъ складомъ и запросами дѣтскаго ума. Такъ, скрипка подъ рукою опытнаго и чуткаго мастера даетъ звуки дивной красоты, но въ рукахъ неопытныхъ становится непріятнымъ, рѣжущимъ слухъ, инструментомъ.

Вотъ почему слѣдуетъ рекомендовать родителямъ, а въ особенности ближе стоящимъ къ дѣтямъ матерямъ,

а также воспитателямъ юныхъ дѣтей внимательное изученіе методики ариѳметики *). Помните, что передъ вами,

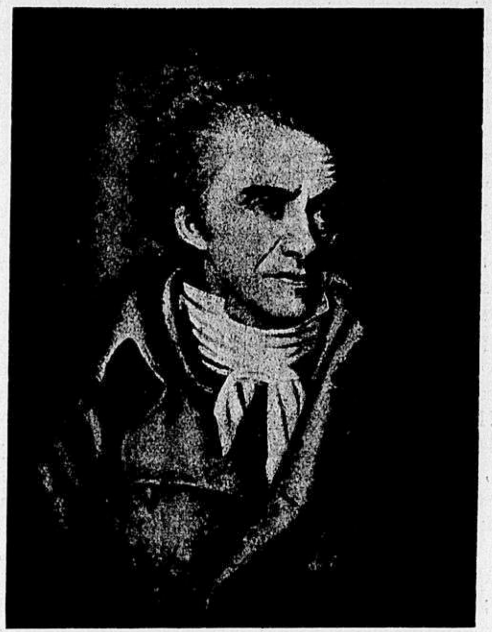


Рис. 3. Іоганнъ Генрихъ Песталоцци (1746—1828).

въ лицѣ ребенка, плодородная нива; но она дастъ обильную и хорошую жатву лишь тогда, когда вы ее умѣло и съ любовью къ дѣлу засѣете. Впечатлѣнія, полученныя

*) Само собою разумѣется, что изученіе методики ариѳметики безусловно необходимо для школьнаго учителя.

въ дѣтствѣ, остаются потомъ на всю жизнь невидимыми и часто несознаваемыми человѣкомъ руководителями его жизни. Методика ариѳметики указываетъ, какъ сдѣлать эти первыя дѣтскія впечатлѣнія возможно лучшими и привлекательными.

§ 8. **Историческое примѣчаніе.** Мы установили въ § 7, что преподаваніе ариѳметики должно преслѣдовать 2 цѣли: матеріальную и формальную. Было время, когда при преподаваніи ариѳметики стремились къ грубо матеріальнымъ цѣлямъ: цѣлью преподаванія ея считалось сообщеніе учащемуся извѣстныхъ правилъ ариѳметическихъ дѣйствій и практическихъ примѣненій этихъ правилъ. Самый выводъ правилъ, какія бы то ни было доказательства отсутствовали, а между тѣмъ именно въ этомъ выводѣ и доказательствахъ заключается глубоко развивающее значеніе ариѳметики. Въ такомъ духѣ были составлены учебники ариѳметики, выходившіе въ разныхъ европейскихъ странахъ въ XVI и XVII вѣкахъ *) и даже отчасти въ XVIII вѣкѣ. Авторъ одного распространеннаго въ XVI в. англійскаго учебника, Тонсталь, говоритъ въ своемъ учебникѣ, что онъ принужденъ былъ подробно заняться ариѳметикой по той причинѣ, что у него были денежныя дѣла, и знаніе ариѳметики ему понадобилось для того, чтобы не быть обманутымъ! Лишь въ концѣ XVIII в. въ Англіи стали появляться учебники съ доказательствами правилъ; но сначала доказательства помѣщались лишь въ подстрочныхъ примѣчаніяхъ, какъ нѣчто, не столь существенное для преподаванія.

Нѣсколько ранѣе этого (въ серединѣ XVIII стол.) начали появляться учебники съ доказательствами въ Германіи. Такъ, нѣмецкій педагогъ Базедовъ выпустилъ въ 1763 г. книгу подъ названіемъ: «Überzeugende Metode

*) До этого времени положеніе было еще плачевнѣе; учебниковъ совсѣмъ не существовало.

der auf das bürgerliche Leben angewendeten Arithmetik zum Vergnügen der Nachdenkenden und zur Beförderung des guten Unterrichts in den Schulen» (*Убѣдительный* методъ ариѳметики, примѣнимой къ гражданской жизни для удовольствія всѣхъ мыслящихъ и для потребностей лучшаго преподаванія въ школахъ). Любопытно, что названіе этой книги начинается словомъ «убѣдительный», что указываетъ на то, что авторъ, порывая съ традиціями, помѣстилъ въ своемъ учебникѣ доказательства.

Но рѣшительная реформа преподаванія ариѳметики была произведена лишь знаменитымъ швейцарскимъ педагогомъ Іоганномъ Генрихомъ Песталоцци (1746—1828). Песталоцци выставилъ главной цѣлью преподаванія ариѳметики формальное развитіе дѣтскаго ума при помощи счисленія. Но Песталоцци настолько увлекся реформой преподаванія ариѳметики въ духѣ формальнаго развитія, что почти совсѣмъ упустилъ изъ виду другую цѣль преподаванія—матеріальную. Эта односторонность метода Песталоцци не осталась безъ возраженія со стороны другихъ педагоговъ. Песталоцци отводилъ слишкомъ много времени умственнымъ вычисленіямъ надъ числами и оставилъ въ сторонѣ практическія задачи. Послѣ Песталоцци возникла борьба между его послѣдователями и противниками его метода, настаивавшими на матеріальныхъ цѣляхъ преподаванія ариѳметики. Но постепенно противныя стороны, отказавшись отъ крайностей, примирились, и была выработана формально-матеріальная цѣль преподаванія. Уже въ 1814 г. нѣмецкій педагогъ Гарнишъ, сторонникъ средняго пути, выставлялъ (среди другихъ) слѣдующія требованія, которымъ должно удовлетворять преподаваніе: 1) цѣлью является гармоническое развитіе душевныхъ силъ и ловкость въ практической жизни, 2) необходимо развить смѣтливость и сознательность и въ то же время навыкъ, быстроту и увѣренность, 3) не слѣдуетъ отдѣлять отвлеченнаго счисленія отъ прикладного, 4) задачи надо выбирать изъ практической жизни *). Въ этомъ направленіи и пошло дальнѣйшее развитіе методики ариѳметики. Этому развитію содѣйствовали труды такихъ выдающихся нѣмецкихъ педагоговъ, какъ Дистервегъ, Генчель, Грубе и др. Методики ариѳметики, выпущенныя этими педагогами объединяютъ въ одно стройное цѣлое обѣ цѣли преподаванія ариѳметики.

Итакъ при преподаваніи ариѳметики нужно обращать вниманіе не только на ту сумму знаній, которую даетъ ариѳметика, но и на развивающее *нравственное* значеніе этихъ занятій. Нравственное значеніе ариѳметики, какъ учебнаго предмета, было сознано уже давно. Впервые обратилъ на это спеціальное вниманіе ученикъ Песталоцци Штернъ («Lehrgang des Unterrichts» 1832). Вотъ что пишетъ по этому поводу Штернъ: «Сознаніе чувства истины (получаемое при изученіи дѣтьми ариѳметики) и способность дѣлать заключенія могутъ оказывать могущественное вліяніе на нравственное поведеніе человѣка, хотя сами по себѣ они не могутъ предохранить его отъ ошибокъ и паденій; дѣйствительно, пробужденіе увѣренности въ своихъ духовныхъ силахъ способствуетъ пріобрѣтенію человѣкомъ нравственнаго облика, дѣлая его болѣе осторожнымъ и предусмотрительнымъ въ своихъ рѣшеніяхъ и помогая ему избѣгать многихъ ошибокъ. Свободное пользованіе умственными силами способствуетъ развитію свободной воли».

У насъ въ Россіи, какъ и въ другихъ культурныхъ странахъ, необходимость преслѣдовать двоякую цѣль при обученіи ариѳметикѣ признана оффиціально. Вотъ что мы читаемъ въ «Примѣрныхъ программахъ предметовъ, преподаваемыхъ въ начальныхъ училищахъ вѣдомства Министерства Народнаго Просвѣщенія, утвержденныхъ 7 февраля 1897 г.»: «Обученіе ариѳметикѣ имѣетъ двоякую цѣль: практическую и общеобразовательную. Для достиженія той и другой цѣли необходимо, чтобъ дѣти научились свободно вычислять, умѣли примѣнять свои знанія къ рѣшенію задачъ и сознательно усвоили основныя ариѳметическія познанія».

*) См. „Leitfaden bei dem Rechnenunterricht", 1814.

ГЛАВА II.

Начальныя ариѳметическія познанія ребенка и распредѣленіе учебнаго матеріала при преподаваніи ариѳметики.

§ 9. **Количественное отношеніе ребенка къ міру явленій.** Взрослый человѣкъ способенъ относиться къ предметамъ внѣшняго міра съ чисто количественной точки зрѣнія, т.-е. онъ можетъ при разсматриваніи или изученіи этихъ предметовъ отвлечься отъ ихъ различій и обращать вниманіе лишь на *число* ихъ. Взрослый человѣкъ обладаетъ количественными понятіями «больше» и «меньше» и легко примѣняетъ эти понятія къ жизни. Такое количественное отношеніе къ міру начинаетъ развиваться у человѣка уже съ самаго ранняго дѣтства его.

Это объясняется тѣмъ, что природа и жизнь, насъ окружающія, слишкомъ часто *вынуждаютъ* насъ волей или неволей смотрѣть на нихъ количественно. Вотъ нѣкоторые примѣры: двухлѣтнему (и даже менѣе взрослому ребенку) понравилась данная ему ѣда, и онъ проситъ дать ему *еще* этой ѣды; ему налили въ стаканъ немного воды, онъ протестуетъ и проситъ налить стаканчикъ полнѣе (*еще* налить); ребенку дали для игры нѣсколько кубиковъ или карты—онъ проситъ прибавить ему *еще;* отецъ или мать, или няня, желая занять ребенка, придумали занятный процессъ игры, и вотъ, когда эта игра, понравившаяся ребенку, кончается, ребенокъ проситъ продолженіе этой игры, говоря *«еще»*. Такихъ примѣровъ можно привести очень много, и во всѣхъ этихъ случаяхъ ребенокъ словомъ *«еще»* показываетъ, что онъ уже начинаетъ относиться количественно къ внѣшнему міру.

Почти одновременно съ этимъ у ребенка начинаютъ развиваться понятія «большой» и «маленькій». Такъ, онъ различаетъ большую «киску» отъ маленькой, различаетъ большую и маленькую палочки, большой и маленькій кусокъ хлѣба и т. д. Въ этомъ заключается развитіе неопредѣленныхъ количественныхъ представленій.

Но мало-по-малу понятіе количественности начинаетъ развертываться у ребенка въ понятіе опредѣленнаго числа. У достаточно смышленныхъ ребятъ это происходитъ уже на третьемъ году жизни. Ребенокъ начинаетъ прежде всего различать понятія «одинъ» и «много». Ему даютъ, напримѣръ, пряникъ или яблоко и говорятъ: «вотъ тебѣ пряникъ, одинъ пряникъ», а онъ уже самъ, указывая на остальные, здѣсь же находящіеся пряники (или яблоки), говоритъ, что тамъ много. Слово «много» усвоено ребенкомъ изъ повседневнаго наблюденія окружающихъ предметовъ и разговоровъ взрослыхъ, около него находящихся; незамѣтно затѣмъ съ этимъ словомъ ребенокъ начинаетъ соединять опредѣленное понятіе, выражаемое этимъ словомъ: на третьемъ году жизни это понятіе уже имѣется у ребенка. Въ это же время ребенокъ научается произносить названія нѣкоторыхъ числительныхъ: одинъ, два, три, четыре, пять..., не понимая, правда, ихъ реальнаго смысла и произнося ихъ не въ ихъ натуральной послѣдовательности (въ разбивку). Но какимъ-то невѣдомымъ образомъ, повинуясь, можетъ быть, естественному чутью, ребенокъ чувствуетъ, что слова: одинъ, два и т. д., имѣютъ не совсѣмъ такой смыслъ, какъ другія слова рѣчи, которыя ему часто приходится слышать отъ взрослыхъ.

Если бы всѣ предметы природы рѣзко отличались другъ отъ друга (величиной, цвѣтомъ или формой), такъ что не было бы ни одного предмета (или явленія), похожаго на другой, то числовыя представленія возникали бы у насъ чрезвычайно медленно и поздно. Существованіе предметовъ, сходныхъ между собой, въ значительной мѣрѣ содѣйствуетъ возникновенію опредѣленныхъ числовыхъ представленій. Ребенокъ видитъ, напримѣръ, что горятъ двѣ лампы, ясно чувствуетъ, что это два сходныхъ другъ съ другомъ предмета, но въ то же время получаетъ два отдѣльныхъ ощущенія, по одному отъ каждой лампы, которыя онъ отчетливо различаетъ; въ то же время взрослые (сознательно и безсознательно) приходятъ на помощь къ ребенку, говоря, что горятъ *двѣ* лампы, а если одна затушена, что горитъ *одна* лампа. Даютъ ли ребенку два карандаша, или два куска сахара, или вообще два, три сходныхъ предмета—процессъ ощущеній и мыслей ребенка тотъ же самый. Такъ какъ это повторяется каждый день, то очень скоро ребенокъ научается отвѣчать на вопросъ «сколько»—одинъ (или одна), два (или двѣ), много; скоро онъ и самъ начинаетъ ставить вопросъ «сколько» *). Къ концу третьяго года жизни ребенокъ уже вполнѣ сознательно говоритъ: «вотъ два (иногда даже три) карандаша, два яблока, двѣ конфекты, одна, двѣ кошечки»—значитъ онъ уже овладѣлъ числомъ одинъ и два (а можетъ быть и три). Представленіе о числахъ три, четыре и т. д., развивается у ребенка позднѣе. Въ среднемъ, къ шестому году у нормально развивающагося ребенка имѣются уже достаточно ясныя числовыя представленія до 10—достаточно ясныя въ томъ смыслѣ, что онъ вѣрно называетъ въ этихъ предѣлахъ число предметовъ, лежащихъ передъ нимъ, можетъ составить требуемое число предметовъ, напримѣръ, прине-

*) Иногда ребята этимъ вопросомъ, слишкомъ часто повторяемымъ, успѣваютъ порядочно надоѣсть окружающимъ.

сти по требованію 7 спичекъ, можетъ отогнуть требуемое число пальцевъ и т. д.

Въ заключеніе укажемъ на одно наблюденіе, сдѣланое авторомъ по отношенію къ числовому воспріятію одного двухлѣтняго мальчика. Мать дала ему трехкопеечную монету и сказала: «вотъ тебѣ *три* копейки, поди съ няней и купи себѣ что-нибудь»; ребенокъ взялъ монету и съ большимъ недоумѣніемъ спросилъ: «а гдѣ *три*?» Этимъ вопросомъ мальчикъ показалъ, что онъ инстинктивно связывалъ со словомъ «*три*» представленіе о *нѣсколькихъ* предметахъ.

Итакъ къ трехлѣтнему возрасту ребенокъ умѣетъ уже относиться количественно къ міру явленій; онъ различаетъ большіе и маленькіе предметы, знаетъ числа одинъ и два (а, можетъ, быть и три), знакомъ съ понятіями *много, больше и меньше*, умѣетъ произносить названіе нѣкоторыхъ числительныхъ (иногда въ довольно большомъ количествѣ). На эти знанія и должна опираться мать, первая учительница своего ребенка, при дальнѣйшемъ развитіи его ариѳметическихъ познаній *).

§ 9а. **О развитіи понятія о числѣ.** Въ предыдущемъ §-ѣ мы выяснили въ общихъ чертахъ, какъ у малыхъ дѣтей развиваются количественныя и числовыя представленія. Въ этомъ вопросѣ различные методисты далеко не согласны

---

*) Авторъ не ручается за абсолютную достовѣрность нарисованной въ этомъ §-ѣ картины развитія числовыхъ представленій у ребенка. Вотъ что говоритъ по этому вопросу проф. Мейманъ: ,,Какъ именно совершается у ребенка процессъ пріобрѣтенія представленій объ опредѣленной множественной,—по этому вопросу мы могли бы высказывать только предположенія. Но логическія построенія всего менѣе умѣстны въ психологіи дѣтства, ибо никогда не слѣдуетъ забывать, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ сознаніемъ, качественно отличнымъ отъ сознанія взрослаго человѣка. И въ этомъ пунктѣ отвѣтъ можетъ дать только систематическое изслѣдованіе ребенка, которое представляло бы собою чрезвычайно благодарную задачу" (см. „Лекціи по экспериментальной педагогикѣ" проф. Меймана, ч. III). Содержаніе §-а 9 является результатомъ личныхъ наблюденій, опытовъ и соображеній автора.

другъ съ другомъ. Одни методисты, какъ д-ръ Лай, Беетцъ, Вальземанъ и другіе, склонны думать, что числовыя представленія возникаютъ у ребятъ главнымъ образомъ на почвѣ зрительныхъ впечатлѣній, и поэтому придаютъ особенно важное значеніе созерцанію дѣтьми числовыхъ фигуръ (см. § 2). Другіе же методисты, какъ Книллингъ, Танкъ и многіе русскіе методисты, придаютъ главное значеніе въ дѣлѣ развитія числовыхъ представленій *счету*, т.-е. послѣдовательности впечатлѣній не въ пространствѣ, а во времени: дѣйствительно, считая, мы постепенно къ одному предмету сосчитываемой совокупности присоединяемъ другой, третій предметы и т. д., т.-е. всѣ предметы совокупности располагаются для насъ не въ видѣ пространственной фигуры, а въ видѣ временной послѣдовательности. Сторонники счета совершенно отвергаютъ числовыя фигуры въ дѣлѣ развитія числовыхъ представленій.

Какъ справедливо замѣчаетъ въ своихъ «Лекціяхъ по экспериментальной педагогикѣ» проф. Мейманъ, «оба метода односторонни и должны дополнять другъ друга. Методъ числовыхъ образовъ односторонне подчеркиваетъ зрительно наглядные пространственные моменты числового представленія, основой его служитъ одновременное схватываніе множественности пространственныхъ объектовъ. Методъ сосчитыванья такъ же односторонне подчеркиваетъ временные моменты числового представленія, и основой его является множественность временныхъ процессовъ или повтореніе одного и того же процесса во времени».

Нѣтъ сомнѣнія, что въ развитіи числовыхъ представленій играютъ приблизительно одинаковую роль, какъ послѣдовательность предметовъ въ пространствѣ, такъ и послѣдовательность ихъ во времени. Разсматривая, напримѣръ, небольшую группу предметовъ, ребенокъ получаетъ чисто пространственныя впечатлѣнія, но если тотъ же ребенокъ видитъ, напримѣръ, одинъ мячъ и припоминаетъ, что у него есть еще мячъ, или считаетъ свои шаги, то здѣсь мы имѣемъ дѣло съ послѣдовательностью во времени.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ дѣлѣ многое зависитъ отъ индивидуальности ребенка. Если ребенокъ отъ природы склоненъ къ зрительной памяти, то для него главную роль будутъ играть при развитіи числовыхъ представленій зрительныя впечатлѣнія; ребенокъ же моторнослухового типа, то-есть склонный къ памяти, основывающейся на осязательныхъ и слуховыхъ впечатлѣніяхъ, отдастъ предпочтеніе счету. Во всякомъ случаѣ, чѣмъ полнѣе будутъ комбинированы различныя впечатлѣнія для развитія ариѳметическихъ познаній, тѣмъ лучше.

§ 10. **Опредѣленіе числа.** Если мы называемъ опредѣленное число предметовъ, то мы при этомъ принимаемъ, что каждый отдѣльный предметъ разсматриваемой совокупности существуетъ для нашего сознанія, какъ нѣчто обособленное отъ другихъ предметовъ той же совокупности; кромѣ этого мы соединяемъ всѣ эти отдѣльно для насъ существующіе объекты въ одно цѣлое—число.

Такимъ образомъ понятіе о числѣ имѣетъ въ своей основѣ понятіе о единицѣ: еще Эвклидъ за 3 вѣка до Р. Х. опредѣлялъ *число*, какъ *совокупность единицъ*. Мы будемъ называть единицей все существующее для насъ и выдѣленное въ нашемъ сознаніи отъ другого существующаго. Сосуществованіе нѣсколькихъ единицъ даетъ начало числу. Отсюда получается опредѣленіе числа, данное д-ромъ Лаемъ въ его «Руководствѣ къ первоначальному обученію ариѳметикѣ:» «*Опредѣленное число есть представленіе опредѣленнаго сосуществованія или опредѣленной послѣдовательности*».

Большая доля истины заключается въ опредѣленіи, которое Гоббсъ даетъ числу: «число есть 1 и 1, или 1, 1 и 1

и т. д.: это равносильно тому, какъ если бы мы сказали: число—это единицы».

И дѣйствительно для ребенка, напримѣръ, *двѣ* собачки представляютъ прежде всего собачку и еще собачку. На эту сторону вопроса указываетъ также и знаменитый философъ Кантъ, говоря, что «число обнимаетъ послѣдовательное прибавленіе единицы къ единицѣ». Кантъ даетъ слѣдующее опредѣленіе числа: «*число есть не что иное, какъ единство синтеза разнородностей одного однороднаго наблюденія*». Это опредѣленіе слѣдуетъ понимать такъ: когда мы воспринимаемъ группу какихъ-нибудь предметовъ численно, то мы имѣемъ дѣло съ разнородностями, ибо отдѣльные предметы группы могутъ отличаться другъ отъ друга; но эти разнородности мы воспринимаемъ (при численномъ наблюденіи) при помощи однороднаго *) наблюденія, а сочетаніе или синтезъ воспринятыхъ такимъ образомъ разнородностей даетъ число.

Различные философы и математики въ различныя времена давали различныя опредѣленія числа. Такъ, Стенли Дживенсъ считаетъ, что «число представляетъ собою только другое названіе *разнородности*. Абсолютная однородность есть единица, разнородности же порождаютъ множество». Джонъ Стюартъ Миль считаетъ число «физическимъ актомъ, зрительнымъ и ощущаемымъ явленіемъ».

Любопытно мнѣніе Гуссерля, который полагаетъ, что понятіе о числѣ принадлежитъ къ такимъ понятіямъ, которыя не поддаются точному опредѣленію; такія понятія слѣдуетъ скорѣе описывать, т.-е. «указать на тѣ конкретныя явленія, изъ которыхъ или на основаніи которыхъ выведены эти понятія» **).

Слѣдуетъ замѣтить, что большинство методистовъ въ своихъ руководствахъ методики ариѳметики почти совсѣмъ

---

*) Т.-е. численнаго или количественнаго.

**) Husserl „Philosophie der Arithmetik" (1891).

или совсѣмъ не касаются вопроса о возникновеніи численныхъ представленій у дѣтей и опредѣленія числа. Д-ръ Лай считаетъ подобное положеніе вопроса весьма печальнымъ и полагаетъ, что преподаваніе ариѳметики можетъ быть поставлено раціонально лишь въ томъ случаѣ, если предварительно будутъ установлены опредѣленіе числа и развитіе числовыхъ представленій у дѣтей. Выясненію этихъ вопросовъ д-ръ Лай удѣляетъ большую часть своего «Руководства къ первоначальному обученію ариѳметикѣ.» Нѣтъ сомнѣнія, что знаніе законовъ развитія числовыхъ представленій у дѣтей должно оказать существенную помощь педагогу, если онъ желаетъ естественнымъ образомъ *продолжить* развитіе численныхъ знаній ребенка.

Въ заключеніе приводимъ весьма любопытный и въ общемъ правильный взглядъ Песталоцци на возникновеніе у ребенка числовыхъ представленій. Вотъ что говоритъ Песталоцци: «Когда мать такимъ образомъ выучитъ ребенка узнавать количества бобовъ, камешковъ, являющихся какъ одинъ, два, три и т. д., выучитъ называть данную группу предметовъ, то слова: *одинъ, два, три* остаются постоянно неизмѣнными въ умѣ; слова же: бобъ, камешекъ и т. п. мѣняются постоянно съ перемѣной названія предметовъ; при этомъ остающееся постояннымъ названіе числа выдѣляется отъ постоянно мѣняющагося названія предмета. Въ умѣ ребенка создается отвлеченное понятіе *число*, устанавливается сознаніе опредѣленнаго отношенія *большаго* къ *меньшему*, независимо отъ рода предметовъ, являющихся передъ глазами ребенка въ большемъ или меньшемъ числѣ». Замѣтимъ, наконецъ, что по Песталлоцци число является однимъ изъ элементовъ *созерцанія*; созерцаніе по Песталоцци разлагается на слѣдующіе три элемента: число, форму и слово; числомъ, формой и словомъ мы выражаемъ наше отношеніе къ внѣшнему міру. Это мнѣніе Песталоцци глубоко справедливо.

Итакъ Песталоцци близокъ къ сторонникамъ зрительной теоріи возникновенія числовыхъ представленій.

§ 11. **Распредѣленіе учебнаго матеріала.** Въ старину обученіе ребятъ ариѳметикѣ начинали съ того, что заставляли ихъ наизусть считать: *одинъ, два, три* и т. д., доходя такимъ образомъ до очень большихъ чиселъ. Затѣмъ излагались правила различныхъ ариѳметическихъ дѣйствій, а при практическомъ примѣненіи этихъ правилъ старались производить дѣйствія надъ возможно большими числами. При такомъ способѣ обученія ариѳметика давалась очень трудно учащимся, и скука за уроками ариѳметики царила непомѣрная. Между тѣмъ по самому существу своему ариѳметическій матеріалъ нуждается въ подраздѣленіи на ступени постепенно возрастающей трудности: переходя съ одной ступени на другую слѣдуетъ постепенно вводить учащихся въ міръ чиселъ.

Чтобъ выяснить, какимъ образомъ учебный матеріалъ ариѳметики можетъ быть подраздѣленъ на ступени, разсмотримъ нѣкоторыя дѣйствія надъ многозначными числами.

Примѣръ 1-й. Разсмотримъ сложеніе чиселъ 2345 и 1423.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}2345\\1423\end{array}\\ \hline 3768\end{array}$$

Ясно, что мы производили здѣсь сложеніе лишь однозначныхъ чиселъ (5+3, 4+2 и т. д.): для того, чтобы имѣть возможность выполнить сложеніе многозначныхъ чиселъ, нужно, слѣдовательно, знать наизусть результаты сложеній однозначныхъ чиселъ.

Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ каждая сумма однозначныхъ чиселъ была меньше десяти. Но возможны, конечно, случаи, когда эти суммы будутъ больше десяти; такія суммы получатся, напримѣръ, при сложеніи чиселъ 5483 и 2578 ($3+8=11>10$, $8+7=15>10$). Наибольшая величина суммы двухъ однозначныхъ чиселъ равна 18=9+9; сумма не выходитъ за предѣлы первыхъ двухъ десятковъ.

Примѣръ 2-й. Разсмотримъ умноженіе чиселъ 379 и 29.

$$\begin{array}{r} 379 \\ +\ \ 29 \\ \hline 3411 \\ 758 \\ \hline 10991 \end{array}$$

И въ этомъ случаѣ выполненіе дѣйствія свелось къ дѣйствію надъ однозначными числами; но результаты этихъ отдѣльныхъ умноженій выходятъ за предѣлы первыхъ двухъ десятковъ (9×9=81). Впрочемъ, результаты, остаются въ предѣлахъ первой сотни, т.-е. не превышаютъ ста. Изъ приведенныхъ примѣровъ выясняется возможность слѣдующаго подраздѣленія учебнаго матеріала ариѳметики: 1) счетъ и 4 дѣйствія въ предѣлахъ отъ 1 до 10, 2) то же самое въ предѣлахъ отъ 1 до 20, 3) то же самое въ предѣлахъ отъ 1 до 100, 4) то же самое въ предѣлахъ чиселъ любой величины. Это подраздѣленіе подкрѣпляется слѣдующими соображеніями, изложенными въ § 12.

§ 12. **Обоснованіе ступеней.** При обученіи счету и дѣйствіямъ отъ 1 до 10 учащемуся не приходится имѣть дѣла съ десятичной группировкой числа: десятокъ, какъ счетная единица, отсутствуетъ. Числа въ этихъ предѣлахъ довольно легко представить себѣ наглядно, въ особенности, если прибѣгнуть къ размѣщенію единицъ въ какую-нибудь геометрическую фигуру (см. рис. № 2).

Дѣйствія надъ этими числами очень просты и легко могутъ быть сведены къ простому счету (и даже къ наглядному созерцанію, см. § 23). При обученіи въ предѣлахъ отъ 1 до 20 существенно новымъ является введеніе десятка, какъ счетной единицы, или десятичная группировка числа: такъ **15=1** дес.+5 един., **20=2** дес. Здѣсь же, при обученіи письменному обозначенію чиселъ, новымъ является ознакомленіе учащагося съ принципомъ помѣстнаго значенія цифръ и съ значеніемъ цифры нуль. При производствѣ такихъ сложеній, какъ 8+7 или 6+7 приходится встрѣчаться впервые съ особымъ способомъ сложенія, заключающимся въ томъ, что сначала первое слагаемое дополняется до 10, а затѣмъ къ 10 присоединяются остальныя единицы второго слагаемаго (8+7=8+2+5=10+5); этотъ пріемъ сложенія встрѣчается потомъ очень часто и является основнымъ пріемомъ.

При производствѣ такихъ вычитаній, какъ 17—14 или 18—12 мы получаемъ уже намеки на отдѣльное вычитаніе единицъ вычитаемаго изъ единицъ уменьшаемаго и десятковъ изъ десятковъ. Такимъ образомъ при переходѣ изъ первой ступени во вторую учащійся долженъ преодолѣть цѣлый рядъ новыхъ для него трудностей, ознакомиться съ цѣлымъ рядомъ особыхъ способовъ дѣйствій, вслѣдствіе чего область чиселъ отъ 1 до 20 должна быть предметомъ особаго изученія, т.-е. составлять особую ступень обученія.

Въ предѣлахъ отъ 1 до 100 учащійся уже въ полной мѣрѣ пользуется десятичной группировкой числа и десяткомъ, какъ счетной единицей, и примѣняетъ всюду эту десятичную группировку для механизма производства ариѳметическихъ дѣйствій. Здѣсь всецѣло развиваются тѣ пріемы дѣйствій, которые въ своемъ зачаткѣ имѣются уже на второй ступени.

До сихъ поръ всѣ дѣйствія надъ числами могли быть производимы въ умѣ, но при переходѣ къ числамъ любой величины выступаетъ на сцену *письменное производство* дѣйствій: это въ особенности справедливо для чиселъ большихъ тысячи. Нѣкоторые методисты считаютъ необходимымъ выдѣлить въ особую ступень область чиселъ, отъ 1 до 1000, какъ переходную между областью чиселъ до 100, гдѣ царитъ производство дѣйствій въ умѣ, и областью чиселъ многозначныхъ, гдѣ необходимо письменное производство дѣйствій. Въ этой послѣдней ступени центромъ изученія является усвоеніе механизма письменнаго производства дѣйствій.

§ 13. **Письменная запись дѣйствій и письменное производство дѣйствій. Умственныя вычисленія.** Слѣдуетъ отличать письменную запись дѣйствій отъ письменнаго производства ихъ. Такъ, если мы пишемъ $5+7=12$, то здѣсь мы произвели дѣйствіе въ умѣ и лишь записали результатъ. Но если, напримѣръ, мы производимъ умноженіе двухъ чиселъ, разсмотрѣнное въ § 11 (примѣръ 2-й, 379×29), то въ этомъ случаѣ мы пользуемся записью числа для облегченія самого выполненія дѣйствія: мы производимъ умноженіе отдѣльныхъ счетныхъ единицъ данныхъ чиселъ и отдѣльныя произведенія для памяти записываемъ; безъ этихъ записей выполненіе умноженія свелось бы къ чистому вычисленію въ умѣ и было бы болѣе труднымъ.

Замѣтимъ, что и не всякое вычисленіе въ умѣ можно назвать умственнымъ вычисленіемъ. Такъ, если нужно умножить 35 на 42, то мы можемъ произвести (при достаточной зрительной памяти) дѣйствіе въ томъ же порядкѣ, какъ и при письменномъ производствѣ дѣйствія, т.-е.

$$\begin{array}{r} \times\ 35 \\ 42 \\ \hline 70 \\ 140 \\ \hline 1470 \end{array}$$

Мы при этомъ мысленно рисуемъ себѣ эту запись, какъ если бы она была записана на бумагѣ или доскѣ. Настоящее вычисленіе въ умѣ будетъ здѣсь слѣдующимъ: беремъ 35 сорокъ разъ, получаемъ 1400, прибавляемъ сюда дважды 35, т.-е. 70, получаемъ 1470.

Рис. 4. Устный счетъ.

Нужно отмѣтить слѣдующее различіе умственнаго вычисленія отъ письменнаго. Письменное производство дѣйствій основывается на готовыхъ правилахъ и схемахъ: самое дѣйствіе выполняется при этомъ чисто механически, не думая. Между тѣмъ, при устномъ производствѣ дѣйствія, мысль все время работаетъ, и отсутствуетъ готовый шаблонъ для механизма дѣйствія. Вотъ нѣкоторые примѣры вычисленія въ умѣ. При умноженіи 498 на 3 мы умножаемъ 500 на 3 (=1500) и изъ полученнаго результата вычитаемъ $2 \times 3 = 6$; произведеніе равно 1494. При сложеніи 574 и 325 мы къ 5 сотнямъ прикладываемъ 3 сотни и къ суммѣ присоединяемъ 99 единицъ, полученныхъ отъ сложенія 74 и 25; окончательный результатъ равенъ 899. При умноженіи 45 на 5, мы умножаемъ 45 на 10 и результатъ (450) дѣлимъ на 2: получаемъ 225.

Письменное вычисленіе есть заученное, шаблонное вычисленіе, а умственное есть своего рода творчество мысли. Въ виду этого слѣдуетъ, въ особенности при началѣ обученія ариѳметикѣ, настаивать на томъ, чтобы дѣти производили вычисленія въ умѣ. Важно еще обратить вниманіе на то, что при производствѣ дѣйствій въ умѣ въ учащемся развивается полезная привычка сосредоточивать свое вниманіе на одномъ какомъ-либо предметѣ; онъ пріучается направлять свои силы такъ, чтобы быстрѣе и вѣрнѣе достигнуть намѣченной цѣли. Мы приводимъ здѣсь снимокъ съ извѣстной картины художника Богданова-Бѣльскаго, изображающей напряженіе и сосредоточенность умственной работы ребятъ при изустныхъ вычисленіяхъ.

§ 14. Историческое примѣчаніе. Песталоцци считалъ неразрывнымъ числовое пространство отъ 1 до 100. Но уже извѣстный нѣмецкій педагогъ Дистервегъ въ 1838 году опредѣленно высказался въ пользу слѣдующихъ ступеней: 1) область чиселъ отъ 1 до 10, 2) отъ 10 до 100, 3) область чиселъ, превышающихъ 100: здѣсь намѣчаются три ступени. За эти же три ступени высказывались въ разное время многіе видные педагоги: нѣмецкіе педагоги Генчель и Грубе

(1842 г.), русскіе педагоги П. С. Гурьевъ (1860), А.И. Гольденбергъ и другіе.

Слѣдуетъ замѣтить, что А. И. Гольденбергъ въ своей методикѣ ариѳметики высказывается лишь за три ступени, но впослѣдствіи онъ измѣнилъ свой взглядъ и призналъ необходимость особой ступени для области чиселъ отъ 1 до 20, см. «Бесѣды по счисленію» А. И. Гольденберга (посмертное изданіе, редактированное Д.Л. Волковскимъ).


Рис. 5. А. И. Гольденбергъ. (1837 — 1902).

Въ настоящее время большинство методистовъ придерживается 4-хъ ступеней, указанныхъ въ § 11; но различные методисты расходятся въ нѣкоторыхъ деталяхъ. Такъ г. Шохоръ-Троцкій рекомендуетъ сначала обучать счету до 20, затѣмъ сложенію и вычитанію въ предѣлахъ отъ 1 до 10 и отъ 10 до 20, затѣмъ умноженію въ предѣлахъ отъ 1 до 20; далѣе идетъ сложеніе, вычитаніе и умноженіе въ предѣлахъ отъ 1 до 100, и лишь послѣ этого слѣдуетъ ознакомленіе съ дѣйствіемъ дѣленія; дѣло заканчивается 4 дѣйствіями надъ многозначными числами (см. «Методика ариѳметики» г. Шохоръ-Троцкаго). Арженниковъ, Егоровъ и многіе другіе предпосылаютъ 2-й ступени (1—20) разсмотрѣніе дѣйствій надъ числами, представляющими круглые десятки, въ предѣлахъ отъ 1 до 100; основаніемъ этого служитъ то, что дѣйствія надъ круглыми десятками суть въ сущности тѣ же дѣйствія надъ однозначными числами (напримѣръ, 50+30=5 дес.+3 дес.=8 дес. *).

ГЛАВА III.

Обученіе счету въ предѣлахъ отъ 1 до 10. Значеніе числовыхъ фигуръ.

§ 15. **Цѣль обученія счету.** Весьма легко, пользуясь широко развитой у дѣтей механической памятью, научить ребенка произносить подъ рядъ въ правильномъ порядкѣ названія числительныхъ: *одинъ, два, три, четыре* и т. д. Но это не значитъ еще научить ребенка счету: слова — *одинъ, два* и т. д. останутся въ представленіи ребенка лишь словами безъ всякой реальной подкладки.

Единственнымъ исключеніемъ явятся лишь числа «одинъ» и «два», ибо ребенокъ къ трехлѣтнему возрасту уже знаетъ и безошибочно отмѣчаетъ одинъ и два предмета. Задача перваго обученія ариѳметикѣ заключается именно въ томъ, чтобы, воспользовавшись имѣющимся уже у ребенка представленіями чиселъ *одинъ* и *два*, сдѣлать ясными и наглядными представленія бóльшихъ чиселъ — *три, четыре* и т. д. до 10.

§ 16. **Наглядныя пособія при обученіи счету.** Итакъ первоначальное обученіе счету заключается въ томъ, чтобы возможно нагляднѣе продемонстрировать передъ ребенкомъ числа отъ 1 до 10. Эта наглядность достижима различными путями. Вотъ какъ, напримѣръ, можно обста-

*) Слѣдуетъ замѣтить, что въ сущности всѣ методисты рекомендуютъ (и это вполнѣ естественно) знакомить дѣтей съ дѣйствіями надъ круглыми десятками передъ изученіемъ дѣйствій въ предѣлахъ чиселъ отъ 1 до 100.

вить наглядное изученіе числа 5 (мы предполагаемъ при этомъ, что числа *до* 5 уже усвоены ребенкомъ путемъ такого же нагляднаго изученія).

Ребенку показываютъ сначала 4 предмета (напримѣръ, 4 орѣха, или 4 яблока, или 4 пальца, или чертятъ 4 черточки) и присоединяя сюда пятый предметъ, говорятъ, что теперь у насъ 5 предметовъ (орѣховъ, яблокъ или черточекъ). Ребенокъ научается такимъ образомъ тому, что 5 есть 4+1. Для того, чтобы воспріятіе числа было возможно болѣе нагляднымъ, чтобы число рѣзче отпечатлѣлось въ умѣ ребенка, полезно располагать изучаемые предметы въ видѣ особыхъ наглядныхъ фигуръ (см. рис. № 6).

Чтобы провѣрить, дѣйствительно ли ребенокъ воспринялъ отчетливо число 5, нужно прежде всего, показывая ребенку разныя количества предметовъ (отъ 1 до 5 включительно), заставлять ребенка

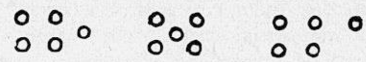


Рис. 6.

называть число показываемыхъ ему предметовъ; но этого недостаточно: нужно, чтобы ребенокъ могъ самъ составлять требуемое число предметовъ (до 5 включительно): напримѣръ, на просьбу принести 5 орѣховъ или показать 5 пальцевъ, ребенокъ долженъ составить кучку изъ пяти орѣховъ, или показать кисть руки со всѣми ея пальцами. Этимъ ребенокъ покажетъ, что онъ знаетъ число 5 и отчетливо отличаетъ его отъ прежнихъ, ему уже извѣстныхъ чиселъ.

Нѣкоторые методисты рекомендуютъ показывать ребенку особыя *картинки* и заставлять его опредѣлять число предметовъ на картинкѣ. Для примѣра мы приводимъ здѣсь страницы картинокъ (см. рис. № 7 и № 8) для изученія числа 5: первая заимствована нами изъ книги: «Наглядный ариѳметическій задачникъ» Н. И. Соколова, а вторая изъ недавно вышедшей книжки Д. Л.

Рис. 8.

Волковскаго: «Дѣтскій міръ въ числахъ». На этихъ картинкахъ ребенку предлагается опредѣлить число точекъ, расположенныхъ въ тѣ или иныя числовыя фигуры, или число людей въ лодкѣ и около лодки, число коровъ и т. д. Польза такихъ картинокъ несомнѣнна, но имъ не слѣдуетъ придавать преувеличеннаго значенія: нѣтъ сомнѣнія, что наиболѣе полезнымъ для ребенка является все же и счетъ созерцаніе реальныхъ предметовъ, имѣющихся у него подъ руками.

§ 17. **Анализъ изучаемаго числа и счетъ.** За нагляднымъ воспріятіемъ числа должно слѣдовать разбиваніе числа на составные элементы: здѣсь важно научить ребенка тому, какъ новое изучаемое число можетъ быть составлено изъ извѣстныхъ уже ему чиселъ (въ случаѣ числа 5, изъ чиселъ 1, 2, 3 и 4). Съ этой цѣлью слѣдуетъ заставлять ребенка разлагать имѣющееся передъ нимъ число предметовъ на группы. Вотъ нѣсколько группировокъ числа 5: 1) 1 и 1 и 1 и 1 и 1, 2) 2 и 2 и 1, 3) 3 и 2, 4) 2 и 3.

Первая изъ этихъ группировокъ представляетъ въ сущности послѣдовательное перебираніе каждой составной единицы числа 5. При этомъ полезно производить это перебираніе единицъ слѣдующимъ образомъ: ребенокъ беретъ первый предметъ группы и говоритъ «одинъ», затѣмъ второй предметъ и говоритъ «два» и т. д. Этотъ процессъ является настоящимъ процессомъ счета, ибо здѣсь устанавливается соотвѣтствіе между предметами группы и членами натуральнаго ряда чиселъ (см. § 2).

Третья группировка показываетъ ребенку, что число 5 можетъ быть получено изъ извѣстныхъ уже ему чиселъ 3 и 2: для болѣе нагляднаго пониманія этого могутъ быть полезны числовыя фигуры, въ родѣ, напримѣръ, указанныхъ на первой строчкѣ рис. № 8, а также картинки: такъ, изъ первой картинки странички изъ «Дѣтскаго міра въ числахъ» Д. Л. Волковскаго ребенокъ можетъ усмо-

Число 5.
Воспріятіе числа.

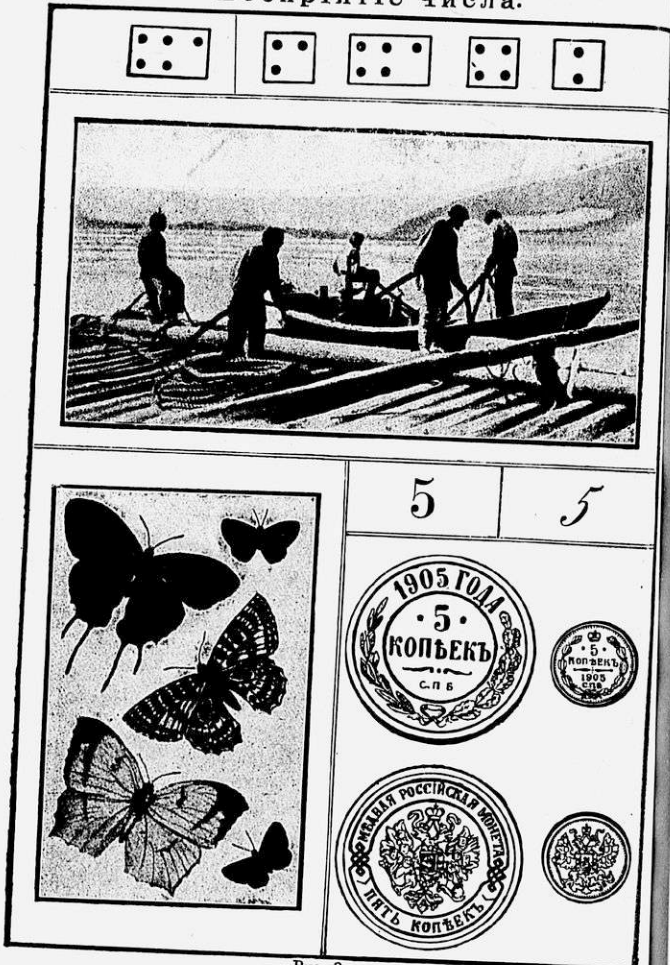


Рис. 8.

трѣть, что всѣхъ крестьянъ 5, изъ нихъ 2 въ лодкѣ и 3 на плоту.

§ 18. **Результаты нагляднаго изученія чиселъ. Понятія больше и меньше.** Изучая всѣ числа перваго десятка, какъ указано въ §§ 16 и 17, мы внушимъ ребенку слѣдующія познанія:

1) Ребенокъ будетъ связывать съ каждымъ числомъ извѣстный наглядный образъ—или въ видѣ числовой фигуры, или въ видѣ какой-нибудь совокупности предметовъ*).

2) Ребенокъ будетъ ясно представлять послѣдовательность чиселъ, ибо онъ знаетъ, что, напримѣръ, число 5 получается изъ числа 4 прибавленіемъ къ нему одной единицы, или число 8 изъ числа 7 прибавленіемъ къ числу 7 одной единицы и т. д.

3) Ребенокъ сумѣетъ набирать каждое число отдѣльными единицами или группами единицъ (напримѣръ, 5 изъ 3 и 2).

4) Ребенокъ научится счету въ собственномъ смыслѣ (см. § 2).

Если, кромѣ того, воспользоваться тѣмъ, что ребенокъ даже на второмъ и особенно третьемъ году жизни имѣетъ количественное представленіе о предметахъ, что онъ уже отличаетъ въ этомъ возрастѣ большой предметъ отъ маленькаго, то можно вызвать въ сознаніи ребенка ясное представленіе о томъ, что, напримѣръ, 5 орѣховъ составляютъ *больше*, чѣмъ 3 орѣха, или что 4 орѣха *меньше*, чѣмъ 7 орѣховъ. Зная же, что 7 орѣховъ получается изъ 4 и 3 орѣховъ, ребенокъ безъ особаго труда пойметъ, что 7 орѣховъ составляютъ 4 и *еще* 3 орѣха, или что 7 орѣховъ на 3 орѣха больше, чѣмъ 4 орѣха.

§ 19. **О наглядномъ воспріятіи числа. Опыты доктора Лая.** Въ предыдущихъ §§ мы указывали на то, что нужно

---

*) Напримѣръ, кисть руки, или вѣнчикъ цвѣтка и т. д.

числовыя представленія ребенка сдѣлать реально-наглядными. Если рѣчь идетъ сб одномъ, двухъ и даже трехъ предметахъ, то нѣтъ никакого сомнѣнія, что, посмотрѣвши на такія группы предметовъ, легко *сразу* указать, *сколько* въ данной группѣ отдѣльныхъ предметовъ. При этомъ нѣтъ надобности производить счетъ, то-есть перебирать послѣдовательно отдѣльныя единицы группы съ произнесеніемъ названій числительныхън атуральнаго ряда чиселъ.

Но возможность воспринимать наглядно (безъ счета) группу предметовъ въ числѣ, большемъ трехъ, можетъ вызвать сомнѣнія. Если показать даже взрослому человѣку, напримѣръ, 7 кружковъ на доскѣ, начерченныхъ рядомъ, какъ показано на рис. № 9, и попросить его однимъ взглядомъ, не считая, указать число кружковъ, то очень возможно, что онъ назоветъ число предметовъ ошибочно. Въ этомъ отношеніи интересны опыты д-ра Лая, описанныя имъ въ его «Руководствѣ къ первоначальному обученію ариѳметикѣ».

Лай выставлялъ передъ большимъ числомъ наблюдателей (около 40) рядъ шаровъ на очень непродолжитель-

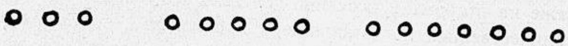
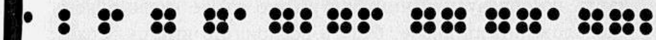


Рис. 9.

ное время (около $1/2$ секунды): этого времени было слишкомъ недостаточно, чтобы успѣть при помощи послѣдовательнаго перебиранія единицъ *сосчитать* число шаровъ. Затѣмъ Лай заставлялъ называть число наблюденныхъ шаровъ. При этомъ шары выставлялись передъ зрителями двумя существенно различными способами: 1) въ видѣ настоящихъ *рядовъ* шаровъ—см. рис. № 9, 2) въ видѣ *числовыхъ фигуръ*—см., напримѣръ, рисунокъ № 10, на которомъ изображены такъ-называемыя Лаевскія числовыя фигуры.

Чтобы испытать, возможно ли непосредственное (то-есть безъ счета) правильное воспріятіе числа, Лай опредѣлялъ число правильныхъ и ошибочныхъ отвѣтовъ всѣхъ наблюденій. И вотъ оказалось, что, если шары расположены въ рядъ, то невозможно уже непосредственно воспринять безъ ошибокъ число предметовъ, большее, чѣмъ



2 3 4 5 6 7 8 9 10

Рис. 10.

три: три является предѣломъ нагляднаго воспріятія числа. Если же шары были расположены въ видѣ числовой фигуры, то возможно было воспринимать непосредственнымъ созерцаніемъ, то-есть безъ счета, даже группу въ 12 предметовъ. Эти 12 предметовъ были расположены въ видѣ слѣдующей фигуры (см. рис. № 11).

Мы вполнѣ соглашаемся съ д-ромъ Лаемъ, что расположеніе чиселъ въ числовыя фигуры должно облегчить зрительное (непосредственное) воспріятіе числа. Мы склонны даже выйти за предѣлы числа 12: въ самомъ дѣлѣ, посмотрѣвши, напримѣръ, на фигуру, изображенную на

Рис. 11.

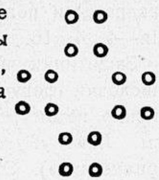


Рис. 12.

рисункѣ № 12, читатель сразу скажетъ, что здѣсь 16 шаровъ. Но мы не можемъ согласиться съ утвержденіемъ д-ра Лая, будто при восприниманіи числовыхъ фигуръ происходитъ чистое воспріятіе числа. Дѣло въ томъ, что здѣсь большую роль играетъ самая *форма* числовой фигуры: наблюдатель воспринимаетъ не только число, какъ совокупность шаровъ, но и внѣшній (геометрическій) видъ фигуры. Внѣшняя форма фигуры имѣетъ настолько большое значенiе, что, привыкши къ фигурамъ одной формы, мы будемъ легче воспринимать числа предметовъ, разгруппированныхъ именно въ эти фигуры, чѣмъ тѣ же числа предметовъ, разгрупированныхъ иначе. Такъ, любители игры въ карты прекрасно схватываютъ число очковъ картъ по образуемой ими фигурѣ, но то же число очковъ, расположенныхъ иначе, будетъ воспринято ими съ гораздо большимъ трудомъ *). Интересно то, что мы можемъ опредѣлить число очковъ карты даже тогда, когда не видимъ еще всей карты, а лишь какую-нибудь часть ея—это ясно указываетъ на то, что здѣсь воспринимается вовсе не число (такъ какъ всего числа и не видно), а лишь форма (фигура). Въ такихъ случаяхъ фигура играетъ почти такую же роль, какъ и цифра, являющаяся символомъ числа.

Возвращаясь къ рисунку № 12, мы должны признать, что здѣсь воспринимается не чистое число 16, а 1) форма фигуры, 2) число 4: наблюдатель видитъ число 4 (четыре квадрата) и получаетъ затѣмъ число 16 путемъ умноженiя—4 . 4=16.

Защитники числовыхъ фигуръ указываютъ на то, что «числовая фигура не можетъ искажать понятiя числа именно потому, что распредѣленiе единицъ безразлично» (см. Лай: «Руководство къ первоначальному обученiю ариѳметики»). Эту защиту числовыхъ фигуръ слѣдуетъ признать совершенно несостоятельной: если дѣйствительно распредѣленiе единицъ безразлично, то почему же сторонники числовыхъ фигуръ настаиваютъ на *опредѣленныхъ* фигурахъ и возстаютъ противъ числовыхъ фигуръ другой формы. Мы приводимъ здѣсь нѣсколько рисунковъ числовыхъ фигуръ (см. рис. № 13), какъ ихъ предлагали въ различныя времена различные педагоги, начиная съ

*) Особенно, если рѣчь идетъ о достаточно большихъ числахъ (7, 8 или 9).

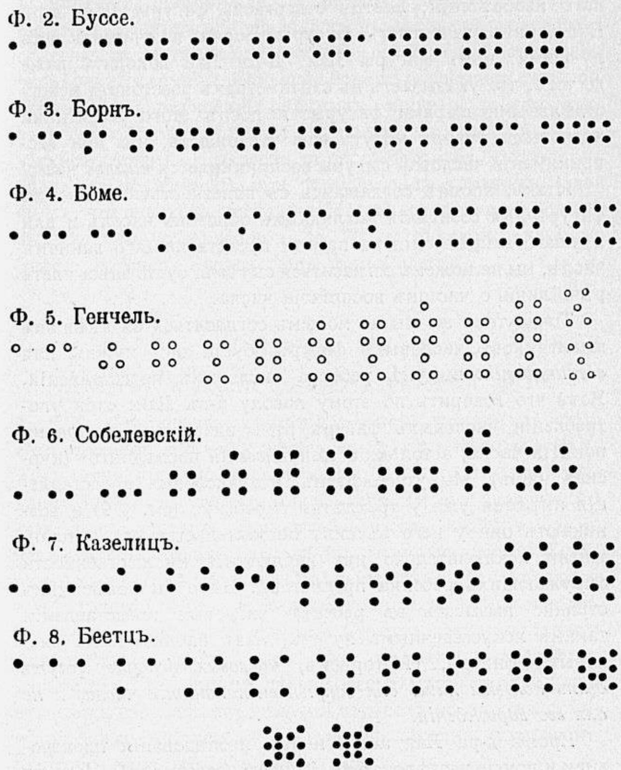


Рис. 13.

XVIII столѣтiя) когда фигуры были примѣнены впервые *). Д-ръ Лай отвергаетъ всѣ фигуры, кромѣ фигуръ собствен-

*) Ихъ примѣнилъ на практикѣ впервые Буссе (1797 г.).

наго изобрѣтенія, Беетцъ отвергаетъ фигуры Лая, д-ръ Вальземанъ защищаетъ фигуры Борна и считаетъ ихъ лучшими, чѣмъ фигуры Лая. Д-ръ Лай доходитъ даже до того, что указываетъ въ сантиметрахъ разстоянія между отдѣльными шарами фигуры: и послѣ этого защитники числовыхъ фигуръ могутъ еще утверждать, что при восприниманіи числовой фигуры воспринимается *чистое число*!

Итакъ, вполнѣ соглашаясь съ полезностью числовыхъ фигуръ для созиданія наглядныхъ образовъ чиселъ и для лучшаго закрѣпленія въ памяти представленія о данномъ числѣ, мы не можемъ согласиться съ тѣмъ, будто здѣсь идетъ рѣчь лишь о чистомъ воспріятіи числа.

Точно такъ же мы не можемъ согласиться съ мнѣніемъ защитниковъ числовыхъ фигуръ, будто онѣ нужны для *возникновенія* въ умѣ ребенка числовыхъ представленій. Вотъ что говоритъ по этому поводу д-ръ Лай: «при употребленіи числовыхъ фигуръ рѣчь идетъ не о готовомъ понятіи числа, а только о *возникновеніи* послѣдняго» (курсивъ нашъ). Мы утверждаемъ, что числовыя представленія имѣются уже у трехлѣтняго ребенка (см. § 9), и возникаютъ они у него въ силу обстоятельствъ его дѣтской жизни исключительно изъ наблюденія множественности окружающихъ ребенка предметовъ. Было бы болѣе чѣмъ странно вызывать въ ребенкѣ числовыя представленія такимъ искусственнымъ путемъ, какъ наблюденіемъ числовыхъ фигуръ. Повторяемъ, *числовыя фигуры могутъ быть полезны лишь для закрѣпленія понятія числа, а не для его зарожденія*.

Кромѣ д-ра Лая аналогичныя изслѣдованія производили и другіе изслѣдователи. Таковы изслѣдованія Каттеля въ психологическомъ институтѣ Вундта (1886 г.), изслѣдованія (тамъ же) Дитце (1885 г.), работы Уоррена (1898 г.), опыты Елены Нану (1904 г.). Всѣ эти работы доказываютъ что числовое восприниманіе зрительныхъ и слуховыхъ

впечатлѣній (напримѣръ, опредѣленіе безъ счета числа видимыхъ единицъ или числа ударовъ на слухъ) значительно облегчается группировкой этихъ впечатлѣній въ рѣзко раздѣленныя группы. Большую помощь оказываетъ съ одной стороны распредѣленіе видимыхъ единицъ въ фигуры, а съ другой, распредѣленіе слуховыхъ впечатлѣній въ извѣстномъ ритмѣ. Интересно то обстоятельство, что, напримѣръ, проф. Мейманъ при помощи ряда упражненій добился, что онъ могъ сразу (безъ счета) воспринимать числовыя *группы*, содержавшія до 80 отдѣльныхъ единицъ. Здѣсь, конечно, играла роль форма фигуры.

ГЛАВА IV.

Дѣйствія и задачи въ предѣлахъ отъ 1 до 10.

§ 20. **Опредѣленіе дѣйствій.** Ариѳметическое дѣйствіе есть *процессъ полученія новаго числа изъ данныхъ чиселъ*. Такъ, если мы складываемъ числа 5, 15 и 4, то мы получаемъ изъ этихъ чиселъ новое число 24; это новое число *связано* съ данными тѣмъ требованіемъ, чтобы въ немъ заключалось столько же единицъ, сколько ихъ имѣется во всѣхъ данныхъ числахъ. Отдѣльныя дѣйствія отличаются другъ отъ друга именно *характеромъ связи* между новымъ искомымъ числомъ и данными, то-есть функціональною зависимостью новаго числа отъ данныхъ. Опредѣлить данное дѣйствіе значитъ указать зависимость новаго числа отъ данныхъ. Вотъ опредѣленія четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами (курсивомъ отмѣченъ характеръ зависимости):

1) *Сложеніе*. Сложить нѣсколько чиселъ значитъ изъ данныхъ чиселъ составить такое новое число, *которое заключало бы въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ имѣется во всѣхъ данныхъ числахъ*.

2) *Умноженіе*. Умножить число *a* на другое число *b* значитъ составить такое новое число, *которое равнялось бы суммѣ b слагаемыхъ, равныхъ въ отдѣльности a*.

3) *Вычитаніе*. Вычесть изъ одного числа другое значитъ найти такое число, *которое, будучи прибавлено ко второму числу, дало бы въ суммѣ первое число*.

4) *Дѣленіе*. Раздѣлить одно число на другое, значитъ найти такое новое число, *которое при умноженіи на второе число дастъ въ произведеніи первое число*.

§ 21. **Развитіе понятія о дѣйствіи при помощи задачъ. Задачи и примѣры. Метода цѣлесообразныхъ задачъ.** Каждое ариѳметическое дѣйствіе имѣетъ опредѣленную цѣль; цѣль эта заключается въ нахожденіи нѣкотораго новаго числа, связаннаго съ данными числами опредѣленной функціональною зависимостью. Но какъ же *установить* характеръ этой зависимости, отъ которой зависитъ и самый смыслъ дѣйствія? Въ этомъ отношеніи слѣдуетъ строго различать помѣщаемыя въ задачникахъ *задачи* отъ такъ-называемыхъ *примѣровъ*. Въ примѣрахъ (напримѣръ, $3+5=?$) характеръ зависимости новаго числа отъ данныхъ уже указанъ знакомъ дѣйствія (+), и дѣло сводится лишь къ *выполненію* дѣйствія. Въ задачахъ же учащійся долженъ самъ намѣтить дѣйствія, которыя нужно выполнить для отысканія искомаго задачи. Если задача рѣшается нѣсколькими дѣйствіями, то въ каждомъ изъ этихъ дѣйствій мы имѣемъ дѣло съ данными числами и искомымъ, и дѣло рѣшающаго задачу установить, какое именно нужно выполнить дѣйствіе, то-есть какова именно функціональная зависимость искомаго числа и данныхъ.

Въ случаѣ примѣра мы лишь чисто механически производимъ извѣстное дѣйствіе; въ случаѣ же задачи мы должны прежде всего ясно представлять себѣ цѣль дѣйствія, ибо эта цѣль опредѣляетъ характеръ зависимости искомаго числа отъ данныхъ. Ясно, что *дѣйствіе слѣдуетъ*

считать изученнымъ дѣтьми лишь въ томъ случаѣ, если они прежде всего знаютъ цѣль дѣйствія, и затѣмъ умѣютъ его выполнить. Но цѣль дѣйствія можетъ быть выяснена лишь при рѣшеніи задачи (а не примѣра).

Вотъ почему, желая ознакомить ребенка съ дѣйствіями, мы должны приступить къ дѣлу съ рѣшенія задачъ и притомъ задачъ, доступныхъ дѣтскому пониманію: темой задачи должны быть событія повседневной жизни ребенка, доступныя его кругозору. Вотъ что говоритъ по этому поводу извѣстный русскій методистъ г. Шохоръ-Троцкій: «Прежде чѣмъ учить дѣтей *производству* ариѳметическихъ дѣйствій, должно уяснить самую *необходимость* дѣйствій и ихъ право *на существованіе, ихъ цѣль и внутренній смыслъ*» (см. «Методика Ариѳметики» г. Шохоръ-Троцкаго).

Итакъ слѣдуетъ научать ребенка дѣйствіямъ при помощи рѣшенія простыхъ задачъ. Эта метода обученія названа г. Шохоръ-Троцкимъ *методой цѣлесообразныхъ задачъ* *).

§ 22. **Примѣрныя задачи для усвоенія понятія о дѣйствіяхъ.**

I. *Сложеніе*. 1) Папа далъ тебѣ 3 яблока, а мама дала еще 2 яблока—сколько у тебя всего яблокъ?

2) У меня четыре орѣха; раньше у меня было *больше*, потому что я два орѣха съѣлъ. Сколько же у меня было орѣховъ?

3) Тебѣ дали 5 сливъ, а твоей сестрѣ дали *больше;* она получила еще 2 сливы (на 2 сливы больше); сколько же сливъ получила твоя сестра?

Послѣднія двѣ задачи весьма полезны для развитія понятія «больше на нѣсколько единицъ».

---

*) Вотъ что говоритъ по этому вопросу г. Шохоръ-Троцкій: „Метода эта названа методой *цѣлесообразныхъ задачъ*, потому что для каждой ступени, для преодолѣнія каждой трудности, надо предлагать ученикамъ не какія попало задачи, а задачи, сообразованныя съ исключительною цѣлью предстоящаго урока“.

II. *Вычитаніе*. 1) Мнѣ дали 6 яблокъ; теперь у меня меньше яблокъ, такъ какъ я 2 яблока съѣлъ; сколько же у меня теперь осталось яблокъ?

2) Тебѣ папа далъ 5 солдатиковъ, а твоему брату онъ далъ меньше: ты получилъ лишнихъ 2 солдатика; значитъ твой братъ получилъ на 2 солдатика меньше. Сколько же солдатиковъ получилъ твой братъ?

3) Сестра говоритъ брату: «у тебя 3 конфеты, а у меня 5 конфетъ—у меня больше». Сколько же лишнихъ конфетъ у сестры или на сколько конфетъ у сестры больше?

Въ связи съ изученіемъ дѣйствія сложенія и вычитанія важно усвоить понятія: «больше и меньше на нѣсколько единицъ».

III. *Умноженіе*. 1) Мама давала Колѣ каждый день по 2 сливы; и вотъ Коля, желая набрать побольше сливъ, не ѣлъ ихъ, а собиралъ цѣлыхъ 4 дня. Сколько же всего сливъ набралъ Коля?

2) Мальчикъ зашелъ въ лавку и купилъ тамъ трехъ деревянныхъ солдатиковъ; за каждаго солдатика пришлось заплатить по 2 коп. Сколько же всего копеекъ заплочено за солдатиковъ?

3) Кошка таскала изъ курятника цыплятъ, и каждый день она уносила по 2 цыпленка. Черезъ 3 дня въ курятникѣ не осталось ни одного цыпленка. Сколько же *разъ* кошка таскала цыплятъ, и сколько было всѣхъ цыплятъ?

4) Мама дала твоему маленькому брату одну пару сливъ, а тебѣ она дала пару сливъ 3 раза: значитъ ты получилъ въ 3 раза больше сливъ; сколько же у тебя сливъ?

Въ связи съ изученіемъ умноженія важно ознакомить ребенка съ новымъ для него понятіемъ: «больше въ нѣсколько разъ».

IV. *Дѣленіе*. 1) Папа далъ своимъ тремъ сыновьямъ Колѣ, Митѣ и Мишѣ 6 сливъ и сказалъ, чтобы они раздѣлились по братски поровну, чтобы никто не получилъ больше другого. Сколько же сливъ получилъ каждый?

2) Мама дала Колѣ 8 коп. и сказала ему, чтобы онъ роздалъ эти деньги нищимъ и чтобы каждый получилъ по 2 коп. Сколько нищихъ получатъ деньги?

3) Коля получилъ въ подарокъ десять яблокъ и рѣшилъ ихъ постепенно съѣсть по 2 яблока въ день. Во сколько дней Коля съѣстъ свои яблоки?

4) Мама дала Колѣ одинъ разъ 2 орѣха; а Колиной сестрѣ Манѣ она давала много разъ по 2 орѣха—и вотъ Маня получила всего 8 орѣховъ. Сколько же разъ Маня получила по 2 орѣха, или во сколько разъ у Мани больше орѣховъ, чѣмъ у Коли.

§ 23. **Механизмъ выполненія дѣйствій. Роль числовыхъ фигуръ.** Въ связи съ рѣшеніемъ задачъ на различныя дѣйствія является вопросъ, какъ научить дѣтей получать результаты дѣйствій (напримѣръ, какъ научить тому, что $5+3=8$, или что $7-4=3$) и какъ помочь ребенку, если онъ затрудняется въ полученіи результата. Замѣтимъ по этому поводу, что прежде всего трудъ ребенка должно облегчить то обстоятельство, что онъ уже занимался при ознакомленіи съ числами разложеніемъ ихъ на группы (см. § 17): такъ, результатъ сложенія 5 и 3 онъ можетъ получить, исходя изъ того, что при ознакомленіи съ числомъ 8, онъ разлагалъ 8 на слагаемыя 5 и 3.

Но, если это разложеніе и забыто, то ребенку всегда можно помочь, если заставить его взять, напримѣръ, 5 кубиковъ и 3 кубика, сложить ихъ вмѣстѣ и *сосчитать*, сколько всего получится кубиковъ. Но это послѣднее средство слѣдуетъ примѣнять лишь въ самыхъ крайнихъ случаяхъ: лучше, если ребенокъ или вспомнитъ анализъ числа 8, или доберется, напримѣръ, до результата слѣдующимъ образомъ: 5 да 2 составляютъ 7, и 7 да 1 составляютъ 8, или 5 да 1, да 1, да 1 составляютъ послѣдовательно 6, 7 и 8.

Сторонники числовыхъ фигуръ (въ противоположность сторонникамъ *счета*) настаиваютъ на томъ, чтобы результаты дѣйствій получались нагляднымъ путемъ лишь при помощи созерцанія числовыхъ фигуръ. Такъ, д-ръ Лай полагаетъ, что для полученія, напримѣръ, суммы 5+3, слѣдуетъ предложить ребенку созерцать числовыя фигуры 5 и 3, и, соединивши затѣмъ обѣ фигуры въ одну, узнать въ полученной фигурѣ число 8: такимъ образомъ окончательный результатъ получается не какъ результатъ счета, а какъ результатъ непосредственнаго воспріятія. Необходимость и пользу счета д-ръ Лай вполнѣ отрицаетъ.

Въ противоположность д-ру Лаю и другимъ сторонникамъ числовыхъ фигуръ, сторонники счета утверждаютъ, что чистое созерцаніе чиселъ не можетъ дать представленіе о результатѣ дѣйствія. Такъ, извѣстный нѣмецкій методистъ Книллингъ пишетъ: «Ни одно число не можетъ быть познано путемъ простого воспріятія; ни одинъ результатъ вычисленія не можетъ быть полученъ посредствомъ него. Что 7+5=12, меня не побудитъ сказать даже самое тщательное созерцаніе количествъ 7 и 5. Это можно опредѣлить только посредствомъ счета».

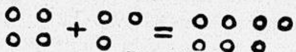


Рис. 14.

Мы уже выяснили (см. § 19), что числовыя фигуры полезны въ томъ отношеніи, что дѣлаютъ представленія о числахъ болѣе наглядными. Въ этомъ же смыслѣ числовыя фигуры могутъ быть полезны и для уясненія механизма выполненія дѣйствія. Такъ, результатъ сложенія 4 и 3 весьма наглядно получается при помощи наблюденія числовыхъ фигуръ этихъ чиселъ (см. рис. № 14). Въ получаемой при соединеніи данныхъ фигуръ фигурѣ легко узнать числовую фигуру 7: слѣдовательно сумма равна 7.

Но часто бываютъ случаи, когда созерцаніе числовыхъ фигуръ не даетъ такого непосредственно видимаго результата. Такъ, если нужно сложить 5 и 3, то мы получимъ слѣдующее расположеніе фигуръ (см. рис. № 15).

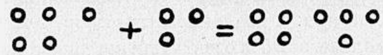


Рис. 15.

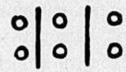


Рис. 16.

Но полученную фигуру нужно еще видоизмѣнить, чтобы замѣнить ее обычной числовой фигурой числа 8 (см. рис. № 10); слѣдовательно здѣсь нѣтъ непосредственнаго созерцанія.

Приведемъ еще другой примѣръ: дѣленіе числа 6 на 3 легко получается при помощи созерцанія числа 6 (см. рис. № 16). Но, если нужно раздѣлить число 10 на 2, то пользоваться числовой фигурой такъ, какъ это предлагаетъ д-ръ Лай, неудобно (см. рисунокъ № 17). Дѣйствительно, съ одной стороны вовсе не наглядно дѣленіе фигуры на 2 равныя части при помощи показанной на чертежѣ черточки: ребенку придется долго подумать для того, чтобы провести именно указанную черточку; а съ другой стороны и полученный результатъ дѣленія не нагляденъ непосредственно, ибо въ результатѣ справа получается числовая фигура, не являющаяся обычной числовой фигурой числа 5, какъ она принята у д-ра Лая.


Рис. 17.

Итакъ, признавая въ извѣстныхъ случаяхъ пользу числовыхъ фигуръ для нагляднаго выполненія дѣйствія, мы все же должны считать установленнымъ, что крайнимъ средствомъ для уразумѣнія механизма дѣйствія является *счетъ*. Счетъ есть послѣдняя инстанція для неспособнаго ученика.

§ 24. **Задачи въ картинкахъ.** Въ послѣднее время вошло въ обычай предлагать дѣтямъ задачи въ видѣ картинокъ. Такъ, на приведенной выше (см. стр. 38) страничкѣ изъ книжки Д. Л. Волковскаго «Дѣтскій міръ въ числахъ» мы можемъ изъ помѣщаемыхъ тамъ рисунковъ извлечь слѣдующую задачку на сложеніе: «трое людей стоятъ на плоту, а двое въ лодкѣ; сколько всего людей?» Или изъ рисунковъ странички изъ «Нагляднаго ариѳметическаго задачника» Н. Соколова (см. стр. 36), получаемъ задачку: «двѣ коровы стоятъ, двѣ нагнулись, а одна лежитъ на землѣ—сколько всѣхъ коровъ»? Такія задачи въ картинкахъ имѣются и въ «Наглядномъ сборникѣ ариѳметическихъ задачъ и примѣровъ», составленномъ «Кружкомъ учителей подъ редакціей Ѳ. Борисова и В. Сатарова».

Такія задачи въ картинкахъ несомнѣнно полезны въ томъ смыслѣ, что вниманіе ребенка при созерцаніи картинки оживляется; при этомъ сама картинка содержитъ уже въ себѣ отвѣтъ на вопросъ задачи: именно ребенку достаточно сосчитать число требуемыхъ предметовъ, чтобы получить искомый результатъ. Такимъ образомъ такія задачи-картинки являются настоящимъ нагляднымъ пособіемъ.

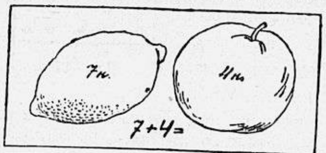


Рис. 18.

Но, вполнѣ признавая пользу *такихъ* картинокъ-задачъ, мы не можемъ согласиться съ цѣлесообразностью *символическихъ* картинокъ задачъ, которыми переполнены, къ сожалѣнію, какъ задачникъ г. Соколова, такъ и задачникъ

гг. Борисова и Сатарова. Мы приводимъ здѣсь нѣкоторые снимки съ этихъ задачъ: см. рис. №№ 18, 19, 20, 21.

Прежде всего замѣтимъ, что всѣ эти картинки представляютъ въ сущности лишь условнымъ образомъ записанное условіе задачи: созерцаніе картинокъ не можетъ помочь самому рѣшенію задачи, какъ это было въ случаѣ картинокъ, указанныхъ выше. Поэтому такія картинки совершенно теряютъ смыслъ нагляднаго пособія. Польза же такихъ картинокъ, въ смыслѣ оживленія преподаванія, такъ-же болѣе чѣмъ сомнительна: неужели, напримѣръ, рисунокъ лимона и рядомъ яблока съ надписью 7 коп. и 4 коп. (см. рис. № 18), вразумительнѣе и живѣе просто *сказаннаго* условія задачи: «ты купилъ

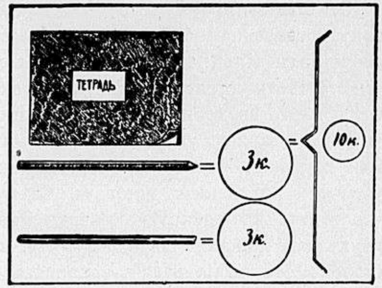


Рис. 19.

Рис 20.

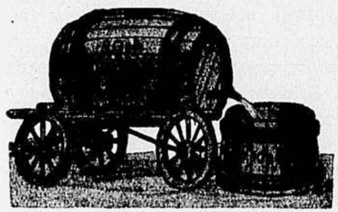


Рис. 21.

въ лавкѣ лимонъ за 7 коп. и одно яблоко за 4 коп.; сколько тебѣ пришлось заплатить всего денегъ»?

Замѣтимъ, кромѣ того, что такія задачи-картинки, какъ приведенная на рис. № 19, представляютъ настоящій ребусъ для дѣтей: тутъ нужно еще догадаться, какое значеніе имѣетъ «страшная» фигурная скобка—учителю придется много времени затратить на самое объясненіе символической записи условія. Подобныя картинки-условія или картинки-символы, представляютъ собой вредное увлеченіе наглядныимъ методомъ. Слѣдуетъ лишь пожалѣть, что этихъ задачъ-картинокъ такъ много въ упомянутыхъ двухъ задачникахъ. Въ то же время мы отъ души привѣтствуемъ отсутствіе задачъ-картинокъ подобнаго рода въ «Дѣтскомъ мірѣ въ числахъ» Д. Л. Волковскаго.

Пользуемся случаемъ, чтобы указать еще на одно важное преимущество задачника г. Волковскаго: въ немъ картинки исполнены весьма художественно, такъ что созерцаніе ихъ является большимъ эстетическимъ удовольствіемъ. Между тѣмъ задачники г. Соколова и гг. Борисова и Сатарова переполнены аляповатыми рисунками, въ которыхъ часто самымъ откровеннымъ образомъ нарушаются законы перспективы и художественной правды.

§ 25. **Противоестественныя задачи-картинки.** Мы считаемъ своимъ долгомъ указать на то, что въ столь распространенныхъ задачникахъ, какъ упомянутые выше задачники Н. Соколова и гг. Борисова и Сатарова имѣется нѣсколько (правда сравнительно немного) картинокъ-задачъ самого невѣроятнаго по практическимъ требованіямъ содержанія. Мы приводимъ здѣсь нѣкоторые снимки этихъ картинокъ (см. рис. №№ 22, 23, 24, 25).

На первой изъ этихъ картинокъ мы видимъ одновременно въ воздухѣ 9 мыльныхъ пузырей, *поднявшихся* вверхъ; нелѣпость подобнаго рисунка очевидна, ибо, во-первыхъ,

пузыри идутъ не вверхъ, а внизъ, а, во-вторыхъ, не можетъ быть, чтобы *одно* лицо (какъ показано на рисункѣ), могло пустить пузыри такъ, чтобы сразу 9 пузырей держалось въ воздухѣ.

Рис. 22.

Вторая картинка весьма странна по перспективнымъ условіямъ: неизвѣстно, *откуда* смотрятъ на рыбъ и на человѣка на берегу. Третья картинка изображаетъ двухъ рыбъ на вѣсахъ съ надписями 3 фунта и 7 фун.; по поводу этой картинки слѣдуетъ замѣтить, что разъ вѣсъ рыбъ уже извѣстенъ, то незачѣмъ ихъ класть на вѣсы; если же

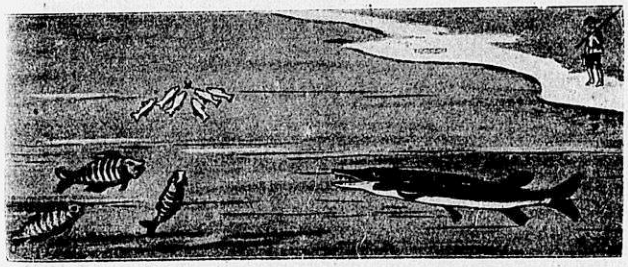


Рис. 23.

предполагается, что эти вѣса (3 ф. и 7 ф.) найдены при помощи вѣсовъ, то вѣдь при взвѣшиваніи никогда не кладутъ одну рыбу на одну чашку, а другую на другую: на другой чашкѣ должны быть гири. Такіе рисунки безсмысленны по своей непрактичности, и въ то же время они нисколько не содѣйствуютъ наглядному уясненію понятій «больше» или «тяжелѣе»; къ сожалѣнію, рисунки этого рода очень часто встрѣчаются, какъ въ задачникѣ гг. Борисова и Сатарова, такъ и въ задачникѣ г. Соколова. Гораздо лучше были бы рисунки, изображающіе на одной чашкѣ вѣсовъ, напримѣръ, рыбу, а на другой—меньшую рыбу и *гири;* при этомъ вѣсы должны быть въ равновѣсіи: тогда вѣсъ гирь покажетъ, на сколько фунтовъ одна рыба тяжелѣе другой.

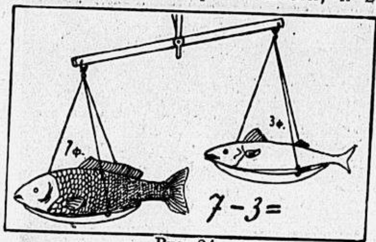


Рис. 24.

Приводимый рисунокъ № 25 изъ задачника гг. Борисова и Сатарова также нелѣпъ, ибо, когда же это бываетъ, чтобы бочку *перепиливали* пополамъ и получали при этомъ, вмѣсто 20 пудовъ содержимаго, 10 пудовъ (какъ показываетъ надпись на бочкѣ). Въ этомъ случаѣ содержимое бочки неминуемо должно вылиться, и въ результатѣ въ бочкѣ останется ноль пудовъ.

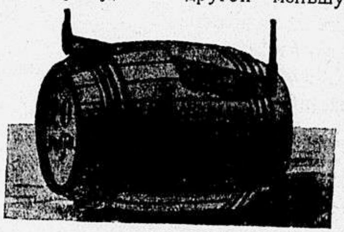


Рис. 25.

ГЛАВА V.

редѣленіе дѣйствій и рѣшеніе задачъ (числа отъ 1 до 10). Дѣленіе на части и по содержанію.

§ 26. **Опредѣленіе дѣйствій.** Само собой разумѣется, что при прохожденіи дѣйствій надъ числами въ предѣлахъ отъ 1 до 10 (и вообще при прохожденіи начальной ариѳметики въ предѣлѣ чиселъ отъ 1 до 100) не слѣдуетъ сообщать дѣтямъ точныя опредѣленія дѣйствій, ибо дѣтскій умъ въ этомъ возрастѣ не способенъ понять эти опредѣленія, а главное, въ немъ еще не развитъ вкусъ къ обобщеніямъ,—вѣдь всякое опредѣленіе дѣйствія есть, въ сущности, обобщеніе, такъ какъ всякое опредѣленіе объединяетъ различные частные случаи дѣйствій.

Такъ, напримѣръ, при помощи сложенія рѣшаютъ слѣдующіе вопросы: 1) найти все число, если извѣстны двѣ части его; 2) найти число, большее, чѣмъ данное число на данное число единицъ; 3) найти, сколько единицъ содержится во всѣхъ данныхъ числахъ въ совокупности. И вотъ всѣ эти 3 случая мы при опредѣленіи сложенія подводимъ подъ одинъ, именно во всѣхъ случаяхъ ищется такое число, которое содержало бы въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ содержится во всѣхъ данныхъ числахъ. Нѣтъ сомнѣнія, однако, что такая обобщающая работа мысли на разсматриваемой ступени преждевременна; съ опредѣленіемъ слѣдуетъ подождать до той ступени, въ которой изучаются дѣйствія надъ всякими числами.

При изученіи дѣйствій въ предѣлахъ отъ 1 до 10 вполнѣ достаточно, если дѣти будутъ сознательно рѣшать задачи на всѣ четыре дѣйствія, показывая своими отвѣтами, что они вполнѣ отчетливо понимаютъ *практически,* что они дѣлаютъ. На этой ступени не слѣдуетъ даже сообщать дѣтямъ названій дѣйствій: это можно сдѣлать въ слѣдующей ступени (числа отъ 1 до 20).

§ 27. **Объясненіе задачи.** Многіе учителя любятъ, чтобы ребенокъ, рѣшая задачу и совершая опредѣленное дѣйствіе для рѣшенія этой задачи, давалъ точное объясненіе, почему именно онъ дѣлаетъ этой дѣйствіе, а не какое-нибудь иное. Такія требованія являются, въ особенности на 1-ой ступени, чрезмѣрными.

Разсмотримъ для примѣра рѣшеніе задачи № 1, § 22. Если ребенокъ говоритъ, что у него теперь 5 яблокъ, такъ какъ 3 яблока да 2 составляютъ 5 яблокъ, то такимъ отвѣтомъ слѣдуетъ удовлетвориться. Полное же разъясненіе задачи было бы слѣдующее: мы *складываемъ* здѣсь числа 3 и 2, такъ какъ намъ нужно найти такое число, которое заключало бы въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ содержится во всѣхъ данныхъ числахъ; а такое число находится при помощи дѣйствія сложенія данныхъ чиселъ. Очевидно, что такое объясненіе излишне требовать даже отъ ученика младшихъ классовъ гимназіи. Вообще на этой ступени достаточно, если учитель, основываясь на своей педагогической чуткости, замѣтитъ чутьемъ, что ребенокъ *сознательно* и съ пониманіемъ дѣла даетъ правильный отвѣтъ на вопросъ задачи.

§ 28. **Дѣленіе на части и по содержанію.** Громадное большинство русскихъ методистовъ рекомендуетъ начинать изученіе дѣленія съ дѣленія на части, считая, что этотъ видъ дѣленія болѣе доступенъ пониманію ребенка. При этомъ многіе рекомендуютъ иллюстрировать дѣленіе на части дѣйствительнымъ дѣленіемъ на части предметовъ, т.-е. вводятъ уже ознакомленіе съ дробями. Такъ, въ «Дѣтскомъ мірѣ въ числахъ» Д. Л. Волковскаго разсмотрѣніе дѣленія начинается съ рисунковъ, изображающихъ дѣленіе пополамъ яблока, дѣленіе прямоугольника и круга пополамъ (см. рис. № 26 заимствованный изъ упомянутой книжки). Въ задачникѣ г.г. Борисова и Сатарова мы находимъ рис. дѣленія куска мыла на равныя части и т. д.

Что касается нѣмецкихъ методистовъ, то они стоятъ на противоположной точкѣ зрѣнія и рекомендуютъ начинать изученіе дѣленія съ дѣленія по содержанію.

Такъ, извѣстный швейцарскій методистъ І. Штеклинъ въ своей «Методикѣ ариѳметики» говоритъ: «при измѣреніи (т.-е. дѣленіи по содержанію), дѣти могутъ непосредственно

Рис. 26.

наблюдать предметы, надъ которымъ выполняется дѣйствіе, тогда какъ при дѣленіи (дѣленіе на части), имъ всегда приходится имѣть дѣло съ отвлеченнымъ числомъ (дѣлителемъ). Поэтому измѣреніе, какъ дѣйствіе болѣе легкое и допускающее непосредственное созерцаніе, должно *предшествовать* дѣленію *)».

При этомъ для нагляднаго усвоенія дѣленія по содержанію Штеклинъ рекомендуетъ непосредственное измѣреніе учениками длины при помощи вершковъ, или емкости сосудовъ (5 бутылокъ) при помощи стакановъ. Вотъ примѣръ, заимствованный изъ «Методики ариѳметики» Штеклина.

8 верш. =4 раза 2 вершка, поэтому 8 вершк., измѣренные 2 вершк., =4. Изъ русскихъ методистовъ на «нѣмецкой» точкѣ зрѣнія стоятъ гг. Мрочекъ и Филипповичъ, которые

*) Надо замѣтить, что Штеклинъ вводитъ ознакомленіе съ дѣйствіемъ дѣленія обоихъ видовъ лишь при изученіи чиселъ въ предѣлахъ отъ 1 до 20 (II ступень).

утверждаютъ, что существуетъ лишь одинъ видъ дѣленія, именно дѣленіе по содержанію (см. «Педагогика математики» названныхъ авторовъ, ч. I).

Трудно рѣшить, что правильнѣе—начинать ли изученіе дѣленія съ дѣленія на части или съ дѣленія по содержанію. Намъ думается, что скорѣе правы русскіе методисты, ибо 1) самое названіе дѣйствія: «дѣленіе» содержитъ въ себѣ понятіе *о дѣленіи предмета или группы предметовъ на части* и 2) указаніе I. Штеклина на то, что дѣленіе на части ненаглядно, въ виду отвлеченности дѣлителя, едва ли правильно: иллюстрируя дѣленіе на части наглядными дѣленіями предметовъ и группъ предметовъ на части, т.-е. связывая ученіе о дѣленіи съ ученіемъ о дробяхъ, легко сдѣлать дѣленіе на части нагляднымъ дѣйствіемъ.

§ 29. **Объединеніе обоихъ видовъ дѣленія.** Слѣдуетъ помнить, что оба вида дѣленія являются въ сущности *однимъ* дѣйствіемъ дѣленія. Если мы узнаемъ, сколько разъ одно число *в* содержится въ другомъ числѣ *а*, то мы ищемъ такое число, на которое нужно умножить *в*, чтобы получить произведеніе равное *а*. Если же мы дѣлимъ число *а* на *в* равныхъ частей, то мы ищемъ такое число, которое, будучи умножено на *в*, т.-е. будучи взято *в* разъ слагаемымъ, дало бы произведеніе, равное *а*. Въ первомъ случаѣ *в* является множимымъ, а во второмъ—множителемъ. Но оба случая дѣленія подходятъ подъ слѣдующее *общее* опредѣленіе: раздѣлить число *а* на число *в*, значитъ, узнать такое новое число x, чтобы произведеніе вх (или хв) равнялось числу а.

Эта возможность дать общее опредѣленіе для обоихъ видовъ дѣленія и заставляетъ считать оба вида дѣленія однимъ дѣйствіемъ.

Всѣ русскіе методисты согласны въ томъ, что при дальнѣйшемъ изученіи ариѳметики слѣдуетъ *объединить* оба вида дѣленія въ одно дѣйствіе. Разногласіе заключается

лишь въ томъ, когда сдѣлать такое объединеніе. Такъ, г. Шохоръ-Троцкій относитъ это объединеніе очень далеко, именно къ третьему году обученія въ начальной школѣ, послѣ изученія дѣйствій надъ числами любой величины *). Г. Арженниковъ рекомендуетъ объединеніе обоихъ видовъ дѣленія уже при изученіи чиселъ первой сотни, т.-е. гораздо раньше (III ступень); то же самое совѣтуетъ и г. Мукаловъ. Г. Егоровъ объединяетъ оба вида дѣленія при изученіи дѣйствій надъ числами любой величины; г. Беллюстинъ дѣлаетъ то же самое при изученіи дѣйствій надъ числами въ предѣлахъ 1-ой тысячи.

Мы думаемъ, что, чѣмъ позже дѣлать объединеніе обоихъ видовъ дѣленія, тѣмъ лучше. Г. Шохоръ-Троцкій глубоко правъ, отводя мѣсто этому объединенію лишь послѣ изученія дѣйствій надъ числами любой величины, когда вообще устанавливаются точныя опредѣленія дѣйствій. Слѣдуетъ при этомъ замѣтить, что самое объединеніе должно, какъ указываетъ г. Егоровъ, заключаться въ слѣдующемъ: учащійся долженъ понять, что въ томъ и въ другомъ случаѣ произведеніе дѣлителя и частнаго равно дѣлимому. Г. Беллюстинъ совѣтуетъ обращать вниманіе учащагося на то обстоятельство, что, какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, результаты дѣйствія одинаковы, если данныя числа одинаковы. Особенно цѣннымъ является указаніе г. Егорова, ибо оно близко подходитъ къ самому опредѣленію дѣленія.

§ 30. **Два обозначенія дѣленія.** Въ своей «Методикѣ Ариѳметики» г. Егоровъ рекомендуетъ различать дѣленіе по содержанію и дѣленіе на части даже при письменной записи дѣйствій. Для дѣленія на части онъ рекомендуетъ обозначеніе при помощи черточки (—), какъ обозначаютъ дроби, а для дѣленія по содержанію —обозначеніе при

*) Здѣсь же г. Шохоръ-Троцкій рекомендуетъ вообще давать точныя опредѣленія дѣйствій.

помощи двухъ точекъ (:). Такъ, требованіе раздѣлить число 8 на число 2 записывается слѣдующими 2-мя способами:

$$\frac{8}{2} \quad \text{и} \quad 8:2.$$

Но подобную двойственность обозначенія врядъ ли можно считать цѣлесообразной. Какъ справедливо замѣчаетъ г. Арженниковъ, нельзя и даже странно вводить два обозначенія двухъ видовъ одного и того же дѣйствія, когда имѣется въ виду рано или поздно *объединить* оба вида дѣйствія въ одно.

Съ своей стороны замѣтимъ, что введеніе двухъ обозначеній является лишь излишнимъ затрудненіемъ въ дѣлѣ изученія начальной ариѳметики. Вполнѣ достаточно, если учащійся въ каждомъ данномъ случаѣ сознательно получаетъ результатъ дѣйствія, не зная даже названія дѣйствія на первыхъ порахъ.

Такъ пусть рѣшается задача § 22:

«*Мама дала Колѣ 8 коп. и сказала ему, чтобы онъ роздалъ эти деньги нищимъ, чтобы каждый получилъ по 2 коп. Сколько нищихъ получили деньги?*»

Достаточно, если учащійся вѣрно дастъ отвѣтъ и при этомъ сможетъ пояснить, что нищихъ будетъ 4, потому что, если каждый нищій получаетъ 2 коп., то 4 нищихъ получатъ 8 коп., т.-е. какъ разъ столько, сколько было всѣхъ денегъ. Или, пусть рѣшается задача на дѣленіе на части, приведенная на стр 48; достаточно, если учащійся скажетъ, что каждый изъ мальчиковъ получитъ по 2 сливы, такъ какъ 3 раза по 2 сливы составляетъ 6 сливъ, т.-е. столько, сколько было дано сливъ. Ни о какомъ названіи дѣйствія, а тѣмъ болѣе различеніи обоихъ видовъ дѣленія и отдѣльномъ письменномъ обозначеніи не можетъ быть и рѣчи.

Примѣчаніе. Слѣдуетъ замѣтить, что нѣкоторые преподаватели начальной ариѳметики, увлекаясь стремле-

ніемъ различать дѣленія на части и по содержанію при помощи особыхъ знаковъ, иногда и достигаютъ въ концѣ-концовъ того, что ученики правильно ставятъ оба знака дѣленія. Достигнувши цѣли, они начинаютъ думать, что правильно поступаютъ, пользуясь двумя обозначеніями. Замѣтимъ по этому поводу, что изъ того обстоятельства, что какая-нибудь цѣль достигнута, не слѣдуетъ еще, что къ этой цѣли слѣдуетъ стремиться.

§ 31. **Объединеніе обоихъ видовъ дѣленія при помощи рѣшенія задачъ.** При помощи рѣшенія задачъ, лучше всего можно произвести объединеніе видовъ дѣленія. Пусть, напримѣръ, нужно рѣшить задачу: *мальчикъ роздалъ 15 сливъ своимъ 3-мъ товарищамъ, сколько получилъ каждый?* Это типичная задача на дѣленіе на части. Но ее можно рѣшить и при помощи дѣленія по содержанію. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что каждый мальчикъ получилъ 1 сливу, тогда всѣ 3 мальчика получатъ 3 сливы. Но вѣдь всѣхъ сливъ не 3, а 15—отсюда заключаемъ, что каждый мальчикъ можетъ получить по 1 сливѣ столько разъ, сколько разъ можно отъ 15 сливъ отнять по 3 сливы, т.-е. сколько разъ 3 *содержится* въ 15: мы свели рѣшеніе задачи къ дѣленію по содержанію.

Пусть нужно еще рѣшить слѣдующую типичную задачу на дѣленіе по содержанію: «*Мальчикъ роздалъ нищимъ 15 коп., при чемъ каждому далъ по 3 коп. Сколько было нищихъ?*» Мы можемъ ее рѣшить слѣдующимъ способомъ: если бы каждый нищій получилъ по 1 коп., то всѣхъ нищихъ было бы 15. Но каждый нищій получилъ втрое больше денегъ—слѣдовательно число нищихъ не равно 15, а втрое меньше: нужно число 15 *раздѣлить на 3* равныя *части*; тогда мы узнаемъ число нищихъ.

При помощи рѣшенія такихъ задачъ, учащійся пойметъ, что оба вида дѣленія примѣнимы къ рѣшенію однихъ и тѣхъ же вопросовъ. Само собой разумѣется, что такое объединенiе обоихъ видовъ дѣленiя требуетъ достаточно большого развитiя ума ребенка; замѣтимъ, что указанiе на такое объединенiе можно найти у г. Шохоръ-Троцкаго въ его «Методикѣ Ариѳметики», ч. I (третiй годъ обученiя).

Во всякомъ случаѣ слѣдуетъ замѣтить, что вопросъ объ объединенiи обоихъ видовъ дѣленiя достаточно трудный и тонкiй; повторяемъ, съ такимъ объединенiемъ не надо торопиться. При внимательной работѣ можно будетъ довести учащагося до сознанiя того, что и въ томъ и въ другомъ случаѣ мы производимъ *дѣленiе*: только въ случаѣ дѣленiя на части, намъ дано число частей, а искомымъ является величина каждой части; а въ случаѣ дѣленiя по содержанiю, намъ дана величина каждой части и ищется число частей. Если мы, напримѣръ, дѣлимъ 15 на 3, то учащiйся пойметъ, что мы можемъ это толковать такъ: 15 раздѣлить на 3 равныхъ части, или 15 раздѣлить на тройки.

§ 32. **Разностное и кратное сравненiе.** Въ § 22 мы привели среди прочихъ задачъ задачи на разностное и кратное сравненiе чиселъ, т.-е. на опредѣленiе того, на сколько единицъ или во сколько разъ одно число больше или меньше другого. Многiе русскiе методисты рекомендуютъ ознакомленiе съ понятiями «больше или меньше на нѣсколько единицъ или въ нѣсколько разъ» уже на первой ступени въ предѣлахъ чиселъ перваго десятка (Арженниковъ, Егоровъ, Мукаловъ и др.).

Любопытно отношенiе къ этому вопросу А. И. Гольденберга. Въ его «Методикѣ Ариѳметики» мы находимъ вопросы о разностномъ и кратномъ сравненiи чиселъ изложенными въ 1-ой ступени курса. Но впослѣдствiи А. И. Гольденбергъ измѣнилъ свой взглядъ на это дѣло и счелъ необходимымъ отнести ознакомленiе съ сравненiемъ чиселъ къ болѣе позднимъ ступенямъ курса; вотъ что говоритъ А. И. Гольденбергъ въ своихъ «Бесѣдахъ по счисленiю»:

«Полагаю, что уясненiе дѣтямъ понятiй, имѣющихъ отношенiе къ разностному и кратному сравненiю чиселъ, должно быть вслѣдствiе своей трудности исключено изъ курса перваго десятка, гдѣ дѣти знакомятся лишь съ основными понятiями: прибавить, отнять, повторить число, разбить поровну».

Мы не можемъ согласиться съ позднѣйшими указанiями А. И. Гольденберга: дѣло въ томъ, что понятiя «больше и меньше» принадлежатъ къ самымъ элементарнымъ и начинаютъ развиваться у ребятъ уже на третьемъ году жизни. Такъ, ребенокъ въ этомъ возрастѣ различаетъ уже большiе предметы отъ маленькихъ, понимаетъ, что въ стаканъ можно налить много и мало воды (см. § 10). Въ самомъ понятiи «еще» уже таится понятiе «больше». При помощи достаточно удачно подобранныхъ задачъ не представляется особенно труднымъ развить у ребенка вкусъ къ сравненiю чиселъ и внушить ему, что сравнивать числа можно двумя способами. На первахъ порахъ достаточно, конечно, если ребенокъ лишь на практикѣ сможетъ производить такое сравненiе, рѣшая соотвѣтственныя задачи (см. задачи § 22). На слѣдующихъ же ступеняхъ можно внести въ это дѣло отчетливость теоретическаго сознанiя (см. также § 18).

Г. Беллюстинъ рекомендуетъ ознакомленiе съ кратнымъ и разностнымъ сравненiемъ чиселъ лишь во второй ступени (1 до 20), считая, что этотъ вопросъ «требуетъ отъ дѣтей большого напряженiя силъ и является работой, часто превосходящей уровень ихъ развитiя». Но любопытно, что тотъ же г. Беллюстинъ считаетъ, что разсматриваемый вопросъ не долженъ вызывать преимущественнаго вниманiя со стороны преподавателя. Вотъ подлинныя слова г. Беллюстина: «Употребляя время на изученiе выраженiй, больше на столько-то, больше въ столько-то разъ и т. д., мы оказываемъ услугу, собственно говоря, не ариѳметикѣ, а языку, который въ этой услугѣ, не особенно нуждается. Итакъ, непроизводительно истратитъ время тотъ преподаватель, который пожелаетъ, чтобъ дѣти быстро запомнили эти выраженія и не сбивались съ нихъ. Знаніе ихъ придетъ само собой, безъ большихъ усилій, ариѳметика же не получитъ рѣшительно никакого урона отъ такого поздняго развитія».

Мы вполнѣ согласны съ концомъ приведенной цитаты: всякія понятія должны укладываться въ умѣ ребенка безъ скороспѣлости; но грунтъ долженъ быть заложенъ уже на самыхъ первыхъ порахъ, ибо съ понятій «больше и меньше»*) начинается количественное отношеніе ребенка къ міру явленій (см. § 10). Однако врядъ ли можно согласиться съ мнѣніемъ г. Беллюстина, что забота о выработкѣ правильной рѣчи должна при преподаваніи ариѳметики отступить на задній планъ.

ГЛАВА VI.

Три основныя методы обученія ариѳметики: метода цѣлесообразныхъ задачъ, метода изученія дѣйствій и метода изученія чиселъ.

§ 33. **Метода цѣлесообразныхъ задачъ и метода изученія дѣйствій.** Въ § 21 мы выяснили, что съ нашей точки зрѣнія, самой пригодной системой обученія является предлагаемая г. Шохоръ-Троцкимъ *метода цѣлесообразныхъ задачъ*, т.-е. задачъ, спеціально подобранныхъ для уясненія смысла и производства извѣстнаго ариѳметическаго дѣйствія. Слѣдуетъ замѣтить, что многіе русскіе методисты стоятъ на иной точкѣ зрѣнія и предлагаютъ предпосылать рѣшенію задачъ ознакомленіе съ самымъ механизмомъ дѣйствій

*) Или „много и мало".

(при помощи тѣхъ или иныхъ наглядныхъ пособій). По этой методѣ изученіе ариѳметики слѣдуетъ начинать съ непосредственнаго изученія дѣйствій, и поэтому эта метода носитъ названіе *методы изученія дѣйствій*. Эта метода у насъ въ Россіи вошла въ силу, начиная съ 80-хъ годовъ XIX столѣтія.

Однимъ изъ самыхъ яркихъ піонеровъ, положившихъ прочный фундаментъ этой методѣ, является въ Россіи покойный А. И. Гольденбергъ; онъ отрицаетъ цѣлесообразность начала изученія ариѳметики непосредственно съ задачъ. Вотъ что говоритъ А. И. Гольденбергъ въ «Бесѣдахъ, по счисленію» (девятая бесѣда): «Прежде, чѣмъ рѣшить задачу, надо знать и умѣть, какъ производить дѣйствія надъ числами, а также помнить необходимые табличные результаты, а этому дѣти научаются на примѣрахъ. Рѣшеніе задачъ, какъ бы просты онѣ ни были, потребуетъ со стороны малышей нѣкоторой умственной дѣятельности; имъ предстоитъ изъ предложенной задачи выдѣлить ея ариѳметическое содержаніе, т.-е. тотъ числовой вопросъ, который облеченъ въ форму весьма незамысловатаго разсказа.

Подобная же умственная процедура является въ *данномъ случаѣ* излишней тратой энергіи и нарушеніемъ того педагогическаго принципа, высказаннаго еще Аммосомъ Каменскимъ, что всегда заразъ надо предолѣвать только по одной трудности».

Такимъ образомъ А. И. Гольденбергъ полагаетъ, что только тогда можно приступить къ рѣшенію задачъ, когда дѣти уже ознакомились съ механизмомъ выполненія дѣйствій на примѣрахъ; если же сразу приступить къ задачамъ, то ребенку придется имѣть дѣло одновременно съ двумя трудностями: 1) выясненіе смысла задачи и 2) процессъ выполненія дѣйствія.

Мы думаемъ, что утвержденіе А. И. Гольденберга было бы справедливымъ лишь въ томъ случаѣ, если бы рѣчь шла о рѣшеніи такъ-называемыхъ *сложныхъ* задачъ, т.-е. о такихъ задачахъ, которыя рѣшаются при помощи нѣсколькихъ ариѳметическихъ дѣйствій. Что же касается простыхъ задачъ, рѣшаемыхъ однимъ дѣйствіемъ *), то замѣчаніе А. И. Гольденберга врядъ ли справедливо, ибо въ этомъ случаѣ выдѣленіе ариѳметическаго содержанія задачи (т.-е. выдѣленіе дѣйствія) и самое выполненіе дѣйствія совпадаютъ въ одно стройное цѣлое. Простая задача даетъ толчекъ къ выполненію дѣйствія, намѣчаетъ передъ ребенкомъ *интересную для него цѣль* и заставляетъ его живѣе отнестись къ самой процедурѣ выполненія дѣйствія. Простая задача является въ сущности тѣмъ же примѣромъ, но только облеченнымъ въ живую форму. Мы полагаемъ, что вмѣсто того, чтобы, напримѣръ, спрашивать ребенка, сколько будетъ, если къ 3 кубикамъ присчитать 2 кубика, лучше задать такой вопросъ-задачу: «у тебя было 3 яблока, да 2 ты сорвалъ еще съ дерева; сколько же у тебя стало яблоковъ?»

Замѣтимъ, что выясненіе понятій «больше» и «меньше» на нѣсколько единицъ или въ нѣсколько разъ, во всякомъ случаѣ, слѣдуетъ начинать съ задачъ, ибо только соотвѣтственно подобранныя задачи (съ соотвѣтствующими наглядными пособіями) могутъ дать матеріалъ для сравненія чиселъ.

§ 34. **Метода изученія чиселъ.** Разсмотрѣнная нами метода изученія дѣйствій въ настоящее время является наиболѣе распространенной методой; у насъ въ Россіи она стала прививаться лишь съ конца 80-хъ годовъ прошлаго столѣтія. До этого времени, въ теченіе 20—25 лѣтъ царила другая метода обученія ариѳметикѣ, такъ называемая *метода изученія чиселъ*, предложенныя въ 1842 г. въ Германіи нѣмецкимъ методистомъ Грубе. Къ намъ въ Россію эта метода была перенесена главнымъ образомъ, благодаря трудамъ г. Паульсена, выпустившаго въ 1860 г. «Ариѳметику по способу Грубе» и В. А. Евтушевскаго, выпустившаго въ 1872 г. книгу подъ названіемъ: «Методика Ариѳметики. Пособіе для учительскихъ институтовъ, учительскихъ семинарій, преподавателей младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и родителей». Въ 1912 году книга Евтушевскаго вышла 17-ымъ изданіемъ. Въ настоящее время имя Евтушевскаго извѣстно болѣе всего по его задачникамъ, имѣющимъ довольно широкое распространеніе въ школахъ.

*) Вродѣ приведенныхъ въ § 22.

Мы ограничимся изложеніемъ методы изученія чиселъ такъ, какъ она построена у В. Евтушевскаго. Евтушевскій, согласно съ Грубе, полагаетъ, что центромъ ариѳметическихъ занятій должно быть не изученіе дѣйствій, а *индивидуальное изученіе чиселъ*. Евтушевскій полагаетъ, что числа являются своего рода индивидуумами съ индивидуальными особенностями; главной задачей является изученіе этихъ особенностей; результатомъ этого изученія явится знаніе ариѳметическихъ дѣйствій. Нецѣлесообразно, по мнѣнію Грубе, изучать дѣйствія раньше анализа чиселъ подобно тому, какъ нецѣлесообразно, изучая растенія, начинать съ корней, затѣмъ переходить къ стеблю, листьямъ и т. д., а затѣмъ уже переходить къ изученію всего растенія въ цѣломъ.

Числа—это тѣ же растенія; обзоръ ариѳметики нужно начинать съ обзора цѣлаго растенія—числа. Исходя изъ этихъ соображеній, Евтушевскій рекомендуетъ слѣдующую систему изученія ариѳметики.

Каждое число первыхъ двухъ десятковъ (отъ 1 до 20) должно быть внимательно изучено въ отдѣльности по опредѣленному плану. Такъ, изученіе числа 7 должно заключаться въ томъ, что ребенку внушаютъ сначала, что 6 да 1 составляютъ 7; затѣмъ нужно заставить ребенка считать до 7; далѣе идетъ главная часть работы—именно разложеніе числа на всевозможныя слагаемыя—см. приведенную здѣсь изъ книги Евтушевскаго таблицу. Слагаемыя эти слѣдующія:

7=1+1+1+1+1+1+1	7=5+2
7=2+2+2+1	7=6+1
7=3+3+1	
7=4+3	

Эти разложенія производятся при помощи наглядныхъ пособій, напримѣръ, при помощи черченія крестиковъ на доскѣ. Послѣ этого изучаются *въ видѣ вывода изъ разложенія числа 7* четыре основныя дѣйствія надъ числомъ 7. Такъ ребенку предлагаютъ вопросы: «на сколько надо увеличить три, пять, чтобы получить 7» или «на сколько 7 больше двухъ, взятыхъ 3 раза, трехъ—взятыхъ 2 раза» и т. д. Дѣло заканчивается рѣшеніемъ задачъ. Вотъ условіе задачи, заимствованной изъ «Методики» Евтушевскаго: «у мальчика было 2 монеты по три копейки и одна монета въ одну копейку; двѣ копейки онъ истратилъ на покупку карандаша, а на всѣ остальныя деньги купилъ нѣсколько грушъ и за каждую грушу заплатилъ по копейкѣ. Сколько грушъ купилъ мальчикъ?» *).

По приведенной схемѣ Евтушевскій ведетъ изученіе чиселъ до 20. Далѣе слѣдуетъ изученіе чиселъ до 100. Здѣсь Евтушевскій рекомендуетъ подробное изученіе не всѣхъ чиселъ подъ рядъ, а главнымъ образомъ только составныхъ чиселъ, вродѣ 24, 30, 32, 36, 40, 45, 48 и т. д.; при этомъ онъ рекомендуетъ изучать ихъ преимущественно съ точки зрѣнія дѣлимости на другія числа, меньшія ихъ. Впрочемъ, надо замѣтить, что въ своемъ задачникѣ, I ч. Евтушевскій помѣстилъ примѣры вычисленій, относящихся

*) Послѣ рѣшенія задачъ Евтушевскій рекомендуетъ такъ называемое бѣглое вычисленіе и вопросы для повторенія.

къ каждому числу 1-ой сотни чиселъ въ отдѣльности. Также въ его «Методикѣ» мы находимъ указанія на то, что не слѣдуетъ пренебрегать изученіемъ и простыхъ чиселъ, большихъ, чѣмъ 20, а также и другихъ составныхъ чиселъ, «не столь замѣчательныхъ по своему составу изъ множителей», какъ то: 21, 22, 25, 26 и т. д. Слѣдовательно, дѣло въ сущности почти не мѣняется и за предѣлами первыхъ двухъ десятковъ.

Что касается чиселъ, большихъ ста, то здѣсь Евтушевскій слѣдуетъ методѣ изученія дѣйствій, ибо здѣсь нѣтъ индивидуальнаго изученія чиселъ, а изучаются лишь дѣйствія въ связи съ задачами. Здѣсь Евтушевскій сильно расходится съ Грубе, который и на этой ступени рекомендуетъ довольно кропотливое изученіе отдѣльныхъ чиселъ первой тысячи, напоминающее изученіе чиселъ первой сотни.

Главный недостатокъ системы Грубе - Евтушевскаго заключается въ *утомительной однообразности* индивидуальнаго изученія чиселъ въ связи съ разложеніемъ чиселъ на слагаемыя и множителей. Такое изученіе вполнѣ понятно при ознакомленіи дѣтей съ числами 1-го десятка (см. § 16 и 17). Цѣлью такого изученія должно быть, какъ мы уже выяснили, болѣе наглядное знакомство съ числами и, косвенно, облегченіе механизма производства дѣйствій.

Можно сказать, что методъ Грубе въ предѣлахъ перваго десятка удержался до сихъ поръ. Такъ, его придерживается цѣлый рядъ видныхъ нѣмецкихъ и русскихъ методистовъ, какъ то: д-ръ Лай, Вальземанъ, Штеклинъ, Волковскій и др. Что же касается чиселъ, превышающихъ десять, то здѣсь, какъ выяснится ниже, главную роль играетъ десятичный составъ чиселъ и дѣйствія надъ отдѣльными десятичными группами (разрядами) чиселъ; индивидуальное же изученіе чиселъ *) является лишь излишнимъ

*) Какъ его понимаетъ г. Евтушевскій, и особенно Грубе.

бременемъ. Между тѣмъ изъ такого индивидуальнаго изученія Евтушевскій совершенно не выводитъ пріемовъ вычисленій надъ числами первой сотни, основанныхъ на десятичномъ составѣ чиселъ; усвоеніе же этихъ пріемовъ является на дѣлѣ одной изъ главныхъ цѣлей обученія ариѳметикѣ.

Вотъ что говоритъ А. И. Гольденбергъ о методѣ Грубе: «Совокупность упражненій, путемъ которыхъ должно совершаться это изученіе, и педагогическое значеніе которыхъ такъ высоко цѣнятъ послѣдователи Грубе, не можетъ быть оправдана никакими вѣскими, логическими доводами съ точки зрѣнія той опредѣленной и вмѣстѣ съ тѣмъ простой цѣли, которую должно преслѣдовать обученіе дѣтей счисленію и которая заключается лишь въ томъ, чтобы дѣти *умѣли вычислять и понимали вычисленія*» (см. предисловіе къ «Методикѣ Ариѳметики» Гольденберга) *).

Любопытно, что графъ Л. Н. Толстой, занимавшійся одно время изученіемъ ариѳметики съ дѣтьми сельской школы, относился весьма отрицательно къ методу Грубе, считая его весьма скучнымъ для дѣтей и принижающимъ ихъ свободное мышленіе. Вотъ подлинныя слова гр. Толстого: «Господа эти велятъ изучать просто числа 1, 2, 3, 4, забывая то, что числа эти и ихъ отношенія выучены безъ школы каждымъ ребенкомъ. Видно, что эти господа либо не имѣли никогда дѣла съ живымъ ребенкомъ, либо до такой степени утратили способности педагоговъ—слѣдить и угадывать всѣ пути, которыми всѣ учащіеся доходятъ до знанія,—что они пишутъ ариѳметику либо для себя однихъ, либо для воображаемыхъ

*) Въ Америкѣ система Грубе пользуется довольно большимъ распространеніемъ; изъ американскихъ учебниковъ ариѳметики, составленныхъ по этому методу, можно указать переведенную на русскій языкъ подъ редакціей Д. Л. Волковскаго «Первоначальную ариѳметику» г.г. Уэнтуорта и Рида.

дѣтей, воспитанныхъ съ дѣтства внѣ всякихъ впечатлѣній числа... Не испытавъ самому той томительной скуки, которую производятъ такого рода вещи, нельзя было бы понять и почувствовать всей преступности такой книги, какъ ариѳметика Грубе. И уже второе изданіе! Значитъ, сколько замучено, испорчено дѣтскихъ душъ, сколько испорчено наивныхъ учителей!» (см. «Ариѳметика» Л. Н. Толстого, стр. 5 и 7).

ГЛАВА VII.

Письменное обозначеніе чиселъ и дѣйствій въ предѣлахъ перваго десятка чиселъ. Вопросъ о наименованіяхъ.

§ 35. **Цифры.** Ознакомленіе дѣтей съ цифрами, какъ условными знаками чиселъ, слѣдуетъ произвести уже на первой ступени изученія ариѳметики, несмотря на то, что въ сущности здѣсь нѣтъ надобности въ письменномъ производствѣ дѣйствій, и всѣ вычисленія должны быть вычисленіями въ умѣ и на наглядныхъ пособіяхъ. Знакомство дѣтей съ цифрами необходимо потому, что, пользуясь знаніемъ дѣтьми цифръ, можно давать дѣтямъ самостоятельныя *примѣры* для вычисленій (въ родѣ $3+5-2=?$); это обстоятельство имѣетъ тѣмъ большее значеніе въ томъ случаѣ, когда учителю приходится имѣть дѣло одновременно съ двумя или нѣсколькими дѣтьми или, когда учителю приходится имѣть дѣло съ нѣсколькими отдѣленіями учениковъ, какъ это бываетъ, напримѣръ, въ нашихъ земскихъ школахъ. Если дѣти знакомы съ цифрами (и знаками дѣйствій), то учитель можетъ одному отдѣленію задать самостоятельныя упражненія, а въ это же время заниматься устно съ другимъ отдѣленіемъ.

Кромѣ того важно еще слѣдующее соображеніе: если дѣти успѣютъ ознакомиться съ цифрами и знаками дѣйствій уже при изученій первой ступени, то при изученіи второй ступени (отъ 1 до 20) можно будетъ сосредоточить вниманіе дѣтей на принципѣ помѣстнаго значенія чиселъ при записи чиселъ и на цифрѣ нуль; въ противномъ случаѣ окажется необходимымъ занять умъ дѣтей одновременно преодолѣніемъ нѣсколькихъ трудностей:—и научить изображать цифры и научить употребленію цифры нуль въ связи съ помѣстнымъ значеніемъ цифръ.

Знакомство съ числовыми фигурами можетъ облегчить ребенку пониманіе самой возможности обозначать числа цифрами; всякая числовая фигура является уже въ сущности условнымъ знакомъ числа. Единственное отличіе числовой фигуры отъ индійской*) цифры, заключается лишь въ томъ, что въ числовой фигурѣ имѣются налицо всѣ отдѣльныя единицы числа, между тѣмъ какъ въ индійской цифрѣ этихъ отдѣльныхъ единицъ нѣтъ. Поэтому полезно начинать ознакомленіе съ цифрами съ римскихъ цифръ, ибо въ начертаніи этихъ цифръ есть много сходства съ числовыми фигурами. Такъ, цифры I, II, III означаютъ 1, 2, 3 отдѣльныхъ единицы—черточки. Но начертаніе слѣдующихъ чиселъ носитъ уже слѣды чисто символическаго способа обозначенія числа: напримѣръ, въ цифрѣ VII нѣтъ уже всѣхъ отдѣльныхъ единицъ числа, и пять единицъ его замѣнены *знакомъ* V.

Самое ознакомленіе съ индійскими цифрами полезно, какъ это указываетъ швейцарскій методистъ Штеклинъ, начинать со слѣдующихъ начертаній цифръ, гдѣ видны отдѣльныя единицы чиселъ: см. рис. № 27. Каждая изъ этихъ цифръ составлена изъ соотвѣтствующаго числа черточекъ. Значеніе такихъ обозначеній важно въ томъ смыслѣ, что они облегчаютъ ребенку пониманіе того, что числа можно обозначать условными знаками. Отъ цифръ Штеклина

*) Или, такъ называемой, „арабской" цифры.

легко уже перейти къ обыкновеннымъ индійскимъ цифрамъ. Замѣтимъ однако, что учитель не долженъ настаивать на усвоеніи на память цифръ Штеклина, ибо запоминаніе расположенія отдѣльныхъ черточекъ довольно трудно: достаточно, если учитель воспользуется этими цифрами лишь какъ намеками на возможность символически обозначать числа именно такъ, какъ это дѣлается при помощи индійскихъ цифръ.

§ 36. **Наименованія при записи дѣйствій.** При записи дѣйствій, производимыхъ для рѣшенія задачи, является

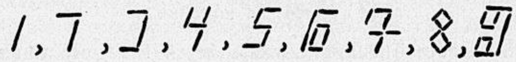


Рис. 27.

вопросъ о томъ, слѣдуетъ ли снабжать наименованіями числа, надъ которыми производятся дѣйствія. Многіе преподаватели считаютъ необходимымъ внимательно слѣдить за тѣмъ, чтобы учащіеся ставили наименованіе тамъ, гдѣ это требуется особымъ кодексомъ правилъ, установленныхъ нарочно для этого случая, и не ставили его тамъ, гдѣ это возбраняется правилами кодекса. Вотъ примѣрная запись дѣйствій по этой системѣ:

5 лош. + 3 лош. = 8 лош., или 5 лош. × 3 = 15 лош., или 8 лош. : 2 = 4 лош.

При этомъ ставится въ обязанность помнить, что множитель есть число отвлеченное, что, при дѣленіи именованнаго числа на именованное, частное есть число отвлеченное, а при дѣленіи именованнаго числа на отвлеченное, частное есть число именованное.

Между тѣмъ наша литература по методикѣ ариѳметики, можно сказать, категорически высказывается противъ постановки наименованій при числахъ, надъ которыми совершается какое-нибудь дѣйствіе. Противъ наименованій высказываются такіе методисты, какъ А. И. Гольденбергъ, С. Шохоръ-Троцкій, К. Арженниковъ, Ѳ. Егоровъ, Н. Мукаловъ и др. Вполнѣ опредѣленно высказывается по этому поводу А. И. Гольденбергъ: «Всѣ эти записи *) не слѣдуетъ сопровождать наименованіями; подлежащее наименованіе должно быть придаваемо только окончательному результату». К. Арженниковъ предлагаетъ снабжать наименованіемъ лишь результатъ каждаго дѣйствія. Вотъ примѣръ записи Арженникова:

$$14 \times 6 = 84; \text{ 84 копейки.}$$

Г. Шохоръ-Троцкій высказывается по этому вопросу не столь опредѣленно, но и онъ держится того мнѣнія, что записи наименованій при числахъ «далеко не изящны». Очень опредѣленно высказываются гг. Мрочекъ и Филипповичъ въ «Педагогикѣ Математики»: «Результатъ дѣйствія долженъ быть истолкованъ, сообразуясь со смысломъ вопроса и содержаніемъ задачи, но никакими этикетками снабжать числа при дѣйствіяхъ надъ ними нельзя».

Мы вполнѣ раздѣляемъ только что приведенную точку зрѣнія; вполнѣ достаточно снабжать наименованіемъ лишь результатъ дѣйствія—это наименованіе покажетъ, что учащійся понимаетъ, къ какимъ предметамъ онъ относитъ полученный числовый результатъ. Замѣтимъ, что при этомъ получается большое *однообразіе* системы записыванія наименованій, каковую легко поэтому усвоить учащемуся. Между тѣмъ, при обычной на практикѣ системѣ записыванія наименованій, учащіеся весьма часто впадаютъ въ ошибки, навлекая при этомъ на себя кары со стороны преподавателя. Защищаемая здѣсь система избавляетъ учащихся отъ излишнихъ хлопотъ и непріятностей при

*) Т.-е. записи дѣйствій.

прохожденіи школьнаго курса ариѳметики. Защитники обычной системы наименованій полагаютъ, что, ставя наименованія, учащіеся пріучаются сознательно относиться къ выполняемому ими дѣйствію. Но этотъ взглядъ глубоко ошибоченъ. Прежде всего замѣтимъ, что часто бываетъ, что учащіеся лишь механически запоминаютъ, гдѣ надо и гдѣ не нужно ставить наименованій. Далѣе слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что сознательное отношеніе къ дѣйствію должно базироваться не на постановкѣ наименованій, а должно вытекать изъ пониманія цѣли дѣйствія и способовъ выполненія дѣйствія. Пусть, напримѣръ, нужно узнать, сколько стоятъ 5 фунтовъ товара, каждый фунтъ котораго стоитъ 3 коп. Въ этомъ случаѣ вполнѣ достаточно, если учащійся пойметъ, что 5 фунтовъ стоятъ 5 разъ по 3 копейки и, что, слѣдовательно, для полученія искомой стоимости, слѣдуетъ 3 помножить на 5; при полученномъ результатѣ полезно для памяти поставить наименованіе (копейки).

Во всякомъ случаѣ весьма удивительно и печально, что на практикѣ весьма распространена именно та система постановки наименованій, которая отвергнута нашей методической литературой *).

ГЛАВА VIII.

Вторая, третья и четвертая ступени (числа отъ 1 до 20, отъ 1 до 100, отъ 1 до 1000 и болѣе).

§ 37. **Вторая ступень. Переходъ отъ 1-го десятка ко второму и обратно.** Въ § 12 мы дали уже общую характеристику второй ступени и ея отличія отъ 1-ой ступени. Здѣсь мы должны еще разъ подчеркнуть то обстоятельство, что для

*) Само собой разумѣется, что постановка наименованій при числахъ необходима, если рѣчь идетъ о составныхъ именованныхъ числахъ.

сознательнаго усвоенія такихъ сложеній, какъ 8+7, или 6+9 и т. д. нужно предварительно научить дѣтей *дополнять* однозначное число до 10. Ребенокъ долженъ научиться отвѣчать на такіе вопросы: «сколько нужно добавить къ 7 (или 8, или 6), чтобы получить 10». Если это усвоено, то переходъ отъ 1-го десятка ко 2-му, который имѣетъ мѣсто при упомянутыхъ сложеніяхъ (8+7, 6+9 и т. д.), не представитъ особыхъ затрудненій. Хорошимъ нагляд-

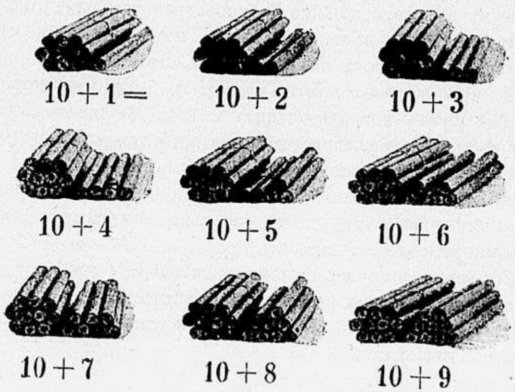


Рис. 28.

нымъ пособіемъ въ этомъ случаѣ могутъ служить палочки (единицы). При сложеніи, напримѣръ, 8+7 ребенокъ добавляетъ къ 8 палочкамъ еще 2 палочки, *перевязываетъ* ниткой полученные 10 палочекъ; къ полученному *десятку* присоединяются остальныя 5 палочекъ, и читается названіе окончательнаго результата.

Тѣ же палочки явятся хорошимъ пособіемъ при выполненіи такихъ трудныхъ случаевъ вычитанія, какъ 15—7, или 14—8 и т. д., то-есть при переходѣ изъ второго десятка

къ первому. Имѣя одну пачку въ 10 палочекъ и 5 отдѣльныхъ палочекъ, ребенокъ легко догадается скинуть сначала 5 отдѣльныхъ палочекъ, затѣмъ *развяжетъ* пачку и скинетъ еще 2 палочки, при чемъ въ остаткѣ получится 8 палочекъ. Здѣсь ребенокъ впервые встрѣчается съ *раздробленіемъ* десятка въ единицы, при чемъ это раздробленіе совершается осязательно-наглядно при помощи *развязыванія* пачки.

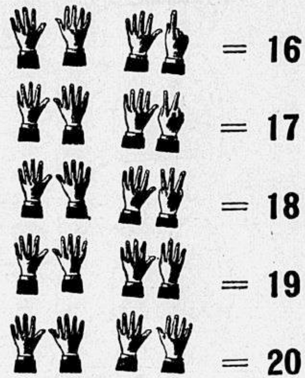


Рис. 29.

Вообще наборъ палочекъ слѣдуетъ признать весьма и весьма хорошимъ нагляднымъ пособіемъ, дешевымъ и, слѣдовательно, доступнымъ, и весьма осязательнымъ.

§ 38. **Числа второго десятка въ наглядныхъ задачникахъ.** Мы приводимъ здѣсь 3 снимка изъ трехъ наглядныхъ задачниковъ: первый изъ «Дѣтскаго міра въ числахъ» Д. Л. Волковскаго, второй—изъ «Нагляднаго сборника ариѳметическихъ задачъ» гг. Борисова и Сатарова, а третій изъ «Нагляднаго ариѳметическаго задачника» Н. Соколова (см. рис. №№ 28, 29 и 30). Очень удачно изображены числа 2-го десятка у Д. Л. Волковскаго въ видѣ перевязанной пачки карандашей и нѣсколькихъ отдѣльныхъ карандашей; менѣе удачно это изображеніе у гг. Борисова и Сатарова, ибо здѣсь десятокъ изображенъ въ видѣ двухъ группъ по 5, а не въ видѣ одного цѣлаго; но совсѣмъ неудачно изображены эти числа въ книжкѣ Н. Соколова, гдѣ отдѣльныя единицы перваго десятка (пустые стаканы) совершенно другія, чѣмъ единицы второго десятка (стаканы съ чаемъ и ложками); далѣе здѣсь совершенно ускользаетъ идея о томъ, что всѣ единицы перваго десятка представляютъ одно цѣлое, о д н у счетную единицу.

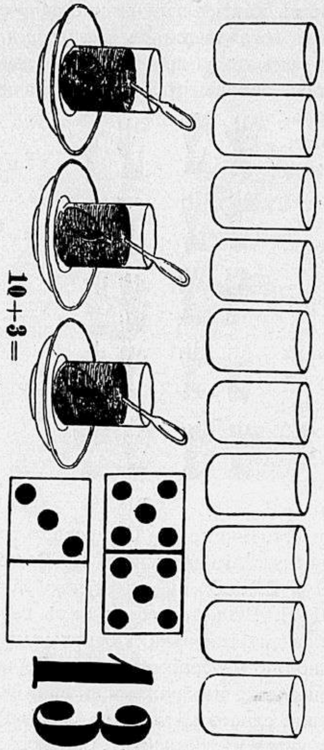


Рис. 30.

Во всякомъ случаѣ, на первыхъ порахъ, при наглядномъ ознакомленіи дѣтей съ десятичнымъ составомъ чиселъ, не слѣдуетъ о т л и ч а т ь чѣмъ бы то ни было единицъ 1-го десятка отъ единицъ 2-го десятка; разница должна заключаться лишь въ томъ, что первыя 10 единицъ соединены (перевязаны) въ одну группу.

§ 39. **Изображеніе чиселъ второго десятка и дѣйствій при п о м о щ и числовыхъ фигуръ.** Многіе методисты считаютъ необходимымъ примѣнять, какъ наглядное пособіе при изученіи чиселъ и дѣйствій надъ числами 2-го десятка, числовыя фигуры. Мы приводимъ здѣсь примѣрные снимки изъ «Дѣтскаго міра въ числахъ» Д. Л. Волковскаго, «Наглядного задачника» Н. Соколова и «Руководства къ первоначальному обученію ариѳметикѣ» д-ра Лая. (см. рис. №№ 31, 32 и 33). Первый рисунокъ изображаетъ сложеніе 8 и 5, при чемъ единицы обоихъ слагаемыхъ изображены для большей отличимости различными кружками; второй рисунокъ изображаетъ сложеніе 9 и 4, но всѣ еди-

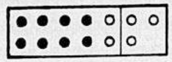


Рис. 31.

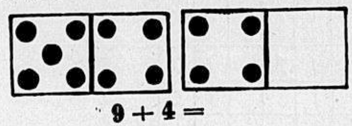


Рис. 32.

ницы того и другого слагаемаго изображены одинаково кружками; различимость устанавливается здѣсь самой формой расположенія кружковъ того и другого слагаемаго. Наконецъ, третій рисунокъ даетъ сложеніе 8+7 на числовыхъ фигурахъ Лая: единицы обоихъ слагаемыхъ здѣсь также различены различіемъ кружковъ (бѣлые и черные кружки).

Рис. 33.

На первомъ и третьемъ рисункѣ предположено, что ребенокъ, посмотрѣвъ на полученную въ результатѣ числовую фигуру, скажетъ, почти не считая, сколько у него получилось единицъ въ суммѣ. Это является несомнѣннымъ преимуществомъ этихъ рисунковъ надъ рисункомъ, заимствованнымъ изъ задачника Н. Соколова, гдѣ ребенку приходится для полученія результата пересчитать почти всѣ единицы (или перегруппировать кружки). Но зато отъ кружковъ перваго и третьяго рисунковъ прямо-таки рябитъ въ глазахъ; этого далеко нѣтъ на рисункѣ Н. Соколова, ибо тамъ больше *группъ* точекъ.

Слѣдуетъ все же признать, что числовыя фигуры въ разсматриваемомъ дѣлѣ не столь наглядны, какъ наборъ палочекъ; кромѣ того нужно имѣть въ виду, что числовыя фигуры всегда болѣе или менѣе искусственны.

§ 40. **Запись чиселъ. Принципъ помѣстнаго значенія цифръ.** Главнымъ дѣломъ является здѣсь ознакомленіе дѣтей съ принципомъ помѣстнаго значенія цифръ. Это ознакомленіе удобно вести въ слѣдующемъ порядкѣ, указанномъ приводимымъ здѣсь рисункомъ (см. рис. № 34). Сначала дѣти пишутъ сверху названія: десятокъ и единицы, при чемъ пользуются разлинованной на клѣтки бумагой; въ слѣдующей стадіи эти названія уже не пишутся; наконецъ совершается переходъ къ неразлинованной на клѣтки бумагѣ.

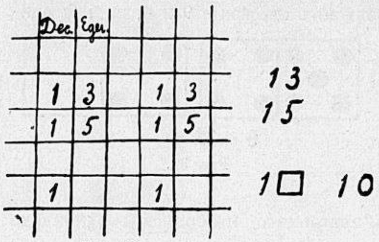


Рис. 34.

Самымъ послѣднимъ и наиболѣе труднымъ дѣломъ является ознакомленіе съ цифрой нуль. Переходя къ неразлинованной бумагѣ, дѣти должны писать число 10 при помощи цифры 1 и приставляемой къ ней пустой клѣтки, а затѣмъ обычнымъ путемъ (см. рис. № 34). Такимъ образомъ ребенокъ пойметъ, что нуль означаетъ пустую клѣтку, и что, если его не поставить, то цифра 1 будетъ означать не десятокъ, а единицу.

§ 41. **Счетъ въ предѣлахъ отъ 1 до 100. Сложеніе и вычитаніе.** При счетѣ въ предѣлахъ отъ 1 до 100, преимущественное вниманіе должно быть обращено на десятичную группировку чиселъ. Здѣсь весьма полезенъ, какъ наглядное пособіе, наборъ большого числа палочекъ; весьма интереснымъ для ребенка занятіемъ явится сортированіе палочекъ по десяткамъ, перевязыванье пачекъ по 10,

и слѣдующее затѣмъ сосчитыванье отдѣльныхъ пачекъ и оставшихся отдѣльныхъ единицъ. Ребята очень часто обладаютъ большой склонностью къ «наведенію порядка», и въ данномъ случаѣ мы даемъ большую и благодарную пищу этой склонности. Очень полезно въ этомъ смыслѣ предлагать ребенку сосчитывать такимъ же способомъ число орѣховъ, число книжекъ, число игрушекъ (солдатиковъ) и т. д.,—занятіе получится и интересное и поучительное. Вообще, чѣмъ активнѣе ребенокъ будетъ участвовать въ процессѣ счета, тѣмъ лучше.

Сложеніе и вычитаніе въ предѣлахъ отъ 1 до 100 слѣдуетъ изучать съ большой осторожностью, постепенно переходя отъ болѣе легкихъ случаевъ къ болѣе труднымъ. Здѣсь слѣдуетъ строго отличать тѣ случаи, когда мы при сложеніи и вычитаніи не переходимъ за предѣлы полнаго десятка, отъ тѣхъ случаевъ, когда этотъ переходъ совершается. Такой переходъ не совершается, напримѣръ, при сложеніи чиселъ 35 и 23, ибо 5+3=8 *); за предѣлы полнаго десятка мы перейдемъ въ случаѣ сложенія 38+25, ибо 8+5=13, или въ случаѣ вычитанія 75—28, ибо здѣсь нужно одинъ изъ 7 десятковъ раздробить въ единицы. Вторые случаи труднѣе первыхъ, и съ этихъ первыхъ случаевъ сложенія и вычитанія нужно начинать изученіе этихъ дѣйствій.

Весьма полезно, прежде чѣмъ перейти къ дѣйствіямъ надъ двухзначными числами, состоящими изъ десятковъ и единицъ, предварительно научить дѣтей дѣйствіямъ надъ числами, состоящими изъ круглыхъ десятковъ, какъ, напримѣръ, 20, 30, 40 и т. д. Дѣйствія надъ такими числами явятся, какъ мы уже указывали въ § 14, повтореніемъ дѣйствій надъ однозначными числами.

§ 42. **Умноженіе.** Изученіе умноженія въ предѣлахъ отъ 1 до 100 естественнымъ образомъ разбивается на слѣ-

*) Или вычитаніи 38—23 (ибо 8—3=5).

дующіе 3 отдѣла: 1) умноженіе однозначныхъ чиселъ (напримѣръ, 8×9=72), 2) умноженіе двухзначнаго числа на однозначное (напримѣръ, 25×3) и 3) умноженіе однозначнаго числа на двухзначное (напримѣръ, 3×24). Первый отдѣлъ сводится къ завершенію таблицы умноженія; при этомъ полезно, чтобы дѣти сами составляли таблицу умноженія. Но отсюда не слѣдуетъ, чтобы дѣти *заучивали* ее наизусть; знаніе на память таблицы умноженія должно получиться само собой, путемъ продолжительныхъ и частыхъ упражненій. Извѣстно, что даже очень простыя правила часто основательно забываются, если ими никогда или весьма рѣдко пользуются; и наоборотъ, нерѣдко очень сложныя правила запоминаются прекрасно, въ виду частаго примѣненія ихъ—въ этомъ упражненіи и примѣненіи заключается вся суть дѣла.

При умноженіи *двухзначнаго числа на однозначное* дѣти пользуются уже вполнѣ десятичнымъ составомъ чиселъ, такъ какъ умножаютъ отдѣльно десятки и единицы множимаго на множителя (напримѣръ, 25×3=20×3+5×3=60+15 =75). При этомъ весьма полезно употреблять въ качествѣ нагляднаго пособія опять-таки тѣ же палочки, перевязанныя въ пучки по 10 палочекъ. При умноженіи *однозначнаго числа на двухзначное* важно прежде всего, чтобы ребенокъ понялъ, что умноженіе однозначнаго числа на 10 сводится въ сущности къ тому, что каждая единица числа замѣняется десяткомъ: такъ, 3×10=3 десяткамъ; послѣ этого ребенокъ уже легко разберется въ такихъ случаяхъ умноженія, какъ, напримѣръ, 3×20 (3×20=3×10+3×10), 3×24 (3×24=3×20+3×4).

§ 43. **Дѣленіе.** При изученіи дѣленія слѣдуетъ различать случаи, когда 1) двухзначное число дѣлится на однозначное, и частное—число двухзначное (48 : 2=24), 2) двухзначное число дѣлится на однозначное, и частное—однозначное число (48 : 6=8) и 3) двухзначное число дѣ-

лится на двухзначное, и частное число однозначное (75 : 25=3). Въ первомъ изъ этихъ случаевъ слѣдуетъ отдѣльно разобрать примѣры, когда число десятковъ и число единицъ въ отдѣльности дѣлятся на дѣлителя (напримѣръ 48 : 2), и примѣры, когда числа десятковъ и единицъ въ отдѣльности не дѣлятся на дѣлителя (напримѣръ, 78 : 3). При дѣленіи, напримѣръ, 48 на 2 мы отдѣльно дѣлимъ 4 дес. на 2 и 8 на 2, а при дѣленіи 78 на 3, мы разбиваемъ 78 на 6 дес. и 18 единицъ, и отдѣльно дѣлимъ 6 дес. на 3 и 18 на 3.

Дѣленіе двухзначнаго числа на однозначное при однозначномъ частномъ сводится къ провѣркѣ дѣйствія посредствомъ таблицы умноженія, то есть къ *угадыванію* частнаго. Такъ, 48 : 6=8, ибо 8×6=48, и 48 : 6 *не* равно 7, ибо 7×6 не равно 48. Замѣтимъ, что такого рода примѣры дѣленія очень полезны для объединенія обоихъ видовъ дѣленія (см. §29); и въ томъ и въ другомъ случаѣ правильность результата провѣряется при помощи умноженія. Такой же провѣркой пользуются и при дѣленіи двухзначнаго числа на двухзначное, такъ, 75 : 25=3, т. к. 25×3=75.

§ 44. **Счетный приборъ д-ра Лая.** Д-ръ Лай построилъ для облегченія изученія чиселъ и дѣйствій надъ числами въ предѣлахъ первой сотни особый счетный приборъ, рисунокъ котораго мы здѣсь приводимъ (см. рис. №35). Этотъ приборъ состоитъ изъ рамы съ протянутыми парами горизонтальныхъ проволокъ, на которыя насажены шары, расположенные по конфигураціямъ Лая (числовыя фигуры Лая). На каждой парѣ проволокъ имѣется, какъ слѣва, такъ и справа по 10 шаровъ; лѣвыя окрашены въ бѣлый цвѣтъ—они должны изображать десятки, а правые въ красный цвѣтъ—они изображаютъ единицы; всѣхъ шаровъ—100, при чемъ расположеніе шаровъ такое, что какъ по направленію слѣва направо, такъ и по направленію сверху внизъ, получаются числовыя фигуры Лая. Кромѣ шаровъ имѣется еще особая заслонка, пользуясь которой можно закрывать и открывать любые шары.

Д-ръ Лай рекомендуетъ демонстрировать дѣтямъ на этомъ приборѣ числа отъ 1 до 100, а также изучать съ ними всѣ четыре дѣйствія надъ числами въ этихъ предѣлахъ. Рис. № 36 показываетъ сложеніе (24+18), рис. № 37

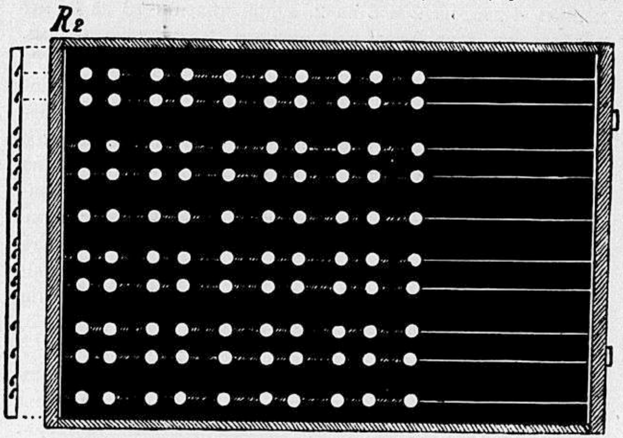


Рис. 35.

вычитаніе, сопровождаемое заимствованіемъ (43—15), и рис. № 38—дѣленіе (25 : 2) съ остаткомъ *). Основная мысль д-ра Лая, какъ сторонника нагляднаго (зрительнаго) воспріятія числа, заключается, очевидно, въ томъ, чтобы результатъ дѣйствія представить въ видѣ, доступномъ непосредственному воспріятію (безъ сосчитыванья). Такъ, окончательный результатъ при вычитаніи 43×15

*) Рисунки заимствованы изъ «Руководства къ первоначальному обученію ариѳметикѣ» д-ра Лая.

представленъ въ видѣ 2 десятковъ бѣлыхъ шаровъ и 8 красныхъ шаровъ, изъ чего сразу усматривается, что разность равна 28.

Не надо, однако, забывать, что для того, чтобы представить результатъ въ такой простой формѣ, нужна довольно сложная процедура открыванія и закрыванія шаровъ (какъ

Сложеніе.

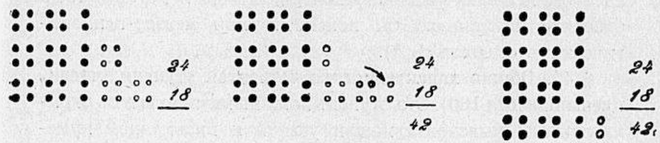


Рис. 36.

это видно изъ рисунка № 37). Вообще замѣтимъ, что, если наглядное воспріятіе всѣхъ *отдѣльныхъ* единицъ чиселъ играетъ довольно большую роль при изученіи чиселъ перваго десятка, то при изученіи чиселъ первой сотни,

Вычитаніе, сопровожд. заимствованіемъ.

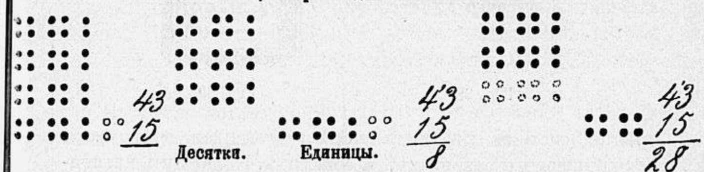


Рис. 37.

эта роль отпадаетъ: здѣсь важно воспринимать отдѣльно лишь десятки и единицы числа (до 9). Между тѣмъ у д-ра Лая имѣются налицо всѣ отдѣльныя единицы десятковъ, что усложняетъ лишь приборъ и обращеніе съ нимъ.

Приборъ д-ра Лая является, по нашему мнѣнію, громоздкимъ и сложнымъ орудіемъ и притомъ ненужнымъ, ибо и безъ него можно (на гораздо болѣе простыхъ пособіяхъ) пояснить весьма внятно и наглядно сущность дѣйствій надъ числами первой сотни, а также сдѣлать доступнымъ ребенку десятичный составъ чиселъ. Во всякомъ случаѣ мы не можемъ раздѣлять того восторга, въ который д-ръ Лай впадаетъ по поводу своего же прибора; вотъ что говоритъ Лай о своемъ приборѣ: «существуетъ ли какое-либо другое наглядное пособіе, всѣ детали выполненія котораго были бы такъ обоснованы теоретически и которое такъ блестяще выдержало бы испытаніе при методо-психологическихъ опытахъ?!» *).

§ 45. **Общая характеристика четвертой ступени (числа, превышающія 100)**. Эта ступень должна начинаться съ окончательнаго выясненія нашей устной и письменной нуме-

Рис. 38.

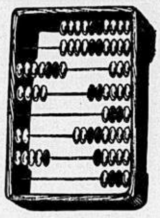


Рис. 39.

раціи (системы счисленія). Здѣсь учащійся знакомится съ понятіемъ о разрядахъ, о классахъ. Полезнымъ нагляднымъ пособіемъ въ этомъ смыслѣ является наши русскіе счеты (см. рис. № 39); весьма важнымъ упражненіемъ для болѣе реальнаго представленія чиселъ, превышающихъ 100, является именно откладываніе различныхъ чиселъ на счетахъ. Полезно также, въ виду распространенности счетовъ у насъ въ Россіи, научить ребятъ производить

*) Замѣтимъ, что д-ръ Лай построилъ также приборъ для учениковъ, въ уменьшенномъ видѣ воспроизводящій большой приборъ.

основныя выкладки, въ особенности сложеніе и вычитаніе, на счетахъ.

Но главнымъ центромъ вниманія на этой ступени должно быть изученіе механизма *письменнаго* производства 4 дѣйствій надъ числами. Не останавливаясь на подробностяхъ этого изученія, мы укажемъ лишь на то, что и здѣсь необходима осторожная постепенность въ переходѣ отъ болѣе легкихъ дѣйствій къ болѣе труднымъ. Такъ, напримѣръ, изучая сложеніе трехзначныхъ чиселъ, нужно начинать съ такихъ случаевъ, когда сумма десятковъ и единицъ чиселъ не превышаетъ сотни, то есть нѣтъ перехода черезъ сотню (напримѣръ, 325+448); и уже послѣ этого слѣдуетъ разобрать такіе примѣры, какъ сложеніе 478+345, когда совершается переходъ черезъ сотню. Или, при изученіи дѣленія многозначнаго числа на однозначное, нужно начинать съ разсмотрѣнія такихъ примѣровъ, какъ 846 : 2, то есть когда каждая разрядная цифра дѣлится въ отдѣльности на дѣлителя; затѣмъ уже слѣдуетъ перейти къ болѣе труднымъ случаямъ дѣленія, какъ, напримѣръ 346 : 2, или 294 : 3 и т. д. Ясно, наконецъ, что изученіе умноженія и дѣленія многозначныхъ чиселъ должно начинаться съ умноженія и дѣленія многозначнаго числа на *однозначное*.

Слѣдуетъ также помнить, что при изученіи дѣйствій надъ числами любой величины, своевременно знакомить дѣтей съ опредѣленіями дѣйствій, со способами ихъ провѣрки и даже съ нѣкоторыми ихъ свойствами, какъ напримѣръ, съ перемѣстительнымъ и сочетательнымъ законами дѣйствій *); правда, еще на первой, второй и третьей сту-

*) Какъ извѣстно, перемѣстительный законъ, напримѣръ, умноженія заключается въ томъ, что величина произведенія нѣсколькихъ множителей не мѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей. Сочетательный же законъ заключается въ томъ, что величина произведенія не измѣняется, если соединить множителей въ группы, произвести умноженіе по группамъ, и полученные результаты перемножить.

пеняхъ дѣти могутъ практически ознакомиться съ этими законами; напримѣръ, они могутъ знать, что $5+3=3+5$, или что $5\times3=3\times5$; здѣсь идетъ рѣчь о доказательствахъ и формальныхъ опредѣленіяхъ этихъ свойствъ.

ГЛАВА IX.

Дроби. Мѣры. Составныя именованныя числа. Квадратныя и кубическія мѣры.

§ 46. **Распредѣленіе курса дробей. I ступень (наглядныя пособія).** Въ обычныхъ систематическихъ учебникахъ ариѳметики, какъ-то: учебники г. Киселева, Малинина и Буренина и другихъ, курсъ дробныхъ чиселъ начинается лишь послѣ окончательнаго изученія четырехъ основныхъ дѣйствій надъ цѣлыми числами, отвлеченными и именованными. Если подобное распредѣленіе учебнаго матеріала допустимо еще (съ большой натяжкой) въ *систематическихъ* курсахъ, то совершенно невозможно распредѣлить такимъ образомъ изученіе *начальной* ариѳметики. Понятіе о дроби настолько, въ сущности, просто и жизненно, что его можно дать ребенку уже при изученіи первой ступени (1—10). Здѣсь можно ознакомить ребенка съ такими простыми и общеупотребительными дробями, какъ $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ (половина, четверть или четверка, восьмая или восьмушка). Наилучшимъ нагляднымъ пособіемъ является въ этомъ случаѣ полоска бумаги или палочка, разрѣзаемая на части;*) полезно также производить дѣленіе яблока, апельсина и другихъ удободѣлимыхъ предметовъ на части. Весьма важно также употребленіе складного аршина и

*) Полезно также чертить прямой отрѣзокъ и дѣлить его на части; прямой отрѣзокъ, какъ вообще всѣ чертежи, производимые въ тетради, относятся къ числу, такъ называемыхъ, *графическихъ* пособій.

ознакомленіе въ связи съ этимъ съ мѣрами: полъ-аршина, четверть аршина.

Можно также рекомендовать употребленіе вѣсовъ съ тѣмъ, чтобы, напримѣръ, на одну чашку вѣсовъ класть гирю въ одинъ фунтъ, а на другую—для равновѣсія—2 гири по $^1/_2$ фунта, или 4 гири по $^1/_4$ фунта; можно такъ же производить взвѣшиваніе фунта муки или сахара, $^1/_2$ фунта, $^1/_4$ фунта—такія вѣсовыя упражненія способны сильно заинтересовать ребенка и развить въ немъ духъ изслѣдованія; кромѣ того слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что практическія работы ребенка, вродѣ вѣсовыхъ, заставляютъ ребенка *почти всѣми* своими органами чувствъ участвовать въ воспріятіи понятія о дробяхъ, и поэтому результаты такого всесторонняго воспріятія будутъ наиболѣе прочными и реальными.

Пользуясь вышеупомянутыми пособіями, легко дать понять ребенку, что $^1/_2$ больше, чѣмъ $^1/_4$, и что $^1/_4$ больше, чѣмъ $^1/_8$.

§ 47. **II ступень. Мѣры, какъ наглядное пособіе при изученіи дробей.** При изученіи чиселъ II ступени (1—20) можно ознакомить ребятъ съ другими, менѣе употребительными долями единицы, какъ то: $^1/_3$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_7$, $^1/_{12}$, $^1/_{16}$. Въ связи съ изученіемъ этихъ долей единицы полезно ознакомленіе съ мѣрами, какъ то: сажень и аршинъ ($=^1/_3$ сажени), футъ ($=^1/_7$ сажени), вершокъ ($=^1/_{16}$ аршина), дюймъ ($=^1/_{12}$ фута), линія ($=^1/_{10}$ дюйма). Самое ознакомленіе съ этими мѣрами должно быть безусловно практическимъ, т.-е. ребенокъ долженъ на самомъ дѣлѣ производить измѣренія, пользуясь упомянутыми мѣрами: онъ можетъ измѣрять длину бичевокъ, палочекъ, вышину предметовъ, размѣры комнатъ и т. д. Лишь при этомъ условіи ознакомленіе ребенка съ мѣрами станетъ интереснымъ и поучительнымъ для него дѣломъ. Въ противномъ случаѣ запоминаніе различныхъ мѣръ (съ ихъ различными единичными отношеніями) ляжетъ лишь тяжелымъ бременемъ на умъ ребенка.

На этой же ступени можно разъяснить ребенку, что $^1/_2={}^2/_4$ или что $^1/_4={}^2/_8$, а $^1/_2={}^4/_8$, что $^1/_5={}^2/_{10}$. Здѣсь ребенокъ впервые знакомится съ выраженіемъ одной и той же дроби въ различныхъ доляхъ единицы. Далѣе на этой ступени умѣстно рѣшеніе такихъ простыхъ задачъ, какъ, напримѣръ, «фунтъ товара стоитъ 16 коп., сколько стоитъ $^1/_2$ фунта или $^1/_4$ фунта?» или «за $^1/_4$ фунта товара заплачено 3 коп., сколько стоитъ цѣлый фунтъ или $^1/_2$ фунта». Рѣшеніе подобныхъ задачъ явится введеніемъ въ изученіе такихъ вопросовъ, какъ нахожденіе части числа и по части числа всего числа.

§ 48. **III ступень (1—100). Дѣйствія надъ дробями.** На этой ступени слѣдуетъ ознакомить ребятъ съ другими долями единицы, какъ то: $^1/_{32}$ (лотъ$=\,^1/_{32}$ фунта), $^1/_{60}$ (минута$=\,^1/_{60}$ часа, секунда$=\,^1/_{60}$ минуты), $^1/_{40}$ (фунтъ$=\,^1/_{40}$ пуда), $^1/_{24}$ (десть$=$ 24 листамъ), $^1/_{20}$ (стопа$=$20 дестей), $^1/_{96}$ (золотникъ$=\,^1/_{96}$ фунта) и т. д. Само собой разумѣется, что это ознакомленіе съ различными долями единицы должно сопровождаться изученіемъ соотвѣтствующихъ мѣръ и практическимъ примѣненіемъ ихъ, какъ указано въ § 47.

На этой ступени можно уже ознакомить ребятъ и съ дробями, состоящими изъ нѣсколькихъ долей единицы, какъ то: $^3/_4$, $^2/_3$, $^4/_5$ и т. д. Въ связи съ этимъ слѣдуетъ разсмотрѣть происхожденіе дробей отъ дѣленія одного числа на другое: такъ, полезно рѣшать такіе вопросы: «3 яблока надо раздѣлить между 4 мальчиками, сколько получитъ каждый», или «за 2 фунта подсолнуховъ заплачено 7 коп., сколько стоитъ одинъ фунтъ».

Здѣсь же можно пройти сложеніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями, или такихъ дробей съ неодинаковыми знаменателями, общій знаменатель которыхъ усматривается очень легко (напримѣръ, $^1/_2+{}^1/_4$ или $^5/_8-{}^1/_2$ и т. д.). Далѣе слѣдуетъ изученіе вопросовъ о нахожденіи части числа и по части числа всего числа: эти два дѣйствія отнюдь не слѣдуетъ проходить въ связи съ умноженіемъ и дѣленіемъ на дробь, ибо это явится слишкомъ поспѣшными и трудными для ребятъ обобщеніями.

Что касается дѣйствій умноженія и дѣленія, то на этой ступени достаточно ознакомить ребятъ съ умноженіемъ и дѣленіемъ дробей на *цѣлое* число; можно, напримѣръ, рѣшать такіе вопросы: «3 мальчикамъ дали по $^1/_2$ фунту подсолнуховъ, сколько получатъ всѣ вмѣстѣ», или «$^3/_4$ фунта хлѣба надо раздѣлить поровну между 2 мальчиками; сколько получитъ каждый».

Послѣ изученія дѣйствій надъ числами любой величины можно ознакомить дѣтей со способами начертанія дробей, а также съ опредѣленіемъ дроби и четырьмя дѣйствіями надъ ними въ систематической формѣ. Также слѣдуетъ изучить простѣйшія десятичныя дроби и четыре дѣйствія надъ ними. Нѣкоторые методисты рекомендуютъ изучать десятичныя дроби раньше обыкновенныхъ, исходя изъ тѣхъ соображеній, что счисленіе десятичныхъ дробей является естественнымъ продолженіемъ счисленія цѣлыхъ чиселъ. Мы бы согласились съ такимъ порядкомъ изученія, если бы рѣчь шла не о Россіи, а о такой странѣ, какъ Франція, гдѣ уже давно введена метрическая система мѣръ, построенная на десятичномъ принципѣ. Но у насъ въ Россіи болѣе доступными для дѣтскаго пониманія слѣдуетъ считать доли вродѣ $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_3$ и т. д., ибо этимъ долямъ соотвѣтствуетъ дѣленіе нашихъ мѣръ длины, вѣса и т. д.; поэтому изученіе дробей слѣдуетъ начинать именно съ этихъ долей единицы.

§ 49. **Дробные счеты.** Существуетъ спеціальное наглядное пособіе для изученія дробныхъ чиселъ и дѣйствій надъ ними—именно дробные счеты. Эти счеты представляютъ изъ себя вертикально стоящую раму съ горизонтальными проволоками; на первой проволокѣ помѣщенъ длинный передвижной цилиндръ (деревянный), изображающій цѣлую единицу; на второй проволокѣ помѣщены два равныхъ другъ другу цилиндра, въ суммѣ составляющіе одинъ первый цилиндръ,—слѣдовательно каждый изъ этихъ цилиндровъ изображаетъ половину; на третьей проволокѣ помѣщены три равныхъ цилиндра, изображающіе $1/3$ единицы; далѣе идутъ 4 равныхъ цилиндра—четвертыя доли единицы.

Дробные счеты являются довольно дорогимъ и громоздкимъ приборомъ; въ то же время единицы на дробныхъ счетахъ связаны съ опредѣленной проволокой, между тѣмъ какъ тѣ же доли единицы, будучи изображены въ видѣ частей полоски или палочки, являются удобопереносимыми. Вотъ почему слѣдуетъ предпочитать дробнымъ счетамъ именно такія простыя пособія, какъ полоски бумаги, палочки, бичевки и т. д. Вообще, чѣмъ проще и безхитростнѣе данное учебное пособіе, тѣмъ лучше.

Вотъ что говоритъ о дробныхъ счетахъ покойный А. И. Гольденбергъ: «Легко обойтись и безъ этого нагляднаго пособія, которое къ тому же недоступно сельской школѣ вслѣдствіе дороговизны. Полоски бумаги, длинныя ломкія спички (солома), прутики, бичевки и тому подобные предметы представляютъ простыя, вполнѣ цѣлесообразныя и достаточныя пособія для уясненія дѣтямъ простѣйшихъ понятій о дроби» *).

§ 50. **Мѣры и составныя именованныя числа.** Мы уже указывали въ предыдущихъ §§, что ознакомленіе съ мѣрами должно итти постепенно по мѣрѣ прохожденія отдѣльныхъ ступеней, при чемъ это знакомство съ мѣрами должно быть параллельнымъ изученію соотвѣтствующихъ дробей и должно совершаться путемъ цѣлаго ряда практическихъ упражненій. Такъ, ознакомленіе съ мѣрами длины предполагаетъ дѣйствительное измѣреніе дѣтьми длинъ, ознакомленіе съ мѣрами вѣса—дѣйствительное взвѣшиваніе; ознакомленіе съ мѣрами времени, предполагаетъ изученіе показанія часовъ и измѣреніе при помощи часовъ опредѣленныхъ промежутковъ времени можно, напримѣръ, опредѣлять количество времени, необходимое для обѣда, или для прочтенія какого-нибудь стихотворенія, или для считанія до ста и т. д. *Всюду и во всемъ нужно поддерживать въ ребенкѣ духъ изслѣдователя.* При знакомствѣ съ монетами ребенку слѣдуетъ предлагать рядъ задачъ практическаго содержанія вродѣ, напримѣръ, такой: «Мама должна заплатить извозчику 45 коп.; она дала ему три двугривенныхъ; сколько же извозчикъ долженъ дать сдачи?»

*) См. «Бесѣды по счисленію» А. И. Гольденберга, стр.

Что касается составныхъ именованныхъ чиселъ, то-есть именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ мѣрахъ различнаго наименованія, то достаточно ограничиться изученіемъ лишь такихъ именованныхъ чиселъ, которыя выражены въ мѣрахъ двухъ наименованій, какъ, напримѣръ, 2 пуд. 25 фун., или 5 лот. 2 зол.; или 4 год. 5 мѣс. Дѣло въ томъ, что болѣе сложныя составныя именованныя числа встрѣчаются на практикѣ очень рѣдко; зная же, какъ справляться съ двухсоставнымъ именованнымъ числомъ, дѣти безъ труда, въ случаѣ надобности, справятся и съ болѣе сложными составными именованными числами.

Кромѣ того слѣдуетъ помнить, что изученіе составныхъ именованныхъ чиселъ не должно быть предметомъ особаго отдѣла; ихъ можно изучать попутно при изученіи дѣйствій надъ числами въ различныхъ ступеняхъ. Такъ, раздробленіе и превращеніе можно изучать параллельно съ изученіемъ дѣйствій умноженія и дѣленія обыкновенныхъ чиселъ: такое изученіе именованныхъ чиселъ явится лишь практическимъ примѣненіемъ умѣнія дѣтей производить вообще дѣйствія надъ числами. *)

*) Многіе изъ видныхъ русскихъ методистовъ стоятъ именно на такой точкѣ зрѣнія; къ этимъ методистамъ слѣдуетъ отнести А. И. Гольденберга, С. Шохоръ-Троцкаго, Н. Мукалова и др.

§ 51. **Квадратныя и кубическія мѣры.** Изученіе квадратныхъ и кубическихъ мѣръ, является, какъ извѣстно, дѣломъ очень труднымъ для дѣтей. Особенно трудно дается пониманіе того, что, напримѣръ, кв. аршинъ въ 9 разъ меньше кв. сажени, или что куб. аршинъ въ 27 разъ меньше куб. сажени, тогда какъ линейный аршинъ только въ 3 раза меньше линейной сажени. Далѣе затрудняетъ дѣтей *отчетливое* пониманіе того, почему при умноженіи чиселъ, выражающихъ длину и ширину площади въ *линейныхъ* единицахъ, мы получаемъ произведеніе, выражающее величину площади въ *квадратныхъ* единицахъ *). Для облегченія пониманія вопроса часто пользуются чертежами, исполняемыми на классныхъ доскахъ и въ тетрадяхъ; пользуются также ящиками съ кубиками, и при помощи этихъ кубиковъ демонстрируютъ объемныя соотношенія.

Но дѣйствительное пониманіе вопроса явится у дѣтей лишь въ томъ случаѣ, если заставить дѣтей на практикѣ производить измѣреніе объемовъ и площадей тѣлъ; такъ, дѣти могутъ измѣрять площади половъ комнатъ и сравнивать ихъ другъ съ другомъ, что будетъ для нихъ чрезвычайно интереснымъ занятіемъ, могутъ измѣрять площадь стола, стѣны, участковъ земли и т. д.—варіанты здѣсь безконечны. Измѣреніе объемовъ можно соединять съ рѣшеніемъ такихъ глубокоинтересныхъ вопросовъ, какъ, напримѣръ, опредѣленіе количества воздуха, приходящагося на долю одного человѣка въ комнатѣ, опредѣленіе вѣса воздуха въ комнатѣ, вѣса кусковъ тѣла правильной формы. Полезно также (и это очень оживитъ дѣло), сравнивать объемъ тѣла, найденнаго измѣреніемъ длины, ширины и вышины, съ объемомъ, найденнымъ при помощи мензурки.

---

*) Аналогичное справедливо и для объема тѣлъ (напр. комнаты).

Въ этомъ дѣлѣ, какъ и вообще при преподаваніи ариѳметики слѣдуетъ исходить изъ принципа возможно большей самодѣятельности дѣтей: *ученіе дѣтей должно быть ихъ творчествомъ.*

ГЛАВА X.

Наглядныя пособія.

§ 52. **Три категоріи наглядныхъ пособій. Опасность излишнихъ увлеченій.** Въ настоящее время едва ли найдутся методисты, которые стали бы возражать противъ пользы примѣненія наглядныхъ пособій при преподаваніи ариѳметики. Въ многочисленныхъ методикахъ ариѳметики можно найти болѣе и менѣе подробныя описанія различныхъ наглядныхъ пособій и указанія о томъ, какъ ими пользоваться. Наглядныя пособія можно раздѣлить на слѣдующія три категоріи: 1) Естественныя пособія, существующія сами по себѣ въ окружающей насъ природѣ—таковы, напримѣръ, различные окружающіе насъ предметы.

2) Искуственныя покупныя пособія—какъ то: счеты, счетные приборы (напримѣръ, приборъ Лая), и т. д.

3) Пособія, создаваемыя самими дѣтьми—сюда относятся собственные чертежи дѣтей*), выклеиваемые ими кубики, нарѣзаемыя палочки и т. д.

Значеніе естественныхъ пособій ясно понималъ еще Леонардо да Винчи, великій художникъ-мыслитель XV в., говорившій: «Зачѣмъ мнѣ учиться и добывать знанія изъ книгъ, когда я могу учиться у общей учительницы всѣхъ людей вообще и мудрецовъ въ частности, у природы».

---

*) Такъ называемыя графическія пособія.

Природа первый и главный учитель человѣка; учитель, начинающій заниматься съ малолѣтнимъ ребенкомъ, долженъ основывать свое преподаваніе на тѣхъ впечатлѣніяхъ и знаніяхъ, которыя ребенокъ успѣлъ получить изъ своихъ собственныхъ наблюденій жизни природы и людей. Чѣмъ проще и естественнѣе наглядное пособіе, тѣмъ лучше; всякое осложненіе можетъ лишь запугать ребенка или отвлечь его вниманіе отъ существеннаго. Вотъ почему мы возставали, между прочимъ, противъ такихъ пособій, какъ дробные счеты (см. § 49) или какъ счетный приборъ д-ра Лая.

Однако наилучшимъ нагляднымъ пособіемъ слѣдуетъ считать тѣ пособія, которыя создаются самими дѣтьми. Являясь творцами пособій, дѣти лучше всего сживаются съ ними и съ тѣми ариѳметическими понятіями, которыя надлежитъ выяснить при помощи этихъ пособій. Въ этомъ случаѣ въ пониманіи извѣстнаго ариѳметическаго вопроса принимаютъ участіе почти всѣ органы чувствъ ребенка, и поэтому самое пониманіе дѣла является особенно отчетливымъ и полнымъ (см. также § 74).

При пользованіи наглядными пособіями слѣдуетъ однако твердо помнить, что, какъ и во всякомъ дѣлѣ, ими нельзя злоупотреблять и нельзя пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда легко можно обойтись и безъ нихъ. Правда, нужно признать, что дѣти вообще не склонны къ отвлеченному мышленію; они мыслятъ обыкновенно конкретно, основываясь на наглядныхъ образахъ вещей и явленій. Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ признать весьма нежелательнымъ явленіемъ, если учитель будетъ на каждомъ шагу пользоваться наглядными пособіями, не давая ни малѣйшаго простора независимому отъ пособій мышленію ребенка; особенно нежелательны такіе случаи, когда преподаватель старается разъяснить, при помощи наглядныхъ пособій, ребенку вещи, которыя онъ уже сообразилъ собственной смекалкой *)—этимъ можно лишь вызвать нетерпѣливую скуку у ребенка, а главное, можно отбить у него довѣріе къ его собственной сообразительной способности. Нельзя унижать нашъ умъ настолько, чтобы не давать ему и шагу сдѣлать безъ подпорки наглядными пособіями: плохо же будетъ въ этомъ случаѣ отточенъ умъ ребенка. Въ нашъ вѣкъ крайняго увлеченія наглядными пособіями это слѣдуетъ твердо помнить.

Ниже слѣдуетъ описаніе нѣкоторыхъ наглядныхъ пособій.

§ 53. 1) **Солома.** Соломой называютъ палочки, спички, употребляемыя для счета и уясненія механизма производства дѣйствій и десятичнаго состава чиселъ. Мы выяснили уже, что эти пособія по своей простотѣ и доступности заслуживаютъ особаго вниманія (см. § 37).

2) **Счеты.** a) *Торговые счеты.* Мы уже выяснили ихъ значеніе для усвоенія нумераціи чиселъ любой величины, а также для уясненія механизма производства ариѳметическихъ дѣйствій надъ большими числами (см. § 45).

b) *Шведскіе счеты.* Эти счеты очень похожи на русскіе торговые счеты (см. рис. № 40). Отличаются они отъ нихъ тѣмъ, что проволоки на нихъ могутъ быть вынимаемы изъ рамы, и поэтому на нихъ можно насаживать больше, чѣмъ по 10 шаровъ (число шаровъ на торговыхъ счетахъ равно неизмѣнно десяти).

Далѣе у шведскихъ счетовъ имѣется рядъ вертикальныхъ проволокъ (сверху)—см. рис. № 41, на которыя

*) Вотъ примѣръ: допустимъ, что рѣчь идетъ о сложеніи 35+27. Весьма возможно, что ребенокъ самъ сообразитъ, что полезно сначала къ 35 добавить 20, а затѣмъ еще 7 единицъ; въ этомъ случаѣ совершенно излишне настаивать на томъ, чтобы ребенокъ все же усвоилъ это при помощи какого-нибудь нагляднаго пособія; можно, конечно, показать, какъ дѣлается сложеніе на приборѣ; но не нужно съ этого начинать. Вообще первымъ дѣломъ слѣдуетъ обращаться къ ребенку съ вопросомъ: «а какъ, ты думаешь, нужно поступить?».

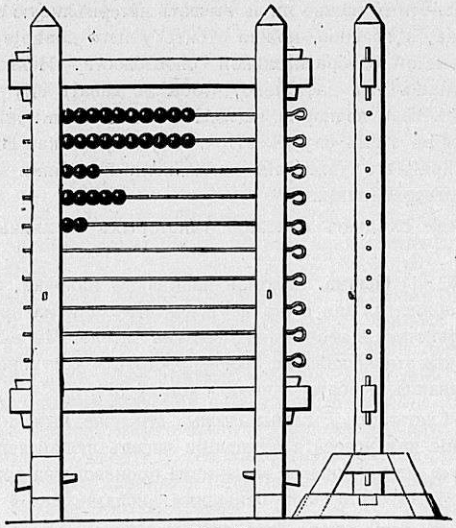


Рис. 40.

можно также насаживать шары. При помощи этихъ послѣднихъ проволокъ можно давать наглядное изображенiе десятичной группировки чиселъ въ такомъ же порядкѣ, какъ *пишутъ* десятичныя группы, то-есть слѣва направо.

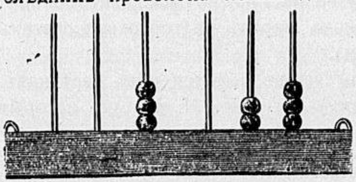


Рис. 41.

Ясно, что шведскiе счеты могутъ быть использованы и какъ обыкновенные торговые счеты. Появились онѣ впервые на всемiрной выставкѣ 1867 года въ Парижѣ.

Во всякомъ случаѣ слѣдуетъ помнить, что счеты должны быть въ школѣ главнымъ образомъ пособiемъ для усвоенiя нумерацiи, а не вычислительнымъ инструментомъ.

c) *Счеты Шохоръ-Троцкаго*. Эти счеты представляютъ въ сущности тѣ же торговые счеты; но расположенiе проволокъ на нихъ вертикальное; а для того чтобы можно

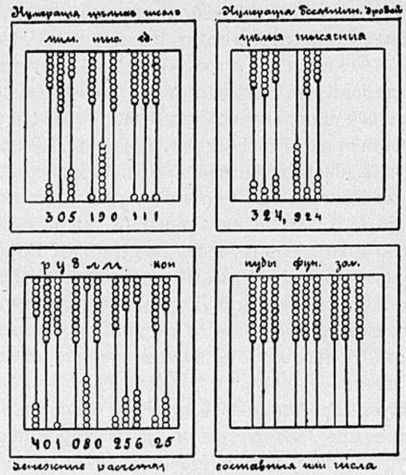


Рис. 42.

было закрѣплять шарики на любой высотѣ, устроены особыя задержки для шариковъ. Въ этомъ видѣ счеты особенно пригодны для изображенiя десятичныхъ группъ чиселъ. Очень полезны они и для нагляднаго изображенiя десятичныхъ дробей, а также составныхъ именованныхъ чиселъ (см. рис. № 42) *). Такiе же счеты построены и нѣмецкимъ педагогомъ г. Кнупомъ.

*) См «Наглядность и наглядныя пособiя при обученiи ариеметикѣ» С. Шохоръ-Троцкаго.

§ 54. **Числовыя фигуры и картинки.** Мы уже указывали на значеніе числовыхъ фигуръ для *нагляднаго* воспріятія чиселъ перваго десятка и для болѣе реальнаго представленія нѣкоторыхъ ариѳметическихъ дѣйствій (см. §§ 16 и 19). Числовыя фигуры были придуманы и примѣнены къ обученію еще въ XVIII столѣтіи нѣмецкимъ педагогомъ Буссе (1797 г.). Съ тѣхъ поръ числовыя фигуры различныхъ формъ придумывались цѣлымъ рядомъ педагоговъ. Мы привели на стр. 43 снимки съ этихъ числовыхъ фигуръ съ указаніемъ авторовъ ихъ. Въ настоящее время еще не установлено вполнѣ опредѣленно, какія числовыя фигуры наиболѣе удовлетворяютъ своей цѣли. Докторъ Лай полагаетъ, что его опыты доказали неоспоримое преимущество именно его числовыхъ фигуръ. Съ этимъ не согласенъ д-ръ Вальземанъ, который отдаетъ предпочтеніе (и тоже на основаніи опытовъ) фигурамъ Борна; впрочемъ фигуры Борна и фигуры Лая (см. рис. № 10 и 13) очень сходны—разница заключается лишь въ томъ, что Лай примѣняетъ группировку единицъ въ квадраты, отчего его фигуры иногда называются квадратными. Вопросъ этотъ нуждается еще въ дальнѣйшемъ освѣщеніи.

Не слѣдуетъ переоцѣнивать значенія числовыхъ фигуръ, какъ это дѣлаютъ Лай, Беетцъ и другіе сторонники числовыхъ фигуръ. Для этихъ методистовъ нѣтъ спасенія внѣ числовыхъ фигуръ, а въ результатѣ получаются такіе сложные счетные приборы, какъ счетный приборъ д-ра Лая (§ 49). Докторъ Лай полагаетъ, напримѣръ, что для того, чтобы запомнить, что 5+3=8, ребенокъ долженъ ясно представлять себѣ числовую фигуру числа 8 и расчлененіе этой фигуры на фигуры чиселъ 5 и 3. Но спрашивается, какъ же долженъ поступить ребенокъ, если онъ забылъ фигуру числа 8, и ея расчлененіе. Оказывается, что, по мнѣнію д-ра Лая, это невозможно: «путемъ повторнаго воспріятія она должна запечатлѣться въ *головѣ* ребенка» (см. «Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ» д-ра Лая). Съ этимъ мнѣніемъ врядъ ли можно согласиться (см. также § 23).

Весьма любопытную оцѣнку числовыхъ фигуръ даетъ извѣстный швейцарскій методистъ Штеклинъ. Эта оцѣнка настолько опредѣленна и любопытна, что мы считаемъ нужнымъ привести здѣсь большую цитату изъ «Методики ариѳметики» Штеклина. Вотъ что говоритъ Штеклинъ:

«Мы утверждаемъ, что числовыя фигуры являются не только непрактичными и искусственными, изобрѣтенными только для школы, непримѣнимыми и скоро забываемыми въ жизни, но и способными повести къ совершенно невѣрнымъ сужденіямъ и заключеніямъ, а потому и безусловно вредными. Возьмемъ примѣръ изъ одной новой книжки, написанной сторонникомъ числовыхъ фигуръ. Вотъ что стоитъ тамъ: «Учитель спрашиваетъ: «Какъ выглядитъ 3?» Кто-либо изъ способныхъ учениковъ, а за отсутствіемъ таковыхъ, кто-либо изъ учениковъ, оставшихся въ томъ же классѣ на второй годъ, говоритъ: «3 выглядитъ такъ: вверху 2, внизу 1 (: ·)». Предложеніе это повторяется отдѣльными учениками и всѣмъ классомъ хоромъ». Но спросимъ мы теперь, что же будетъ, если нашъ «способный ученикъ» увидитъ вечеромъ на небѣ созвѣздіе, имѣющее форму * * * и заключающее 3 звѣзды? Долженъ ли онъ думать, что это *не* 3, или что учитель не умѣетъ «считать» до 3, или же, наконецъ, что Господь Богъ сдѣлалъ ариѳметическую ошибку?!» *)

О значеніи картинокъ, какъ наглядныхъ пособій, мы уже говорили въ §§ 24 и 38, когда разсматривали различные

---

*) Надо, впрочемъ, замѣтить, что Штеклинъ въ своихъ наглядныхъ задачникахъ („Азбука ариѳметики") употребляетъ числовыя фигуры; но эти числовыя фигуры разнообразны по своей формѣ; между тѣмъ для сторонниковъ числовыхъ фигуръ характерно то, что они придерживаются числовыхъ фигуръ *опредѣленной* формы. Вотъ противъ этой постоянности формъ фигуръ и протестуетъ Штеклинъ (и вполнѣ резонно).

наглядные задачники. Здѣсь мы замѣтимъ лишь то, что смотря на многочисленныя картинки, разсѣянныя въ этихъ задачникахъ, невольно думаешь, что не лучше было бы *оживить* эти картинки, выйти изъ нихъ на свѣтъ Божій, и здѣсь, разсматривая живыя картины природы, заняться дѣйствительно нагляднымъ изученіемъ ариѳметики. И тѣмъ болѣе это возможно, что вѣдь большинство этихъ картинокъ изображаютъ виды и явленія, которыя почти всегда и вездѣ имѣются у насъ подъ руками. Съ этой точки зрѣнія наглядные задачники слѣдуетъ считать методическими пособіями для учителей, назначеніе которыхъ показать въ какой послѣдовательности нужно наглядно развивать число въ представленіи дѣтей и научать ихъ механизму производства дѣйствій; дѣло же учителя осуществить по мѣрѣ возможности всякую картинку реально на живыхъ предметахъ.

§ 55. **Пальцы.** Пальцы являются однимъ изъ лучшихъ наглядныхъ пособій; они представляютъ естественное пособіе, всегда имѣющееся подъ руками. Но въ этомъ заключается и нѣкоторая опасность, ибо слишкомъ легкая возможность пользоваться пальцами, какъ счетнымъ аппаратомъ, можетъ развить привычку пользоваться пальцами даже тогда, когда въ этомъ нѣтъ никакой надобности. Такъ, напримѣръ, нежелательно, если ребенокъ привыкнетъ такія простыя сложенія, какъ 4+3, выполнять исключительно на пальцахъ; въ результатѣ можетъ получиться пониженіе умственной сообразительности.

Но все же, при умѣренномъ употребленіи, пальцы могутъ сослужить прекрасную службу при изученіи чиселъ и дѣйствій надъ числами перваго десятка. Въ этомъ случаѣ пальцы являются натуральной «соломой» (см. § 53). Не слѣдуетъ забывать также, что пальцы всегда являлись основнымъ счетнымъ аппаратомъ человѣка: благодаря пальцевому счету у людей возникла именно *десятичная*, а не какая либо иная, система счисленія.

Укажемъ на одинъ особенно часто встрѣчающійся случай употребленія взрослыми и дѣтьми пальцевъ, какъ счетнаго аппарата. Если мы намѣчаемъ или припоминаемъ рядъ событій, вещей или фактовъ, то мы часто, будучи заняты самымъ процессомъ припоминанія, не имѣемъ времени сразу же сосчитывать число событій, а «загибаемъ» при упоминаніи каждаго факта въ отдѣльности по одному пальцу; затѣмъ уже по числу загнутыхъ пальцевъ мы судимъ о числѣ приведенныхъ фактовъ.

§ 56. **Ариѳметическій ящикъ.** Это наглядное пособіе придумано ученикомъ Песталоцци Тиллихомъ; въ нѣсколько видоизмѣнной формѣ оно пользуется довольно широкимъ распространеніемъ у насъ въ Россіи. Ариѳметическій ящикъ представляетъ собой наборъ большого числа деревянныхъ кубиковъ, брусковъ, квадратныхъ дощечекъ. Каждый кубикъ означаетъ единицу; бруски различной длины означаютъ совокупности нѣсколькихъ единицъ (до десяти). Десятокъ означается брускомъ, длина котораго равна удесятеренной длинѣ одного кубика. Сотня изображается квадратной дощечкой, содержащей (по площади) 100 кубиковъ.

При помощи ариѳметическаго ящика можно производить наглядный счетъ, пояснять наглядно дѣйствія надъ числами, выяснять десятичную группировку чиселъ. Замѣтимъ однако, что существеннымъ недостаткомъ этого прибора является то обстоятельство, что бруски, означающіе десятки, нераздробимы на отдѣльные кубики; въ этомъ смыслѣ преимущество на сторонѣ пачекъ палочекъ, означающихъ десятки (см. § 37 и 42).

§ 57. **Счетныя марки.** Ученикъ Песталоцци Карлъ Раумеръ предложилъ (въ началѣ XIX столѣтія) пользоваться въ качествѣ нагляднаго пособія особыми счетными марками, названными по его имени раумеровскими счетными марками. Онѣ представляютъ кружки или квадраты, приготовленные изъ дерева или картона, или даже металла. Различныя счетныя единицы десятичной системы счисленія, то есть единицы, десятки, сотни и т. д. обозначаются различными марками.

Нѣтъ сомнѣнія, что счетныя марки очень удобны для обозначенія десятичнаго состава чиселъ и для нагляднаго изображенія дѣйствій надъ многозначными числами, какъ дѣйствій надъ десятичными группами чиселъ. Какъ справедливо замѣчаетъ Д. Д. Галанинъ (см. «Введеніе въ методику ариѳметики» Д. Галанина), наши учителя часто изобрѣтаютъ счетныя марки самостоятельно, не зная даже, что онѣ уже давно изобрѣтены Раумеромъ—это указываетъ на естественность этого пособія.

Недостатокъ счетныхъ марокъ—тотъ же, что и ариѳметическаго ящика: здѣсь нельзя каждую счетную марку наглядно дробить на единицы слѣдующаго низшаго наименованія.

§ 58. **Измѣрительныя пособія.** Мы указывали уже (см. § 47), что для ознакомленія съ мѣрами и дробями, а также для болѣе осязательнаго ознакомленія дѣтей съ числомъ, какъ мѣриломъ вселенной, слѣдуетъ предлагать дѣтямъ производить самимъ разнообразныя измѣренія. Для производства такихъ измѣреній нуженъ цѣлый рядъ пособій, которыя можно назвать наглядно-измѣрительными пособіями. Сюда относятся различныя мѣры длины, объемовъ, площадей и т. д. Сюда же должны быть отнесены вѣсы съ разновѣсками, монеты различнаго достоинства и часы. Эти пособія слѣдуетъ считать особенно цѣнными при обученіи ариѳметикѣ; имѣя ихъ въ рукахъ и примѣняя ихъ для измѣренія, дѣти научаются собственнымъ опытомъ получать численныя соотношенія между предметами и явленіями окружающей ихъ жизни. Числа, полученныя собственнымъ трудомъ, больше скажутъ уму ребенка и будутъ ему болѣе интересны и дороги, чѣмъ числа, взятыя хотя бы и изъ очень интересной задачи учебника.

§ 59. **Историческое примѣчаніе.** Еще въ XVII столѣтіи великій педагогъ Амосъ Коменскій (1592—1671), указывалъ на важность употребленія наглядныхъ пособій въ дѣлѣ обученія дѣтей. Въ своей «Великой Дидактикѣ» Коменскій печалится о томъ, что въ современныхъ ему школахъ обращаютъ слишкомъ мало вниманія на наглядность обученія, что въ «школахъ обучаютъ рѣчи раньше вещей». Въ другомъ сочиненіи «Материнская школа» Коменскій совѣтуетъ обучать счету на камешкахъ и не торопить дѣтей съ изученіемъ счета большихъ чиселъ. Надо впрочемъ замѣтить, что Коменскій удѣляетъ довольно мало вниманія вопросу о преподаваніи *ариѳметики* въ частности.

Нѣмецкій ариѳметическій писатель XVI столѣтія Адамъ Ризе придумалъ особую счетную доску для обученія счисле-

Ф. 1.

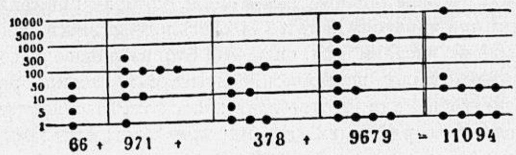


Рис. 43.

нію. На этой доскѣ были прорѣзаны горизонтальныя линіи съ вертикальными перегородками (см. рис. №43). На горизонтальныя линіи накладывались особые кружочки, обозначавшіе соотвѣтствующія счетныя единицы; эти счетныя единицы были: 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 и т. д. Рисунокъ № 43 изображаетъ процессъ сложенія чиселъ 66, 971, 378 и 9679 (сумма равна 11094).

Но лишь въ концѣ XVIII столѣтія наглядныя пособія начинаютъ прокладывать себѣ дорогу въ дѣлѣ преподаванія ариѳметики. Профессоръ Траппъ (1780 г.) предлагаетъ пользоваться для обученія дѣтей счисленію особымъ ящикомъ съ отдѣленіями; онъ предлагаетъ въ одно отдѣленіе помѣщать единицы (въ видѣ квадратиковъ), въ другое—десятки (въ видѣ большихъ квадратовъ) и т. д. Священникъ фонъ-Роховъ примѣняетъ (около 1780 г.) въ своихъ сельскихъ школахъ цѣлый рядъ наглядныхъ пособій, какъ то пальцы рукъ, камешки, пуговицы на платьѣ; примѣняетъ онъ также черточки на классной доскѣ, предлагая ихъ дѣтямъ для сосчитыванія. Неудивительно, что школы Рохова считались образцовыми и вызывали общее вниманіе различныхъ педагоговъ. Въ самомъ концѣ XVIII столѣтія Буссе впервые примѣняетъ для преподаванія ариѳметики свои числовыя фигуры (см. стр. 43).

Но лишь Песталоцци положилъ начало широкому употребленію наглядныхъ пособій. Мы приводимъ здѣсь изображеніе счетной таблицы Песталоцци, которая примѣнялась имъ для упражненій дѣтей въ счетѣ и дѣйствіяхъ надъ небольшими числами (см. рис. 44). Это наглядное пособіе имѣетъ лишь историческій интересъ; таблица эта очень неудобна для употребленія: отъ большого количества черточекъ рябитъ въ глазахъ; кромѣ того отдѣльныя черточки нельзя передвигать, вслѣдствіе чего таблица лишена необходимой гибкости и расчленяемости *).

Значеніе мѣръ и разныхъ инструментовъ (вѣсы, часы и проч.), какъ нагляднаго пособія при обученіи ариѳметикѣ, было впервые выдвинуто съ особенной настойчивостью нѣмецкимъ педагогомъ Гольтцемъ (1858 г.). У насъ въ Россіи большими сторонниками этихъ пособій являются гг. Мрочекъ и Филиповичъ, а также Д. Д. Галанинъ (см. «Педагогика математики» Мрочека и Филиповича и «Методика ариѳметики» Д. Д. Галанина).

*) Вотъ примѣры задачъ, которыя Песталоцци рѣшалъ при помощи своей таблицы: 1) Сколько разъ нужно взять по одному, чтобы получить 9 разъ седьмую часть 28? 2) Сколько разъ нужно взять по одному, чтобы получить вмѣстѣ 9 разъ седьмую часть 49 и 9 разъ седьмую часть 28?

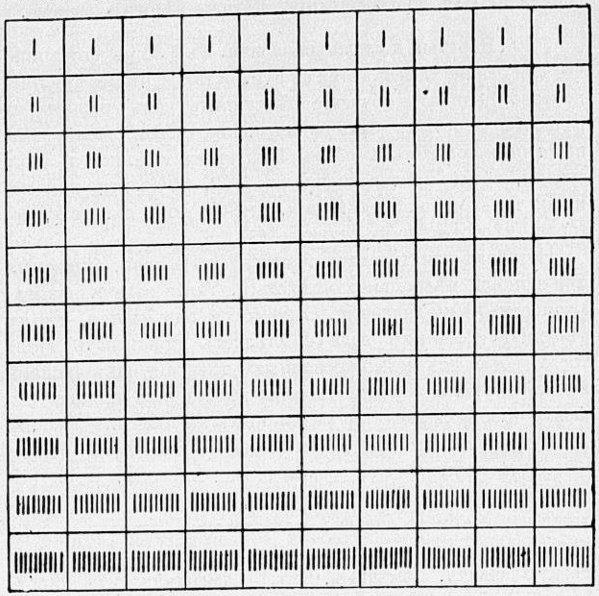


Рис. 44.

Въ настоящее время существуетъ нѣсколько сотъ наглядныхъ пособій по ариѳметикѣ, и каждый годъ изобрѣтаются новыя. Въ этой главѣ мы привели описаніе лишь наиболѣе распространенныхъ и наиболѣе важныхъ изъ нихъ.

ГЛАВА XI.

Задачи. Ихъ классификація. Методы рѣшенія задачъ.

§ 60. **Простыя и сложныя задачи.** Въ § 33 мы выяснили, что для ознакомленія дѣтей съ сущностью и цѣлью дѣйствій полезно начинать обученіе дѣйствіямъ надъ числами съ рѣшенія простыхъ задачъ жизненнаго содержанія (*метода цѣлесообразныхъ задачъ*). При этомъ имѣлись въ виду задачи, вродѣ приведенныхъ въ § 22, рѣшаемыя при помощи только одного дѣйствія, именно того дѣйствія, которое имѣется въ виду изучить **).

Но кромѣ этихъ задачъ существуютъ задачи, рѣшаемыя при помощи нѣсколькихъ дѣйствій. Такія задачи называются *сложными* задачами. Само собой разумѣется, что къ рѣшенію сложныхъ задачъ слѣдуетъ приступать лишь тогда, когда всѣ четыре основныхъ дѣйствія надъ числами данной ступени вполнѣ усвоены дѣтьми при помощи рѣшенія простыхъ задачъ и различныхъ наглядныхъ пособій. Дѣло въ томъ, что при рѣшеніи такихъ задачъ все вниманіе дѣтей должно быть сосредоточено на томъ, чтобы выдѣлить и намѣтить рядъ дѣйствій, необходимыхъ для нахожденія искомаго задачи; недостаточно твердое знаніе дѣйствій сильно затруднило бы эту и безъ того не всегда легкую задачу. Замѣтимъ, что въ американскихъ народныхъ школахъ на это обстоятельство обращено особенное вниманіе. Вотъ что пишетъ по этому поводу г-жа Е. Янжулъ въ своей книгѣ «Американская школа»: «къ рѣшенію задачъ мало-мальски сложныхъ приступаютъ не раньше, какъ послѣ долгихъ упражненій надъ простымъ счетомъ, когда дѣти вполнѣ овладѣютъ числами, которыя могутъ входить въ эти задачи;... всѣ дѣйствія, необходимыя для извѣстной задачи настолько изучены, что уже не представляютъ никакого затрудненія и замедленія, и ученикъ рѣшаетъ задачи быстро, не отвлекая своего вниманія отъ хода ея рѣшенія».

**) Такъ называемыя, простыя задачи.

Элементарное правило, которымъ слѣдуетъ руководствоваться при рѣшеніи съ дѣтьми сложныхъ задачъ, состоитъ въ слѣдующемъ: къ самому рѣшенію задачи можно приступать лишь тогда, когда выяснилось, что ребенокъ запомнилъ условіе задачи и ясно сознаетъ, каковы данныя задачи и какое искомое. Имѣя дѣло съ классомъ нужно стремиться къ тому, чтобы всѣ дѣти, сидѣщіе за урокомъ, ясно представляли себѣ данныя и искомыя задачи.

§ 61. **Синтетическій и аналитическій методы рѣшенія задачъ.** Предположимъ, что мы задались цѣлью рѣшить съ дѣтьми слѣдующую задачу: «Смѣшано два сорта чаю: 3 фунта по 2 р. 40 к. за фунтъ и 6 фунтовъ по 1 р. 80 к. за фунтъ. Сколько стоитъ фунтъ смѣси?» Для рѣшенія этой задачи дѣти обратятъ вниманіе на то обстоятельство, что, зная число фунтовъ каждаго сорта чаю и цѣну одного фунта, можно узнать, сколько стоитъ весь 1-й сортъ и сколько стоитъ весь 2-й сортъ. Получивши эти 2 новыхъ числа, дѣти сообразятъ, что пользуясь, ими, можно узнать стоимость всего чая. Далѣе станетъ яснымъ, что, зная число фунтовъ каждаго сорта, можно узнать количество фунтовъ всего чаю. Зная же стоимость всей смѣси и количество ея, дѣти безъ особаго труда догадаются, какъ найти стоимость одного фунта смѣси, т.-е. найдутъ искомое задачи.

Замѣтимъ, что рѣшеніе задачи свелось къ тому, что дѣти, пользуясь данными числами задачи, получали при помощи ряда дѣйствій новыя числа и въ концѣ концовъ дошли до искомаго числа. Но при такомъ способѣ рѣшенія легко могло бы случиться, что дѣти произвели бы лишнее дѣйствіе надъ данными числами, ненужное для рѣшенія задачи: такъ, дѣти могли бы попытаться узнать, сколько стоитъ 1 фунтъ 1 сорта чаю и 1 фунтъ 2 сорта вмѣстѣ

(2 р. 40 к.+1 р. 80 к.=4 р. 20 к.); полученное число (4 р. 20 к.) осталось бы висящимъ въ воздухѣ безъ всякой пользы для дальнѣйшаго рѣшенія. Такіе случаи ненужныхъ дѣйствій встрѣчаются, какъ показываетъ школьная практика, довольно часто. Слѣдуетъ признать, что часто дѣти, рѣшая указаннымъ способомъ задачи, находятся въ положеніи людей, ощупью отыскивающихъ себѣ вѣрную дорогу.

Существуетъ однако средство, которое можетъ помочь дѣтямъ выйти на вѣрный путь рѣшенія задачи. Это средство заключается въ томъ, чтобы рѣшеніе задачи начинать не съ данныхъ задачи, а съ искомаго. Такъ, въ разсмотрѣнной задачѣ можно задать себѣ вопросъ, какія данныя нужно знать, чтобы изъ нихъ *непосредственно* получить искомое задачи, т.-е. стоимость одного фунта смѣси: ясно, что для этого нужно знать стоимость всей смѣси и число фунтовъ всей смѣси. Далѣе задаемъ себѣ вопросъ, какія данныя нужны для того, чтобы изъ нихъ *непосредственно* узнать стоимость всей смѣси и число фунтовъ смѣси—оказывается, что данныя для опредѣленія числа фунтовъ смѣси имѣются готовыми въ условіи задачи; для опредѣленія же стоимости всей смѣси нужно узнать стоимость каждаго сорта товара; а для *непосредственнаго* опредѣленія стоимости каждаго сорта мы можемъ взять данныя изъ условія задачи (именно число фунтовъ каждаго сорта и стоимость одного фунта).

Такимъ образомъ мы намѣтили рядъ *простыхъ* задачъ, которыя нужно рѣшить для опредѣленія искомаго задачи; намѣчая эти простыя задачи, мы начали съ искомаго сложной задачи и постепенно подошли къ даннымъ условія. Намѣтивши планъ рѣшенія, можно уже вполнѣ увѣренно приступить къ выполненію этого плана, т.-е. къ рѣшенію данной сложной задачи тѣмъ способомъ, который разсмотрѣнъ выше.

Предварительное изслѣдованіе задачи, заключающееся въ восхожденіи отъ искомаго задачи къ даннымъ ея и въ

намѣчаніи плана рѣшенія, называется *анализомъ* задачи; самый способъ рѣшенія сложной задачи, основанный на такомъ анализѣ, называется *аналитическимъ методомъ* рѣшенія задачи. Методъ же рѣшенія задачи, состоящій въ комбинированіи (болѣе или менѣе наугадъ) данныхъ чиселъ задачи для полученія ряда новыхъ данныхъ, называется *синтетическимъ методомъ*.

§ 62. **Сравненіе методовъ рѣшенія задачъ.** Нѣтъ сомнѣнія, что аналитическій методъ рѣшенія задачъ выше синтетическаго въ томъ отношеніи, что анализъ задачи придаетъ опредѣленность ея рѣшенію и выясняетъ ту цѣль, которую должно преслѣдовать каждое отдѣльное дѣйствіе задачи. Аналитическій методъ можно уподобить планомѣрному веденію какого нибудь дѣла, синтетическій—непланомѣрному. Въ сущности синтетическій методъ входитъ, какъ составная часть, въ аналитическій: дѣйствительно, послѣ анализа слѣдуетъ самое рѣшеніе, т.-е. синтезъ задачи; разница лишь въ томъ, что при синтетическомъ способѣ мы сразу начинаемъ съ синтеза, а при аналитическомъ способѣ синтезу предпосылается анализъ.

Слѣдуетъ однако замѣтить, что нерѣдко, при рѣшеніи задачи синтетическимъ путемъ, имѣется въ *скрытомъ* видѣ и анализъ задачи. Такъ, если мы рѣшаемъ задачу, разсмотрѣнную въ предыдущемъ §-ѣ синтетически, не производя спеціально анализа ея, то все же этотъ анализъ инстинктивно внутри насъ имѣется. Вѣдь, если дѣтямъ прочитано условіе задачи, и они заявляютъ, что знаютъ, какъ рѣшить задачу, то этимъ самымъ они показываютъ, что гдѣ то въ затаенномъ уголкѣ ихъ ума произведена уже работа анализа и намѣченъ поэтому планъ рѣшенія. Работа эта могла быть настолько быстрой и инстинктивной, что ея теченіе могло ускользнуть—поэтому и можетъ получиться впечатлѣніе, что задача рѣшена чисто синтетическимъ путемъ.

Правда, бываютъ случаи, когда ребенокъ затрудняется въ рѣшеніи задачи и начинаетъ наугадъ комбинировать данныя задачи, получая при этомъ новыя, ни для чего не нужныя данныя: въ этихъ случаяхъ анализъ задачи или совсѣмъ отсутствуетъ, или же настолько труденъ, что ребенокъ при всемъ стараніи не можетъ произвести этого анализа, такъ что дѣло ограничивается лишь тщетными инстинктивными попытками анализа. Въ виду этого мы должны признать, что анализъ при рѣшеніи задачи *совсѣмъ* отсутствуетъ лишь въ томъ случаѣ, когда задача сама по себѣ слишкомъ трудна для ребенка, и онъ растерянно бросается отъ одной комбинаціи данныхъ чиселъ къ другой. Рѣшеніе же задачи будетъ *формально* аналитическимъ лишь въ томъ случаѣ, если анализъ задачи сознательно выдѣляется, какъ отдѣльная работа мысли. Сознательное рѣшеніе задачи предполагаетъ существованіе инстинктивнаго или формальнаго анализа ея: чистаго синтеза при сознательномъ рѣшеніи задачи нѣтъ.

Не слѣдуетъ однако забывать, что производство *формальнаго* анализа является дѣломъ довольно труднымъ: вѣдь ребенокъ долженъ сохранить при этомъ въ памяти всю цѣпь простыхъ задачъ, которыя намѣчаются при анализѣ, да и самый ходъ разсужденій при анализѣ достаточно тонкій. Поэтому на первыхъ порахъ достаточно при рѣшеніи сложныхъ задачъ ограничиваться инстинктивнымъ анализомъ и не настаивать на анализѣ формальномъ. Чуткій преподаватель всегда изъ отвѣтовъ ребенка при рѣшеніи задачи замѣтитъ, сознательно ли ребенокъ рѣшаетъ задачу, т.-е. произведена ли имъ, въ подсознательной области его ума, работа инстинктивнаго анализа или нѣтъ.

Лишь впослѣдствіи, когда математическая мысль ребенка окрѣпла, можно приступить къ формальному анализу съ послѣдующимъ синтезомъ.

Какъ справедливо замѣчаютъ г. Беллюстинъ въ своей «Методикѣ Ариѳметики» и г. Эрнъ въ своихъ «Очеркахъ по методикѣ ариѳметики», работу формальнаго анализа задачи можно сдѣлать болѣе доступной ребенку, если научить его предварительно производить анализъ уже рѣшенныхъ задачъ.

Въ разныхъ курсахъ методики ариѳметики имѣются болѣе или менѣе подробныя указанія о пріемахъ рѣшенія задачъ, ихъ классификаціи, о требованіяхъ, которыя слѣдуетъ предъявлять ребенку при рѣшеніи задачъ и т. д. Особенно подробный разборъ вопроса можно найти въ «Методикѣ Ариѳметики» Ѳ. Егорова, въ «Методикѣ Ариѳметикѣ» К. Арженникова, «Методикѣ Ариѳметики» С. Шохоръ-Троцкаго и «Запискахъ по методикѣ ариѳметики», Н. Мукалова.

§ 63. **Ариѳметическія и алгебраическія задачи.** Какъ извѣстно, въ ариѳметическихъ задачникахъ имѣется цѣлый рядъ такъ называемыхъ *замысловатыхъ* задачъ, которыя требуютъ для ихъ рѣшенія особой сообразительности дѣтей. Къ такимъ задачамъ относится, напримѣръ, задача: Два брата раздѣлили между собой 3250 руб. такъ, что одинъ получилъ столько 10-рублевыхъ бумажекъ, сколько другой 25-рублевыхъ. Сколько досталось каждому?» Нѣкоторые методисты полагаютъ, что такимъ задачамъ не мѣсто въ курсѣ ариѳметики, что онѣ должны разсматриваться при изученіи алгебры и рѣшаться при помощи составленія уравненій. Мы не можемъ согласиться съ этимъ мнѣніемъ. Правда, нельзя заваливать дѣтей подобнаго рода задачами, особенно труднѣйшими изъ нихъ; но не надо забывать, что рѣшеніе такихъ задачъ ариѳметическимъ путемъ можетъ содѣйствовать развитію сообразительныхъ способностей дѣтей: нужно лишь слѣдить за тѣмъ, чтобы предлагать такія задачи въ свое время и не перегружать ими умъ ребенка.

Въ курсахъ методики ариѳметики принято дѣлить задачи на чисто ариѳметическія (т.-е. незамысловатыя задачи), и на алгебраическія (т.-е. замысловатыя). Надо однако замѣтить, что всѣ попытки *точно* установить отличіе ариѳметическихъ задачъ отъ алгебраическихъ являлись тщетными. Подробный разборъ этого вопроса можно найти въ Методикахъ ариѳметики гг. Шохоръ-Троцкаго, Егорова, Арженникова, Гольденберга и другихъ. Здѣсь мы укажемъ лишь на то, что однимъ изъ *признаковъ*, отличающихъ задачи алгебраическія отъ ариѳметическихъ, является то обстоятельство, что алгебраическія задачи въ противоположность ариѳметическимъ рѣшаются при помощи предположенія. Такъ, вышеприведенная задача рѣшается, если предположить, что оба брата получили по одной бумажкѣ. Этотъ признакъ слѣдуетъ считать практически довольно надежнымъ.

Въ заключеніе приведемъ слѣдующую превосходную характеристику алгебраическихъ задачъ, сдѣланную А. И. Гольденбергомъ: «Въ этихъ задачахъ зависимость между искомымъ числомъ и данными числами не настолько *прозрачна*, чтобы можно было непосредственно установить планъ рѣшенія, какъ для задачъ чисто ариѳметическихъ. Напротивъ, въ задачахъ алгебраическаго характера ближайшая связь между числами искомыми и данными является большею частью, настолько *скрытой* самими условіями задачи, что можетъ потребоваться длинный рядъ разсужденій, чтобы, какъ выражаются довольно мѣтко, распутать задачу, то-есть установить порядокъ тѣхъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ данными числами, выполненіе которыхъ приведетъ къ отвѣту на предложенную задачу».

При рѣшеніи алгебраической задачи анализъ часто является совершенно безсильнымъ. Предоставляемъ читателю убѣдиться въ этомъ на вышеприведенной задачѣ или на какой-нибудь другой задачѣ алгебраическаго характера.

§ 64. **Ариѳметическіе задачники.** Въ большинствѣ русскихъ задачниковъ распредѣленіе задачъ ведется по слѣдующей схемѣ: задачи на сложеніе, на вычитаніе, на сложеніе и вычитаніе вмѣстѣ, на умноженіе, на дѣленіе, на умноженіе и дѣленіе вмѣстѣ, на всѣ четыре дѣйствія; далѣе идутъ задачи на именованныя числа, на обыкновенныя дроби, десятичныя и, наконецъ, на рядъ спеціальныхъ правилъ, какъ то тройное правило, правило процентовъ, пропорціональнаго дѣленія и т. д. Въ задачникахъ, предназначенныхъ для начальнаго преподаванія ариѳметики, обычно задачи распредѣляются по ступенямъ: задачи на числа перваго десятка, на числа первыхъ двухъ десятковъ, на числа первой сотни и т. д.

Существуетъ, однако, рядъ задачниковъ, въ которыхъ ариѳметическія задачи полностью или отчасти распредѣлены по типамъ. Таковы задачникъ А. Терешкевича: «Опытъ систематизаціи употребительнѣйшихъ ариѳметическихъ задачъ по типамъ», также «Сборникъ задачъ и примѣровъ съ распредѣленіемъ задачъ по типамъ для начальныхъ народныхъ училищъ» Ѳ Борисова и В. Сатарова и отчасти «Новый ариѳметическій задачникъ для приготовительныхъ классовъ». Н. Соколова и Ив. Сахарова. Вотъ примѣры типовъ задачъ у Терешкевича:

Типъ X. «При условіи равнаго количества отдѣльныхъ предметовъ, по данной ихъ цѣнѣ и совокупной стоимости опредѣлить количество предметовъ и задачи однородныя» (см. задачу, приведенную въ § 63).

Типъ XI. Встрѣча.

Типъ XIV. Неравномѣрное раздѣленіе: одна часть больше другой разностно.

Типъ XVI. Неравномѣрное раздѣленіе: одна часть больше другой кратно.

Задачники, распредѣленные по типамъ, слѣдуетъ признать очень удобными для *преподавателей*: дѣйствительно, преподаватель, замѣчающій, что ученики затрудняются въ рѣшеніи задачъ опредѣленнаго типа, легко найдетъ въ такомъ задачникѣ подборъ необходимыхъ задачъ. Что же касается учениковъ, то врядъ ли можетъ быть для нихъ

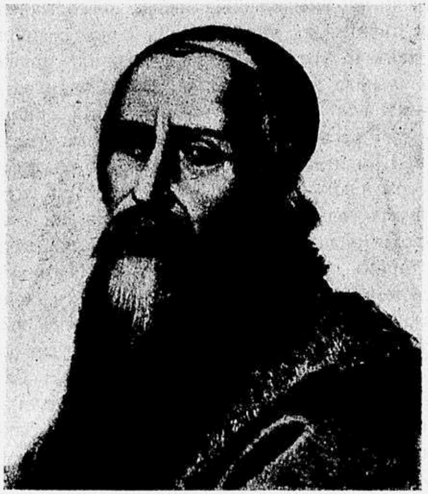


Рис. 45. Амосъ Коменскій. (1592 1671).

полезнымъ подобное распредѣленіе матеріала. Здѣсь является опасность того, что ученики, пріученные рѣшать задачи по опредѣленнымъ типамъ, будутъ затѣмъ ко всякой предложенной имъ задачѣ относиться съ точки зрѣнія ея типа: если, напримѣръ, будетъ предложена задача на встрѣчу, то возможно, что они постараются припомнить, какъ рѣшаются задачи на встрѣчу и проведутъ затѣмъ рѣшеніе

задачи совершенно шаблонно. Такая механизація рѣшенія задачъ является чрезвычайно нежелательной.

Защитники распредѣленія задачь по типамъ ссылаются, между прочимъ, на то, что и въ *алгебраическихъ* задачникахъ задачи распредѣлены по типамъ: такъ, тамъ имѣются задачи на уравненія 1-й степени съ однимъ, двумя и большимъ числомъ неизвѣстныхъ, имѣются задачи на квадратныя, биквадратныя уравненія, на неопредѣленныя уравненія и т. д. Это вѣрно, но вѣдь въ алгебрѣ это необходимо прежде всего для того, чтобы облегчить трудъ *преподавателя* въ дѣлѣ разысканія необходимыхъ ему задачъ. Далѣе слѣдуетъ замѣтить, что именно такое распредѣленіе алгебраическихъ задачъ ведетъ часто къ очень непріятнымъ результатамъ: ученики, которымъ предложена для рѣшенія задача, часто спрашиваютъ «на что эта задача» и сообразно съ отвѣтомъ на этотъ вопросъ приступаютъ уже къ ея рѣшенію: и въ этомъ случаѣ получается вредная механизація, ведущая къ безсознательности рѣшенія.

ГЛАВА XII.

Основные принципы преподаванія ариѳметики. Лабораторный методъ.

§ 65. **Принципъ преодолѣванія по одной трудности заразъ.** Всякій педагогъ, приступающій къ практической дѣятельности преподавателя, долженъ руководиться въ своей дѣятельности рядомъ основныхъ правилъ или принциповъ, которые должны освѣщать его трудную, но почетную дорогу. Эти принципы вырабатывались въ различныя времена разными выдающимися педагогами; они являются тѣми завѣтами, которые свято долженъ хранить въ своей душѣ педагогъ, желающій облегчить дѣтямъ дѣло обученія и сдѣлать это дѣло для нихъ пріятнымъ.

Еще Амосъ Коменскій въ своей «Великой Дидактикѣ» пишетъ: «Природа не смѣшивается въ своихъ твореніяхъ, но раздѣльно развиваетъ въ каждой своей части», и далѣе: «когда *строитель* кладетъ фундаментъ, то онъ не выводитъ въ одно и то же время и стѣны, а тѣмъ болѣе не кроетъ крышу; но все это дѣлаетъ въ свое время и на своемъ мѣстѣ». Этими словами Амосъ Коменскій хотѣлъ выразить ту мысль, что въ дѣлѣ обученія нельзя заставлять ребенка преодолѣвать сразу нѣсколько трудностей, что эти трудности должны преодолѣваться одна за другой. То же, нѣсколько иными словами, высказываетъ и знаменитый философъ Джонъ Локкъ (XVII ст.), который говоритъ: «здѣсь, какъ и во всѣхъ отросляхъ воспитанія, надо очень тщательно наблюдать за тѣмъ, чтобы съ дѣтьми начиналось обученіе съ легкаго и простого, чтобы имъ *за одинъ разъ сообщалось какъ можно меньше* и чтобы сообщенное хорошенько укрѣпилось въ ихъ головахъ, прежде чѣмъ они перейдутъ къ чему-либо послѣдующему или новому».

Подобно тому, какъ трудно переломить связку прутьевъ, но легко переломить ихъ одинъ за другимъ въ отдѣльности, точно такъ же и нашъ умъ легко справляется съ рядомъ трудностей, если ему даютъ преодолѣвать ихъ одну за другой. Можно считать эту особенность нашего ума слабостью его, но въ дѣлѣ преподаванія нужно съ этимъ качествомъ ума считаться и къ нему приспосабливаться: только тогда преподаваніе будетъ основываться на природѣ человѣка.

При раціональномъ преподаваніи ариѳметики этотъ принципъ проводится вполнѣ послѣдовательно. Такъ, прежде чѣмъ научить сложенію такихъ двузначныхъ чиселъ, какъ 38 и 25 (см. § 41), мы научаемъ болѣе простымъ случаямъ сложенія двухзначныхъ чиселъ, какъ 35+23. Если бы мы сразу приступили къ сложенію 38+25, то погрѣшили бы противъ принципа преодолѣванія по одной трудности заразъ: мы имѣли бы тогда дѣло съ двумя трудностями: 1) процессъ сложенія двухзначныхъ чиселъ вообще, 2) процессъ запоминанія одного десятка.

§ 66. **Принципъ постепеннаго перехода отъ болѣе легкаго къ болѣе трудному. Концентры.** Еще Амосъ Коменскій указывалъ на то, что «природа все дѣлаетъ въ свое время» и что «природа выбираетъ въ своей дѣятельности наиболѣе пригодный предметъ или же предварительно приготовляетъ его такъ, чтобы онъ сдѣлался пригоднымъ». Онъ же сѣтовалъ на то, что въ современныхъ ему школахъ «упражненія не такъ тщательно распредѣляются, чтобы все постепенно шло впередъ, съ одной ступени на другую» и говоритъ, что «все подлежащее изученію должно быть такъ распредѣляемо, соотвѣтственно ступенямъ возраста, чтобы только то предлагалось для изученія, что доступно воспріятію ученика». Эти же мысли высказывалъ Джонъ Локкъ, какъ видно изъ вышеприведенной цитаты (см. предыдущій §).

Къ сожалѣнію въ теченіе почти ста лѣтъ послѣ смерти Джона Локка мало обращали вниманія на завѣты этихъ педагоговъ и мыслителей. Лишь въ XIX столѣтіи дѣло преподаванія было поставлено именно такъ, какъ того желали Амосъ Коменскій и Джонъ Локкъ. Мы видѣли въ предыдущихъ главахъ, что трудами такихъ педагоговъ, какъ Песталоцци, Гарнишъ, Дистервегъ, Генчель, Грубе и др. весь ариѳметическій матеріалъ разбитъ на нѣсколько ступеней, слѣдующихъ другъ за другомъ въ порядкѣ возрастающей трудности; эти ступени (1—10, 1—20, 1—100, 1—1000) соотвѣтсвуютъ возрасту и умственному развитію ученика.

Распредѣленіе учебнаго курса по ступенямъ носитъ названіе *концентрическаго* распредѣленія курса; отдѣльныя ступени носятъ названіе *концентровъ*. Концентрическое распредѣленіе матеріала имѣетъ прежде всего то громадное достоинство, что этимъ распредѣленіемъ удовлетворяется требованіе, чтобы преподаваніе соотвѣтствовало умственному развитію ребенка. Кромѣ того, какъ справедливо замѣчаетъ г. Арженниковъ въ своей «Методикѣ начальной ариѳметики», при концентрическомъ распредѣленіи курсъ усваивается гораздо прочнѣе, ибо

Рис. 46. Джонъ Локкъ. (1632—1704).

каждый слѣдующій концентръ является отчасти повтореніемъ предыдущихъ концентровъ.

§ 67. Историческое примѣчаніе. Въ старину оба разсмотрѣнныхъ въ §§ 65 и 66 принципа нарушались самымъ рѣзкимъ образомъ. Въ Россіи это было не такъ давно: какихъ-нибудь 50 лѣтъ тому назадъ; такое же положеніе дѣлъ царило въ культурныхъ странахъ Западной Европы лѣтъ 70 тому назадъ. Въ то время дѣтей сразу учили

считать до 100 и болѣе, затѣмъ изучали письменную нумерацію въ этихъ же предѣлахъ; далѣе излагались правила сложенія *всякихъ* чиселъ, вычитанія и т. д. Требованія дѣтской психологіи игнорировались совершенно; преобладало безсознательное заучиваніе на память, и поэтому все быстро забывалось. Мы приводимъ здѣсь двѣ цитаты— одну изъ «Страданій и радостей школьнаго учителя» Іереміи Готтхельфа (1856 г.) и другую изъ книги Е. Стрѣльцова: «Изъ 25-лѣтней практики сельскаго учителя. Воспоминанія, очерки и замѣтки» (1849—1864). Каждая говоритъ въ сущности объ одномъ и томъ же, хотя въ одной рѣчь идетъ о Германіи, а въ другой—о Россіи.

Вотъ что пишетъ Готтхельфъ: «Со счетомъ дѣло шло еще лучше, и школьный учитель говаривалъ часто: «да ты, молодецъ, скоро будешь знать столько же, сколько и я». Обучающимся счету онъ давалъ обыкновенно упражненіе въ сложеніи, которое и продѣлывалъ вмѣстѣ съ ними. Если число единицъ превышало 10, онъ говорилъ: «Здѣсь запомнимъ единицу»; если число достигало 20, онъ говорилъ: «здѣсь нужно запомнить 2» и т. д. Дальше этого онъ не шелъ; только, когда дѣйствіе подходило къ концу, онъ замѣчалъ, что теперь запоминать уже нечего, а надо записывать все. Такъ продолжалось до тѣхъ поръ, пока ученики не выучивались сложенію. Дальше проходилось вычитаніе; при этомъ сообщалось только, что въ случаѣ невозможности прямо отнять нѣкоторое число единицъ, можно занять десять единицъ у слѣдующаго разряда. На умноженіи дѣло пріостанавливалось уже по одному тому, что ученики не знали таблицы умноженія, знаніе которой предполагалось, хотя на самомъ дѣлѣ его не было ни у кого; понятно, что умноженіе едва усваивалось послѣ стократнаго упражненія, такъ что правильное вычисленіе являлось рѣдкостью. Еще хуже дѣло обстояло съ дѣленіемъ. Хотя всѣ хорошо знали, что здѣсь нужно начинать съ первыхъ цифръ, при умноженіи же съ послѣднихъ, но рѣдко кто могъ сказать даже при окончаніи школы, что четыре въ двухъ не содержится, въ двадцати же четырехъ содержится шесть разъ. Обученіе требовало такой громадной затраты труда и времени потому только, что никто не давалъ ни малѣйшаго объясненія даже для самыхъ незначительныхъ правилъ, потому что никто никогда не объясняетъ, зачѣмъ нужно дѣлать такъ, а не иначе. И именно поэтому все сейчасъ же забывалось. Каждую зиму нужно было начинать все сначала, затрачивая совершенно такой же трудъ; по выходѣ изъ школы никто ничего не зналъ. Даже больше—за однимъ дѣйствіемъ забывали другое, такъ что, проходя умноженіе, уже не могли произвести вычитаніе. Когда однажды пасторъ на школьномъ экзаменѣ хотѣлъ дать намъ примѣръ на сложеніе, то учитель сказалъ ему: «Простите, ваше преподобіе, мы давно не продѣлывали подобныхъ примѣровъ, врядъ ли они смогутъ рѣшить его сейчасъ; мы проходимъ теперь дѣленіе». И ни одинъ начальникъ не удивлялся этому—это считалось вполнѣ естественнымъ, ибо самъ намѣстникъ говорилъ: «То же самое случается со мной, и когда это долго не попадается мнѣ подъ руки, то я и теперь еще все забываю».

А вотъ что говоритъ Стрѣльцовъ по поводу обученія ариѳметикѣ въ школѣ періода 1849—1864 гг.: «Сначала я учу считать до 100. Посажу всѣхъ учениковъ и говорю: разъ, два, три и т. д., а дѣти повторяютъ хоромъ. Такъ они и научаются считать до ста, а тамъ уже то же самое пойдетъ далѣе: сто одинъ, сто два, и далѣе».—И дѣти всѣ научаются такимъ образомъ считать?—«Ну, есть всякіе; иному ни за что не выучиться считать дальше десяти: какъ дошелъ до 11-ти, такъ и стой, сбивается. Потомъ пишутъ до ста; я прописываю на доскѣ; а когда научатся писать въ разбивку до 100, тогда я изучаю съ ними нумерацію. Поставлю учениковъ въ кружокъ къ доскѣ, напишу имъ

число съ милліонами и, показывая на первую цифру, говорю: единицы, десятки (на нихъ показываю), сотни, тысячи, десятки тысячъ, сотни тысячъ, милліоны. Такъ показываю и твержу, а дѣти повторяютъ за мною хоромъ до тѣхъ поръ, пока будутъ знать и подъ рядъ и въ разбивку. Потомъ заставляю ихъ выговаривать числа съ милліонами (больше милліоновъ рѣдко употребляю), а потомъ учу писать такія же числа подъ диктовку»—И понимаютъ?—«Сначала, конечно, трудно, особенно нулей ставить долго не научаются, но послѣ поймутъ хорошо. Потомъ—сложеніе. Сначала разскажу, какъ подписывать числа: единицы подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д. Потомъ покажу, съ чего начинать сложеніе, что писать, что въ умѣ—и все тутъ. Конечно, есть другіе, что или сложить не умѣетъ сколько 7 да 9, 8 да 6 и проч., или въ умѣ оставляетъ, но такихъ немного, потому что я даю учить наизусть таблицу сложенія небольшихъ чиселъ. Потомъ вычитаніе—то же самое; только тутъ занимать учу, когда нельзя вычесть. Вычитаніе понимаютъ скоро. Умноженіе труднѣе; тутъ таблицы иному и въ зиму не выучить. А кто выучитъ таблицу, тотъ скоро начнетъ дѣлать, да и просто: умножать по таблицѣ, а подписывать, какъ въ сложеніи. Только тутъ многіе все сбиваются: помножаетъ на вторую цифру, а пишетъ подъ первою; помножаетъ на третью, а писать и не знаетъ куда, но и то скоро привыкаютъ писать лѣсенкой. А тамъ—дѣленіе. Дѣленіе сперва на одну цифру, потомъ на двѣ. Дѣленіе—всего труднѣе. Задаваться рѣдко кто можетъ сразу вѣрно».—Видя, какъ въ школѣ этого учителя дѣти рѣшаютъ задачи, можно было убѣдиться, что ученики буквально *дѣлаютъ* задачи, не понимая того, что они дѣлаютъ, какъ и для чего все это дѣлается. Задачи ихъ состояли изъ чисто отвлеченныхъ чиселъ, обрабатываемыхъ по заранѣе опредѣленному плану. 33125 раздѣлить на 71, командуетъ старшій ученикъ, и отдѣленіе его дружно скрипитъ грифелями... Пробовали дать имъ нѣсколько устныхъ задачъ изъ крестьянскаго быта, и нѣкоторые ребята считали вѣрно, но по-своему. Продалъ мужикъ возъ сѣна—25 пудовъ по 27 коп. за пудъ; сколько ему приходится получить денегъ?—«По гривеннику—два съ полтиной; по другому—опять два съ полтиной, да по пятаку 1 р. 25 к.;—всего 6 р. 25 к.; да по копѣйкѣ 25 к. по другой—еще 25 к.». Позабылъ сосчитанное и запутался.—Почему по гривеннику, такъ будетъ два съ полтиной?—«Такъ ужъ приходится».—Да почему приходится? Можетъ и не такъ?—«Нѣтъ, ужъ такъ; по гривеннику—всегда такъ».—Кто же тебѣ это сказалъ?—«Отецъ всегда такъ на счетахъ считаетъ».—Но скажите—спрашиваютъ учителя, какая польза дѣтямъ отъ того, что они привыкаютъ дѣлать всѣ эти задачи (т.-е. задачи съ отвлеченными числами на опредѣленныя, назначенныя дѣйствія)?—«Будутъ знать, какъ дѣлается; конечно, у нихъ дома все на счетахъ или на память считаютъ—это скорѣе; но такъ гораздо вѣрнѣе».—Какъ же вѣрнѣе, когда вы говорите, что часто ошибаются въ нуляхъ или подписываютъ десятки подъ единицами? И гдѣ же крестьянину придется считать большія числа съ милліонами? Да, наконецъ, ваши задачи нельзя дѣлать безъ бумаги и карандаша; неужели же крестьянину всегда носить ихъ съ собою? А главное, вотъ что: если вашему ученику придется сосчитать, сколько, напр., въ тысячѣ сороковъ, то кто ему скажетъ, помножить надо или раздѣлить.—«Конечно, тутъ свой умъ нуженъ, и я тоже заставляю дѣлать задачи; но вѣдь вы знаете—крестьянскіе дѣти: они понимаютъ плохо, а если показано правило, какъ писать и дѣлать, то гораздо легче поймутъ».—Но вѣдь правило они могутъ позабыть, и тогда что же?—«Правила я диктую и заставляю учить наузусть; конечно, и тутъ забываютъ другіе».—Но пользоваться правиломъ и приложить его къ дѣлу можетъ только тотъ, у кого, какъ вы

сказали, есть *свой умъ*. Откуда же послѣ этого у ребенка возьмется этотъ свой умъ, если въ школѣ не позаботятся развить его?—«Выростутъ, станутъ умнѣе. Жизнь сама учитъ человѣка».

§ 68. **Принципъ наглядности.** Еще въ XVII столѣтіи знаменитый Амосъ Коменскій сѣтовалъ на то, что «въ школахъ обучаютъ рѣчи раньше вещей». По его мнѣнію, высказанному имъ въ «Великой Дидактикѣ», образованіе духа только тогда будетъ «легкимъ и пріятнымъ», если все будетъ преподаваемо при посредствѣ внѣшнихъ чувствъ». Превозглашенный этими словами принципъ наглядности обученія долго оставался безъ вниманія. Принципъ этотъ заключается въ томъ, что преподаваніе ариѳметики должно сопровождаться примѣненіемъ наглядныхъ пособій и примѣровъ; цѣль примѣненія этихъ пособій состоитъ въ томъ, чтобы сдѣлать познанія дѣтей болѣе глубокими и реальными, а самое пріобрѣтеніе этихъ познаній сдѣлать болѣе «легкимъ и пріятнымъ» для нихъ. Употребленіе наглядныхъ пособій при преподаваніи ариѳметики началось, какъ мы уже видѣли, приблизительно съ середины XVIII столѣтія (см. § 59).

Въ настоящее время принципъ наглядности лежитъ въ основѣ преподаванія всѣхъ школьныхъ предметовъ, особенно предметовъ первоначальнаго обученія. Такъ, преподаватели русскаго языка стараются показывать дѣтямъ тѣ предметы (или ихъ изображенія), о которыхъ идетъ рѣчь въ какомъ-нибудь отрывкѣ или стихотвореніи. И въ самомъ дѣлѣ весьма печально, если ребенокъ учитъ, например, стихотвореніе, въ которомъ идетъ рѣчь о жаворонкѣ и о поляхъ, и въ то же время совершенно не представляетъ себѣ этихъ предметовъ, хотя бы по картинкамъ. Преподаватели исторіи стремятся показать учащимся памятники старины (или ихъ изображенія), переносятъ при помощи туманныхъ картинъ своихъ учениковъ въ отдаленныя эпохи исторіи человѣчества, заставляютъ ихъ какъ бы присутствовать при ходѣ историческихъ событій. Преподаватели географіи употребляютъ карты, картины, изображающія бытъ и жизнь различныхъ народовъ и т. д. Особенно широко принципъ наглядности осуществляется, по самой природѣ дѣла, въ естественныхъ наукахъ, какъ то при преподаваніи физики, химіи, начальнаго природовѣдѣнія. Экскурсіи, предпринимаемыя школами, съ цѣлью посѣщенія музеевъ, кинематографовъ, памятниковъ старины, замѣчательныхъ мѣстностей и т. д. являются осуществленіемъ того же принципа наглядности.

Не даромъ говорятъ, что жизнь—лучшая школа человѣка, жизнь научитъ. Жизнь именно потому даетъ самые рѣшающіе уроки житейскаго опыта, что мѣры ея воздѣйствія на человѣка прежде всего наглядно реальны. Осуществляя принципъ наглядности при преподаваніи, мы уподобляемся жизни; при этомъ мы научаемъ ребятъ тому, чтобы они *связывали слова съ вещами*, то-есть мыслили реально. Привычка связывать слова съ вещами отучитъ дѣтей играть безплодными словами и заставитъ ихъ всегда вдумчиво относиться къ тому, что они хотятъ сказать.

§ 69. **Принципъ самодѣятельности. Лабораторный методъ.** Обучая и воспитывая ребенка, мы не должны забывать, что конечною цѣлью нашихъ воспитательныхъ усилій должно быть приготовленіе ребенка къ жизни: изъ ребенка мы должны приготовить борца на аренѣ жизни, умѣющаго быть творцомъ жизни, а не жалкимъ рабомъ ея. Но достиженіе этой цѣли возможно лишь въ томъ случаѣ, если мы научимъ ребенка быть *дѣйствующимъ* лицомъ уже въ школьномъ возрастѣ. Поэтому основнымъ и важнѣйшимъ принципомъ школьнаго обученія долженъ быть принципъ самодѣятельности дѣтей.

Въ разныхъ мѣстахъ нашего курса мы указывали на способы практическаго осуществленія этого принципа: ребенокъ

долженъ наблюдать и считать самимъ имъ выбранные предметы, долженъ производить взвѣшиваніе при помощи вѣсовъ, заниматься измѣреніемъ длины предметовъ, площадей и объемовъ тѣлъ; занимаясь, напримѣръ, изученіемъ дробныхъ чиселъ, онъ долженъ въ дѣйствительности разрѣзать предметы на части (а не ограничиваться созерцаніемъ предметовъ, нарисованныхъ раздѣленными на части) и распредѣлять эти части группами и т. д. Ребенку должны быть предлагаемы практическія задачи, содержаніе которыхъ должно быть заимствовано изъ жизни, а не только изъ задачниковъ.

При такомъ веденіи дѣла, школьная комната ребенка, или классъ, обращаются въ своего рода лабораторію, въ которой кипитъ работа и горитъ живая мысль, одухотворяющая работу рукъ—здѣсь мы увидимъ лишь маленькихъ творцовъ жизни, готовящихся къ своему будущему разумному жизненному пути. Методъ обученія ариѳметикѣ, основанный на лабораторныхъ занятіяхъ дѣтей, носитъ названіе *лабораторнаго метода*. Нѣтъ сомнѣнія, что лабораторный методъ является наилучшимъ методомъ преподаванія.

Единственнымъ возраженіемъ противъ лабораторнаго метода является то обстоятельство, что примѣненіе его въ школахъ, гдѣ въ классахъ сосредоточено много дѣтей, сопряжено съ рядомъ практическихъ неудобствъ: къ этимъ неудобствамъ относятся нѣкоторая возня и шумъ, возникающія въ классѣ при примѣненіи этой методы, дороговизна обзаведенія нѣкоторыми приборами, необходимость увеличенія педагогическаго персонала для лучшаго осуществленія работъ дѣтей. Но эти неудобства, связанныя съ практическимъ осуществленіемъ лабораторнаго метода, не могутъ имѣть рѣшающаго значенія; все дѣло зависитъ отъ организаціи школьнаго дѣла. При надлежащей организаціи дѣла, всѣ эти шероховатости изгладятся сами собой, какъ это показываетъ примѣръ школъ, въ которыхъ лабораторный методъ преподаванія налаженъ (см. § 70) *).

§ 70. **Историческое примѣчаніе.** Необходимость самодѣятельности учащихся и въ связи съ этимъ нагляднаго и лабораторнаго метода преподаванія сознана уже очень давно. Въ защиту этого метода выступаютъ въ XVI столѣтіи Рабле и Монтэнь. Вотъ что говоритъ, напримѣръ, Рабле: «Воспитанникъ долженъ посѣщать всевозможныя мастерскія, заводы, музеи, публичныя лекціи, народныя увеселенія, чтобы воочію познакомиться со всевозможными видами производства предметовъ, чтобы изучить ихъ назначеніе, чтобы наконецъ самолично наблюдать всевозможныя стороны жизни». Весьма опредѣленно высказывается также Монтэнь, который сѣтуетъ на то, что ребенку при преподаваніи предоставляется слишкомъ мало инціативы. Вотъ эти слова Монтэня:

*) Въ своихъ очеркахъ по методикѣ ариѳметики г. Эрнъ высказываетъ слѣдующее мнѣніе о практическомъ осуществленіи лабораторнаго метода „на практикѣ веденіе лабораторныхъ занятій по ариѳметикѣ встрѣчается со множествомъ затрудненій эти занятія требуютъ прежде всего большой затраты матеріальныхъ средствъ, совершенно непосильной большинству нашихъ начальныхъ школъ; они требуютъ много мѣста въ классѣ и, пожалуй, устройства особой классной мебели (столы съ горизонтальными, а не покатыми верхними досками); на самостоятельныя работы учениковъ въ классѣ затрачивается масса времени; наконецъ всѣ упражненія и занятія, предлагаемыя сторонниками лабораторной методы, если ихъ не разнообразить постоянно, могутъ скоро такъ же наскучить ученикамъ, какъ и всякія другія, повторяемыя изо дня въ день, упражненія. Поэтому мы думаемъ, что излишнее увлеченіе лабораторнымъ способомъ обученія ариѳметикѣ, какъ всякая крайность, вредно. Можетъ быть, разумнѣе чередовать лабораторныя занятія съ обычнымъ нагляднымъ обученіемъ; при этомъ ученики должны быть соединяемы въ группы по 5—6 человѣкъ, число наглядыхъ пособій и предметовъ выдаваемыхъ ученикамъ на руки должно быть сокращено или пособія эти должны быть замѣнены болѣе дешевыми. Во всякомъ случаѣ, самый принципъ лабораторныхъ занятій несомнѣнно въ высшей степени цѣненъ, и учителямъ-практикамъ стоитъ поработать, чтобы установить наилучшія формы его примѣненія въ школѣ". Вполнѣ соглашаясь съ той мыслью г. Эрна, что введеніе лабораторной методы сопряжено съ извѣстными затрудненіями, мы еще разъ настаиваемъ на томъ, что практическое осуществленіе этой методы вполнѣ возможно тѣмъ или инымъ путемъ, и во всякомъ случаѣ есть дѣло педагогической необходимости.

«Постоянно кричатъ ученику въ уши, какъ будто льютъ въ воронку; а обязанность ученика состоитъ только въ повтореніи сказаннаго... Я не хочу, чтобы учитель находилъ и говорилъ всегда одинъ; я хочу, чтобы онъ въ свою очередь выслушивалъ слова ученика. Сократъ и потомъ Археилай сначала заставляли говорить своихъ учениковъ, а потомъ уже сами говорили имъ».

Въ началѣ XVII столѣтія принципы лабораторно-нагляднаго метода высказываетъ нѣмецкій педагогъ Вольфгангъ Ратихій. Среди прочихъ своихъ педагогическихъ положеній онъ выставляетъ слѣдующее знаменитое положеніе: «все посредствомъ опыта и предметнаго обученія». За нимъ слѣдуетъ упоминавшійся уже нами Амосъ Коменскій, который въ своихъ затаенныхъ мечтахъ рисовалъ себѣ школу, какъ живую кипучую мастерскую духа и характера дѣтей. Мы приводимъ здѣсь особенно характерныя цитаты изъ «Великой Дидактики».

«Для того, чтобы все это легче запечатлѣлось въ ихъ умахъ, необходимо дѣйствовать, насколько можно, на ихъ внѣшнія чувства». «Надо постоянно пользоваться вмѣстѣ и слухомъ, и зрѣніемъ, языкомъ и рукою, то-есть не только произнося то, что надо сказать, чтобы оно воспринималось на слухъ, но и рисуя это, чтобы оно запечатлѣвалось въ воображеніи при помощи глазъ. Пусть дѣти съ самаго начала пріучаются попеременно произносить языкомъ и изображать рукою, такъ что отъ всякаго предмета будутъ отходить только тогда, когда онъ запечатлѣется съ достаточною ясностью въ ихъ ушахъ, глазахъ, въ умѣ и памяти». «Облегченіемъ для ученика будетъ то, что ему каждый разъ покажутъ, какое примѣненіе имѣетъ въ ежедневной жизни то, чему его учатъ».

Особенно опредѣленны слѣдующія слова Амоса Коменскаго: «*Школы суть не что иное, какъ мастерскія, въ которыхъ кипитъ работа*. Только такимъ образомъ всѣ, сами путемъ собственной удачной дѣятельности испытаютъ справедливость извѣстной поговорки: *образовывая, образуемъ самихъ себя*».

Слѣдуетъ замѣтить, что благодаря трудамъ учениковъ и послѣдователей Аммоса Коменскаго въ Германіи возникъ цѣлый рядъ школъ лабораторно-нагляднаго направленія. Таковы, напримѣръ, школы, организованныя уже въ концѣ XVII и въ XVIII столѣтій педагогами Франке, Землеромъ, Геккеромъ и другими.

Защитникомъ наглядно-лабораторнаго метода преподаванія является также знаменитый Жанъ-Жакъ Руссо (XVIII ст.). Въ своемъ «Эмилѣ» онъ высказывается по этому вопросу вполнѣ опредѣленно: «Истинное воспитаніе состоитъ не столько въ правилахъ, сколько въ упражненіяхъ». «Жить, это не значитъ дышать; это значитъ дѣйствовать». «Упражнять чувства это не только значитъ пользоваться ими, это значитъ учиться хорошо судить съ помощью ихъ, учиться—такъ сказать—чувствовать, ибо мы умѣемъ осязать, видѣть, слышать только то, чему научились. Упражняйте же не только силы, но и всѣ чувства, ими управляющія; извлекайте изъ каждаго всю возможную пользу, затѣмъ впечатлѣнія одного повѣряйте другими. *Измѣряйте, считайте, взвѣшивайте, сравнивайте*» *).

Песталоцци является также яркимъ сторонникомъ разсматриваемой методы преподаванія: «Знаніе безъ умѣнія»,—говоритъ онъ,—«составляетъ, можетъ быть, страшнѣйшій даръ, который принесенъ нашему вѣку *злѣйшимъ геніемъ*». Онъ уже говоритъ: «всѣ наши познанія получаются путемъ нагляднаго созерцанія, даются *числомъ, формой и словомъ*».

Но настоящимъ основателемъ лабораторной методы слѣдуетъ считать Фридриха Фребеля (1782—1852 гг.),

*) Курсивъ нашъ.

который высказывалъ ту мысль, что ребенокъ долженъ учиться, играя, и что воспитаніе ребенка должно совершаться при помощи всесторонняго развитія его органовъ чувствъ за *самостоятельной* работой. Къ такимъ самостоятельнымъ работамъ относятся, напримѣръ: 1) построенія

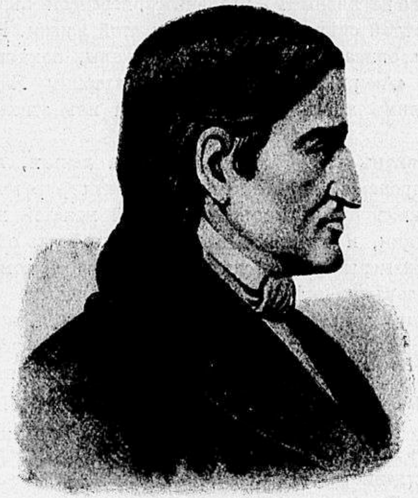


Рис. 47. Фридрихъ Фребель. (1782—1852).

при помощи кубиковъ, 2) лѣпка изъ глины, 3) сгибаніе, разрѣзаніе и планировка бумаги, 4) складываніе палочекъ, 5) рисованіе и т. д. Фребель является основателемъ *дѣтскихъ садовъ*, которые въ настоящее время пользуются широкой популярностью. Вотъ основной девизъ системы Фребеля, высказанный имъ же самимъ: «Все, чему долженъ научиться ребенокъ, все это онъ долженъ прежде всего сдѣлать самъ».

Особенно широко развита лабораторная метода преподаванія въ современныхъ народныхъ школахъ С. Америки, въ Сѣверо-Американскихъ Соединенныхъ Штатахъ. Въ этихъ школахъ стараются все изучаемое дѣтьми сдѣлать возможно болѣе нагляднымъ и реальнымъ, перенести въ школу жизнь, а дѣтей сдѣлать участниками этой жизни. Весьма любопытны описанія американской школы, помѣщенныя въ книгѣ «Американская школа» Екатерины Янжулъ. Мы приводимъ здѣсь нѣкоторыя мѣста изъ этихъ описаній:

«Во всякомъ случаѣ всѣ задачи на деньги, всякая купля и продажа, по возможности, иллюстрируются въ американскихъ школахъ дѣйствительной монетой или ея эквивалентами, и даже кое-гдѣ можно встрѣтить образцы какъ бы разыгрыванія въ лицахъ настоящихъ коммерческихъ сдѣлокъ во всѣхъ ихъ послѣдовательныхъ фазисахъ». «Точно такъ же тотъ отдѣлъ ариѳметики, который относится къ измѣренію вѣса предметовъ, всегда проходится при помощи вѣсовъ, какъ классной пособія. Вѣсами при этомъ орудуютъ не одинъ только преподаватель, но и сами дѣти: въ сравнительной величинѣ разныхъ мѣръ вѣса они наглядно убѣждаются изъ цѣлаго ряда собственноручно продѣлываемыхъ взвѣшиваній и провѣрокъ. Вообще американскіе преподаватели въ своихъ урокахъ ариѳметики постоянно заставляютъ дѣтей что-нибудь или отмѣривать, или отвѣшивать, или отсчитывать, или даже переливать, или отливать. И это дѣлается не только въ самомъ началѣ обученія, но и на всѣхъ стадіяхъ его, по мѣрѣ того, какъ требуется наглядно доказать какую-нибудь математическую истину». «Правила ариѳметики, пройдя черезъ горнило собственнаго опыта надъ числами, перестаютъ быть чѣмъ-то абстрактнымъ, внѣ жизни стоящимъ, а представляютъ собой лишь напоминаніе тѣхъ измѣреній и вычисленій, какія продѣлывались самимъ ученикомъ».

Вотъ что говоритъ извѣстный психологъ профессоръ Джемсъ (см. «Бесѣды съ учителями о психологіи») о значеніи лабораторныхъ занятій учащихся: «Работы, исполненныя въ лабораторіи и въ мастерской, пріучаютъ ученика наблюдать и понимать различіе между точностью и неопредѣленностью, онѣ даютъ ему возможность увидѣть сложныя отношенія въ природѣ и приводятъ его къ убѣжденію, что отвлеченныя описанія не могутъ замѣнить дѣйствительныхъ явленій,—а все это, однажды усвоенное, сохраняется уже на всю жизнь. Такія работы пріучаютъ къ точности, потому что, когда человѣкъ *дѣлаетъ* предметъ, то можетъ сдѣлать его или вполнѣ правильно, или же неправильно. Они пріучаютъ къ честности, потому что, когда приходится дѣлать какую-нибудь вещь, а не говорить слова,—тогда нельзя прикрыть своей неувѣренности или своего незнанія неопредѣленными фразами. Онѣ пріучаютъ довѣрять самому себѣ; онѣ постоянно поддерживаютъ интересъ къ предмету и вниманіе, сводятъ до минимума дисциплинарныя функціи учителя». Эти слова проф. Джемса весьма мѣтко характеризуютъ главное воспитательное достоинство лабораторной методы; это достоинство легко усмотритъ, напримѣръ, всякій преподаватель физики, ведущій практическія занятія по физикѣ съ учащимися: они быстро научаются дѣйствительно сознательно вычислять и пріучаются съ надлежащей осторожностью относиться къ своимъ результатамъ.

Мы приводимъ еще описаніе Демоленомъ преподаванія математики въ англійской школѣ въ Аббатсхолмѣ, основанной въ 1889 году, гдѣ преподаваніе ведется по лабораторному методу. «Къ преподаванію математики прилагается также практическій способъ: ученикамъ даютъ примѣнять на дѣлѣ тѣ вычисленія, которымъ ихъ обучали; напримѣръ, они исполняютъ нѣкоторыя работы, при которыхъ нужно комбинировать измѣренія, занимаются межеваніемъ. Имъ раздаются счета по расходамъ фермы, сада, мастерскихъ, игръ, канцелярскихъ принадлежностей, химической лабораторіи, класса рисованія, пищи, отопленія; они приводятъ ихъ въ порядокъ и дѣлаютъ всѣ необходимые для этого расчеты. Нельзя не согласиться, что этотъ способъ придаетъ отвлеченному изученію математики особый интересъ; всякій видитъ его практическую пользу; цифры оживаютъ; является умѣнье вести хозяйство, промышленное или торговое дѣло, словомъ, дѣйствительно готовятся практическіе люди, способные дѣйствительно жить въ обществѣ».

Въ настоящее время лабораторный методъ распространяется и во многихъ европейскихъ странахъ; начинаетъ онъ распространяться и въ Россіи. У насъ въ Россіи однимъ изъ самыхъ ревностныхъ защитниковъ лабораторнаго метода является Д. Д. Галанинъ (см. «Введеніе въ методику ариѳметики», а также «Методика ариѳметики» Д. Д. Галанина). Въ своей «Методикѣ ариѳметики» г. Галанинъ приводитъ довольно длинный списокъ наглядныхъ пособій при преподаваніи; здѣсь имѣются и деревянныя линейки, и клубокъ тесемки, и листы цвѣтной бумаги, и вѣсы съ разновѣсками, и модели монетъ, и чашки съ пескомъ и т. д.—Всѣ эти пособія суть пособія лабораторной методы.

За лабораторный методъ стоятъ также петербургскіе педагоги гг. Мрочекъ и Филипповичъ. На стр. 265 своей «Педагогики математики» они говорятъ слѣдующее: «Ручной трудъ можетъ найти примѣненіе въ ариѳметикѣ въ большемъ масштабѣ. Такъ, ученіе о дробяхъ можно соединить со столярными и картонажными работами; графическій

элементъ и его спутникъ—черченіе сопровождаютъ почти всѣ вычисленія; задачи на коммерческія вычисленія требуютъ экскурсій въ банки и большіе магазины, хлѣбныя биржи и пароходныя пристани; наконецъ умѣнье обращаться съ приборами и счетными машинами должно составить не менѣе важную черту ариѳметическаго образованія». Слѣдуетъ, впрочемъ, замѣтить, что врядъ ли нѣкоторыя изъ предлагаемыхъ гг. Мрочекомъ и Филипповичемъ мѣръ осуществимы на практикѣ: таковы экскурсіи въ торговыя учрежденія. Ужъ лучше пусть въ школѣ налаживаются игры въ торговлю.

§ 71. **Катехизическій методъ преподаванія. Повѣствовательный методъ.** Въ связи съ принципомъ самодѣятельности стоитъ такъ называемый катехизическій или вопросоотвѣтный методъ преподаванія. Заключается онъ въ томъ, что преподаватель при помощи соотвѣтственно подобранныхъ вопросовъ наводитъ учениковъ на «открытіе ариѳметическихъ истинъ». Въ этомъ случаѣ примѣры должны предшествовать правиламъ; при помощи наводящихъ вопросовъ учителя, дѣти сами должны установить извѣстное правило *). Этотъ методъ преподаванія называется также *эвристическимъ* методомъ.

Методомъ, противоположнымъ эвристическому, является такъ называемый *повѣствовательный* методъ, при которомъ учитель, желая ознакомить дѣтей съ какой-нибудь новой истиной, излагаетъ ее въ формѣ связнаго повѣствовательнаго разсказа, а дѣти являются лишь пассивными слушателями. Такой методъ не примѣнимъ при занятіяхъ съ малыми дѣтьми, хотя бы по той причинѣ, что дѣти не могутъ надолго сосредоточить свое вниманіе на одномъ и томъ же

*) Вотъ что говоритъ Жанъ Масе: „Истинная метода обученія ариѳметикѣ состоитъ въ томъ, чтобы поставить умъ ребенка въ условія, приличествующія начальному періоду развитія его, и въ томъ чтобы ребенокъ присутствовалъ, такъ сказать, при самомъ изобрѣтеніи ариѳметикѣ.

разсказѣ, какъ бы интересенъ онъ ни былъ; кромѣ того, при такомъ методѣ совершенно устраняется самодѣятельность дѣтей. Повѣствовательный методъ примѣнимъ лишь въ старшихъ классахъ учебныхъ заведенiй, и то въ перемежку съ эвристическимъ. Повѣствовательный методъ есть чисто академическiй, лекцiонный методъ. Нѣкоторые учителя, особенно тѣ изъ нихъ, которые обладаютъ даромъ краснорѣчiя, любятъ занимать вниманiе учащихся блестящимъ изложенiемъ предмета преподаванiя: здѣсь учитель является какъ бы артистомъ на сценѣ, а учащiеся какъ бы зрителями зрительнаго зала. Но эти учителя забываютъ, что главными *дѣйствующими* лицами во время школьнаго урока должны быть не они сами, а ихъ ученики; артистами должны быть ученики, а учитель—ихъ режиссеромъ.

§ 72. **Лабораторный методъ и функцiональная зависимость величинъ.** Въ § 5 мы указывали, что умѣнье рѣшать задачи должно основываться на умѣнiи производить ариѳметическiя дѣйствiя и *на знанiи функцiональной зависимости величинъ*. Тамъ же мы обращали вниманiе на то обстоятельство, что это знанiе функцiональной зависимости добывается учащимся, исходя изъ житейскаго опыта и изъ рѣшенiя задачъ. Здѣсь мы считаемъ необходимымъ подчеркнуть, что наилучшее и наиболѣе реальное знанiе функцiональныхъ зависимостей должно получиться при лабораторномъ методѣ, когда дѣти путемъ *собственныхъ* измѣренiй убѣждаются въ наличности тѣхъ или иныхъ зависимостей величинъ. Такъ, отмѣривая при помощи мензурки опредѣленныя количества воды и взвѣшивая эти количества, дѣти легко найдутъ зависимость между вѣсомъ и объемомъ воды, именно, что вѣсъ прямо пропорцiоналенъ объему; добытое такимъ *жизненнымъ* путемъ знанiе ляжетъ въ основу сознательнаго умѣнья рѣшать задачи, въ число данныхъ которыхъ входятъ вѣсъ и объемъ тѣла.

Большимъ сторонникомъ лабораторнаго изученiя функцiональныхъ зависимостей величинъ, является у насъ въ Россiи Д. Д. Галанинъ. Вотъ что говоритъ г. Галанинъ: «Для выясненiя вопроса о дѣйствiяхъ, начальное обученiе должно содержать элементы геометрiи и физики въ ихъ практическихъ приложенiяхъ. Ученикъ долженъ не только самъ измѣрять количества, но и производить опыты, то-есть изучать самыя явленiя... Ученикъ, непосредственно наблюдающiй, что съ увеличенiемъ объема одного и того же вещества вѣсъ его увеличивается во столько же разъ, легче пойметъ, что съ увеличенiемъ количества взятой муки, количество хлѣба увеличивается во столько же разъ. Здѣсь руководство учителя даетъ ему руководящую нить, а онъ самъ уже находитъ законы дѣйствiя физическихъ чиселъ и соотношенiя между получаемыми количествами» (см. «Введенiе въ методику ариѳметики» г. Галанина).

Г. Галанинъ вполнѣ правильно считаетъ математическое дѣйствiе слѣдствiемъ знанiя функцiональной зависимости величинъ: «*математическимъ дѣйствiемъ*,— говоритъ онъ,—*называется логическое слѣдствiе функцiональной зависимости величинъ и тѣхъ условiй, которыя даны въ задачѣ*».

Слѣдуетъ замѣтить, что введенiе элементовъ геометрiи и физики въ начальное обученiе ариѳметики рекомендовалъ еще русскiй методистъ Гурьевъ въ 60-ыхъ годахъ прошлаго столѣтiя. Приблизительно въ это же время въ Германiи вышла книга нѣмецкаго методиста Гольтца, подъ названiемъ: «Der Rechnenunterricht in der Volksschule», въ которой Гольтцъ предлагаетъ установить при преподаванiи ариѳметики, «необходимую связь со всѣми другими учебными предметами». Гольтцъ полагалъ, что въ народной школѣ только обученiе дѣтей ариѳметикѣ способно сообщить имъ «подготовительныя свѣдѣнiя о тѣхъ предметахъ и соотношеніяхъ между ними, на которыхъ строятся въ жизни, какъ самыя числа, такъ и существующія между ними отношенія». Сообразно съ этими своими взглядами Гольтцъ рекомендуетъ слѣдующее распредѣленіе учебнаго матеріала: 1) мѣры времени; 2) прочія мѣры 3) деньги; 4) пріобрѣтеніе и пользованіе собственностью и т. д. Методъ преподаванія, рекомендуемый Гольтцемъ, можно назвать *предметнымъ*. Этого же метода придерживаются также послѣдователи такъ называемой Гербартъ-Циллеровской школы преподаванія. Циллеръ считаетъ математику «формальной стороной естественныхъ наукъ».

Гольтца можно считать однимъ изъ предвозвѣстниковъ современнаго лабораторнаго метода преподаванія. Въ своемъ «Введеніи въ методику ариѳметики» г. Галанинъ откровенно признается въ преемственной связи его идей съ идеями Гольтца.

§ 73. **Принципъ любовнаго отношенія къ дѣтямъ.** Въ настоящей главѣ мы разсмотрѣли цѣлый рядъ основныхъ принциповъ, на которыхъ должно основываться преподаваніе дѣтямъ ариѳметики. Но нѣтъ сомнѣнія, что эти принципы только тогда могутъ стать полезными и плодотворными при ихъ практическомъ примѣненіи, если педагоги, проводящіе ихъ въ жизни, будутъ одухотворены чувствомъ горячей любви къ дѣтямъ и къ своему педагогическомъ дѣлу. Педагогъ, любящій дѣтей, будетъ старшимъ товарищемъ дѣтей, терпѣливымъ ихъ наставникомъ, сознающимъ, что не всякая научная или житейская истина дается сразу; это сознаніе дастъ ему силы быть внимательнымъ и снисходительнымъ къ ошибкамъ ребенка, удержитъ его отъ грозныхъ окриковъ и поможетъ ему найти мирный выходъ изъ возможныхъ на педагогическомъ пути, треній. Это снисходительное отношеніе къ ошибкамъ дѣтей не исключаетъ, конечно, требованія опредѣленныхъ знаній. Строгость, понимаемая въ смыслѣ послѣдовательнаго проведенія опредѣленныхъ справедливыхъ педагогическихъ требованій, должна быть у всякаго педагога; но такая строгость вполнѣ согласуется съ любовью къ дѣтямъ и дѣтской природѣ.

Велика и отвѣтственна дѣятельность педагога. Педагогъ стоитъ на грани между минувшими и будущими поколѣніями. Воспринявши самъ культурное наслѣдіе человѣчества, педагогъ долженъ бережно и любовно передать это наслѣдство дѣтямъ, наслѣдникамъ человѣчества. Вышеизложенные принципы помогутъ ему осуществить эту важную задачу. И тогда осуществится мечта великаго педагога Амоса Коменскаго, который, исходя изъ пламенной любви къ дѣтямъ, говорилъ: «Omnia sponte fluant, absit violentia rebus», то есть «*пусть все**) *вольно течетъ, пусть не будетъ принужденія*».

ГЛАВА XIII.

Психологическія основы преподаванія.

§ 74. **Ощущенія. Ихъ роль при познаваніи природы.** Живя среди внѣшняго міра, среди природы, человѣкъ непрерывно подвергается воздѣйствію этой природы. Природа проникаетъ во внутренній міръ человѣка, въ его умъ, черезъ 5 дверей—пять органовъ чувствъ человѣка. При помощи этихъ органовъ чувствъ человѣкъ получаетъ рядъ разнообразныхъ ощущеній: такъ, онъ испытываетъ ощущенія свѣта, звука, тепла и холода, вкуса, осязанія и обонянія. Отнимите у человѣка эти ощущенія, и внѣшній міръ станетъ для него пустымъ безплотнымъ мѣстомъ.

Особенно важны для насъ *осязательныя ощущенія*. При посредствѣ именно этихъ ощущеній мы чувствуемъ свое

*) Въ педагогическомъ дѣлѣ развитія и воспитанія ребенка.

собственное существованіе, чувствуемъ жизнь своего **тѣла**, осязаемъ его; эти ощущенія самымъ реальнымъ образомъ убѣждаютъ насъ въ существованіи внѣшняго міра; осязаніе даетъ намъ знать о томъ, что мы имѣемъ подпору подъ ногами, а сбоку и сверху стѣны комнаты *), въ которой мы находимся. Если мы желаемъ убѣдиться въ реальности того, что мы видимъ, то мы прежде всего стараемся прикоснуться къ видимому предмету пальцами: если при этомъ будутъ получены осязательныя ощущенія, то это является для насъ убѣдительнѣйшимъ доказательствомъ реальности предмета. Извѣстно, что маленькіе дѣти любятъ ко всѣмъ предметамъ протягивать свои рученки—въ этомъ слѣдуетъ видѣть естественное стремленіе при помощи *осязанія* познать внѣшній міръ.

Но самымъ острымъ и могущественнымъ изъ нашихъ чувствъ является чувство зрѣнія. Если мы приближаемся къ какимъ-нибудь предметамъ, то первыя ощущенія, которыя у насъ возникаютъ, суть ощущенія зрительныя; мы *видимъ* эти предметы даже тогда, когда они настолько еще удалены отъ насъ, что не могутъ еще воздѣйствовать на другіе органы нашихъ чувствъ. Одна мысль лишиться зрѣнія вызываетъ въ насъ чувство ужаса—настолько цѣнны для насъ зрительныя ощущенія. И все же главными ощущеніями являются несомнѣнно осязательныя. Если бы не было этихъ ощущеній, то и зрительныя ощущенія не могли бы быть понятными для насъ; такъ, если мы издали наблюдаемъ блестящій куполъ церкви, и говоримъ, что этотъ куполъ гладкій и круглый, то это мы знаемъ лишь на основаніи того, что путемъ *осязательнаго* опыта научились тому, что означаютъ понятія: «круглый» и «гладкій».

---

*) Хотя мы въ большинствѣ случаевъ и не касаемся стѣнъ, но реальность ихъ очевидна для насъ именно потому, что мы сознаемъ, что, если мы надавимъ на стѣны, то испытаемъ **осязательное** ощущеніе сопротивленія вещества стѣнъ.

Представимъ себѣ на одинъ моментъ, что мы лишились способности получать осязательныя ощущенія: тогда вѣсь міръ обратился бы для насъ въ какой-то сплошной громадный призракъ; люди и предметы стали бы безплотными тѣнями—наступило бы царство привидѣній.

Но, если осязательныя ощущенія являются основными источниками познаванія природы, то отсюда вытекаетъ, что преподаватели должны ставить дѣло преподаванія такъ, чтобы дѣти получали при изученіи преподаваемаго имъ предмета возможно больше осязательныхъ ощущеній. Этому требованію удовлетворяетъ цѣлый рядъ наглядныхъ пособій, описанныхъ въ главѣ X, какъ то солома, ариѳметическій ящикъ, счеты и т. д. *). Но особенно хорошо согласуется съ этимъ требованіемъ лабораторный методъ преподаванія, при которомъ у дѣтей получается гармонія самыхъ разнообразныхъ ощущеній.

§ 75. **Представленія и понятія.** Если мы внимательно изучаемъ какой нибудь предметъ внѣшняго міра, напримѣръ, кусокъ камня, то мы получаемъ отъ этого предмета цѣлый рядъ ощущеній, которыя мы можемъ запомнить. Если мы впослѣдствіи пожелаемъ представить себѣ этотъ камень, то намъ нужно будетъ воспроизвести въ нашемъ сознаніи тѣ ощущенія, которыя мы испытывали на дѣлѣ при реальномъ изученіи камня; но эти воспроизведенныя ощущенія не будутъ уже столь живы, какъ испытанныя нами на дѣлѣ ощущенія.

Воспроизведенныя ощущенія или комбинаціи ощущеній называютъ представленіями. Мы можемъ сказать, что имѣемъ представленіе, напримѣръ, о собакѣ, если въ нашемъ сознаніи имѣются воспроизведенными тѣ комбинаціи ощущеній, которыя мы получили при реальномъ созерцаніи собаки. Конечно, эти представленія о собакѣ могутъ быть различными: у однихъ лицъ могутъ преобладать воспро-

---

*) Вообще такія наглядныя пособія, которыя можно брать въ руки.

изведенныя зрительныя ощущенія, у другихъ—слуховыя. Наилучшимъ представленіемъ о собакѣ слѣдуетъ считать такое, когда комбинація воспроизведенныхъ ощущеній наиболѣе полная. Но для этого нужно прежде всего, чтобы комбинація на дѣлѣ испытанныхъ ощущеній была также возможно болѣе полной.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее важное практическое правило преподаванія: нужно вести преподаваніе такъ, чтобы представленія, возникающія у дѣтей объ изучаемыхъ ими предметахъ, были полными и живыми; а слѣдовательно нужно стараться, чтобы эти предметы воздѣйствовали на возможно большее число органовъ чувствъ дѣтей. Мы опять должны признать психологическую правильность лабораторнаго (и вообще нагляднаго) метода.

Всякое представленіе о предметѣ обладаетъ характерными для него признаками; такъ, представленіе о столѣ обладаетъ другими признаками, чѣмъ представленіе о собакѣ. Но и представленія о *сходныхъ* предметахъ будутъ обладать своими особыми признаками: напримѣръ, представленіе о бульдогѣ другое, чѣмъ представленіе о пуделѣ или представленіе о дворняжкѣ. Но у этихъ представленій о сходныхъ предметахъ имѣется цѣлый рядъ *общихъ* признаковъ, которые болѣе существенны, чѣмъ другіе *не общіе* признаки. Выдѣляя эти общіе признаки, мы получаемъ комбинацію основныхъ признаковъ; представленія о предметѣ, обладающія этими основными признаками, называются *понятіями*. Въ вышеприведенномъ примѣрѣ мы получаемъ понятіе о собакѣ. Это понятіе охватываетъ всѣхъ собакъ міра; но въ то же время у насъ будутъ существовать и *представленія* о собакахъ, напримѣръ, представленіе объ опредѣленной собакѣ нашего знакомаго, со всѣми ея индивидуальными признаками.

Производя научную классификацію предметовъ природы, мы создаемъ понятія, которыя являются результатами

отвлеченія отъ частныхъ признаковъ представленій. Но въ практической жизни мы чаще всего замѣняемъ понятія представленіями: такъ, думая о собакѣ вообще, мы обыкновенно представляемъ себѣ опредѣленную собаку. Особенно это справедливо относительно дѣтей, ибо дѣти предпочитаютъ конкретное мышленіе. Нѣтъ сомнѣнія, что у дѣтей до извѣстнаго возраста нѣтъ понятій, ибо имъ недоступна та отвлеченная работа мысли, которая нужна для созданія понятій. *Понятія у дѣтей замѣнены представленіями*. Спросите ребенка, что такое число: онъ несомнѣнно или назоветъ нѣсколько чиселъ, или покажетъ начертанія чиселъ; но не слѣдуетъ ожидать, чтобы онъ далъ общее отвлеченное опредѣленіе числа*).

Надо впрочемъ замѣтить, что, когда мы понятіе замѣняемъ представленіемъ, напримѣръ, понятіе о собакѣ замѣняемъ представленіемъ объ опредѣленной собакѣ, то все же въ этомъ опредѣленномъ представленіи мы часто цѣлый рядъ частныхъ признаковъ представленія отодвигаемъ на задній планъ: такъ, въ приведенномъ примѣрѣ мы можемъ игнорировать различныя подробности частей тѣла собаки. Вотъ что говоритъ по этому поводу д-ръ Лай: «Мы обладаемъ способностью выдѣлять въ совокупномъ представленіи даннаго объекта, примѣняемаго въ качествѣ примѣра или представителя, нѣкоторыя опредѣленныя частичныя представленія или признаки, выдвигая ихъ путемъ вниманія на свѣтлый передній планъ поля зрѣнія и отодвигая другіе признаки, не нужные почему-либо для данной цѣли—на темный задній планъ» (см. «Руководство къ первоначальному обученію ариѳметикѣ» д-ра Лая, стр. 179).

Опредѣлить понятіе значитъ назвать тѣ признаки, которые характерны для этого понятія. Изъ вышесказаннаго

*) Если даже сообщить ему такое опредѣленіе, то оно не вызоветъ никакого интереса и не проникнетъ глубоко въ его со знаніе.

 10

слѣдуетъ, что при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ не слѣдуетъ торопиться съ опредѣленіями дѣйствій; надо выжидать съ сообщеніемъ дѣтямъ этихъ опредѣленій до тѣхъ поръ, пока они не окажутся способными къ воспріятію этихъ опредѣленій. Мы видѣли, что современная методика ариѳметики стоитъ именно на этой психологически правильной точкѣ зрѣнія. Отдѣльные методисты расходятся лишь въ вопросѣ о томъ, какъ именно далеко нужно отдалить моментъ сообщенія дѣтямъ отвлеченныхъ опредѣленій.

Мы можемъ создавать себѣ представленія о предметахъ и на основаніи одного лишь описанія этихъ предметовъ: такъ, мы можемъ представить себѣ египетскую пирамиду, исходя изъ словеснаго описанія пирамидъ. Но такія представленія не могутъ быть особенно живыми, а главное они не будутъ достаточно вѣрными; эти представленія будутъ воспроизведенными *описаніями* ощущеній, а не воспроизведенными ощущеніями. Чтобы создать въ дѣтяхъ ясныя и вѣрныя представленія, нужно, какъ мы выяснили въ предыдущей главѣ, придерживаться принципа наглядности преподаванія.

§ 76. **Ассоціація представленій. Виды ассоціацій.** Сознаніе человѣка всегда наполнено самыми разнообразными представленіями; съ возрастомъ число представленій ребенка непрерывно растетъ. Но, подобно тому какъ въ такомъ большомъ обществѣ людей, какимъ является государство, царитъ извѣстный порядокъ и имѣется связь отдѣльныхъ людей, такъ и въ мірѣ представленій человѣка установленъ извѣстный порядокъ, извѣстная связь между отдѣльными представленіями. Какъ жизнь государства немыслима безъ опредѣленнаго порядка, такъ и сознательная жизнь человѣка немыслима безъ связи представленій.

Сознательная жизнь человѣка представляетъ собой непрерывный переходъ отъ однихъ представленій къ другимъ. Этотъ переходъ обусловливается съ одной стороны

внутренними сторонами сознанія человѣка, а съ другой— внѣшними вліяніями окружающей среды. При этомъ обычно нѣкоторыя представленія въ данный моментъ доминируютъ надъ другими представленіями, для даннаго момента второстепенными: эти доминирующія представленія даютъ тонъ настроенію человѣка. Такъ, у ребенка, съ интересомъ слушающаго разсказъ учителя, на первомъ планѣ въ сознаніи тѣ представленія, которыя непосредственно связаны съ этимъ разсказомъ, остальныя же представленія, какъ то представленія объ окружающихъ людяхъ или предметахъ, стушевываются на задній планъ. Задача учителя заключается именно въ томъ, чтобы помѣстить въ центрѣ сознанія ребенка именно тѣ представленія, которыя въ данный моментъ нужны.

Связь различныхъ представленій называется *ассоціаціей представленій.* Ассоціаціи представленій могутъ возникать по различнымъ причинамъ. Такъ, представляя себѣ число 5, мы невольно можемъ вспомнить и число 6. такъ какъ эти два числа суть *сосѣднія* числа натуральнаго ряда чиселъ.

Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ ассоціаціей представленій *по смежности:* два представленія связаны другъ съ другомъ, такъ какъ они *смежны* въ пространствѣ или во времени.

Два представленія могутъ вступить во взаимную связь вслѣдствіе сходства этихъ представленій; такая связь называется ассоціаціей *по сходству.* Такъ, ребенокъ, представляя себѣ сложеніе двухзначныхъ чиселъ по десяткамъ и единицамъ отдѣльно, можетъ припомнить въ связи съ этимъ сложеніе отдѣльно рублей и копеекъ при сосчитываніи денегъ; оба эти представленія о двухъ сложеніяхъ связываются здѣсь другъ съ другомъ въ силу нѣкотораго опредѣленнаго сходства. Умъ человѣка испытываетъ особенное удовлетвореніе при установленіи такихъ ассоціацій:

устанавливая такія ассоціаціи, мы вносимъ какъ бы гармонію въ міръ представленій, и этотъ міръ представленій прочнѣе остается въ нашемъ сознаніи. Поэтому преподаватель долженъ стремиться создавать въ умѣ ребенка рядъ ассоціацій между отдѣльными представленіями, которыя вызываются преподаваніемъ: лишь въ этомъ случаѣ преподаваніе будетъ интереснымъ для ребенка и плодотворнымъ.

Бываютъ случаи, когда два представленія связываются другъ съ другомъ вслѣдствіе ихъ крайней противоположности: и тогда оба представленія выигрываютъ въ силѣ и яркости. Такъ, съ представленіемъ о лилипутѣ мы невольно связываемъ представленіе о человѣкѣ очень большого роста, съ представленіемъ о добромъ человѣкѣ—представленіе о зломъ; при этомъ, напримѣръ, представленіе о добромъ человѣкѣ дѣлается особенно яркимъ именно потому, что мы хорошо представляемъ себѣ противоположное. Преподаватель долженъ считаться съ этимъ обстоятельствомъ при работѣ съ дѣтьми. Такъ, выясняя пріемы сложенія и вычитанія десятичныхъ дробей, несомнѣнно слѣдуетъ сопоставить съ этимъ пріемы сложенія и вычитанія обыкновенныхъ дробей, связанные съ приведеніемъ дробей къ общему знаменателю, что, какъ извѣстно, часто является хлопотливымъ дѣломъ. Благодаря такому сопоставленію весьма простыхъ пріемовъ съ весьма сложными ребенокъ получитъ достаточно вѣрное понятіе о цѣнности десятичныхъ дробей.

Ассоціаціи представленій, основанныя на контрастѣ связываемыхъ представленій, называются ассоціаціями *по противоположности*.

§ 77. **Память.** Процессъ воспоминанія заключается въ томъ, что мы приводимъ въ центръ нашего сознанія одно за другимъ тѣ именно представленія, которыя связаны съ воспоминаемымъ предметомъ или явленіемъ; при этомъ

оживающія въ нашемъ умѣ представленія идутъ обычно не безпорядочною вереницей образомъ, а слѣдуютъ другъ за другомъ въ извѣстной послѣдовательности, смотря по тому, какія между ними установились ассоціаціи.

Мы различаемъ различные типы памяти. Есть люди, у которыхъ преобладаетъ чисто механическая память; этого рода память особенно распространена у дѣтей. Такая память основана несомнѣнно на ассоціаціи представленій по смежности. Ребенокъ легко запоминаетъ на память въ правильной послѣдовательности рядъ словъ, смысла которыхъ онъ даже и не понимаетъ, исключительно на основаніи того, что онъ ассоціировалъ эти слова по смежности ихъ. Но такого рода запоминанія непрочны: ребенокъ очень скоро забываетъ этотъ наборъ словъ, если только нѣтъ ежедневныхъ упражненій.

Гораздо прочнѣе*) память, основанная на ассоціаціяхъ по сходству. Изучая какую-нибудь науку, мы познаемъ рядъ общихъ законовъ этой науки: эти общіе законы устанавливаютъ рядъ ассоціацій по сходству между представленіями о многихъ предметахъ и явленіяхъ, которыя безъ этихъ ассоціацій почти невозможно было бы запомнить. Всякій ариѳметическій пріемъ дѣйствія является въ сущности такимъ закономъ, облегчающимъ запоминаніе дѣйствій надъ числами; такъ, изучая сложеніе двухъ однозначныхъ чиселъ, дающихъ въ суммѣ число, превышающее 10 (напримѣръ, 8+7), мы изъ разсмотрѣнія ряда частныхъ примѣровъ получаемъ слѣдующій общій пріемъ: нужно дополнить первое число до 10, и затѣмъ прибавить оставшіяся единицы второго числа. Установленіе такой ассоціаціи по сходству между представленіями объ отдѣльныхъ примѣрахъ сложенія этого рода облегчаетъ рѣшеніе такихъ примѣровъ въ будущемъ.

---

*) Если отвлечься отъ людей рѣзко механическаго типа памяти.

Пользуемся случаемъ, чтобы указать на одинъ удивительно странный пріемъ нахожденія результата дѣйствія, предлагаемый г. Беллюстинымъ въ его «Методикѣ ариѳметики», ч. I, стр. 49; чтобы внушить дѣтямъ, что 13—4=9, онъ предлагаетъ слѣдующій пріемъ: «13—4 не можетъ равняться 8, такъ какъ 12—4=8, не можетъ равняться и 10, такъ какъ 14—4=10, слѣдовательно должно равняться непремѣнно 9»; при этомъ г. Беллюстинъ предполагаетъ, что такіе случаи вычитанія, какъ 12—4 и 14—4 уже изучены раньше, какъ основные. Примѣненіе такихъ пріемовъ является нарушеніемъ основныхъ психологическихъ законовъ человѣческой природы. Здѣсь единственно правильнымъ пріемомъ является устанавливаемый на почвѣ ассоціацій по сходству пріемъ, состоящій въ томъ, что мы изъ 13 вычитаемъ сначала 3 единицы, а затѣмъ еще одну: и такой пріемъ легко запомнить.

Задача преподавателя заключается не только въ томъ, чтобы вызвать въ умѣ дѣтей извѣстныя представленія, но еще въ томъ, чтобы эти представленія прочнѣе улеглись въ сознаніи дѣтей, чтобы ихъ легко можно было оживить въ памяти. Здѣсь на первый планъ выступаетъ установленіе ассоціацій по сходству (а также по контрасту); но, конечно, не слѣдуетъ пренебрегать при случаѣ и ассоціаціями по смежности, ибо чѣмъ полнѣе и разнообразнѣе ассоціаціи различныхъ представленій, тѣмъ полнѣе эти представленія улягутся въ сознаніи, и тѣмъ легче ихъ будетъ припомнить. Именно по этой причинѣ результаты обученія ариѳметикѣ, полученные при лабораторномъ методѣ, являются особенно прочными и глубокими.

§ 78. **Вниманіе.** Вниманіемъ мы называемъ такой процессъ духовной дѣятельности человѣка, когда онъ выдѣляетъ въ центръ своего сознанія опредѣленныя представленія, удаляя при этомъ прочія представленія на второй планъ. Такое выдѣленіе представленій въ центръ сознанія можетъ быть съ одной стороны результатомъ желанія человѣка, спеціально къ этому направленнаго, а съ другой—результатомъ воздѣйствія внѣшнихъ обстоятельствъ: такъ, часто бываетъ, что мы даже противъ нашей воли сосредоточиваемъ наше вниманіе на нѣкоторыхъ явленіяхъ внѣшняго или внутренняго міра, если представленія объ этихъ явленіяхъ достаточно сильны, чтобы приковывать наше вниманіе. Взрослые люди въ большинствѣ случаевъ обладаютъ способностью направлять свое вниманіе по своему желанію, то есть они могутъ подчинять вниманіе своей волѣ. Что же касается дѣтей, то у нихъ вниманіе мало подчинено волевымъ воздѣйствіямъ; вниманіе дѣтей настолько подчинено воздѣйствію внѣшняго міра, что оно непрерывно перебѣгаетъ съ одного предмета на другой: этимъ, между прочимъ, объясняется непосѣдливость дѣтей и неумѣніе сосредоточиться надолго на чемъ нибудь одномъ.

Преподаватель, занимающійся съ дѣтьми изученіемъ какого-нибудь учебнаго предмета, долженъ имѣть въ виду это непостоянство и непродолжительность вниманія дѣтей. Такъ какъ дѣти не умѣютъ сами по своей волѣ сосредоточивать свое вниманіе на одномъ предметѣ, то преподаватель долженъ такъ заниматься съ дѣтьми, чтобы вызываемыя имъ представленія невольно приковывали вниманіе дѣтей; эти представленія должны быть достаточно разнообразны, и самыя занятія не должны быть слишкомъ продолжительны: такъ, было бы очень хорошо, если бы уроки съ маленькими дѣтьми продолжались не больше получаса[1]).

§ 79. **Апперцепція.** Сознаніе человѣка всегда наполнено цѣлымъ рядомъ представленій, добытыхъ человѣкомъ изъ житейскаго опыта и изъ изученія разныхъ наукъ, чтенія

*) Само собою разумѣется, что всякія попытки принудительно заставить дѣтей внимать безнадежны, ибо, если даже дѣти присмирѣютъ отъ окрика, то ихъ вниманіе будетъ лишь кажущимся. Мы хотимъ сказать этимъ, что главнымъ рычагомъ вниманія является интересъ, возбуждаемый преподаваніемъ.

книгъ и т. д. Всякое *новое* представленіе, проникающее въ сознаніе человѣка, встрѣчаетъ это сознаніе уже «нагруженнымъ» прежними представленіями: къ этимъ прежнимъ представленіямъ *новое* должно такъ или иначе присоединиться. Процессъ присоединенія новыхъ представленій къ тѣмъ представленіямъ, которыя уже имѣются въ сознаніи человѣка, называется *апперцепціей*.

Очевидно, что новое представленіе только тогда уляжется прочно въ сознаніи, если между нимъ и старыми представленіями создастся та или иная *ассоціація*; въ противномъ случаѣ новое представленіе останется висящимъ въ воздухѣ, и пройдетъ для человѣка незамѣченнымъ, скользнувъ лишь по поверхности его сознанія. Преподаватель-практикъ долженъ имѣть въ виду это обстоятельство при ознакомленіи дѣтей съ новыми для нихъ истинами; эти новыя истины должны быть связаны съ истинами ,уже извѣстными дѣтямъ: поэтому преподаватель долженъ при своемъ преподаваніи съ одной стороны тщательно разыскивать среди представленій, нагружающихъ сознаніе дѣтей, именно тѣ, съ которыми новое представленіе слѣдуетъ связать; съ другой стороны, отыскавши эти опорныя представленія, слѣдуетъ озаботиться о выработкѣ возможно болѣе прочной связи съ ними новаго представленія.

Пусть, напримѣръ, рѣчь идетъ о томъ, чтобы объяснить дѣтямъ сравненіе величины десятичныхъ дробей; нужно именно объяснить дѣтямъ, что при сравненіи двухъ десятичныхъ дробей (правильныхъ), ту изъ нихъ слѣдуетъ считать большей, у которой число наиболѣе крупныхъ десятичныхъ долей наибольшее[1]). При этомъ, для лучшаго уразумѣнія дѣтьми этой истины, весьма полезно указать дѣтямъ, что, когда, напримѣръ, нужно сравнить двѣ суммы денегъ, состоящихъ изъ рублей, гривенниковъ и копеекъ,

*) Напримѣръ, 0,32>0,259, ибо число десятыхъ долей первой дроби больше числа десятыхъ долей второй дроби.

то ту сумму денегъ считаютъ большей, въ которой число рублей, то есть наиболѣе крупныхъ единицъ, наибольшее: это будетъ та старая истина, съ которой будетъ прочно связана вышеупомянутая новая.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что изложеніе дѣтямъ всякой новой истины требуетъ надлежащей подготовки въ сознаніи дѣтей. Эта подготовка должна заключаться въ созданіи въ умѣ дѣтей тѣхъ именно представленій (или цѣпи представленій), съ которыми желательно связать новое представленіе; безъ такой подготовительной работы новое представленіе не сможетъ прочно присоединиться къ міру старыхъ представленій. Это, между прочимъ, оправдываетъ концентрическое распредѣленіе матеріала ариѳметики, которое, какъ извѣстно, рекомендуютъ всѣ современные методисты: каждый предыдущій концентръ (или ступень) создаетъ въ сознаніи дѣтей циклъ представленій, съ которыми свяжется циклъ представленій слѣдующаго концентра (ступени).

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда какая-нибудь новая истина очень плохо усваивается ребенкомъ, преподаватель долженъ прежде всего провѣрить, достаточно ли подготовлена въ ребенкѣ почва для апперцепціи.

§ 80. **Подсознательная работа ума.** Часто, при изученіи какой-нибудь проблемы бываетъ, что мы, несмотря на всѣ наши усилія, не можемъ добиться желаемаго результата: время идетъ, и все же работа стоитъ на одномъ мѣстѣ. Въ этихъ случаяхъ бываетъ весьма полезнымъ на время оставить работу и постараться даже забыть о ней, занявшись другими вопросами. Послѣ такого интервалла въ занятіяхъ извѣстной проблемой, очень часто бываетъ, что мы, возвратившись къ изученію этой проблемы, какъ-то неожиданно для самихъ себя, находимъ вѣрное рѣшеніе вопроса. Очевидно, что за тотъ промежутокъ времени, пока нашъ мозгъ отдыхалъ отъ извѣстной опредѣленной умственной работы, въ мозгу все же совершалась какая то невидимая работа мозговыхъ клѣтокъ, происходили какія то тайныя перемѣщенія матеріи мозга, которыя затѣмъ вышли на свѣтъ Божій въ видѣ почти готоваго рѣшенія даннаго вопроса; такую работу мозга мы можемъ назвать *подсознательной* работой ума.

Преподаватели, излагая новыя истины дѣтямъ, должны имѣть въ виду эту подсознательную работу ума: часто будетъ полезнымъ, когда усвоеніе какой-нибудь истины сильно затрудняетъ дѣтей, на время оставить изученіе этого вопроса и перейти къ усвоенію другихъ истинъ, съ тѣмъ чтобы въ подходящій моментъ вернуться къ старому трудному вопросу; за это время, благодаря подсознательной работѣ ума, дѣтскій умъ можетъ невидимо созрѣть для усвоенія трудной проблемы безъ особыхъ съ его стороны усилій. Преподаватель, прибѣгающій къ такому пріему, избѣжитъ многихъ непріятныхъ моментовъ въ дѣлѣ обученія.

Вотъ что говоритъ по этому вопросу недавно умершій извѣстный французскій ученый Г. Пуанкаре (см. Наука и методъ», стр. 61):

«Часто, когда думаешь надъ какимъ-нибудь труднымъ вопросомъ, за первый присѣстъ не удается сдѣлать ничего путнаго; затѣмъ, отдохнувши болѣе или менѣе продолжительное время, садишься снова за столъ. Проходитъ полчаса все такъ же безрезультатно, какъ вдругъ въ голову появляется рѣшающая мысль. Можно думать, что сознательная работа оказалась болѣе плодотворной благодаря тому, что она была временно прервана, и отдыхъ вернулъ уму его силу и свѣжесть. Но болѣе вѣроятно, что это время отдыха было заполнено безсознательной работой, результатъ которой потомъ раскрывается передъ математикомъ».

ПРИЛОЖЕНІЕ.

ПРОГРАМА ПО АРИѲМЕТИКѢ.

А) Для одноклассныхъ народныхъ училищъ Министерства Народнаго Просвѣщенія.

1-й годъ.

Счетъ прямой и обратный до 100.

Четыре дѣйствія въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ.

Примѣчаніе. Расширеніе требованій можетъ быть допущено только при достиженіи твердаго знакомства съ дѣйствіями въ указанныхъ предѣлахъ.

Знакомство съ цифрами и знаками дѣйствій.

Указаніе на примѣрахъ основныхъ ариѳметическихъ понятій (прибавить, отнять, повторить, сколько разъ содержится, раздѣлить, на сколько больше или меньше, во сколько разъ больше или меньше).

Римская нумерація до XX.

2-й годъ.

Нумерація и четыре дѣйствія въ предѣлѣ 100 и 1000. Объясненіе ариѳметическихъ выраженій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе; разностное и кратное сравненіе чиселъ. Увеличеніе и уменьшеніе въ 10, въ 100 разъ.

Ознакомленіе съ наиболѣе употребительными русскими мѣрами. Рѣшеніе задачъ, устно и письменно, соотвѣтствующихъ курсу. Знакомство съ долями.

3-й годъ.

Нумерація и четыре дѣйствія надъ числами любой величины и повѣрка дѣйствій. Дѣйствія надъ составными именованными числами. Простѣйшія вычисленія съ долями. Рѣшеніе устныхъ и письменныхъ задачъ.

Въ этой программѣ сдѣлано примѣрное распредѣленіе курса по годамъ; преподаватели же, конечно, могутъ дѣлать нѣкоторыя отступленія отъ нея, съ тѣмъ, чтобы ученики непремѣнно къ концу третьей зимы прошли все указанное программою *).

Б) Для двухклассныхъ народныхъ училищъ Министерства Народнаго Просвѣщенія.

I-й классъ.

I-й годъ. Постепенное наглядное ознакомленіе дѣтей (посредствомъ видимыхъ предметовъ) съ составомъ первыхъ 10-ти чиселъ, при чемъ дѣти получаютъ наглядное понятіе о сложеніи, умноженіи, вычитаніи и дѣленіи; цифры, служащія къ изображенію этихъ чиселъ. Понятіе

*) Изъ этой программы читатель легко усмотритъ, что здѣсь приняты во вниманіе тѣ принципы распредѣленія учебнаго матеріала, о которыхъ шла рѣчь въ соотвѣтствуюшихъ §-ахъ нашего учебника; мы видимъ здѣсь 3 основныхъ ступени: 1—100, 100—1000 и числа любой величины; ознакомленіе съ дробями раздѣлено на 2 ступени (2-ой и 3-ій годъ) Дѣйствія надъ составными именованными числами выдѣлены въ особый отдѣлъ: читатель припомнитъ, что мы рекомендовали не выдѣлять такого отдѣла (§ 50). Замѣчаніе о томъ, что преподаватели могутъ дѣлать нѣкоторыя отступленія отъ программы. весьма важно, ибо это даетъ нѣкоторый просторъ проявленію личныхъ педагогическихъ взглядовъ учителя. *(Примѣчаніе автора)*.

(наглядное) $^1/_2$, $^1/_4$ и $^1/_8$. Числа отъ 10-ти до 100, по такой же системѣ. При ознакомленіи дѣтей съ каждымъ новымъ числомъ, учитель предлагаетъ имъ несложныя практическія задачи на это число по всѣмъ 4-мъ дѣйствіямъ. Всѣ задачи эти должны рѣшаться умственно, съ должными объясненіями. II-й и III-й годъ: числа до милліона и дѣйствія надъ ними. Умственныя и письменныя задачи. Употребленіе счетовъ. Дѣти должны въ 1-мъ классѣ мало-по-малу ознакомиться наглядно съ единицами монетными, времени, вѣса мѣры и т. д.

II-й классъ.

Простыя дроби; четыре дѣйствія надъ дробными числами. Рѣшеніе задачъ, относящихся къ правиламъ: тройному, смѣшенія, товарищества и процентовъ безъ пропорцій. Главныя основанія планиметріи. Съемка плановъ *).

В) Для одноклассной церковно-приходской школы.

1-й годъ.

Счетъ въ предѣлѣ 20-ти. Производство всѣхъ четырехъ дѣйствій устно и письменно; рѣшеніе задачъ простѣйшаго типа на каждое изъ четырехъ дѣйствій устно и письменно; рѣшеніе численныхъ примѣровъ устно и письменно (безъ скобокъ).

Простѣйшія доли: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$.

Наглядное ознакомленіе съ мѣрами: длины (сажень, аршинъ, вершокъ), вѣса (фунтъ и пудъ), сыпучихъ тѣлъ

*) Въ этой программѣ любопытно то, что при ознакомленіи съ каждымъ новымъ числомъ предлагается рѣшать съ дѣтьми задачи на это число по всѣмъ 4 дѣйствіямъ: въ этомъ сказываются принципы методы изученія чиселъ Евтушевскаго-Грубе. Весьма важно то, что вездѣ рекомендуется примѣненіе принципа наглядности преподаванія. *(Примѣчаніе автора)*.

(четверть и четверикъ) и бумаги (десть, стопа). Простѣйшія задачи.

Счетъ въ предѣлѣ сотни круглыми десятками. Четыре дѣйствія до 100 круглыми десятками. Задачи устныя и письменныя.

2-й годъ.

Изученіе чиселъ до 100. Бѣглый устный счетъ въ предѣлѣ сотни. Рѣшеніе устныхъ и письменныхъ задачъ и численныхъ примѣровъ на всѣ 4 дѣйствія (со скобками) въ предѣлѣ 100.

Упражненіе надъ дробями: нахожденіе части и нѣсколькихъ частей цѣлаго и обратно. Значеніе числителя и знаменателя; сложеніе и вычитаніе одноименныхъ часетей единицы. Устныя задачи.

Ознакомленіе съ мѣрами: вѣса (золотникъ и лотъ), сыпучихъ тѣлъ (гарнецъ, четверть, куль), длины (футъ и дюймъ) и времени (сутки, часъ, минута и секунда).

Изученіе 1000. Нумерація трех-и-четырехзначныхъ чиселъ. Всѣ четыре дѣйствія въ предѣлѣ 1000: сложеніе и вычитаніе; умноженіе и дѣленіе на однозначное и двухзначное число письменно. Письменныя задачи и численные примѣры.

(Устныя вычисленія въ предѣлѣ 1000).

3-й годъ.

Нумерація до билліона. Производство дѣйствій (всѣхъ четырехъ) надъ числами любой величины (письменно). Задачи.

Подробное изученіе мѣръ длины (метръ), вѣса, сыпучихъ и жидкихъ тѣлъ, времени и бумаги.—Составныя именованныя числа и дѣйствія надъ ними.—Задачи на всѣ 4 дѣйствія съ составными именованными числами; задачи на вычисленіе времени.

Квадратныя и кубическія мѣры. Примѣры на вычисленіе площадей и объемовъ въ простѣйшихъ случаяхъ.

Упражненіе надъ дробями: простѣйшіе случаи умноженія и дѣленія дробей.

Задачи и примѣры.

Г) Для двухклассной церковно-приходской школы.

4-й годъ.

Элементарный курсъ дробей; признаки дѣлимости на 2; 5; 4; 8; 25; 3 и 9; разложеніе чиселъ на первоначальные множители; составленіе изъ множителей общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго. Приведеніе дробей къ одному знаменателю. Сложеніе и вычитаніе дробей любой величины. Задачи и примѣры.

5-й годъ.

Умноженіе и дѣленіе простыхъ дробей. Задачи на всѣ дѣйствія съ дробями.

Десятичныя дроби и всѣ дѣйствія надъ ними. Изученіе метрической системы.—Правила: процентовъ, товарищества, смѣшенія и тройное.

Задачи *).

---

*) Эта программа въ общемъ такого же характера, какъ и программа М. Н. П.: и здѣсь приняты во вниманіе различные основные принципы преподаванія, разсмотрѣнные въ учебникѣ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Предисловіе 5

Глава I. Цѣль преподаванія ариѳметики и значеніе методики ариѳметики 7

Глава II. Начальныя ариѳметическія познанія ребенка и распредѣленіе учебнаго матеріала при преподаваніи ариѳметики . . . 19

Глава III. Обученіе счету въ предѣлахъ отъ 1 до 10. Значеніе числовыхъ фигуръ 34

Глава IV. Дѣйствія и задачи въ предѣлахъ отъ 1 до 10 45

Глава V. Опредѣленіе дѣйствій и рѣшеніе задачъ (числа отъ 1 до 10). Дѣленіе на части и по содержанію 57

Глава VI. Три основныя методы обученія ариѳметикѣ: метода цѣлесообразныхъ задачъ, метода изученія дѣйствій и метода изученія чиселъ 66

Глава VII. Письменное обозначеніе чиселъ и дѣйствій въ предѣлахъ перваго десятка чиселъ. Вопросъ о наименованіяхъ . . 73

Глава VIII. Вторая, третья и четвертая ступени (числа отъ 1 до 20, отъ 1 до 100, отъ 1 до 1000 и болѣе) 77

Глава IX. Дроби. Мѣры. Составныя именованныя числа. Квадратныя и кубическія мѣры 90

Глава X. Наглядныя пособія 97

Глава XI. Задачи. Ихъ калссификація. Методы рѣшенія задачъ . 110

Глава XII. Основные принципы преподаванія. Лабораторный методъ 119

Глава XIII. Психологическія основы преподаванія 141

Приложеніе. Программа по ариѳметикѣ 155

Опечатка: стр. 7, строка 9 снизу, напечатано — яблоковъ, надо — яблокъ.

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО И КНИЖНЫЙ СКЛАДЪ

„НАУКА“.

Москва, Бол. Никитская, д. № 10. **Телефонъ № 2-54-99.**

Галанинъ Д. Воспитаніе и обученіе Цѣна 50 коп.

Галанинъ Д. Д. Магницкій и его арифметика. Вып. I. Личность М. и его время. Цѣна 50 коп.

Фельцманъ О. Вспомогательныя школы для психически отсталыхъ дѣтей. Цѣна 50 коп.

Антонъ Г. пр. О разстройствахъ развитія у дѣтей. Цѣна 50 коп.

Челинцевъ В. Основныя химическія понятія. Ц. 35 к.

Линдъ В. Руководство къ опредѣленію звѣрей Евр. Россіи. Цѣна 35 коп.

Рубакинъ Н. Среди книгъ. Т. 1-й Цѣна 3 р.
„ 2-й „ 4 „
„ 3-й печатается.

Библіографическій Ежегодникъ подъ ред. И. В. Владиславлева, вых. ежегодно въ февралѣ.
Вып. I Системат. указатель литературы за 1911 г. Ц. 60 к.
„ II „ „ „ „ 1912 „ „ 90 „
„ III „ „ „ „ 1913 „ печат.

Владиславлевъ И. В. Русскіе писатели 19—20 ст. 2-е изданіе. Цѣна 1 руб.

Владиславлевъ И. Что читать? Указатель чтенія для учащихся. Выпускъ I, 2-е изд. Цѣна 35 коп.
„ II Цѣна 40 коп.
„ III печатается.

Владиславлевъ И. Тетрадь для записи о прочитанныхъ книгахъ, 3-е изданіе. Цѣна 20 коп.

Цѣна 80 коп.

4

Складъ Изданія:

Москва, Б. Никитская, д. 10, книжный магазинъ „НАУКА“.

Телефонъ 2-54-99.

38