Lösung von Randwertaufgaben bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät
der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br.

Vorgelegt von

Hans Knieß
Lehramtsreferendar in Freiburg

Freiburg i. Br. 1938

Dekan: Professor Dr. K. Abetz

Referent: Professor Dr. G. Doetsch

Tag der mündlichen Prüfung: 23. April 1937

ISBN 978-3-662-31354-1 ISBN 978-3-662-31559-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-31559-0

Sonderabdruck aus „Mathematische Zeitschrift", Band 44, Heft 2
Springer-Verlag Berlin Heidelberg

§ 1.

Einleitung.

Für die *Anfangswertprobleme* bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen gibt es eine zuerst vor etwa 15 Jahren von G. Doetsch angegebene Methode[1]), die sich der Laplace-Transformation

$$u(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, U(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{U\} \tag{1}$$

bedient. Sie beruht auf folgender fundamentalen Eigenschaft dieser Transformation

$$\mathfrak{L}\{U^{(n)}\} = s^n\, \mathfrak{L}\{U\} - U(0)\, s^{n-1} - \dots - U^{(n-1)}(0), \tag{2}$$

kraft deren bei Anwendung der Laplace-Transformation auf eine Differentialgleichung für U die Ableitungen von U nach t entfernt werden, wogegen die „Anfangswerte" $U(0)$, $U'(0), \dots$ in die neue, transformierte Gleichung für $\mathfrak{L}\{U\} = u(s)$ eintreten. Eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wird so auf eine algebraische Gleichung, eine partielle Differentialgleichung, die noch andere Variable als t enthält, auf eine Differentialgleichung mit geringerer Variablenzahl reduziert. Außerdem sind nunmehr die Anfangsbedingungen automatisch berücksichtigt. Durch Umkehrung der Laplace-Transformation findet man aus der Lösung der reduzierten Gleichung die der ursprünglichen. Diese Methode liefert u. a. eine exakte Begründung des symbolischen Heavisidekalküls[2]).

Für *Randwert*probleme gab es bis vor kurzem (abgesehen von einem unten zu erwähnenden Spezialfall) weder einen symbolischen Kalkül noch eine geeignete Methode aus der Theorie der Funktionaltransformationen.

---

[1]) Siehe die ausführliche Darstellung dieser Theorie in G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (Berlin 1937), V. Teil.

[2]) l. c.[1]), 18. Kap., § 3 und 24. Kapitel.

Eine solche wurde erst 1935 von G. Doetsch[3]) angegeben. Handelt es sich um das Intervall $-l \leqq x \leqq +l$, so wird die für ganzzahlige m zu bildende Transformation

$$(3) \qquad u(m) = \int_{-l}^{+l} e^{-im\frac{\pi}{l}x}\, U(x)\, dx \equiv \mathfrak{F}\{U\}$$

angewandt, die „endliche Fourier-Transformation" genannt wird und mit der Bildung der (komplexen) Fourier-Koeffizienten von $U(x)$ gleichbedeutend ist. Sie hat ähnlich wie die Laplace-Transformation die Eigenschaft, die Ableitung nach x zu entfernen, wobei jetzt die „Randwerte" von U an den Intervallenden auftreten:

$$(4) \quad \mathfrak{F}\{U^{(\nu)}\} = \left(im\frac{\pi}{l}\right)^{\nu} \mathfrak{F}\{U\} + (-1)^m \Big[U^{(\nu-1)}(l) - U^{(\nu-1)}(-l) + im\frac{\pi}{l}\left(U^{(\nu-2)}(l) - U^{(\nu-2)}(-l)\right) + \ldots + \left(im\frac{\pi}{l}\right)^{\nu-1}\left(U(l) - U(-l)\right)\Big].$$

Auch hier werden gewöhnliche Differentialgleichungen in algebraische, partielle Differentialgleichungen in solche mit geringerer Variablenzahl transformiert, wobei die Randwerte automatisch berücksichtigt werden. Doetsch hat die Methode am Beispiel einer partiellen Differentialgleichung, der Wärmeleitungsgleichung, durchgeführt. Dabei ist ein eigentümliches Vorkommnis zu erwähnen: Die Ableitungen nach der zu transformierenden Variablen x kommen in der partiellen Differentialgleichung bis zur 2. Ordnung vor, in der transformierten Gleichung treten also die Randwerte von U und von U' auf. In dem dort behandelten Problem sind aber nur die Randwerte von U gegeben. Um die nichtgegebenen Randwerte von U' zu eliminieren, denkt sich Doetsch das Problem im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gegeben und die Lösungsfunktion dann als *ungerade* Funktion in das Intervall $-l \leqq x \leqq 0$ fortgesetzt. Dadurch wird $U'_x(-l) = U'_x(+l)$, so daß in (4) der auf die erste Ableitung bezügliche Term fortfällt. Nach einer mündlichen Mitteilung von G. Doetsch aus dem Jahre 1935 kann man statt dessen, da für eine ungerade Funktion

$$\int_{-l}^{+l} e^{-im\frac{\pi}{l}x}\, U(x)\, dx = -2i \int_{0}^{l} \sin m\frac{\pi}{l} x\, U(x)\, dx$$

[3]) Siehe G. Doetsch, Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation, Math. Annalen **112** (1935), S. 52—68. Das Prinzip dieser Arbeit wurde von Doetsch schon 1932 in einem Vortrag in Zürich angegeben. [Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül); abgedruckt im Jahresber. DMV. **43** (1934), S. 238—251.]

ist, auch direkt im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ die „endliche Sinustransformation“

$$(5) \qquad u(m) = \int_0^l \sin m \frac{\pi}{l} x\, U(x)\, dx \equiv \mathfrak{S}\{U\}$$

bzw. in Fällen, wo die Fortsetzung als gerade Funktion angebracht wäre, die „endliche Cosinustransformation“

$$(6) \qquad u(m) = \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} x\, U(x)\, dx \equiv \mathfrak{C}\{U\}$$

anwenden.

Die vorliegende Arbeit setzt sich als Hauptzweck, diese Methode auf *Systeme* von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und beliebigen Störungsfunktionen unter *Rand*bedingungen anzuwenden. Die Ergebnisse werden genau so einfach und übersichtlich sein wie die durch die symbolische Methode bzw. die Laplace-Transformation gelieferten Resultate in dem Falle, daß *Anfangs*bedingungen gegeben sind. Unsere Resultate sind daher gerade für die praktische Anwendung besonders brauchbar, z. B. lassen sich gewisse Randwertprobleme der Elektrotechnik auf diese Weise überaus einfach erledigen. Für den Spezialfall, daß die Randwerte verschwinden und die Störungsfunktion in jeder Gleichung dieselbe ist, hat vor einigen Jahren L. Fantappiè, übrigens von einem elektrotechnischen Problem ausgehend, einen Kalkül entwickelt, der mit einem dem speziellen Charakter der Aufgabe angepaßten Operator arbeitet[4]). Abgesehen davon, daß diese Methode nur auf jenen Spezialfall zugeschnitten ist und tiefere Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie der Operatoren erfordert, wird in der Arbeit von Fantappiè die Frage der Eigenwerte und Eigenfunktionen, die bei Randwertproblemen naturgemäß eine wichtige Rolle spielt und von uns eingehend behandelt wird, nicht erörtert.

In § 2 stellen wir die später gebrauchten grundlegenden Eigenschaften der cos- und sin-Transformation zusammen, § 3 erläutert die Anwendungen auf Differentialgleichungen an einigen einfachen Beispielen, in § 4 behandeln wir das Randwertproblem für ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Als Anhang fügen wir eine Tabelle von zusammengehörigen Funktionen $U(x)$ und $u(m)$ an, die besonders bei der Rückübersetzung der Lösung der reduzierten Gleichung in die der ursprünglichen Gleichung gute Dienste leistet.

---

[4]) Luigi Fantappiè, Risoluzione esplizita di un sistema differenziale interessante l'elettrotecnica, mediante il calcolo degli operatori lineari. Reale accademia d'Italia; memorie della classe di scienze fisiche matematiche e naturali **4** (1933), S. 55—69.

§ 2.

Eigenschaften der endlichen cos- bzw. sin-Transformation.

Die Eigenschaften der endlichen Fourier-Transformation 1. 3 sind in der unter [3]) zitierten Arbeit ausführlich behandelt. Wir nennen sie hier ohne Beweise, soweit sie nicht schon in § 1 erwähnt sind, und stellen ihnen die Eigenschaften der endlichen cos- bzw. sin-Transformation gegenüber. Um die Darstellung abkürzen zu können, meinen wir hier Integrabilität immer im Sinne von Lebesgue; Funktionen, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden, sollen nicht als verschieden gelten.

1. Transformation der Ableitungen.

Bei der Transformation der Ableitungen gerät man manchmal aus der cos- in die sin-Transformation hinein und umgekehrt; doch tritt dieser störende Umstand bei Ableitungen geradzahliger Ordnung nicht auf.

cos-Transformation.

Wenden wir die cos-Transformation auf die 1. Ableitung an, so ergibt sich für integrables U':

$$\mathfrak{C}\{U'\} = \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} x\, U'(x)\, dx = \cos m \frac{\pi}{l} x\, U(x) \Big|_0^l + m \frac{\pi}{l} \int_0^l \sin m \frac{\pi}{l} x\, U(x)\, dx$$

$$= (-1)^m U(l) - U(0) + m \frac{\pi}{l} \mathfrak{S}\{U\}.$$

Dagegen ist

$$\mathfrak{C}\{U''\} = (-1)^m U'(l) - U'(0) - m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \mathfrak{C}\{U\}. \tag{1}$$

Allgemein transformieren sich geradzahlige Ableitungen nach folgendem, durch wiederholte partielle Integration zu beweisenden

Satz 1. *Existiert $U^{(2\nu)}$ in $0 < x < l$, ist $U^{(2\nu-1)}$ in den Endpunkten 0, l stetig und $U^{(2\nu)}$ integrabel, so ist*

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}\{U^{(2\nu)}(x)\} = {} & (-1)^m U^{(2\nu-1)}(l) - U^{(2\nu-1)}(0) \\ & - \left(m \frac{\pi}{l}\right)^2 [(-1)^m U^{(2\nu-3)}(l) - U^{(2\nu-3)}(0)] + - \cdots \\ & + (-1)^{\nu-1} \left(m \frac{\pi}{l}\right)^{2\nu-2} [(-1)^m U'(l) - U'(0)] \\ & + \left(-m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^\nu \mathfrak{C}\{U(x)\}.\end{aligned}$$

sin-Transformation.

Analog wie bei der cos-Transformation erhält man die Beziehungen

$$\mathfrak{S}\{U'\} = \int_0^l \sin m \frac{\pi}{l} x \, U'(x)$$

$$= \sin m \frac{\pi}{l} x \, U(x) \Big|_0^l - m \frac{\pi}{l} \int_0^l \cos m \frac{\pi}{l} x \, U(x) \, dx = - m \frac{\pi}{l} \mathfrak{C}\{U\},$$

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{S}\{U''\} = - m \frac{\pi}{l} [(-1)^m U(l) - U(0)] - m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \mathfrak{S}\{U\};$$

allgemein für ganzzahlige Ableitungen den

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\{U^{(2\nu)}(x)\} = & - m \frac{\pi}{l} [(-1)^m U^{(2\nu-2)}(l) - U^{(2\nu-2)}(0)] \\ & + \left(m \frac{\pi}{l}\right)^3 [(-1)^m U^{(2\nu-4)}(l) - U^{(2\nu-4)}(0)] - + \cdots \\ & + (-1)^\nu \left(m \frac{\pi}{l}\right)^{2\nu-1} [(-1)^m U(l) - U(0)] \\ & + \left(- m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^\nu \mathfrak{S}\{U(x)\}. \end{aligned}$$

2. *Transformation der Faltung.*

Ist $U_1(x)$ in $-2l \leqq x \leqq +2l$, $U_2(x)$ in $-l \leqq x \leqq +l$ beschränkt und eigentlich integrabel bzw. nicht beschränkt, aber quadratisch integrabel, so wird als „Faltung" von $U_1(x)$ und $U_2(x)$ definiert:

$$U_1 \overset{+l}{\underset{-l}{*}} U_2 \equiv \int_{-l}^{+l} U_1(x - \xi) \, U_2(\xi) \, d\xi.$$

Ist U_1 periodisch mit der Periode $2l$, so gilt für die endliche Fourier-Transformation der Faltungssatz:

$$\mathfrak{F}\{U_1 \overset{+l}{\underset{-l}{*}} U_2\} = \mathfrak{F}\{U_1\} \, \mathfrak{F}\{U_2\}.$$

Die Faltung ist wegen der Unsymmetrie der Voraussetzungen nicht kommutativ; sie wird es, wenn für U_2 dieselben Voraussetzungen gelten wie für U_1. Das Faltungsintegral ist stetig.

Da nicht jede Fourier-Transformation als cos- bzw. sin-Transformation geschrieben werden kann, gibt es für letztere mehrere Faltungssätze. Wir beweisen den

Satz 3. *Sind U_1 und U_2 gerade Funktionen und ist U_1 periodisch mit der Periode $2l$, so ist*

$$\mathfrak{C}\{\tfrac{1}{2} U_1 \overset{+l}{\underset{-l}{*}} U_2\} = \mathfrak{C}\{U_1\} \, \mathfrak{C}\{U_2\}.$$

Beweis. Es ist

$$\mathfrak{C}\{U_1\}\mathfrak{C}\{U_2\} = \int_0^l \cos m\frac{\pi}{l} v\, U_1(v)\, dv \int_0^l \cos m\frac{\pi}{l} w\, U_2(w)\, dw.$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{+l} \cos m\frac{\pi}{l} v\, U_1(v)\, dv \cdot \frac{1}{2}\int_{-l}^{+l} \cos m\frac{\pi}{l} w\, U_2(w)\, dw$$

$$= \frac{1}{4}\iint \cos m\frac{\pi}{l} v \cos m\frac{\pi}{l} w\, U_1(v)\, U_2(w)\, dv\, dw$$

$$= \frac{1}{8}\iint \cos m\frac{\pi}{l}(v+w)\, U_1(v)\, U_2(w)\, dv\, dw$$

$$+ \frac{1}{8}\iint \cos m\frac{\pi}{l}(v-w)\, U_1(v)\, U_2(w)\, dv\, dw,$$

die Doppelintegrale erstreckt über das Quadrat $-l \leqq v \leqq +l$, $-l \leqq w \leqq +l$ ($ABCD$ in der Figur). Wir substituieren im ersten Integral

$$v + w = x, \quad w = \xi,$$

im zweiten

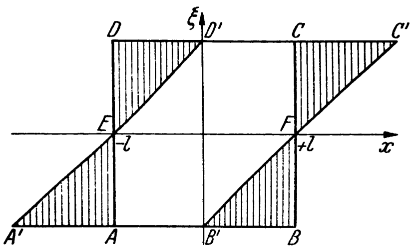
$$v - w = x, \quad w = -\xi$$

und erhalten:

$$\frac{1}{8}\iint \cos m\frac{\pi}{l} x\, U_1(x-\xi)\, U_2(\xi)\, dx\, d\xi$$

$$- \frac{1}{8}\iint \cos m\frac{\pi}{l} x\, U_1(x-\xi)\, U_2(-\xi)\, dx\, d\xi,$$

beide Integrale erstreckt über das Parallelogramm $-l \leqq x - \xi \leqq +l$, $-l \leqq \xi \leqq +l$ ($A'\,B'\,C'\,D'$).



Wegen der Periodizität von U_1 kann man das Dreieck $A'AE$ durch $B'BF$ und $FC'C$ durch $ED'D$ ersetzen. Die über $ABCD$ erstreckten Doppelintegrale kann man aber wieder als iterierte Integrale schreiben. Wegen $U_2(-\xi) = U_2(\xi)$ ergibt sich:

$$\frac{1}{8}\int_{-l}^{+l} \cos m\frac{\pi}{l} x\, dx \int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi)\, U_2(\xi)\, d\xi - \frac{1}{8}\int_{-l}^{+l} \cos m\frac{\pi}{l} x\, dx \int_{+l}^{-l} U_1(x-\xi)\, U_2(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-l}^{+l} \cos m\frac{\pi}{l} x\, dx \int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi)\, U_2(\xi)\, d\xi.$$

Da die Faltung zweier gerader Funktionen wieder eine gerade Funktion ist [5]), kann man hierfür schreiben:

$$\frac{1}{2}\int_0^l \cos m\frac{\pi}{l}x\,d\,x\int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi)\,U_2(\xi)\,d\,\xi,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Die anderen Faltungssätze sind:

Satz 4. *Sind U_1 und U_2 ungerade und ist U_1 periodisch mit der Periode $2\,l$, so ist*

$$\mathfrak{C}\{\tfrac{1}{2}\,U_1 \overset{+l}{\underset{-l}{*}} U_2\} = \mathfrak{S}\{U_1\}\,\mathfrak{S}\{U_2\}.$$

Satz 5. *Ist U_1 gerade und periodisch mit der Periode $2\,l$, U_2 ungerade, so ist*

$$\mathfrak{S}\{\tfrac{1}{2}\,U_1 \overset{+l}{\underset{-l}{*}} U_2\} = \mathfrak{C}\{U_1\}\,\mathfrak{S}\{U_2\}.$$

Satz 6. *Ist U_1 ungerade und periodisch mit der Periode $2\,l$, U_2 gerade, so ist*

$$\mathfrak{S}\{\tfrac{1}{2}\,U_1 \overset{+l}{\underset{-l}{*}} U_2\} = \mathfrak{S}\{U_1\}\,\mathfrak{C}\{U_2\}.$$

Die Beweise verlaufen nach dem Schema des Beweises zu Satz 3.

Zusatz. In allen vier Faltungssätzen ist die Faltung kommutativ, sobald auch U_2 periodisch mit der Periode $2\,l$ ist; Beweis wie in der unter [3]) zitierten Arbeit. — Satz 4 und 5 besagen in diesem Fall natürlich dasselbe.

3. Umkehrung.

Die Transformationen 1. 3, 1. 5 und 1. 6 lassen sich auf alle Funktionen anwenden, die im Grundintervall integrierbar sind. Die Umkehrungen lauten:

$$U(x) = \frac{1}{2l}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)\,e^{im\frac{\pi}{l}x} \equiv \mathfrak{F}^{-1}\{U\},$$

$$U(x) = \frac{u(0)}{l} + \frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty} u(m)\cos m\frac{\pi}{l}\,x \equiv \mathfrak{C}^{-1}\{U\} \quad \text{für} \quad U(-x) = U(x),$$

$$U(x) = \frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty} u(m)\sin m\frac{\pi}{l}\,x \equiv \mathfrak{S}^{-1}\{U\} \quad \text{für} \quad U(-x) = -U(x).$$

---

[5]) $$\Phi(x) \equiv \int_{-l}^{+l} U_1(x-\xi)\,U_2(\xi)\,d\,\xi = -\int_{+l}^{-l} U_1(x+\zeta)\,U_2(-\zeta)\,d\,\zeta$$
$$= \int_{-l}^{+l} U_1(x+\zeta)\,U_2(\zeta)\,d\,\zeta = \int_{-l}^{+l} U_1(-x-\zeta)\,U_2(\zeta)\,d\,\zeta \equiv \Phi(-x).$$

Nach den klassischen Sätzen über Fourier-Reihen sind diese Umkehrungen richtig, wenn U von beschränkter Variation ist oder wenn die Reihen gleichmäßig konvergieren. Versteht man die Darstellungen der Funktion durch die Reihen jedoch im Sinne der Mittelkonvergenz, so gelten sie nach Plancherel, wenn

I. $U(x)$ im Grundintervall quadratisch integrierbar

oder

II. $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} u^2(m)$ bzw. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u^2(m)$ konvergent

ist, wobei diese beiden Bedingungen völlig miteinander äquivalent sind. Die Zuordnung der U zu den u ist bei unseren Voraussetzungen eineindeutig.

§ 3.

Anwendung der endlichen cos- bzw. sin-Transformation auf einfachste Randwertprobleme.

In nachstehenden Beispielen werden unsere Transformationen an einfachsten Randwertproblemen ausprobiert. Die Lösungen sind wohlbekannt; es kommt uns zunächst nur auf die Vorführung der Methode an. Wir beschränken uns dabei auf lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, in denen keine ersten Ableitungen vorkommen, weil unsere Methode genau dieser Art von Problemen angepaßt ist. Für die Rücktransformation der im Resultatbereich gefundenen Lösungen wird jeweils auf die Tabelle verwiesen; z. B. bedeutet II. 4: Formel 4 der Tabelle II. Wie bisher werden Objektfunktionen mit großen, zugehörige Resultatfunktionen mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet.

1. Gesucht im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ die Lösung der Differentialgleichung

$$Y'' + Y + 1 = 0$$

mit den Randbedingungen $Y'(0) = 1 = -Y'(\pi)$. Da die Randwerte der Ableitung vorgegeben sind, ist nach 2.1 die cos-Transformation zuständig. Die „Übersetzung" ergibt:

$$(-1)^{m+1} - 1 - m^2 y + y = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 0 \\ -\pi & \text{für } m = 0, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$y = \begin{cases} 2 - \pi & \text{für } m = 0 \\ \text{beliebig} & \text{für } m = 1 \\ \dfrac{(-1)^{m+1} - 1}{m^2 - 1} & \text{für } m = 1. \end{cases}$$

Wir setzen $y = y_1 + y_2 + y_3$ mit

$$y_1 = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+1} - 1}{m^2 - 1} & \text{für } m \neq 1 \\ 0 & \text{für } m = 1, \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} -\pi & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } m \neq 0, \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} k' = k\dfrac{\pi}{2} & \text{für } m = 1 \ (k = \text{const.}) \\ 0 & \text{für } m \neq 1. \end{cases}$$

Dann gehört zu y_1 nach I. 6 die Objektfunktion $\sin x$, zu y_2: -1, zu y_3: $k \cos x$. Demnach stellt

$$Y = \sin x + k \cos x - 1 \quad (k \text{ beliebig})$$

die Lösungen der Randwertaufgabe dar (also unendlich viele).

2. Eine Verallgemeinerung des letzten Beispiels zeigt, wie man die Fourier-Koeffizienten einer Funktion bekommen kann, ohne in der üblichen, manchmal recht umständlichen Weise ein Integral auswerten zu müssen. Die Funktion $\sin \alpha x$ läßt sich, wenn α keine ganze Zahl ist, im Intervall $\langle -\pi, +\pi \rangle$ bekanntlich durch die Fouriersche sin-Reihe

$$\sin \alpha x = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{\alpha^2 - 1} - \frac{2 \sin 2x}{\alpha^2 - 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{\alpha^2 - 3^2} - + \ldots\right)$$

(vgl. II. 4) darstellen. Eine für ganzzahliges α gültige Darstellung (natürlich als cos-Reihe, da sin-Reihe und Funktion in diesem Fall dasselbe sind) erhält man folgendermaßen: Wir kehren unsere Methode um; statt von einer zu lösenden Differentialgleichung auszugehen, die Resultatfunktion zu bestimmen und die zugehörige Objektfunktion zu suchen, gehen wir von einer gegebenen Objektfunktion aus, bilden eine passende Differentialgleichung, der sie genügt, transformieren diese und finden dann die gesuchten Fourier-Koeffizienten als Resultatfunktion. Für Berechnung von Tabellen z. B. ist dieses Prinzip sehr vorteilhaft.

Um also die cos-Reihe von $\sin \alpha \frac{\pi}{l} x$ (α ganzzahlig reell) für das Intervall $\langle 0, l \rangle$ oder, was dasselbe ist, die Fourier-Koeffizienten der geraden Funktion $\frac{1}{2}\left|\sin \alpha \frac{\pi}{l} x\right|$ im Intervall $\langle -l, +l \rangle$ zu bekommen, wenden wir etwa auf die Differentialgleichung

$$Y'' + \left(\alpha \frac{\pi}{l}\right)^2 Y = 0,$$

die für die Randbedingungen $Y'(0) = \alpha \frac{\pi}{l}$, $Y'(l) = (-1)^\alpha \alpha \frac{\pi}{l}$ die Lösung $\sin \alpha \frac{\pi}{l} x$ hat, die cos-Transformation an. Es ergibt sich:

$$\alpha \frac{\pi}{l}\left[(-1)^{m+\alpha} - 1\right] - \left(m \frac{\pi}{l}\right)^2 y + \left(\alpha \frac{\pi}{l}\right)^2 y = 0,$$

also

$$y = \frac{l\alpha\,[(-1)^{m+\alpha} - 1]}{\pi\,(m^2 - \alpha^2)}.$$

Dies ist I. 6. Den Wert für $m = \alpha$ bekommt man auf diese Weise nicht; doch sieht man ohne Rechnung, daß das Integral $\int\limits_0^l \cos\alpha\frac{\pi}{l}x \sin\alpha\frac{\pi}{l}x\,dx$ den Wert 0 hat. — Da $\sin\alpha\frac{\pi}{l}x$ von beschränkter Variation und stetig mit den Randwerten 0 ist, stellt die Fourier-Reihe überall die Funktion dar.

Die Rekursionsformeln am Schluß der Tabellen sind ebenfalls nichts weiter als nach diesem Prinzip übersetzte Differentialgleichungen.

3. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$(1) \qquad Y'' = c\,Y + \Phi.$$

Hierin ist c eine beliebige reelle oder komplexe Konstante, Φ sei eine stetige Funktion, das zugrunde gelegte Intervall sei $0 \leqq x \leqq l$. Da Y'' zufolge der Differentialgleichung integrabel ist, läßt sich die endliche sin-Transformation ohne weiteres anwenden und liefert die algebraische Gleichung

$$(2) \qquad -\,y(m)\left(c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right) = \varphi(m) + m\,\frac{\pi}{l}\,[(-1)^m\,Y(l) - Y(0)].$$

I. Homogener Fall. Gleichung (2) sei zunächst homogen, d. h.

$$\varphi(m) = -\,m\frac{\pi}{l}\,[(-1)^m\,Y(l) - Y(0)].$$

$\varphi(m)$ muß als Fourier-Koeffizient mit wachsendem m beliebig klein werden (Riemann-Lebesguesches Lemma), also muß $Y(l) = Y(0) = 0$, mithin $\varphi(m) \equiv 0$ und $\Phi(x) \equiv 0$ sein. Wir haben also zunächst das Ergebnis: Eine homogene algebraische Gleichung im Resultatbereich ergibt sich dann und nur dann, wenn das Randwertproblem im Objektbereich ebenfalls homogen ist in dem Sinne, daß $\Phi(x) \equiv 0$ *und* $Y(0) = Y(l) = 0$ ist.

Ist nun $c + m^2\frac{\pi^2}{l^2} \neq 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, d. h. $\frac{l}{\pi}\sqrt{-c} = \alpha$ nicht ganzzahlig reell, so muß $y(m) \equiv 0$ sein; (1) hat also dann *keine* Lösung außer der trivialen $Y \equiv 0$. Ist aber α ganzzahlig reell $\neq 0$, so kann $y(m)$ für den einen Wert α seines Arguments, wo es nicht zu verschwinden braucht, gleich einer beliebigen Konstanten $k' = k \cdot \frac{l}{2}$ gesetzt werden. Dazu gehört die Objektfunktion $k\sin\alpha\frac{\pi}{l}x$; da k jede Zahl sein kann, haben wir also unendlich viele Lösungen.

II. Inhomogener Fall. Nun sei (2) inhomogen, d. h.

$$\varphi(m) + m\frac{\pi}{l}\,[(-1)^m\,Y(l) - Y(0)] \not\equiv 0;$$

entweder ist also $\varphi(m) \neq 0$ oder $Y(0) \neq Y(l)$ oder beides. Es sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Wenn $\frac{l}{\pi}\sqrt{-c} = \alpha$ nicht ganzzahlig reell oder gleich 0 ist ($m = 0$ kommt bei der sin-Transformation nicht vor), dann gibt es genau eine Lösung:

$$y(m) = -\frac{\varphi(m)}{c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}} - \frac{m\frac{\pi}{l}(-1)^m Y(l)}{c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}} + \frac{m\frac{\pi}{l} Y(0)}{c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}}.$$

Die Objektfunktionen zu den Gliedern auf der rechten Seite lassen sich angeben. Nach I. 1 ist

$$\mathfrak{C}^{-1}\left\{\frac{1}{c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}}\right\} = \mathfrak{C}^{-1}\left\{-\frac{l}{\pi\sqrt{-c}}\,\frac{\frac{l}{\pi}\sqrt{-c}}{m^2 - \left(\frac{l}{\pi}\sqrt{-c}\right)^2}\right\} = \begin{cases} \dfrac{\cos\sqrt{-c}\,(l-x)}{\sqrt{-c}\sin l\sqrt{-c}} & \text{für } 0 \leqq x \leqq l, \\ \dfrac{\cos\sqrt{-c}\,(l+x)}{\sqrt{-c}\sin l\sqrt{-c}} & \text{für } -l \leqq x \leqq 0 \end{cases}$$

(die Objektfunktion muß gerade sein). Bezeichnen wir diese Funktion mit $G(x)$ und setzen wir $\Phi(x)$ ungerade in das Intervall $\langle -l, 0\rangle$ fort, so ist nach Faltungssatz 5:

$$\mathfrak{S}^{-1}\left\{\frac{-\varphi(m)}{c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}}\right\} = \frac{1}{2}G(x) \overset{+l}{\underset{-l}{*}} \Phi(x).$$

Ferner ist

$$\text{nach II. 4} \quad \mathfrak{S}^{-1}\left\{-\frac{m(-1)^m Y(l)}{c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}}\right\} = \frac{Y(l)\sin x\sqrt{-c}}{\sin l\sqrt{-c}},$$

$$\text{nach II. 1} \quad \mathfrak{S}^{-1}\left\{\frac{m\frac{\pi}{l} Y(0)}{c + m^2\frac{\pi^2}{l^2}}\right\} = \frac{Y(0)\sin\sqrt{-c}\,(l-x)}{\sin l\sqrt{-c}}.$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) lautet also:

$$Y = \frac{1}{2}G(x) \overset{+l}{\underset{-l}{*}} \Phi(x) + \frac{Y(l)\sin x\sqrt{-c}}{\sin l\sqrt{-c}} + \frac{Y(0)\sin\sqrt{-c}\,(l-x)}{\sin l\sqrt{-c}}.$$

Für $c = 0$ ist der Grenzwert dieser Lösung für $c \to 0$ zu nehmen, da Y wegen der Konvergenz von $\sum\limits_1^\infty y^2(m)$ quadratisch integrierbar, die endliche Fourier-Transformation im Gebiet der quadratisch integrierbaren Funktionen aber bekanntlich stetig ist. — Bei der Auswertung des Faltungsintegrals ist darauf zu achten, daß der Integrand periodisch mit der Periode $2\,l$ sein muß, wodurch in der Regel eine Zerlegung nötig wird.

B. Ist schließlich $\frac{l}{\pi}\sqrt{-c} = \alpha$ ganzzahlig reell ($\neq 0$), so gibt es im allgemeinen überhaupt keine Lösung. Wenn jedoch in (2) die rechte Seite für den kritischen Wert $m = \alpha$ ebenfalls verschwindet, wenn also

$$\varphi(\alpha) + \alpha\frac{\pi}{l}[(-1)^{\alpha} Y(l) - Y(0)] = 0 \tag{3}$$

ist, so kann $y(\alpha)$ jeden beliebigen Wert haben. Es gibt also dann unendlich viele Lösungen, nämlich:

$$y(m) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(m) + m\frac{\pi}{l}[(-1)^m Y(l) - Y(0)]}{\alpha^2 - m^2\frac{\pi^2}{l^2}} & \text{für } m \neq \alpha, \\ \text{beliebig} & \text{für } m = \alpha. \end{cases}$$

Falls $Y(0) = Y(l) = 0$ ist, besagt die notwendige und hinreichende Bedingung (3), daß $\varphi(\alpha) = 0$ sein muß. Das bedeutet, daß $\Phi(x)$ orthogonal zur Lösung der homogenen Gleichung, d. h. daß

$$\int_0^l \Phi(\xi)\sin\alpha\frac{\pi}{l}\xi\,d\xi = 0$$

ist. Bei inhomogenen Randbedingungen jedoch besagt (3), daß $\varphi(\alpha)$ gleich einer gewissen linearen Kombination der Randwerte sein muß.

Die Objektfunktion $Y = \frac{2}{l}\sum_1^{\infty}\sin m\frac{\pi}{l}x\;y(m)$ existiert sicher im Sinne der Mittelkonvergenz, da wegen $y(m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$ die Reihe $\sum_1^{\infty} y^2(m)$ konvergiert. Der Faltungssatz ist hier nicht ohne weiteres anwendbar, da $\varphi(m)$ nicht als Faktor von $y(m)$ auftritt und der Bruch im allgemeinen nicht in Summanden zerlegt werden kann. Die Willkür des Wertes von $y(\alpha)$ bedeutet natürlich nichts anderes als die bekannte Tatsache, daß man sämtliche Lösungen eines (lösbaren) inhomogenen Randwertproblems dadurch erhält, daß man zu sämtlichen Lösungen des homogenen Problems ein partikuläres Integral des inhomogenen addiert.

Da wir im nächsten Paragraphen bei Systemen genau dieselben Verhältnisse antreffen werden, geben wir zur besseren Übersicht für die Anzahl der Lösungen folgendes aus der allgemeinen Theorie der Randwertaufgaben geläufige

Schema.

	$\frac{l}{\pi}\sqrt{-c}$ nicht ganzzahlig reell	$\frac{l}{\pi}\sqrt{-c}$ ganzzahlig reell $\neq 0$
Homogenes Problem	*Keine* Lösung (außer der trivialen)	*Unendlich viele* Lösungen
Inhomogenes Problem	*Eine* Lösung	Im allgemeinen: *Keine* Lösung; bei Zusatzbedingung (3): *Unendlich viele* Lösungen

§ 4.

Anwendung auf Systeme.

Besonders praktisch ist unsere Methode für die Behandlung von Systemen. Je nach Art des Problems ist die eine oder die andere Transformation brauchbar: Die endliche sin-Transformation paßt zu Systemen, bei denen nur geradzahlige Ableitungen und Randwerte von solchen (einschließlich der nullten, der Funktion selbst) vorkommen, die endliche cos-Transformation zu Problemen, in denen nur geradzahlige Ableitungen und Randwerte von ungeradzahligen vorkommen. Bei der endlichen Fourier-Transformation können beliebige Ableitungen zugelassen werden, doch ist man dafür in der Wahl der Randwerte eingeschränkt[6]).

Wir demonstrieren die Methode an einem einfachen System von Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, beliebigen Randwerten und beliebigen Störungsfunktionen, das in der Elektrotechnik eine Rolle spielt:

$$
(1)\quad \begin{aligned}
\frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} &= c_{11} Y_1(x) + c_{12} Y_2(x) + \dots + c_{1n} Y_n(x) + \Phi_1(x),\\
\frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} &= c_{21} Y_1(x) + c_{22} Y_2(x) + \dots + c_{2n} Y_n(x) + \Phi_2(x),\\
&\vdots\\
\frac{d^2 Y_n(x)}{dx^2} &= c_{n1} Y_1(x) + c_{n2} Y_2(x) + \dots + c_{nn} Y_n(x) + \Phi_n(x).
\end{aligned}
$$

Hierin sei $n \geqq 2$, denn den Fall $n = 1$ haben wir eben als letztes Beispiel in § 3 erledigt. Die Randbedingungen seien

$$Y_p(0) = A_p, \quad Y_p(l) = B_p \quad (p = 1, 2, \dots, n);$$

die Störungsfunktionen $\Phi_p(x)$ seien stetig.

Kraft der Differentialgleichungen (1) sind die Ableitungen $Y_p''(x)$ integrabel. Die Anwendung der endlichen sin-Transformation ergibt im Resultatbereich das algebraische System:

$$
(2)\quad \begin{aligned}
&\left(c_{11} + m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right) y_1(m) + c_{12} y_2(m) + \dots + c_{1n} y_n(m) = m\frac{\pi}{l}[A_1 - (-1)^m B_1] - \varphi_1(m),\\
&c_{21} y_1(m) + \left(c_{22} + m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right) y_2(m) + \dots + c_{2n} y_n(m) = m\frac{\pi}{l}[A_2 - (-1)^m B_2] - \varphi_2(m),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_{n1} y_1(m) + c_{n2} y_2(m) + \dots + \left(c_{nn} + m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right) y_n(m) = m\frac{\pi}{l}[A_n - (-1)^m B_n] - \varphi_n(m).
\end{aligned}
$$

---

[6]) Der Kunstgriff von Doetsch, siehe Einleitung und l. c.[3]), S. 60, muß anwendbar sein.

Für die Lösung dieses Systems ist entscheidend das Verhalten der Koeffizientenmatrix:

$$\left|\Delta\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)\right| \equiv \left\|\begin{matrix} c_{11}+\left(m\frac{\pi}{l}\right)^2 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+\left(m\frac{\pi}{l}\right)^2 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn}+\left(m\frac{\pi}{l}\right)^2 \end{matrix}\right\|.$$

Die Determinante $\Delta\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)$ ist ein Polynom n-ten Grades in $\left(m\frac{\pi}{l}\right)^2$, wobei m die Werte $1, 2, \ldots$ durchläuft. Die n Nullstellen $\alpha_k' = \left(\alpha_k\frac{\pi}{l}\right)^2$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von Δ sind die *Eigenwerte* der Matrix; da über die c nichts vorausgesetzt ist, können die α_k ganz oder nicht ganz, reell oder komplex sein. Wie im Falle $n = 1$ unterscheiden wir:

1. Homogener Fall.

Ist (1) homogen, d. h. $A_p = B_p = 0$ und $\Phi_p(x) \equiv 0$, so gilt natürlich dasselbe für (2), aber auch umgekehrt: Aus

$$m\frac{\pi}{l}[A_p - (-1)^m B_p] - \varphi_p(m) \equiv 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt wie vorhin, daß $A_p = B_p = 0$, also $\varphi_p(m) \equiv 0$ und $\Phi_p(x) \equiv 0$ sein muß. Die Beschaffenheit der Lösungen hängt von der Natur der Eigenwerte $\left(\alpha_k\frac{\pi}{l}\right)^2$ ab.

A. Die α_k seien nicht ganz oder 0. Dann ist Δ für alle m von 0 verschieden, und als Lösungssystem erhalten wir nur das triviale

$$Y_p(x) \equiv 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

B. Unter den Eigenwerten seien auch solche mit ganzzahligem α_k $(\neq 0)$; es gebe deren r $(1 \leqq r \leqq n)$, die wir mit $\left(m_k\frac{\pi}{l}\right)^2$ bezeichnen wollen $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Die Determinante Δ ist für alle $m \neq m_k$ von 0 verschieden, demnach ist $y_p(m)_{m \neq m_k} = 0$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$. Etwas von 0 Verschiedenes erhält man dagegen an den Stellen $m = m_k$, und zwar in bekannter Weise in Abhängigkeit vom Rang ϱ der Matrix $\left|\Delta\left(m_k^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)\right|$. Für diesen Rang gilt die Abschätzung $\varrho \geqq n - \lambda$, wenn $m_k^2\frac{\pi^2}{l^2}$ eine λ-fache Nullstelle von Δ ist. Denn an dieser Stelle ist die λ-te Ableitung von Δ ungleich 0; diese ist aber [7]) gleich $\lambda!\sum_{\nu=1}^{\binom{n}{\lambda}}\Delta_\nu^{(n-\lambda)}\left(m_k^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)$, worin die Δ_ν die Hauptminoren

---

[7]) Vgl. etwa Perron, Lehrb. d. Algebra I (Leipzig 1927), S. 94.

$(n-\lambda)$-ten Grades von $\Delta\left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)$ sind. Da diese Summe $\neq 0$ sein soll, muß mindestens ein Hauptminor $(n-\lambda)$-ten Grades $\neq 0$ sein, d. h. es muß gelten $\varrho \geqq n-\lambda$. Für $\lambda = 1$, wenn also die fraglichen Eigenwerte alle einfach sind, folgt hieraus $\varrho = n-1$. In diesem Fall ist

$$y_p(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq m_k \\ q\, \Delta_p^{(k)} \ (q \text{ beliebig}) & \text{für } m = m_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

wobei die $\Delta_p^{(k)}$ die Unterdeterminanten einer Zeile sind, in der sie nicht sämtlich verschwinden. Die Objektfunktionen dazu sind:

$$Y_p(x) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{r} q\, \Delta_p^{(k)} \sin m_k \frac{\pi}{l} x.$$

Bei mehrfachen Nullstellen kann es vorkommen, daß $\varrho < n-1$ ist. Ein Beispiel liefert das System

$$\begin{aligned} Y_1'' &= -Y_1, \\ Y_2'' &= -4\, Y_2, \\ Y_3'' &= Y_1 - 4\, Y_3. \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix

$$\begin{Vmatrix} m^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & m^2-4 & 0 \\ 1 & 0 & m^2-4 \end{Vmatrix}$$

hat für den einfachen Eigenwert $m_1 = 1$ den Rang 2, für den doppelten Eigenwert $m_2 = 2$ den Rang 1. Das Lösungssystem ist

$$\begin{aligned} Y_1 &= 3\, k_1 \sin x, \\ Y_2 &= k_2 \sin 2\, x, \\ Y_3 &= k_1 \sin x + k_3 \sin 2\, x, \end{aligned}$$

wobei k_1, k_2, k_3 beliebige Konstanten sind. — Da bei $\varrho < n-1$ zu viele Unterfälle vorkommen können, ist eine allgemeine Behandlung zu weitschweifig; der Einzelfall läßt sich natürlich mit unseren Mitteln stets erledigen.

2. *Inhomogener Fall.*

Jetzt sei das System (2) inhomogen, d. h.

$$m \frac{\pi}{l} [A_p - (-1)^m B_p] - \varphi_p(m) \not\equiv 0$$

für wenigstens ein p. Wir unterscheiden wieder:

A. In den Eigenwerten $\left(\alpha_k \frac{\pi}{l}\right)^2$ seien die α_k nicht ganz oder 0. Dann ist $\Delta \neq 0$ für alle m, und wir erhalten genau *eine* Lösung. Diese heißt nach der Cramerschen Regel:

$$y_p(m) = \frac{m\frac{\pi}{l}\Delta_p^{(1)}\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)}{\Delta\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)} + \frac{(-1)^m m\frac{\pi}{l}\Delta_p^{(2)}\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)}{\Delta\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)} + \frac{\Delta_p^{(3)}\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)}{\Delta\left(m^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)}$$
$$= y_p^{(1)} + y_p^{(2)} + y_p^{(3)}.$$

Dabei ist

$$\Delta_p^{(1)} = (-1)^{n+p}\begin{vmatrix} c_{11}+m^2\frac{\pi^2}{l^2} & c_{12} & \dots c_{1p-1} & -A_1 & c_{1p+1}\dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+m^2\frac{\pi^2}{l^2} & \dots c_{2p-1} & -A_2 & c_{2p+1}\dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots c_{pp-1} & -A_p & c_{pp+1}\dots & c_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots c_{np+1} & -A_n & c_{np+1}\dots & c_{nn}+m^2\frac{\pi^2}{l^2} \end{vmatrix},$$

in $\Delta_p^{(2)}$ stehen in der p-ten Spalte die Zahlen $B_1, B_2, \dots B_n$, in $\Delta_p^{(3)}$ die $\varphi_p(m)$. Entwickelt man $\Delta_p^{(3)}$ nach den Elementen der p-ten Spalte:

$$\Delta_p^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \Delta_{ip}^{(3)},$$

so sind alle vorkommenden Δ Polynome in $\left(m\frac{\pi}{l}\right)^2$. Das Nennerpolynom ist vom Grade n, die Zählerpolynome sind sämtlich vom Grade $n-1$.

Wir nehmen zunächst an, alle Nullstellen von Δ seien einfach. Zerlegt man die drei $y_p(m)$ in bekannter Weise in Partialbrüche, so gibt jede Nullstelle $\left(\alpha_k\frac{\pi}{l}\right)^2$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ Veranlassung zu Partialbrüchen für $y_p^{(1)}, y_p^{(2)}, y_p^{(3)}$ der Form

$$\frac{l}{\pi}\frac{b_{pk}m}{m^2-\alpha_k^2}, \quad \frac{l}{\pi}\frac{c_{pk}(-1)^m m}{m^2-\alpha_k^2}, \quad \frac{l}{\pi}\frac{\alpha_k\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ik}^{(p)}\varphi_i(m)}{m^2-\alpha_k^2},$$

worin $b_{pk}, c_{pk}, d_{ik}^{(p)}$ Konstanten (gewisse Determinanten) sind. Dann ist

$$y_p(m) = \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_{pk}m}{m^2-\alpha_k^2} + \frac{c_{pk}(-1)^m m}{m^2-\alpha_k^2} + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(m)\frac{d_{ik}^{(p)}\alpha_k}{m^2-\alpha_k^2}\right)$$

die Lösung im Resultatbereich. Die auftretenden Partialbrüche haben nun gerade die Form der im Falle $n = 1$ gefundenen Resultatfunktionen, so daß wir die Lösung im Objektbereich sofort anschreiben können:

$$Y_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{b_{pk}\sin\alpha_k\left(\pi-\frac{\pi}{l}x\right)}{\sin\alpha_k\pi} - \frac{c_{pk}\sin\alpha_k\frac{\pi}{l}x}{\sin\alpha_k\pi} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_{ik}^{(p)}G_k(x)\underset{-l}{\overset{+l}{*}}\Phi_i(x)\right\}$$

mit

$$G_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha_k\left(\pi + \frac{\pi}{l}x\right)}{\sin\alpha_k\pi} & \text{für } -l \leqq x \leqq 0, \\[2ex] \dfrac{\cos\alpha_k\left(\pi - \frac{\pi}{l}x\right)}{\sin\alpha_k\pi} & \text{für } \quad 0 \leqq x \leqq l; \end{cases}$$

die $\Phi_i(x)$ sind ungerade ins Intervall $\langle -l, 0\rangle$ fortgesetzt. Für $\alpha_k = 0$ ist der Grenzwert $\alpha_k \to 0$ zu bilden.

Treten unter den Eigenwerten auch mehrfache auf, so gibt es andere Resultatfunktionen. Im Falle doppelter Nullstellen etwa erhalten wir außer den bisherigen noch Partialbrüche der Form

$$\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{e_{pk}\,m\,(m^2+\alpha_k^2)}{(m^2-\alpha_k^2)^2} = \frac{l^2}{\pi^2}\left(\frac{2\,e_{pk}\,m\,\alpha_k^2}{(m^2-\alpha_k^2)^2} + \frac{e_{pk}\,m}{m^2-\alpha_k^2}\right) \qquad \text{für } y_p^{(1)},$$

$$\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{f_{pk}(-1)^m\,(m^2+\alpha_k^2)\,m}{(m^2-\alpha_k^2)^2} = \frac{l^2}{\pi^2}\left(\frac{2\,f_{pk}(-1)^m\,m\,\alpha_k^2}{(m^2-\alpha_k^2)^2} + \frac{f_{pk}(-1)^m\,m}{m^2-\alpha_k^2}\right) \qquad \text{für } y_p^{(2)},$$

$$\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{g_{ik}^{(p)}(m^2+\alpha_k^2)}{(m^2-\alpha_k^2)^2}\,\varphi_p(m) \qquad \text{für } y_p^{(3)},$$

(e, f, g Konstante), wozu nach II. 2, II. 1, II. 5, II. 4, I. 2 und Faltungssatz 5 die Objektfunktionen

$$-\frac{e_{pk}}{\sin\alpha_k\pi}\left(\alpha_k\,x\cos\alpha_k\left(\pi - \frac{\pi}{l}x\right) + \frac{\alpha_k\,l\sin\alpha_k\frac{\pi}{l}x}{\sin\alpha_k\pi} - \frac{l}{\pi}\sin\alpha_k\left(\pi - \frac{\pi}{l}x\right)\right),$$

$$\frac{f_{pk}}{\sin\alpha_k\pi}\left(-\alpha_k x\cos\alpha_k\frac{\pi}{l}x + \alpha_k\,l\operatorname{cotg}\alpha_k\pi\sin\alpha_k\frac{\pi}{l}x - \frac{l}{\pi}\sin\alpha_k\frac{\pi}{l}x\right),$$

$$\frac{g_{ik}^{(p)}}{\sin\alpha_k\pi}\cdot\frac{1}{2}F(x)\overset{+l}{\underset{-l}{*}}\Phi(x)$$

mit

$$F(x) = \begin{cases} x\sin\alpha_k\left(\pi + \frac{\pi}{l}x\right) - \dfrac{l\cos\alpha_k\frac{\pi}{l}x}{\sin\alpha_k\pi} & \text{für } -l \leqq x \leqq 0, \\[2ex] -x\sin\alpha_k\left(\pi - \frac{\pi}{l}x\right) - \dfrac{l\cos\alpha_k\frac{\pi}{l}x}{\sin\alpha_k\pi} & \text{für } \quad 0 \leqq x \leqq l \end{cases}$$

gehören. Bei Nullstellen höherer, allgemein r-facher ($r \leqq n$) Vielfachheit treten wie bisher sin- und cos-Funktionen auf, multipliziert mit Polynomen ($r-1$)-ten Grades in x. Je nach Beschaffenheit der α_k können die trigonometrischen natürlich in Wahrheit auch hyperbolische Funktionen oder auch einfache Exponentialfunktionen sein. Die Art der Eigenwerte $\left(\alpha_k\frac{\pi}{l}\right)^2$ hängt offenbar nur von den Koeffizienten c ab; bilden diese eine symmetrische Matrix, so sind die Eigenwerte bekanntlich alle reell, es treten in der Lösung also nur trigonometrische Funktionen auf.

B. Schließlich sollen unter den Eigenwerten von $|\Delta|$ auch solche mit ganzzahligem $\alpha_{k} \neq 0$ vorkommen ($k = 1, 2, \ldots, r$). Dann hat unser inhomogenes System (2) in der Regel *keine* Lösung, weil die Cramersche Relation

$$\Delta\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right) y_p(m) = \Delta_p\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)$$

worin Δ_p folgende mit $(-1)^{n+p}$ multiplizierte Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} c_{11}+\left(m\frac{\pi}{l}\right)^2 & c_{12} & \ldots c_{1p-1} & m\frac{\pi}{l}[A_1-(-1)^m B_1]-\varphi_1(m) & c_{1p+1}\ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+\left(m\frac{\pi^2}{l}\right) & \ldots c_{2p-1} & m\frac{\pi}{l}[A_2-(-1)^m B_2]-\varphi_2(m) & c_{2p+1}\ldots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \ldots c_{pp-1} & m\frac{\pi}{l}[A_p-(-1)^m B_p]-\varphi_p(m) & c_{pp+1}\ldots & c_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots c_{np-1} & m\frac{\pi}{l}[A_n-(-1)^m B_n]-\varphi_n(m) & c_{np+1}\ldots & c_{nn}+\left(m\frac{\pi}{l}\right)^2 \end{vmatrix},$$

für $m = \alpha_k = m_k$ im allgemeinen keinen Sinn hat. Jedoch existieren Lösungen dann und nur dann, wenn

$$\Delta_p\left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

ist. In dem Fall, daß sämtliche Eigenwerte einfach sind, läßt sich diese Lösbarkeitsbedingung erheblich schärfer fassen: Wenn wir die (numerischen) Determinanten $\Delta_p\left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)$ jeweils nach der p-ten Spalte ($p = 1, 2, \ldots, n$) entwickeln, so erhalten wir ein homogenes Gleichungssystem in den n Größen $X_j^{(k)} \equiv \left\{m_k \frac{\pi}{l}[A_j - (-1)^{m_k} B_j] - \varphi_j(m_k)\right\}$ mit den Unterdeterminanten $C_{pj}^{(k)} \equiv C_{pj}\left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) unserer ursprünglichen Determinante $\Delta\left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)$ als Koeffizienten:

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{n} C_{pj}^{(k)} X_j^{(k)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Determinante dieses Systems ist bekanntlich gleich $\Delta^{n-1}\left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)$, also 0, es gibt also in der Tat Lösungen $X_j^{(k)}$, und zwar beliebig viele. Da bei einfachen Eigenwerten die Matrix $\left|\Delta\left(m_k^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)\right|$ den Rang $n - 1$ hat, so hat nach einem Determinantensatz [8]) die Matrix $|\Delta(C_{pj}^{(k)})|$ den Rang 1. Man kann also

---

[8]) Siehe etwa G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, S. 81.

in (4) sämtliche Gleichungen bis auf eine — es sei die q-te — streichen, in der die Koeffizienten $C_{pq}^{(k)}$ nicht alle 0 sind. Es bleibt als ***notwendige und hinreichende Bedingung*** für die Lösbarkeit des inhomogenen Systems (2) bzw. (1):

$$(5)\quad C_{1q}^{(k)}\left\{m_k\frac{\pi}{l}[A_1-(-1)^{m_k}B_1]-\varphi_1(m_k)\right\}+\dots$$
$$+C_{nq}^{(k)}\left\{m_k\frac{\pi}{l}[A_n-(-1)^{m_k}B_n]-\varphi_n(m_k)\right\}=0,$$
$$(k=1,2,\dots,r).$$

Das bedeutet, daß r lineare Kombinationen der $\varphi_p(m_k)$ einen durch die Randwerte bestimmten Wert haben müssen. Natürlich wird in der Regel für verschiedene k immer eine andere der n Gleichungen von (4) zu nehmen sein.

Die Objektfunktion zu der Lösung

$$y_p(m)=\begin{cases}\dfrac{\Delta_p}{\Delta} & \text{für } m\neq m_k\\ \text{beliebig} & \text{für } m=m_k\end{cases}\qquad (k=1,2,\dots,r;\ p=1,2,\dots,n)$$

existiert sicher als Limes in medio:

$$Y_p(x)=\underset{M\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{M}y_p(m)\sin m\frac{\pi}{l}x,$$

da die Reihe $\sum\limits_1^\infty y_p^2(m)$ wegen $y_p(m)=O\left(\frac{1}{m}\right)$ konvergiert. Die Partialbruchzerlegung des vorigen Falles kann wie bei $n=1$ natürlich nicht ohne weiteres durchgeführt werden. Daß für $y_p(m_k)$ jeder Wert genommen werden kann, läuft wieder auf die Addition der unendlich vielen Lösungen des homogenen Systems hinaus.

Über die Fälle *mehrfacher* Eigenwerte mit $\varrho<n-1$ läßt sich allgemein nicht viel aussagen; wir überlassen sie wie beim homogenen Problem der Einzelbehandlung, bei der prinzipielle Schwierigkeiten nicht auftreten[9]).

Bei einfachen Eigenwerten läßt sich in zwei *Sonderfällen* die Partialbruchzerlegung leicht durchführen:

a) Bedingung (5) ist erfüllt, wenn

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_p(x)\equiv 0,\quad \text{also auch}\quad \varphi_p(m)\equiv 0,\\ Y_p(0)=A_p,\\ Y_p(l)=A_p(-1)^{m_p}\ \text{mit}\ m_p\equiv m_k\ (2)\ (k=1,2,\dots,r),\end{array}\right\}p=1\ 2,\dots,n$$

Man berechnet die Lösungen von (2) wie unter II. A als Determinantenquotienten, entwickelt die Zählerdeterminanten jeweils nach der Spalte, in

---

[9]) Vgl. l. c.[1]), S. 332.

der die Randwerte stehen, und zerlegt schließlich die n Einzelglieder in Partialbrüche. Dann ist, einfache Nullstellen vorausgesetzt,

$$y_p(m) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{A_i d_{pk} m \frac{\pi}{l} [(-1)^{m+m_k} - 1] l^2}{\pi^2 (m^2 - m_k^2)} & \text{für } m \neq m_k, \\ \text{beliebig} & \text{für } m = m_k; \end{cases}$$

die d_{pk} sind die Koeffizienten der Partialbrüche. Nach II. 6 gehört dazu die Objektfunktion

$$Y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} A_i d_{pk} \cos m_k \frac{\pi}{l} x + \frac{2}{l} \cdot q \sum_{k=1}^{r} \Delta_p^{(k)} \sin m_k \frac{\pi}{l} x;$$

der zweite Summand (q beliebig) stellt die bereits bekannten Lösungen des homogenen Problems dar. — Bei mehrfachen Eigenarten werden die Formeln II. 8, II. 9 usw. zuständig.

b) Bedingung (5) ist auch erfüllt, wenn

$$\Phi_p(x) \neq 0, \quad \text{aber} \quad \varphi_p(m_k) = 0,$$
$$Y_p(0) = Y_p(l) = 0.$$

Wir zerlegen die Cramerschen Determinantenquotienten wieder wie in II. A und erhalten bei einfachen Nullstellen:

$$y_p(m) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{l\, m_k d_{ik}^{(p)} \varphi_i(m)}{\pi (m^2 - m_k^2)} & \text{für } m \neq m_k, \\ \text{beliebig} & \text{für } m = m_k. \end{cases}$$

Die Objektfunktion zu $\dfrac{l\, m_k}{\pi (m^2 - m_k^2)}$ ist nach I. 6 und I. 7:

$$H_k(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{l} + 1\right) \sin m_k \frac{\pi}{l} x & \text{für } -l \leqq x \leqq 0, \\ \left(\frac{x}{l} - 1\right) \sin m_k \frac{\pi}{l} x & \text{für } 0 \leqq x \leqq l; \end{cases}$$

mithin ist nach Faltungssatz 5:

$$Y_p(x) = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} d_{ik}^{(p)} H_k(x) \overset{+l}{\underset{-l}{*}} \Phi_i(x) + \text{Lösungen des homogenen Systems,}$$

wobei wieder $\Phi_i(-x) = -\Phi_i(x)$ zu setzen ist. — Bei mehrfachen Nullstellen treten höhere Polynome in x als Faktoren auf.

Wie schon erwähnt, hat L. Fantappiè das System (1) in dem Sonderfall, daß $Y_p(0) = Y_p(l) = 0$ und die Störungsfunktion $\Phi(x)$ in jeder Gleichung dieselbe ist, bereits früher gelöst, und zwar mit Hilfe eines speziellen, ad hoc erdachten Integraloperators. Bei Fantappiè erscheinen die Lösungen in Form eines komplexen Integrals:

$$Y_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(x, \lambda) \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \lambda \Delta_{kp}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} d\lambda$$

mit

$$\gamma(x, \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \Phi(x) - \frac{\mathfrak{Sin}\left[\lambda^{-\frac{1}{2}}(x-l)\right]}{\lambda^{\frac{3}{2}} \mathfrak{Sin}\left(l \lambda^{-\frac{1}{2}}\right)} \int_0^x \mathfrak{Sin} \frac{t}{\sqrt{\lambda}} \Phi(t)\, dt$$

$$- \frac{\mathfrak{Sin}\left(x \lambda^{-\frac{1}{2}}\right)}{\lambda^{\frac{3}{2}} \mathfrak{Sin}\left(l \lambda^{-\frac{1}{2}}\right)} \int_x^l \mathfrak{Sin} \frac{t-l}{\sqrt{\lambda}} \Phi(t)\, dt;$$

alle dabei beteiligten Funktionen werden als regulär bzw. meromorph vorausgesetzt. Die Summe ist eine gewisse durch die Cramersche Regel erhaltene gebrochen rationale Funktion, in welche die Koeffizienten des Systems eingegangen sind, und C eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene, welche die Pole von $\gamma(x, \lambda)$ von den Polen der meromorphen Funktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \lambda \Delta_{kp}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ trennt. Ist der Durchschnitt beider Punktmengen nicht leer, gibt es also keine Kurve der verlangten Art, so versagt Fantappiès Lösungsmethode.

Tabelle I (cos-Transformation).

α nicht ganzzahlig.

Resultatfunktion:	*Objektfunktion:*
1. $\frac{\alpha}{m^2-\alpha^2}$	$-\frac{\pi \cos\alpha\left(\pi - \frac{\pi}{l}x\right)}{l \sin\alpha\pi}$,
2. $\frac{m^2+\alpha^2}{(m^2-\alpha^2)^2}$	$-\frac{\pi^2 x \sin\alpha\left(\pi - \frac{\pi}{l}x\right)}{l^2 \sin\alpha\pi} - \frac{\pi^2 \cos\alpha\frac{\pi}{l}x}{l \sin^2\alpha\pi}$,
3. $\frac{3m^2\alpha+\alpha^3}{(m^2-\alpha^2)^3}$	$\frac{\pi^3 x^2 \cos\alpha\left(\pi - \frac{\pi}{l}x\right)}{2 l^3 \sin\alpha\pi} + \frac{\pi^3 x \cos\alpha\frac{\pi}{l}x}{l^2 \sin\alpha\pi} + \frac{\pi^3 \sin\alpha\frac{\pi}{l}x}{l \sin^2\alpha\pi} + \frac{\pi^3 \cos\alpha\left(\pi + \frac{\pi}{l}x\right)}{l \sin^3\alpha\pi}$,
. . . .	
4. $\frac{\alpha(-1)^m}{m^2-\alpha^2}$	$-\frac{\pi \cos\alpha\frac{\pi}{l}x}{l \sin\alpha\pi}$,
5. $\frac{(-1)^m(m^2+\alpha^2)}{(m^2-\alpha^2)^2}$	$\frac{\pi^2 x \sin\alpha\frac{\pi}{l}x}{l^2 \sin\alpha\pi} + \frac{\pi^2 \operatorname{cotg}\alpha\pi \cos\alpha\frac{\pi}{l}x}{l \sin\alpha\pi}$;
. . . .	

α ganzzahlig.

Resultatfunktion: *Objektfunktion:*

6. $$\left.\begin{aligned} &\frac{l\,\alpha\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi\,(m^2-\alpha^2)} && \text{für} \quad m \neq \alpha \\ &0 && \text{für} \quad m = \alpha \end{aligned}\right\} \qquad \sin \alpha \frac{\pi}{l}\,x,$$

7. $$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha\,l^2\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi\,(m^2-\alpha^2)} && \text{für} \quad m \neq \alpha \\ &-\frac{l^2}{4\,\alpha\,\pi} && \text{für} \quad m = \alpha \end{aligned}\right\} \qquad x \sin \alpha \frac{\pi}{l}\,x,$$

8. $$\left.\begin{aligned} &\frac{2\,\alpha^2\,l^2\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)^2} + \frac{l^2\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)} && \text{für} \quad m \neq \alpha \\ &\frac{l^2}{4}\left(\frac{l^2}{2} \ \text{für} \ \alpha = 0\right) && \text{für} \quad m = \alpha \end{aligned}\right\} \qquad x \cos \alpha \frac{\pi}{l}\,x,$$

9. $$\left.\begin{aligned} &\frac{l^3\,\alpha\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi\,(m^2-\alpha^2)} + \frac{2\,l^3\,\alpha\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^3\,(m^2-\alpha^2)^2} - \frac{8\,m^2\,\alpha\,l^2\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^3\,(m^2-\alpha^2)^3} \\ & && \text{für} \quad m \neq \alpha \\ &-\frac{l^3}{4\,\alpha\,\pi} && \text{für} \quad m = \alpha \end{aligned}\right\} \ x^2 \sin \alpha \frac{\pi}{l}\,x,$$

10. $$\left.\begin{aligned} &\frac{2\,l^3\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)} - \frac{4\,\alpha^2\,l^3\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)^2} && \text{für} \quad m \neq \alpha \\ &\frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{4\,\alpha^2\,\pi^2}\left(\frac{l^3}{3} \ \text{bei} \ \alpha = 0\right) && \text{für} \quad m = \alpha \end{aligned}\right\} \ x^2 \cos \alpha \frac{\pi}{l}\,x,$$

11. $$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha\,l^4\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi\,(m^2-\alpha^2)}\left(1 + \frac{3\,!}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)} - \frac{4\,!\,m^2}{\pi^3\,(m^2-\alpha^2)^3}\right) && \text{für} \quad m \neq \alpha \\ &-\frac{l^4}{4\,\alpha\,\pi} - \frac{l^4\,3\,!}{16\,\alpha^3\,\pi^3} && \text{für} \quad m = \alpha \end{aligned}\right\} \ x^3 \sin \alpha \frac{\pi}{l}\,x,$$

12. $$\left.\begin{aligned} &\frac{3\,l^4\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)}\left(1 + \frac{2\,\alpha^2}{m^2-\alpha^2}\right) \\ &\quad - \frac{6\,l^4\,[(-1)]^{m+\alpha}-1]}{\pi^4\,(m^2-\alpha^2)^2}\left(1 + \frac{8\,m^2\,\alpha^2}{(m^2-\alpha^2)^2}\right) && \text{für} \quad m \neq \alpha \\ &\frac{l^4}{8} + \frac{6\,l^4}{16\,\alpha^2\,\pi^2}\left(\frac{l^4}{4} \ \text{bei} \ \alpha = 0\right) && \text{für} \quad m = \alpha \end{aligned}\right\} \ x^3 \cos \alpha \frac{\pi}{l}\,x.$$

. . . .

Rekursionsformeln:

$$\mathfrak{C}\left\{x^n \cos \alpha \frac{\pi}{l}\,x\right\} = \frac{n\,l^{n+1}\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)} + \frac{2\,n\,\alpha\,l\,\mathfrak{C}\left\{x^{n-1} \sin \alpha \frac{\pi}{l}\,x\right\}}{\pi\,(m^2-\alpha^2)} - \frac{n\,!\,l^2\,\mathfrak{C}\left\{x^{n-2} \cos \alpha \frac{\pi}{l}\,x\right\}}{(n-2)\,!\,\pi^2\,(m^2-\alpha^2)},$$

$$\mathfrak{C}\left\{x^n \sin \alpha \frac{\pi}{l}\,x\right\} = \frac{\alpha\,l^{n+1}\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi\,(m^2-\alpha^2)} - \frac{2\,n\,\alpha\,l\,\mathfrak{C}\left\{x^{n-1} \cos \alpha \frac{\pi}{l}\,x\right\}}{\pi\,(m^2-\alpha^2)} - \frac{n\,!\,l^2\,\mathfrak{C}\left\{x^{n-2} \sin \alpha \frac{\pi}{l}\,x\right\}}{(n-2)\,!\,\pi\,(m^2-\alpha^2)}.$$

Für $m = \alpha$ muß jeweils auf die Integraldefinition des Fourier-Koeffizienten zurückgegriffen werden.

Durch Spezialisierung ($\alpha = 0$) gewinnt man aus obigen Formeln die beiden weiteren:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{C}\{x^{2k}\} &= l^{2k+1}(-1)^m \sum_{r=1}^{k} \frac{(-1)^{r+1}(2k)!}{(2k-2r+1)!\,(\pi m)^{2r}}, \\
\mathfrak{C}\{x^{2k+1}\} &= l^{2k+2}(-1)^m \sum_{r=1}^{k-1} \frac{(-1)^{r+1}(2k+1)!}{(2k-2r)!\,(\pi m)^{2r+1}} \\
&\qquad + \frac{l^{2k+2}(2k+1)!\,[(-1)^m-1]}{(\pi m)^{2k+2}}
\end{aligned}\right\} k = 0, 1, \ldots$$

Untersucht man umgekehrt, was den Potenzen $\left(\frac{1}{\pi m}\right)^n$ oder $\left(\frac{(-1)^m}{\pi m}\right)^n$ im Objektbereich entspricht, so erhält man komplizierte Polynome; dagegen entsprechen der Summe $\left(\frac{1+(-1)^m}{\pi m}\right)^n$ einfachere Objektfunktionen, nämlich im wesentlichen die Bernoullischen *Polynome*, jedoch in etwas verallgemeinerter Gestalt. Diese *verallgemeinerten* Bernoullischen *Polynome* $B_n(x, l)$ entspringen aus der erzeugenden Funktion:

$$\psi(x, l; t) = \frac{t\,e^{xt}}{e^{lt}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x, l)}{k!}\, t^k$$

und haben die Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
B_n(x+l, l) - B_n(x, l) &= n l x^{n-1}, \\
B_n'(x, l) &= n\,B_{n-1}(x, l), \\
B_n(l-x, l) &= (-1)^n B_n(x, l), \\
B_n(kx, l) &= k^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} B_n\left(x + \frac{r}{k}, l\right).
\end{aligned}$$

Zu ihrer Berechnung dient die Taylorentwicklung:

$$B_n(x, l) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_{n-r}\, l^{n-r} x^r,$$

worin die B_{n-r} die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen sind; hieraus erkennt man übrigens, daß

$$\begin{aligned}
B_n(x, l) &= l^n B_n\left(\frac{x}{l}\right), \\
B_n(x, 1) &= B_n(x)
\end{aligned}$$

ist, wo die $B_n(x)$ die gewöhnlichen Bernoullischen Polynome bedeuten.

Ihre cos-Transformierte für das Intervall $0 \leqq x \leqq l$ erhält man, wenn $n = 2k$ ist, auf folgendem Wege: Bezeichnet $F^{(-n)}(x)$ das n-fach iterierte Integral von $F(x)$, so liefert wiederholte partielle Integration folgende Erweiterung des Satzes 1 auf S. 388:

$$\mathfrak{C}\{F^{(-2k)}(x)\} = \frac{(-1)^m F^{(-2k+1)}(l)}{m^2 \frac{\pi^2}{l^2}} - \frac{(-1)^m F^{(-2k+3)}(l)}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^2}$$

$$+ - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{(-1)^m F^{(-1)}(l)}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^k} + (-1)^k \frac{\mathfrak{C}\{F\}}{\left(m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)^k}.$$

Setzen wir hierin $F(x) = B_2(x, l)$, so ist $F^{(-2k+2)}(x) = \frac{B_{2k}(x, l)}{(2k)!}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und $B_{2k+1}(l, l) = 0$. Aus

$$\mathfrak{C}\{B_2(x, l)\} = \begin{cases} \frac{l^3[(-1)^m + 1]}{2(\pi m)^2} & \text{für} \quad m > 0 \\ 0 & \text{für} \quad m = 0 \end{cases}$$

folgt demnach:

$$\mathfrak{C}\{B_{2k}(x, l)\} = \frac{l^{2k+1}(-1)^{k+1}(2k)!\,[(-1)^m + 1]}{2(\pi m)^{2k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

diese Formel ist übrigens auch noch für $k = 0$ richtig. Die Umkehrung

$$B_{2k}(x, l) = (-1)^{k+1} l^{2k} (2k)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m + 1}{(\pi m)^{2k}} \cos m \frac{\pi}{l} x$$

$$= 2(-1)^{k+1} l^{2k} (2k)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu \frac{\pi}{l} x}{(2\pi\nu)^{2k}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

konvergiert gleichmäßig. Für $l = 1$ ist diese Reihe nichts Neues[10]).

Tabelle II (sin-Transformation).

α nicht ganzzahlig.

Resultatfunktion: *Objektfunktion:*

1. $\frac{m}{m^2 - \alpha^2}$ $\qquad \frac{\pi \sin \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x\right)}{l \sin \alpha \pi}$,

2. $\frac{2 m \alpha}{(m^2 - \alpha^2)^2}$ $\qquad -\frac{\pi^2 x \cos \alpha \left(\pi - \frac{\pi}{l} x\right)}{l^2 \sin \alpha \pi} - \frac{\pi^2 \sin \alpha \frac{\pi}{l} x}{l \sin^2 \alpha \pi}$,

[10]) Vgl. Courant-Hilbert, Meth. der Math. Physik, Berlin 1924, S. 85—88.

Resultatfunktion: *Objektfunktion:*

$$3.\quad \frac{3\,m\,\alpha^2+m^3}{(m^2-\alpha^2)^3} \qquad -\frac{\pi^2 x^2 \sin\alpha\left(\pi-\frac{\pi}{l}\,x\right)}{2\,l^3\sin\alpha\pi}+\frac{\pi^3 x\sin\alpha\frac{\pi}{l}\,x}{l^3\sin\alpha\pi}+\frac{\pi^3\cos\alpha\frac{\pi}{l}\,x}{l\sin^2\alpha\pi}+\frac{\pi^3\sin\alpha\left(\pi+\frac{\pi}{l}\,x\right)}{l\sin^3\alpha\pi},$$

. . . .

$$4.\quad \frac{m\,(-1)^m}{m^2-\alpha^2} \qquad -\frac{\pi\sin\alpha\frac{\pi}{l}\,x}{l\sin\alpha\pi},$$

$$5.\quad \frac{2\,m\,\alpha\,(-1)^m}{(m^2-\alpha^2)^2} \qquad -\frac{\pi^2 x\cos\alpha\frac{\pi}{l}\,x}{l^2\sin\alpha\pi}+\frac{\pi^2\operatorname{cotg}\alpha\pi\sin\alpha\frac{\pi}{l}\,x}{l\sin\alpha\pi}.$$

. . . .

α ganzzahlig.

Resultatfunktion: *Objektfunktion:*

$$6.\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{l\,m\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi\,(\alpha^2-m^2)}\\[2mm] 0 \text{ für } m=\alpha\end{array}\right\} \qquad \cos\alpha\frac{\pi}{l}\,x,$$

$$7.\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{l^2\,m\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi\,(\alpha^2-m^2)}\\[2mm] -\dfrac{l^2}{4\,\alpha\pi} \text{ für } m=\alpha\end{array}\right\} \qquad x\cos\alpha\frac{\pi}{l}\,x,$$

$$8.\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{2\,\alpha\,m\,l^2\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^2\,(m^2-\alpha^2)^2}\\[2mm] \dfrac{l^2}{4} \text{ für } m=\alpha\end{array}\right\} \qquad x\sin\alpha\frac{\pi}{l}\,x,$$

$$9.\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{m\,l^3\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi\,(\alpha^2-m^2)}+\dfrac{2\,m\,l^3\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^3\,(\alpha^2-m^2)^2}-\dfrac{8\,\alpha^2\,m\,l^2\,[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^3\,(\alpha^2-m^2)^3}\\[2mm] -\dfrac{l^3}{4\,\alpha\pi} \text{ für } m=\alpha\end{array}\right\} \qquad x^2\cos\alpha\frac{\pi}{l}\,x,$$

$$10.\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{4\,\alpha\,m\,l^3\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi^2\,(\alpha^2-m^2)^2}\\[2mm] \dfrac{l^3}{6}-\dfrac{l^3}{4\,\alpha^2\pi^2} \text{ für } m=\alpha\end{array}\right\} \qquad x^2\sin\alpha\frac{\pi}{l}\,x,$$

$$11.\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{m\,l^4\,(-1)^{m+\alpha}}{\pi\,(\alpha^2-m^2)}\left(1+\dfrac{3!}{\pi^2\,(\alpha^2-m^2)}-\dfrac{\alpha^2\,4!}{\pi^2\,(\alpha^2-m^2)^2}\right)\\[2mm] -\dfrac{l^4}{4\,\alpha\pi}-\dfrac{l^4\,3!}{16\,\alpha^3\pi^3} \text{ für } m=\alpha\end{array}\right\} \qquad x^3\cos\alpha\frac{\pi}{l}\,x,$$

Resultatfunktion:	*Objektfunktion:*
12. $\frac{6\alpha m l^4(-1)^{m+\alpha}}{(\alpha^2-m^2)^2}+\frac{12\alpha m l^3[(-1)^{m+\alpha}-1]}{\pi^3(\alpha^2-m^2)^3}\left(\frac{l}{\pi}+1-\frac{3\alpha^2}{\pi(\alpha^2-m^2)}\right)$ $\frac{l^4}{8}-\frac{l^4 3!}{16\alpha^2\pi^2}$ für $m=\alpha$	$x^3\sin\alpha\frac{\pi}{l}x.$

. . . .

Rekursionsformeln:

$$\mathfrak{S}\left\{x^n\sin\alpha\frac{\pi}{l}x\right\}=\frac{2nl\alpha\,\mathfrak{S}\left\{x^{n-1}\cos\alpha\frac{\pi}{l}x\right\}}{\pi(\alpha^2-m^2)}+\frac{n!\,l^2\,\mathfrak{S}\left\{x^{n-2}\sin\alpha\frac{\pi}{l}x\right\}}{(n-2)!\,\pi^2(\alpha^2-m^2)},$$

$$\mathfrak{S}\left\{x^n\cos\alpha\frac{\pi}{l}x\right\}$$

$$=\frac{l^{n+1}(-1)^{m+\alpha}m}{\pi(\alpha^2-m^2)}-\frac{2nl\alpha\,\mathfrak{S}\left\{x^{n-1}\sin\alpha\frac{\pi}{l}x\right\}}{\pi(\alpha^2-m^2)}+\frac{n!\,l^2\,\mathfrak{S}\left\{x^{n-2}\cos\alpha\frac{\pi}{l}x\right\}}{(n-2)!\,\pi^2(\alpha^2-m^2)}.$$

Für $m=\alpha$ vgl. die Bemerkung in Tabelle I.

Potenzen im einen werden wieder durch Polynome im anderen Bereich abgebildet:

$$\mathfrak{S}\{x^{2k}\}=l^{2k+1}(-1)^m\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(-1)^{r+1}(2k)!}{(2k-2r)!(\pi m)^{2r+1}}+\frac{l^{2k+1}(-1)^{k+1}(2k)![(-1)^m+1]}{(\pi m)^{2k+1}},$$

$$\mathfrak{S}\{x^{2k+1}\}=l^{2k+2}(-1)^m\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^{r+1}(2k+1)!}{(2k-2r+1)!(\pi m)^{2r+1}},$$

$$\mathfrak{S}\{B_{2k+1}(x,l)\}=\frac{l^{2k+2}(-1)^{k+1}(2k+1)!\,[(-1)^m+1]}{2(\pi m)^{2k+1}}.$$

($k=0,1,\ldots$; in der ersten Formel fällt für $k=0$ die Summe weg.) Die letzte Formel ergibt sich (vgl. die Ableitung in Tabelle I) aus

$$\mathfrak{S}\{F^{(-2k)}(x)\}=-\frac{(-1)^m F^{(-2k)}(l)}{m\frac{\pi}{l}}+\frac{(-1)^m F^{(-2k+2)}(l)}{\left(m\frac{\pi}{l}\right)^3}-+\cdots$$

$$+(-1)^k\frac{(-1)^m F^{(-2)}(l)}{\left(m\frac{\pi}{l}\right)^{2k-1}}+(-1)^k\frac{\mathfrak{S}\{F\}}{\left(m\frac{\pi}{l}\right)^{2k}},$$

wenn man $F=B_1(x,l)\ \left(=x-\frac{l}{2}\right)$ und $F^{(-2k)}=\frac{B_{2k+1}(x,l)}{(2k+1)!}$ setzt; wegen $B_{2k+1}(l,l)=0$ ($k=1,2,\ldots$) und

$$\mathfrak{S}\{B_1(x,l)\}=-\frac{l^2[(-1)^m+1]}{2\cdot\pi m}$$

erhalten wir unsere Formel, deren Umkehrung lautet:

$$B_{2k+1}(x, l) = l^{2k+1}(-1)^{k+1}(2k+1)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m + 1}{(\pi m)^{2k+1}} \sin m \frac{\pi}{l} x$$

$$= 2 l^{2k+1}(-1)^{k+1}(2k+1)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu \frac{\pi}{l} x}{(2\pi\nu)^{2k+1}}$$

$$(k = 0, 1, \ldots).$$

Die Reihe konvergiert für $k = 1, 2, \ldots$ gleichmäßig; für $k = 0$ kann sie es nicht, da die (ungerade und periodisch fortgesetzte) Funktion $B_1(x, l)$ an den Stellen μl ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) Sprünge aufweist.

Lebenslauf

Am 20. September 1913 wurde ich in Berlin-Karlshorst als Sohn des Kaufmanns Karl Knieß und seiner Ehefrau Josefine, geb. Strickler, geboren. Nach vierjährigem Volksschul- und siebenjährigem Mittelschulbesuch bestand ich Ostern 1931 am Bertholdsgymnasium in Freiburg die Reifeprüfung. Anschließend studierte ich an der Freiburger Universität neun Semester lang Mathematik und Physik und bestand im Herbst 1935 die Staatsprüfung.

H. Knieß.