СМЕРТНОСТЬ И ДОЛГОВѢЧНОСТЬ

МУЖСКАГО ПРАВОСЛАВНАГО НАСЕЛЕНІЯ

ЕВРОПЕЙСКОЙ РОССІИ.

Владиславъ Борткевичъ.

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 27 февраля 1890 г.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ LXIII-МУ ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМПЕР. АКАДЕМІИ НАУКЪ.
№ 8.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ. 1890.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИСІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

И. Глазунова, въ С. П. Б. *Эггерса и Комп.*, въ С. П. Б.
И. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 75 коп.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
С.-Петербургъ, Сентябрь 1890 г.
Непремѣнный Секретарь, Академикъ *А. Штраухъ*.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

Предметъ формальной теоріи населенія 1

Аналитическое выраженіе совокупностей родившихся, живущихъ и умершихъ 2

О величинахъ, служащихъ для измѣренія смертности 7

Задача измѣренія смертности 9

О таблицѣ смертности 14

Способы приближеннаго вычисленія величинъ Q 16

О біометрическомъ значеніи нѣкоторыхъ статистическихъ величинъ 24

Построеніе таблицы смертности для Россіи.

О возможныхъ способахъ построенія таблицы: о способѣ г. Андреева, о переходѣ отъ совокупностей вида M_3 къ совокупностямъ вида M_1 46

Объ Ангальтскомъ способѣ. Примѣры 59

О статистическомъ матеріалѣ, служащемъ основаніемъ таблицы:

I. Умершіе: способъ измѣненія повозрастнаго распредѣленія умершихъ; пополненіе чиселъ умершихъ 64

II. Родившіеся 74

Вычисленіе ряда значеній r и другихъ показаній таблицы смертности 77

Объясненіе къ таблицамъ народонаселенія 85

Повѣрка показаній таблицы смертности посредствомъ сопоставленія ихъ съ числами лицъ призывнаго возраста 86

Объясненіе къ таблицамъ смертности иностранныхъ государствъ 87

Таблицы 89

СМЕРТНОСТЬ И ДОЛГОВѢЧНОСТЬ МУЖСКАГО ПРАВОСЛАВНАГО НАСЕЛЕНІЯ ЕВРОПЕЙСКОЙ РОССІИ.

„Man bediene sich nur der Hilfsmittel, die vorhanden sind, so wird die Statistik und besonders die der Sterblichkeit sehr bald nicht mehr in das Reich der Halbwahrheiten gehören und um sich mit den physikalischen Wissenschaften zu vergleichen, wird ihr vielleicht die Sicherheit der thatsächlichen Erhebungen, nicht aber die der Verarbeitung abgehen".
Knapp, Sterblichkeit in Sachsen (1869) стр. 111.

Искусство измѣренія смертности или, что все равно, жизненности (біометрія) *) имѣетъ своимъ основаніемъ т. н. формальную

*) Главнѣйшія сочиненія по теоріи измѣренія смертности по даннымъ статистики населенія слѣдующія:

Farr. On the Construction of Life-Tables въ «Philosophical Transactions» за 1859 годъ.

Becker. Zur Theorie der Sterbetafeln für ganze Bevölkerungen въ «Statistische Nachrichten über das Grossherzogthum Oldenburg 1867. 1 Theil».

Knapp. Ueber die Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik 1868.

Zeuner. Abhandlungen aus der mathematischen Statistik 1869.

Knapp. Sterblichkeit in Sachsen. 1869.

Андреевъ. О таблицахъ смертности. 1871.

Knapp. Theorie des Bevölkerungswechsels. 1874.

Becker. Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen 1875 (въ трудахъ Междунар. Стат. Конгресса въ Будапештѣ.)

Lewin. Rapport snr la détermination et le recueil des données relatives aux tables de mortalité (тамъ-же).

Lexis. Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. 1875.

теорію населенія, которая изучаетъ измѣненія, происходящія въ составѣ любой человѣческой группы подъ вліяніемъ естественныхъ фактовъ рожденія и смерти. Каждый человѣкъ рождается, живетъ и, спустя нѣкоторый промежутокъ времени, умираетъ. Поскольку эти факты являются всеобщими, и формальная теорія населенія, не заимствующая изъ опыта никакихъ иныхъ, кромѣ указанныхъ данныхъ, представляется ученіемъ чисто отвлеченнаго и общаго характера. Задача ея заключается въ опредѣленіи математическихъ зависимостей между совокупностями родившихся, живущихъ и умершихъ. Теорія эта, впервые изложенная систематически Кнаппомъ и до него отчасти Беккеромъ, разработана съ желаемой степенью полноты и всеобщности Цейнеромъ, Лексисомъ и Левиномъ. Истины теоріи населенія у названныхъ авторовъ получаютъ различное выраженіе: Беккеръ пользуется отчасти словесной, отчасти символической формой изложенія; Кнаппъ, въ первомъ своемъ трудѣ, заимствуетъ свои обозначенія изъ высшаго анализа, во второмъ (Sterblichkeit in Sachsen), отдаетъ предпочтеніе словесной формѣ выраженія; Лексисъ изобрѣтаетъ остроумные графическіе пріемы для той-же цѣли. Менѣе удачную и довольно сложную систему знаковъ находимъ у Левина. Наконецъ, Цейнеръ, по нашему мнѣнію, превосходитъ всѣхъ общностью и изяществомъ, какъ своихъ стереометричискихъ построеній, такъ и аналитическихъ формулъ. Впрочемъ, у Цейнера всѣ предложенія доказываются геометрически, а аналитическая формула только дополняетъ полученные такимъ путемъ результаты. Здѣсь-же мы дадимъ чисто аналитическое поясненіе различія между главными родами совокупностей живущихъ и умершихъ и выведемъ нѣкоторыя существующія между тѣми и другими зависимости.

Рожденія и смерти происходятъ во времени. Условимся отсчитывать время отъ какого-нибудь начальнаго произвольно-взятаго момента, такъ что перемѣнная t будетъ измѣрять длину промежутка времени, протекшаго отъ начальнаго момента до момента рожденія. Пусть, съ другой стороны, τ означаетъ моментъ переписи или смерти, т. е. число единицъ времени, протекшихъ

отъ начальнаго момента до момента производства переписи или до момента наступленія смерти. Означивъ черезъ x возрастъ лица, т. е. число единицъ времени, протекшихъ отъ рожденія до момента смерти или переписи, будемъ имѣть: $t + x = \tau$. Пусть функція $V(x,t)$ изображаетъ число всѣхъ тѣхъ лицъ, которыя достигли или достигнутъ возраста x изъ родившихся въ промежутокъ времени отъ o (начальный моментъ) до t. Очевидно, что $V(o, t)$ есть число родившихся (достигшихъ возраста o) въ періодъ отъ o до t. $V(x, t)$, при x постоянномъ, измѣняется въ зависимости отъ t, такъ что всякому приращенію Δt независимой перемѣнной t соотвѣтствуетъ приращеніе $\Delta V(x, t) = V(x, t + \Delta t) - V(x, t)$. Ясно, что $\Delta V(x, t)$ есть число лицъ, дожившихъ до возраста x изъ родившихся въ періодъ отъ t до $t + \Delta t$, т. е. въ промежутокъ времени длины Δt. Частное отъ дѣленіе $\Delta V(x,t)$ на Δt, въ предположеніи непрерывности функціи V, съ приближеніемъ Δt къ o, стремится къ нѣкоторому конечному предѣлу $\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = U(x, t)$. Эту послѣднюю функцію условимся называть *плотностію переживаній* (Ueberlebensdichtigkeit) возраста x для времени рожденія t. Если время рожденія есть t, то время исполненія возраста x будетъ $t+x$; слѣд. $U(x, t)$ есть плотность переживаній возраста x въ моментъ времени $t + x$. Положивъ $x = o$, получимъ $U(o, t)$, т. е. *плотность рожденій* (Geburtendichtigkeit) для времени t. Плотность переживаній представляется, такимъ образомъ, подъ видомъ частнаго отъ дѣленія числа пережившихъ извѣстный возрастъ втеченіе безконечно-малаго промежутка времени на этотъ промежутокъ; слѣд., обратно, число пережившихъ извѣстный возрастъ втеченіе безконечно-малаго промежутка времени изобразится произведеніемъ изъ плотности на этотъ промежутокъ: будетъ $U(x, t)\,dt$. Число же пережившихъ возрастъ x изъ родившихся въ конечныхъ предѣлахъ времени $t_1 - t_2$, гдѣ $t_2 > t_1$, напишется такъ: $\int_{t_1}^{t_2} U(x,t)\,dt$. Это есть такъ наз. *совокупность живущихъ перваго рода*; обозначимъ ее черезъ P_1. Лица, ее составляющія, относятся къ различнымъ

моментамъ рожденія, заключеннымъ въ предѣлахъ времени t_1—t_2, и всѣ достигли возраста x. Этотъ возрастъ они переживали втеченіе періода времени отъ $t_1 + x$ до $t_2 + x$. Здѣсь x постоянно, а $\tau = t + x$ измѣняется въ указанныхъ предѣлахъ. Этими признаками P_1 отличается отъ *совокупности живущихъ втораго рода*, P_2, которая получается изъ первой черезъ замѣну x на $\tau - t$, гдѣ τ полагается постояннымъ, такъ что x принимаетъ всѣ послѣдовательныя значенія отъ $\tau - t_2$ до $\tau - t_1$; будетъ: $P_2 = \int_{t_1}^{t_2} U(\tau - t, t)\, dt$. P_2 есть совокупность живущихъ въ моментъ времени τ изъ родившихся въ промежутокъ $t_1 - t_2$, или, что все равно, совокупность живущихъ въ моментъ τ въ предѣлахъ возраста отъ $\tau - t_2$ до $\tau - t_1$. Еслибы мы пожелали изобразить число лицъ находящихся въ моментъ τ въ предѣлахъ возраста x_1 и x_2, гдѣ $x_2 > x_1$, то пришлось бы въ выраженіи для P_2 замѣнить предѣлы интегрированія по t чрезъ $\tau - x_2$ (вмѣсто t_1) и $\tau - x_1$ (вмѣсто t_2); было-бы $\int_{\tau - x_2}^{\tau - x_1} U(\tau - t, t)\, dt$. Въ этомъ послѣднемъ выраженіи можно сдѣлать замѣну назависимой перемѣнной, воспользовавшись равенствомъ $\tau = t + x$, откуда $t = \tau - x$ и $dt = -dx$. Получится

$$\int_{\tau - x_2}^{\tau - x_1} U(\tau - t, t)\, dt = -\int_{x_2}^{x_1} U(x, \tau - x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} U(x, \tau - x)\, dx.$$

Совокупность родившихся представляется частнымъ случаемъ совокупности живущихъ перваго рода; нужно только положить $x = o$. $\int_{t_1}^{t_2} U(o, t)\, dt$ есть число родившихся въ промежутокъ времени отъ t_1 до t_2.

Для выраженія *совокупностей умершихъ* нѣтъ надобности вводить новыхъ функцій. Если $U(x, t)\, dt$ есть число дожившихъ до возраста x изъ родившихся отъ t до $t + dt$, то число дожив-

шихъ до возраста $x+dx$ изъ тѣхъ-же родившихся будетъ $U(x+dx, t)\,dt$, а слѣд. разность $U(x, t)\,dt - U(x+dx, t)\,dt = -\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dt$ изобразитъ число умершихъ въ возрастѣ отъ x до $x+dx$ изъ родившихся отъ t до $t+dt$. Любая конечная совокупность умершихъ представится подъ видомъ двукратнаго интеграла $-\iint \frac{\partial\, U(x, t)}{\partial x}\,dx\,dt$. Будутъ получаться совокупности разнаго рода, въ зависимости отъ того, по какимъ перемѣннымъ будетъ производиться интегрированіе:

1) Въ *совокупности перваго рода*, M_1, даны предѣлы $\int$-ванія по t и по x, то есть M_1 есть число умершихъ въ возрастѣ отъ x_1 до x_2 изъ родившихся въ періодъ $t_1 - t_2$.

$$M_1 = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\,dx\,dt = \int_{t_1}^{t_2} U(x_1, t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} U(x_2, t)\,dt,$$

то есть совокупность умершихъ перваго рода можетъ быть выражена разностью двухъ совокупностей живущихъ перваго рода.

2) Въ *совокупности втораго рода*, M_2, даны предѣлы $\int$-ованія по t и по τ, то есть M_2 есть число умершихъ въ предѣлахъ времени отъ τ_1 до τ_2 изъ родившихся въ періодъ $t_1 - t_2$.

$$M_2 = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\tau_1 - t}^{\tau_2 - t} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\,dx\,dt = \int_{t_1}^{t_2} U(\tau_1 - t, t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} U(\tau_2 - t, t)\,dt,$$

то есть совокупность умершихъ втораго рода можетъ быть выражена разностью двухъ совокупностей живущихъ втораго рода.

3) Въ *совокупности третьяго рода*, M_3, даны предѣлы $\int$-ованія по x и по τ, то есть M_3 есть число умершихъ въ предѣлахъ возраста отъ x_1 до x_2, въ періодъ времени $\tau_1 - \tau_2$.

$$M_3 = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_1 - x}^{\tau_2 - x} \frac{\partial\, U(x, t)}{\partial x}\,dt\,dx.$$

Чтобъ представить и эту совокупность умершихъ подъ видомъ

алгебраической суммы нѣсколькихъ совокупностей живущихъ, докажемъ слѣдующее равенство:

$$S=\int_a^b\int_{\alpha+F(x)}^{\beta+F(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy\,dx=\int_{\alpha+F(b)}^{\beta+F(b)}f(b,y)\,dy-\int_{\alpha+F(a)}^{\beta+F(a)}f(a,y)\,dy$$

$$-\int_a^b\frac{dF}{dx}f(x,\beta+F(x))\,dx+\int_a^b\frac{dF}{dx}f(x,\alpha+F(x))\,dx\ldots(A).$$

Въ первоначальномъ выраженіи для S, $\alpha+F(x)$ и $\beta+F(x)$ суть предѣлы $\int$-ванія по y, a и b предѣлы $\int$-ванія по x; f и F — какія-угодно функціи. — Въ цѣляхъ преобразованія S, вводимъ новую перемѣнную $z=y-F(x)$; $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{dF}{dx}$. Пусть $f(x,y)=$ $=\varphi(x,z)$. Тогда:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dF}{dx}.$$

Слѣдов. $$S=\int_a^b\int_\alpha^\beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dF}{dx}\right)dz\,dx=\int_a^b\int_\alpha^\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}dz\,dx-\int_a^b\int_\alpha^\beta\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dF}{dx}dz\,dx$$

или $$S=\int_\alpha^\beta\{\varphi(b,z)-\varphi(a,z)\}\,dz-\int_a^b\frac{dF}{dx}\{\varphi(x,\beta)-\varphi(x,\alpha)\}\,dx.$$

Замѣнивъ въ послѣднемъ выраженіи $\varphi(x,z)$ черезъ $f(x,y)$, получимъ равенство (A). Въ силу-же этого равенства M_3 можетъ быть разложена такимъ образомъ:

$$M_3=\int_{\tau_1-x_1}^{\tau_2-x_1}U(x_1,t)\,dt-\int_{\tau_1-x_2}^{\tau_2-x_2}U(x_2,t)\,dt+\int_{x_1}^{x_2}U(x,\tau_1-x)\,dx-\int_{x_1}^{x_2}U(x,\tau_2-x)\,dx,$$

то есть совокупность умершихъ третьяго рода разбивается на сумму двухъ разностей, изъ которыхъ одна есть разность между двумя совокупностями живущихъ перваго рода, а другая — между двумя совокупностями живущихъ втораго рода. — Не остана-

вливаясь на разсмотрѣніи такъ наз. второстепенныхъ совокупностей (Nebengesammtheiten) живущихъ и умершихъ, перейду къ вопросу объ измѣреніи смертности и прежде всего дамъ понятіе о тѣхъ статистическихъ величинахъ, которыя служатъ для этой цѣли. Основная величина есть вѣроятность для новорожденнаго дожить до возраста x. Условимся обозначать ее черезъ $f(x)$. Иначе $f(x)$ можетъ быть опредѣлена, какъ число доживающихъ до возраста x изъ единицы родившихся. Очевидно, что $f(x)$ есть убывающая функція отъ x, слѣдовательно $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) < 0$. Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что $f(0) = 1$. Назвавъ черезъ ω предѣльный возрастъ человѣческой жизни, будемъ имѣть: $f(\omega) = 0$. Число умирающихъ въ возрастѣ отъ x до $x+dx$ изъ единицы родившихся будетъ $-f'(x)\,dx$, а число умирающихъ изъ единицы родившихся въ конечныхъ предѣлахъ возраста x_1 и x_2 изобразится такъ: $-\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_2)$. Послѣднее выраженіе представляетъ собою вѣроятность для новорожденнаго умереть въ предѣлахъ возраста x_1 и x_2. Частное отъ дѣленія величины $-\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx$ на $f(x_1)$ изобразить вѣроятность w для дожившаго до возраста x_1 умереть ранѣе достиженія возртаса x_2; $1-w$ будетъ вѣроятность для дожившаго до возраста x_1 пережить возрастъ x_2. $w = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_1)}$; $1 - w = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$. Число единицъ времени, переживаемыхъ единицей родившихся въ предѣлахъ возраста x_1 и x_2, представится подъ видомъ $Q = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$. Частное отъ дѣленія числа умирающихъ въ предѣлахъ возраста x_1 и x_2 изъ единицы родившихся на число единицъ времени переживаемыхъ единицей родившихся въ тѣхъ же возрастныхъ предѣлахъ называется смертнымъ коэффиціентомъ или коэффиціентомъ смертности въ возрастѣ отъ x_1 до x_2. Смертный коэффиціентъ $c = \frac{-\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}$.

Смертный коэффиціентъ для возраста отъ x до $x+\Delta x$ будетъ $\frac{-\int_x^{x+\Delta x} f'(x)\,dx}{\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx}$. Предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе съ приближеніемъ Δx къ o, есть $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \mu(x)$ и называется силою смертности въ возрастѣ x. Легко видѣть, что сила смертности $\mu(x)$, помноженная на безконечно-малый промежутокъ времени dx, дастъ вѣроятность для лица въ возрастѣ x умереть въ этотъ промежутокъ, т. е. ранѣе достиженія возраста $x+dx$. И дѣйствительно, стоитъ только въ выраженіи для w замѣнить x_1 на x, а x_2 на $x+dx$, и будетъ $w = \frac{-f'(x)\,dx}{f(x)} = \mu(x)\,dx$; отс. $\mu(x) = \frac{w}{dx}$. Такимъ образомъ сила смертности въ возрастѣ x можетъ быть опредѣлена, какъ вѣроятность для лица въ возрастѣ x умереть въ безконечно-малый промежутокъ времени, дѣленная на тотъ-же промежутокъ. Сила смертности въ возрастѣ x есть, иначе говоря, плотность вѣроятности смерти въ возрастѣ x. Обратную величину силы смертности $\frac{1}{\mu(x)}$ принято называть силою жизненности. Если изобразить функцію $f(x)$ кривою, построенною въ прямоугольной системѣ координатъ такъ, что по оси абсциссъ отложены значенія перемѣнной x, а по оси ординатъ значенія $f(x)$, то $\frac{1}{\mu(x)}$ выразится взятою съ обратнымъ знакомъ, то есть всегда съ $+$, длиною подкасательной къ кривой въ точкѣ, соотвѣтствующей абсциссѣ x. Имѣемъ $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \mu(x)$ или $\frac{df}{dx} + \mu(x)\cdot f(x) = o$. Отсюда $f(x) = e^{-\int_0^x \mu(x)dx}$. Такъ выражается аналитически зависимость между силой смертности и числомъ доживающихъ до извѣстнаго возраста изъ единицы родившихся. Вѣроятность $1 - w$ для дожившаго до возраста x_1 пережить возрастъ x_2 представится такъ: $1 - w = e^{-\int_{x_1}^{x_2} \mu(x)\,dx}$.

Время, переживаемое единицей родившихся въ предѣлахъ

возраста отъ x до ω (предѣлъ жизни), есть $q(x) = \int_x^\omega f(x)\,dx$. Частное отъ дѣленія $q(x)$ на $f(x)$, то есть $\frac{q(x)}{f(x)} = \varepsilon(x)$ покажетъ число единицъ времени, которыя остается прожить дожившему до возраста x, или иначе: математическое ожиданіе жизни въ возрастѣ x. Опредѣленіе величины $\varepsilon(x)$, какъ математическаго ожиданія жизни, согласно съ тѣмъ понятіемъ математическаго ожиданія, какое дается въ теоріи вѣроятностей: математическое ожиданіе какой-нибудь величины есть сумма всѣхъ возможныхъ значеній этой величины, помноженныхъ каждое на соотвѣтствующую вѣроятность. Дожившій до какого-нибудь возраста x_1 можетъ умереть въ любомъ возрастѣ x, гдѣ $x_1 < x < \omega$; слѣдовательно остающееся ему число единицъ времени жизни, то есть величина $x - x_1$ приметъ одно изъ значеній въ предѣлахъ отъ $x_1 - x_1 = o$ до $\omega - x_1$. Вѣроятность, соотвѣтствующая какому-нибудь значенію $x - x_1$, очевидно равна вѣроятности для лица въ возрастѣ x_1 умереть въ возрастѣ x, а эта вѣроятность будетъ $-\frac{f'(x)}{f(x_1)}dx$. Отсюда, согласно опредѣленію математическаго ожиданія, $\varepsilon(x_1) = \int_{x_1}^{\omega} -\frac{f'(x)}{f(x_1)}[x - x_1]\,dx = \frac{1}{f(x_1)}\left\{f(x)[x - x_1]\right\}_{\omega}^{x_1}$ $+ \frac{1}{f(x_1)}\int_{x_1}^{\omega} f(x)\,dx$. Первый членъ послѣдняго выраженія $= 0$, т. к.

$$x_1 - x_1 = 0 \text{ и } f(\omega) = 0, \text{ а слѣдов. } \varepsilon(x_1) = \frac{1}{f(x_1)}\int_{x_1}^{\omega} f(x)\,dx.$$

Математическое ожиданіе жизни въ возрастѣ o, то есть при рожденіи, есть $\int_0^\omega f(x)\,dx$ и называется среднею продолжительностію жизни.

Еслибы намъ были извѣстны численныя значенія, которыя $f(x)$ или нѣкоторая функція отъ нея, напримѣръ $\mu(x)$, принимаетъ при всѣхъ послѣдовательныхъ значеніяхъ перемѣнной x въ

извѣстныхъ предѣлахъ, то есть, другими словами, еслибы намъ былъ извѣстенъ видъ функцій $f(x)$ или $\mu(x)$ для этихъ предѣловъ, то мы могли бы рѣшать задачи такого рода: зная видъ функціи $U(o, t)$, то есть зная плотность рожденій за извѣстный періодъ, найти численное значеніе нѣкоторой совокупности живущихъ или умершихъ, или: зная плотность переживаній для извѣстныхъ предѣловъ возраста за опредѣленный періодъ времени, опредѣлить ту или другую совокупность живущихъ, родившихся или умершихъ. И въ самомъ дѣлѣ, пусть $f(x)$ даетъ число доживающихъ до возраста x изъ единицы родившихся въ періодъ времени отъ t_1 до t_2, и требуется найти совокупность дожившихъ до возраста x изъ родившихся въ періодъ $t_1 - t_2$, то есть $P_1 = \int_{t_1}^{t_2} U(x, t)\, dt$. Изъ опредѣленія $f(x)$ слѣдуетъ $U(x, t)\, dt = U(o, t)\, dt \,.\, f(x)$. Отсюда: $P_1 = f(x) \int_{t_1}^{t_2} U(o, t)\, dt$. Другой примѣръ: пусть $\mu(x)$ даетъ силу смертности для промежутка времени, заключеннаго въ предѣлахъ τ_1 и τ_2; тогда любая совокупность умершихъ, относящаяся по времени къ этому періоду, въ силу равенства $-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\, dx\, dt = U(x, t)\, dt \,.\, \mu(x)\, dx$, можетъ быть выражена съ помощью данныхъ: плотности переживанія и силы смертности, а слѣдоватеьно этихъ данныхъ достаточно для опрѣдѣленія искомой совокупности умершихъ. — Въ дѣйствительности ни смертность, ни плотность рожденій и переживаній не задаются въ аналитическихъ функціяхъ, а обыкновенно изъ наблюденія извѣстны лишь нѣкоторыя совокупности родившихся, живущихъ и умершихъ, съ одной стороны, а съ другой — нѣкоторыя частныя значенія какой-нибудь функціи, служащей для измѣренія смертности, при опредѣленныхъ значеніяхъ независимой перемѣнной x. Поэтому, та-же задача, перенесенная, такъ сказать, на реальную почву, представится въ такомъ общемъ видѣ: имѣя, съ одной стороны, одно значеніе или цѣлый рядъ значеній, принимаемыхъ какою-нибудь изъ функцій, измѣряющихъ смертность, при опредѣленныхъ зна-

ченіяхъ независимой перемѣнной x, а съ другой, зная численное значеніе одной или нѣсколькихъ совокупностей живущихъ, родившихся и умершихъ, опредѣлить другую какую-нибуь совокупность живущихъ, родившихся или умершихъ. Въ такомъ видѣ вопросъ не всегда допускаетъ точное рѣшеніе. — Можно поставить задачу, по характеру своему, прямо обратную предыдущей, именно: принять за неизвѣстную смертность, то есть нѣкоторое значеніе той или другой функціи, измѣряющей смертность, при опредѣленномъ значеніи перемѣнной x, а ту совокупность, которая въ предыдущей задачѣ считалась искомой, положить извѣстной. Рѣшеніе подобнаго рода задачъ составляетъ предметъ измѣренія смертности. И эта задача иногда будетъ допускать точный, иногда только приближенный отвѣтъ. Такъ напримѣръ, имѣя, съ одной стороны, совокупность вида P_1 *) $= \int_{t_1}^{t_2} U(x, t)\, dt$, а съ

*) Совокупности вида P_1, то есть числа доживших до опредѣленнаго возраста x изъ родившихся въ промежутокъ t_1—t_2, никогда не даются непосредственно наблюденіемъ. Статистика можетъ производить учетъ только совокупностямъ вида P_2, т. е. живущимъ въ опредѣленный моментъ времени въ тѣхъ или другихъ предѣлахъ возраста. Поэтому умѣстно показать, какъ можно опредѣлять совокупности вида P_1 по тѣмъ величинамъ, которыя непосредственно даются статистикой. Для этого можетъ служить формула разложенія совокупности умершихъ вида M_3 на четыре совокупности живущихъ. Положивъ въ этой формулѣ $x_1 = o$, а $x_2 = x$, получимъ равенство, связывающее пять величинъ, изъ которыхъ четыре могутъ быть даны непосредственно; это будутъ: 1) совокупность умершихъ вида M_3, 2) *двѣ* совокупности живущихъ вида P_2, отличающіяся значеніемъ величины τ, равной въ одной τ_1, а въ другой τ_2, и 3) совокупность родившихся (достигшихъ возраста o). Пятая-же величина представитъ собой именно искомую совокупность вида P_1. Та-же самая величина можетъ быть найдена и инымъ способомъ изъ той-же формулы; слѣдуетъ положить въ ней $x_1 = x$, а $x_2 = \omega$, и тогда одна совокупность вида P_1 изъ входящихъ въ формулу разложенія обратится во o, такъ какъ число доживающихъ до предѣла жизни очевидно равно o. Получится, слѣд., зависимость между 4-мя величинами, изъ которыхъ три будутъ извѣстны, именно M_3 и двѣ совокупности вида P_2, а четвертая и будетъ искомая совокупность P_1. — На эти способы опредѣленія совокупностей живущихъ вида P_1 указалъ Кнаппъ въ соч. „Sterblichkeit in Sachsen" и воспользовался ими для измѣренія смертности, изобрѣтши такимъ образомъ новый методъ составленія таблицы смертности, который онъ назвалъ *Саксонскимъ методомъ*.

другой, совокупность родившихся $\int_{t_1}^{t_2} U(o, t)\, dt$, можно простымъ дѣленіемъ опредѣлить значеніе $f(x)$. Другой примѣръ: зная численное значеніе совокупности $M_3 = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_1 - x}^{\tau_2 - x} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dt\, dx$ и совокупности $P_2 = \int_{x_1}^{x_2} U(x, \tau - x)\, dx$ гдѣ $\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$, можно приближенно найти значеніе $\mu(x)$, соотвѣтствующее значенію $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, при томъ условіи, что разности $\tau_2 - \tau_1$ и $x_2 - x_1$ достаточно малы. Имѣемъ $-\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dx\, dt = U(x, t)\, dt \,.\, \mu(x)\, dx$. Отсюда находимъ

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_1 - x}^{\tau_2 - x} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dt\, dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} U(x, \tau - x)\, d\tau\, dx \cdot \mu(x).$$

Такъ какъ разность $x_2 - x_1$ достаточно мала, то можно предположить, что, въ предѣлахъ x_1 и x_2, $\mu(x)$ измѣняется незначительно: поэтому позволительно вынести за знакъ интеграла значеніе μ, которое оно принимаетъ при $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$, и будетъ

$M_3 = \mu(x_0) \int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} U(x, \tau - x)\, d\tau\, dx$. Съ другой стороны, по причинѣ малости разности $\tau_2 - \tau_1$, позволительно написать

$$M_3 = \mu(x_0) \cdot [\tau_2 - \tau_1] \int_{x_1}^{x_2} U(x, \tau' - x)\, dx, \quad \text{гдѣ} \quad \tau' = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}.$$

Въ результатѣ искомое значеніе силы смертности, соотвѣтствующее возрасту $\frac{x_1 + x_2}{2}$, опредѣлится такъ: $\mu = \frac{M_3}{(\tau_2 - \tau_1) P_2}$. Число подобныхъ задачъ не ограничено, но всегда вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы, сочетавъ извѣстнымъ образомъ нѣкоторую совокупность родившихся съ нѣкоторой совокупностію живущихъ

или умершихъ, или нѣкоторую совокупность живущихъ съ другой совокупностью живущихъ или съ нѣкоторой совокупностію умершихъ, найти частное значеніе $f(x)$ или какой-нибудь функціи отъ $f(x)$, соотвѣтствующее тому или другому значенію независимой перемѣнной x. — При изслѣдованіи смертности обыкновенно не ограничиваются рѣшеніемъ указаннаго рода частныхъ вопросовъ, а задаются цѣлію опредѣлить цѣлый рядъ значеній для той или другой функціи, измѣряющей смертность, которыя соотвѣтствовали бы такому-же ряду значеній независимой перемѣнной x. Такъ, въ первомъ примѣрѣ, именно при опредѣленіи $f(x)$ по совокупности живущихъ перваго рода и совокупности родившихся, изъ которой произошла взятая совокупность живущихъ, рѣшаютъ рядъ частныхъ задачъ напримѣръ для всѣхъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ значеній x, отъ o до ω. При этомъ поступаютъ двоякимъ образомъ: при рѣшеніи каждой частной задачи, или оставляютъ неизмѣнными предѣлы времени рожденія t_1 и t_2 каждой совокупности, или-же полагаютъ постоянными предѣлы времени переживанія каждой совокупностью соотвѣтствующаго возраста, такъ что предѣлы времени рожденія каждый разъ получаются иные, въ зависимости отъ x: низшій предѣлъ $t = \tau_1 - x$, высшій $t = \tau_2 - x$. Ясно, что самый смыслъ показаній полученнаго ряда будетъ неодинаковъ въ обоихъ случаяхъ. Такая-же возможность выбора между тѣмъ и другимъ изъ указанныхъ пріемовъ представляется при нахожденіи ряда значеній и всякой другой функціи, служащей для измѣренія смертности, кромѣ функціи $f(x)$. Выше была указана аналитическая зависимость, существующая между различными величинами, служащими для измѣренія смертности. Этой зависимостію пользуются для того, чтобы изъ полученнаго ряда значеній одной какой-нибудь функціи вывести ряды значеній всѣхъ остальныхъ. Строго говоря, это допустимо только въ томъ изъ двухъ возможныхъ случаевъ, когда при выводѣ первоначальнаго (основнаго) ряда, было соблюдено условіе постоянства предѣловъ времени рожденія, такъ какъ зависимость между различными функціями была вы-

ведена въ томъ предположеніи, что единица родившихся, о которой шла рѣчь, остается всегда одною и той-же. Только при этомъ условіи, можно сказать напримѣръ, что $f(x_1) - f(x_2)$ есть вѣроятность для новорожденнаго умереть въ предѣлахъ возраста x_1 и x_2. Если-же $f(x_1)$ получилось для родившихся въ одинъ какой-нибудь періодъ, а $f(x_2)$ для родившихся въ другой періодъ, то $f(x_1)-f(x_2)$, вообще говоря, не изображаетъ собою вѣроятности умереть въ возрастѣ отъ x_1 до x_2 ни для родившагося въ первый, ни для родившагося во второй періодъ. Для того, чтобъ можно было разсматривать $f(x_1) - f(x_2)$, какъ такую вѣроятность, необходимо и достаточно внести предположеніе о неизмѣнности во времени порядка вымиранія: тогда исчезнетъ различіе между вѣроятностями дожить до того-же возраста для родившихся въ разные періоды, и разность $f(x_1) - f(x_2)$ будетъ служить выраженіемъ вѣроятности умереть въ возрастѣ отъ x_1 до x_2 для родившагося въ любой изъ двухъ періодовъ, о которыхъ говорилось выше, и вообще для родившагося въ какой-угодно моментъ времени. Точно также, еслибъ изъ ряда значеній функціи $\mu(x)$, найденныхъ для нѣкотораго періода $\tau_1 - \tau_2$, вывели рядъ значеній $f(x)$, воспользовавшись формулой $f(x) = e^{-\int_0^x \mu(x)dx}$, то полученныя величины для $f(x)$, только при условіи неизмѣнности порядка вымиранія во времени, могли бы быть разсматриваемы, какъ вѣроятности дожить для новорожденнаго до того или другого возраста. При несоблюденіи-же сказаннаго условія, каждое значеніи функціи $f(x)$ не служило бы отвѣтомъ на вопросъ: какъ велика вѣроятность для новорожденнаго, родившагося въ опредѣленный періодъ времени, дожить до возраста x?, а рѣшало бы другую, существенно отличную отъ первой задачу: какъ велика была бы вѣроятность для новорожденнаго дожить до возраста x, еслибы онъ въ каждомъ изъ пережитыхъ возрастовъ былъ подверженъ той силѣ смертности, которая для соотвѣтствующаго возраста найдена за періодъ $\tau_1 - \tau_2$?— Извѣстнымъ образомъ расположенный рядъ значеній нѣкоторой функціи, измѣряющей смертность, въ соединеніи съ выведенными

изъ него рядами другихъ функцій, тоже служащихъ для измѣренія смертности, называется *таблицею смертности*. Таблица смертности состоитъ изъ нѣсколькихъ столбцовъ: первый даетъ значенія (обыкновенно всѣ цѣлыя значенія) независимой перемѣнной x, причемъ за единицу измѣренія принимается годъ. Второй столбецъ даетъ значенія $f(x)$ или f_x. По большей части, въ третьемъ столбцѣ показаны разности между двумя послѣдовательными значеніями втораго столбца, то есть величины вида $r_x = f_x - f_{x+1}$. Затѣмъ идутъ столбцы съ рядами значеній $w_x = \frac{r_x}{f_x}$, иногда также $1 - w_x = \frac{f_{x+1}}{f_x}$. Весьма существеннымъ является рядъ значеній функціи $\varepsilon_x = \frac{1}{f_x}\int_x^\omega f(x)\,dx$. Рѣже показываются значенія величинъ $Q_x = \int_x^{x+1} f(x)\,dx$ и $q_x = \int_x^\omega f(x)\,dx$. Эти двѣ послѣднія функціи имѣютъ значеніе вспомогательное: помощью нихъ легко опредѣляются функціи ε_x, а также $c_x = \frac{-\int_x^{x+1} f'(x)\,dx}{\int_x^{x+1} f(x)\,dx}$. И дѣйствительно, $\varepsilon_x = \frac{q_x}{f_x}$, а $q_x = \sum_x^{\omega-1} Q_x$; $c_x = \frac{r_x}{Q_x}$.

Переходъ отъ полученнаго ряда значеній f_x къ ряду значеній r_x и w_x совершается по формуламъ $r_x = f_x - f_{x+1}$ и $w_x = \frac{r_x}{f_x}$; для обратнаго перехода отъ r_x и w_x къ f_x служатъ очевидныя формулы:

$$f_x = 1 - r_0 - r_1 - r_2 - \ldots\ldots - r_{x-1} \text{ и}$$
$$f_x = (1 - w_0)\,(1 - w_1)\,(1 - w_2)\ldots\ldots(1 - w_{x-1}).$$

Сравнительно болѣе труднымъ представляется переходъ отъ значеній f_x къ значеніямъ вида μ_x, c_x и ε_x и обратно отъ этихъ функцій къ f_x. Такого рода задачи рѣшаются помощью приближенныхъ пріемовъ, такъ какъ видъ той или другой функціи ни-

когда не извѣстенъ, а задаются лишь частныя ея значенія; поэтому на самомъ дѣлѣ не можетъ быть произведено требуемое интегрированіе. Въ функціи c и ε входитъ величина Q_x; покажемъ, какъ эта величина можетъ быть опредѣлена, съ достаточной степенью приближенія, по даннымъ значеніямъ f_x. Рѣшимъ задачу въ болѣе общемъ случаѣ, именно, когда данныя значенія для f_x соотвѣтствуютъ значеніямъ x, отдѣленнымъ равными промежутками длины $2s$, такъ что пусть требуется опредѣлить $Q_{x_1 \cdots x_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, причемъ $x_2 - x_1 = 2s$. Вношу слѣдующія обозначенія: $f(x_1 - 2s) = l_{-3}$, $f(x_1) = l_{-1}$, $f(x_2) = l_1$ и $f(x_2 + 2s) = l_3$, и новую перемѣнную $z = x - (x_1 + s)$. Пусть $f(x) = \varphi(z)$. Тогда: $l_{-3} = \varphi(-3s)$, $l_{-1} = \varphi(-s)$, $l_1 = \varphi(s)$ и $l_3 = \varphi(3s)$, а $Q_{x_1 \cdots x_2} = \int\limits_{-s}^{s} \varphi(z)dz$. Функцію $\varphi(z)$ замѣняю функціей $\varphi_1(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ которая бы, при $z = -3s, -s, s$ и $3s$, равнялась соотвѣтственно величинамъ l_{-3}, l_{-1}, l_1 и l_3. Параметры α, β, γ и δ опредѣлятся изъ уравненій:

$$l_{-1} = \alpha - \beta s + \gamma s^2 - \delta s^3 \ldots (1) \qquad l_{-3} = \alpha - 3\beta s + 9\gamma s^2 - 27\delta s^3 \ldots (3)$$

$$l_1 = \alpha + \beta s + \gamma s^2 + \delta s^3 \ldots (2) \qquad l_3 = \alpha + 3\beta s + 9\gamma s^2 + 27\delta s^3 \ldots (4)$$

Сложивъ уравненія (1) съ (2) и (3) съ (4), получу систему двухъ уравн. съ двумя неизвѣстными α и γ; рѣшивъ эти уравн., найду: $\alpha = \frac{9(l_{-1} + l_1) - (l_{-3} + l_3)}{16}$ и $\gamma = \frac{(l_{-3} + l_3) - (l_{-1} + l_1)}{(4s)^2}$. Съ другой стороны, $\int\limits_{-s}^{s} \varphi_1(z)\,dz = \int\limits_{-s}^{s} (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3)\,dz = 2\alpha s + \frac{2}{3}\gamma s^3$. Подставляя въ послѣднее выраженіе найденныя значенія для α и γ, получимъ: $\int\limits_{-s}^{s} \varphi_1(z)\,dz = 2s\left\{\frac{1}{2}(l_{-1} + l_1) + \frac{1}{24}\left[(l_1 - l_3) - (l_{-3} - l_{-1})\right]\right\}$.

Эта формула и можетъ служить для приближеннаго вычисленія ве-

личины $Q_{x_1 \ldots x_2}$ *). Для $Q_x = \int\limits_x^{x+1} f(x)dx$ будемъ имѣть $\frac{1}{2}(f_x + f_{x+1})$ $+ \frac{1}{24}(r_{x+1} - r_{x-1})$.

Въ формулѣ для Q два члена: одинъ главный, представляющій собой выраженіе Q вычисленное по фурмулѣ трапеціи, другой добавочный, который можно назвать поправкой къ формулѣ трапеціи. Поправка эта можетъ быть выведена изъ болѣе общей формулы нѣкоторой другой поправки, которую можно рекомендовать для вычисленія среднихъ величинъ, получающихся при всякихъ массовыхъ антропологическихъ измѣреніяхъ. Такъ какъ въ дальнѣйшемъ будетъ идти рѣчь о нѣкоторыхъ подобнаго рода среднихъ величинахъ, то я позволю себѣ указать здѣсь на эту поправку. Положимъ, что произведены для большаго числа людей измѣренія нѣкотораго свойства, наприм. роста, вѣса, возраста и тому подобное; результатъ массоваго измѣренія всегда выражается въ такой формѣ: лица, подвергшіяся измѣренію, собираются въ группы, которыя опредѣляются каждая двумя числен-

*) Погрѣшность ея опредѣлится такъ:

$$\varphi(z) - \varphi_1(z) = \frac{(z+3s)(z+s)(z-s)(z-3s)}{1.2.3.4}\varphi^{(\text{IV})}(\zeta), \text{ гдѣ } 3s > \zeta > -3s$$

Помножимъ обѣ части равенства на dx и проинтегрируемъ въ предѣлахъ— $-s$ и s. Такъ какъ множитель при $\varphi^{\text{IV}}(\zeta)$ не мѣняетъ знака въ предѣлахъ интегрированія, то за знакъ интеграла можно вынести $\varphi^{(\text{IV})}(\zeta')$, гдѣ $\zeta' > -3s$ и $< 3s$. Будетъ

$$\int\limits_{-s}^{s} \varphi(z)\, dz - \int\limits_{-s}^{s} \varphi_1(z)\, dz = s^5 \frac{16.11}{15.1.2.3.4}\varphi^{(\text{IV})}(\zeta').$$ Такимъ образомъ, погрѣшность, которая произойдетъ отъ вычисленія величины $Q_{x_1 \cdots x_2}$ по данной приближенной формулѣ, есть $\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^5 \frac{16.11}{15.1.2.3.4} f^{(\text{IV})}(\xi)$, гдѣ ξ есть нѣкоторое среднее значеніе перемѣнной x между $x = 2x_1 - x_2$ и $x = 2x_2 - x_1$. Если $x_2 - x_1 = 1$, что имѣетъ мѣсто при вычисленіи $Q_x = \int\limits_x^{x+1} f(x)\, dx$, то коэффиціентъ при $f^{(\text{IV})}(\xi)$ получается равнымъ $\frac{11}{720}$.

ными значеніями измѣряемаго свойства. Если это будетъ наприм. возрастъ, то говорятъ, что въ возрастѣ отъ 0 до 1 года оказалось столько-то лицъ, въ возрастѣ отъ 1 до 2 столько-то и такъ далѣе. При выводѣ средней величины возраста, роста или вѣса измѣренныхъ лицъ, обыкновенно дѣлается допущеніе, что средній возрастъ, ростъ или вѣсъ лица каждой группы равняется ариѳметической средней изъ низшаго и высшаго предѣловъ возраста, роста или вѣса этой группы. Это, такъ сказать, первое приближеніе; но есть возможность для каждой группы, кромѣ двухъ крайнихъ, найти болѣе точное значеніе искомой средней. Назовемъ величину, измѣряющую то или другое изъ приведенныхъ свойствъ, черезъ x и условимся разсматривать число лицъ, давшихъ опредѣленное значеніе x при измѣреніи, какъ нѣкоторую функцію отъ x; пусть число лицъ, находящихся въ отношеніи измѣряемаго свойства въ безконечно-близкихъ предѣлахъ x и $x+dx$, будетъ $F(x)\,dx$, а слѣд. число лицъ, оказавшихся въ нѣкоторыхъ конечныхъ предѣлахъ x_1 и x_2, будетъ $\sigma_0 = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$. Требуется найти среднюю величину X измѣряемаго свойства для группы σ_0. Это будетъ $\frac{1}{\sigma_0}\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx\cdot x$. Положимъ, что намъ извѣстно численное значеніе смежныхъ группъ: предшествующей, σ_{-1}, ограниченной предѣлами $[x_1 - (x_2 - x_1)]$ и x_1, и послѣдующей, σ_1, ограниченной передѣлами x_2 и $[x_2+(x_2-x_1)]$. При выводѣ приближеннаго значенія X, поступаемъ въ данномъ случаѣ совершенно подобно тому, какъ мы поступали въ предыдущей задачѣ, т. е. замѣняемъ неизвѣстную функцію $F(x)$ параболой втораго порядка $F_1(x) = a + bx + cx^2$, которая бы удовлетворяла условіямъ: $\int\limits_{x_1-(x_2-x_1)}^{x_1} F_1(x)\,dx = \sigma_{-1}$, $\int\limits_{x_1}^{x_2} F_1(x)\,dx = \sigma_0$ и $\int\limits_{x_2}^{x_2+(x_2-x_1)} F_1(x)\,dx = \sigma_1$; находимъ параметры a, b и c и вычисляемъ ве-

личину $\frac{1}{\sigma_0}\int_{x_1}^{x_2} F_1(x)\,x\,dx$, которую принимаемъ равною искомой величинѣ X. Получимъ въ результатѣ $X=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{24}(x_2-x_1)\left(\frac{\sigma_1-\sigma_{-1}}{\sigma_0}\right)$.

Покажемъ, какъ изъ этой формулы можетъ быть выведено значеніе величины Q_x.

$$Q_x=\int_x^{x+1} f(x)\,dx=f_{x+1}\cdot(x+1)-f_x\cdot x-\int_x^{x+1} f'(x)\,x\,dx.$$

Замѣчаемъ, что выраженіе $-\int_x^{x+1} f'(x)\,x\,dx$ есть не что иное, какъ просуммированный возрастъ умершихъ изъ единицы родившихся въ возрастѣ отъ x до $x+1$; пусть средній возрастъ этихъ умершихъ будетъ X. Тогда $-\int_x^{x+1} f'(x)\,x\,dx=X(f_x-f_{x+1})=X\,r_x$.

Въ данномъ случаѣ, примѣняя только что выведенную формулу, найдемъ $X=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\left(\frac{r_{x+1}-r_{x-1}}{r_x}\right)$, а слѣдоват.

$$Q_x=f_{x+1}\cdot(x+1)-f_x\cdot x-\int_x^{x+1} f'(x)\,x\,dx=f_{x+1}-r_x\cdot x+Xr_x=$$

$$=f_{x+1}-r_x\cdot x+\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\frac{r_{x+1}-r_{x-1}}{r_x}\right)r_x=$$

$$=f_{x+1}+\frac{1}{2}r_x+\frac{1}{24}(r_{x+1}-r_{x-1}),$$

то есть получилась формула тожественная съ прежде полученной, такъ какъ $f_{x+1}+\frac{1}{2}r_x=f_{x+1}+\frac{1}{2}(f_x-f_{x+1})=\frac{1}{2}(f_x+f_{x+1})$.

Составители таблицъ смертности обыкновенно довольствуются способомъ трапецій при выводѣ величинъ вида Q_x изъ значеній f_x, не примѣняя поправокъ. Впрочемъ, при вычисленіи одной изъ новѣйшихъ таблицъ, именно таблицы смертности для Германіи цо даннымъ объ умершихъ въ дѣсятилѣтіе 1871 — 1881 гг., извѣстный статистикъ Беккеръ, стоящій нынѣ во главѣ статисти-

ческой части Германской Имперіи, сдѣлалъ попытку примѣнить къ рѣшенію задачи болѣе точный пріемъ (Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs. 1887. 2 Theil).

Способъ Беккера состоитъ въ слѣдующемъ: величины вида f_x, Q_x и r_x могутъ быть разсматриваемы, какъ совокупности вида P_1, P_2 и M_1 въ населеніи, въ которомъ плотность рожденій постоянна, и въ которомъ дѣйствуетъ неизмѣнный порядокъ вымиранія (такое населеніе называется стаціонарнымъ), причемъ годовое число рожденій — въ томъ предположеніи, что годъ служитъ единицей измѣренія—принято равнымъ единицѣ, и разности предѣловъ $t_2 - t_1$ и $x_2 - x_1$ въ совокупностяхъ P_1, P_2 и M_1 тоже порознь равны единицѣ. Ясно, что въ такомъ населеніи численныя значенія сказанныхъ совокупностей не будутъ зависѣть отъ предѣловъ интегрированія по t, такъ какъ будетъ: $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = o$; это слѣдуетъ изъ того, что $U(x, t) = U(o, t) \cdot f(x)$, гдѣ $U(o, t)$ по предположенію величина постоянная, а $f(x)$ также не зависитъ отъ t. Итакъ r_x представляетъ собой совокупность M_1, въ которой разность предѣловъ интегрированія по t, т. е. $t_2 - t_1 = 1$, $x_1 = x$ и $x_2 = x + 1$. Очевидно, что періодъ умиранія совокупности r_x обнимаетъ два года, отъ момента $(t_1 + x)$ до $(t_2 + x + 1)$. Поэтому каждое r_x можетъ быть разбито на $\rho_x + \rho'_x$, гдѣ ρ_x означаетъ число умершихъ изъ родившихся въ годовой періодъ $t_1 - t_2$ въ возрастѣ отъ x до $x + 1$ втеченіе перваго года, т. е. въ промежутокъ отъ $(t_1 + x)$ до $(t_1 + x + 1) = (t_2 + x)$, а ρ'_x число умершихъ въ тѣхъ-же предѣлахъ возраста изъ тѣхъ-же родившихся, втеченіе втораго года, т. е. въ промежутокъ отъ $(t_2 + x)$ до $(t_2 + x + 1)$. $Q_x = \int_x^{x+1} f(x)\, dx$, какъ объяснено выше, означаетъ число живущихъ въ возрастѣ отъ x до $x + 1$ въ любой моментъ времени (die Zahl der Lebenden der Sterblichkeitstafel), а слѣд. и въ моментъ $(t_2 + x)$, т. е. въ моментъ, лежащій на рубежѣ двухъ лѣтъ, втеченіе которыхъ умираетъ совокупность r_x. Но число живущихъ въ моментъ $(t_2 + x)$ изъ родившихся въ періодъ $t_1 - t_2$ очевидно равно числу дожив-

шихъ до возраста x изъ этихъ родившихся, уменьшенному на число умершихъ въ возрастѣ x до $x+1$, изъ этихъ-же родившихся, втеченіе года предшествовавшаго моменту t_2+x, т. е. $Q_x=f_x-\rho_x$, а съ другой стороны $Q_x=f_{x+1}+\rho'_x$. Такимъ образомъ вопросъ о вычисленіи Q_x сводится къ вопросу объ опредѣленіи ρ_x и ρ'_x. Беккеръ находитъ ихъ такимъ образомъ: кромѣ r_x, онъ разбиваетъ на двѣ части каждую изъ совокупностей r_{x-1} и r_{x+1} и получаетъ три равенства: $\rho_{x-1}+\rho'_{x-1}=r_{x-1}$, $\rho_x+\rho'_x=r_x$ и $\rho_{x+1}+\rho'_{x+1}=r_{x+1}$. Далѣе, Беккеръ замѣчаетъ, что величины ρ_{x-1}, ρ'_{x-1}, ρ_x, ρ'_x, ρ_{x+1} и ρ'_{x+1} должны измѣняться постепенно, въ извѣстной послѣдовательности; онъ принимаетъ, что зависимость между этими величинами можетъ быть приближенно выражена цѣлой раціональной функціей 2-ой степени: $y=a+bx+cx^2$, иначе говоря, онъ располагаетъ *шесть* искомыхъ величинъ по параболѣ втораго порядка; принявъ середину ея за начало координатныхъ осей, получимъ слѣдующую зависимость между двумя перемѣнными:

x	y	y	$=a+bx+cx^2$. Слѣд.	
-5 . . .	ρ_{x-1}	ρ_x	$=a-b+c$	(I)
-3 . . .	ρ'_{x-1}	ρ'_x	$=a+b+c$	(II)
-1 . . .	ρ_x	ρ'_{x-1}	$=a-3b+9c$	(III)
1 . . .	ρ'_x	ρ_{x+1}	$=a+3b+9c$	(IV)
3 . . .	ρ_{x+1}	ρ_{x-1}	$=a-5b+25c$	(V)
5 . . .	ρ'_{x+1}	ρ'_{x+1}	$=a+5b+25c$	(VI)

Изъ уравненій (I) и (II), ... $2a+2c=r_x$.

Изъ уравненій (III), (IV), (V) и (VI) . . . $4a+68c=r_{x-1}+r_{x+1}$,

отсюда $a=\frac{34r_x-r_{x+1}-r_{x-1}}{64}$, $c=\frac{r_{x+1}-2r_x+r_{x-1}}{64}$.

Изъ уравненій (III) и (IV) . . . . $\rho'_{x-1}-\rho_{x+1}=-6b$

» » (V) и (VI) . . . . $\rho_{x-1}-\rho'_{x+1}=-10b$

Отсюда $b=\frac{r_{x+1}-r_{x-1}}{16}$.

Подставляя полученныя выраженія для a, b и c въ выраженія для ρ_x и ρ'_x, будемъ имѣть:

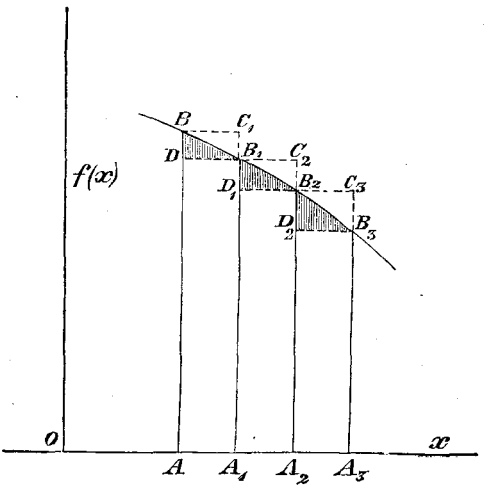
$$\rho_x = \frac{r_x}{2} + \frac{r_{x-1} - r_{x+1}}{16}, \quad \rho'_x = \frac{r_x}{2} - \frac{r_{x-1} - r_{x+1}}{16}.$$

Теперь уже легко написать выраженіе для Q по способу Беккера:

$$Q_x = f_{x+1} + \rho'_x = f_{x+1} + \frac{r_x}{2} + \frac{r_{x+1} - r_{x-1}}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}(f_x + f_{x+1}) + \frac{1}{16}(r_{x+1} - r_{x-1}).$$

Формула Беккера отличается отъ предложенной мною только коэффиціентомъ при дополнительномъ членѣ, который у него равенъ $\frac{1}{16}$, а у меня $\frac{1}{24}$. Я полагаю, что не можетъ быть спора о томъ, которая изъ двухъ формулъ заслуживаетъ предпочтенія: въ тѣхъ простѣйшихъ случаяхъ, когда кривая переживанія, т. е. $f(x)$ выражается параболой втораго или третьяго порядка, ошибка формулы Беккера можетъ быть точно опредѣлена: она равняется $-\frac{1}{48}(r_{x+1} - r_{x-1})$. Относительно-же, поправка Беккера, по абсолютной величинѣ, въ $1\frac{1}{2}$ раза больше истиннаго своего значенія. Легко показать геометрически, въ чемъ заключается неосновательность допущенія, сдѣланнаго Беккеромъ при выводѣ формулы. На чертежѣ представлена кривая переживанія, т. е. по оси абсциссъ отложены значенія независимой перемѣнной x, по оси ординатъ значенія функціи $f(x)$. Задача состоитъ въ томъ, чтобъ найти выраженіе площади



$A_1\ B_1\ B_2\ A_2 = Q_x$.

$\overline{AB} = f_{x-1}$, $\overline{A_1B_1} = f_x$, $\overline{A_2B_2} = f_{x+1}$,

$\overline{A_3B_3} = f_{x+2}$.

$\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = 1$.

Слѣд., можно написать: пл. $ABC_1A_1 = f_{x-1}$, пл. $A_1B_1C_2A_2 = f_x$, пл. $A_2B_2C_3A_3 = f_{x+1}$; пл. $DBC_1D_1 = r_{x-1}$, пл. $D_1B_1C_2D_2 = r_x$, пл. $D_2B_2C_3B_3 = r_{x+1}$; пл. $ABB_1A_1 = Q_{x-1}$, пл. $A_1B_1B_2A_2 = Q_x$, пл. $A_2B_2B_3A_3 = Q_{x+1}$; пл. $BC_1B_1 = \varrho_{x-1}$, пл. $DBB_1 = \varrho'_{x-1}$, пл. $B_1C_2B_2 = \varrho_x$, пл. $D_1B_1B_2 = \varrho'_x$, пл. $B_2C_3B_3 = \varrho_{x+1}$ и пл. $D_2B_2B_3 = \varrho'_{x+1}$.

Такимъ образомъ, затушеванныя площади представляютъ совокупности вида ϱ' (со значкомъ). Изъ чертежа какъ нельзя болѣе ясно видно, насколько произвольно допущеніе Беккера, что 6 площадей (3 затушеванныхъ и 3 незатушеванныхъ) могутъ быть расположены по параболѣ 2-го порядка: дѣло въ томъ, что эти 6 площадей неоднородны, а потому нѣтъ никакого основанія предполагать существованіе между ними той простой зависимости, которую допустилъ Беккеръ.

До сихъ поръ мы рѣшали вопросъ о переходѣ отъ величинъ вида f_x къ величинамъ вида $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$. На практикѣ можетъ встрѣтиться задача обратная той: именно придется по даннымъ величинамъ вида $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ находить значенія функціи $f(x)$. Рѣшая эту задачу совершенно анологично предыдущей, найдемъ слѣдующія формулы:

1) $f(x_0) = \frac{1}{2s}\left\{\varkappa_0 - \frac{1}{24}(\varkappa_{-2} - 2\varkappa_0 + \varkappa_2)\right\}$, гдѣ $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

$2s = x_2 - x_1$,

$$\varkappa_{-2} = \int_{x_0-3s}^{x_0-s} f(x)\,dx, \quad \varkappa_0 = \int_{x_0-s}^{x_0+s} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \varkappa_2 = \int_{x_0+s}^{x_0+3s} f(x)\,dx,$$

и 2) $f(x) = \frac{1}{2s}\left\{\frac{1}{2}(\varkappa_{-1} + \varkappa_1) + \frac{1}{12}\left[(\varkappa_{-1} + \varkappa_1) - (\varkappa_{-3} + \varkappa_3)\right]\right\}$, гдѣ

$$\varkappa_{-3} = \int_{x-4s}^{x-2s} f(x)\,dx, \quad \varkappa_{-1} = \int_{x-2s}^{x} f(x)\,dx, \quad \varkappa_1 = \int_{x}^{x+2s} f(x)\,dx, \quad \text{и} \quad \varkappa_3 = \int_{x+2s}^{x+4s} f(x)\,dx.$$

При $x_2 - x_1 = 1$, оставляя старое обозначеніе $Q_x = \int_x^{x+1} f(x)\,dx$, будемъ имѣть:

1) $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = Q_x - \frac{1}{24}(Q_{x-1} - 2Q_x + Q_{x+1})$ и

2) $f(x) = \frac{Q_{x-1} + Q_x}{2} + \frac{1}{12}\left[(Q_{x-1} + Q_x) - (Q_{x-2} + Q_{x+1})\right]$.

Я не указываю здѣсь пріемовъ для перехода отъ значеній функціи $f(x)$ къ значеніемъ функціи $\mu(x)$ и, обратно, для перехода отъ ряда значеній $\mu(x)$, или $c(x)$, или $\varepsilon(x)$ къ ряду значеній $f(x)$, такъ какъ разсмотрѣніе этого вопроса заняло бы слишкомъ много мѣста, да къ тому-же эти способы не нашли бы себѣ примѣненія къ практической части моей работы, т. е. въ составленіи таблицы смертности для Россіи. Я не буду также излагать разнообразныхъ пріемовъ построенія таблицъ смертности, а ограничусь изложеніемъ того способа, который примѣненъ мною при составленіи таблицы русской смертности. Однако, прежде чѣмъ перейти къ изложенію этого способа, я считаю умѣстнымъ выяснить біометрическое значеніе нѣкоторыхъ, весьма употребительныхъ, статистическихъ величинъ, кромѣ тѣхъ, о которыхъ говорено было выше. Эти величины суть: общій коэффиціентъ рождаемости, общій коэффиціентъ смертности, средній возрастъ умершихъ и средній возрастъ живущихъ. Коэффиціенты рождаемости n и смертности m опредѣляются отношеніемъ числа рожденій или смертей, происшедшихъ въ данной средѣ втеченіе опредѣленнаго промежутка времени, къ суммѣ времени Q, прожитаго въ общей слож-

ности всѣми лицами, входившими въ составъ этой среды за тотъ-же промежутокъ времени. Такое опредѣленіе коэффиціентовъ рождаемости и смертности точнѣе сравнительно съ общепринятымъ, по которому коэффиціенты эти опредѣляются, какъ отношенія чиселъ рожденій и смертей къ цифрѣ населенія. Дѣло въ томъ, что цифра населенія не есть величина постоянная, она измѣняется во времени, а для сужденія объ интензивности явленій рождаемости и смертности недостаточно знать, сколько было лицъ въ данной средѣ въ какой-нибудь опредѣленный моментъ времени, а слѣдуетъ принимать въ разсчетъ: 1) число всѣхъ тѣхъ лицъ, которыя входили въ составъ изучаемой среды за изслѣдуемый періодъ времени и 2) продолжительность пребыванія каждаго лица въ данной средѣ. Это и достигается тѣмъ, что число рожденій и смертей относится не къ цифрѣ населенія въ тотъ или другой моментъ времени, но къ суммѣ времени, пережитаго населеніемъ за весь промежутокъ, втеченіе котораго произошли означенныя рожденія или смерти. Такъ, впрочемъ, и поступаютъ издавна при измѣреніи величины смертнаго коэффиціента въ тѣхъ случаяхъ, когда относительно каждаго лица извѣстно, сколько времени оно пробыло въ изслѣдуемой средѣ, что имѣетъ мѣсто напр. для воспитательныхъ домовъ, тюремъ, больницъ и т. под. Къ населеніямъ-же цѣлыхъ государствъ или городовъ («ganze» Bevölkerungen) тотъ-же способъ суммированія прожитаго времени непримѣнимъ. Аналитически величина Q, т. е., прожитое населеніемъ P время, втеченіе періода τ_1 до τ_2, опредѣлится такъ: $Q = \int_{\tau_1}^{\tau_2} P(\tau)\,d\tau$, гдѣ $P(\tau)$ даетъ цифру населенія въ моментъ τ, т. е. въ функціи отъ времени. Видъ функціи $P(\tau)$ никогда не извѣстенъ, а задаются лишь частныя значенія P для опредѣленныхъ значеній перемѣнной τ. Поэтому Q можетъ быть вычислено лишь съ бо́льшимъ или меньшимъ приближеніемъ. Воспользовавшись прежними обозначеніями, получимъ слѣдующія выраженія для величины n — коэффиціента рождаемости за время $\tau_1 - \tau_2$, m — коэффиціента смертности за то же время, $mаM$ — средня-

го возраста умершихъ въ періодъ $\tau_1 - \tau_2$ и maP — средняго возраста живущихъ, за тотъ-же періодъ. Эти выраженія получаются такъ просто, что выводъ ихъ не нуждается въ поясненіяхъ.

$$n = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} U(0, t)\, dt}{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} U(\tau - t, t)\, dt\, d\tau}, \quad m = \frac{-\int_0^{\omega}\int_{\tau_1-x}^{\tau_2-x} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dt\, dx}{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} U(\tau - t, t)\, dt\, d\tau},$$

$$maM = \frac{-\int_0^{\omega}\int_{\tau_1-x}^{\tau_2-x} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, x\, dt\, dx}{-\int_0^{\omega}\int_{\tau_1-x}^{\tau_2-x} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dt\, dx}, \quad maP = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} U(\tau - t, t)\, [\tau - t]\, dt\, d\tau}{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} U(\tau - \tau, t)\, dt\, d\tau}.$$

Замѣчу, что величины m, maM и maP могутъ быть обобщены, именно замѣной передѣловъ интегрированія по x, — o и ω, какими угодно значеніями x_1 и x_2. Тогда m будетъ давать коэффиціентъ смертности не всего населенія, а одной только возрастной группы. [Величины вида m нужно строго отличать отъ величинъ вида c (см. стр. 7). И тѣ, и другія называются коэффиціентами смертности: во избѣжаніе смѣшенія, нѣмцы называютъ величины вида c «смертн. коэффиціентами въ смыслѣ таблицы смертности» (Sterblichkeitscoëfficient im Sinne der Sterblichkeitstafel). При достаточно малыхъ значеніяхъ разности $x_2 - x_1$, c будетъ весьма мало отличаться отъ m.] Величины maM и maP будутъ давать средніе возраста не всего населенія, а тоже опредѣленной возрастной группы. Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ постоянно разумѣть подъ m, maM и maP написанныя величины, т. е. будемъ полагать $x_1 = o$, $x_2 = \omega$.

Біометрическое значеніе, приписываемое весьма часто величинамъ n, m, maM и maP, заключается въ томъ, что эти величины будто бы могутъ служить указаніемъ на значеніе функціи ε_x при $x = o$, т. е. на среднюю продолжительность жизни.

Именно одни говорятъ что ε_0 можетъ быть приближенно выражена величиной $\frac{1}{n}$, другіе, что ε_0 мало отличается отъ $\frac{1}{m}$, третьи отожествляютъ ε_0 съ maM, четвертые ε_0 съ maP. Наконецъ, нерѣдко утверждаютъ, что ε_0, съ достаточной степенью точности, можетъ быть приравнена къ средней ариѳметической изъ $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{m}$, т. е., $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$. Намъ предстоитъ показать, существуетъ ли, при какихъ условіяхъ и какая именно зависимость между этими величинами. Данныя здѣсь аналитическія выраженія означенныхъ величинъ слишкомъ общаго характера и потому не совсѣмъ пригодны для этой цѣли. Небезполезно будетъ поступиться этой общностію, введя предположеніе о неизмѣнномъ во времени порядкѣ вымиранія, т. е. допустить, что числа доживающихъ до того-же возраста изъ разныхъ совокупностей родившихся пропорціональны этимъ совокупностямъ. Аналитически это условіе выразится такъ: $V(x,t) = V(o,t)f(x)$ [V имѣетъ смыслъ, указ. стр. 3].

Слѣд. мы принимаемъ, что функція отъ двухъ перемѣнныхъ x и t можетъ быть выражена произведеніемъ двухъ функцій, изъ которыхъ первая есть функція отъ одного только t, вторая функція отъ одного только x. Вм. $V(o, t)$ будемъ писать $F(t)$, такъ что $F(t)$ представляетъ число родившихся отъ 0 до t.

Имѣемъ: $V(x,t) = F(t) \cdot f(x)$.

Отсюда $\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = U(x,t) = F'(t)f(x)$; $F'(t)$—плотность рожд.

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = F'(t)f'(x).$$

Будетъ: $$n = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} F'(t)\,dt}{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} F'(t)f(\tau-t)\,dt\,d\tau}, \quad m = \frac{-\int_0^{\omega}\int_{\tau_1-x}^{\tau_2-x} F'(t)f'(x)\,dt\,dx}{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} F'(t)f(\tau-t)\,dt\,d\tau},$$

$$maM = \frac{-\int_0^{\omega}\int_{\tau_1-x}^{\tau_2-x} F'(t)f'(x)\,x\,dt\,dx}{-\int_0^{\omega}\int_{\tau_1-x}^{\tau_2-x} F'(t)f'(x)\,dt\,dx}, \quad ma\,P = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} F'(t)f(\tau-t)\cdot(\tau-t)dt\,d\tau}{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\tau-\omega}^{\tau-0} F'(t)f(\tau-t)\,dt\,d\tau}.$$

Произведя гдѣ нужно замѣну перемѣнной, пользуясь зависимостью $t+x=\tau$, и внеся обозначеніе $F(\tau_2-x)-F(\tau_1-x)=F_1(x)$, получимъ:

$$n = \frac{F_1(0)}{\int_0^{\omega} F_1(x)f(x)\,dx}, \quad m = \frac{-\int_0^{\omega} F_1(x)f'(x)\,dx}{\int_0^{\omega} F_1(x)f(x)\,dx}, \quad maM = \frac{-\int_0^{\omega} F_1(x)f'(x)x\,dx}{-\int_0^{\omega} F_1(x)f'(x)\,dx},$$

$$ma\,P = \frac{\int_0^{\omega} F_1(x)f(x)x\,dx}{\int_0^{\omega} F_1(x)\,f(x)\,dx}.$$ Съ другой стороны имѣемъ $\varepsilon_0 = \int_0^{\omega} f(x)\,dx$.

$F'(t)$ есть плотность рожденій. $F'(t)$ всегда $>o$. $F''(t)$ можетъ быть и $>$, и $<o$, и $=$ o. Если $F''(t)>o$, то это указываетъ на то, что плотность рожденій увеличается, и наоборотъ если $F''(t)<o$, значитъ плотность рожденій уменьшается. При $F''(t)>o$, $F'_1(x)<o$, ибо $\tau_2>\tau_1$, и наоборотъ при $F''(t)<o$, $F'_1(x)>o$; если $F''(t)=$o, то $F_1'(x)=o$, а $F'(t)=$ const. или иначе: плотность рожденій постоянна. При этомъ условіи $\frac{1}{n}=\frac{1}{m}=maM=\varepsilon_0$. И дѣйствительно, положивъ, въ формулахъ для n, m, maM, $F_1(x)=$const., будемъ имѣть, по сокращеніи на $F_1(x)$.

$$n = \frac{1}{\int_0^{\omega} f(x)dx}, \quad m = \frac{-\int_0^{\omega} f'(x)dx}{\int_0^{\omega} f(x)\,dx}, \quad maM = \frac{-\int_0^{\omega} f'(x)x\,dx}{-\int_0^{\omega} f'(x)dx}, \text{ но}$$

$-\int_0^{\omega} f'(x)x\,dx = \int_0^{\omega} f(x)\,dx = \varepsilon_0$. Сл. $\frac{1}{n}=\frac{1}{m}=maM=\varepsilon_0$, что и требуется доказать.

Такимъ образомъ, *въ стаціонарномъ населеніи,* т. е. въ такомъ населеніи, въ которомъ плотность рожденій постоянна, и дѣйствуетъ неизмѣнный порядокъ вымиранія, (такъ опредѣляетъ понятіе стаціонарнаго населенія Кнаппъ «Ermittelung и т. д.» 107—108) *средняя продолжительность жизни равна обратной величинѣ коэффиціента рождаемости, или обратной-же величинѣ коэффиціента смертности, или среднему возрасту умершихъ.* Что-же касается величины maP, то она и при этихъ условіяхъ не обращается въ ε_0, а въ отличную отъ послѣдней величину $\frac{\int_0^\omega f(x)\,x\,dx}{\int_0^\omega f(x)\,dx}$. Вообще говоря, maP не имѣетъ біометрическаго значенія. Можно отмѣтить, какъ фактъ, имѣющій исключительно теоретическій интересъ, что при одномъ опредѣленномъ видѣ функціи $f(x)$—и притомъ такомъ видѣ, который никогда не получается въ дѣйствительности, величина maP оказывается равною maM; это именно въ случаѣ $f(x) = a^x$ или $\mu(x) = \text{const.}$, ибо $\mu(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = -\log_e a = \text{const.}$ При этомъ условіи легко получить, независимо отъ плотности рожденій: $maP = maM$. [При этомъ-же условіи можно вывести $\frac{1}{m} = \varepsilon_0$]. Итакъ maP даже въ населеніи стаціонарномъ не можетъ служить мѣриломъ средней продолжительности жизни, а потому сказаннымъ относительно этой величины можно и ограничиться. Выведемъ теперь слѣдующія неравенства:

$$\text{при } F_1'(x) < 0: \begin{cases} 1)\ \frac{1}{m} > \frac{1}{n} \\ 2)\ \varepsilon_0 > \frac{1}{n} \\ 3)\ \frac{1}{m} > maM \\ 4)\ \varepsilon_0 > maM \end{cases} \qquad \text{при } F_1'(x) > 0: \begin{cases} 1)\ \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \\ 2)\ \varepsilon_0 < \frac{1}{n} \\ 3)\ \frac{1}{m} < maM \\ 4)\ \varepsilon_0 < maM \end{cases}$$

$$1)\qquad \frac{1}{m}=\frac{\int_0^\omega F_1(x)f(x)\,dx}{-\int_0^\omega F_1(x)f'(x)\,dx},\quad \frac{1}{n}=\frac{\int_0^\omega F_1(x)f(x)\,dx}{F_1(0)}.$$

Можно написать $-\int_0^\omega F_1(x)\,f'(x)\,dx=F_1(\xi)$, гдѣ $o<\xi<\omega$

Слѣдовательно $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=\frac{1}{F_1(\xi)}:\frac{1}{F_1(o)}=\frac{F_1(o)}{F_1(\xi)}$. Отсюда $\frac{1}{m}=\frac{1}{n}\cdot\frac{F_1(o)}{F_1(\xi)}$.

Очевидно, что при $F'_1(x)<o$, $F_1(o)>F_1(\xi)$; слѣд. $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$,

а при $F'_1(x)>o$, $F_1(o)<F_1(\xi)$; слѣд. $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$.

Такимъ образомъ, *при условіи неизмѣннаго во времени порядка вымиранія, обратная величина коэффиціента смертности въ случаѣ возростанія плотности рожденій—больше, а въ случаѣ убыванія плотности рожденій—меньше обратной величины коэффиціента рождаемости.*

$$2)\quad \frac{1}{n}=\frac{\int_0^\omega F_1(x)\,f(x)\,dx}{F_1(0)}=\frac{F_1(\xi)}{F_1(0)}\int_0^\omega f(x)\,dx=\frac{F_1(\xi)}{F_1(0)}\cdot\varepsilon_0.$$

При $F_1'(x)<0$, $F_1(\xi)<F_1(0)$; слѣд. $\frac{1}{n}<\varepsilon_0$ или $\varepsilon_0>\frac{1}{n}$,

а при $F_1'(x)>0$, $F_1(\xi)>F_1(0)$; слѣд. $\frac{1}{n}>\varepsilon_0$ или $\varepsilon_0<\frac{1}{n}$.

Такимъ образомъ, при условіи неизмѣннаго во времени порядка вымиранія, средняя жизнь въ случаѣ возростанія плотности рожденій—больше, а въ случаѣ убыванія плотности рожденій—меньше обратной величины коэффиціента рождаемости.

$$3)\quad \frac{1}{m}=\frac{\int_0^\omega F_1(x)f(x)\,dx}{-\int_0^\omega F_1(x)f'(x)\,dx}\quad \text{та}\ M=\frac{-\int_0^\omega F_1(x)f'(x)x\,dx}{-\int_0^\omega F_1(x)\,f'(x)\,dx}.$$

Отсюда $$\frac{1}{m} - maM = \frac{\int_0^\omega F_1(x)\{f(x) + f'(x)x\}\,dx}{-\int_0^\omega F_1(x) f'(x)\,dx}.$$

Знаменатель дроби, выражающей разность между $\frac{1}{m}$ и maM, есть величина положительная; слѣд. знакъ разности зависитъ отъ знака числителя

$$h = \int_0^\omega F_1(x)\psi'(x)\,dx, \text{ гдѣ } \psi(x) = f(x)\cdot x.$$

Интегрируя по частямъ и принимая въ соображеніе, что $\psi(o) = \psi(\omega) = o$, получаемъ

$$h = -\int_0^\omega F_1'(x)\psi(x)\,dx.$$

Но $\psi(x)$ постоянно > 0. Слѣд.,

при $F_1'(x) < o$, $h > o$ и слѣд. $\frac{1}{m} > maM$, а

при $F_1'(x) > o$, $h < o$ и слѣд. $\frac{1}{m} < maM$.

Такимъ образомъ, *при условіи неизмѣннаго во времени порядка вымиранія, обратная величина коэффиціента смертности въ случаѣ возростанія плотности рожденій — больше, а въ случаѣ убыванія плотности рожденій—меньше средняго возраста умершихъ.*

4) $$\varepsilon_0 = \int_0^\omega f(x)\,dx = \frac{-\int_0^\omega f'(x)\,x\,dx}{-\int_0^\omega f'(x)\,dx}, \quad ma\,M = \frac{-\int_0^\omega F_1(x) f'(x)\,x\,dx}{-\int_0^\omega F_1(x) f'(x)\,dx}.$$

Предстоитъ разсмотрѣть разность $\varepsilon_0 - maM$.

Предварительно изслѣдуемъ разность

$$H=\int_0^a \varphi(x)\theta(x)\omega(x)dx-\frac{1}{\int_0^a \varphi(x)\,dx}\cdot\int_0^a \varphi(x)\theta(x)dx\cdot\int_0^a \varphi(x)\omega(x)\,dx.$$

Здѣсь φ, θ, ω какія-угодно функціи, $a>o$.

Пусть $\varphi(x)$, $\frac{d\theta(x)}{dx}$ и $\frac{d\omega(x)}{dx}$ не мѣняютъ знаковъ въ предѣлахъ отъ 0 до a.

Можно написать $\int_0^a \varphi(x)\theta(x)\,dx=\theta(\xi)\int_0^a \varphi(x)dx$, гдѣ $0<\xi<a$.

Отсюда $\int_0^a \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\,dx=\int_0^\xi \varphi(x)\,\theta\{(x)-\theta(\xi)\}\,dx+$

$$+\int_\xi^a \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\,dx=0.$$

Слѣд. $\int_0^\xi \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}dx=-\int_\xi^a \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}dx.$

Ясно, что $H=\int_0^a \varphi(x)\theta(x)\omega(x)dx-\theta(\xi)\cdot\int_0^a \varphi(x)\omega(x)dx$

$$=\int_0^\xi \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\,\omega(x)\,dx+\int_\xi^a \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\,\omega(x)dx.$$

Такъ какъ $\theta(x)-\theta(\xi)$, по условію, сохраняетъ знакъ въ предѣлахъ отъ o до ξ, то $\int_0^\xi \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\,\omega(x)\,dx=$

$$=\omega(\xi_0)\int_0^\xi \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}dx=-\omega(\xi_0)\int_\xi^a \varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\,dx,$$

гдѣ $0<\xi_0<\xi$. Получаемъ

$$H = -\omega(\xi_0)\int_{\xi}^{a}\varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}dx + \int_{\xi}^{a}\varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\omega(x)dx$$

$$= \int_{\xi}^{a}\varphi(x)\{\theta(x)-\theta(\xi)\}\{\omega(x)-\omega(\xi_0)\}dx.$$

Разности $\theta(x)-\theta(\xi)$ и $\omega(x)-\omega(\xi_0)$, въ предѣлахъ отъ ξ до a, имѣютъ знаки одинаковые со знаками соотвѣтственныхъ производныхъ $\frac{d\theta(x)}{dx}$ и $\frac{d\omega(x)}{dx}$. Слѣд. знакъ разности H совпадаетъ со знакомъ произведенія $\varphi(x).\frac{d\theta(x)}{dx}.\frac{d\omega(x)}{dx}$ [1]).

Разсмотримъ еще разность

$$R = \frac{\int_0^a \varphi(x)\,\theta(x)\,\omega(x)\,dx}{\int_0^a \varphi(x)\,\omega(x)\,dx} - \frac{\int_0^a \varphi(x)\,\theta(x)\,dx}{\int_0^a \varphi(x)\,dx}.$$

Легко видѣть, что $R = \frac{H}{\int_0^a \varphi(x)\,\omega(x)\,dx}$, и знакъ разности R, въ предположеніи, что $\omega(x)$ въ предѣлахъ отъ o да a остается постоянно положительной или постоянно отрицательной величиной, опредѣлится знакомъ произведенія $\omega(x).\frac{d\theta(x)}{dx}.\frac{d\omega(x)}{dx}$.

Подставляя въ выраженіе для R

$$a=\omega,\ \varphi(x)=-f'(x),\ \theta(x)=x \text{ и } \omega(x)=F_1(x),$$

находимъ разность $maM-\varepsilon_0$. Такъ какъ $-f'(x)$ и $F_1(x)$, какъ извѣстно, постоянно больше нуля, то знакъ разности $maM-\varepsilon_0$,

---

[1]) При $\varphi(x)=1$ будемъ имѣть, въ томъ случаѣ, когда $\frac{d\theta(x)}{dx}$ и $\frac{d\omega(x)}{dx}$ различныхъ знаковъ,

$$\int_0^a \theta(x)\,\omega(x)\,dx - \frac{1}{a}\int_0^a \theta(x)\,dx \cdot \int_0^a \omega(x)\,dx < 0.$$

Это неравенство извѣстно подъ именемъ *неравенства Чебышева.*

въ предположеніи, что производная $F_1'(x)$ сохраняетъ знакъ въ предѣлахъ $o < x < \omega$, будетъ совпадать со знакомъ этой производной, т. е.

$$\text{при } F_1'(x) < o, \quad maM - \varepsilon_0 < o \quad \text{или } \varepsilon_0 > maM, \text{ а}$$

$$\text{» } F_1'(x) > o, \quad maM - \varepsilon_0 > o \quad \text{или } \varepsilon_0 < maM.$$

Такимъ образомъ, при условіи неизмѣннаго во времени порядка вымиранія, средняя жизнь въ случаѣ возростанія плотности рожденій—больше, и въ случаѣ убыванія плотности рожденій — меньше средняго возраста умершихъ.

Займемся теперь отношеніемъ неравенства между ε_0 и $\frac{1}{m}$.

Подставляя въ выраженіе для R

$$a = \omega, \ \varphi(x) = f(x), \ \theta(x) = \mu(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ и } \omega(x) = F_1(x),$$

получаемъ:
$$R = \frac{\int_0^\omega f(x)\,\mu(x)\,F_1(x)\,dx}{\int_0^\omega f(x)\,F_1(x)\,dx} - \frac{\int_0^\omega f(x)\,\mu(x)\,dx}{\int_0^\omega f(x)\,dx} =$$

$$\frac{-\int_0^\omega F_1(x)\,f'(x)\,dx}{\int_0^\omega F_1(x)\,f(x)\,dx} - \frac{-\int_0^\omega f'(x)\,dx}{\int_0^\omega f(x)\,dx} = m - \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Полагаемъ, что производныя $F_1'(x)$ и $\mu'(x)$ сохраняютъ каждая свой знакъ въ предѣлахъ $o < x < \omega$. Тогда знакъ разности $m - \frac{1}{\varepsilon_0}$ совпадаетъ со знакомъ произведенія $F_1(x) \cdot F_1'(x) \cdot \mu'(x)$ или, что все равно, со знакомъ произведенія $F_1'(x) \cdot \mu'(x)$. Будетъ:

$$\text{При } F'_1(x) < o \text{ и } \mu'(x) < o, \ m - \frac{1}{\varepsilon_0} > o, \text{ отс. } m > \frac{1}{\varepsilon_0} \text{ или } \varepsilon_0 > \frac{1}{m}$$

$$\text{» } F'_1(x) < o \text{ и } \mu'(x) > o, \ m - \frac{1}{\varepsilon_0} < o, \text{ отс. } m < \frac{1}{\varepsilon_0} \text{ или } \varepsilon_0 < \frac{1}{m}$$

При $F_1'(x) > o$ и $\mu'(x) < o$, $m - \frac{1}{\varepsilon_0} < o$, отс. $m < \frac{1}{\varepsilon_0}$ или $\varepsilon_0 < \frac{1}{m}$

» $F'_1(x) > o$ и $\mu'(x) > o$, $m - \frac{1}{\varepsilon_0} > o$, отс. $m > \frac{1}{\varepsilon_0}$ или $\varepsilon_0 > \frac{1}{m}$.

Итакъ, *знакъ неравенства, связывающаго среднюю жизнь съ обратной величиной коэффиціента смертности, не вполнѣ опредѣляется тѣмъ, будетъ-ли плотность рожденій возростать или убывать, а зависитъ еще отъ вида функціи* $\mu(x)$ *или иначе— отъ порядка вымиранія.*

Изслѣдуемъ послѣднюю остающуюся зависимость, именно зависимость между $\frac{1}{n}$ и maM. Вводимъ обозначенія:

$$-\int_0^\omega F_1(x) f'(x) x\, dx = \alpha \qquad \int_0^\omega F_1(x) f(x)\, dx = \beta$$

$$-\int_0^\omega F_1(x) f'(x)\, dx = \alpha_1 \qquad F_1(o) = -\int_0^\omega F_1(o) f'(x)\, dx = \beta_1.$$

Тогда $maM = \frac{\alpha}{\alpha_1}$, $\frac{1}{n} = \frac{\beta}{\beta_1}$. Пусть $\beta - \alpha = \rho$, $\beta_1 - \alpha_1 = \rho_1$.

Имѣемъ $maM = \frac{\alpha}{\alpha_1}$, $\frac{1}{n} = \frac{\alpha + \rho}{\alpha_1 + \rho_1}$.

При $maM > \frac{1}{n}$, $\rho < \frac{\alpha\rho_1}{\alpha_1}$. И дѣйствит.: $\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{\alpha + \rho}{\alpha_1 + \rho_1}$.

Сл. $\alpha\alpha_1 + \alpha\rho_1 > \alpha\alpha_1 + \alpha_1\rho$.

При $maM < \frac{1}{n}$, $\rho > \frac{\alpha\rho_1}{\alpha_1}$. И дѣйствит.: $\frac{\alpha}{\alpha_1} < \frac{\alpha + \rho}{\alpha_1 + \rho_1}$.

Сл. $\alpha\alpha_1 + \alpha\rho_1 < \alpha\alpha_1 + \alpha_1\rho$.

$$\rho = \beta - \alpha = \int_0^\omega F_1(x)\{f(x) + f'(x)x\}\, dx = -\int_0^\omega F_1'(x) f(x) x\, dx$$

$$\rho_1 = \beta_1 - \alpha_1 = \int_0^\omega \{F_1(x) - F_1(o)\} f'(x)\, dx = -\int_0^\omega F_1'(x) f(x)\, dx.$$

Составляемъ разность $\delta = \rho - \frac{\alpha\,\rho_1}{\alpha_1}$. Если $\delta < o$, то $maM > \frac{1}{n}$

и обратно: если $\delta > o$, то $maM < \frac{1}{n}$

$$\delta = -\int_0^\omega F_1'(x) f(x) x\,dx -$$

$$\frac{1}{-\int_0^\omega F_1(x) f'(x)\,dx} \cdot -\int_0^\omega F_1(x) f'(x) x\,dx \cdot -\int_0^\omega F_1'(x) f(x)\,dx.$$

Положивъ въ этой разности $x = \theta(x)$, $-f'(x) F_1(x) = \varphi(x)$, $\omega = a$, $\frac{F'_1(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} = \omega(x)$, получимъ выраженіе разности H.

Съ одной стороны, мы знаемъ, что $-f'(x) F_1(x)$ постоянно $> o$, и $\omega > o$, съ другой стороны, сдѣлаемъ предположеніе, что $\frac{d}{dx}\left\{\frac{F_1'(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}\right\}$ не мѣняетъ знака въ предѣлахъ $o < x < \omega$.

При этихъ условіяхъ, будемъ имѣть, согласно доказанному относительно разности H:

Если $\frac{d}{dx}\left\{\frac{F_1'(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}\right\} > o$, то $\delta > o$ и сл. $maM < \frac{1}{n}$.

» $\frac{d}{dx}\left\{\frac{F_1'(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}\right\} < o$, то $\delta < o$ и сл. $maM > \frac{1}{n}$.

Приложимъ полученный выводъ къ нѣсколькимъ частнымъ случаямъ:

1° пусть, напр., плотность рожденій возростаетъ или убываетъ въ геометрической прогрессіи, т. е.,

$$F'(t) = aq^t$$

$o < q < 1$ въ случаѣ убывающей плотности, и $q > 1$ въ случаѣ возростающей плотности.

Припоминаемъ, что $F_1(x) = F(\tau_2 - x) - F(\tau_1 - x) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F'(\tau - x)\,d\tau$. Отсюда

$$F_1(x) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} a q^{\tau - x} d\tau = \frac{a}{\log_e q}\left\{q^{\tau_2 - x} - q^{\tau_1 - x}\right\}$$

$$= \frac{a}{\log_e q}\left[q^{\tau_2 - \tau_1} - 1\right] q^{\tau_1 - x}.$$

$$F_1'(x) = -\frac{a}{\log_e q}\left[q^{\tau_2 - \tau_1} - 1\right] q^{\tau_1 - x} \log_e q. \quad \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} = -\log_e q.$$

Подставляя въ выраженіе $\frac{d}{dx}\left\{\frac{F'_1(x)}{F_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}\right\}$ вмѣсто $\frac{F_1'(x)}{F'(x)}$, $-\log_e q$, а вмѣсто $\frac{f(x)}{f'(x)}$, $-\frac{1}{\mu(x)}$, получаемъ $\frac{d}{dx}\left\{\frac{\log_e q}{\mu(x)}\right\} = \frac{-\log_e q \cdot \mu'(x)}{[\mu(x)]^2}$.

Чтобы $\frac{d}{dx}\left\{\quad\right\}$ не мѣняла знака въ предѣлахъ $o < x < \omega$, должно быть удовлетворено такое условіе: $\mu'(x)$ должна оставаться постоянно положительной или постоянно отрицательной величиной въ предѣлахъ $o < x < \omega$. Тогда

при $q > 1$ и $\mu'(x) > o$, $\frac{d}{dx}\left\{\quad\right\} < o$ и сл. $maM > \frac{1}{n}$

« $q > 1$ и $\mu'(x) < o$, $\frac{d}{dx}\left\{\quad\right\} > o$ и сл. $maM < \frac{1}{n}$

« $q < 1$ и $\mu'(x) > o$, $\frac{d}{dx}\left\{\quad\right\} > o$ и сл. $maM < \frac{1}{n}$

« $q < 1$ и $\mu'(x) < o$, $\frac{d}{dx}\left\{\quad\right\} < o$ и сл. $maM > \frac{1}{n}$.

При $\mu'(x) = 0$, т. е. когда сила смертности при всякомъ возрастѣ остается одна и та-же, $\delta = 0$ и сл. $maM = \frac{1}{n}$. То-же самое имѣетъ мѣсто, когда $q = 1$, т. е. въ населеніи стаціонарномъ.

2⁰ пусть плотность рожденій возрастаетъ или убываетъ въ ариѳметической прогрессіи, т. е. $F'(t) = a + bt$. $b < o$ въ случаѣ убывающей и $b > o$ въ случаѣ возростающей плотности рожденій. Выводимъ: $F_1'(x) = -(\tau_2 - \tau_1)\, b$. и

$$\frac{d}{dx}\left\{\quad\right\} = \frac{(\tau_2 - \tau_1) . b}{F_1(x) . \mu(x)}\left[\frac{(\tau_2 - \tau_1) . b}{F_1(x)} - \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right] =$$

$$= \frac{\tau_2 - \tau_1}{F_1(x)\,\mu(x)}\left[\frac{(\tau_2 - \tau_1)\, b^2}{F_1(x)} - \frac{\mu'(x) . b}{\mu(x)}\right].$$

Очевидно, что, въ случаѣ если $\mu'(x)$ и b различныхъ знаковъ, или въ случаѣ $\mu(x) = \text{const.}$, $\frac{d}{dx}\left\{ \quad \right\}$ непремѣнно $> o$, и слѣд. $maM < \frac{1}{n}$. Если же $\mu'(x)$ и b одинаковыхъ знаковъ, то можно всегда подыскать для b значеніе достаточно малое по абсолютной величинѣ, при которомъ $\frac{d}{dx}\left\{ \quad \right\} < o$ при всякомъ x, и слѣд. $maM > \frac{1}{n}$. Съ другой стороны, очевидно существуетъ такая величина b_1, которая, будучи подставлена въ формулу вмѣсто b, дастъ при всякомъ x $\frac{d}{dx}\left\{ \quad \right\} > o$ и слѣд. $maM < \frac{1}{n}$. Но слѣдуетъ замѣтить, что b_1 можетъ оказаться, по абсолютной величинѣ, больше того наибольшаго, по абс. вел., значенія, которое способна принять величина b.

Такой высшій предѣлъ для абс. вел. b дѣйствительно существуетъ и выводится изъ условія $F_1(x)$ всегда $> o$.

$F_1'(x) = -(\tau_2 - \tau_1) b$. Сл. $F_1(x) = F_1(o) - (\tau_2 - \tau_1) bx$. Пусть $b > o$. Тогда очевидно $F_1(x)$ получаетъ наименьшее значеніе при $x = \omega$, но $F_1(\omega) = F_1(o) - (\tau_2 - \tau_1) b \cdot \omega > o$. Отс. $b < \frac{F_1(o)}{(\tau_2 - \tau_1)\omega}$.

Пусть $b < o$. Тогда $F_1(x)$ получаетъ наименьшее значеніе при $x = o$, но $F_1(o) = F_1(\omega) + (\tau_2 - \tau_1) b \cdot \omega > o$. Отс. $b > -\frac{F_1(\omega)}{(\tau_2 - \tau_1)\omega}$. Итакъ, въ томъ случаѣ, когда b_1 не выходитъ изъ предѣловъ $-\frac{F_1(\omega)}{(\tau_2 - \tau_1)\omega}$ и $\frac{F_1(o)}{(\tau_2 - \tau_1)\omega}$, можно утверждать, что, при достаточно быстромъ возростаніи плотности рожденій, maM можетъ быть сдѣлана меньше $\frac{1}{n}$ при $\mu'(x) > o$, или что, при достаточно быстромъ убываніи плотности рожденій, maM можетъ быть тоже сдѣлана меньше $\frac{1}{n}$ при $\mu'(x) < o$.

Въ противномъ случаѣ, т. е. когда b_1 выходитъ изъ сказанныхъ предѣловъ, этого утверждать нельзя, но нельзя утверждать и обратнаго.

Легко убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ двухъ положеній:

а) Если, при $b > o$ и $\mu'(x) > o$, имѣетъ мѣсто при всякомъ x неравенство $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} < \frac{1}{\omega}$, то, при достаточно быстромъ возростаніи плотности рожденій, $maM < \frac{1}{n}$.

И дѣйствительно: пусть $b = \frac{F_1(o)}{(\tau_2 - \tau_1)\omega}$, отс. $\frac{(\tau_2 - \tau_1) b}{F_1(o)} = \frac{1}{\omega}$.

Такъ какъ $F_1(x) < F_1(o)$ [здѣсь $o < x < \omega$],

то $\frac{(\tau_2 - \tau_1) b}{F_1(x)} > \frac{1}{\omega} > \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$ при всякомъ x, а потому $\frac{(\tau_2 - \tau_1) b}{F_1(x)} - \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$ всегда $> o$.

Слѣд., $\frac{d}{dx}\left\{ \quad \right\} > o$ и $maM < \frac{1}{n}$, ч. и т. д.

б.) Если, при $b < o$ и $\mu'(x) < o$, имѣетъ мѣсто при всякомъ x неравенство $\frac{-\mu'(x)}{\mu(x)} < \frac{1}{\omega}$, то, при достаточно быстромъ убываніи плотности рожденій, $maM < \frac{1}{n}$.

И дѣйствительно: пусть $b = \frac{-F_1(\omega)}{(\tau_2 - \tau_1)\omega}$, отс. $\frac{-(\tau_2 - \tau_1) b}{F_1(\omega)} = \frac{1}{\omega}$.

Такъ какъ $F_1(x) < F_1(\omega)$ [здѣсь $o < x < \omega$],

$$\text{то } \frac{-(\tau_2 - \tau_1) b}{F_1(x)} > \frac{1}{\omega} > -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$$

при всякомъ x, а потому $\frac{(\tau_2 - \tau_1) b}{F_1(x)} - \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} < o$.

Слѣд. $\frac{d}{dx}\left\{ \quad \right\} > o$ и $maM < \frac{1}{n}$, ч. и т. д.

Итакъ, *знакъ неравенства, связывающаго обратную величину коэффиціента рождаемости съ среднимъ возрастомъ умершихъ не вполнѣ опредѣляется тѣмъ, будетъ-ли плотность рожденій возростать или убывать, а зависитъ еще отъ закона, по которому происходитъ это возростаніе или убываніе, и отъ вида функціи* $\mu(x)$ *или, иначе, отъ порядка вымиранія.*

Небезинтересно показать, какъ изобразятся графически вы-

веденныя соотношенія неравенства между величинами $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$, maM и ε_0.

Черт. I, II и III построены въ предположеніи $F'(t)=aq^t$, т. е. въ томъ предположеніи, что плотность рожденій возростаетъ ($q>1$) или убываетъ ($q<1$) въ геометрической прогрессіи. По оси абсциссъ отложены длины величинъ $q-1$; отрицательныя значенія, соотвѣтствующія тому случаю когда $q<1$, *влѣво*, положительныя—когда $q>1$, *вправо* отъ начала координатныхъ осей. По оси ординатъ отложены величины $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$, maM и ε_0.

Черт. I соотвѣтствуетъ тому случаю, когда производная $\mu'(x)$ остается постоянно отрицательной величиной въ предѣлахъ $o<x<\omega$.

Черт. II соотв. тому случаю, когда $\mu'(x)=o$, т. е. $\mu(x)=\text{const}$.

Черт. III соотв. тому случаю, когда $\mu'(x)$ постоянно $>o$.

Черт. IV, V, VI построены въ предположеніи $F'(t)=a+bt$, т. е. въ томъ предположеніи, что плотность рожденій возростаетъ ($b>o$) или убываетъ ($b<o$) въ ариѳметической прогрессіи. По оси абсциссъ отложены значенія b—положительныя—*вправо*, отрицательныя — *влѣво* отъ начала координатныхъ осей. По оси ординатъ отложены величины $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$, maM и ε_0.

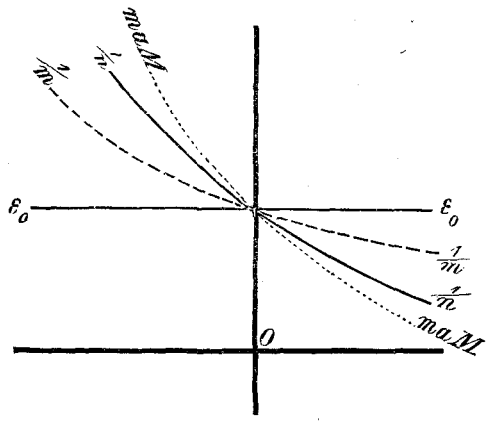
Черт. IV соотв. тому случаю, когда $\mu'(x)<o$.

Черт. V « « $\mu'(x)=o$.

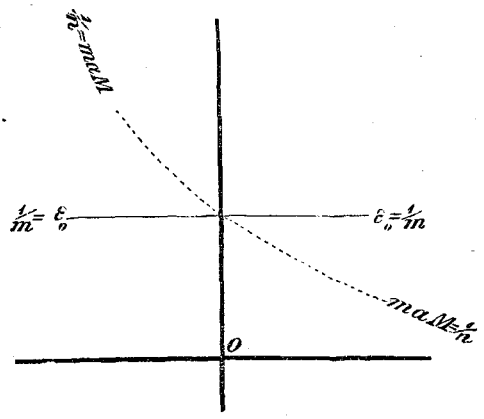
Черт. VI « « $\mu'(x)>o$.

При составленіи чертежей IV и VI допущено, что b_1 не выходитъ изъ предѣловъ $\frac{-F_1(\omega)}{(\tau_2-\tau_1)\omega}$ и $\frac{F_1(o)}{(\tau_2-\tau_1)\omega}$. (см. выше).

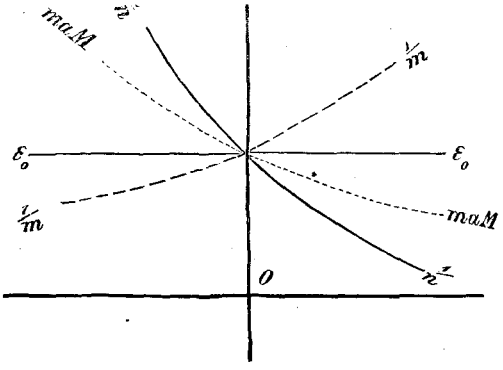
При этомъ условіи кривыя $\frac{1}{n}$ и maM непремѣнно пересѣкутся по 2 раза на черт. IV и VI. При несоблюденіи-же означеннаго условія, представится случай сомнительный, т. е. нельзя будетъ сказать, пересѣчется ли кривая $\frac{1}{n}$ съ кривой maM еще въ другой точкѣ, кромѣ той, которая соотвѣтствуетъ значенію $b=o$.



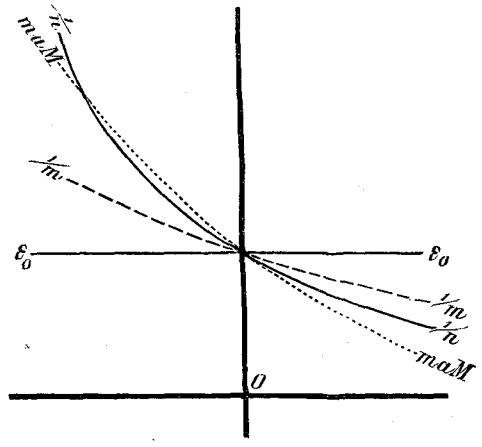
I.



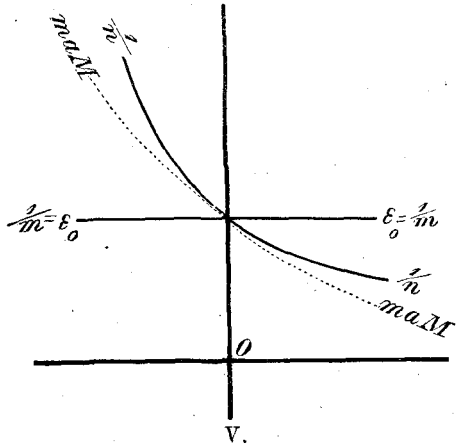
II.



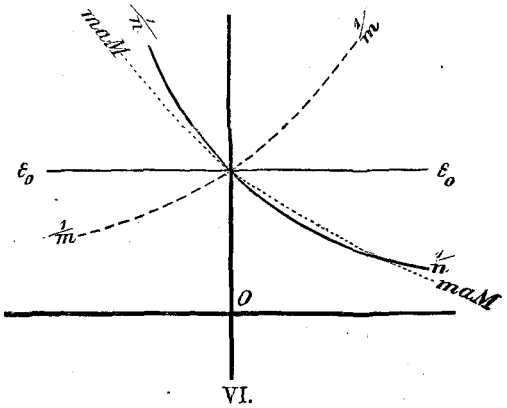
III.



IV.



V.



VI.

Изъ выведенныхъ положеній легко усмотрѣть, какъ ничтожно біометрическое значеніе величинъ m, n и maM, не говоря уже о величинѣ maP, и это потому, что эти величины являются функціями не одной только смертности, а обусловливаются плотностію рожденій. Только при опредѣленныхъ ограничительныхъ условіяхъ, которыя на практикѣ рѣдко представляются вполнѣ строго выполненными, величины $\frac{1}{n}$ и maM могутъ служить нѣкоторымъ указаніемъ на значеніе величины ε_0, т. е. истинной мѣры жизни. Да къ тому-же, бѣда въ томъ, что $\frac{1}{n}$ и maM лежатъ по одну и ту-же сторону величины ε_0; и въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что, въ предположеніи неизмѣннаго порядка вымиранія, ε_0 будетъ больше и величины $\frac{1}{n}$, и величины maM, въ случаѣ возростающей плотности рожденій, и наоборотъ: ε_0 меньше и величины $\frac{1}{n}$, и величины maM, въ случаѣ убывающей плотности рожденій. Слѣд. намъ не удалось въ числѣ величинъ $\frac{1}{n}$, maM и $\frac{1}{m}$ отыскать высшій и низшій предѣлы для ε_0, такъ какъ $\frac{1}{n}$ и maM лежатъ по одну и ту-же сторону величины ε_0, являясь обѣ заразъ при одномъ условіи — низшимъ, при другомъ — высшимъ предѣломъ, а относительно остающейся величины $\frac{1}{m}$, согласно доказанному, нельзя сказать, будетъ-ли она больше или меньше ε_0 въ зависимости отъ того, возростаетъ или убываетъ плотность рожденій.

Иначе думаютъ тѣ статистики, которые считаютъ возможнымъ приближенно вычислять значеніе ε_0 по формулѣ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$. Эту формулу они основываютъ на томъ соображеніи, что ε_0 лежитъ гдѣ нибудь между $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$, а такъ какъ при возростающей плотности рожденій $\varepsilon_0 > \frac{1}{n}$, а при убывающей $\varepsilon_0 < \frac{1}{n}$, то слѣдовательно эти статистики должны бы были доказать, что при условіи $F_1'(x) < o$ (возростаніе плотности рожденій) $\varepsilon_0 < \frac{1}{m}$, а при $F_1'(x) > o$ (убывающая плотность рожденій) $\varepsilon_0 > \frac{1}{m}$. Доказать это, не дѣлая

какихъ-либо предположеній о ходѣ вымиранія, нельзя — и мы видимъ, что большинство статистиковъ, рекомендующихъ формулу $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$, вовсе не заботятся о доказательствѣ, обыкновенно довольствуясь ссылками на авторитеты, какъ старые, такъ и новые; авторитеты-же, въ родѣ Ваппеуса и Бертильона, подъ видомъ доказательста существованія неравенства $\frac{1}{m} > \varepsilon_0 > \frac{1}{n}$ при возрост. плотности рожденій и неравенства $\frac{1}{n} > \varepsilon_0 > \frac{1}{m}$ при условіи убывающей плотности рожденій, предлагаютъ читателю разсужденія, по меньшей мѣрѣ, неубѣдительныя. (См. *Wappäus*. Allgemeine Bevölkerungsstatistik—начало II тома, и *Bertillon* въ статьѣ Mortalité въ Dictionnaire encyclopédique des sciences médicales). Не вдаваясь въ подробную критику соотвѣтствующихъ мѣстъ сочиненій названныхъ авторовъ, ограничусь указаніемъ существа той основной ошибки, которая привела этихъ авторовъ или вѣрнѣе ихъ предшественниковъ къ невѣрному заключенію. Дѣло въ томъ, что способъ опредѣленія величины ε_0 по формулѣ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$ очень давняго происхожденія: его находятъ у Прейса (XVIII в.), Мальтуса, Бернулли (Даніила) и др. Отъ нихъ-то и заимствуютъ этотъ способъ новѣйшіе статистики. Итакъ, значитъ, и тѣ авторы полагали, что ε_0 лежитъ всегда въ промежуткѣ между $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$. Мейеръ (G. Meyer—Die mittlere Lebensdauer стр. 44—46 въ Hildebrand's Jahrbücher für Nationalökonomie u. Statistik 1867) думаетъ, что такое ихъ мнѣніе основывалось на ошибочномъ отожествленіи средняго возраста умершихъ со средней продолжительностію жизни. И дѣйствительно, если ввести условіе $maM = \varepsilon_0$, то получится: для населенія съ возростающей плотностію рожденій

$$\frac{1}{m} > maM = \varepsilon_0 > \frac{1}{n},$$ а для населенія съ убывающей плотн. р. $\frac{1}{n} > \varepsilon_0 = maM > \frac{1}{m}$.

Я думаю, что объясненіе Мейера можно обобщить и сказать:

выводъ неравенства $\frac{1}{m} > \varepsilon_0 > \frac{1}{n}$, при возрост. пл. р., и $\frac{1}{n} > \varepsilon_0 > \frac{1}{m}$, при убыв. пл. р., основанъ на томъ предположеніи, что результатъ вывода не измѣнится, если для простоты принять, что нѣкоторая величина (въ данномъ случаѣ: возрастъ, до котораго человѣкъ доживаетъ), математическое ожиданіе которой есть ε_0, постоянно сохраняетъ значеніе ε_0 или иначе: можетъ быть во всѣхъ случаяхъ замѣнена своимъ математическимъ ожиданіемъ. Допустимъ это: тогда вымираніе нельзя будетъ разсматривать, какъ происходящее непрерывно, и въ нашихъ формулахъ придется положить $\omega = \varepsilon_0$, и всѣ значенія $f(x)$ въ предѣлахъ отъ $x = o$, до $x = \varepsilon_0$ принять равными единицѣ; будетъ $\frac{1}{m} = \frac{\int_0^{\varepsilon_0} F_1(x)\,dx}{F_1(\varepsilon_0)}$, $\frac{1}{n} = \frac{\int_0^{\varepsilon_0} F_1(x)\,dx}{F_1(o)}$. Знаменатель выраженія $\frac{1}{m}$ долженъ давать число умершихъ втеченіе промежутка τ_1—τ_2; ясно, что, если всѣ лица доживаютъ до возраста ε_0, то число умершихъ въ промежутокъ τ_1—τ_2 равняется числу родившихся въ періодъ отъ τ_1—ε_0 до τ_2—ε_0, а это и будетъ $F_1(\varepsilon_0)$.

$$\frac{1}{m} = \frac{F_1(\xi)}{F_1(\varepsilon_0)}\varepsilon_0,\ \frac{1}{n} = \frac{F_1(\xi)}{F_1(o)}\varepsilon_0,\ \text{гдѣ}\ \varepsilon_0 > \xi > o.$$

Очевидно, что при условіи $F'_1(x) < o$ (возрастаніе плотности рожденій), $\frac{F_1(\xi)}{F_1(\varepsilon_0)} > 1$, а $\frac{F_1(\xi)}{F_1(o)} < 1$; слѣд. $\frac{1}{m} > \varepsilon_0 > \frac{1}{n}$, а при условіи $F'_1(x) > o$ (убывающая плотность рожденій) $\frac{F_1(\xi)}{F_1(\varepsilon_0)} < 1$, а $\frac{F_1(\xi)}{F_1(o)} > 1$, и слѣд. $\frac{1}{m} < \varepsilon_0 < \frac{1}{n}$. Предложенное мною объясненіе разбираемой ошибки статистиковъ вполнѣ сходится съ объясненіемъ Мейера, такъ какъ само собой разумѣется, что замѣна различныхъ значеній, принимаемыхъ перемѣнной x, ея математическимъ ожиданіемъ равносильна допущенію, что всѣ лица умираютъ въ возрастѣ ε_0, а при такомъ допущеніи исчезаетъ различіе между средней продолжительностію жизни и среднимъ возрастомъ умершихъ; эти двѣ величины отожествляются.

Я хотѣлъ только показать, что ошибочное отношеніе нера-

венства, принимаемое нѣкоторыми авторами, можно вывести, не пользуясь дѣйствительно существующей зависимостію между $\frac{1}{m}$ и maM и слѣд. не предполагая, какъ предположилъ Мейеръ, что ошибавшимся была извѣстна эта зависимость. Нельзя не отмѣтить слѣдующаго противорѣчія у Бертильона-отца и другихъ статистиковъ: утверждая, что ε_0 лежитъ въ промежуткѣ между $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$, они, казалось бы, должны быть убѣждены въ томъ, что: 1) при возрастающей плотности рожденій $\varepsilon_0 < \frac{1}{m}$, а 2) при убывающей плотности рожденій $\varepsilon_0 > \frac{1}{m}$. Всякій, однако, усомнится въ твердости этого убѣжденія, когда у Бертильона напр., въ той-же статьѣ «*Mortalité*» (стр. 788 — 789), найдетъ высказаннымъ такой взглядъ: въ населеніи, съ возростающимъ годовымъ числомъ рожденій, общій смертный коэффиціентъ будетъ *больше* того коэффиціента, который получился бы для населенія стаціонарнаго, подверженнаго одинаковой съ первымъ населеніемъ повозрастной смертности; иначе говоря: Бертильонъ утверждаетъ, что, при условіи возростающей плотности рожденій, $m > \frac{1}{\varepsilon_0}$, откуда $\varepsilon_0 > \frac{1}{m}$, т. е. утверждаетъ прямо обратное тому, что онъ утверждалъ на одной изъ предыдущихъ страницъ той-же самой статьи, гдѣ говорилъ объ опредѣленіи средней продолжительности жизни по формулѣ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$. Итакъ, ненадежность тѣхъ сокращенныхъ пріемовъ, которые предлагаются нѣкоторыми статистиками для опредѣленія величины средней продолжительности жизни, не подлежитъ сомнѣнію. Такой отрицательный выводъ косвеннымъ образомъ указываетъ на большое значеніе и существенную важность таблицы смертности, какъ мѣрила жизни, такъ какъ оказалось, что только изъ показаній таблицы, именно изъ значеній функціи $f(x)$, можетъ быть найдена величина средней продолжительности жизни.

Построеніе таблицы смертности мужскаго православнаго населенія Европейской Россіи.

Изъ трехъ родовъ совокупностей, которыя, вообще говоря, могутъ быть показываемы статистикой, совокупностей родившихся, живущихъ и умершихъ, по всей Европейской Россіи имѣются только данныя о первыхъ и третьихъ, совокупности живущихъ не даются; ни разу не было произведено всероссійской переписи населенія. Въ виду этого, въ основаніе таблицы русской смертности могутъ быть положены только записи рожденій и смертей, и въ извѣстнаго рода комбинаціи этихъ двухъ элементовъ долженъ заключаться способъ построенія таблицы. Сохраняя старыя обозначенія, имѣемъ

$$-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\,dx\,dt = -F'(t)\,f'(x)\,dx\,dt, \text{ гдѣ } F'(t) = U(o,t)$$

$f(x)$ выражаетъ искомый порядокъ вымиранія. Такъ какъ виды функцій $U(x, t)$ и $F'(t)$ неизвѣстны, то изъ написанной зависимости непосредственно нельзя вывести значеніе $f'(x)$. Пусть умершіе даны намъ по такимъ возрастнымъ группамъ, въ которыхъ разность предѣловъ возраста есть $2s$, и пусть въ одной изъ такихъ группъ низшій предѣлъ возраста будетъ x_1, высшій x_2. Совокупности умершихъ по необходимости даны за конечные промежутки времени, опредѣленные или предѣлами періода рожденія, къ которому относится данная совокупность, t_1 и t_2, или предѣлами времени смерти, τ_1 и τ_2. Чтобъ получить отношеніе равенства между двумя конечными величинами, придется два раза проинтегрировать обѣ части написаннаго равинства, разъ — по x, и другой разъ — по одной изъ перемѣнныхъ t или τ. Если мы проинтегрируемъ по x и по t, то получимъ:

$$\text{(I)} \qquad -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\,dx\,dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}F'(t)\,f'(x)\,dx\,dt =$$

$$= \{f(x_1) - f(x_2)\}\int_{t_1}^{t_2}F'(t)\,dt.$$

Лѣвая часть равенства есть совокупность вида M_1, и величина $\{f(x_1) - f(x_2)\}$ опредѣлится простымъ дѣленіемъ совокупности умершихъ M_1 на соотвѣтствующую совокупность родившихся.

Если-же мы пожелаемъ произвести интегрированіе по x и по τ, то нужно будетъ предварительно замѣнить перемѣнную t черезъ $\tau - x$, и будетъ

$$\text{(II)} \quad -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U(x, \tau - x)}{\partial x} dx d\tau = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{x_1}^{x_2} F'(\tau - x) f'(x) dx d\tau,$$

гдѣ лѣвая часть равенства есть совокупность вида M_3, а правая не можетъ быть разбита на произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ зависѣлъ бы только отъ $f(x)$, другой только отъ $F'(t)$; поэтому искомая смертность можетъ быть опредѣлена лишь помощью пріемовъ приближенныхъ.

Рѣшая задачу по формулѣ (I), мы полагаемъ постоянными предѣлы времени рожденія для каждаго возраста, лежащаго въ промежуткѣ отъ x_1 до x_2. При рѣшеніи каждой предыдущей или послѣдующей частной задачи, можно оставлять тѣ-же самые предѣлы времени рожденія, t_1 и t_2, и такимъ путемъ получить рядъ значеній вида $\{f(x_1 \pm 2ms) - f(x_2 \pm 2ms)\}$, гдѣ $2s = x_2 - x_1$, а m число цѣлое и $> o$; изъ этого ряда выведется путемъ послѣдовательныхъ вычитаній рядъ значеній вида $f(x)$, дающій порядокъ вымиранія поколѣнія родившихся, относящагося къ періоду $t_1 - t_2$. Очевидно, что, при такомъ способѣ составленія таблицы, совокупности умершихъ, на которыхъ будетъ основана таблица, будутъ относиться каждая къ иному періоду умиранія: этотъ періодъ будетъ заключенъ для каждой совокупности въ предѣлахъ $(t_1 + x_1 \pm 2ms)$ и $(t_2 + x_2 \pm 2ms)$. Еслибы мы пожелали построить полную таблицу смертности, т. е. для всѣхъ возрастовъ отъ o до ω, то, полагая $\omega =$ напр. 100 годамъ, получили бы вѣковой періодъ умиранія различныхъ совокупностей, легшихъ въ основаніе таблицы. Въ виду явныхъ неудобствъ и трудностей, съ которыми сопряжено

примѣненіе такого метода, онъ употребляется вообще рѣдко и не былъ примѣненъ никѣмъ къ вычисленію таблицы смертности для Россіи.—Одинъ изъ составителей таблицъ русской смертности, г. Андреевъ воспользовался формулой (I) для рѣшенія каждой частной задачи, т. е. для вывода значеній вида $\{f(x_1 \pm 2ms) - f(x_2 \pm 2ms)\}$, но для всѣхъ задачъ оставлялъ неизмѣнными предѣлы времени умиранія: $(t_1 + x_1 \pm 2ms)$ и $(t_2 + x_2 \pm 2ms)$, измѣняя соотвѣтственно предѣлы времени рожденія, а затѣмъ изъ полученныхъ величинъ означеннаго вида вывелъ рядъ значеній $f(x)$. Такой пріемъ очевидно не совпадаетъ съ тѣмъ пріемомъ, при которомъ полагаютъ постоянными предѣлы времени смерти для каждаго возраста, измѣняя соотвѣтственно для каждаго-же возраста предѣлы времени рожденія, что принято въ формулѣ II. Дѣло въ томъ, что, по методу г. Андреева, всѣ лица M_1, умершіе въ какихъ-нибудь предѣлахъ возраста x_1 и x_2, относятся къ періоду рожденія $t_1 - t_2$. Разбивая промежутокъ отъ x_1 до x_2 на n равныхъ промежутковъ длины Δx, такъ что $x_2 - x_1 = n \Delta x$, мы видимъ, что для тѣхъ лицъ изъ совокупности M_1, которые умерли въ возрастѣ отъ $[x_1 + \varkappa \Delta x]$ до $[x_1 + (\varkappa + 1)\Delta x]$ гдѣ $\varkappa + 1 < n$, предѣлы времени смерти будутъ $[t_1 + x_1 + \varkappa \Delta x]$ и $[t_2 + x_1 + (\varkappa + 1)\Delta x]$, а для лицъ умершихъ въ возрастѣ отъ $[x_1 + \varkappa' \Delta x]$ до $[x_1 + (\varkappa' + 1)\Delta x]$, гдѣ $\varkappa' + 1 < n$ и $\varkappa'$ не $= \varkappa$, предѣлы времени смерти будетъ очевидно иные. Можно сказать, что въ способѣ г. Андреева предѣлы времени рожденія, устанавливаемые для каждаго возраста, измѣняются не непрерывно, какъ это имѣетъ мѣсто въ формулѣ (II), а скачками. Пусть напр. для возрастной группы 0 — 5 лл. предѣлы времени рожденія будутъ t_1 и t_2; слѣд. и для всякаго промежуточнаго возраста, какъ напр. 2, $3^1/_2$, 4,7, предѣлы времени рожденія остаются тѣ-же t_1 и t_2. Для слѣдующей же группы 5—10 лл. предѣлы времени рожденія будутъ уже $t_1 - 5$ и $t_2 - 5$ и т. д. Однако, при $x_2 - x_1$ не слишкомъ большомъ, таблицѣ, построенной по способу г. Андреева, позволительно придавать тотъже смыслъ, какой присущъ таблицѣ, построенной по способу, исходящему изъ формулы (II). [Я подразумѣваю, конечно, что при

составленіи таблицы по послѣднему способу предѣлы τ_1 и τ_2 остаются тѣ-же при рѣшеніи каждой частной задачи]. Но, строго говоря, различіе между таблицами, составленными: одна по способу формулы (II), другая по способу г. Андреева, исчезаетъ лишь при томъ условіи, что разность предѣловъ возраста каждой группы, есть величина безконечно-малая. Рѣшеніе каждой частной задачи по способу г. Андреева весьма просто, если извѣстны совокупности вида M_1; въ дѣйствительности-же русскія данныя не заключаютъ въ себѣ совокупностей вида M_1, а показываются непосредственно совокупности вида M_3. Поэтому, г. Андрееву пришлось заняться рѣшеніемъ вопроса о *переходѣ отъ совокупностей вида M_3 къ совокупностямъ вида M_1*. При изложеніи способа г. Андреева, я буду, во избѣжаніе недоразумѣній, по возможности придерживаться обозначеній автора. — Пусть искомое число умершихъ въ возрастѣ отъ x_1 до x_2 изъ родившихся въ промежутокъ отъ t_1 до t_2 будетъ m_1. Лица этой совокупности умирали въ промежутокъ отъ $(t_1 + x_1)$ до $(t_2 + x_2)$. Пусть $t_2 - t_1 = x_2 - x_1 = 2s$. Весь этотъ промежутокъ разбиваемъ на два: *первый*, продолжающійся отъ $(t_1 + x_1)$ до $(t_1 + x_2) = (t_2 + x_1)$ и *второй:* отъ $(t_2 + x_1)$ до $(t_2 + x_2)$. Пусть число умершихъ въ первый періодъ изъ совокупности m_1 будетъ B, во второй A_1, такъ что $m_1 = B + A_1$. B не представляетъ всѣхъ умершихъ въ возрастѣ x_1 до x_2 втеченіе перваго промежутка, такъ какъ часть этихъ умершихъ относится по времени рожденія къ болѣе раннему періоду, чѣмъ періодъ $t_1 - t_2$, и именно къ періоду $(t_1 - 2s) - t_1$. Пусть эта часть умершихъ будетъ A, а все число умершихъ втеченіе промежутка отъ $(t_1 + x_1)$ до $(t_1 + x_2)$ въ возрастѣ отъ x_1 до x_2 пусть будетъ n (n есть совокупн. вида M_3). Тогда $A + B = n$. Съ другой стороны, и число A_1 есть тоже только часть умершихъ въ періодъ $(t_2 + x_1)$ до $(t_2 + x_2)$ въ возрастѣ отъ x_1 до x_2, такъ какъ другая часть, пусть она будетъ B_1, относится къ болѣе позднему періоду рожденія, чѣмъ періодъ $t_1 - t_2$, и именно къ періоду t_2 до $(t_2 + 2s)$. Означивъ все число умершихъ въ періодъ $(t_2 + x_1)$ до

$(t_2 + x_2)$ въ возрастныхъ предѣлахъ x_1 и x_2 чрезъ n_1, будемъ имѣть $A_1 + B_1 = n_1$, гдѣ n_1 есть совокупн. вида M_3; n и n_1 предполагаются извѣстными. Итакъ имѣемъ два уравненія $A + B = n$ и $A_1 + B_1 = n_1$, неизвѣстная $m_1 = B + A_1$. Вводимъ обозначеніе $\frac{n+n_1}{2} = m$ и $m_1 = m + \mu$. Первымъ приближеннымъ значеніемъ для m_1 г. Андреевъ считаетъ m и употребляетъ его для всѣхъ возрастныхъ группъ, кромѣ первой, т. е. самой младшей, 0—5лл., для которой онъ изобрѣтаетъ слѣдующій пріемъ. Пріемъ этотъ основанъ на двухъ допущеніяхъ: первое состоитъ въ томъ, что между соотвѣтствующими частями, на которыя разбиваются каждая изъ совокупностей n и n_1, существуетъ такое-же отношеніе, какъ между самими величинами n и n_1: предполагается слѣдовательно, что, если $\frac{n_1}{n} = q$, то $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = q$. Отсюда $\frac{B}{A} = \frac{B_1}{A_1} = \rho$ (величина неизвѣстная). Легко вывести $\mu = -m\frac{(1-q)(1-\rho)}{(1+q)(1+\rho)}$. Отсюда видно, что поправка μ обращается въ o при одномъ изъ условій: $B = A$, или $n = n_1$. Изъ тѣхъ-же обозначеній получается $\frac{A_1}{B}\rho = q$. Задача можетъ быть, слѣд., сведена къ опредѣленію отношенія $\frac{A_1}{B}$, такъ какъ тогда сразу опредѣлится ρ, а затѣмъ и μ. Это отношеніе $\frac{A_1}{B}$ г. Андреевъ находитъ посредствомъ такого пріема. Положимъ, что намъ извѣстна искомая смертность, т. е. значеніе вида $f(x)$ для годовыхъ промежутковъ возраста, съ одной стороны, а съ другой, что намъ извѣстны годовыя числа рожденій. Тогда можно было бы съ достаточной степенью точности опредѣлить численныя значенія величинъ A_1 и B. Но смертность г. Андрееву неизвѣстна, извѣстны только годовыя числа рожденій: исходя изъ послѣднихъ, г. Андреевъ вычисляетъ, чему бы равнялись величины A_1 и B, еслибы въ Россіи дѣйствовала какая-нибудь извѣстная смертность. Заимствуя показанія изъ таблицы Варгентина, г. Андреевъ приближенно вычисляетъ величины a_1 и b, т. е. тѣ значенія для совокупностей A_1 и B, которыя получились бы при данныхъ числахъ русскихъ рожденій, комби-

нированныхъ съ показаніями таблицы шведской смертности, и допускаетъ, что $\frac{A_1}{B} = \frac{a_1}{b}$. Это и есть второе допущеніе, на которомъ основанъ описываемый пріемъ, и допущеніе это, легко видѣть, состоитъ въ томъ, что числа умершихъ въ извѣстныхъ возрастахъ по искомой русской таблицѣ, т. е. величины вида $\{f(x_1) - f(x_2)\}$, предполагаются пропорціональными (отнюдь не равными) соотвѣствующимъ числамъ какой-нибудь извѣстной, въ данномъ случаѣ Варгентиновской, таблицы смертности. Такъ разрѣшаетъ г. Андреевъ вопросъ о переходѣ отъ совокупностей вида M_3 къ совокупностямъ вида M_1. Противъ изложеннаго способа можно возражать: 1) съ точки зрѣнія нежелательности вообще, при измѣреніи смертности, пользоваться, какъ вспомогательнымъ средствомъ, результатами измѣренія другой какой-нибудь смертности, будетъ-ли то смертность другаго населенія или того-же населенія за другой періодъ времени; 2) я думаю, что г. Андрееву не было нужды прибѣгать къ первому изъ своихъ допущеній; дѣло въ томъ, что отношенія $\frac{A_1}{A}$ и $\frac{B_1}{B}$ также могутъ быть опредѣлены тѣмъ пріемомъ, который примѣненъ г. Андреевымъ къ опредѣленію отношенія $\frac{A_1}{B}$. Вообще говоря, первое допущеніе будетъ стоять въ противорѣчіи со вторымъ; положимъ, что пропорціональность показаній таблицы искомой русской смертности показаніямъ шведской таблицы и на самомъ дѣлѣ имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности. Тогда въ простѣйшемъ случаѣ, именно когда смертность постоянна во времени, могутъ быть вычислены отношенія между величинами A, A_1, B и B_1. Легко убѣдиться въ томъ, что для того, чтобъ было удовлетворено условіе $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B}$, должна существовать извѣстная зависимость между годовыми числами рожденій *), а между тѣмъ г. Андреевъ никакой такой зависимости не предполагаетъ, а напротивъ того, прини-

*) Можно показать, что эти числа должны бы были возрастать въ геометрической прогрессіи; это въ томъ предположеніи, что каждая совокупность родившихся подвержена тому-же порядку вымиранія.

маетъ въ разсчетъ данныя числа рожденій при вычисленіи поправки. Естественнѣе было бы поступить такимъ образомъ: найти числа a, a_1, b и b_1, которыя выражали бы приближенно значенія неизвѣстныхъ A, A_1, B и B_1 въ предположеніи дѣйствія шведской смертности на русскія числа рожденій, и допустить пропорціональность: $A=a\lambda$, $B=b\lambda$, $A_1=a_1\lambda$, $B_1=b_1\lambda$; λ опредѣлилась бы изъ условія $(a+a_1+b+b_1)\lambda=(n+n_1)$. Но тогда могли бы оказаться несоблюденными условія $A+B=n$ и $A_1+B_1=n_1$, во избѣжаніе чего можно было бы поступить такъ: принять, что коэффиціентъ пропорціональности λ различенъ для двухъ періодовъ: перваго, къ которому относится совокупность n, и втораго, къ которому относится совокупность n_1, и было бы:

$$A=a\lambda,\ B=b\lambda,\ A_1=a_1\lambda_1,\ B_1=b_1\lambda_1,\ \text{но}\ A+B=n,\ A_1+B_1=n_1;$$

слѣдовательно: $\lambda=\frac{n}{a+b}$, $\lambda_1=\frac{n_1}{a_1+b_1}$. Отсюда искомая величина

$$m_1=B+A_1=\frac{n}{\left(1+\frac{a}{b}\right)}+\frac{n_1}{\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)}.$$

Рѣшеніе задачи о переходѣ отъ совокупностей вида M_3 къ совокупностямъ вида M_1 можетъ быть основано на иныхъ началахъ.

Пусть по прежнему требуется опредѣлить совокупность вида M_1, для которой предѣлы времени рожденія — t_1 и t_2, предѣлы возраста — x_1 и x_2.

Даны совокупности вида M_3, въ которыхъ предѣлы возраста тѣ-же x_1 и x_2, а предѣлы времени смерти τ и $\tau+\Delta\tau$. $\Delta\tau \overline{\overline{<}} x_2-x_1$. Условимся означать черезъ $\Phi(\tau)$ число умершихъ въ возрастѣ отъ x_1 до x_2 отъ какого-нибудь начальнаго момента τ_0 до τ, такъ что

$$\Phi(\tau)=-\int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_0-x}^{\tau-x}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\,dt\,dx.\quad \text{Пусть}\ \Phi(\tau+\Delta\tau)-\Phi(\tau)=\Delta\Phi(\tau).$$

Условимся обозначать каждый промежуточный возрастъ между x_1 и x_2 черезъ $x_1 + z\Delta x$, гдѣ $z = \frac{x - x_1}{\Delta x}$. Пусть $\frac{x_2 - x_1}{\Delta x} = \alpha$. Тогда z, въ предѣлахъ для x отъ x_1 до x_2, принимаетъ всѣ значенія отъ o до α. Очевидно, что Δz, т. е. приращеніе, которое получаетъ z съ переходомъ отъ x къ $x + \Delta x$, $= 1$. Пусть $\varphi(z)$ даетъ отношеніе числа умершихъ втеченіе какого-нибудь промежутка времени въ возрастѣ отъ x_1 до $x_1 + z\Delta x$ къ числу умершихъ за этотъ-же промежутокъ времени въ возрастѣ отъ x_1 до x_2; ясно, что $\varphi(o) = o$, и $\varphi(\alpha) = 1$. Вносимъ предположеніе о томъ, что $\varphi(z)$ не зависитъ отъ времени, т. е. что для всякаго сколь угодно малаго промежутка времени, заключеннаго въ болѣе широкомъ промежуткѣ, это отношеніе для опредѣленнаго значенія z одно и то-же. Тогда будемъ имѣть

$$-\frac{\partial U(x, \tau - x)}{\partial x} d\tau\, dx^{*}) = \Phi'(\tau) \cdot d\tau\, \varphi'(z)\, dz \quad . \; . \; . \; (1)$$

если положить въ лѣвой части равенства $x = x_1 + z\Delta x$.

Внесенное нами предположеніе при достаточно маломъ значеніи разности $x_2 - x_1$ вполнѣ допустимо. Можно замѣтить, что оно будетъ точно соотвѣтствовать дѣйствительности при какой угодно разности $x_2 - x_1$, если a) порядокъ вымиранія неизмѣненъ во времени и b) плотность рожденій возростаетъ въ геометрической прогрессіи, т. е. $U(o, t) = a^t$. И дѣйствительно для нѣкотораго промежутка τ' до $\tau' + \Delta\tau$ отношеніе

$$\varphi(z) = \frac{-\int\limits_{x_1}^{x_1 + z\Delta x} \int\limits_{\tau'}^{\tau' + \Delta\tau} \frac{\partial U(x, \tau - x)}{\partial x} d\tau\, dx}{-\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{\tau'}^{\tau' + \Delta\tau} \frac{\partial U(x, \tau - x)}{\partial x} d\tau\, dx},$$

*) Эта производная отъ U по x взята при условіи $\tau - x =$ пост.

а для промежутка τ'' до $\tau''+\Delta\tau$ соотвѣтствующее отношеніе

$$\varphi_1(z)=\frac{-\int\limits_{x_1}^{x_1+z\Delta x}\int\limits_{\tau''}^{\tau''+\Delta\tau}\frac{\partial U(x,\tau-x)}{\partial x}d\tau\,dx}{-\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{\tau''}^{\tau''+\Delta\tau}\frac{\partial U(x,\tau-x)}{\partial x}d\tau\,dx}.$$ Подставивъ

въ эти выраженія условіе $-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}dx\,dt=-U(o,t)f'(x)dt\,dx$, и положивъ $U(o,t)=a^t$, найдемъ, что числитель выраженія $\varphi_1(z)$ получается изъ числителя выраженія $\varphi(z)$ черезъ умноженіе послѣдняго на $a^{\tau''-\tau'}$, и точно также знаменатель въ выраженіи $\varphi_1(z)=$ знаменателю выраженія $\varphi(z)$, помноженному на $a^{\tau''-\tau'}$. Слѣдовательно $\varphi(z)=\varphi_1(z)$. Вообще-же говоря, и помимо всякихъ допущеній о плотности рожденій, сдѣланное предположеніе довольно близко выражаетъ дѣйствительность. Произведя въ обѣихъ частяхъ равенства (1) замѣну перемѣнной τ на $t+x$, гдѣ $x=x_1+z\Delta x$, и проинтегрировавъ по t въ предѣлахъ t_1 и t_2, и по z въ предѣлахъ отъ o до α, а затѣмъ замѣнивъ въ лѣвой части z на $\frac{x-x_1}{\Delta x}$, получимъ:

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}dt\,dx=\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{t_1}^{t_2}\Phi'(t+x_1+z\Delta x)\,\varphi'(z)\,dt\,dz.$$

Лѣвая часть равенства и даетъ обычное выраженіе искомой совокупности M_1. Можно написать:

$$M_1=\int\limits_0^{\alpha}\{\Phi(\tau_2+z\Delta x)-\Phi(\tau_1+z\Delta x)\}\,\varphi'(z)\,dz,$$

$$\text{гдѣ } \tau_1=t_1+x_1,\ \tau_2=t_2+x_1,$$

или*) $M_1=\{\Phi(\tau_2)-\Phi(\tau_1)\}+\int\limits_0^{\alpha}\{\Phi'(\tau_2+z\Delta x)-\Phi'(\tau_1+z\Delta x)\}\Delta x[1-\varphi(z)]dz.$

*) При этомъ преобразованіи я принимаю $\varphi'(z)$ за производную отъ $\varphi(z)-1$.

Будемъ разсматривать второй членъ, какъ поправку въ выраженіи для M_1, и назовемъ эту поправку буквой C. Очевидно, что

$$C=\sum_{z=o}^{z=\alpha-\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\{\Phi'(\tau_2+z\Delta x)-\Phi'(\tau_1+z\Delta x)\}\,\Delta x[1-\varphi(z)]\,dz.$$

Если предположить разность $\{\Phi'(\tau_2+z\Delta x)-\Phi'(\tau_1+z\Delta x)\}$ въ достаточно малыхъ предѣлахъ отъ z до $z+\Delta z$ постоянной, то будетъ

$$\int_{z}^{z+\Delta z}\{\Phi'(\tau_2+z\Delta x)-\Phi'(\tau_1+z\Delta x)\}\,\Delta x[1-\varphi(z)]dz=$$

$$=\frac{\Delta\Phi(\tau_2+z\Delta x)-\Delta\Phi(\tau_1+z\Delta x)}{\Delta\tau}\Delta x\cdot\int_{z}^{z+\Delta z}\{1-\varphi(z)\}\,dz,$$

но $\Delta\tau=\Delta x$, и потому:

$$\int_{z}^{z+\Delta z}=\{\Delta\Phi(\tau_2+z\Delta\tau)-\Delta\Phi(\tau_1+z\Delta\tau)\}\int_{z}^{z+\Delta z}\{1-\varphi(z)\}\,dz.$$

Теперь остается предложить приближенный способъ вычисленія величинъ вида $\int_{z}^{z+\Delta z}\{1-\varphi(z)\}\,dz$. Припоминаемъ, что $\Delta z=1$.

Пусть $\varphi(z)=a_0+2a_1z+3a_2z^2+4a_3z^3+\ldots+(n+1)a_nz^n$.

Изъ условія $\varphi(o)=o$ находимъ $a_0=o$. Изъ условія $\varphi(\alpha)=1$, получаемъ $2a_1=\frac{1}{\alpha}-3a_2\alpha-4a_3\alpha^2-\ldots-(n+1)a_n\alpha^{n-1}$.

Слѣдов. $1-\varphi(z)=\frac{\alpha-z}{\alpha}+3a_2(\alpha z-z^2)+4a_3(\alpha^2z-z^3)+\ldots$.

$$\int_{z}^{z+1}\{1-\varphi(z)\}dz=\frac{2(\alpha-z)-1}{2\alpha}+a_2\left[\frac{1}{2}(2z+1)3\alpha-\{(z+1)^3-z^3\}\right]$$

$$+a_3\left[\frac{1}{2}(2z+1)4\alpha^2-\{(z+1)^4-z^4\}\right]+\ldots.$$

Или введя обозначеніе

$$\frac{1}{2}(2z+1)(m+1)\alpha^{m-1}-\{(z+1)^{m+1}-z^{m+1}\}=D_{m,z},$$

будемъ имѣть $\int_z^{z+1}\{1-\varphi(z)\}dz=\frac{2(\alpha-z)-1}{2\alpha}+\sum_{m=2}^{m=n}a_m D_{m,z}.$

Суммированіе можно распространить на всѣ значенія отъ $m=o$ до $m=n$, такъ какъ при $m=o$, $a_m=o$; а при $m=1$, $D_{m,z}=o$.

Итакъ $$C=\sum_{z=o}^{z=\alpha-1}\delta_z\left\{\frac{2(\alpha-z)-1}{2\alpha}+\sum_{m=2}^{m=n}a_m D_{m,z}\right\},$$

гдѣ $\delta_z=\Delta\Phi(\tau_2+z\Delta\tau)-\Delta\Phi(\tau_1+z\Delta\tau)$.

Или $$C=\sum_{z=o}^{z=\alpha-1}\frac{2(\alpha-z)-1}{2\alpha}\delta_z+\sum_{m=2}^{m=n}a_m\sum_{z=o}^{z=\alpha-1}D_{m,z}\delta_z.$$

Поправка такимъ образомъ разбилась на два члена: *главный*, который можетъ быть прямо вычисленъ, разъ намъ даны величины δ_z; но ихъ-то мы и предположили извѣстными, такъ какъ сказали, что совокупности умершихъ вида M_3 для предѣловъ возраста x_1 и x_2 показываются за промежутки времени длины $\Delta\tau$; а это и будутъ величины $\Delta\Phi$, и *дополнительный* членъ, въ который входятъ неизвѣстныя a_m.

На практикѣ придется обыкновенно отбрасывать дополнительный членъ, какъ по причинѣ его малости, такъ и по причинѣ утомительности вычисленій. Численныя значенія для D, напр. при $\alpha=5$, получаются уже при $m=2$ и 3 довольно большія:

$$D_{2,0}=D_{2,4}=\frac{13}{2},\ D_{2,1}=D_{2,3}=\frac{31}{2}\ \text{и}\ D_{2,2}=\frac{37}{2}.$$

$$D_{3,0}=49,\ D_{3,1}=135,\ D_{3,2}=185,\ D_{3,3}=175,\ D_{3,4}=81.$$

Я покажу способъ вычисленія неизвѣстныхъ a_2 и a_3.

Изъ выраженія для $\varphi(z)$ выводится $a_2 = \frac{\varphi''(o)}{1.2.3}$, $a_3 = \frac{\varphi'''(o)}{1.2.3.4}, \ldots$

Для того, чтобъ найти приближенное значеніе коэффиціентовъ въ выраженіи для $\varphi(z)$, возьмемъ промежутокъ времени отъ $t_1 + x_1$ до $t_2 + x_2$, т. е. тотъ промежутокъ, къ которому, по времени умиранія, относится искомая совокупность M_1. Пусть число умершихъ за это время въ возрастѣ отъ x_1 до x_2 будетъ σ_0 (сов. вида M_3), пусть σ_{-1} будетъ совокупность умершихъ за тотъ-же періодъ въ предѣлахъ возраста $[x_1 - (x_2 - x_1)]$ и x_1, и σ_1 совокупность умершихъ за тотъ-же періодъ въ возрастныхъ предѣлахъ x_2 и $[x_2 + (x_2 - x_1)]$. По прежнему имѣемъ $x = x_1 + z\Delta x$ и $\frac{x_2 - x_1}{\Delta x} = \alpha$. Вводимъ новую функцію $\theta'(z)$, изображающую плотность смертей въ возрастѣ $x_1 + z\Delta x$, т. е. предѣлъ, къ которому стремится отношеніе совокупности умершихъ въ возрастѣ отъ $[x_1 + z\Delta x]$ до $[x_1 + (z + \Delta z)\Delta x]$ къ приращенію Δz, съ приближеніемъ Δz къ 0. Будетъ

$$\sigma_{-1} = \int_{-\alpha}^{0} \theta'(z)dz, \quad \sigma_0 = \int_0^{\alpha} \theta'(z)dz \text{ и } \sigma_1 = \int_{\alpha}^{2\alpha} \theta'(z)dz.$$

Принимаемъ, что $\theta'(z) = A + A_1 z + A_2 z^2$, и изъ трехъ уравн. опредѣляемъ коэффиціенты A_1 и A_2. $A_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\alpha^2}$, $2A_2 = \frac{\sigma_{-1} - 2\sigma_0 + \sigma_1}{\alpha^3}$. Очевидно, съ другой стороны, что, въ предѣлахъ x_1 и x_2, $\theta'(z) = \sigma_0 \varphi'(z)$, откуда $\varphi''(z) = \frac{1}{\sigma_0}\theta''(z)$ и $\varphi'''(z) = \frac{1}{\sigma_0}\theta'''(z)$, но $\theta''(o) = A_1$, $\theta'''(o) = 2A_2$. Слѣд. $\varphi''(o) = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\alpha^2 \sigma_0}$, $\varphi'''(o) = \frac{\sigma_{-1} - 2\sigma_0 + \sigma_1}{\alpha^3 \sigma_0}$,

и въ результатѣ $a_2 = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{1.2.3.\alpha^2 \sigma_0}$ и $a_3 = \frac{\sigma_{-1} - 2\sigma_0 + \sigma_1}{1.2.3.4.\alpha^3 \sigma_0}$.

Можно для опредѣленія величинъ a_2, a_3, ... употреблять и другіе пріемы, наприм. пользуясь для этой цѣли возрастнымъ распредѣленіемъ умершихъ, которое даетъ какая-нибудь таблица смертности; можно также сочетать данныя такой таблицы съ данными о родившихся, примѣняя гипотезу Эйлера о томъ, что

плотность рожденій возростаетъ въ геометрической прогрессіи, или не примѣняя ея, и тому подобн. Укажу въ заключеніе на одинъ частный случай задачи о переходѣ отъ совокупностей вида M_3 къ совокупностямъ вида M_1. Это именно тотъ случай, когда $x_2 - x_1 = \Delta x = \Delta\tau$, т. е. когда умершіе даются за такіе промежутки времени, длина которыхъ равна разности предѣловъ возраста каждой группы умершихъ, наприм. когда извѣстны *годичные* итоги умершихъ, распредѣленныхъ по *однолѣтнимъ* возрастнымъ группамъ, или извѣстны *пятилѣтніе* итоги для возрастныхъ *пятилѣтій*. Тогда $\alpha = 1$, а слѣд. z въ предѣлахъ суммированія принимаетъ одно значеніе 0, и формула обращается въ

$$M_1 = \Phi(\tau_2) - \Phi(\tau_1) + \left\{\Delta\Phi(\tau_2) - \Delta\Phi(\tau_1)\right\} \left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=2}^{m=n} \frac{m-1}{2} a_m\right\}$$

$$\sum_{m=2}^{m=n} \frac{m-1}{2} a_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi''(o)}{1.2.3} + \frac{2}{2} \cdot \frac{\varphi'''(o)}{1.2.3.4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\varphi^{(\text{IV})}(o)}{1.2.3.4.5} + \ldots .$$

подставляя сюда значенія $\varphi''(o) = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0}$ и $\varphi'''(o) = \frac{\sigma_{-1} - 2\sigma_0 + \sigma_1}{\sigma_0}$

и полагая $\varphi^{(\text{IV})}(z) = 0$, получимъ $\sum \frac{m-1}{2} a_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{24\,\sigma_0}$

и $M_1 = \Phi(\tau_2) - \Phi(\tau_1) + \left\{\Delta\Phi(\tau_2) - \Delta\Phi(\tau_1)\right\} \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{\sigma_0}\right)\right\}$ *).

Вопросъ о переходѣ отъ совокупностей вида M_3 къ совокупностямъ вида M_1 былъ разсмотрѣнъ нами съ тою цѣлью, чтобъ показать, какими способами можно на практикѣ примѣнять формулу I (стр. 46) въ томъ случаѣ, когда совокупности вида M_1 не показываются непосредственно. Теперь-же предстоитъ изложить приближенный способъ опредѣленія величинъ вида $\{f(x_1) - f(x_2)\}$,

---

*) Можно вывести, не дѣлая никакихъ предположеній о видѣ функціи $\varphi(z)$:

$$M_1 = \Phi(\tau_2) - \Phi(\tau_1) + \left\{\Delta\Phi(\tau_2) - \Delta\Phi(\tau_1)\right\} \frac{X - x_1}{x_2 - x_1},$$

гдѣ X есть средній возрастъ умершихъ въ возрастѣ отъ x_1 до x_2.

Принявъ для X приближенное его значеніе, данное на стр. 19, получимъ формулу, значущуюся въ текстѣ.

если принять въ основу построенія таблицы формулу II (стр. 47). Такой способъ предложилъ Кнаппъ и назвалъ его *Ангальтскимъ методомъ* составленія таблицы по имени того города, къ населенію котораго онъ и былъ примѣненъ самимъ Кнаппомъ.

$$M_3 = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} F'(\tau - x) f'(x)\, d\tau\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \{F(\tau_2 - x) - F(\tau_1 - x)\} f'(x) dx$$

или
$$M_3 = \{f(x_1) - f(x_2)\}\ \{F(\tau_2 - x_2) - F(\tau_1 - x_2)\}$$
$$-\int_{x_1}^{x_2} \{F'(\tau_2 - x) - F'(\tau_1 - x)\}\ \{f(x) - f(x_1)\}\, dx.$$

Допускаемъ, что $f(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$; тогда будетъ:

$$-\int_{x_1}^{x_2} \{F'(\tau_2 - x) - F'(\tau_1 - x)\}\ \{f(x) - f(x_1)\}\, dx$$
$$= \{f(x_1) - f(x_2)\} \int_{x_1}^{x_2} \{F'(\tau_2 - x) - F'(\tau_1 - x)\}\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx.$$

Слѣд. $M_3 = \{f(x_1) - f(x_2)\} \Big[\{F(\tau_2 - x_2) - F(\tau_1 - x_2)\} +$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \{F'(\tau_2 - x) - F'(\tau_1 - x)\} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx \Big].$$

Остается показать способъ приближеннаго вычисленія интеграла, входящаго въ правую часть уравненія. Пусть $x_2 - x = z$, тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} \{F'(\tau_2 - x) - F'(\tau_1 - x)\} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx$$
$$= \int_0^{x_2 - x_1} \{F'(\tau_2 - x_2 + z) - F'(\tau_1 - x_2 + z)\}\ \left\{1 - \frac{z}{x_2 - x_1}\right\} dz$$
$$= \sum_{z=0}^{z = x_2 - x_1 - \Delta z} \int_z^{z + \Delta z} \{F'(\tau_2 - x_2 + z) - F'(\tau_1 - x_2 + z)\} \left(1 - \frac{z}{x_2 - x_1}\right) dz.$$

При Δz достаточно маломъ, можно положить, въ промежуткѣ отъ z до $z+\Delta z$, $F'(\tau_2-x_2+z)-F'(\tau_1-x_2+z)$

$$=\text{const.}=\frac{\Delta F(\tau_2-x_2+z)-\Delta F(\tau_1-x_2+z)}{\Delta z},$$

и будетъ $\int_z^{z+\Delta z}\left\{F'(\tau_2-x_2+z)-F'(\tau_1-x_2+z)\right\}\left(1-\frac{z}{x_2-x_1}\right)dz=$

$$=\left\{\Delta F(\tau_2-x_2+z)-\Delta F(\tau_1-x_2+z)\right\}\left(1-\frac{z+\frac{1}{2}\Delta z}{x_2-x_1}\right),$$ а слѣд.

$$M_3=\left\{f(x_1)-f(x_2)\right\}\left[\left\{F(\tau_2-x_2)-F(\tau_1-x_2)\right\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{z=0}^{z=x_2-x_1-\Delta z}\left\{\Delta F(\tau_2-x_2+z)-\Delta F(\tau_1-x_2+z)\right\}\left\{1-\frac{z+\frac{\Delta z}{2}}{x_2-x_1}\right\}\right].$$

Введемъ слѣдующія обозначенія $\tau_1-x_2=t_1$, $\tau_2-x_2=t_2$. $F(t_2)-F(t_1)=H$. Выраженіе подъ знакомъ $\Sigma=C$. $H+C=N$.

Тогда $$f(x_1)-f(x_2)=\frac{M_3}{N}$$

$$N=H+C,\ H=F(t_2)-F(t_1),$$

$$C=\sum_{z=0}^{z=x_2-x_1-\Delta z}\left\{\Delta F(t_2+z)-\Delta F(t_1+z)\right\}\left\{1-\frac{z+\frac{\Delta z}{2}}{x_2-x_1}\right\}.$$

При рѣшеніи каждой частной задачи по Ангальтскому способу предѣлы τ_1 и τ_2 для совокупностей вида M_3 остаются неизмѣнными.

Примѣненіе этого метода предполагаетъ данными совокупности родившихся въ промежутки времени длины Δz, т. к. $\Delta F(t+z)$ есть число родившихся въ промежутокъ времени отъ $t+z$ до $t+z+\Delta z$. Въ томъ случаѣ, когда $x_2-x_1=\Delta z$, т. е. когда итоги рожденій даются за такіе промежутки, длина которыхъ ра-

вняется разности возрастныхъ предѣловъ группы умершихъ, формула Кнаппа обращается въ

$$M_3 = \left\{f(x_1) - f(x_2)\right\}\left[\left\{F(t_2) - F(t_1)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\Delta F(t_2) - \Delta F(t_1)\right\}\right].$$

Въ такомъ видѣ формула указывается въ статьѣ Фарра, написанной въ 1859 г. (см. указаніе сочиненій въ началѣ статьи).

Сказанное на стр. 47—49 объясняетъ достаточно теоретическое различіе между способомъ, примѣненнымъ г. Андреевымъ *) и Ангальтскимъ способомъ. Практически въ томъ случаѣ, когда статистика даетъ совокупности вида M_3, и не даетъ совокупностей вида M_1, различіе будетъ заключаться въ томъ, что въ способѣ г. Андреева нѣкоторой модификаціи подвергаются совокупности умершихъ, а совокупности родившихся являются такими элементами, которые оставляются безъ измѣненія, тогда какъ въ Ангальтскомъ способѣ, наоборотъ, берется каждый разъ нѣкоторая совокупность умершихъ, и къ ней, помощью извѣстнаго рода вычисленій, подыскивается соотвѣтствующее число родившихся. И тотъ, и другой способъ одинаково примѣнимы къ Россіи.

Два соображенія — одно о сравнительно большей строгости теоретической постановки вопроса въ Ангальтскомъ методѣ (см. стр. 48), другое о томъ, что присущая этому методу по необходимости, т. е. при всякомъ способѣ сводки статистическихъ данныхъ, приближенность рѣшенія каждой частной задачи повторяется и въ способѣ г. Андреева въ примѣненіи его къ измѣренію русской смертности — привели меня къ заключенію о предпочтительности Ангальтскаго способа передъ способомъ г. Андреева, и я избралъ первый при составленіи таблицы смертности мужскаго православнаго населенія Европейской Россіи по дан-

*) Въ понятіе «способа г. Андреева» въ томъ смыслѣ, въ какомъ я употребляю этотъ терминъ въ данномъ случаѣ и слѣдующихъ строкахъ, не слѣдуетъ включать представленія о томъ или другомъ пріемѣ приближеннаго вычисленія совокупностей вида M_1 по даннымъ совокупностямъ вида M_3.

нымъ объ умершихъ за десятилѣтіе 1874 (1 января) — 1884 (1 января). Считаю нелишнимъ пояснить примѣненный способъ нѣсколькими примѣрами.

1-ый примѣръ. Дано число умершихъ въ возрастѣ отъ 30 до 35 лѣтъ въ 1882-омъ году. Требуется опредѣлить $f(x_1) - f(x_2)$, гдѣ $x_1 = 30$, $x_2 = 35$, т. е. нужно найти число умирающихъ въ возрастѣ отъ 30 до 35 лѣтъ изъ единицы родившихся. Если мы примемъ Рождество Христово за начальный моментъ времени, а годъ за единицу измѣренія, то получимъ $\tau_1 = 1881$, $\tau_2 = 1882$. Δz есть величина заданная: именно она даетъ длину промежутковъ времени, за которые показываются числа рожденій, такъ что при погодномъ распредѣленіи родившихся $\Delta z = 1$.

$$\tau_2 - x_2 = 1882 - 35 = 1847, \quad \tau_1 - x_2 = 1881 - 35 = 1846.$$

Слѣд. H есть число рожденій въ 1847 году.

C есть сумма 5-ти слагаемыхъ, такъ какъ $x_2 - x_1 - \Delta z = 4$, а, слѣдовательно, z принимаетъ послѣдовательно всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до 4. Пусть (m) есть число родившихся въ m-омъ году.

при $z=0$,	$\Delta F(\tau_2 - x_2 + z)$	$=(1848)$,	а $\Delta F(\tau_1 - x_2 + z)$	$=(1847)$
$z=1$,	»	$=(1849)$,	»	$=(1848)$
$z=2$,	»	$=(1850)$,	»	$=(1849)$
$z=3$,	»	$=(1851)$,	»	$=(1850)$
$z=4$,	»	$=(1852)$,	»	$=(1851)$.

Итакъ

$$\begin{aligned} C = & [(1848) - (1847)] \times 0{,}9 \\ & + [(1849) - (1848)] \times 0{,}7 \\ & + [(1850) - (1849)] \times 0{,}5 \\ & + [(1851) - (1850)] \times 0{,}3 \\ & + [(1852) - (1851)] \times 0{,}1. \end{aligned}$$

Въ итогѣ:

$$H + C = N = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}(1847) + (1848) + (1849) + (1850) + (1851) + \frac{1}{2}(1852)\right].$$

Примѣчаніе. Академикъ Буняковскій въ своемъ «Опытѣ о законахъ смертности въ Россіи» рѣшаетъ между прочимъ задачу совершенно подобную той, которая дана въ этомъ примѣрѣ, и приходитъ къ формулѣ тожественной съ полученной по Ангальтскому способу. Пріемъ составленія таблицы, изложенный въ «Опытѣ», есть въ сущности тотъ-же Ангальтскій методъ въ приложеніи къ частному случаю, именно къ тому случаю, когда $\tau_2 - \tau_1 = \Delta z$.

2-ой примѣръ. Дано M — число умершихъ втеченіе десятилѣтія 1874 (1 янв.)—1884 (1 янв.) въ возрастѣ отъ 67 до 68 лѣтъ. Числа рожденій даны погодно. Требуется опредѣлить $f(x_1)-f(x_2)$, гдѣ $x_1=67$, $x_2=68$; $f(x_1)-f(x_2)=r_x$, гдѣ $x=67$. $\tau_1=1873$, $\tau_2=1883$, $\Delta z=1$.

$$r_x = \frac{M}{N},\ N=H+C.\ H=F(1815)-F(1805),\ \text{т. е.}$$

$$H=(1806)+(1807)+\ldots\ldots+(1814)+(1815),$$

а для C получимъ: $C=\frac{1}{2}\Big[(1816-(1806)\Big]$.

3-ій примѣръ. Дано M, число умершихъ въ возрастѣ отъ 3-хъ до 6-ти мѣсяцевъ за десятилѣтіе 1874 (1 янв.) — 1884 (1 янв.). Требуется опредѣлить $f(x_1)-f(x_2)$, при $x_1=\frac{3}{12}$, $x_2=\frac{6}{12}$. $\tau_1=1873$, $\tau_2=1883$; извѣстны мѣсячные итоги рожденій, т. е. $\Delta z=\frac{1}{12}$ $H=F\left(1882\frac{6}{12}\right)-F\left(1872\frac{6}{12}\right)$, т. е. H есть число родившихся съ 1 іюля 1873 года по 1 іюля 1883 года. Высшій предѣлъ для $z=x_2-x_1-\Delta z=\frac{6}{12}-\frac{3}{12}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}$. Слѣд., подъ знакомъ Σ будетъ 3 слагаемыхъ, соотвѣтствующія значеніямъ $z=0$, $\frac{1}{12}$ и $\frac{2}{12}$. Получимъ

$$C=\Big[(\text{Іюль}\quad 1883)-(\text{Іюль}\quad 1873)\Big]\times\frac{5}{6}$$

$$+\Big[(\text{Августъ}\ 1883)-(\text{Августъ}\ 1873)\Big]\times\frac{3}{6}$$

$$+\Big[(\text{Сентябрь}\ 1883)-(\text{Сентябрь}\ 1873)\Big]\times\frac{1}{6}.$$

Результаты вычисленій, произведенныхъ по Ангальтскому методу, будутъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше разности $x_2 - x_1$ и промежутки Δz, т. е. чѣмъ тѣснѣе предѣлы возраста, въ которые заключена каждая группа умершихъ, и чѣмъ подробнѣе свѣдѣнія о числахъ рожденій.

Перехожу къ изложенію пріемовъ, употребленныхъ мною при составленіи таблицы, въ связи съ описаніемъ того статистическаго матеріала, который положенъ въ ея основаніе.

I. *Умершіе.* Матеріаломъ для построенія таблицы послужили умершіе съ 1874 г. (1 янв.) по 1884 г. (1 янв.). Свѣдѣнія о нихъ взяты изъ Статистическаго Временника Россійской Имперіи [Движеніе населенія], издаваемаго Центральнымъ Статистическимъ Комитетомъ*). Эти свѣдѣнія обнимаютъ одну только Европейскую Россію, точнѣе 50 губерній Европейской Россіи, такъ какъ сюда не входятъ Финляндія, Привислянскій край и Кавказъ. Умершіе каждаго года распредѣлены въ Статистическомъ Временникѣ по возрастнымъ группамъ: 0—1 м., 1—3 м., 3—6 м., 6 м.—1 годъ (итого 4 группы моложе 1-го года) далѣе 1—2 г., 2—3 г., 3—4 г., . . . и т. д. кончая группою 79—80 л. (итого 79 однолѣтнихъ группъ). Затѣмъ идутъ группы 80—85 л., 85—90 л., . . . 120—125 л. (итого 9 пятилѣтнихъ группъ) и наконецъ въ послѣднюю, по счету 93-ью группу выдѣлены лица старше 125-ти лѣтъ. Умершіе каждой возрастной группы распредѣлены по полу. Данныя такого рода имѣются для лицъ всѣхъ вѣроисповѣданій и кромѣ того для каждаго вѣроисповѣданія особо. Въ виду того, что данныя о числахъ рожденій, съ которыми пришлось комбинировать свѣдѣнія объ умершихъ при вычисленіи таблицы смертности, относятся къ однимъ только православнымъ (см. ниже), я былъ вы-

*) Первоисточникомъ свѣдѣній по движенію населенія, публикуемыхъ Центр. Стат. Комитетомъ, служатъ метрическія записи, дѣлаемыя духовенствомъ. По правиламъ 1865—66 года установлено ежегодное доставленіе въ губернскіе Стат. Комитеты соотвѣтствующихъ вѣдомостей изъ самихъ приходовъ. См. *Янсонъ.* Теорія Статистики, 2-е изд. 1887. Стр. 371—373.

нужденъ ограничить свое изслѣдованіе православнымъ населеніемъ и слѣдовательно брать умершихъ православныхъ.

Подсчитавъ для каждой возрастной группы въ отдѣльности числа умершихъ за 10-ти лѣтній періодъ, я получилъ таблицу *A*. Числа этой таблицы, начиная съ 24-хъ лѣтъ, поражаютъ необыкновенно рѣзкими скачками, повторяющимися періодически въ каждомъ возрастномъ пятилѣтіи. Скачки эти не случайнаго происхожденія. Они должны быть отнесены на счетъ той *психологической ошибки*, которая наблюдается вездѣ въ показаніяхъ возраста лицъ живущихъ (переписи населенія) и умершихъ (смертные списки): возрастъ лица охотнѣе показывается въ круглыхъ числахъ, т. е. въ числахъ кратныхъ 5-ти, причемъ круглому числу оказывается предпочтеніе не только для обозначенія исполнившагося числа лѣтъ, но и для обозначенія переживаемаго (въ моментъ переписи или смерти) года отъ рожденія *). Въ результатѣ получается численное преобладаніе возрастныхъ группъ, которыя начинаютъ и заключаютъ собой каждое изъ пятилѣтій: 20—25, 25—30, 30—35 и т. д.

Если мы условимся означать черезъ M_i число умершихъ въ предѣлахъ возраста отъ i до $i+1$ лѣтъ, то можно будетъ сказать, что преувеличенными оказываются элементы M_{24}, M_{25}, M_{29}, M_{30}, M_{34}, M_{35}, M_{39}, M_{40}, . . . M_{74}, M_{75}, M_{79}. Въ каждомъ пятилѣтіи такихъ элементовъ два. Но важно то, что элементы, соотвѣтствующіе тѣмъ значеніямъ i, которыя оканчиваются 4-мя и 5-ью преувеличены въ *меньшей* мѣрѣ, чѣмъ тѣ, которые соотвѣтствуютъ значеніямъ i, оканчивающимся 9-ью и 0-омъ. Это обстоятельство весьма ярко выступаетъ наружу въ графическомъ изображеніи распредѣленія умершихъ по возрастамъ. Указанный

*) Обозначеніе круглымъ числомъ лѣтъ переживаемаго года отъ рожденія и получающееся отсюда преувеличеніе итоговъ умершихъ въ возрастахъ 24—25, 29—30, 34—35, 39—40,. . . представляетъ характерную особенность русскихъ статистическихъ данныхъ, обусловливаемую тѣмъ обстоятельствомъ, что русскій человѣкъ чаще всего опредѣляетъ свой возрастъ не числомъ исполнившихся лѣтъ, а переживаемымъ имъ годомъ отъ рожденія (не *сколько* лѣтъ, а *который* годъ).

фактъ былъ принятъ мною въ соображеніе при подысканіи *способа исправленія чиселъ, дающихъ распредѣленіе умершихъ по возрастнымъ группамъ.* Примѣненный мною способъ состоитъ въ слѣдующемъ. Я соединяю умершихъ по возрастнымъ десятилѣтіямъ и получаю группы умершихъ въ возрастахъ: отъ 20 до 30 лѣтъ, отъ 30 до 40 л., отъ 40 до 50 л. и т. д.; пусть эти группы будутъ соотвѣтственно равны S_{20}, S_{30}, S_{40} и т. д., такъ что $S_{20} = M_{20} + M_{21} + \ldots + M_{28} + M_{29}$, $S_{30} = M_{30} + \ldots + M_{39}$, и т. д. Затѣмъ я беру умершихъ по возрастнымъ десятилѣтіямъ: 21—31, 31—41, 41—51 и т. д. и получаю значенія $S_{21} = M_{21} + M_{22} + \ldots + M_{30}$, $S_{31} = M_{31} + M_{32} + \ldots + M_{40}$ и т. д. Далѣе, я распредѣляю умершихъ по группамъ 22—32, 32—42, 42—52 и т. д.... Въ концѣ концовъ, распредѣленіе умершихъ по возрастнымъ десятилѣтіямъ выразится въ $10^{-ти}$ строкахъ:

$$S_{20},\ S_{30},\ S_{40},\ S_{50} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$S_{21},\ S_{31},\ S_{41},\ S_{51} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$S_{22},\ S_{32},\ S_{42},\ S_{52} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{29},\ S_{39},\ S_{49},\ S_{59} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$S_i = M_i + M_{i+1} + M_{i+2} + \ldots\ldots + M_{i+8} + M_{i+9}.$$

Каждая изъ $10^{-ти}$ строкъ составилась совершенно подобнымъ образомъ, а потому нѣтъ основанія придавать одной изъ нихъ большее значеніе, чѣмъ всякой другой. Способъ перехода отъ распредѣленія, выраженнаго въ этихъ строкахъ, къ распредѣленію на однолѣтнія группы, состоитъ въ слѣдующемъ: 1) совершается переходъ къ однолѣтнимъ группамъ для каждой строки особо, 2) изъ полученныхъ такимъ образомъ $10^{-ти}$ значеній для каждой однолѣтней группы выводится средняя ариѳметическая,

которая и принимается за исправленное значеніе искомой группы. Слѣдовательно вопросъ сводится къ распредѣленію суммы $S_i = M_i + M_{i+1} + M_{i+2} + \ldots + M_{i+9}$ на 10 новыхъ слагаемыхъ $M_i' + M'_{i+1} + M'_{i+2} + \ldots + M'_{i+9} = S_i$.

Эту задачу, неопредѣленную по существу, я рѣшаю слѣдующимъ образомъ. Искомыя числа вида M'_{i+j}, въ отличіе отъ данныхъ чиселъ вида M_{i+j}, не должны обнаруживать никакихъ скачковъ, а, напротивъ того, измѣняться въ нѣкоторой послѣдовательности; я принимаю, что эти числа составляютъ ариѳметическую прогрессію. Пусть разность ея будетъ r. Слѣдовательно

$$M'_{i+1} = M_i' + r,\ M'_{i+2} = M_i' + 2r, \ldots M'_{i+9} = M_i' + 9r$$

и еще $M'_{i+10} = M_i' + 10r$. Въ ряду написанныхъ чиселъ есть два, такъ сказать, однородныхъ, т. е. занимающихъ аналогичное мѣсто въ двухъ десятилѣтіяхъ: это именно M_i' и M'_{i+10}. Есть нѣкоторое основаніе предположить, что эти числа пропорціональны даннымъ M_i и M_{i+10}; это вытекаетъ изъ указаннаго свойства психологической ошибки дѣйствовать періодически. Имѣемъ 2 уравненія:

1. $M_i' + M'_{i+1} + \ldots + M'_{i+8} + M'_{i+9} = S_i$ и

2. $\frac{M'_{i+10}}{M'_i} = \frac{M_{i+10}}{M_i}$.

Но $M'_{i+j} = M'_i + jr$; пусть $\frac{M'_{i+10}}{M_{i+10}} = \frac{M'_i}{M_i} = \alpha$.

Тогда $\alpha M_i + (\alpha M_i + r) + \ldots + (\alpha M_i + 8r) + (\alpha M_i + 9r) = S_i$

или $$10\alpha M_i + 45r = S_i.$$

Съ другой стороны, $M'_{i+10} = M'_i + 10r$,

или $$\alpha M_{i+10} = \alpha M_i + 10r.$$

Отсюда $$r = \frac{\alpha}{10}(M_{i+10} - M_i),$$

слѣдовательно, $10\alpha M_i + 4{,}5\alpha(M_{i+10} - M_i) = S_i$;

$$\alpha(11M_i + 9M_{i+10}) = 2S_i$$

и $$\frac{\alpha}{10} = \frac{0{,}2\,S_i}{11M_i + 9M_{i+10}} = \lambda_i.$$

Значитъ, для величинъ M'_i, M'_{i+1}, . . . M'_{i+9} будемъ имѣть:

$$M'_i = 10M_i\lambda_i,\ M'_{i+1} = (9M_i + M_{i+10})\lambda_i,$$

$$M'_{i+2} = (8M_i + 2M_{i+10})\lambda_i,\ \ldots\ M'_{i+9} = (M_i + 9M_{i+10})\lambda_i$$

и вообще $$M'_{i+j} = \left[(10-j)\,M_i + jM_{i+10}\right]\lambda_i \ldots\ldots (\alpha)$$

Такъ рѣшается вопросъ о переходѣ къ однолѣтнимъ возрастнымъ группамъ для каждой десятилѣтней группы S_i. Слѣдовательно, остается въ предѣлахъ каждой строки (ихъ всего 10) распредѣлить величины вида S_i на 10 слагаемыхъ вида M_i' каждую, а затѣмъ изъ десяти полученныхъ значеній для каждой возрастной группы взять ариѳметическое среднее M_i''. Оно и принимается за исправленное значеніе первоначальнаго M_i. Въ дѣйствительности нѣтъ надобности продѣлывать всего ряда описанныхъ дѣйствій. Формула (α) можетъ быть преобразована въ такую:

$$M'_i = \left[(10-j)\,M_{i-j} + jM_{i-j+10}\right]\lambda_{i-j} \ldots\ldots (\beta)$$

гдѣ $$\lambda_{i-j} = \frac{0{,}2\,S_{i-j}}{11M_{i-j} + 9M_{i-j+10}}.$$

Положивъ въ формулѣ (β) для j всѣ значенія отъ 0 до 9, просуммировавъ полученныя 10 величинъ и раздѣливъ сумму на 10, получимъ искомую M_i''.

$$M_i'' = 0{,}1\sum_{j=0}^{j=9}\left\{(10-j)\,M_{i-j} + j\,M_{i-j+10}\right\}\lambda_{i-j} \ldots\ldots (\gamma)$$

Очевидно, что для того чтобы формула могла найти себѣ приложеніе при исправленіи M_i въ M_i'', необходимо имѣть рядъ значеній M_{i-9}, M_{i-8}. . . до M_{i+10}. Исправленіе чиселъ умершихъ я началъ съ возраста 20—21 лл. и, собственно говоря, долженъ былъ его закончить группой 69—70, такъ какъ послѣдняя дан-

ная однолѣтняя группа соотвѣтствуетъ возрасту 79—80. Но я поступилъ иначе, а именно такъ, какъ если-бы лица умершія въ возрастѣ отъ 80 до 90 лѣтъ были мнѣ даны по однолѣтнимъ группамъ: для этого я позволилъ себѣ распредѣлить умершихъ въ возрастѣ 80—85, не нарушая величины суммы, и умершихъ въ возрастѣ 85—90, также не измѣняя общаго числа лицъ этого пятилѣтія, примѣнительно къ тому распредѣленію по однолѣтнимъ возрастнымъ группамъ, которое замѣчается въ данныхъ цифрахъ, соотвѣтствующихъ двумъ предшествующимъ пятилѣтіямъ.

Проще всего было бы распредѣлить группу умершихъ отъ 80 до 85 лѣтъ по однолѣтнимъ группамъ пропорціонально даннымъ числамъ умершихъ въ группѣ 70—75, т. е. такъ чтобы было удовлетворено условіе:

$$M_{80} : M_{81} : M_{82} : M_{83} : M_{84} = M_{70} : M_{71} : M_{72} : M_{73} : M_{74}$$

относительно же группы 85—90 имѣлось бы

$$M_{85} : M_{86} : M_{87} : M_{88} : M_{89} = M_{75} : M_{76} : M_{77} : M_{78} : M_{79}.$$

Изъ этихъ уравненій получились бы слѣдующія значенія искомыхъ M_{80}, M_{81}, . . . M_{88}, M_{89}, которыя я привожу въ связи съ данными числами умершихъ предшествующаго возрастнаго десятилѣтія:

M_{70}	79273	M_{80}	28447
M_{71}	42116	M_{81}	15113
M_{72}	38545	M_{82}	13832
M_{73}	32484	M_{83}	11657
M_{74}	61484	M_{84}	22063
M_{75}	52480	M_{85}	9961
M_{76}	27300	M_{86}	5182
M_{77}	29858	M_{87}	5668
M_{78}	26582	M_{88}	5046
M_{79}	57207	M_{89}	10859

Но числа, полученныя для пятилѣтія 80—85, оказываются очень мало правдоподобными. Громадные скачки отъ M_{79} къ M_{80} и отъ M_{84} къ M_{85} являются безпримѣрными и, такъ сказать, противными общему характеру всей вообще таблицы умершихъ по возрастамъ.

Въ виду этого, я распредѣлилъ умершихъ пятилѣтія 80—85 инымъ образомъ, а именно поставивъ условія, которыя алгебраически выражаются такъ: Прежде имѣли для опредѣленія неизвѣстныхъ M_{80}, M_{81}, M_{82}, M_{83} и M_{84}: $M_{80}=M_{70}\cdot q$, $M_{81}=M_{71}\cdot q$, $M_{82}=M_{72}\cdot q$, $M_{83}=M_{73}\cdot q$, $M_{84}=M_{74}\cdot q$ и $M_{80}+M_{81}+M_{82}+M_{83}+M_{84}=91112$. Теперь-же, оставляя въ силѣ послѣднее уравненіе, вмѣсто первыхъ пяти пишу: $M_{80}=M_{70}(q'+\xi)$, $M_{81}=M_{71}(q'+2\xi)$, $M_{82}=M_{72}(q'+3\xi)$, $M_{83}=M_{73}(q'+4\xi)$, $M_{84}=M_{74}(q'+5\xi)$, причемъ полагаю $q'=\frac{M_{79}}{M_{69}}$. Изъ этихъ уравненій я получилъ:

$M_{80} = 40675$
$M_{81} = 18044$
$M_{82} = 13250$
$M_{83} = 8416$
$M_{84} = 10726$

Полученныя числа показались мнѣ весьма правдоподобными и вполнѣ согласными съ общимъ характеромъ повозрастнаго распредѣленія умершихъ. Я поступилъ далѣе такъ, какъ если-бы они мнѣ были дѣйствительно даны, и слѣдовательно дополнилъ данную таблицу умершихъ по однолѣтнимъ возрастнымъ группамъ десятью числами, обведенными чертой. Имѣя, такимъ образомъ, числа умершихъ по однолѣтнимъ возрастнымъ группамъ отъ 0 до 90 лѣтъ, я могъ прямо по формулѣ (γ) опредѣлить M''_{20}, M''_{21}, M''_{22} . . . . . M''_{78}, M''_{79}. Но въ результатѣ такого исправленія можетъ оказаться

$$M''_{20}+M''_{21}+\ldots+M''_{79}\gtrless M_{20}+M_{21}+\ldots\ldots+M_{79},$$

между тѣмъ какъ на самомъ дѣлѣ мы задавались цѣлью видоизмѣнить одно только распредѣленіе умершихъ по возрастамъ, не нарушая величины суммы, т. е. общаго числа умершихъ. Для того, чтобы это условіе было удовлетворено, итоги умершихъ

M_{11}, M_{12}, . . . M_{19} и M_{80}, M_{81}, . . . M_{88} были мною видоизмѣнены помощью такого пріема.

При нахожденіи этихъ новыхъ значеній M''_{11}, M''_{12}, . . . M''_{19} и M''_{80}, M''_{81}. . . M''_{88}, соотвѣтствующихъ старымъ M_{11}, M_{12}. . . M_{19} и M_{80}, M_{81}, . . . M_{88}, я примѣнялъ ту-же самую формулу (γ) съ такого рода различіемъ. Формула для перехода отъ M_i къ M_i'' разбивается на 10 слагаемыхъ, содержащихъ каждое множителемъ 0,1; если въ какое-нибудь изъ слагаемыхъ выраженія M_i'', гдѣ $i=$ одному изъ значеній: 11, 12, . . . 19 или 80, 81, . . . 88, входитъ такое M_{i-j}, для котораго $i-j<11$ или >79, то это слагаемое вида $0{,}1\left\{(10-j)M_{i-j}+jM_{i-j+10}\right\}\lambda_{i-j}$ замѣняется самимъ исправляемымъ числомъ M_i, умноженнымъ на 0,1.

Путемъ простой провѣрки (я разумѣю провѣрку алгебраическую, а не ариѳметическую) можно легко убѣдиться въ томъ, что, поступая указаннымъ способомъ, мы дѣйствительно получимъ въ результатѣ требуемое равенство

$$\sum_{11}^{88} M_i'' = \sum_{11}^{88} M_i.$$

Итакъ, *числа умершихъ въ предѣлахъ отъ 20 до 80 лѣтъ исправлены мною прямо по формулѣ* (γ). *Числа умершихъ въ возрастахъ 0 — 11 лѣтъ оставлены въ прежнемъ (данномъ) видѣ; умершіе въ возрастѣ отъ 11 до 20 лѣтъ подверглись только что указанному видоизмѣненію* *). Соотвѣтственной операціи подверглись умершіе въ возрастахъ отъ 80 до 90 лѣтъ. Въ результатѣ такой операціи, имѣвшей цѣлью не исправить числа умершихъ по однолѣтнимъ возрастнымъ группамъ, а только установить равенство между суммой прежнихъ показаній и суммою новыхъ, получились числа, которыя не могутъ быть разсматриваемы, какъ сглаженныя или исправленныя. Поэтому пришлось соединить опять въ одну группу умершихъ въ пятилѣтіе 80—85 и въ другую умершихъ въ пятилѣтіе 85—90. Такимъ образомъ,

*) Это видоизмѣненіе для нихъ оказалось весьма мало ощутительнымъ.

начиная съ возраста 80 лѣтъ до 125 пойдутъ пятилѣтнія возрастныя группы.

Переходъ отъ этихъ пятилѣтнихъ возрастныхъ группъ къ однолѣтнимъ былъ произведенъ мною по методу, изложенному въ Annali di Statistica. Serie 2ª. Vol. 12 (1880), въ статьѣ озаглавленной «Di un metodo d'interpolazione per passare dalle classi quinquennali di popolazione alle classi annuali». Пусть намъ требуется распредѣлить по однолѣтнимъ возрастнымъ группамъ пятилѣтнюю группу S, такъ что искомыя величины пусть будутъ l_1, l_2, l_3, l_4, l_5. Обозначимъ непосредственно предшествующую пятилѣтнюю группу черезъ S_{-1}, а группу, непосредственно слѣдующую за S знакомъ S_{+1}. Тогда искомыя величины опредѣлятся изъ слѣдующихъ формулъ:

$$l_3 = \frac{S}{5} - \frac{S_{-1}+S_{+1}-2S}{125}$$

$$l_2 = l_3 - \frac{S_{+1}-S_{-1}}{50} + \frac{S_{-1}+S_{+1}-2S}{250}$$

$$l_4 = l_3 + \frac{S_{+1}-S_{-1}}{50} + \frac{S_{-1}+S_{+1}-2S}{250}$$

$$l_1 = l_3 - \frac{S_{+1}-S_{-1}}{25} + \frac{2\,(S_{-1}+S_{+1}-2S)}{125}$$

$$l_5 = l_3 + \frac{S_{+1}-S_{-1}}{25} + \frac{2(S_{-1}+S_{+1}-2S)}{125}.$$

По этому способу опредѣлены однолѣтнія группы умершихъ въ возрастѣ отъ 80 до 120 лѣтъ.

Измѣненное, т. е. исправленное и частью дополненное, распредѣленіе умершихъ по возрастамъ представится въ таблицѣ лит. B, въ которой недостаетъ чиселъ умершихъ ниже 11-ти лѣтъ, такъ какъ эти числа помѣщены въ таблицѣ A.

Показанія таблицы B не могутъ быть разсматриваемы, какъ дающія числа всѣхъ лицъ православнаго исповѣданія мужскаго пола умершихъ въ Европейской Россіи втеченіе десятилѣтія 1874—1884. Дѣло въ томъ, что свѣдѣнія объ умершихъ по возрастамъ, помѣщаемыя въ «Статистическихъ Временникахъ», со-

держатъ въ себѣ пропуски, именно въ каждомъ отчетномъ году есть нѣсколько губерній, для которыхъ неизвѣстно распредѣленіе умершихъ ни по вѣроисповѣданіямъ, ни по возрастамъ. Это происходитъ отъ того, что Стат. Комитеты этихъ губерній не доставили нужныхъ свѣдѣній. Такіе пробѣлы пополняются въ изданіи Центр. Стат. Ком. свѣдѣніями, имѣющимися въ отчетахъ начальниковъ губерній, каковые отчеты показываютъ только валовую цифру умершихъ каждаго пола особо въ данной губерніи безъ распредѣленія по вѣроисповѣданіямъ и по возрастамъ.

Съ цѣлью опредѣлить приблизительное число умершихъ православнаго исповѣданія въ каждой такой губерніи за тѣ годы, за которые не имѣется свѣдѣній, я принималъ, что число умершихъ православныхъ составляло въ данномъ году такой же точно процентъ общаго числа умершихъ (это число извѣстно), какой оно составляло въ смежные съ даннымъ года. Если свѣдѣній по той или другой губерніи недоставало за нѣсколько лѣтъ сряду, то для вычисленія искомаго коэффиціента пропорціональности я бралъ данныя объ умершихъ за годъ непосредственно предшествующій данному періоду времени и за годъ непосредственно слѣдующій за этимъ періодомъ, или за нѣсколько лѣтъ, по которымъ имѣются свѣдѣнія. Такимъ образомъ получилось въ итогѣ, что общая сумма умершихъ православныхъ, которые должны быть прибавлены къ показаніямъ таблицъ A (для возр. 0—11) и B (для возр. старше 11-ти лѣтъ) составляетъ 1.050.284 человѣка. Я допустилъ, что эти лица распредѣлялись по возрастамъ пропорціонально числамъ таблицъ A (0—11 л.) и B ($>$ 11 л.). Точнѣе было бы вычислить распредѣленіе по возрастамъ особо для каждой губерніи, принявъ, что умершіе за тотъ годъ, за который ихъ распредѣленіе неизвѣстно, распредѣлялись такъ, какъ въ смежные годы въ той-же губерніи. Но приложеніе этого несомнѣнно болѣе удовлетворительнаго пріема потребовало бы слишкомъ большой затраты времени и труда.

Назовемъ черезъ a число умершихъ всѣхъ возрастовъ по таблицѣ A. То-же самое число должно получиться, если взять

сумму показаній таблицы A до возраста 11 л. и сложить ее съ суммой всѣхъ чиселъ таблицы B. Пусть будетъ d добавочное число умершихъ православныхъ, нераспредѣленныхъ по возрастамъ. $a = 10.877.486$. $d = 1.050.284$. Обозначивъ черезъ $\mathbf{M}_i$ число умершихъ въ возрастѣ отъ i до $i + 1$ лѣтъ, какъ оно показано въ таблицахъ A (для возрастовъ 0—11 л.) и B (для возрастовъ выше 11 л.), получимъ для $\mathbf{M}_i'$, т. е. для принимаемаго нами за *истинное* число умершихъ мужскаго пола православнаго исповѣданія въ Европейской Россіи за время 1874 (1 янв.) — 1884 (1 янв.) въ возрастѣ отъ i до $i + 1$ лѣтъ, такое выраженіе:

$$\mathbf{M}_i' = \left(1 + \frac{d}{a}\right) \mathbf{M}_i.$$

II. *Родившіеся*. Годовыя числа рожденій я опредѣлялъ на основаніи двухъ различныхъ источниковъ для періода съ 1867-го по 1883-ій годъ (включительно) и для періода, предшествовавшаго 1867-ому году. Именно, годовыя числа рожденій съ 1867-го года даны въ «Статистическихъ Временникахъ Россійской Имперіи», въ которыхъ содержатся свѣдѣнія о распредѣленіи родившихся по поламъ и вѣроисповѣданіямъ. Слѣдовательно, есть возможность найти число родившихся въ Европейской Россіи православныхъ младенцевъ мужскаго пола за каждый годъ, начиная съ 1867-го. Въ этихъ данныхъ встрѣчаются такіе-же пропуски, какіе я отмѣтилъ, говоря объ умершихъ, т. е. за нѣкоторые годы по нѣкоторымъ губерніямъ неизвѣстно распредѣленіе родившихся по вѣроисповѣданіямъ, а дана только валовая цифра рожденій, показанная въ губернаторскомъ отчетѣ. Въ такихъ случаяхъ я поступалъ по тому-же правилу, какимъ руководствовался по отношенію къ умершимъ, т. е. допускалъ, что въ томъ году, за который недостаетъ свѣдѣній для той или другой губерніи, православные составляли такую-же часть родившихся всѣхъ вѣроисповѣданій, какую они составляли въ той-же губерніи въ годы, смежные съ даннымъ.

Числа рожденій съ 1840 года по 1866 г. (включ.) взяты

изъ отчетовъ Оберъ-Прокурора Св. Синода: пришлось изъ числа родившихся во всей Имперіи православныхъ (эти числа приведены также въ приложеніяхъ къ соч. Буняковскаго) вычитать сумму родившихся по внѣ-европейскимъ епархіямъ *).

Числа родившихся съ 1804 года по 1839 (включ.) заимствованы изъ «Матеріаловъ для статистики Россійской Имперіи, изд. при Стат. Отд. Сов. М-ва Внутр. Дѣлъ. (1841.)—(Законы народонаселенія Россіи)», гдѣ помѣщены числа родившихся по епархіямъ. Тутъ нужно было 1) выдѣлить родившихся въ Европ. Россіи и 2) восполнить пропуски, встрѣчаемые по нѣкоторымъ епархіямъ за опредѣленные годы, причемъ я допускалъ, что число родившихся за тотъ годъ, за который не имѣется свѣдѣній, равно среднему ариѳметическому изъ двухъ смежныхъ лѣтъ **). Кромѣ пропусковъ слѣдуетъ отмѣтить тотъ фактъ, что за нѣкоторые годы по нѣкоторымъ епархіямъ (большею частію въ силу исключительныхъ историческихъ условій, неблагопріятныхъ для собиранія статист. свѣдѣній) показаны явно невѣроятныя числа. Въ такихъ случаяхъ я совершенно игнорировалъ эти числа, поступая такъ, какъ еслибы ихъ вовсе не было.

Къ числу православныхъ, родившихся за этотъ періодъ (1804 — 1839) слѣдуетъ прибавить *уніатовъ*, такъ какъ эти уніаты, обратившіеся въ концѣ 30хъ годовъ въ православіе, втеченіе десятилѣтія 1874 — 84 умирали въ качествѣ православныхъ. Но числа родившихся уніатовъ извѣстны только за время съ 1826го по 1835й годъ, каковыя числа и были прибавлены къ числамъ родившихся православныхъ за тѣ-же годы. За годы-же, предшествовавшіе 1826му году, числа уніатскихъ рожденій не даны; пришлось допустить, что за всѣ эти годы уніатскія рожденія составляли такую-же долю православныхъ рожденій, какую они составляли въ періодъ 1826 — 35 гг., или, иначе говоря,

*) Два-три пропуска за этотъ періодъ были восполнены путемъ такого-же точно пріема, какой я употреблялъ для періода 1804—1839 гг.

**) Этотъ пріемъ я заимствовалъ у академика Буняковскаго.

пришлось помножить число родившихся православныхъ за каждый годъ до 1826го (исключительно) на величину $u = \frac{P+U}{P}$, гдѣ P есть число православныхъ, а U—уніатскихъ рожденій за время 1826—1835 гг.

Съ 1796 по 1804 г. (исключительно) числа родившихся православныхъ во всей Имперіи показаны у академика Буняковскаго, заимствовавшаго ихъ у статистика Германа. Такъ какъ за этотъ періодъ числа родившихся по епархіямъ неизвѣстны, то, въ цѣляхъ опредѣленія чиселъ рожденій, относящихся къ одной только Европейской Россіи, пришлось допустить, что отношеніе числа родившихся въ Европейской Россіи къ числу родившихся во всей Имперіи—пусть это отношеніе будетъ e— было равно къ каждомъ изъ лѣтъ 1796—1803 (включ.) тому отношенію, которое можетъ быть выведено изъ нѣсколькихъ послѣдующихъ лѣтъ. Я нашелъ e изъ данныхъ четырехлѣтія 1804 — 1808 и помножилъ на e числа Германа, принявъ полученныя такимъ путемъ числа за числа родившихся православныхъ въ Европейской Россіи *). Но нужно было и за этотъ періодъ считаться съ уніатами и слѣдовательно полученныя числа рожденій помножить еще на u.

Итакъ, я получилъ числа рожденій съ 1796 по 1883 г. (включ.) Но такъ какъ послѣдняя однолѣтняя возрастная группа умершихъ заключается въ предѣлахъ 119 — 120 лѣтъ, то мнѣ понадобились еще годовыя числа родившихся ранѣе 1796 года, а именно начиная съ 1754 года. За это время неимѣется абсолютно никакихъ данныхъ о родившихся. Поэтому я распространилъ на означенный періодъ такъ называемую гипотезу Эйлера **),

*) Такой-же точно способъ былъ примѣненъ мною къ вычисленію чиселъ православныхъ рожденій по Европейской Россіи за годы 1861, 62, 63 и 64, такъ какъ за эти годы мнѣ не удалось получить отчетовъ Оберъ-Прокурора Св. Синода изъ Императ. Публичн. Библіотеки. Я взялъ числа рожденій по всей Россіи (изъ приложенія къ «Изслѣдованіямъ...» академика Буняковскаго) за названные годы и помножилъ ихъ на e, опредѣливъ e изъ данныхъ двухъ предшествующихъ лѣтъ (1859 и 60).

**) См. Буняковскій «Опытъ о законахъ смертности и проч.». Стр. 57.

по которой населеніе, а съ нимъ вмѣстѣ рожденія и смерти возростаютъ въ геометрической прогрессіи; въ основаніи такого предположенія лежитъ допущеніе о неизмѣнности рождаемости и смертности: если общіе коэфф. рождаемости и смертности для даннаго населенія постоянны, то такое населеніе возростаетъ (или убываетъ) въ геометрической прогрессіи. Оставалось опредѣлить какой-нибудь членъ прогрессіи и знаменатель ея. Эти двѣ неизвѣстныя были найдены изъ данныхъ годовыхъ чиселъ рожденій съ 1796го по 1828ой годъ (33^{хъ}-лѣтній періодъ) по способу наименьшихъ квадратовъ, причемъ допущена была нѣкоторая (въ данномъ случаѣ совершенно ничтожная) неточность, а именно найдены были для перваго члена прогрессіи и ея знаменателя такія значенія, при которыхъ обращается въ minimum не сумма квадратовъ уклоненій (ошибокъ) самихъ чиселъ рожденій, а сумма квадратовъ уклоненій ихъ логариѳмовъ. Получилось: знаменатель прогрессіи $\rho = 1.0141$, такъ что для періода 1754 — 1796 каждое послѣдующее годовое число рожденій опредѣляется изъ предыдущаго черезъ умноженіе послѣдняго на ρ, и, наоборотъ, каждое предшествующее получается изъ непосредственно за нимъ слѣдующаго черезъ умноженіе на ρ^{-1} *).

Окончательныя числа рожденій, вычисленныя такъ, какъ было показано, приняты мною за истинныя и помѣщены въ табл. лит. *C*.

Теперь мы имѣемъ въ своемъ распоряженіи нужныя данныя для вычисленія величинъ вида r_x (см. стран. 63) по формулѣ $r_i = \frac{\mathbf{M}'_i}{\mathbf{N}_i}$, гдѣ $\mathbf{M}'_i$ имѣетъ значеніе, указанное на стр. 74, а $\mathbf{N}_i = (1873-i)+(1874-i)+\ldots+(1882-i)+\frac{1}{2}\{(1883-i)-(1873-i)\}$. Въ этомъ выраженіи числа, заключенныя въ круг-

*) Можно было-бы полученныя сказаннымъ образомъ значенія перваго члена прогрессіи и ея знаменателя разсматривать какъ приближенныя значенія искомыхъ величинъ и найти къ нимъ поправки [см. Маіевскій. Изложеніе способа наименьшихъ квадратовъ, n^0 82 (стр. 184)]. Этотъ пріемъ потребовалъ-бы, однако, довольно утомительныхъ вычисленій.

лыя скобки, означаютъ итоги рожденій за соотвѣтствующіе года. По этой формулѣ вычислены всѣ значенія r_i, за исключеніемъ возрастовъ ниже 1го года, для которыхъ представлялась возможность опредѣлить соотвѣтствующія показанія съ большею точностію, а именно положивъ въ Ангальтской формулѣ $\Delta z = \frac{1}{12}$. (Годъ принятъ за единицу измѣренія). Слѣдовательно, были приняты въ разсчетъ мѣсячные итоги рожденій за 1873 и 1883 годы, каковые итоги показываются въ Статистическихъ Временникахъ.

Оставалось еще опредѣлить число умирающихъ въ предѣлахъ возраста $120 - \omega$ изъ единицы родившихся, т. е. $\sum_{120}^{\omega-1} r_i$. По абсолютной величинѣ число умершихъ въ этихъ возрастахъ составляетъ около $\frac{1}{2}$ умершихъ въ предѣлахъ возраста 115 — 120 лл. Число-же умирающихъ въ возрастѣ отъ 115 до 120 лл. изъ единицы родившихся или $\sum_{115}^{119} r_i$ получилось 0.00002_3. Поэтому я счелъ возможнымъ положить $\sum_{120}^{\omega-1} r_i = 0.00001_2$.

Такъ составились показанія таблицы D.

Для того, чтобъ изъ полученныхъ значеній для r можно было составить таблицу смертности, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условіе $\sum_{0}^{\omega-1} r_x = 1$, иначе было-бы $f(\omega) > 0$ или $f(\omega) < 0$. Просуммировавъ всѣ значенія r, получаемъ $\Sigma r = 0.94970$.

Спрашивается, чѣмъ можетъ быть объясненъ такой результатъ. Укажемъ возможныя и вѣроятныя его причины:

1) Прежде всего, полученное неравенство $\Sigma r < 1$ могло ока-

заться слѣдствіемъ *неполноты свѣдѣній объ умершихъ*. Весьма возможно, что, при существующихъ несовершенныхъ способахъ регистраціи смертей, значительная часть послѣднихъ (въ данномъ случаѣ слѣдовало-бы предположить — около 5%) не заносится въ смертные списки. Отсюда получаются меньшія, противъ дѣйствительныхъ, абсолютныя числа умершихъ, а слѣдовательно въ одинаковой пропорціи оказываются умаленными противъ истины элементы r_x. Правда, что несовершенство способовъ собиранія данныхъ должно отзываться также на числахъ рожденій: и для нихъ будутъ получаться значенія меньшія противъ дѣйствительныхъ. Положимъ, что изъ числа родившихся нѣкоторая часть ν не заносится въ списки, такъ что, при истинномъ значеніи числа рожденій N, таковыхъ значится всего $N(1-\nu)$; съ другой стороны, пусть будетъ μ часть умершихъ незарегистрированныхъ статистикой, а M истинное число умершихъ. Слѣдовательно, величины вида r, истинное значеніе которыхъ r' есть $\frac{M}{N}$, вслѣдствіе пропусковъ въ записяхъ, получаются равными $\frac{M(1-\mu)}{N(1-\nu)}$. Предположивъ, что неполнота записей равномѣрно распространяетъ свое дѣйствіе на всѣ возраста, получимъ для каждаго r въ нашемъ частномъ случаѣ $\frac{r}{r'} = \frac{0.94970}{1.00000}$ или $\frac{1-\mu}{1-\nu} = 0.94970$, отсюда $\mu = 0{,}05030 + 0.94970\nu$. Изъ этого равенства очевидно, что, если допустить существованіе пропусковъ въ записяхъ рожденій, а не однѣхъ только смертей, то придется принять, что не заносящаяся въ списки часть умершихъ составляетъ не 5,03%, а болѣе того. Такъ напримѣръ, предположивъ, что не записывается 1% родившихся, получимъ $\mu = 0.059797$, т. е. уже около 6%. Во всякомъ случаѣ, для того, чтобъ неравенство $\Sigma r < 1$ могло быть объяснено неполнотой свѣдѣній о движеніи населенія, требуется, чтобъ μ было $> \nu$. Дѣйствительность, по всѣмъ вѣроятіямъ, удовлетворяетъ этому условію. «Числа умершихъ, говоритъ академикъ Буняковскій, какъ въ Россіи, такъ и въ другихъ государствахъ, менѣе надежны, чѣмъ числа рожденій» (Опытъ о

законахъ смертности, стр. 26). Поэтому можно думать, что указанное обстоятельство, если не вполнѣ, то въ значительной мѣрѣ способно объяснить неравенство $\Sigma r < 1$.

2) Вторымъ такимъ обстоятельствомъ, значеніе котораго, впрочемъ, далеко не такъ существенно, можетъ служить фактъ эмиграціи лицъ мужскаго пола православнаго исповѣданія, родившихся въ предѣлахъ 50ти губерній Европейской Россіи, въ другія части Россійской Имперіи, каковы Финляндія, Царство Польское, Кавказъ и Азіятская Россія. Самый фактъ эмиграціи лежитъ внѣ сомнѣнія, неизвѣстны только размѣры явленія, о которомъ не имѣется общихъ по всей Россіи данныхъ. Объ уравновѣшеніи отлива мужскаго православнаго населенія изъ Европейской Россіи приливами извнѣ не можетъ быть рѣчи, такъ какъ переселенія православныхъ въ Европейскую Россію, какъ изъ другихъ частей Имперіи, такъ и изъ другихъ государствъ, навѣрное не достигаютъ сколько-нибудь значительной цифры.

3) Наконецъ, третьимъ обстоятельствомъ, заслуживающимъ притомъ бо́льшаго вниманія, является возможный фактъ уменьшенія смертности во времени; и этотъ фактъ способенъ послужить къ объясненію неравенства $\Sigma r < 1$.

Предположимъ, что русская смертность въ періодъ, предшествующій десятилѣтію 1874—84 была менѣе благопріятна, чѣмъ въ послѣдній періодъ, и пусть смертность этого послѣдняго періода выражается величинами $f_1(x)$, $r_1(x)$, $w_1(x)$. . . ., удовлетворяющими условію $\Sigma r_1(x) = 1$. Значенія $f_1(x)$ имѣютъ такой смыслъ: они показываютъ числа лицъ, которыя доживали бы до послѣдовательныхъ возрастовъ изъ единицы родившихся, еслибы сила смертности, или, что почти одно и то-же *), вѣроятности смерти въ послѣдовательныхъ возрастахъ были равны для этой единицы родившихся тѣмъ величинамъ, какія получились бы для соотвѣтствующихъ возрастовъ по даннымъ 1874 — 84 гг. Мы не мо-

*) При достаточно малыхъ разностяхъ предѣловъ возраста каждой группы, различіе между силой смертности и вѣроятностью смерти весьма мало.

жемъ найти непосредственно, т. е. изъ сопоставленія живущихъ съ умершими, величинъ $w_1(x)$, а потому онѣ остаются для насъ неизвѣстными, равно какъ величины $f_1(x)$ и $r_1(x)$.

Очевидно, что $r_1(x) = f_1(x) \cdot w_1(x)$, т. е. вѣроятность умереть въ предѣлахъ возраста отъ x до $x+1$ для новорожденнаго равняется произведенію изъ вѣроятности для него дожить до возраста x на вѣроятность для x-лѣтняго умереть ранѣе достиженія возраста $x+1$. Съ другой стороны, полученная нами (путемъ комбинаціи умершихъ съ родившимися) величина $r(x)$ тоже равняется $f(x)$, помноженной на $w_1(x)$, причемъ здѣсь $f(x)$ означаетъ уже не вѣроятность дожить до возраста x при условіяхъ смертности десятилѣтія 1874 — 84, а при условіяхъ болѣе ранней, а слѣдовательно, по предположенію, менѣе благопріятной смертности. Поэтому $f(x) < f_1(x)$.

Будемъ имѣть $r_1(x) = f_1(x) \cdot w_1(x)$, $r(x) = f(x) \cdot w_1(x)$ | $\frac{r_1(x)}{r(x)} = \frac{f_1(x)}{f(x)}$.

Отсюда $r(x) < r_1(x)$, но $\Sigma r_1(x) = 1$. Слѣд. $\Sigma r(x) < 1$.

Ясно, слѣдовательно, что, при условіи уменьшенія смертности во времени, должны получиться для $r_0, r_1, r_2 \ldots$ меньшія значенія противъ тѣхъ, которыя значились бы въ таблицѣ, показывающей порядокъ вымиранія единицы родившихся, поставленной на все время вымиранія въ условія смертности десятилѣтія 1874—1884 гг. Опредѣлить точно аналитическую зависимость между $r_1(x)$ и $r(x)$ нѣтъ никакой возможности; пришлось бы сдѣлать какое-нибудь допущеніе о законѣ измѣненія смертности во времени, приложить этотъ законъ ко всѣмъ возрастамъ . . . ., но подобныя выкладки заключали бы такъ много элементовъ произвола, что потеряли бы всякое практическое значеніе и реальный (статистическій) интересъ. Поэтому, если принять разсматриваемое нами предположеніе о томъ, что неравенство $\Sigma r < 1$ происходитъ отъ уменьшенія смертности, то слѣдуетъ признать, что задача о построеніи такой таблицы, которая выражала бы

смертность десятилѣтія 1874—84 гг., т. е. давала бы величины $w_1(x)$, $f_1(x)$, $r_1(x)$ . . ., не допускаетъ точнаго рѣшенія. Можно только опредѣлить для искомыхъ величины $f_1(x)$ высшіе предѣлы, которые найдутся изъ неравенства $f_1(x) < 1 - \sum_0^{x-1} r(x)$, такъ какъ $r_1(x) > r(x)$, а слѣд. $\sum_0^{x-1} r_1(x) > \sum_0^{x-1} r(x)$, откуда

$$f_1(x) = 1 - \sum_0^{x-1} r_1(x) < 1 - \sum_0^{x-1} r(x).$$

Эти высшіе предѣлы будутъ несообразно высоки для преклонныхъ возрастовъ; для предѣльнаго возраста ω высшій предѣлъ доживающихъ окажется 0.0503. Для высшаго предѣла величины ε_0, т. е. средней продолжительности жизни, выраженной въ годахъ, получимъ 30,02. Мы показали, что предположеніе объ уменьшеніи смертности во времени *можетъ* служить объяснительной причиной неравенства $\Sigma r < 1$. Но никакихъ прямыхъ указаній на существованіе такого факта въ дѣйствительности не имѣется, а потому я предпочелъ поступить съ элементами $r(x)$ такъ, какъ еслибы неравенство $\Sigma r < 1$ обусловливалось неполнотою свѣдѣній объ умершихъ, и распредѣлилъ недостающіе 5,03% пропорціонально величинамъ $r(x)$, т. е. опредѣлилъ новыя значенія $r'(x)$ изъ формулы $r'(x) = \frac{r(x)}{\Sigma r(x)}$, которая удовлетворяетъ условію $\Sigma r' = 1$. Значенія величинъ $r'(x)$ помѣщены въ табл. *E*.

Эти значенія годны для того, чтобы по нимъ найти рядъ значеній $f(x)$ по формулѣ $f(x) = 1 - \sum_0^{x-1} r'(x)$, каковой рядъ представленъ первымъ столбцомъ таблицы *F*. Второй столбецъ тойже таблицы даетъ *сглаженныя* значенія тѣхъ-же величинъ $f(x)$. Сглаживаніе произведено по способу Woolhouse'а, изложенному въ сочиненіи «Life-Tables deduced from the Mortality Experience

of Assurance Companies. 1872». Способъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ: пусть требуется изъ ряда данныхъ значеній $l_0, l_1, l_2, l_3 \ldots$ найти рядъ новыхъ (сглаженныхъ) значеній $l'_0, l'_1, l'_2, l'_3 \ldots$. Представимъ себѣ, что данныя величины $l_0, l_1, l_2, l_3 \ldots$ изображены ординатами кривой, абсциссы которой соотвѣтственно равны 0, 1, 2, 3 . . . Черезъ точки $(0, l_0)$, $(5, l_5)$, $(10, l_{10})$ проводятъ параболу втораго порядка; отбросивъ тѣ ея части, которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ абсциссъ отъ 0 до $2^1/_2$ и отъ $7^1/_2$ до 10, оставляютъ ту часть, которая заключена въ предѣлахъ отъ $2^1/_2$ до $7^1/_2$. Затѣмъ проводятъ параболу черезъ окончанія ординатъ l_5, l_{10} и l_{15} и, поступая по предыдущему, оставляютъ ту часть ея, которая соотвѣтствуетъ значеніямъ абсциссъ отъ $7^1/_2$ до $12^1/_2$. Такъ поступаютъ до конца ряда, проводя параболы втораго порядка черезъ окончанія ординатъ l_{10}, l_{15} и l_{20}; l_{15}, l_{20} и l_{25},. . . . Получается въ результатѣ новый рядъ значеній ординатъ l_3, l_4, l_5. . . . вмѣсто заданнаго. Этотъ новый рядъ будетъ имѣть элементы l_5, l_{10}, l_{15} . . . . общими съ заданнымъ, а остальные элементы отличными отъ элементовъ заданнаго ряда, причемъ элементы, заключенные въ предѣлахъ отъ $2^1/_2$ до $7^1/_2$, отъ $7^1/_2$ до $12^1/_2$, отъ $12^1/_2$ до $17^1/_2$ и т. д. будутъ соотвѣтственно расположены по параболамъ втораго порядка. Точно такимъ же образомъ можно получить второй новый рядъ, имѣющій съ заданнымъ общими элементы l_6, l_{11} l_{16} . . ., потомъ третій, съ общими элементами l_7, l_{12}, l_{17} . . ., четвертый—l_8, l_{13}, l_{18} . . ., и наконецъ пятый, въ которомъ элементы l_9, l_{14}, l_{19} . . . тѣ-же, что и въ заданномъ. Получится, по выраженію Woolhouse'а, нѣчто въ родѣ сѣти кривыхъ или система пяти переплетающихся кривыхъ, составленныхъ каждая изъ ряда параболъ втораго порядка. Каждому значенію указателя при l будетъ теперь соотвѣтствовать пять значеній, изъ которыхъ только одно тожественно съ первоначальнымъ. Изъ этихъ пяти значеній выводится средняя ариѳметическая, которая и принимается за сглаженное значеніе l'. По этому способу l'_i опредѣляется, какъ линейная функція отъ l_i и смежныхъ съ нимъ первоначаль-

ныхъ значеній l по формулѣ, которая можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$l'_i = 0.2 l_i + 0.008 \{3(8a_1 + 7a_2 + a_4) + 7a_3 - (2a_6 + 3a_7)\},$$

гдѣ $a_1 = l_{i-1} + l_{i+1}$, $a_2 = l_{i-2} + l_{i+2} \ldots . a_7 = l_{i-7} + l_{i+7}$.

По этой формулѣ сглажены значенія f_x, начиная съ $x = 20$ и кончая $x = 100$.

Для значеній x отъ 7 до 19 примѣненъ тотъ-же способъ съ тою только разницей, что параболы проводились черезъ ординаты, отстоящія одна отъ другой не на 5 единицъ, а на 3, т. е. черезъ l_0, l_3, l_6, затѣмъ черезъ l_1, l_4, l_7 и т. д. Въ этомъ случаѣ получается

$$l'_i = \frac{1}{3} l_i + \frac{1}{27} (8a_1 + 2a_2 - a_4).$$

Значенія f_x при $x = 1$, 2, 3 и 4 оставлены безъ измѣненія.

Величины же $f(5)$ и $f(6)$ опредѣлены такимъ образомъ, чтобы онѣ съ величинами $f(3)$, $f(4)$ и $f(7)$, $f(8)$ были расположены по параболѣ третьяго порядка.

Полученный рядъ сглаженныхъ значеній для f перенесенъ безъ измѣненія въ таблицу лит. G. Буквы f, r, w, Q, q и ε имѣютъ смыслъ, указанный на стр. 15. Въ частности нужно замѣтить, что показанныя въ этой таблицѣ значенія r, выведенныя изъ значеній f, не совпадаютъ ни съ значеніями r по таблицѣ D, ни съ значеніями r' по таблицѣ E. При выводѣ величинъ Q_x и получаемыхъ изъ нея q_x и ε_x, я пользовался формулой, данной для Q_x на стр. 17. Однако для предѣльныхъ значеній x пришлось примѣнить нѣсколько иные способы вычисленія; я поступилъ такимъ образомъ: положивъ $q_{120} = 0$, опредѣлилъ q_{110} по формулѣ Симпсона: $q_{110} = [f(100) + 4f(115) + f(120)] \times \frac{10}{6}$. Для вычисленія Q_0 я воспользовался числами доживающихъ изъ единицы родившихся до $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{12}$ и $\frac{6}{12}$ года.

Эти числа, не приведенныя въ таблицѣ G, суть

$$f\left(\frac{1}{12}\right)=0.91036,\ f\left(\frac{3}{12}\right)=0.83651 \text{ и } f\left(\frac{6}{12}\right)=0.76464.$$

Зная эти величины, я могъ вычислить Q_0 съ достаточнымъ приближеніемъ по способу трапецій. Сумма Q_1+Q_2 опредѣлена по способу Симпсона: $Q_1+Q_2=\frac{1}{3}\left[f(1)+4f(2)+f(3)\right]$. Изъ этой суммы я вычелъ Q_2, найденное по общей формулѣ, и получилъ значеніе Q_1.

Таблицы лит. H и лит. J даютъ числа живущихъ православныхъ мужскаго пола въ послѣдовательныхъ возрастахъ отъ 0 до 100 лѣтъ, въ моменты времени 1 января 1870-го года и 1 января 1884го года. Показанія этихъ таблицъ вычислены въ предположеніи неизмѣннаго порядка вымиранія, и именно того порядка, который данъ таблицей G. Искомыя числа живущихъ суть совокупности вида P_2.

$$P_2=\int_{x_1}^{x_2} U(x,\tau-x)\,dx.$$

Внеся предположеніе о неизмѣнности порядка вымиранія, т. е. положивъ

$U(x,\tau-x)=U(o,\tau-x)\cdot f(x)=F'(\tau-x)\,f(x)$ и принявъ $F'(t)=\text{const.}$ въ предѣлахъ отъ $\tau-x_2$ до $\tau-x_1$, будемъ имѣть, при $x_1=x$, и $x_2=x+1$,

$$P_2=\left\{F(\tau-x)-F(\tau-x-1)\right\}\int_x^{x+1} f(x)\,dx.$$

Пусть $P_{i,x}$ означаетъ число живущихъ въ началѣ i-го года въ возрастѣ отъ x до $x+1$, а N_i число рожденій въ i-мъ году; тогда $P_{i,x}=N_{i-(x+1)}\times Q_x$. Такимъ образомъ таблицы лит. H и J являются результатомъ нѣкотораго рода комбинаціи данныхъ таблицы лит. C съ показаніями таблицы лит. G.

Разница между вычисленнымъ мною итогомъ мужскаго православнаго населенія Европейской Россіи на 1 янв. 1870 года

и тѣмъ числомъ, которое показано въ Сборникѣ Свѣдѣній по Россіи, издаваемомъ Центральнымъ Статистическимъ Комитетомъ, за тотъ-же годъ, составляетъ около $2\frac{1}{2}\%$ in plus. Въ «Сборникахъ» за послѣдующіе годы не имѣется распредѣленія населенія по вѣроисповѣданіямъ, и тѣмъ самымъ исключается возможность подобнаго рода сопоставленій.

Зато есть возможность произвести, нѣкоторымъ образомъ, контрольный опытъ надъ вычисленной мною таблицей смертности, сочетавъ *данныя о лицахъ призывнаго возраста**) съ числами рожденій.

Молодые люди призыва какого-нибудь $k^{\text{-го}}$ года суть тѣ, которымъ до 1 янв. этого года исполнилось 20 лѣтъ, т. е. всѣ родившіеся въ $(k-21)^{\text{-мъ}}$ году. Нетрудно видѣть, что, если намъ, съ одной стороны, извѣстно число молодыхъ людей призыва $k^{\text{-го}}$ года, пусть это будетъ P_k, а съ другой стороны, число рожденій $(k-21)^{\text{-го}}$ года, пусть это будетъ N_{k-21}, то раздѣливъ первое число на второе, мы получимъ число доживающихъ до призывнаго возраста изъ единицы родившихся. Такъ какъ свѣдѣнія о числѣ лицъ, подлежащихъ призыву въ какомъ-нибудь данномъ году, пріурочиваются къ моменту набора, который производится въ концѣ этого-же года, то ясно, что лица призывнаго возраста будутъ находиться въ возрастныхъ предѣлахъ, изъ которыхъ низшій близокъ къ 21 (двадцати одному) году [нѣсколько меньше $21^{\text{-го}}$ года], а высшій близокъ къ 22 годамъ [нѣсколько меньше $22^{\text{-хъ}}$ лѣтъ]. Очевидно поэтому, что отношеніе $\frac{P_k}{N_{k-21}}$ можетъ быть разсматриваемо какъ число доживающихъ изъ единицы родившихся до нѣкотораго промежуточнаго возраста между $21^{\text{-мъ}}$ и $22^{\text{-мя}}$ годами. Сравненіе этого отношенія съ соотвѣтственными показаніями таблицы смертности можетъ оказаться весьма поучительнымъ. Но наша таблица смертности относится къ одному лишь православному населенію Европейской

*) См. Статистическій Временникъ Россійской Имперіи, серія III, вып. 12: Всеобщая воинская повинность въ Имперіи 1874—1883.

Россіи, слѣдовательно и подъ P_k слѣдуетъ разумѣть только лицъ православныхъ. Призывные-же православнаго исповѣданія прямо не даны. По вѣроисповѣданіямъ распредѣлены только лица принятыя на службу, и потому приходится вычислять P_k въ томъ предположеніи, что распредѣленіе по вѣроисповѣданіямъ призывныхъ соотвѣтствуетъ распредѣленію принятыхъ на службу. Если мы означимъ черезъ P'_k призывныхъ всѣхъ вѣроисповѣданій, черезъ R_k принятыхъ на службу православныхъ, а черезъ R'_k всѣхъ принятыхъ на службу, то будетъ: $P_k = P'_k \frac{R_k}{R'_k}$. Такъ опредѣлятся числители отношеній $\frac{P_k}{N_{k-21}}$, для $k = 1874, 1875, \ldots 1883$. Знаменатели же найдутся въ таблицѣ *C*.

Годъ. k.	Всѣ призывные. P'_k.	Всѣ принятые. R'_k	Принятые правосл. R_k.	$\frac{P_k}{N_{k-21}} = \frac{P'_k \cdot R_k}{N_{k-21} \cdot R'_k}$
1874	623150	131805	112233	0.41692
75	620868	159452	135262	0.43044
76	606184	171748	144826	0.42868
77	597664	186857	159995	0.45040
78	666720	187547	160013	0.44943
79	666000	186934	157082	0.42649
80	696158	200968	168049	0.42797
81	682699	182194	151948	0.43141
82	702977	181728	152668	0.43294
83	728149	187163	157486	0.42821
Всего	6.590569	1.776396	1.499562	0.43229

Итакъ въ среднемъ для родившихся за періодъ 1853 (1 янв.) — 1863 (1 янв.) число доживающихъ до нѣкотораго промежуточнаго возраста между 21 и 22 годами составляетъ 0.432 на единицу. Справляемся, какъ велики числа доживающихъ до возрастовъ 21 и 22 по таблицѣ *G*, и находимъ для возраста 21 годъ 0.434, для возраста 22 года — 0.430. Совпаденіе получается весьма точное.

Таблицы лит. *K*, *L*, *M* даютъ показанія таблицъ смертности

нѣкоторыхъ европейскихъ государствъ въ сопоставленіи съ данными русской таблицы. Эти таблицы относятся къ одному мужескому полу. Противъ знака 0* стоитъ число родившихся живорожденныхъ вмѣстѣ съ мертворожденными; соотвѣтственно этому, значеніе величины ε_x, стоящее противъ $x=0^*$, даетъ математическое ожиданіе жизни для родившагося, относительно котораго не задано, родился ли онъ живымъ, или мертвымъ.

Помѣщенныя иностранныя таблицы составлены всѣ по приблизительно одинаковымъ методамъ, именно на основаніи данныхъ переписи, комбинированныхъ съ данными объ умершихъ. Эти таблицы, кромѣ итальянской, приведены въ Statistik d. Deutschen Reichs за 1887 годъ, гдѣ появилась таблица смертности Германской Имперіи, вычисленная Беккеромъ. Величины, показанныя въ таблицѣ L, суть величины вида $c \times 1000$, гдѣ c есть приближенное значеніе функціи $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}$ (см. стр. 7). Этого рода величины не всегда показываются въ таблицахъ, а потому Беккеру пришлось самому вычислять ихъ и для другихъ государствъ, кромѣ Германіи, причемъ онъ примѣнялъ къ вычисленію величинъ вида $\int_x^{x+1} f(x)\,dx = Q_x$ тотъ пріемъ, который я изложилъ на стр. 20 — 23. Для Россіи-же эти значенія найдены по формулѣ стр. 17. Замѣчу, что коэффиціентъ смертности $c \times 1000$ для предѣловъ $x_1 = o$, $x_2 = \omega$ обращается въ обратную величину средней продолжительности жизни, помноженную на 1000. И дѣйствительно, $\frac{f(o)-f(\omega)}{\int_0^{\omega} f(x)\,dx} \times 1000 = \frac{1}{\varepsilon_0} \times 1000$.

Таблица лит. А.

Числа умершихъ мужскаго пола православнаго исповѣданія въ Европейской Россіи за десятилѣтіе 1874 г. (1 янв.)—1884 г. (1 янв.).

Въ возрастѣ.						
отъ	0	до	$\frac{1}{12}$	г.	1256269
»	$\frac{1}{12}$	»	$\frac{3}{12}$	»	1032274
»	$\frac{3}{12}$	»	$\frac{6}{12}$	»	1025189
»	$\frac{6}{12}$	»	1	»	1276279
»	1	»	2	»	1070653
»	2	»	3	»	564602
»	3	»	4	»	354983
»	4	»	5	»	249619
»	5	»	6	»	183589
»	6	»	7	»	121772
»	7	»	8	»	83055
»	8	»	9	»	66198
»	9	»	10	»	59186
»	10	»	11	»	44207
»	11	»	12	»	41813
»	12	»	13	»	36641
»	13	»	14	»	31113
»	14	»	15	»	31704
»	15	»	16	»	30876
»	16	»	17	»	32940
»	17	»	18	»	36620
»	18	»	19	»	35320
»	19	»	20	»	39409
»	20	»	21	»	39659
»	21	»	22	»	39486
»	22	»	23	»	40157
»	23	»	24	»	38286
»	24	»	25	»	44373
»	25	»	26	»	41410
»	26	»	27	»	38239
»	27	»	28	»	39836
»	28	»	29	»	32573
»	29	»	30	»	48984
»	30	»	31	»	43108
»	31	»	32	»	32764
»	32	»	33	»	33136
»	33	»	34	»	28995
»	34	»	35	»	50144
»	35	»	36	»	48119
»	36	»	37	»	35959
»	37	»	38	»	39646
»	38	»	39	»	34679
»	39	»	40	»	63831
»	40	»	41	»	56015

Въ возрастѣ.					
отъ	41	до	42	л.	38161
»	42	»	43	»	39195
»	43	»	44	»	34094
»	44	»	45	»	67816
»	45	»	46	»	62140
»	46	»	47	»	42114
»	47	»	48	»	48385
»	48	»	49	»	43188
»	49	»	50	»	81308
»	50	»	51	»	69859
»	51	»	52	»	45986
»	52	»	53	»	47176
»	53	»	54	»	43599
»	54	»	55	»	72798
»	55	»	56	»	69945
»	56	»	57	»	53035
»	57	»	58	»	53962
»	58	»	59	»	47614
»	59	»	60	»	107559
»	60	»	61	»	90630
»	61	»	62	»	52596
»	62	»	63	»	53573
»	63	»	64	»	46776
»	64	»	65	»	84243
»	65	»	66	»	78670
»	66	»	67	»	46256
»	67	»	68	»	50035
»	68	»	69	»	39984
»	69	»	70	»	95707
»	70	»	71	»	79273
»	71	»	72	»	42116
»	72	»	73	»	38545
»	73	»	74	»	32484
»	74	»	75	»	61484
»	75	»	76	»	52480
»	76	»	77	»	27300
»	77	»	78	»	29858
»	78	»	79	»	26582
»	79	»	80	»	57207
»	80	»	85	»	91111
»	85	»	90	»	36716
»	90	»	95	»	13989
»	95	»	100	»	7028
»	100	»	105	»	1590
»	105	»	110	»	470
»	110	»	115	»	181
»	115	»	120	»	75
»	120	»	125	»	30
»	125	»	ω	»	9

Общій итогъ 10.877.486.

Таблица лит. В.

Измѣненное распредѣленіе умершихъ по возрастамъ.

Числа умершихъ въ возрастѣ отъ i до $i+1$ лѣтъ.

i		i		i		i	
11	41284	39	44888	67	61768	95	1913
12	36336	40	45815	68	59928	96	1647
13	32052	41	47069	99	57938	97	1393
14	32471	42	48283	70	55751	98	1151
15	32366	43	49396	71	53546	99	921
16	34041	44	50698	72	51559	100	614
17	36011	45	51733	73	49577	101	432
18	36608	46	52623	74	47318	102	284
19	37412	47	53795	75	44391	103	170
20	37817	48	54866	76	41188	104	90
21	39288	49	55287	77	37894	105	156
22	40538	50	55897	78	33700	106	119
23	41113	51	57051	79	29664	107	88
24	40558	52	58179	80	24785	108	63
25	39881	53	59252	81	21361	109	44
26	39150	54	60471	82	18265	110	53
27	39008	55	61740	83	15499	111	43
28	39504	56	63432	84	13061	112	35
29	38543	57	64915	85	11421	113	28
30	37868	58	66996	86	9527	114	21
31	38197	59	67068	87	7845	115	21
32	38776	60	67053	88	6373	116	18
33	39812	61	67121	89	5113	117	15
34	40039	62	67088	90	4282	118	12
35	40480	63	66828	91	3376	119	9
36	41702	64	65716	92	2644		
37	42892	65	64263	93	2056		
38	44068	66	63312	94	1622		

Таблица лит. С.

Числа родившихся мужскаго пола православнаго исповѣданія въ Европейской Россіи.

Въ сотняхъ.

Годъ.		Годъ.		Годъ.	
1790	5287	1822	8012	1854	12236
1791	5362	1823	8501	1855	11924
1792	5437	1824	8553	1856	11362
1793	5513	1825	8845	1857	12657
1794	5591	1826	8905	1858	13122
1795	5670	1827	9517	1859	13602
1796	5318	1828	9516	1860	13198
1797	5293	1829	9847	1861	13641
1798	5549	1830	9686	1862	14308
1799	5762	1831	9321	1863	13492
1800	5871	1832	9922	1864	14578
1801	6254	1833	9351	1865	13816
1802	6888	1834	9912	1866	13300
1803	6719	1835	9149	1867	13763
1804	7136	1836	10242	1868	13699
1805	7155	1837	10219	1869	14158
1806	7080	1838	10667	1870	14115
1807	7006	1839	11371	1871	14861
1808	6996	1840	9717	1872	14632
1809	6732	1841	10690	1873	15540
1810	7188	1842	10376	1874	15507
1811	7039	1843	11104	1875	15824
1812	7239	1844	11546	1876	15800
1813	6608	1845	11452	1877	15641
1814	6250	1846	11040	1878	15204
1815	6986	1847	11479	1879	16323
1816	7639	1848	12086	1880	16380
1817	7796	1849	11210	1881	16403
1818	7611	1850	12071	1882	17556
1819	7921	1851	11450	1883	17293
1820	8052	1852	12160		
1821	8035	1853	12727		

Таблица лит. D.

Значенія величинъ вида r_x.

x	r_x	x	r_x	x	r_x
0	0.31077	37	0.00437	74	0.00770
1	0.07397	38	0.00455	75	0.00736
2	0.03956	38	0.00472	76	0.00700
3	0.02518	40	0.00490	77	0.00661
4	0.01796	41	0.00509	78	0.00604
5	0.01337	42	0.00527	79	0.00545
6	0.00897	43	0.00542	80	0.00466
7	0.00621	44	0.00561	81	0.00411
8	0.00503	45	0.00581	82	0.00359
9	0.00454	46	0.00596	83	0.00309
10	0.00343	47	0.00616	84	0.00263
11	0.00322	48	0.00633	85	0.00232
12	0.00286	49	0.00644	86	0.00195
13	0.00254	50	0.00659	87	0.00161
14	0.00259	51	0.00683	88	0.00132
15	0.00259	52	0.00708	89	0.00107
16	0.00274	53	0.00733	90	0.00091
17	0.00293	54	0.00764	91	0.00073
18	0.00302	55	0.00797	92	0.00058
19	0.00314	56	0.00837	93	0.00046
20	0.00321	57	0.00872	94	0.00037
21	0.00337	58	0.00918	95	0.00044
22	0.00354	59	0.00943	96	0.00038
23	0.00364	60	0.00969	97	0.00033
24	0.00364	61	0.00988	98	0.00027
25	0.00363	62	0.00999	99	0.00022
26	0.00360	63	0.01008	100	0.00015
27	0.00361	64	0.01005	101	0.00011
28	0.00367	65	0.00996	102	0.00007
29	0.00360	66	0.00991	103	0.00004
30	0.00357	67	0.00976	104	0.00002
31	0.00365	68	0.00950	105	0.00004
32	0.00375	69	0.00898	106	0.00003
33	0.00390	70	0.00870	107	0.00003
34	0.00396	71	0.00837	108	0.00002
35	0.00403	72	0.00813	109	0.00001
36	0.00420	73	0.00794	$\sum_{110}^{\omega-1} r_x$	0.00009

Таблица лит. Е.

Значенія величинъ вида r'_x.

x	r'_x	x	r'_x	x	r'_x
0	0.32723	37	0.00460	74	0.00811
1	0.07789	38	0.00479	75	0.00775
2	0.04166	39	0.00497	76	0.00737
3	0.02652	40	0.00516	77	0.00696
4	0.01892	41	0.00536	78	0.00636
5	0.01408	42	0.00554	79	0.00574
6	0.00945	43	0.00571	80	0.00491
7	0.00654	44	0.00591	81	0.00433
8	0.00529	45	0.00612	82	0.00378
9	0.00478	46	0.00628	83	0.00325
10	0.00361	47	0.00648	84	0.00277
11	0.00339	48	0.00667	85	0.00244
12	0.00301	49	0.00678	86	0.00205
13	0.00267	50	0.00694	87	0.00169
14	0.00272	51	0.00719	88	0.00139
15	0.00273	52	0.00746	89	0.00113
16	0.00288	53	0.00772	90	0.00096
17	0.00309	54	0.00804	91	0.00077
18	0.00318	55	0.00840	92	0.00061
19	0.00330	56	0.00881	93	0.00048
20	0.00338	58	0.00919	94	0.00039
21	0.00355	58	0.00967	95	0.00046
22	0.00373	59	0.00993	96	0.00040
23	0.00383	60	0.01021	97	0.00035
24	0.00383	61	0.01040	98	0.00028
25	0.00382	62	0.01052	99	0.00023
26	0.00379	63	0.01061	100	0.00016
27	0.00380	64	0.01058	101	0.00012
28	0.00386	65	0.01048	102	0.00008
29	0.00379	66	0.01043	103	0.00004
30	0.00376	67	0.01028	104	0.00002
31	0.00384	68	0.01000	105	0.00004
32	0.00395	69	0.00946	106	0.00003
33	0.00411	70	0.00916	107	0.00003
34	0.00417	71	0.00882	108	0.00002
35	0.00424	72	0.00856	109	0.00001
36	0.00442	73	0.00836	$\sum_{110}^{\omega-1} r'_x$	0.00009

Таблица лит. F.

Значенія величинъ вида f_x.

x	Первоначальн. значеніе f_x.	Сглаженн.	x	Первоначальн. значеніе f_x.	Сглаженн.
0	1.00000		57	0.24226	0.24215
1	0.67277		58	0.23307	0.23293
2	0.59488		59	0.22340	0.22334
3	0.55322		60	0.21347	0.21343
4	0.52670		61	0.20326	0.20325
5	0.50778	0.50735	62	0.19286	0.19286
6	0.49370	0.49367	63	0.18234	0.18233
7	0.48425	0.48417	64	0.17173	0.17174
8	0.47771	0.47733	65	0.16115	0.16115
9	0.47242	0.47206	66	0.15067	0.15062
10	0.46764	0.46772	67	0.14024	0.14023
11	0.46403	0.46393	68	0.12996	0.13007
12	0.46064	0.46063	69	0.11996	0.12018
13	0.45763	0.45766	70	0.11050	0.11061
14	0.45496	0.45491	71	0.10134	0.10137
15	0.45224	0.45222	72	0.09252	0.09245
16	0.44951	0.44947	73	0.08396	0.08382
17	0.44663	0.44659	74	0.07560	0.07547
18	0.44354	0.44355	75	0.06749	0.06741
19	0.44036	0.44037	76	0.05974	0.05968
20	0.43706	0.43706	77	0.05237	0.05235
21	0.43368	0.43362	78	0.04541	0.04548
22	0.43013	0.43005	79	0.03905	0.03920
23	0.42640	0.42637	80	0.03331	0.03353
24	0.42257	0.42261	81	0.02840	0.02850
25	0.41874	0.41880	82	0.02407	0.02410
26	0.41492	0.41497	83	0.02029	0.02029
27	0.41113	0.41115	84	0.01704	0.01701
28	0.40733	0.40734	85	0.01427	0.01420
29	0.40347	0.40354	86	0.01183	0.01181
30	0.39968	0.39974	87	0.00978	0.00979
31	0.39592	0.39591	88	0.00809	0.00809
32	0.39208	0.39203	89	0.00670	0.00669
33	0.38813	0.38808	90	0.00557	0.00554
34	0.38402	0.38404	91	0.00461	0.00461
35	0.37985	0.37988	92	0.00384	0.00385
36	0.37561	0.37559	93	0.00323	0.00323
37	0.37119	0.37115	94	0.00275	0.00271
38	0.36659	0.36655	95	0.00236	0.00226
39	0.36180	0.36177	96	0.00190	0.00184
40	0.35683	0.35681	97	0.00150	0.00148
41	0.35167	0.35166	98	0.00115	0.00116
42	0.34631	0.34631	99	0.00087	0.00088
43	0.34077	0.34077	100	0.00064	0.00066
44	0.33506	0.33504	101	0.00048	
45	0.32915	0.32913	102	0.00036	
46	0.32303	0.32303	103	0.00028	
47	0.31675	0.31675	104	0.00024	
48	0.31027	0.31030	105	0.00022	
49	0.30360	0.30368	106	0.00018	
50	0.29682	0.29688	107	0.00015	
51	0.28988	0.28989	108	0.00012	
52	0.28269	0.28269	109	0.00010	
53	0.27523	0.27524	110	0.00009	
54	0.26751	0.26750	115	0.000035	
55	0.25947	0.25942	120	0.000012	
56	0.25107	0.25098	ω	0.000000	

Таблица лит. G.

СМЕРТНОСТЬ МУЖСКАГО ПРАВОСЛАВНАГО НАСЕЛЕНІЯ ЕВРОПЕЙСКОЙ РОССІИ.

Значенія величинъ f_x, r_x, w_x, Q_x, q_x и ε_x.

x	f	r	w	Q	q	ε
0	1.00000	0.32723	0.32723	0.78466	26.31154	26.31
1	0.67277	0.07789	0.11577	0.62993	25.52688	37.94
2	0.59488	0.04166	0.07003	0.57191	24.89695	41.85
3	0.55322	0.02652	0.04794	0.53903	24.32504	43.97
4	0.52670	0.01935	0.03674	0.51649	23.78601	45.16
5	0.50735	0.01368	0.02696	0.50010	23.26952	45.86
6	0.49367	0.00950	0.01924	0.48863	22.76942	46.12
7	0.48417	0.00684	0.01413	0.48057	22.28079	46.02
8	0.47733	0.00527	0.01104	0.47459	21.80022	45.67
9	0.47206	0.00434	0.00919	0.46983	21.32563	45.17
10	0.46772	0.00379	0.00810	0.46578	20.85580	44.59
11	0.46393	0.00330	0.00711	0.46225	20.39002	43.95
12	0.46063	0.00297	0.00645	0.45912	19.92777	43.26
13	0.45766	0.00275	0.00601	0.45627	19.46865	42.54
14	0.45491	0.00269	0.00589	0.45357	19.01238	41.79
15	0.45222	0.00275	0.00608	0.45085	18.55881	41.04
16	0.44947	0.00288	0.00641	0.44804	18.10796	40.29
17	0.44659	0.00304	0.00681	0.44508	17.65992	39.54
18	0.44355	0.00318	0.00717	0.44197	17.21484	38.81
19	0.44037	0.00331	0.00752	0.43873	16.77287	38.09
20	0.43706	0.00344	0.00787	0.43535	16.33414	37.37
21	0.43362	0.00357	0.00823	0.43185	15.89879	36.66
22	0.43005	0.00368	0.00856	0.42822	15.46694	35.96
23	0.42637	0.00376	0.00882	0.42450	15.03872	35.27
24	0.42261	0.00381	0.00902	0.42071	14.61422	34.58
25	0.41880	0.00383	0.00915	0.41689	14.19351	33.89
26	0.41497	0.00382	0.00921	0.41306	13.77662	33.20
27	0.41115	0.00381	0.00927	0.40924	13.36356	32.50
28	0.40734	0.00380	0.00933	0.40544	12.95432	31.80
29	0.40354	0.00380	0.00942	0.40164	12.54888	31.10
30	0.39974	0.00383	0.00958	0.39783	12.14724	30.39
31	0.39591	0.00388	0.00980	0.39398	11.74941	29.68
32	0.39203	0.00395	0.01008	0.39006	11.35543	28.96
33	0.38808	0.00404	0.01041	0.38607	10.96537	28.25
34	0.38404	0.00416	0.01083	0.38197	10.57930	27.55
35	0.37988	0.00429	0.01129	0.37775	10.19733	26.84
36	0.37559	0.00444	0.01182	0.37338	9.81958	26.14
37	0.37115	0.00460	0.01240	0.36886	9.44620	25.45
38	0.36655	0.00478	0.01304	0.36418	9.07734	24.76
39	0.36177	0.00496	0.01371	0.35931	8.71316	24.08
40	0.35681	0.00515	0.01443	0.35425	8.35385	23.41
41	0.35166	0.00535	0.01521	0.34900	7.99960	22.75
42	0.34631	0.00554	0.01600	0.34356	7.65060	22.09

x	f	r	w	Q	q	ε
43	0.34077	0.00573	0.01681	0.33792	7.30704	21.44
44	0.33504	0.00591	0.01764	0.33210	6.96912	20.80
45	0.32913	0.00610	0.01853	0.32610	6.63702	20.16
46	0.32303	0.00628	0.01944	0.31990	6.31092	19.53
47	0.31675	0.00645	0.02036	0.31354	5.99102	18.91
48	0.31030	0.00662	0.02133	0.30670	5.67748	18.29
49	0.30368	0.00680	0.02239	0.30030	5.37078	17.68
50	0.29688	0.00699	0.02355	0.29340	5.07048	17.08
51	0.28989	0.00720	0.02484	0.28631	4.77708	16.48
52	0.28269	0.00745	0.02635	0.27899	4.49077	15.89
53	0.27524	0.00774	0.02812	0.27140	4.21178	15.30
54	0.26750	0.00808	0.03021	0.26349	3.94038	14.73
55	0.25942	0.00844	0.03253	0.25523	3.67689	14.17
56	0.25098	0.00883	0.03518	0.24660	3.42166	13.63
57	0.24215	0.00922	0.03808	0.23757	3.17506	13.11
58	0.23293	0.00959	0.04117	0.22816	2.93749	12.61
59	0.22334	0.00991	0.04437	0.21841	2.70933	12.13
60	0.21343	0.01018	0.04770	0.20836	2.49092	11.67
61	0.20325	0.01039	0.05112	0.19807	2.28256	11.23
62	0.19286	0.01053	0.05460	0.18760	2.08449	10.81
63	0.18233	0.01059	0.05808	0.17704	1.89689	10.40
64	0.17174	0.01059	0.06167	0.16644	1.71985	10.01
65	0.16115	0.01053	0.06534	0.15588	1.55341	9.64
66	0.15062	0.01039	0.06898	0.14541	1.39753	9.28
67	0.14023	0.01016	0.07245	0.13513	1.25212	8.93
68	0.13007	0.00989	0.07604	0.12510	1.11699	8.59
69	0.12018	0.00957	0.07963	0.11537	0.99189	8.25
70	0.11061	0.00924	0.08354	0.10596	0.87652	7.92
71	0.10137	0.00892	0.08799	0.09688	0.77056	7.60
72	0.09245	0.00863	0.09335	0.08811	0.67368	7.29
73	0.08382	0.00835	0.09962	0.07962	0.58557	6.99
74	0.07547	0.00806	0.10680	0.07141	0.50595	6.70
75	0.06741	0.00773	0.11467	0.06351	0.43454	6.45
76	0.05968	0.00733	0.12282	0.05598	0.37103	6.22
77	0.05235	0.00687	0.13123	0.04887	0.31505	6.02
78	0.04548	0.00628	0.13808	0.04229	0.26618	5.85
79	0.03920	0.00567	0.14464	0.03631	0.22389	5.71
80	0.03353	0.00503	0.15002	0.03096	0.18758	5.59
81	0.02850	0.00440	0.15439	0.02624	0.15662	5.50
82	0.02410	0.00381	0.15809	0.02214	0.13038	5.41
83	0.02029	0.00328	0.16166	0.01861	0.10824	5.33
84	*0.01701*	*0.00281*	*0.16520*	0.01557	0.08963	5.27
85	0.01420	0.00239	0.16831	0.01297	0.07406	5.22
86	0.01181	0.00202	0.17104	0.01077	0.06109	5.17
87	0.00979	0.00170	0.17365	0.00891	0.05032	5.14
88	0.00809	0.00140	0.17305	0.00737	0.04141	5.12
89	0.00669	0.00115	0.17190	0.00610	0.03404	5.09
90	0.00554	0.00093	0.16787	0.00506	0.02794	5.04
91	0.00461	0.00076	0.16486	0.00422	0.02288	4.96
92	0.00385	0.00062	0.16104	0.00353	0.01866	4.85
93	0.00323	0.00052	0.16099	0.00296	0.01513	4.68
94	0.00271	0.00045	0.16605	0.00248	0.01217	4.49
95	0.00226	0.00042	0.18584	0.00205	0.00969	4.29
96	0.00184	0.00036	0.19565	0.00166	0.00764	4.15
97	0.00148	0.00032	0.21622	0.00132	0.00598	4.04
98	0.00116	0.00028	0.24138	0.00102	0.00466	4.02
99	0.00088	0.00022	0.25000	0.00076	0.00364	4.14
100	0.00066				0.00288	4.36

Таблица лит. Н.

Мужское православное населеніе 50-ти губерній Европейской Россіи, вычисленное на 1870 годъ (1 Янв.).

(въ сотняхъ)

i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.	i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.	i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.	i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.
0	11109	25	4813	50	2324	75	355
1	8629	26	4587	51	2179	76	309
2	7871	27	4246	52	2175	77	266
3	7169	28	4334	53	2073	78	227
4	7136	29	3903	54	1841	79	192
5	7291	30	4524	55	1595	80	161
6	6593	31	4203	56	1630	81	135
7	6876	32	3986	57	1720	82	112
8	6474	33	3954	58	1606	83	93
9	6201	34	3495	59	1570	84	77
10	6335	35	3744	60	1403	85	63
11	6066	36	3491	61	1386	86	52
12	5811	37	3660	62	1314	87	42
13	5184	38	3395	63	1253	88	34
14	5408	39	3480	64	1191	89	28
15	5517	40	3488	65	1112	90	23
16	5702	41	3321	66	977	91	19
17	5412	42	3270	67	931	92	16
18	5061	43	3009	68	782	93	13
19	5296	44	2937	69	677	94	11
20	4880	45	2789	70	611	95	9
21	5219	46	2719	71	538	96	7
22	4916	47	2512	72	466	97	5
23	4687	48	2464	73	423	98	4
24	4818	49	2418	74	405	99	3

Въ возрастѣ.	Число лицъ.
отъ 0 до 10 лл.	7.534.900
» 10 » 20 »	5.579.100
» 20 » 30 »	4.640.300
» 30 » 40 »	3.793.200
» 40 » 50 »	2.892.700
» 50 » 60 »	1.871.300
» 60 » 70 »	1.102.600
» 70 » 80 »	379.200
» 80 » 90 »	79.700
» 90 » 100 »	11.000
Всего	27.884.000 (по моимъ вычисленіямъ).
	27.189.387 (по полицейскому исчисленію).

Таблица лит. I.

Мужское православное населеніе 50-ти губерній Европейской Россіи, вычисленное на 1884 годъ (1 Янв.).

(въ сотняхъ)

i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.	i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.	i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.	i	Въ возр. отъ i до $i+1$ лл.
0	13569	25	5470	50	2744	75	444
1	11059	26	5228	51	2841	76	392
2	9381	27	4650	52	2600	77	346
3	8829	28	4834	53	2629	78	303
4	8431	29	4914	54	2595	79	259
5	7604	30	5063	55	2429	80	208
6	7643	31	4791	56	2347	81	181
7	7593	32	4466	57	2116	82	138
8	7510	33	4660	58	2018	83	109
9	7286	34	4264	59	1868	84	90
10	7238	35	4565	60	1771	85	72
11	6764	36	4286	61	1587	86	57
12	6823	37	4072	62	1507	87	47
13	6440	38	4171	63	1426	88	42
14	6422	39	4149	64	1318	89	34
15	6176	40	3934	65	1186	90	28
16	6166	41	3621	66	1134	91	23
17	5920	42	3673	67	1032	92	19
18	6106	43	3284	68	874	93	16
19	6396	44	3776	69	721	94	13
20	5874	45	3479	70	700	95	11
21	6179	46	3269	71	701	96	8
22	5841	47	3211	72	620	97	7
23	5603	48	2806	73	572	98	5
24	5722	49	2977	74	481	99	4

Въ возрастѣ	Число лицъ.
отъ 0 до 10 лл.	8.890.500
» 10 » 20 »	6.445.100
» 20 » 30 »	5.431.500
» 30 » 40 »	4.448.700
» 40 » 50 »	3.403.000
» 50 » 60 »	2.418.700
» 60 » 70 »	1.255.600
» 70 » 80 »	481.800
» 80 » 90 »	97.800
» 90 » 100 »	13.400
Всего	32.886.100.

Таблица лит. К.

Числа доживающихъ до послѣдовательныхъ возрастовъ въ Россіи и другихъ государствахъ.

Возрастъ.	Евр. Россія (правосл.) 1874—84.	Германія 1871—81.	Пруссія 1867.68.72. 75—77.	Швейцарія 1876—81.	Франція 1877—81.	Англія 1871—80.	Швеція 1871—80.	Италія 1877—86.	Возрастъ.
0*		104520	104676	104488	105345		103521		0*
0	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	0
1	67277	74727	77154	79580	80176	84142	85941	78587	1
2	59488	69876	71297	76650		79020	82441	70128	2
3	55322	67557	68483	75180		76374	80296	66425	3
4	52670	65997	66681	74030		74659	78720	64273	4
5	50735	64871	65433	73120	71642	73407	77515	62748	5
6	49367	64028	64503	72440		72682	76571	61573	6
7	48417	63369	63757	71900		72110	75843	60675	7
8	47733	62849	63158	71410		71631	75215	59993	8
9	47206	62431	62688	71050		71234	74691	59482	9
10	46772	62089	62296	70710	69356	70899	74258	59085	10
11	46393	61800	61954	70420		70615	73873	58767	11
12	46063	61547	61648	70160		70360	73533	58480	12
13	45766	61320	61363	69930		70120	73256	58182	13
14	45491	61108	61123	69700		69884	72992	57874	14
15	45222	60892	60860	69450	68040	69642	72744	57563	15
16	44947	60657	60572	69190		69370	72474	57241	16
17	44659	60383	60257	68900		69075	72176	56910	17
18	44355	60063	59912	68540		68751	71846	56570	18
19	44037	59696	59535	68100		68394	71478	56198	19
20	43706	59287	59123	67610	66035	68003	71069	55791	20
21	43362	58843	58672	67150		67577	70619	55352	21
22	43005	58369	58180	66630		67134	70141	54884	22
23	42637	57871	57643	66110		66675	69648	54381	23
24	42261	57378	57118	65560		66200	69148	53894	24
25	41880	56892	56604	65040	63101	65708	68643	53416	25
26	41497	56410	56101	64470		65200	68135	52951	26
27	41115	55927	55593	63920		64676	67625	52498	27
28	40734	55442	55080	63370		64135	67120	52053	28
29	40354	54951	54563	62800		63578	66615	51618	29
30	39974	54454	54041	62240	60179	63004	66112	51186	30
31	39591	53941	53514	61640		62412	65599	50758	31
32	39203	53434	52982	60940		61806	65080	50338	32
33	38808	52903	52446	60340		61183	64553	49922	33
34	38404	52369	51891	59700		60543	64022	49492	34
35	37988	51815	51318	59070	57379	59886	63479	49049	35
36	37559	51244	50725	58410		59211	62927	48590	36
37	37115	50656	50113	57730		58517	62364	48121	37
38	36655	50049	49481	57070		57802	61792	47640	38
39	36177	49422	48829	56410		57066	61207	47147	39
40	35681	48775	48157	55720	54353	56308	60605	46650	40
41	35166	48110	47465	55000		55525	59987	46144	41
42	34631	47428	46752	54160		54729	59360	45630	42
43	34077	46729	46018	53420		53916	58724	45108	43
44	33504	46010	45264	52620		53086	58074	44552	44
45	32913	45272	44489	51860	51163	52237	57403	43962	45
46	32303	44511	43693	51060		51370	56708	43337	46

Возрастъ.	Евр. Россія (правосл.) 1874—84.	Германія 1871—81.	Пруссія 1867.68.72. 75—77.	Швейцарія 1876—81.	Франція 1877—81.	Англія 1871—81.	Швеція 1871—80.	Италія 1877—86.	Возрастъ.
47	31675	43728	42877	50240		50484	55994	42684	47
48	31030	42919	42040	49380		49576	55256	42002	48
49	30368	42086	41183	48490		48648	54494	41310	49
50	29688	41228	40306	47560	47655	47698	53702	40608	50
51	28989	40343	39409	46560		46725	52883	39895	51
52	28269	39433	38493	45420		45702	52038	39176	52
53	27524	38497	37558	44410		44651	51165	38450	53
54	26750	37534	36591	43340		43573	50260	37675	54
55	25942	36544	35593	42280	43362	42468	49317	36899	55
56	25098	35524	34564	41140		41335	48338	35955	56
57	24215	34474	33505	39990		40174	47322	35025	57
58	23293	33392	32417	38740		38983	46264	34054	58
59	22334	32276	31301	37490		37759	45160	33076	59
60	21343	31124	30159	36180	38291	36501	44002	32088	60
61	20325	29935	28993	34820		35207	42794	31082	61
62	19286	28708	27805	33310		33882	41539	30074	62
63	18233	27442	26598	31920		32526	40242	29066	63
64	17174	26139	25353	30400		31137	38887	27935	64
65	16115	24802	24074	28850	31973	29716	37466	26697	65
66	15062	23433	22765	27230		28264	35967	25369	66
67	14023	22037	21431	25660		26783	34408	23970	67
68	13007	20620	20077	24080		25276	32791	22519	68
69	12018	19189	18710	22450		23749	31118	21063	69
70	11061	17750	17337	20790	24557	22206	29378	19614	70
71	10137	16310	15966	19050		20654	27575	18184	71
72	9245	14880	14605	17410		19097	25785	16783	72
73	8382	13468	13263	15840		17545	23872	15421	73
74	7547	12085	11960	14210		16007	21995	14006	74
75	6741	10743	10703	12590	16140	14496	20102	12573	75
76	5968	9454	9500	11090		13023	18206	11144	76
77	5235	8228	8359	9710		11599	16321	9760	77
78	4548	7077	7285	8430		10236	14464	8451	78
79	3920	6010	6284	7180		8945	12660	7269	79
80	3353	5035	5361	6040	8583	7735	10940	6210	80
81	2850	4156	4519	4920		6615	9326	5269	81
82	2410	3378	3760	3990		5584	7841	4440	82
83	2029	2700	3084	3190		4649	6488	3715	83
84	1701	2120	2505	2550		3813	5272	3035	84
85	1420	1635	2014	1990	3163	3079	4194	2336	85
86	1181	1236	1602	1510		2444	3262	1815	86
87	979	917	1260	1110		1905	2477	1374	87
88	809	666	979	800		1458	1827	1013	88
89	669	474	751	570		1093	1299	727	89
90	554	330	569	390	1049	802	890	507	90
91	461	225	425	260		575	591	344	91
92	385	150	312	160		403	380	226	92
93	323	097	226	100		275	235	144	93
94	271	061	161	060		183	137	089	94
95	226	038	111	040	313	118	076	053	95
96	184	023	074	020		074	039	031	96
97	148	013	047	010		045	019	017	97
98	116	007	029	010		027	009	009	98
99	088	004	017	010		015	005	005	99
100	066	002	009		088	008	002	002	100

Таблица лит. L.

Смертные коэффиціенты для различныхъ возрастныхъ группъ въ Россіи и другихъ государствахъ на 1000.

Возрастъ.	Евр. Россія (правосл.) 1874—84.	Германія 1871—81.	Пруссія 1867.68.72. 75—77.	Швейцарія 1876—81.	Франція 1877—81.	Англія 1871—80.	Швеція 1871—80.	Возрастъ.
0*— 1		36544	32991	29535	29681		19548	0*— 1
0 — 1	41703	31000	27386	24212	23378	17920	15633	0 — 1
1 — 2	12365	6753	7950	3755		6342	4152	1 — 2
2 — 3	7284	3380	4037	1939		3415	2639	2 — 3
3 — 4	4920	2339	2672	1542	2853	2274	1982	3 — 4
4 — 5	3746	1722	1892	1237		1692	1543	4 — 5
0*— 5		11198	10895	8121	8780		6289	0*— 5
0 — 5	16195	9922	9597	6959	7387	6704	5437	0 — 5
5 —10	1642	880	987	672	650	697	861	5 —10
10 —15	675	390	467	360	383	358	412	10 —15
15 —20	681	533	578	536	597	476	465	15 —20
20 —25	853	824	870	775	908	686	694	20 —25
25 —30	931	876	926	880	948	840	751	25 —30
30 —35	1018	993	1033	1045	953	1014	813	30 —35
35 —40	1251	1208	1270	1167	1083	1231	926	35 —40
40 —45	1612	1489	1582	1435	1209	1499	1085	40 —45
45 —50	2059	1868	1971	1728	1418	1815	1331	45 —50
50 —55	2694	2406	2480	2350	1886	2317	1701	50 —55
55 —60	3878	3197	3300	3102	2479	3017	2274	55 —60
60 —65	5577	4509	4478	4497	3590	4091	3201	60 —65
65 —70	7467	6617	6497	6487	5239	5775	4823	65 —70
70 —75	9774	9873	9505	9958	8282	8393	7486	70 —75
75 —80	13719	14784	13553	14342	12384	12320	11872	75 —80
80 —85	17028	21756	19124	21798	19238	17905	18485	80 —85
85 —90	18777	30807	24709	31189	21834	25916	28965	85 —90
90 — ω	19828	42802	33849	45349	27001	38154	45924	90 — ω
0*— ω		2938	2959	2575	2579		2287	0*— ω
0 — ω	3801	2811	2827	2464	2448	2421	2209	0 — ω

Таблица лит. М.

Математическое ожиданіе жизни въ различныхъ возрастахъ въ Россіи и другихъ государствахъ.

Возрастъ.	Евр. Россія (правосл.) 1874—84.	Германія 1871—81.	Пруссія 1867.68.72. 75—77.	Швейцарія 1876—81.	Франція 1877—81.	Англія 1871—80.	Швеція 1871—80.	Возрастъ.
0*		3404	3379	3884	3877		4373	0*
0	2631	3558	3538	41 1	4083	4135	45 3	0
1	3794	4652	4478	50 4	4983	4805	51 6	1
2	4185	4872	4742	51 3		5014	52 8	2
3	4397	4938	4834	51 3		5086	53 2	3
4	4516	4953	4864	51 1		5101	53 2	4
5	4586	4939	4856	50 7	5158	5087	53 1	5
10	4459	4651	4590	47 4	4825	4760	50 3	10
15	4104	4238	4192	43 2	4408	4341	46 3	15
20	3737	3845	3808	39 3	4042	3940	42 3	20
25	3389	3496	3466	35 7	3717	3568	38 7	25
30	3039	3141	3118	32 2	3383	3210	35 1	30
35	2684	2788	2770	28 7	3033	2864	31 5	35
40	2341	2446	2435	25 3	2692	2530	27 8	40
45	2016	2116	2115	21 9	2325	2207	24 3	45
50	1703	1798	1808	18 6	2000	1893	20 8	50
55	1417	1496	1513	15 6	1667	1595	17 4	55
60	1167	1211	1240	12 7	1358	1314	14 2	60
65	964	955	989	10 1	1083	1055	11 2	65
70	792	734	775	7 9	833	827	8 5	70
75	645	551	604	6 1	633	634	6 3	75
80	559	410	469	4 6	483	479	4 6	80
85	522	306	377	3 5	417	356	3 2	85
90	504	234	300	2 7	350	266	2 2	90