Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Martin Luther-Universität Halle-Wittenberg

Vorgelegt von

Werner Mangler
aus Sangerhausen

Halle 1938

1. Berichterstatter: Professor Dr. H. Brandt

2. Berichterstatter: Professor Dr. H. Jung

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Februar 1934

D. 3

ISBN 978-3-662-40905-3 ISBN 978-3-662-41389-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41389-0

Sonderabdruck aus „Mathematische Zeitschrift", Band 44, Heft 4, S. 541—554 (1938). Verlag von Julius Springer in Berlin.

Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich *).

Von

W. Mangler in Göttingen.

Die topologischen Abbildungen einer geschlossenen orientierbaren oder nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ auf sich zerfallen bekanntlich in *Isotopieklassen.* Zwei Abbildungen gehören zu derselben Isotopieklasse, wenn sie sich nur durch eine isotope Deformation[1]) der Fläche voneinander unterscheiden. Die Isotopieklassen von $\mathfrak{F}$ bilden eine Gruppe.

Jede topologische Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ bewirkt einen bis auf innere Automorphismen bestimmten Automorphismus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$[2]), eine sogenannte *Automorphismenfamilie.* Mit anderen Worten läßt sich eine Automorphismenfamilie als eine Restklasse der gesamten Automorphismengruppe nach der Untergruppe der inneren Automorphismen ansprechen. Die Automorphismenfamilie, die von einer bestimmten topologischen Selbstabbildung erzeugt wird, ändert sich nicht, wenn man die Abbildung isotop (sogar nicht, wenn man sie homotop) deformiert[3]). Eine ganze Isotopieklasse erzeugt also ein und dieselbe Automorphismenfamilie, insbesondere die Klasse der Identität die Familie der inneren Automorphismen. Da überdies das Produkt zweier Abbildungen das Produkt der Automorphismenfamilien erzeugt, liegt eine homomorphe Abbildung der Gruppe der Isotopieklassen in die Gruppe der Automorphismenfamilien vor. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit zu beweisen, daß *diese homomorphe Abbildung bei jeder geschlossenen Fläche mit Ausnahme der Kugel sogar eine isomorphe Abbildung auf die Gruppe der Automorphismenfamilien ist.*

Dazu ist zweierlei zu zeigen: Der Kern des Homomorphismus, also die Gesamtheit der Isotopieklassen, die sich in die Familie der inneren Automorphismen abbilden, besteht aus der Isotopieklasse der Identität allein, was wir in dem folgenden Satze formulieren:

---

*) Die vorliegende Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Halle als Dissertation (D 3) angenommen. Herrn H. Brandt, Herrn W. Threlfall und Herrn H. Seifert danke ich für ihre Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit.

[1]) Vgl. H. Seifert u. W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, S. 113, 114. Leipzig und Berlin 1934. (Im folgenden abgekürzt mit S.-T.)

[2]) S.-T., S. 156.

[3]) S.-T., S. 176 und J. Nielsen, Einige Sätze über topologische Flächenabbildungen, Acta Litt. Sci. Szeged 7 (1935), S. 200.

Satz 1. *Eine topologische Selbstabbildung einer geschlossenen, von der Kugel verschiedenen Fläche, die einen inneren Automorphismus der Fundamentalgruppe bewirkt, ist eine isotope Deformation.*

Und ferner

Satz 2. *Jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche kann durch eine topologische Selbstabbildung der Fläche bewirkt werden* (§ 3).

Da jede topologische Selbstabbildung einer geschlossenen Fläche, die einen inneren Automorphismus der Fundamentalgruppe bewirkt, jede geschlossene Kurve in eine homotope überführt, so folgt Satz 1 aus dem schärferen

Satz 1′ (Hauptsatz). *Eine topologische Selbstabbildung einer geschlossenen, von der Kugel verschiedenen Fläche, die jede Kurve in eine homotope überführt, ist eine isotope Deformation* (§ 2). Beim Beweise benutzen wir sogar nur die Tatsache, daß $N + 2$ geeignete Rückkehrschnitte in homotope übergehen ($N = -e + k - f$ ist die Eulersche Charakteristik).

Da eine homotope Deformation von ganz $\mathfrak{F}$ jede geschlossene Kurve in eine homotope überführt, so folgt hieraus insbesondere der

Satz 3. *Eine topologische Selbstabbildung einer geschlossenen Fläche, die sich durch eine homotope Deformation bewirken läßt, läßt sich auch durch eine isotope Deformation bewirken.*

Satz 1 findet sich für orientierbare Flächen bei R. Baer[4]), für orientierbare und nichtorientierbare bei Brödel[5]) ausgesprochen. Satz 2 findet sich bei J. Nielsen[6]). Der hier angegebene Beweis von Satz 2 geht auf eine Mitteilung von H. Seifert zurück. — Was homotope Deformationen anlangt, vergleiche man H. Hopf (wird später zitiert).

Satz 1′ beweisen wir im folgenden für Flächen der Charakteristik $N > 0$. Das Beweisverfahren läßt sich auch auf Flächen der Charakteristik $N = 0$ (orientierbare und nichtorientierbare Ringfläche) und $N = -1$ (projektive Ebene) übertragen. Dagegen mußten wir in Satz 1′ die Kugelfläche ausschließen, da es auf ihr zwei Isotopieklassen topologischer Selbstabbildungen (repräsentiert durch Identität und Diametralpunktvertauschung) gibt, während die Fundamentalgruppe, also auch die Gruppe der Automorphismenfamilien, aus dem Einselement allein besteht.

---

[4]) R. Baer, Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, Journ. f. Math. **159** (1928), S. 101.

[5]) W. Brödel, Über die Deformationsklassen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs. Akademie Leipzig **87** (1935), S. 85.

[6]) J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta Mathematica **50** (1927), S. 189; Satz 11, S. 266.

§ 1.

Hilfssatz.

Auf einer geschlossenen orientierbaren oder nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ von konstanter negativer Krümmung sei ein System Ω von endlich vielen geschlossenen, doppelpunktfreien, mit einer bestimmten Orientierung versehenen Geodätischen von folgender Beschaffenheit gegeben: Es gibt eine Kurve x in Ω, die höchstens eine der übrigen Kurven, sagen wir die Kurve y, in genau einem Punkte durchsetzt; die von x und y verschiedenen Kurven von Ω, $z_1, \ldots, z_s$, sind punktfremd zu x; wir lassen zu, daß die Kurve y fehlt, x also keine der übrigen Kurven trifft, sowie daß $s = 0$ ist.

Ferner sei eine topologische Selbstabbildung T der Fläche $\mathfrak{F}$ gegeben, die die von x verschiedenen Kurven von Ω punktweise fest läßt und x in eine homotope Kurve überführt. *Dann gibt es eine isotope Deformation D von $\mathfrak{F}$ derart, daß die topologische Selbstabbildung DT (erst T, dann D ausüben!) alle Kurven von Ω punktweise fest läßt.*

Beweis:

1. Die Kurve $x' = T(x)$ durchsetzt y einmal, und zwar in demselben Punkt wie x, da y punktweise fest bleibt. x' ist ferner punktfremd zu $z_1, \ldots, z_s$, da T topologisch ist, die Kurven $z_1, \ldots, z_s$ punktfremd zu x sind und punktweise fest bleiben. Alle auf die Kurven y oder $z_1, \ldots, z_s$ bezüglichen Behauptungen fallen natürlich fort, wenn diese Kurven fehlen.

2. Die universelle Überlagerungsfläche $\hat{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ ist die *hyperbolische Ebene*, die wir uns durch das Poincarésche (konforme) Modell, das Innere des Einheitskreises der euklidischen Ebene, darstellen. Hyperbolische Geraden sind alsdann Orthogonalkreise des Einheitskreises. Die Punkte der Einheitskreislinie sind die in hyperbolischer Maßbestimmung unendlich fernen oder uneigentlichen Punkte der hyperbolischen Ebene. *Decktransformationen* von $\hat{\mathfrak{F}}$ sind solche hyperbolisch starren Transformationen, die äquivalente, d. h. über demselben Grundpunkte von $\mathfrak{F}$ gelegene Punkte von $\hat{\mathfrak{F}}$, in äquivalente überführen. Es sind Translationen (*Gleitungen*), oder, falls $\mathfrak{F}$ nichtorientierbar ist, auch *Gleitspiegelungen* längs einer hyperbolischen Geraden.

Jede geschlossene Kurve des Systems Ω wird von unendlich vielen hyperbolischen G e r a d e n in $\hat{\mathfrak{F}}$ überlagert, da die Kurven Geodätische sind; wir bezeichnen diese Geraden als x-, y- oder z-Geraden. $g(x)$ sei eine bestimmte, ein für allemal fest gewählte x-Gerade. Sei ferner $g(x')$ diejenige x' überlagernde Kurve, die nach denselben beiden uneigentlichen Punkten führt wie $g(x)$; sie existiert, weil x' homotop x ist. Die Decktransformationen, die $g(x)$ in sich verschieben — Deckgleitungen oder Deckgleitspiegelungen, wobei die letzteren nur vorkommen, wenn x einufrig ist —, führen dann auch $g(x')$ in sich über und umgekehrt[7]).

3. Ist die y-Kurve in $\mathfrak{F}$ vorhanden, so wird $g(x)$ von unendlich vielen y-Geraden durchsetzt, z. B. von $g(y)$, $g_\varkappa(y)$ und $g_\lambda(y)$ (Fig. 1). Jede dieser y-Geraden muß auch von $g(x')$ in genau einem Punkte durchsetzt werden, nämlich in mindestens einem Punkte, da $g(x')$ dieselben beiden uneigentlichen Punkte auf dem Einheitskreise hat wie $g(x)$; durchsetzte $g(x')$ eine dieser y-Geraden aber in mehr als einem Punkte, so wären diese Schnittpunkte wegen 1. äquivalent, d. h. zwei von ihnen müßten sich einerseits durch eine Decktransformation, die die uneigentlichen Punkte dieser y-Geraden fest läßt, ineinander überführen lassen, anderseits durch eine Decktransformation, die $g(x')$ und (wegen 2.) $g(x)$ in sich überführt, was nicht geht. Weil $g(x)$ und $g(x')$ dieselben uneigentlichen Punkte haben, kann eine y-Gerade, die $g(x)$ nicht trifft, z. B. $g_\mu(y)$, auch von $g(x')$ nicht getroffen werden.

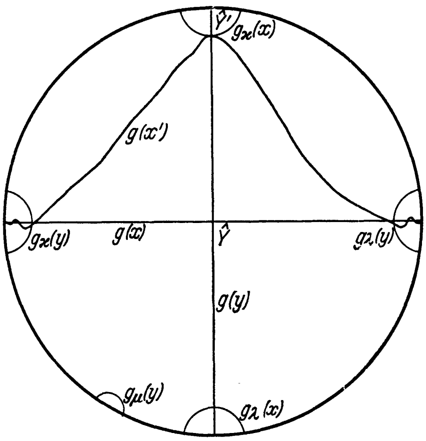

Fig. 1.

Wir betrachten nun eine bestimmte dieser $g(x)$ durchsetzenden y-Geraden, etwa $g(y)$. Sie werde von $g(x)$ in einem Punkte $\widehat{Y}$ und von $g(x')$ in einem Punkte $\widehat{Y}'$ geschnitten, der wegen 1. zu $\widehat{Y}$ äquivalent ist.

---

[7]) Daß es eine x' überlagernde Kurve $g(x')$ gibt, die dieselben unendlich fernen Punkte hat wie $g(x)$, folgt so: Bei der homotopen Deformation von x in x', die vorhanden ist, weil x und x' nach Voraussetzung homotop sind, beschreibt der Anfangspunkt A von x einen Weg u nach dem Bildpunkte A' auf x'. Den Punkt A überlagern auf $g(x)$ der Reihe nach die Punkte

$$\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots$$

Von diesen Punkten gehen die u überlagernden Kurven

$$\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots$$

aus, deren Endpunkte die Punkte

$$\ldots, A'_{-2}, A'_{-1}, A'_0, A'_1, A'_2, \ldots$$

sind. Die in A'_i beginnende Überlagerung von x' führt dann nach A'_{i+1}, weil der geschlossene Weg $u\,x'^{-1}\,u^{-1}\,x$ von $\mathfrak{F}$ nullhomotop in $\mathfrak{F}$ ist und daher von lauter geschlossenen Wegen in $\widehat{\mathfrak{F}}$ überlagert wird. Die Gesamtheit der Bögen $A'_i A'_{i+1}$, deren jeder x' vollständig überlagert, macht die Kurve $g(x')$ aus. Da $g(x')$ bei den Decktransformationen von $g(x)$ ebenfalls in sich übergeht, so hat die Kurve $g(x')$ dieselben unendlich fernen Punkte auf dem Einheitskreise wie die hyperbolische Gerade $g(x)$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle: erster Fall, die Geodätische y von $\mathfrak{F}$ wird von einer der Geodätischen $z_1, \ldots, z_s$ durchsetzt, oder zweiter Fall, y ist punktfremd zu $z_1, \ldots, z_s$. Im ersten Falle beweisen wir, daß $\widehat{Y}' = \widehat{Y}$ ist. Wäre nämlich $\widehat{Y}' \neq \widehat{Y}$, so würde es auf der Strecke $\widehat{Y}\widehat{Y}'$ einen Punkt geben, der über einem Schnittpunkte von y mit einer der Geodätischen $z_1, \ldots, z_s$ liegt, denn die Strecke $\widehat{Y}\widehat{Y}'$ überlagert mindestens einmal vollständig die Geodätische y. Es würde also die Strecke $\widehat{Y}\widehat{Y}'$ von einer z-Geraden getroffen. Diese z-Gerade müßte dann aber auch die Kurve $g(x')$ treffen, was der Tatsache widerspricht, daß x' punktfremd zu $z_1, \ldots, z_s$ ist (vgl. 1).

Tritt dagegen der zweite Fall ein, ist also y punktfremd zu allen Geodätischen $z_1, \ldots, z_s$, so kann $\widehat{Y} \neq \widehat{Y}'$ sein. In diesem Falle können wir aber auf $\mathfrak{F}$ eine isotope Deformation δ_1 erklären, die außerhalb eines beliebig schmalen Streifens längs y (Kreisringes oder Möbiusbandes, je nachdem y zweiufrig oder einufrig ist) die Identität ist, während y in sich um ein passendes Vielfaches seiner Länge verschoben wird. Die Punkte des Streifens werden dabei wie die Teilchen einer zähen Flüssigkeit bewegt, die an den Rändern des Streifens und an y festhaftet. Nach $\widehat{\mathfrak{F}}$ drückt sich diese Deformation in eine isotope Deformation durch, die $g(y)$ und alle dazu äquivalenten Geraden in sich um ein Vielfaches der Länge von y verschiebt. Offenbar kann man es durch passende Wahl des Vielfachen einrichten, daß $\widehat{Y}'$ in $\widehat{Y}$ deformiert wird. Die topologische Selbstabbildung $\delta_1 T$ (erst T, dann δ_1!) hat noch die im Hilfssatz von T geforderten Eigenschaften: sie läßt $y, z_1, \ldots, z_s$ punktweise fest und führt x in eine homotope Kurve über, die wir wieder mit x' bezeichnen.

4. Fehlt im Kurvensystem Ω die Kurve y, so ist die Deformation δ_1 überflüssig; wir nehmen dann δ_1 als identische Abbildung an.

5. Es kann nun sein, daß $x' = \delta_1 T(x)$ unendlich viele Punkte mit x gemeinsam hat, ohne ganz auf x zu liegen. In diesem Falle lassen wir eine isotope Deformation δ_2 folgen, bei der $y, z_1, \ldots, z_s$ punktweise fest bleiben, während die Kurve $\delta_2 \delta_1 T(x)$ nur endlich viele Punkte, und zwar Schnittpunkte und keine Berührungspunkte mit x gemein hat [8]). Wir bezeichnen

---

[8]) x sei eine doppelpunktfreie geschlossene Geodätische auf der mit konstanter negativer Krümmung ausgestatteten Fläche $\mathfrak{F}$ von der Eulerschen Charakteristik $N > 0$, $x' = T(x)$ ihr Bild bei einer topologischen Selbstabbildung T von $\mathfrak{F}$. x' liege nicht vollständig auf x darauf. Diese Voraussetzung können wir machen, da der Hilfssatz trivial würde, wenn x' ganz auf x läge; denn alsdann könnte man durch eine auf einen beliebig schmalen Streifen um x beschränkte isotope Deformation x punktweise festmachen. Wir führen, falls x' unendlich viele Punkte mit x gemein hat, durch eine isotope Deformation δ von $\mathfrak{F}$, die außerhalb eines beliebig schmalen Streifens um x'

$\delta_2 \delta_1 T(x)$ wieder mit x'. Offenbar hat $g(x')$ auch jetzt noch die Eigenschaft, die etwa vorhandenen, $g(x)$ schneidenden y-Geraden in denselben Punkten zu treffen wie $g(x)$.

6. Wir bezeichnen die von $g(x)$ verschiedenen x-Geraden mit $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... Die Gerade $g_j(x)$ zerlegt die hyperbolische Ebene in zwei Gebiete, von denen das eine $g(x)$ enthält; das andere sei mit $\mathfrak{A}_j$ bezeichnet.

---

die Identität ist, x' in eine Kurve $\delta(x')$ über, die nur endlich viele Schnittpunkte mit x hat.

Es sei P' ein nicht auf x liegender Punkt von x'. Wir umgeben x' mit einem beliebig schmalen Streifen $\mathfrak{S}'$ — Kreisring oder Möbiusband, je nachdem x' (und x) zweiufrig oder einufrig ist — und ziehen in ihm einen Querschnitt q' durch P', der x' nur in P' trifft. Daß es einen solchen Streifen und Querschnitt gibt, erkennt man daraus, daß man jedenfalls um die geschlossene Geodätische x einen Streifen $\mathfrak{S}$ und durch den Originalpunkt P einen Querschnitt q von $\mathfrak{S}$ legen kann, der x nur in P trifft; man braucht dann nur $\mathfrak{S}' = T(\mathfrak{S})$, $q' = T(q)$ zu wählen.

Schneidet man $\mathfrak{S}'$ längs q' auf, so entsteht ein „Rechteck" $\overline{\mathfrak{S}}$ mit den äquivalenten Gegenseiten $\bar{q}_1$ und $\bar{q}_2$, auf denen die dem Punkte P' entsprechenden Punkte $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ liegen. $\overline{\mathfrak{S}}$ ist dabei ebenso wie $\mathfrak{S}'$ mit der Metrik der Fläche $\mathfrak{F}$ ausgestattet. Es hat also einen Sinn, in $\overline{\mathfrak{S}}$ von geodätischen Bögen und Polygonen zu sprechen.

Wir verbinden nun in $\overline{\mathfrak{S}}$ die Punkte $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ durch ein doppelpunktfreies geodätisches Polygon $\overline{\mathfrak{P}}$, das bis auf seine Randpunkte $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ ganz im Inneren von $\overline{\mathfrak{S}}$ verläuft und das unter Umständen unendlich viele Seiten hat. Diese sollen sich indessen höchstens in den Punkten $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ häufen. Ihm entspricht in $\mathfrak{S}'$ ein geschlossenes geodätisches Polygon $\mathfrak{P}'$. Da sich die Seiten von $\mathfrak{P}'$ höchstens im Punkte P' häufen und P' nicht auf x liegt, so haben nur endlich viele Seiten von $\mathfrak{P}'$ Punkte mit x gemein, und man kann annehmen, daß jede dieser Seiten x nur in endlich vielen Punkten trifft, da man sonst nur die Ecken von $\mathfrak{P}'$ ein wenig zu verschieben brauchte.

Wir konstruieren nun eine isotope Deformation von $\mathfrak{F}$, die außerhalb $\mathfrak{S}'$ die Identität ist, während sie $\mathfrak{S}'$ so deformiert, daß x' in $\mathfrak{P}'$ übergeht. Man braucht zu dem Zwecke nur $\overline{\mathfrak{S}}$ topologisch so auf sich abzubilden, daß der Rand punktweise fest bleibt, während die x' entsprechende Verbindungslinie von $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ übergeht. Diese topologische Abbildung läßt sich nach dem Tietzeschen Deformationssatze (vgl. Fußnote [11]) durch eine isotope Deformation bewirken.

Diese isotope Deformation findet zur Beseitigung unendlich vieler Schnittpunkte dann Anwendung, wenn im Kurvensystem Ω die Kurve y nicht vorkommt. Wenn dagegen x von einer bei T punktweise festen Geodätischen y in einem Punkte P geschnitten wird, so müssen wir etwas anders vorgehen. Es geht dann auch x' durch P $(= T(P) = P')$ hindurch. Wir umgeben wieder x mit einem schmalen Streifen $\mathfrak{S}$ und betrachten in diesem als Querlinie q ein Stück von y. q ist dann zugleich Querlinie in dem Bildstreifen $\mathfrak{S}'$ um x'. Durch P legen wir einen kurzen, ganz im Inneren von $\mathfrak{S}'$ verlaufenden geodätischen Bogen AB und verbinden A mit B durch ein geodätisches Polygon von endlich vielen Seiten, das im Inneren von $\mathfrak{S}'$ verläuft und q nicht trifft und das zusammen mit dem Bogen AB ein doppelpunktfreies geschlossenes geodätisches Polygon $\mathfrak{P}'$ ausmacht. Wir können $\mathfrak{P}'$ offenbar so wählen, daß es nur endlich viele Schnittpunkte mit x gemein hat. Danach können wir wie zuvor den Tietzeschen Deformationssatz anwenden.

Es kann sein, daß $g(x')$ mit $\mathfrak{A}_j$ Punkte, also endlich viele Bögen gemein hat. Es gibt dann sicher auch ein $\mathfrak{A}_j$, in das $g(x')$ gerade noch hineinragt, d. h. ein $\mathfrak{A}_j$, das einen Bogen mit $g(x')$ gemein hat, während alle $\mathfrak{A}_l$, die in $\mathfrak{A}_j$ enthalten sind, punktfremd zu $g(x')$ sind. Von den endlich vielen Bögen, die den Durchschnitt von diesem $\mathfrak{A}_j$ mit $g(x')$ ausmachen, nehmen wir den ersten bei positiver Durchlaufung von $g(x')$. Er heiße $\widehat{w}'$, sein Anfangspunkt $\widehat{P}$, sein Endpunkt $\widehat{Q}$. Auf $g_j(x)$ begrenzen $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$ die Strecke $\widehat{w}$. $\widehat{w}$ und $\widehat{w}'$ bilden zusammen den Rand eines Elementarflächenstückes $\widehat{\mathfrak{E}}$.

Wir behaupten, daß $\widehat{\mathfrak{E}}$ *keine äquivalenten Punkte enthält.* Angenommen, $\widehat{\mathfrak{E}}$ enthielte zwei äquivalente Punkte. Dann führen wir durch eine Decktransformation den einen in den anderen über. $\widehat{\mathfrak{E}}$ kann hierbei nicht auf einen echten Teilbereich von sich abgebildet werden, da es sonst innerhalb $\widehat{\mathfrak{E}}$ einen Häufungspunkt äquivalenter Punkte gäbe. Daher muß der Rand des Bildes $\widehat{\mathfrak{E}}_1$ den Rand von $\widehat{\mathfrak{E}}$ treffen. Es muß also auf dem Rande von $\widehat{\mathfrak{E}}$ mindestens ein Paar äquivalenter Punkte geben. Nun kann ein innerer Punkt von $\widehat{w}'$ nicht äquivalent einem Punkte von $\widehat{w}$ sein, da kein innerer Punkt von $\widehat{w}'$ auf einer x-Geraden liegt. Ein innerer Punkt von $\widehat{w}'$ kann aber auch nicht äquivalent einem anderen inneren Punkte von $\widehat{w}'$ sein, da alsdann die Decktransformation, die den einen in den anderen überführt, $g(x')$ auf sich abbilden würde und damit $\widehat{P}$ (oder $\widehat{Q}$) in einen inneren Punkt von $\widehat{w}'$, was aus demselben Grunde unmöglich ist wie soeben. — Es bleibt also nur die Möglichkeit übrig, daß zwei Punkte von $\widehat{w}$ äquivalent sind. Angenommen, mindestens einer von ihnen sei ein innerer Punkt von $\widehat{w}$. Die Decktransformation F, die den einen in den anderen überführt, verschiebt dann $g_j(x)$ in sich. Wenn nun F eine Gleitung (Transformation mit Erhaltung der Orientierung) wäre, also $\mathfrak{A}_j$ auf sich abbildete, so müßte $\widehat{w}'$ von seinem Bilde in einem Punkte $\widehat{G}$ getroffen werden. Das ist nicht möglich, weil dann ein innerer Punkt von $\widehat{w}'$, nämlich $\widehat{G}$ dem Punkte $F^{-1}(\widehat{G})$ von $\widehat{w}'$ äquivalent wäre, was bereits ausgeschlossen wurde. Ist dagegen F eine Gleitspiegelung, so kann man annehmen, daß $F(\widehat{P})$ ein innerer Punkt von $\widehat{w}$ ist — anderenfalls brauchte man nur F^{-1} statt F zu betrachten. Dann würde F den vor $\widehat{P}$ gelegenen (unendlichen) Teilbogen von $g(x')$ in $\mathfrak{A}_j$ abbilden, und zwar würde dieser Teilbogen von einem uneigentlichen Punkte von $\mathfrak{A}_j$ nach $F(\widehat{P})$ führen, müßte also $\widehat{w}'$ treffen, was der Doppelpunktfreiheit von x' widerspricht.

Bleibt der Fall auszuschalten, daß die Randpunkte $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$ äquivalent sind. In diesem Falle würde die Decktransformation, die $\widehat{P}$ in $\widehat{Q}$ überführt, zugleich $g_j(x)$ und $g(x')$ in sich transformieren; sie hätte also sowohl die beiden uneigentlichen Punkte von $g_j(x)$ wie die von $g(x')$, die zugleich die von $g(x)$ sind, zu Fixpunkten, was unmöglich ist.

Also enthält $\widehat{\mathfrak{E}}$ keine äquivalenten Punkte und drückt sich daher in der Grundfläche $\mathfrak{F}$ in ein Elementarflächenstück $\mathfrak{E}$ mit den beiden Randbögen w und w' durch. Überdies ist $\mathfrak{E}$ punktfremd zu den Kurven $z_1, \ldots, z_s$, weil diese punktfremd zu x und x', also zu w und w' sind; und es ist $\mathfrak{E}$ punktfremd zu y, weil in $\widehat{\mathfrak{F}}$ eine y-Gerade nicht $\widehat{\mathfrak{E}}$ treffen kann. Eine solche müßte nämlich $\widehat{w}'$ treffen, was nicht der Fall sein kann, weil wir bereits erreicht haben, daß die einzigen Schnittpunkte von $g(x')$ mit y-Geraden auf $g(x)$, also jedenfalls nicht in $\mathfrak{A}_j$ oder auf $g_j(x)$ liegen.

Wir können folglich in $\mathfrak{F}$ w' über w hinwegziehen, und zwar durch eine isotope Deformation, die auf eine beliebig kleine Umgebung von $\mathfrak{E}$ beschränkt bleibt, bei der also die Geodätischen $y, z_1, \ldots, z_s$ punktweise festgelassen werden. Damit verschwinden alle Schnittpunkte von $g(x')$ mit dem Teilbogen $\widehat{w}$ von $g_j(x)$, also mindestens die beiden Schnittpunkte $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$ (und ihre äquivalenten), während keine neuen Schnittpunkte hinzutreten.

Das Verfahren läßt sich solange fortsetzen, bis alle Schnittpunkte von $g(x')$ mit den x-Geraden $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots$ beseitigt sind.

7. Es kann nun sein, daß nach Ausführung dieser Deformation $g(x')$ noch Punkte mit $g(x)$ gemein hat. Das ist sicher dann der Fall, wenn y-Geraden vorhanden sind oder wenn x einufrig ist. Sei $\widehat{P}$ einer dieser gemeinsamen Punkte und $\widehat{Q}$ der nächstfolgende auf $g(x')$. Einen solchen gibt es, weil $g(x)$ und $g(x')$, wenn sie einen Punkt gemein haben, auch alle dazu äquivalenten auf $g(x)$ gelegenen Punkte gemein haben. Bezeichnen wir den Bogen von $g(x')$ zwischen $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$ wieder mit $\widehat{w}'$ und den von $g(x)$ zwischen denselben Punkten mit $\widehat{w}$, so bilden $\widehat{w}$ und $\widehat{w}'$ zusammen den Rand eines Elementarflächenstückes $\widehat{\mathfrak{E}}$. $\mathfrak{A}$ bezeichne die von $g(x)$ abgeschnittene Hälfte der hyperbolischen Ebene, die $\widehat{w}'$ enthält.

Wenn nun $\widehat{w}$ in seinem Inneren zwei äquivalente Punkte enthält, so gibt es im Inneren von $\widehat{w}$ einen Schnittpunkt mit $g(x')$. Denn durch die Decktransformation, die den einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ in den anderen verschiebt, muß entweder $\widehat{P}$ oder $\widehat{Q}$ in einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ übergehen; die Kurve $g(x')$, die von dieser Decktransformation ebenfalls auf sich abgebildet wird, muß also durch einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ in $\mathfrak{A}$ eintreten, und da sie $\widehat{w}'$ nicht treffen kann, muß sie auch durch einen inneren Punkt von $\widehat{w}$ das Gebiet $\mathfrak{A}$ wieder verlassen. Also gibt es dann einen in $\mathfrak{A}$ verlaufenden Teilbogen von $g(x')$, der auf $g(x)$ eine kürzere Strecke abschneidet als $\widehat{w}'$. Liegen im Inneren dieser kürzeren Strecke von $g(x)$, die wir wieder mit $\widehat{w}$ bezeichnen, noch äquivalente Punkte, so können wir das neue $\widehat{w}$ durch ein noch kürzeres ersetzen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangen wir, da die äquivalenten Punkte auf $g(x)$ einen festen kleinsten Abstand, nämlich die Länge von x haben, zu einem Bogen $\widehat{w}'$, der in $\mathfrak{A}$ liegt und auf $g(x)$ eine Strecke $\widehat{w}$ ohne innere äquivalente Punkte ausschneidet. $\widehat{w}$ und $\widehat{w}'$ begrenzen zusammen ein (abgeschlossenes) Elementarflächenstück $\widehat{\mathfrak{E}}$. Durch dieselben Schlüsse wie beim Schnitt von $g(x')$ mit $g_j(x)$ kann man zeigen, daß $\widehat{\mathfrak{E}}$ alsdann keine äquivalenten Punkte enthält, ausgenommen etwa die Punkte $\widehat{P}$ und $\widehat{Q}$. In jedem Falle drückt sich das Elementarflächenstück $\widehat{\mathfrak{E}}$ in ein Elementarflächenstück $\mathfrak{E}$ (unter Umständen mit identischen Ecken P und Q) nach $\mathfrak{F}$ durch, und man kann über dieses hinweg w' isotop in w deformieren.

8. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens kann man ganz x' auf x isotop deformieren und danach durch eine auf einen beliebig schmalen Streifen um x beschränkte letzte isotope Deformation x punktweise fest machen. Damit ist die im Hilfssatze behauptete isotope Deformation D als Produkt einer endlichen Anzahl isotoper Deformationen konstruiert.

9. Es bleibt nur noch der Fall zu erledigen, daß $g(x')$ punktfremd zu $g(x)$ ist, der übrigens nur eintreten kann, wenn die y-Kurve fehlt und x zweiufrig ist. Diesen Fall führen wir auf den vorigen zurück durch eine passende isotope Deformation von $\mathfrak{F}$, etwa wie folgt. Sei $\widehat{X}$ ein Punkt auf der Geraden $g(x)$. Wir ziehen durch $\widehat{X}$ die zu $g(x)$ senkrechte Gerade. Sie schneidet $g(x')$, da sie die hyperbolische Ebene in zwei Teile zerlegt, die beide Punkte von $g(x')$, nämlich die beiden uneigentlichen Punkte von $g(x)$ enthalten. Wir nehmen den zum Lotfußpunkte nächsten Schnittpunkt $\widehat{X}'$ mit $g(x')$. Das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ enthält keine äquivalenten Punkte [9]). Folglich ist auch eine ganze Umgebung des Lotes frei von äquivalenten Punkten. Daher

---

[9]) Daß das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ keine äquivalenten Punkte enthält, folgt so: Nach Voraussetzung haben $g(x)$ und $g(x')$ keinen eigentlichen Punkt der hyperbolischen Ebene gemein. Die beiden Kurven begrenzen also ein topologisches Zweieck, dessen zwei Ecken die beiden ihnen gemeinsamen uneigentlichen Punkte sind. Eine Decktransformation, die von zwei äquivalenten Punkten des Zweiecks den einen in den anderen überführt, läßt das Zweieck in eines übergehen, dessen Rand den Rand des ursprünglichen treffen muß. Es muß also bereits auf dem Rande ein Paar hinsichtlich dieser Decktransformation äquivalenter Punkte geben. Da nun ein Punkt von $g(x)$ nach Voraussetzung nicht äquivalent einem Punkte von $g(x')$ ist, so muß das Paar äquivalenter Punkte auf $g(x)$ oder auch auf $g(x')$ liegen. Eine Decktransformation, die einen Punkt von $g(x)$ in einen äquivalenten von $g(x)$ (oder einen von $g(x')$ in einen äquivalenten von $g(x')$) übergehen läßt, ist aber eine hyperbolische Decktranslation — der Fall der Einufrigkeit von x, in welchem es sich um eine Gleitspiegelung handeln würde, scheidet beim Fehlen von Schnittpunkten zwischen $g(x)$ und $g(x')$ aus. Eine solche Decktranslation verschiebt aber $g(x)$ in sich. Das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ geht dabei in ein anderes Lot von $g(x)$ über, es liegen also auf ihm keine äquivalenten Punkte.

kann man den Grundpunkt X' von $\widehat{X}'$ längs der Grundkurve des Lotes durch eine isotope Deformation von $\mathfrak{F}$ in den Punkt X und sogar darüber hinaus ziehen. Die isotope Deformation kann man offenbar so leiten, daß dabei genau zwei Schnittpunkte von x' mit x entstehen. Außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung des Lotes XX' ist die Deformation die Identität. Sie berührt daher die etwa vorhandenen z-Kurven nicht. Denn keine z-Kurve kann das Lot XX' schneiden, da ihr in $\widehat{\mathfrak{F}}$ eine z-Gerade entspräche, die das Lot $\widehat{X}\widehat{X}'$ träfe. Eine solche müßte aber $g\ (x')$ durchsetzen, im Widerspruch zu 1. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Wir ziehen auf der orientierbaren oder nichtorientierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ von der positiven Charakteristik N $N+2$ Rückkehrschnitte

$$(R) \qquad a_1, \ldots, a_{N+2}$$

von der folgenden Beschaffenheit:

I. Zwei aufeinanderfolgende Rückkehrschnitte der Folge (R) durchsetzen einander in genau einem Punkte,

II. zwei nicht aufeinanderfolgende Rückkehrschnitte sind punktfremd,

III. $\mathfrak{F}$ geht nach Aufschneiden längs der Rückkehrschnitte in ein Polygon $\mathfrak{P}$, nämlich ein $(4\,N + 4)$-Eck über[10]). Die Fig. 2 bis 4 zeigen die Lage der Rückkehrschnitte an einigen Beispielen; es ist $N = 2\,(h - 1)$ bzw. $N = k - 2$, wenn h die Henkelzahl der orientierbaren, k die Kreuzhaubenzahl der nichtorientierbaren Fläche ist[11]). Die $N + 2$ Rückkehrschnitte sind stark ausgezogen. — Daß ein Rückkehrschnitt doppelpunktfrei ist, liegt übrigens schon in seiner Definition.

Wir realisieren $\mathfrak{P}$ durch ein regelmäßiges $(4\,N + 4)$-Eck der hyperbolischen Ebene mit lauter rechten Winkeln. Das ist möglich wegen $N > 0$. Durch paarweises Identifizieren äquivalenter Seiten schließt sich $\mathfrak{P}$ zur Fläche $\mathfrak{F}$. Da hierbei die Ecken von $\mathfrak{P}$ zu je vieren äquivalent werden, so schließen sich je vier Zipfel des Polygons zu einem Vollwinkel zusammen. Die entstehende Fläche $\mathfrak{F}$ ist daher mit überall konstanter negativer Krümmung ausgestattet. Die Fig. 5 zeigt das Polygon $\mathfrak{P}$ für die orientierbare Fläche der Charakteristik $N = 2$ (Henkelzahl $h = 2$).

---

[10]) Das entstehende Zellsystem hat $e = \alpha^0 = N + 1$ Ecken, $k = \alpha^1 = 2\,N + 2$ Kanten, $f = \alpha^2 = 1$ Flächenstücke. Es ist regelmäßig, da mit jeder Ecke $a^0 = 4$, mit dem Flächenstücke $a^2 = 4\,N + 4$ Kanten inzident sind. In der Aufzählung regelmäßiger Zellsysteme bei W. Threlfall, Gruppenbilder [Abh. math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. **41**, Nr. 6 (1932)], ist es Nr. 7 der Tabelle von S. 46.

[11]) In Fig. 3 und 4 sind, soweit möglich, je 2 Kreuzhauben in 1 Henkel verwandelt (vgl. S.-T. S. 139), so daß höchstens 1 Kreuzhaube bzw. 1 nichtorientierbarer Henkel vorkommt.

Es sei nun eine topologische Selbstabbildung T von $\mathfrak{F}$ gegeben, bei der $a_1, \ldots, a_{N+2}$ in homotope Kurven übergehen. Wir setzen dann $a_1 = x$ und

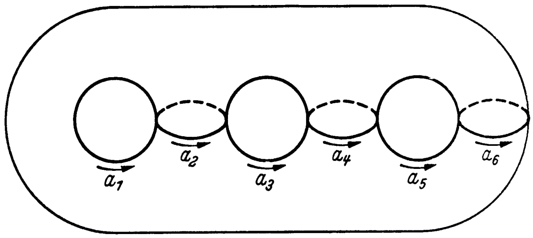

Fig. 2. $N = 4$; $h = 3$ (3 orientierbare Henkel).

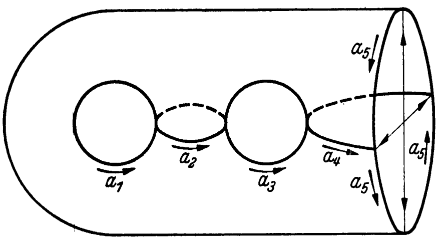

Fig. 3. $N = 3$; $k = 5$ (2 orientierbare Henkel, 1 Kreuzhaube).

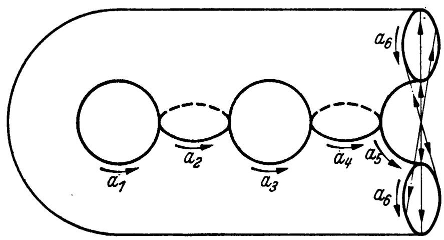

Fig. 4. $N = 4$; $k = 6$ (2 orientierbare, 1 nichtorientierbarer Henkel oder Kleinscher Schlauch).

wenden den Hilfssatz an; die Kurven $y, z_1, \ldots, z_s$ fehlen in diesem Falle. Es gibt danach eine isotope Deformation D_1, deren Produktabbildung mit T, $D_1 T$ (erst T, dann D_1 ausüben!) den Rückkehrschnitt a_1 punktweise fest läßt. Nunmehr setzen wir $a_2 = x$, $a_1 = y$. Nach dem Hilfssatze, der auf die Abbildung $D_1 T$ angewendet wird, gibt es eine isotope Deformation D_2 derart, daß $D_2 D_1 T$ die Rückkehrschnitte a_1 und a_2 punktweise fest läßt. Hat man die Deformationen $D_1, D_2, \ldots, D_i$ bereits so konstruiert, daß die topologische Selbstabbildung $D_i \ldots D_2 D_1 T$ die Rückkehrschnitte $a_1, \ldots, a_i$ punktweise fest läßt $(2 \leqq i \leqq N+1)$, so setzen wir $a_{i+1} = x$, $a_i = y$, $a_1 = z_1, \ldots,$ $a_{i-1} = z_{i-1}$ $(i - 1 = s)$ und erhalten durch Anwendung des Hilfssatzes auf die topologische Selbstabbildung $D_i \ldots D_2 D_1 T$ eine isotope Deformation

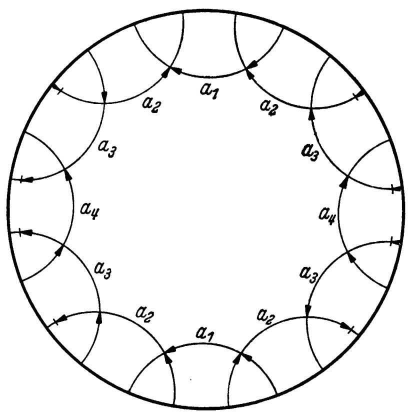

Fig. 5. $N = 2$, $h = 2$ (2 orientierbare Henkel).

D_{i+1} derart, daß $D_{i+1}D_i \dots D_2 D_1 T$ die Rückkehrschnitte $a_1, \dots, a_{i+1}$ punktweise fest läßt. Schließlich ergibt sich eine alle Rückkehrschnitte $a_1, \dots, a_{N+2}$ punktweise festlassende topologische Selbstabbildung $D_{N+2} \dots D_1 T$ von $\mathfrak{F}$. Diese Abbildung bildet das Polygon $\mathfrak{P}$ topologisch auf sich ab bei punktweise festem Rande. Nach dem Tietzeschen Deformationssatze[12]) ist diese Abbildung eine isotope Deformation D. Somit ist

$$T = D_1^{-1} \dots D_{N+2}^{-1} D$$

eine isotope Deformation, was zu beweisen war.

§ 3.

Beweis von Satz 2.

Wir beweisen jetzt Satz 2, wonach jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ durch eine topologische Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ bewirkt werden kann[13]).

Daß jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe sich durch eine stetige, nicht notwendig eineindeutige Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ bewirken läßt, ist leicht zu beweisen[14]). Anderseits läßt sich eine stetige Selbstabbildung einer Fläche $\mathfrak{F}$ der Charakteristik $N > 0$ nach H. Kneser[15]) durch homotope Deformation von $\mathfrak{F}$ entweder in eine topologische Selbstabbildung von $\mathfrak{F}$ deformieren oder in eine Abbildung, bei der ein Gebiet überhaupt frei bleibt.

Zum Beweise von Satz 2 für Flächen der Charakteristik $N > 0$ brauchen wir demnach nur zu zeigen: Die Annahme, daß ein Automorphismus $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ durch eine solche stetige Selbstabbildung T von $\mathfrak{F}$ bewirkt wird, bei der ein Gebiet von $\mathfrak{F}$ überhaupt frei bleibt, führt zu einem Widerspruche[16]).

Zu diesem Zwecke denken wir uns $\mathfrak{F}$ zum Poincaréschen Fundamentalpolygone aufgeschnitten; es hat bekanntlich $e = 1$ Ecken, $k = N + 2$ Kanten, $f = 1$ Flächenstücke. Wir deformieren die stetige Abbildung zu-

---

[12]) Ein einfacher Beweis dieses Satzes findet sich bei J. W. Alexander, On the deformation of an n-cell, Proc. Nat. Academy of Sciences **9** (1923), S. 406.

[13]) Vgl. auch H. Seifert, Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen, Abh. Math. Sem. Hansische Univ. **12** (1937), S. 29.

[14]) H. Hopf, Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen, Journ. f. Math. **165** (1931), S. 225.

[15]) H. Kneser, Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen, Math. Annalen **103** (1930), S. 347.

[16]) Diese Aussage ist in dem allgemeineren Satze von H. Hopf[14]) (l. c. Satz VI b) enthalten: Wird durch die Selbstabbildung T der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ die Homologiegruppe der Dimension 1 isomorph auf sich abgebildet, so ist der Abbildungsgrad von T nicht Null.

nächst homotop so, daß die einzige Ecke Fixpunkt wird. Diese Deformation kann man offenbar auf ein so kleines Gebiet beschränken, daß auch die deformierte Abbildung noch ein Gebiet von $\mathfrak{F}$ von Bildpunkten frei läßt. Wir deformieren jetzt die neue stetige Abbildung weiter homotop in eine Abbildung $T'(\mathfrak{F})$, indem wir (in der aufgeschnittenen Fläche) von einem inneren Punkte dieses freien Gebietes aus alle Bildpunkte auf den Kantenkomplex des Fundamentalpolygons projizieren. $T'(\mathfrak{F})$ führt dann die Kanten

$$a_1, \ldots, a_{N+2} \tag{1}$$

des Fundamentalpolygons in gewisse stetige Bilder

$$a'_1, \ldots, a'_{N+2} \tag{1'}$$

über, die auf dem ursprünglichen Kantenkomplex liegen. Die Kurven (1) sowohl wie (1′) sind geschlossene Wege (stetige Bilder der Kreislinie); Anfangs- und Endpunkt von allen ist die feste Ecke des Fundamentalpolygons.

Ist $R(a_1, \ldots, a_{N+2}) = 1$, wofür wir abkürzend auch schreiben $R(a_\nu) = 1$, die Relation der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$, so besteht, da durch stetige Abbildung die Relation nicht zerstört wird, zwischen den Bildwegen die Relation $R(a'_1, \ldots, a'_{N+2}) = 1$. Nun ist a'_ν ein gewisses Produkt $p_\nu(a_\mu)$ in den Erzeugenden (1) von $\mathfrak{G}$. Da die Fundamentalgruppe des Kantenkomplexes die freie Gruppe in den $N+2$ Erzeugenden (1) ist[17]), muß $R(p_1, \ldots, p_{N+2}) = 1$ identisch in den Erzeugenden (1) gelten.

Wir haben also den folgenden gruppentheoretischen Sachverhalt: In der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Erzeugenden (1) und der Relation $R(a_\nu) = 1$ ist ein Automorphismus $a_\nu \to a'_\nu = p_\nu(a_\mu)$ gegeben, für den die Identität $R(p_\nu(a_\mu)) = 1$ gilt. Daraus folgern wir nun den Widerspruch, daß $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe, also nicht die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{F}$ ist.

Um das zu zeigen, betrachten wir die freie Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der $N+2$ Erzeugenden A_ν und die Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}^*$, die von den Elementen $A'_\nu = p_\nu(A_\mu)$ erzeugt wird. Durch $A_\nu \to a_\nu$ ist eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{G}$ gegeben. Damit wird zugleich eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ gegeben durch die Zuordnung $A'_\nu = p_\nu(A_\mu) \to a'_\nu = p_\nu(a_\mu)$. Es sei nun $w(A'_\nu)$ ein Element von $\mathfrak{U}$, das bei diesem Homomorphismus in das Einselement von $\mathfrak{G}$ übergeht: $w(A'_\nu) \to w(a'_\nu) = 1$. Da zwischen den a'_ν die eine Relation $R(a'_\nu) = 1$ besteht, so läßt sich $w(a'_\nu)$ durch triviale Umformungen in ein Produkt von Transformierten von $R(a'_\nu)$ und $R(a'_\nu)^{-1}$ überführen. Ebenso läßt sich $w(A'_\nu)$ in ein solches Produkt überführen, das mit $W(A'_\nu)$ bezeichnet sei. Da nun $R(A'_\nu) = R(p_\nu(A_\mu))$ identisch $= 1$ ist, so ist $R(A'_\nu)$ und damit auch $W(A'_\nu)$ und schließlich $w(A'_\nu)$ das Einselement

[17]) S.-T., S. 169. 170.

von $\mathfrak{U}$. Es geht also nur das Einselement von $\mathfrak{U}$ in das Einselement von $\mathfrak{G}$ über. Die Gruppen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{G}$ sind somit isomorph. $\mathfrak{U}$ ist aber als Untergruppe einer freien Gruppe selbst eine freie Gruppe.

Damit ist der Widerspruch hergestellt und Satz 2 für Flächen der Charakteristik $N > 0$ bewiesen.

Bei Flächen der Charakteristik $N = 0$ kennt man alle Automorphismen der Fundamentalgruppe und kann zu jedem eine topologische Selbstabbildung angeben, die ihn erzeugt. Im Falle der orientierbaren Ringfläche werden die Automorphismen durch die ganzzahligen unimodularen Substitutionen der beiden Erzeugenden der Fundamentalgruppe gegeben, die die freie abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden ist, die zugehörigen topologischen Selbstabbildungen durch die entsprechenden Gitterabbildungen der über die euklidische Ebene ausgebreiteten universellen Überlagerungsfläche. — Für die nichtorientierbare Ringfläche lassen sich die Automorphismen der Fundamentalgruppe und die zugehörigen topologischen Selbstabbildungen ebenfalls angeben[18]). — Für Kugel und projektive Ebene ist der Satz 2 trivial.

---

[18]) J. Nielsen, Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Ringflächen, Math. Annalen **82** (1921), S. 83.

(Eingegangen am 5. April 1938.)

Lebenslauf

Am 26. September 1910 bin ich, Kurt Werner Mangler, als Sohn des Oberpostinspektors Kurt Mangler und seiner Ehefrau Luise geb. Graeser in Sangerhausen geboren. Von Ostern 1917 bis Ostern 1920 besuchte ich die städtische Vorschule und dann bis zum 1. Juli 1920 das Gymnasium in Gleiwitz (Oberschlesien). Meine weitere Schulbildung erhielt ich auf dem Gymnasium in Torgau (Elbe), das ich Ostern 1929 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich widmete mich dann dem Studium der Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie an der Universität Halle. Meine Lehrer waren die Herren Professoren Brandt, Hoffmann, Jung, Menzer, Smekal, Utitz, Vorländer und Ziehen und die Herren Dozenten Baer, Behmann und Neiß. Anfang des Wintersemesters 1933/34 ließ ich mich exmatrikulieren, um mich ganz dem Abschluß meiner Dissertation widmen zu können. Für die Förderung meiner mathematischen Ausbildung bin ich den Herren Professoren Brandt, Threlfall und Seifert zu großem Dank verpflichtet. Ich verdanke ihnen im besonderen die Anleitung zu selbständiger wissenschaftlicher Arbeit. Im Juli 1934 bestand ich die wissenschaftliche Staatsprüfung für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik als Hauptfach und in Chemie als Nebenfach. Vom 1. April 1934 war ich zwei Jahre lang als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter am Mathematischen Seminar der Universität Halle tätig, seit Juli 1936 bin ich als Assistent für theoretische Aerodynamik an der „Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften“ angestellt.