A. FLECHSENHAAR

EINFÜHRUNG IN DIE FINANZMATHEMATIK

ZWEITE AUFLAGE

1927

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

6056

EINFÜHRUNG IN DIE FINANZMATHEMATIK

VON

DR. A. FLECHSENHAAR
OBERSTUDIENRAT IN FRANKFURT A. M.

ZWEITE AUFLAGE

BEARBEITET IN VERBINDUNG MIT

DR. F. FLEEGE-ALTHOFF
DIPL.-HL. IN MANNHEIM

1927
SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

ISBN 978-3-663-15477-8 ISBN 978-3-663-16049-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16049-6

Vorwort.

Das vorliegende Buch war in erster Linie als Hilfsmittel für die Vorbereitung auf die Ersatzreifeprüfung gedacht; in der neuen Form ist es auch für höhere Handelsschulen und Wirtschaftsoberschulen bestimmt. Da es weiterhin ganz allgemein eine Einführung in die Finanzmathematik bieten soll, zumal für Studierende und die Arbeitsgemeinschaften der höheren Lehranstalten, gehen einzelne Abschnitte z. T. über die üblichen Anforderungen hinaus; jedoch können etwa zu weit führende Betrachtungen ohne Schaden für den inneren Zusammenhang übergangen werden.

Mein Ziel war eine klare anschauliche Darstellung und die Entwicklung von Methoden, die es gestatten, von einem möglichst einfachen Gesichtspunkt aus, verschiedenartige Anwendungen zu überblicken. Diesem Zwecke sollte vor allem die Einführung der Zeitgeraden in der Rentenrechnung und in der Versicherungsrechnung dienen. Zur Übung wurden zahlreiche Aufgaben beigefügt, die in der Neuauflage noch vermehrt und teilweise anders geordnet wurden. Die Auflösungen hierzu erscheinen demnächst in einem besonderen Heftchen. Nur geringe Änderungen haben die Abschnitte über Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsrechnung erfahren. In der Zinseszins- und Rentenrechnung wurde dem Tabellenrechnen ein erheblich breiterer Raum gewährt. Es wurden Tabellen zu 3,5% und 5% beigefügt, damit ein Wechsel im Zinsfuß möglich ist. Neu hinzugekommen sind ferner die zusammengesetzte Reihe mit Anwendungen auf die veränderliche Rente sowie die mathematische Behandlung der Prozentrechnung im und auf Hundert.

Da sich weiterhin gezeigt hatte, daß die sichere Beherrschung der Logarithmenrechnung nicht allgemein vorausgesetzt werden kann, wurden im Vorkursus die wichtigsten Sätze über Potenzen und Wurzeln in leicht faßlicher Form ohne Beweis und ausführlich die Logarithmenrechnung gebracht. Auch wurde an einigen Stellen der Lehrstoff etwas eingehender und damit verständlicher behandelt.

Von einem Abschnitt über kaufmännisches Rechnen wurde auch diesmal abgesehen; ich empfehle wieder die im gleichen Verlag erschienene Neuausgabe von Feller-Odermann, Kaufmännische Arithmetik, bearbeitet von Kämpfe und Prater.

Herr Dr. Fleege-Althoff hat das Manuskript durchgesehen und wertvolle Anregungen gegeben, die besonders der Brauchbarkeit des Buches für höhere Handelsschulen zugute kommen dürften. Hierfür sage ich ihm auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank. Ebenso bin ich Herrn Studienrat Reuter in Frankfurt a. M. für das Mitlesen der Korrektur und wertvolle Vorschläge zu besonderem Danke verpflichtet.

Frankfurt a. M., im November 1927. **A. Flechsenhaar.**

Inhaltsverzeichnis.

A. Vorkursus.

B. Zinseszinsrechnung.

C. Rentenrechnung.

D. Kombinatorik.

E. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

F. Versicherungsrechnung.

Zeichenerklärungen.

Die kleinen griechischen Buchstaben:

α = a, alpha	ι = i, iōta	ϱ = r, rho
β = b, bēta	$\varkappa$ = k, kappa	σ = s, sigma
γ = g, gamma	λ = l, lambda	τ = t, tau
δ = d, delta	μ = m, my	υ = y, ypsīlon
ε = ĕ, ĕpsīlon	ν = n, ny	φ = ph, phi
ζ = z, zēta	ξ = x, xy	χ = ch, chi
η = ē, ēta	o = ŏ, ŏmīkron	ψ = ps, psi
ϑ = th, thēta	π = p, pi	ω = ō, ōmĕga

$=$ bedeutet: ist gleich

$\approx$,, ist ungefähr gleich

$<$,, ist kleiner als

$>$,, ist größer als

$5 < a < 12$ bedeutet 5 ist kleiner als a, a ist kleiner als 12

$a \leqq 6$ bedeutet a ist kleiner oder gleich b

∞ ,, unendlich groß.

A. Vorkursus.

I. Potenzen.

An Stelle der Summe $7 + 7 + 7 + 7$ schreibt man das Produkt $7 \cdot 4$. Das Produkt $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ mit den 4 gleichen Faktoren 5 ersetzt man durch die Potenz 5^4. Ebenso ist $a \cdot a \cdot a = a^3$; $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n Faktoren a). a^n heißt Potenz, a heißt die Basis (Grundzahl), n der Exponent (Hochzahl). n muß nach dieser Definition eine positive ganze Zahl sein.

Beispiele: $2^5 = 32$; $3^5 = 243$; $5^3 = 125$; $(-2)^4 = +16$, $(-2)^3 = -8$; $0^n = 0$; $1^n = 1$.

Sätze: $a^3 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$, allgemein:

(1) $$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}.$$

$$a^7 : a^4 = \frac{a^7}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^3$$ (kürzen!), allgemein:

(2) $$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}} \text{ für } \boldsymbol{m > n}.$$

$$a^3 : a^8 = \frac{a^3}{a^8} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^5}$$ (kürzen!), allgemein:

(2a) $$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ für } n > m.$$

$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{12}$ (nach (1)); ebenso $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{12}$; allgemein:

(3) $$\boldsymbol{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}}.$$

$$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \quad a \cdot b = (ab)^3,$$

allgemein:

(4) $$a^n \cdot b^n = (ab)^n;$$ entsprechend ist:

(5) $$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Sprich die in Gleichung (1) — (5) enthaltenen Sätze in Worten aus!

Beispiele: $2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$; $6^7 : 6^4 = 6^3 = 216$; $5^{11} : 5^{13} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$; $(2^3)^2 = 2^6 = 64$; $2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000$; $12^4 : 4^4 = 3^4 = 81$.

$a^3 : a^7$ ist nach (2a) zu lösen, da $7 > 3$ ist. Es ist $a^3 : a^7 = \frac{1}{a^4}$. Würde man nach (2) rechnen, so ergäbe sich $a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}$. Da aber der Exponent eine positive ganze Zahl sein muß, ist eigentlich a^{-4} sinnlos. Wir fassen nun a^{-4} als andere Schreibweise für $\frac{1}{a^4}$ auf, allgemein setzen wir:

$$a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \tag{6}$$

und rechnen stets nach (2). Ist schließlich $m = n$, so wird nach (2) $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$, während andererseits $\frac{a^n}{a^n} = 1$ ist (Zähler und Nenner gleich). Damit wir stets nach (2) oder (2a) rechnen können, setzen wir:

$$a^0 = 1. \tag{7}$$

Beispiele:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}; \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = -\frac{1}{32}; \quad 12^0 = 1; \quad 0{,}71^0 = 1.$$

Aufgaben, deren Exponent negativ oder Null ist, können auf 2 Arten behandelt werden, z. B.:

$$a^0 \cdot a^5 = a^{0+5} = a^5 \quad \text{oder} \quad a^0 \cdot a^5 = 1 \cdot a^5 = a^5;$$

$$p^{-3} \cdot p^6 = p^{-3+6} = p^3 \quad \text{oder} \quad p^{-3} \cdot p^6 = \frac{1}{p^3} \cdot p^6 = p^3;$$

$$(x^{-3})^4 = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}} \quad \text{oder} \quad (x^{-3})^4 = \left(\frac{1}{x^3}\right)^4 = \frac{1}{x^{12}}.$$

Aufgaben:

1. Berechne den Wert folgender Potenzen: 5^4; 4^5; 7^3; 13^3; 156^2; $(-3)^5$; $(-3)^4$; $1{,}4^3$; $1{,}2^4$; $4{,}5^2$; $(\frac{5}{9})^3$; $(1\frac{1}{5})^4$; $(-1{,}4)^2$; $(-0{,}7)^3$; $(-2{,}2)^3$; 0^{16}; 1^{12}; $(-1)^{17}$; $(-1)^{100}$.

2. Berechne: $8^4 + 2^5 - 7^3$; $3^3 - 4^3 + 5^3$; $(-4)^3 + (-2)^5 + (-6)^4$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

3. Vereinfache: $6^3 \cdot 6^2$; $a^9 \cdot a^{11}$; $p^{15} \cdot p^{17}$; $q^{3n} \cdot q^{5n}$; $a^7 \cdot a^8 \cdot a^9$; $b^{5x} \cdot b^x \cdot b^{7x}$.

4. Führe folgende Divisionen aus: $x^{13} : x^8$; $x^{26} : x^{11}$; $a^{29} : a^3$; $12^{39} : 12^9$; $x^{5p+7} : x^{2p+3}$; $x^5 : x^{12}$; $y^{26} : y^{32}$; $b^{2n} : b^{7n}$; $m^{5a+11} : m^{3a+11}$.

5. Schreibe als einfache Potenz: $(3^4)^5$; $(a^5)^7$; $(b^p)^7$; $(x^{11a})^b$; $(y^{3m})^{5n}$.

6. Berechne: $2^4 \cdot 5^4$; $(\frac{1}{3})^7 \cdot 6^7$; $0{,}2^{10} \cdot 5^{10}$; $(3\frac{1}{3})^7 \cdot (\frac{3}{5})^7$; $20^6 : 2^6$; $36^5 : 12^5$; $(-4)^3 \cdot (-2)^3$; $5^4 \cdot (-2)^4$; $(-5)^5 \cdot (-2)^5$; $(-20)^6 : (+10)^6$; $(-8)^5 : (-2)^5$; $(-8)^5 : (+2)^5$.

7. Berechne: 2^0; 15^0; $0{,}361^0$; 4^{-1}; 5^{-2}; $(-4)^{-3}$; $(-5)^{-4}$; $(\frac{1}{3})^{-5}$; $(-\frac{7}{9})^{-2}$; $(0{,}3)^{-4}$; $(-1{,}2)^{-1}$; $\frac{1}{5^{-2}}$; $\frac{1}{0{,}2^{-4}}$; $\frac{1}{10^{-6}}$; $\frac{1}{(-3)^{-3}}$; $\frac{1}{(-3)^{-4}}$.

8. Vereinfache auf 2 Arten: $x^3 \cdot x^0$; $(\frac{5}{3})^{-4} \cdot (\frac{3}{4})^{-4}$; $1{,}2^{-2} \cdot 0{,}5^{-2}$; $7^{-5} : 7^{-2}$; $5^{-2} \cdot 4^{-2}$; $8^{-4} \cdot 4^{-4}$; $x^5 \cdot x^{-2}$; $a^7 : a^{-6}$; $b^{11} : b^{-11}$; $p^4 \cdot p^0 \cdot p^{-2} \cdot p^{-1}$.

II. Wurzeln und Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Ist in der Potenzgleichung $a^n = c$ die Basis a gesucht, so schreibt man die Wurzelgleichung $a = \sqrt[n]{c}$ (gelesen: a ist die $n$te Wurzel aus c) und nennt in der neuen Gleichung c den Radikanden, n den Wurzelexponenten. Es ist also $(\sqrt[n]{c})^n = c$. So folgt aus $5^3 = 125$ sofort $5 = \sqrt[3]{125}$; ist $x = \sqrt[3]{216}$, so ist auch $x^3 = 216$, also $x = 6$ und $\sqrt[3]{216} = 6$. Ebenso ist $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[7]{a^7} = a$. (Probe!) Wird also der Wert der Wurzel mit dem Wurzelexponenten potenziert, so ergibt sich der Radikand. Es ist also:

$$\sqrt[n]{c^n} = (\sqrt[n]{c})^n = c. \tag{8}$$

Die Wurzelrechnung ist eine Umkehrung der Potenzrechnung.

Ist der Wurzelexponent 2, so läßt man ihn weg, man schreibt also $\sqrt{c}$ (gelesen: Quadratwurzel aus c) statt $\sqrt[2]{c}$. Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten liefern 2 Lösungen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, z. B. $\sqrt{25} = +5$ und $\sqrt{25} = -5$, da sowohl $5^2 = 25$, als auch $(-5)^2 = 25$ ist. Man schreibt kurz $\sqrt{25} = \pm 5$. Der Radikand darf in diesem Falle allerdings nur positiv sein; $\sqrt{-25}$ ist nicht lösbar, da weder 5^2, noch $(-5)^2$, noch eine andere positive oder negative Zahl mit 2 potenziert den Wert (-25) liefert. Bei ungeradem Wurzelexponenten erhält man stets eine Lösung, z. B. $\sqrt[3]{512} = 8$; $\sqrt[3]{-512} = -8$.

Nicht aus jeder Zahl läßt sich die Wurzel genau angeben. So ist keine der uns bekannten Zahlen gleich $\sqrt{3}$; 1 ist zu klein, denn $1^2 = 1$, 2 ist zu groß, denn $2^2 = 4$; 1,7 ist zu klein, denn $1{,}7^2 = 2{,}89$; 1,8 ist zu groß, denn $1{,}8^2 = 3{,}24$; d. h. $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$; ebenso ist $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, ferner $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, denn $1{,}732^2 = 2{,}999824$; $1{,}733^2 = 3{,}003289$. Man kann also durch Probieren das Ergebnis beliebig genau finden, wenn auch nie ganz genau.

Ein Verfahren zur angenäherten Berechnung der Quadratwurzeln findet sich in jedem Lehrbuch der Elementarmathematik. Zuweilen benutzt man auch Tabellen (s. Logarithmentafel). Am einfachsten findet man Wurzeln mit Hilfe der Logarithmen (vgl. III 5).

Sätze: Es ist $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 = 6$, ebenso $\sqrt[3]{27 \cdot 8} = \sqrt[3]{216} = 6$, allgemein:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}. \tag{9}$$

$$\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{64} = 8 : 4 = 2; \quad \sqrt[3]{512 : 64} = \sqrt[3]{8} = 2,$$

also: $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{512 : 64}$; allgemein:

(10) $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}.$$

$$(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4; \quad \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \text{ also } (\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2};$$

allgemein:

(11) $$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$\sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[6]{(a^2)^6} = a^2; \; \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2; \text{ also } \sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[3]{a^6};$$

allgemein:

(12) $$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Schließlich ist:

(13) $$\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}};$$

z.B.: $\sqrt[6]{64} = \pm 2$; $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{\pm 8} = \pm 2$; $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = \pm 2$.

Sprich die in den Gleichungen (9) bis (13) enthaltenen Sätze in Worten aus.

Beispiele:

$$\sqrt[24]{a^{36}} = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a}; \; \sqrt[5]{p^{35}} = \sqrt[5]{(p^7)^5} = p^7; \; \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{112} \cdot \sqrt[3]{98} = \sqrt[3]{2^{10} \cdot 7^3}$$

$$= 56 \cdot \sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[5]{27a^3c} \cdot \sqrt[5]{18b^3c^4} \cdot \sqrt[5]{36a^4b^3} = \sqrt[5]{3^7 \cdot 2^3 \cdot a^7 \cdot b^6 \cdot c^5}$$

$$= 3abc\sqrt[5]{72a^2b}; \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x^m}} = \sqrt[n]{x}.$$

Aufgaben (Wurzeln):

1. Suche den Wert folgender Wurzeln und mache die Probe. Welche Beispiele haben 2, welche 1, welche keine Lösung?

$\sqrt[7]{128}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt{729}$; $\sqrt[5]{243}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[4]{625}$; $\sqrt[3]{1331}$; $\sqrt[3]{0{,}125}$; $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$; $\sqrt{\frac{225}{256}}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$; $\sqrt{1089}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[6]{-64}$; $\sqrt{-49}$.

2. Bestimme angenähert $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{10}$; weitere Aufgaben III_5.

3. Vereinfache folgende Wurzelausdrücke:

$\sqrt{15} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{35}$; $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{ac} \cdot \sqrt[3]{b^2c^4}$; $\sqrt[7]{a^{14}}$; $\sqrt[11]{p^{22} \cdot p^{33}}$; $\sqrt[12]{m^{18}}$;

$\sqrt[14]{128b^{21}}$; $\sqrt[8]{512}$; $\sqrt[5]{\sqrt[7]{10}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}$; $\sqrt[a]{\sqrt[b]{r^a}}$; $\sqrt[ab]{c^{bx}}$; $\sqrt[x]{\sqrt[y]{2^x}}$.

Nach (8) ist $\sqrt[7]{a^{21}} = \sqrt[7]{(a^3)^7} = a^3$; $\sqrt[p]{a^{pq}} = \sqrt[p]{(a^q)^p} = a^q$, d.h. $\sqrt[p]{a^{pq}} = a^{\frac{pq}{p}}$.

Allgemein wäre demnach zu setzen:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \tag{14}$$

Diese Gleichung gilt allerdings zunächst nur, wenn n ein Teiler von m ist, also etwa $m = n \cdot p$. Andernfalls erscheint das Ergebnis sinnlos; denn es wäre $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$ ein Produkt mit $\frac{3}{5}$ Faktoren, während ein Produkt doch stets eine ganze Anzahl von Faktoren haben muß. Sobald wir aber unter $a^{\frac{3}{5}}$ nur eine andere Schreibweise für $\sqrt[5]{a^3}$ verstehen, können wir den Ausdruck $a^{\frac{3}{5}}$ bzw. $a^{\frac{m}{n}}$ in die Rechnung einführen. Alle Regeln für ganzzahlige Exponenten bleiben auch gültig für gebrochene Exponenten. Das gleiche Ergebnis für die Wurzelrechnung und für Potenzen mit gebrochenen Exponenten gibt uns die Berechtigung, Potenzen mit gebrochenen Exponenten zu benutzen.

Beispiele:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; \quad 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = \pm 5; \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4;$$

$$\sqrt[5]{p^7} \cdot \sqrt[5]{p^8} = \sqrt[5]{p^{15}} = p^3, \quad \text{oder} \quad \sqrt[5]{p^7} \cdot \sqrt[5]{p^8} = p^{\frac{7}{5}} \cdot p^{\frac{8}{5}} = p^{\frac{15}{5}} = p^3.$$

$$\sqrt[3]{q^2} \cdot \sqrt[4]{q^3} \cdot \sqrt[6]{q} = \sqrt[12]{q^8} \cdot \sqrt[12]{q^9} \cdot \sqrt[12]{q^2} = \sqrt[12]{q^{19}} = q\sqrt[12]{q^7}$$

(mit Hilfe von (12) und (9)) oder:

$$\sqrt[3]{q^2} \cdot \sqrt[4]{q^3} \cdot \sqrt[6]{q} = q^{\frac{2}{3}} \cdot q^{\frac{3}{4}} \cdot q^{\frac{1}{6}} = q^{\frac{8}{12}} \cdot q^{\frac{9}{12}} \cdot q^{\frac{2}{12}} = q^{\frac{19}{12}} = q^{1+\frac{7}{12}}$$
$$= q \cdot q^{\frac{7}{12}} = q\sqrt[12]{q^7}.$$

Aufgaben (Bruchpotenzen):

1. Berechne $36^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $64^{\frac{2}{3}}$; $64^{\frac{3}{2}}$; $128^{\frac{1}{7}}$; $128^{\frac{5}{7}}$; $32^{\frac{3}{5}}$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$; $(-343)^{\frac{2}{3}}$; $81^{0,5}$; $125^{-\frac{4}{3}}$; $243^{-\frac{3}{5}}$; $(-243)^{-\frac{3}{5}}$; $(-243)^{\frac{3}{5}}$; $(-243)^{-\frac{2}{5}}$; $81^{-\frac{3}{4}}$; $0{,}0081^{\frac{3}{2}}$; $0{,}008^{\frac{2}{3}}$.

2. Berechne auf 2 Arten $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$; $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$; $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{5}{6}}$; $\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt[5]{y^4} \cdot \sqrt[5]{y^9}$; $c^{\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{5}{6}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$; $z^{\frac{1}{2}} \cdot z^{-\frac{1}{4}}$; $x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{12}}$; $y^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{y}$; $(3\frac{3}{8})^{\frac{1}{3}} \cdot (2\frac{10}{27})^{\frac{2}{3}}$.

3. Schreibe die Gleichungen (11), (12), (13) in Form von Bruchpotenzen.

III. Logarithmen.

1. Begriff des Logarithmus.

Wird in der Potenzgleichung $a^n = c$ die Basis a gesucht, so schreibt man (nach II): $a = \sqrt[n]{c}$; daher ist die Wurzelrechnung eine Umkehrung der Potenzrechnung. Sucht man aber den Wert von n, so schreibt man $n = {}^a\log c$ (gelesen: „n ist der Logarithmus von c für die Basis a“).

c heißt der Numerus oder die Zahl oder der Logarithmand. Der Logarithmus n selbst ist der Exponent der entsprechenden Potenzgleichung. Die Logarithmenrechnung ist also eine zweite Umkehrung der Potenzrechnung. Aus $5^3 = 125$ folgt also die Wurzelgleichung $5 = \sqrt[3]{125}$ und die logarithmische Gleichung $3 = {}^5\log 125$. Ebenso ist $4 = {}^3\log 81$, weil $3^4 = 81$ ist. Bilde weitere Beispiele. Es gibt also 7 Rechnungsarten, 3 Hauptrechnungsarten und 4 Umkehrungen, nämlich:

	Hauptrechnungsarten.	Umkehrungen.
1. Stufe.	Addition.	Subtraktion.
2. Stufe.	Multiplikation.	Division.
3. Stufe.	Potenzieren.	Wurzelrechnung (Radizieren). Logarithmenrechnung.

Im folgenden werden nur Logarithmen mit der Basis 10 betrachtet, die sogenannten gemeinen oder Briggsschen Logarithmen. Bei ihnen läßt man in der Schreibung die Basis weg und schreibt an Stelle der Potenzgleichung $10^n = c$ die logarithmische Gleichung $n = \log c$ (statt $n = {}^{10}\log c$). So ist $\log 10000 = 4$, weil $10^4 = 10000$ ist, ebenso $\log 1000 = 3$, $\log 100 = 2$, $\log 10 = 1$, beachte besonders $\log 1 = 0$, weil $10^0 = 1$ ist.

Unter dem (gemeinen) Logarithmus einer Zahl c versteht man also die Zahl, mit der man 10 potenzieren muß, um die Zahl c zu erhalten. Aus dieser Definition folgt:

$$10^{\log c} = c. \tag{15}$$

2. Sätze über das Rechnen mit Logarithmen.

Die folgenden Sätze werden am klarsten, wenn man die in Frage kommenden Gleichungen einmal als Potenzgleichungen und einmal als logarithmische Gleichungen schreibt. Es sei $a = 10^x$; $b = 10^y$, also $a \cdot b = 10^{x+y}$ (nach [1]); $\frac{a}{b} = 10^{x-y}$ (nach [2]). Logarithmisch geschrieben lauten diese Gleichungen:

$$x = \log a;\quad y = \log b;\quad x + y = \log(a \cdot b);\quad x - y = \log\left(\frac{a}{b}\right).$$

Setzt man die Werte für x und y aus den beiden ersten logarithmischen Gleichungen in die beiden letzten ein, so ergibt sich:

$$\mathbf{\log(a \cdot b) = \log a + \log b,} \tag{16}$$

$$\mathbf{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.} \tag{17}$$

Es ist also $\log 10000 = \log (10 \cdot 1000) = \log 10 + \log 1000 = 1 + 3 = 4$; $\log 100 = \log (\frac{100000}{1000}) = \log 100000 - \log 1000 = 5 - 3 = 2$; $\log 6 = \log 2 + \log 3$; $\log 11 = \log 55 - \log 5$.

Ebenso erhält man aus $10^x = a$, $10^{xn} = a^n$, $10^{\frac{x}{n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ die drei logarithmischen Gleichungen $x = \log a$, $xn = \log (a^n)$; $\frac{x}{n} = \log \sqrt[n]{a}$. Wird der Wert von x aus der ersteren Gleichung in die beiden letzten eingesetzt, so ergibt sich:

(18) $$\log (a^n) = n \log a,$$

(19) $$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$$

So ist z. B. $\log 10000 = \log (10^4) = 4 \log 10 = 4 \cdot 1 = 4$; $\log \sqrt[3]{1000000} = \frac{1}{3} \log 1000000 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$; $\log (2^5) = 5 \log 2$; $\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log 7$.

Die Gleichungen (16) bis (19) können in Worten so ausgesprochen werden:

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren. Der Log. eines Bruches ist gleich der Differenz der Log. von Zähler und Nenner. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden geteilt durch den Wurzelexponenten. Beachte: $\log (a \pm b)$ läßt sich nicht vereinfachen.

Geht man also von der Zahl zum Logarithmus über, so erniedrigt sich jede Rechnungsart um eine Stufe. Aus der Multiplikation wird eine Addition, aus der Division eine Subtraktion, aus dem Potenzieren eine Multiplikation, aus dem Radizieren eine Division. Hierin liegt die große Bedeutung der Logarithmenrechnung.

Beispiele:

$$\log (xyz) = \log x + \log y + \log z; \log \tfrac{15}{19} = \log 15 - \log 19;$$

$$\log \frac{u \cdot v}{w} = \log u + \log v - \log w; \log 5^4 = 4 \log 5; \log \sqrt[5]{a^8} = \tfrac{1}{5} \log a^8 = \tfrac{8}{5} \log a;$$

$$\log \sqrt[5]{3 \sqrt[4]{6}} = \tfrac{1}{5} \log (3 \cdot \sqrt[4]{6}) = \tfrac{1}{5} (\log 3 + \log \sqrt[4]{6}) = \tfrac{1}{5} (\log 3 + \tfrac{1}{4} \log 6).$$

Aufgaben:

1. Schreibe folgende Potenzgleichungen als logarithmische Gleichungen: $2^3 = 8$; $7^2 = 49$; $10^1 = 10$; $10^6 = 1000000$; $10^0 = 1$; $5^4 = 625$.

2. Schreibe die Logarithmen folgender Ausdrücke nach Gl. (16) — (19) in anderer Form: $5rs$; $\frac{m \cdot n}{p \cdot q}$; $\frac{26}{37}$; $\frac{12}{5 \cdot 11}$; 8^3; a^x; $(a \cdot b)^y$; $\left(\frac{r \cdot s}{t}\right)^n$; $\sqrt[5]{12}$; $\sqrt[7]{b}$; $\sqrt[n]{x^p}$; $\sqrt[3]{6\sqrt{7}}$; $25^{\frac{3}{4}}$; $(23 \cdot 31)^{\frac{2}{3}}$.

3. Kennziffer und Mantisse der Briggsschen Logarithmen.

Für alle ganzzahligen Potenzen von 10 haben die Logarithmen einfache Werte. So ist:

$\log 10000 = 4$; denn $10^4 = 10000$	$\log 1 = 0$; denn $10^0 = 1$
$\log 1000 = 3$; denn $10^3 = 1000$	$\log 0{,}1 = -1$; denn $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$\log 100 = 2$; denn $10^2 = 100$	$\log 0{,}01 = -2$; denn $10^{-2} = 0{,}01$
$\log 10 = 1$; denn $10^1 = 10$	$\log 0{,}001 = -3$; denn $10^{-3} = 0{,}001$

Für alle dazwischenliegenden Zahlen können Näherungswerte für die Logarithmen berechnet werden. So ist z. B. log 36 kleiner als $\log 100 = 2$ und größer als $\log 10 = 1$, d. h. $1 < \log 36 < 2$, also ist log 36 eine Dezimalzahl, die vor dem Komma eine 1, dahinter noch einen Bruch hat. Dasselbe gilt für jede zweistellige Zahl von 11 bis 99. Auf 4 Stellen abgerundet ist $\log 36 = 1{,}5563$. Die Zahl vor dem Komma heißt Kennziffer, der Dezimalbruch hinter dem Komma heißt Mantisse (Zugabe). Für jede ganze Zahl ist die Kennziffer leicht angebbar. Sie ist, wie gezeigt, für alle zweistelligen Zahlen 1, entsprechend ist sie für alle dreistelligen Zahlen, die zwischen 100 und 1000 liegen, 2. Alle vierstelligen Zahlen haben demnach die Kennziffer 3, alle einstelligen Zahlen von 1 bis 9 haben die Kennziffer 0. Allgemein gilt: Alle n-stelligen Zahlen haben die Kennziffer $n - 1$. Man erkennt leicht, daß die Dezimalstellen hinter einer Zahl ohne Einfluß auf die Kennziffer des Logarithmus der Zahl sind. So hat z. B. log 589,2743 die Kennziffer 2 wie auch log 589.

Viel schwieriger als die Kennziffer ist die Mantisse zu bestimmen. Die Mantissen für die Zahlen hat man in einer Tafel, der Logarithmentafel, zusammengestellt. Da die Mantisse i. a. eine unendliche Dezimalzahl ist, hat man sie auf 4, 5, 7 ... Stellen abgerundet und unterscheidet so 4, 5, 7, ... stellige Logarithmentafeln. Wir behandeln hier nur 4stellige Tafeln; für andere Tafeln sind die Betrachtungen ähnlich.

Der große Vorteil der Briggsschen Logarithmen besteht darin, daß die Mantisse für den Logarithmus einer Zahl auch für den Logarithmus der 10, 100, 1000, ... fachen Zahl unverändert bleibt, ebenso für den Logarithmus von $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... der Zahl. Es ist nämlich $\log 10a = \log 10 + \log a = 1 + \log a$; $\log 100\,a = \log 100 + \log a = 2 + \log a$, usf., ebenso $\log \frac{a}{10} = \log a - \log 10 = \log a - 1$; $\log \frac{a}{100} = \log a - \log 100$

$= \log a - 2$, usf., d. h. $\log a$, $\log 10\,a$, $\log 100\,a$, $\log \frac{a}{10}$, $\log \frac{a}{100}$, usf. unterscheiden sich nur um eine ganze Zahl, d. h. sie haben die gleiche Mantisse, aber verschiedene Kennziffern.

So ist z. B. $\log 20 = 1{,}3010$; $\log 200 = \log(20 \cdot 10) = \log 20 + \log 10 = \log 20 + 1 = 2{,}3010$; $\log 2000 = \log 20 + \log 100 = 3{,}3010$; $\log 2 = \log \frac{20}{10} = \log 20 - \log 10 = \log 20 - 1 = 1{,}3010 - 1 = 0{,}3010$; $\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3010 - 1$. Hierfür könnte man schreiben $\log 0{,}2 = -0{,}6990$, aber man läßt die Differenz stehen, behält also die positive Mantisse bei und fügt die negative Kennziffer zu. Entsprechend wird $\log 0{,}02 = \log 2 - \log 100 = 0{,}3010 - 2$, $\log 0{,}002 = 0{,}3010 - 3$, usf.

Aus den vorausgehenden Überlegungen ergibt sich, daß $\log 1 = 0$ ist, daß die Logarithmen aller Zahlen über 1 positiv, die aller Zahlen unter 1 negativ sind. Bei letzteren behält man die positive Mantisse bei und fügt die negative Kennziffer zu; diese ist, wie die Beispiele zeigen, gleich der Zahl der Nullen vor der ersten geltenden Ziffer unter Einrechnung der Null vor dem Komma. So hat z. B. $\log 0{,}000731$ die Kennziffer -4.

4. Gebrauch der Logarithmentafel.[1])

In der ersten Spalte der Logarithmentafel stehen unter N (Numerus) die zweistelligen Zahlen von 11 bis 99. Daneben stehen unter 0 die Mantissen der zugehörigen Logarithmen. Die Kennziffer ist durch die in 3. gefundenen Regeln bekannt. So steht z. B. neben 36 die Mantisse 5563; da die Kennziffer 1 ist, ist $\log 36 = 1{,}5563$. Ebenso findet man $\log 50 = 1{,}6990$, $\log 5 = 0{,}6990$, $\log 790 = 2{,}8976$ (vgl. $\log 79$); $\log 94000 = 4{,}9731$; $\log 0{,}0053 = 0{,}7243 - 3$.

Handelt es sich um die Mantisse einer dreistelligen Zahl, so liest man die beiden ersten Stellen unter N ab, die dritte Stelle sucht man am oberen Rand der Tafel und geht von dieser senkrecht nach unten bis zu der Zeile, in der die beiden ersten Stellen stehen; dort ist die Mantisse angegeben. Diese ist z. B. für $\log 245$ (s. Tafel) 3892, also ist $\log 245 = 2{,}3892$; $\log 811 = 2{,}9090$; $\log 811000 = 5{,}9090$; $\log 0{,}0811 = 0{,}9090 - 2$; $\log 0{,}00746 = 0{,}8727 - 3$.

Hat die Zahl vier Stellen, so ist die Mantisse nicht unmittelbar zu finden. Man findet sie durch Einschalten (Interpolieren) aus den beiden benachbarten Mantissen. Beispiel: $\log 2174$ hat die Kennziffer 3, die Mantisse liegt zwischen der von $\log 2170$ und $\log 2180$, also zwischen 3365 und 3385. Geht man im Numerus um 10 Einheiten der letzten Stelle weiter, gerechnet von der kleineren Zahl, so hat man im

1) Besonders zu empfehlen ist die vierstellige Logarithmentafel von Schülke, Verlag von B. G. Teubner.

Logarithmus um 20 Einheiten der letzten Stelle fortzuschreiten; geht man also im Numerus um 1 Einheit weiter, so hat man im Logarithmus um $\frac{20}{10} = 2$ Einheiten fortzuschreiten; da der Numerus um 4 Einheiten über der kleineren Zahl liegt, liegt die gesuchte Mantisse um $4 \cdot 2 = 8$ Einheiten über der kleineren Mantisse; sie ist also $3365 + 8 = 3373$, d. h. $\log 2174 = 3{,}3373$. Ist allgemein die vierte Stelle im Numerus n, die Differenz der beiden Mantissen D (Einheiten der letzten Stelle), so sind zu der kleineren Mantisse $d = \frac{D}{10} \cdot n$ Einheiten zu addieren; d. h. das Produkt aus $\frac{1}{10}$ der Differenz der beiden Nachbarmantissen und der vierten Stelle im Numerus ist zu der kleineren Mantisse zu addieren.

Beispiele: $\log 6344 = 3{,}8024$ ($D = 7$; $n = 4$; $d = 0{,}7 \cdot 4 = 2{,}8 \approx 3$); $\log 2{,}738 = 0{,}4375$ ($D = 16$, $n = 8$; $d = 1{,}6 \cdot 8 \approx 13$). Zur Berechnung von d hat man zuweilen auch besondere Täfelchen; am Kopfe steht der Wert von D, links n, rechts daneben d. Hat die Zahl mehr als vier Stellen, so wird vorher auf 4 Stellen abgerundet, z. B. $\log 39927 \approx \log 39930 = 4{,}6013$.

Soll zu einem gegebenen Logarithmus der Numerus gefunden werden, so ist der umgekehrte Weg einzuschlagen. Ist z. B. gegeben $\log x = 1{,}6335$, so sucht man zu der Mantisse 6335 den Numerus 43 und setzt das Komma mit Rücksicht auf die Kennziffer, also $x = 43$. $\log x = 4{,}9405$ liefert für den Numerus die Ziffernfolge 872; mit Rücksicht auf die Kennziffer wird $x = 87200$. $\log x = 0{,}8482 - 2$ liefert $x = 0{,}0705$.

Ist die Mantisse nicht in der Tafel enthalten, so ist wieder einzuschalten. Ist die Differenz der beiden benachbarten Mantissen D Einheiten der letzten Stelle, die Differenz der gegebenen Mantisse und der nächstkleineren Mantisse d, so ist die gesuchte vierte Stelle des Numerus $n = \frac{10\,d}{D}$, während man die drei ersten Ziffern des Numerus aus der kleineren Mantisse findet. Die vierte Stelle im Numerus ist also der Quotient aus der zehnfachen Differenz von der gegebenen Mantisse und der nächstkleineren Mantisse geteilt durch die Differenz der benachbarten Mantissen der Tafel. Führe die Überlegung im einzelnen durch.

Beispiel: $\log x = 0{,}8145$; $x = 6{,}524$ ($D = 7$, $d = 3$, $n = \frac{30}{7} \approx 4$). Auch hier können die erwähnten Täfelchen benutzt werden. Jedoch ist jetzt die rechts stehende Zahl bekannt und die linke gesucht. Weitere Beispiele: $\log x = 6{,}5070$; $x = 3214000$ ($D = 14$, $d = 5$; $n = \frac{50}{14} \approx 4$). $\log x = 0{,}7793 - 2$; $x = 0{,}06016$. $\log x = 0{,}1925$; $x = 1{,}558$.

Suche stets zuerst die Ziffernfolge aus der Mantisse und setze dann das Komma nach dem Wert der Kennziffer.

Aufgaben:

1. Bestimme den Logarithmus folgender Zahlen: 87; 44; 9; 70; 321; 548; 2,9; 4,77; 0,08; 0,439; 7486; 2982; 4,688; 3,515; 0,7702; 0,005371; 367400; 57298; 47,043.

2. Suche zu folgenden Logarithmen den Numerus: 1,3222; 0,6021; 5,4200; 0,1461 — 3; 0,8597; 0,9759 — 1; 4,8280; 3,5681; 2,9910, 0,4711 — 3; 5,8118; 0,3410 — 1; 4,9901; 1,8923; 1,7155.

5. Rechnen mit Logarithmen.

Da die Mantissen abgerundete Zahlenwerte sind, führen Rechnungen mit Hilfe von Logarithmen nicht zu absolut genauen Ergebnissen. I. a. werden die drei ersten Ziffern genau, während die vierte Ziffer um 1—2 Einheiten abweichen kann. Bei 5- und 7stelligen Tafeln wird das Ergebnis entsprechend genauer. Einige Beispiele mögen das Rechnen mit Logarithmen veranschaulichen.

1.
$$\begin{aligned} x &= 583 \cdot 7{,}48 \\ \log x &= \log 583 + \log 7{,}48 \\ \log 583 &= 2{,}7657 \\ \log 7{,}48 &= 0{,}8739 \\ \hline \log x &= 3{,}6396 \\ x &= 4361. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x &= 0{,}384 \cdot 0{,}07482 \\ \log x &= \log 0{,}384 + \log 0{,}07482 \\ \log 0{,}384 &= 0{,}5843 - 1 \\ \log 0{,}07482 &= 0{,}8740 - 2 \\ \hline \log x &= 1{,}4583 - 3 \\ \log x &= 0{,}4583 - 2 \\ x &= 0{,}02873. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x &= 86{,}38 : 19{,}25 \\ \log x &= \log 86{,}38 - \log 19{,}25 \\ \log 86{,}38 &= 1{,}9364 \\ \log 19{,}25 &= 1{,}2845 \\ \hline \log x &= 0{,}6519 \\ x &= 4{,}487. \end{aligned}$$

4.
$$x = \frac{459 \cdot 2{,}683}{17{,}4 \cdot 0{,}9824} = \frac{Z}{N}$$

$$\log x = \log 459 + \log 2{,}683 - (\log 17{,}4 + \log 0{,}9824)$$

$$\begin{aligned} \log 459 &= 2{,}6618 \\ \log 2{,}683 &= 0{,}4286 \\ \hline \log Z &= 3{,}9004 \\ \log N &= 1{,}2328 \\ \hline \log x &= 1{,}8576 \\ x &= 72{,}05. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 17{,}4 &= 1{,}2405 \\ \log 0{,}9824 &= 0{,}9923 - 1 \\ \hline \log N &= 1{,}2328 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x &= 53{,}8 : 2367 \\ \log x &= \log 53{,}8 - \log 2367 \\ \log 53{,}8 &= 1{,}7308 \\ \log 2367 &= 3{,}3742 \end{aligned}$$

Da der Subtrahend größer ist als der Minuend, wird die Kennziffer des Minuenden um so viel vergrößert, daß die Subtraktion ausführbar ist; der Fehler wird durch eine angehängte negative Kennziffer ausgeglichen; also:

$$\begin{aligned} \log 53{,}8 &= 3{,}7308 - 2 \\ \log 2367 &= 3{,}3742 \\ \hline \log x &= 0{,}3566 - 2 \\ x &= 0{,}02273. \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x &= 0{,}837 : 0{,}009418 \\ \log x &= \log 0{,}837 \\ &\quad - \log 0{,}009418 \\ \log 0{,}837 &= 0{,}9227 - 1 \\ \log 0{,}009418 &= 0{,}9740 - 3 \end{aligned}$$

Hierfür ist zu setzen (vgl. 5.):

$$\begin{aligned} \log 0{,}837 &= 1{,}9227 - 2 \\ \log 0{,}009418 &= 0{,}9740 - 3 \\ \hline \log x &= 0{,}9487 + 1 \\ \log x &= 1{,}9487 \\ x &= 88{,}86. \end{aligned}$$

Bei der Subtraktion negativer Kennziffern ist zu beachten:

$$(-2) - (-3) = -2 + 3 = +1.$$

7.
$$\begin{aligned} x &= 56{,}8^4 \\ \log x &= 4 \cdot \log 56{,}8 \\ \log 56{,}8 &= 1{,}7543 \\ \log x &= 7{,}0172 \\ x &= 10\,405\,000. \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x &= 0{,}3164^3 \\ \log x &= 3 \cdot \log 0{,}3164 \\ \log 0{,}3164 &= 0{,}5003 - 1 \\ \log x &= 1{,}5009 - 3 \\ \log x &= 0{,}5009 - 2 \\ x &= 0{,}03169. \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3846} \\ \log x &= \tfrac{1}{2} \log 3846 \\ \log 3846 &= 3{,}5850 \\ \tfrac{1}{2} \log 3846 &= 1{,}7925 \\ x &= 62{,}01. \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[5]{100} \\ \log x &= \tfrac{1}{5} \log 100 \\ \log 100 &= 2{,}0000 \\ \tfrac{1}{5} \log 100 &= 0{,}4000 \\ x &= 2{,}512. \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{0{,}00746} \\ \log x &= \tfrac{1}{3} \log 0{,}00746 \\ \log 0{,}00746 &= 0{,}8727 - 3 \\ \tfrac{1}{3} \log 0{,}00746 &= 0{,}2909 - 1 \\ x &= 0{,}1954. \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[5]{0{,}09828} \\ \log x &= \tfrac{1}{5} \log 0{,}09828 \\ \log 0{,}09828 &= 0{,}9925 - 2. \end{aligned}$$

Damit die negative Kennziffer bei der Division eine ganze Zahl ergibt, ist zu schreiben:

$$\begin{aligned} \log 0{,}09828 &= 3{,}9925 - 5 \\ \tfrac{1}{5} \log 0{,}09828 &= 0{,}7985 - 1 \\ x &= 62{,}87. \end{aligned}$$

13. $x = \frac{35,8}{0,843^2} - \frac{4,37 \cdot 8,2}{1,55}$

$x = A - B$, wo $A = \frac{35,8}{0,843^2}$;

$B = \frac{4,37 \cdot 8,2}{1,55} = \frac{Z}{N}$

$$\begin{aligned}
\log 35,8 &= 1,5539 \\
2 \log 0,843 &= 0,8516 - 1 \\
\hline
\log A &= 1,7023 \\
A &= 50,39 \\
\log 4,37 &= 0,6405 \\
\log 8,2 &= 0,9138 \\
\hline
\log Z &= 1,5543 \\
\log N = \log 1,55 &= 0,1903 \\
\hline
\log B &= 1,3640 \\
B &= 23,12 \\
x &= 27,27.
\end{aligned}$$

14. $2^x = 35$ (Exponentialgleichung)

$\log (2^x) = \log 35$ oder

$x \log 2 = \log 35$

$x = \frac{\log 35}{\log 2} = \frac{1,5441}{0,3010} = \frac{Z}{N}$

$$\begin{aligned}
\log Z &= 0,1886 \\
\log N &= 0,4786 - 1 \\
\hline
\log x &= 0,7100 \\
x &= 5,129.
\end{aligned}$$

Aufgaben:

1. $4,937 \cdot 2,683 \cdot 0,914$.

2. $23,96 : 0,1835$.

$0,01762 : 0,6687$.

4. $\frac{34,59 \cdot 72,4}{18,47 \cdot 0,08874}$.

5. $\sqrt{329}$; $\sqrt{4,869}$; $\sqrt{0,173}$; $\sqrt{22,37}$; $\sqrt{126000}$; $\sqrt{0,004182}$; $\sqrt{2,683}$, $\sqrt{509,6}$; $\sqrt{0,0721}$; $\sqrt{0,456}$.

6. $\sqrt[3]{700}$; $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{0,8}$; $\sqrt[3]{256}$.

7. $\sqrt[5]{12}$; $\sqrt[12]{5}$; $\sqrt[7]{8888}$; $\sqrt[4]{0,6184}$.

8. $4,32^5$; $0,668^2$; $2,55^3$; $0,068^4$.

9. $\sqrt[5]{1,843^2 \cdot 2,7^3}$.

10. $\frac{2,698}{0,0974} + \frac{382,3}{4,13^2}$.

11. $17,36 \cdot \sqrt[3]{19,9}$.

12. $17,36 + \sqrt[3]{19,9}$.

13. $\frac{127}{311}\sqrt{129}$.

14. $\sqrt{\frac{941}{0,386}}$.

15. $\sqrt[3]{\frac{12,86}{49,37}}$.

16. $\frac{459 \cdot \sqrt[3]{11}}{1,638\sqrt{0,9}}$.

17. Berechne x aus: $2^x = 100$; $1,05^x = 4$; $1,2^x = 12$.

IV. Reihen.

1. Begriff der Reihe.

Unter einer Reihe versteht man eine gesetzmäßige Folge von Zahlen. Die Zahlen heißen die Glieder der Reihe. Die Reihe heißt steigend, wenn jedes folgende Glied größer ist als das vorausgehende; im entgegengesetzten Falle heißt die Reihe fallend. Beispiele für Reihen: $1, 2, 3, 4, \ldots$; $25, 36, 49, 64, \ldots$; $2, 6, 18, 54, \ldots$; $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$; $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2. Arithmetische Reihe erster Ordnung.

Unter ihr versteht man eine Reihe, bei der die Differenz aus einem Glied vermindert um das vorausgehende stets denselben konstanten Wert liefert; dieser heißt die Differenz der Reihe. Die arithmetische Reihe hat also die Form:

$$(20) \qquad a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \ldots a+(n-1)\,d.$$

a heißt das Anfangsglied der Reihe, d ist ihre Differenz. Hat die Reihe n Glieder, so ist das letzte Glied (Endglied):

$$(21) \qquad z = a + (n-1)\,d.$$

Um den Wert der Summe s aller n Glieder zu finden, schreibt man die Summe einmal in der natürlichen und einmal in der umgekehrten Reihenfolge untereinander und faßt je zwei übereinanderstehende Glieder zusammen. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} s &= [a] + [a+d] + \cdots + [a+(n-2)\,d] + [a+(n-1)\,d] \\ s &= [a+(n-1)\,d] + [a+(n-2)\,d] + \cdots + [a+d] + [a]. \\ \hline 2s &= [2a+(n-1)\,d] + [2a+(n-1)\,d] + \cdots + [2a+(n-1)\,d] \\ &\quad + [2a+(n-1)\,d]. \end{aligned}$$

$$(22) \qquad s = [2a+(n-1)\,d]\,\frac{n}{2} = an + \frac{n(n-1)}{2}\,d.$$

Mit Benutzung von (21) nimmt (22) die Form an:

$$(23) \qquad s = (a+z)\,\frac{n}{2}.$$

In der arithmetischen Reihe ist jedes Glied das arithmetische Mittel zu den beiden Nachbargliedern, d. h. die halbe Summe des $(m-1)^{\text{ten}}$ und des $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliedes ergibt das m^{te} Glied. In der Tat ist: $\frac{1}{2}[a+(m-2)d + a + md] = a + (m-1)d.$

Zeige dies auch an bestimmten Zahlenbeispielen.

3. Geometrische Reihe.

Unter ihr versteht man eine Reihe, bei der der Quotient aus einem Gliede durch das vorausgehende stets denselben konstanten Wert hat; dieser heißt der Quotient der Reihe. Die geometrische Reihe von n Gliedern hat also die Form:

$$(24) \qquad a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 \ldots aq^{n-1}.$$

a heißt das Anfangsglied der Reihe, q ist der Quotient.

Das n^{te} Glied der Reihe (Endglied) ist:

$$(25) \qquad z = a \cdot q^{n-1}.$$

Um den Wert der Summe aller Glieder zu finden, vermindert man die $q$fache Summe um die Summe selbst und erhält so:

$$\begin{array}{l} sq = \qquad aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n \\ s \;= a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ \hline sq - s = aq^n - a \quad \text{oder} \quad s(q-1) = a(q^n - 1) \end{array}$$

(26) $$s = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Jedes Glied der geometrischen Reihe ist mittlere geometrische Proportionale (oder das geometrische Mittel) zu den beiden Nachbargliedern, d. h. die Quadratwurzel aus dem Produkt des $(m-1)^{\text{ten}}$ Gliedes mit dem $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliede liefert das m^{te} Glied. In der Tat ist:

$$\sqrt{a \cdot q^{m-2} \cdot aq^m} = aq^{m-1}.$$

Ist $q > 1$, so ist die Reihe steigend, ist $0 < q < 1$, so ist sie fallend.

4. Fallende unendliche geometrische Reihe.

Gleichung (26) läßt sich in die Form bringen:

(26a) $$s = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Setzen wir nun voraus, daß in der geometrischen Reihe $q < 1$ ist und daß der Wert von n unbegrenzt wächst, so wird der Minuend auf der rechten Seite unverändert bleiben, da er nicht von n abhängt, der Subtrahend dagegen enthält den Faktor q^n, der mit wachsendem n beliebig klein wird. Wächst n über alle Grenzen, so nähert sich q^n und damit auch $\frac{a}{1-q} \cdot q^n$ beliebig der Null. Wir schreiben $\lim\limits_{n \to \infty} (q^n) = 0$. Somit erhalten wir für die fallende unendliche geometrische Reihe [d. h. für $q < 1$; $n \to \infty$] den Wert:

(27) $$s_\infty = \frac{a}{1-q}.$$

Beispiel: Die Summe der Reihe $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ ist $\frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$.

Ist q negativ, etwa $q = -q_1$ und zugleich $q_1 < 1$, so wechseln die Vorzeichen der Glieder der 2. Reihe, und die Summe der unendlichen Reihe hat den Wert: $s'_\infty = \frac{a}{1 + q_1}$.

Beispiel: $6 - 4 + \frac{8}{3} - \frac{16}{9} + \frac{32}{27} - + \cdots = \frac{6}{1 + \frac{2}{3}} = 3\frac{3}{5}$.

Warum läßt sich ein Summenwert für die steigende unendliche geometrische Reihe nicht angeben? [Beispiel: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$]

5. Graphische Darstellung der Reihen.

Trägt man auf einem Strahl vom Anfangspunkt die Strecken 1, 2, 3, ... ab und errichtet in den gefundenen Punkten Lote von der Größe a, $a + d$, $a + 2d$, ..., so stellen diese die Glieder einer arithmetischen Reihe dar. Die Endpunkte der Lote liegen in einer Geraden. (Fig. 1.)

Haben die Lote der Reihe nach die Größen $a, aq, aq^2, \ldots$, so stellen diese die Glieder einer geometrischen Reihe

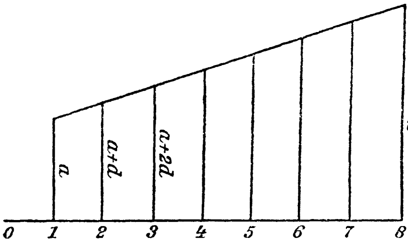


Fig. 1.

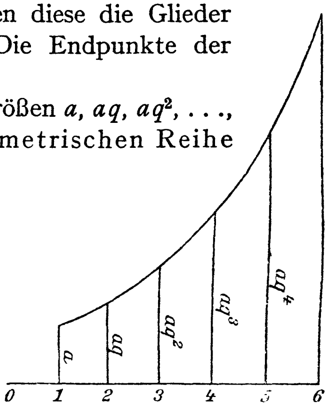


Fig. 2.

dar. Die Endpunkte der Lote stellen aber keine Gerade dar. sondern sie liegen auf einer krummen Linie, die bei der steigenden Reihe immer stärker ansteigt. (Fig. 2.) Stelle auch die fallende geometrische Reihe dar.

Für die fallende unendliche geometrische Reihe kann noch folgende Darstellung benutzt werden. (Fig. 3.) Im Endpunkte A eines Strahles errichtet man das Lot $AA_1 = a$ und trägt auf dem Strahl $AB = a$ ab. Von B trägt man in gleicher Richtung die Strecke $BC = aq$ ab und errichtet in B das Lot $BB_1 = aq$, usf. Dann stellen sowohl die Längen der Lote, als auch ihre Abstände die Glieder der Reihe dar. Zieht man durch die Endpunkte der Lote die Parallelen B_1A_2, C_1B_2, ... zu dem Strahl, so wird:

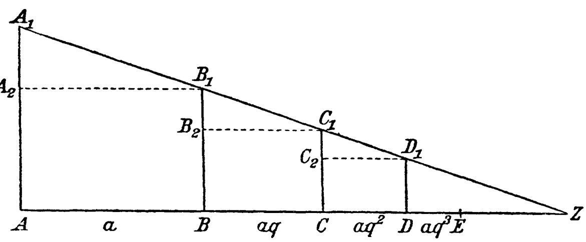


Fig 3.

$$\operatorname{tg} A_1B_1A_2 = \frac{A_1A_2}{B_1A_2} = \frac{a - aq}{a} = 1 - q;$$

$$\operatorname{tg} B_1C_1B_2 = \frac{aq - aq^2}{aq} = 1 - q \text{ usf.,}$$

d. h.: $$\sphericalangle A_1B_1A_2 = \sphericalangle B_1C_1B_2 = \ldots;$$

also liegen die Punkte $A_1 B_1 C_1 \ldots$ in einer **Geraden**. Trifft diese den Strahl in Z, so ist:

$$AZ = a + aq + aq^2 + \ldots = s_\infty.$$

Da ferner:
$$\frac{A_1 A_2}{B_1 A_2} = \frac{A_1 A}{AZ} = 1 - q$$

ist, so wird: $\frac{a}{s_\infty} = 1 - q$ oder $s_\infty = \frac{a}{1-q}$ (vgl. (34)).

6. Aufgaben über Reihen.

1. Wie groß ist die Summe aller Zahlen von 1 bis 100, aller geraden Zahlen von 2 bis 1000, aller ungeraden Zahlen von 17 bis 319?

2. Wievielmal schlägt eine Uhr in 24 Stunden, a) wenn sie nur ganze Stunden schlägt, *b*) wenn sie auch Viertelstunden durch 1, 2, 3, 4 Schläge anzeigt?

3. Der Erfinder des Schachspiels soll sich als Belohnung für das erste Feld des Brettes ein Weizenkorn ausgebeten haben, für das zweite Feld 2, für das dritte 4, für das vierte 8 Körner usf. bis zum 64. Felde. Wieviel Weizenkörner waren dies insgesamt? Wieviel hl sind dies, wenn 1 hl 1,6 Millionen Körner enthält?

4. Verwandle folgende unendliche Dezimalbrüche in gemeine Brüche: $0{,}\overline{3}\ldots$; $0{,}\overline{54}\ldots$; $0{,}\overline{370}\ldots$; $0{,}4\overline{18}\ldots$; $0{,}26\overline{1}\ldots$

[Anleitung: $0{,}4\overline{18}\cdots = 0{,}4181818\cdots = \frac{4}{10} + \frac{18}{1000} + \frac{18}{100\,000} + \cdots$

$$= \frac{4}{10} + \frac{\frac{18}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{4}{10} + \frac{2}{110} = \frac{23}{55}\Big].$$

5. A ist gegen B um 144 m voraus; A legt in der Sekunde 1 m, B 3 m zurück. Wenn also B zu der Stelle gelangt, wo A am Anfang war, so ist A noch um 48 m voraus. Gelangt B zu dieser Stelle, so ist A noch um 16 m voraus usf. B wird also zwar stets näher an A herankommen, ihn aber nie erreichen. Zeige den Trugschluß. Wann und wo wird A von B wirklich eingeholt?

6. Stelle folgende Reihen in einem geeigneten Maßstab graphisch dar:

a) $7;\ 7\frac{1}{2};\ 8;\ 8\frac{1}{2};\ \ldots\ 11.$ b) $24{,}3;\ 16{,}2;\ 10{,}8;\ 7{,}2;\ \ldots$

c) $11;\ 10\frac{1}{3};\ 9\frac{2}{3};\ 9;\ \ldots$ d) $(\frac{4}{5});\ (\frac{4}{5})^2;\ (\frac{4}{5})^3;\ (\frac{4}{5})^4;\ \ldots$

7. Summiere folgende Reihen:

a) $3;\ 4\frac{1}{2};\ 6;\ 7\frac{1}{2};\ \ldots\ 16\frac{1}{2}.$ b) $8{,}2;\ 5{,}1;\ 2{,}0;\ -1{,}1;\ \ldots -16{,}6.$

c) $12;\ 6;\ 3;\ \frac{3}{2};\ \ldots\ \frac{3}{64}.$ d) $7;\ 7 \cdot 1{,}1;\ 7 \cdot 1{,}1^2;\ \ldots\ 7 \cdot 1{,}1^{10}.$

e) $24;\ -12;\ 6;\ -3;\ 1\frac{1}{2};\ \ldots$

8. Eine geometrische Reihe hat das erste Glied 5, das zweite Glied 4. Wie heißt das 20. Glied? Wie groß ist die Summe aller 20 Glieder?

9. Wie groß ist die Summe aller Glieder in 8), wenn die Reihe unendlich ist?

10. In einer arithmetischen Reihe ist die Differenz 3, das letzte Glied 32 und die Zahl der Glieder 10. Wie groß ist das erste Glied und die Summe?

11. In einer arithmetischen Reihe ist die Differenz 2, das letzte Glied 32 und die Summe der Glieder 270. Wie groß sind das erste Glied und die Anzahl der Glieder?

12. Welche unendliche geometrische Reihe hat die Summe **a)** $\frac{2}{1 - 0{,}05}$; **b)** $\frac{120}{1 + 0{,}06}$?

7. Zusammengesetzte Reihen.

Werden je zwei entsprechende Glieder der arithmetischen Reihe $1, 2, 3, \ldots (n-1), n$ und der geometrischen Reihe $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-2}, aq^{n-1}$ miteinander multipliziert, so erhält man die zusammengesetzte Reihe $a, 2aq, 3aq^2, \ldots, (n-1)aq^{n-2}, naq^{n-1}$ von n Gliedern, deren Summe S_1 berechnet werden soll; es ist:

$$(28) \qquad S_1 = a + 2aq + 3aq^2 + \cdots + (n-1)aq^{n-2} + naq^{n-1}.$$

Wir subtrahieren ähnlich wie bei der geometrischen Reihe hiervon den $q$fachen Wert:

$$S_1 q = aq + 2aq^2 + 3aq^3 + \cdots + (n-1)aq^{n-1} + naq^n$$

und erhalten:

$$S_1 - S_1 q = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} - naq^n$$

oder mit Hilfe von (26):

$$S_1(1-q) = a\frac{q^n - 1}{q-1} - naq^n; \qquad \text{daraus folgt:}$$

$$(29) \qquad S_1 = \frac{n \cdot a \cdot q^n}{q-1} - a\frac{q^n - 1}{(q-1)^2}.$$

Werden je zwei entsprechende Glieder der beiden Reihen $n, (n-1), (n-2), \ldots 2, 1$ und $a, aq, aq^2, \ldots aq^{n-2}, aq^{n-1}$ miteinander multipliziert, so ergibt sich die zusammengesetzte Reihe $na, (n-1)aq, (n-2)aq^2, \ldots 2aq^{n-2}, aq^{n-1}$. Ihre Summe S_2 wird gefunden, indem sie von ihrem $q$fachen Wert subtrahiert wird, also:

$$\begin{array}{lrl}
(30) & S_2 = & na + (n-1)aq + (n-2)aq^2 + \cdots + 2aq^{n-2} + aq^{n-1} \\
& S_2 q = & naq + (n-1)aq^2 + \cdots + 3aq^{n-2} + 2aq^{n-1} + aq^n \\
\hline
& S_2 q - S_2 = & -an + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n
\end{array}$$

Die rechte Seite ohne das erste Glied kann nach (26) zusammengefaßt werden. $S_2 (q - 1) = -an + aq \frac{q^n - 1}{q - 1}$, also:

$$S_2 = aq \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2} - \frac{an}{q - 1}. \tag{31}$$

Beispiele: 1. Wie lautet die Reihe (28) für $a = 5$, $q = 3$, $n = 10$? Wie groß ist ihre Summe? Reihe: 5, 30, 135, 540, ... 984150. Die Summe ist $S_1 = \frac{10 \cdot 5 \cdot 3^{10}}{3 - 1} - 5 \cdot \frac{3^{10} - 1}{(3 - 1)^2} = 1402415$.

2. Desgl. für die Reihe (30), wenn $a = 2$, $q = 4$, $n = 6$ ist? Reihe: 12, 40, 128, 384, 1024, 2048. $S_2 = 8 \cdot \frac{4^6 - 1}{9} - \frac{2 \cdot 6}{3} = 3636$.

V. Prozentrechnung.[1])

1. Prozente vom Hundert (v. H.).

Unter 1% (gelesen: 1 Prozent) oder 1 v. H. (vom Hundert) des Grundwertes G versteht man den Betrag $\frac{G}{100}$; p% des Grundwertes sind also:

$$P = \frac{G}{100} \cdot p. \tag{32}$$

p heißt der Prozentsatz, P der Prozentwert. Hat also ein Kaufmann eine Ware zu $G = 600$ *RM* eingekauft und $p\% = 7\%$ daran gewonnen, so ist sein Gewinn $P = 42$ *RM*. Der Verkaufspreis beträgt mehr als G; er ist $G + P = M = 642$ *RM* (vermehrter Wert). Hätte er 7% verloren, so wäre der Verlust wiederum $P = 42$ *RM*; der Verkaufspreis wäre aber weniger als G, nämlich $G - P = W = 558$ *RM* (verminderter Wert). Es ist also allgemein beim Grundwert G, beim Prozentsatz p und beim Prozentwert P der verminderte Wert:

$$W = G - P = G - \frac{G}{100} p = G\left(1 - \frac{p}{100}\right). \tag{33}$$

Ebenso wird der vermehrte Wert:

$$M = G + P = G + \frac{G}{100} \cdot p = G\left(1 + \frac{p}{100}\right). \tag{34}$$

100% des Grundwertes ist der Grundwert selber; der verminderte Wert ist $(100 - p)$%, der vermehrte Wert $(100 + p)$% des Grundwertes. Die Berechnung aus Grundwert und Prozentsatz heißt Prozentrechnung vom Hundert (v. H.).

1) Vgl. hierzu: Feller-Odermann, Teil I, S. 110—150.

Beispiele:

G	$p\,\%$	P	W	M
560 ℛℳ Einkaufspreis	4 % Gewinn	22,40 ℛℳ Gewinn	—	582,40 ℛℳ Verkaufspreis
96 kg Brutto	$3\frac{1}{4}$ % Tara	3,120 kg Tara	92,880 kg Netto	—
6800 ℛℳ Kapital	$6\frac{1}{4}$ % Zinsen	425 ℛℳ Zinsen	—	7225 ℛℳ Kapital u. Zinsen
16,50 ℛℳ Ladenpreis	20 % Rabatt	3,30 ℛℳ Rabatt	13,20 ℛℳ Nettopreis	—

2. Prozente im Hundert (i. H.).

Ist der verminderte Wert W und der Prozentsatz p gegeben, so findet man den Grundwert G aus (33) zu:

$$(35)\qquad G = W : \left(1 - \frac{p}{100}\right) = W : \frac{100 - p}{100} = W \cdot \frac{100}{100 - p}$$

und hieraus den Prozentwert P zu:

$$(36)\quad P = G - W = W \cdot \frac{100}{100 - p} - W = \frac{p \cdot W}{100 - p} = \frac{W \cdot p}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{100}}.$$

Der Ausdruck $P = \frac{Wp}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{100}}$ ist aber nach (27) die Summe einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{W \cdot p}{100}$ und dem Quotienten $\frac{p}{100} < 1$. Also ist:

$$(37)\qquad P = \frac{Wp}{100} + \frac{Wp}{100} \cdot \frac{p}{100} + \frac{Wp}{100} \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{Wp}{100} \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^3 + \cdots$$

Das erste Glied ist p % (v. H.) des verminderten Wertes; es ist kleiner als P. Jedes folgende Glied ist p % (v. H.) des vorausgehenden. Die Glieder nehmen rasch ab, zumal bei kleinem Prozentsatz; meist sind alle Glieder vom 4. oder 5. ab ohne Einfluß auf die Rechnung. Die Berechnung aus dem verminderten Wert heißt Prozentrechnung im Hundert (i. H.). Sie kann nach (6) durch wiederholte Anwendung der Rechnung v. H. gelöst werden (Korrekturmethode).

Beispiel: Nach Abzug von $4\frac{1}{2}$ % Tara bleibt ein Nettogewicht von 592,100 kg. Wie groß sind Bruttogewicht und Tara?

a) elementar:

W ist $(100 - p)\,\%$ vom Grundwert.

$95\frac{1}{2}\,\%$ v. Bruttog.		$=$	592,100 kg
$1\,\%$ „	„	$=$	592,100 kg : $95\frac{1}{2}$
$1\,\%$ „	„	$=$	6,200 „
$100\,\%$ „	„	$=$	620 „
Bruttogewicht		$=$	620 „

Tara = 620 kg — 592,100 kg = 27,900 kg.

b) nach der Korrekturmethode:

$4\frac{1}{2}\,\%$	v. 592,100 kg	ist	26,644$_5$ kg
$+\,4\frac{1}{2}\,\%$	„ 26,644 „	„	1,199 „
$+\,4\frac{1}{2}\,\%$	„ 1,199 „	„	0,054 „
$+\,4\frac{1}{2}\,\%$	„ 0,054 „	„	0,002$_4$ „
	Tara	$=$	27,900 kg

Die weiteren Glieder sind ohne Einfluß.

Bruttogewicht = 592,100 kg + 27,900 kg = 620 kg.

3. Prozente auf Hundert (a. H.).

Ist der vermehrte Wert M und der Prozentsatz P gegeben, so spricht man von Prozenten auf Hundert (a. H.). Aus (34) ergibt sich der Grundwert:

$$G = M : \left(1 + \frac{p}{100}\right) = M : \frac{100 + p}{100} = M \cdot \frac{100}{100 + p}, \qquad \text{also:}$$

$$(38) \qquad P = M - G = M - \frac{100\,M}{100 + p} = \frac{M p}{100 + p} = \frac{M p}{100} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}.$$

Der Ausdruck $\frac{Mp}{100} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$ stellt wieder die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe dar, deren Anfangsglied $\frac{Mp}{100}$, deren Quotient aber negativ $q = -\frac{p}{100}$ ist. Also lautet die Reihe:

$$P = \frac{Mp}{100} + \frac{Mp}{100}\left(-\frac{p}{100}\right) + \frac{Mp}{100} \cdot \left(-\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{Mp}{100}\left(-\frac{p}{100}\right)^3 + \cdots \text{ oder:}$$

$$(39) \quad P = \frac{Mp}{100} - \frac{Mp}{100} \cdot \frac{p}{100} + \frac{Mp}{100} \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^2 - \frac{Mp}{100}\left(\frac{p}{100}\right)^3 + - \cdots$$

Die Vorzeichen der Glieder wechseln; das erste Glied ist $p\,\%$ (v. H.) des vermehrten Wertes; das ist offenbar zu viel. Das zweite Glied ist $p\,\%$ (v. H.) vom ersten Glied, usf. Die Korrekturmethode erfordert also ein abwechselndes Addieren und Subtrahieren der Prozente i. H.

Beispiel:

Einschließlich $3\frac{1}{3}\,\%$ Provision stellt sich eine Ware auf 880,40 *RM*; wie groß ist die Provision und der reine Wert der Ware?

a) elementar:

M ist $(100 + p)$ % vom Grundwert.

$103\frac{1}{3}$ % d. Grundw.	$= 880{,}40$ ℛℳ	
1 % „ „	$= 880{,}40$ „	$: 103\frac{1}{3}$
1 % „ „	$= 8{,}52$ „	
100 % „ „	$= 852$ „	

reiner Wert = 852 ℛℳ, Provision = 28,40 ℛℳ.

b) Korrekturmethode:

$3\frac{1}{3}$ % v. 880,40 ℛℳ	$=$	29,35 ℛℳ
$-3\frac{1}{3}$ % „ 29,35 „	$=$	0,98 „
Rest	$=$	28,37 ℛℳ
$+3\frac{1}{3}$ % v. 0,98 „	$=$	0,03 „
Provision	$=$	28,40 ℛℳ

reiner Wert = 880,40 ℛℳ − 28,40 ℛℳ = 852 ℛℳ.

[Reichhaltiges Aufgabenmaterial findet sich bei Feller-Odermann a. a. O.]

B. Zinseszinsrechnung.

I. Einfache Zinsen.[1])

Unter Zinsen versteht man die Vergütung für die leihweise Überlassung eines Geldbetrages, der das Kapital genannt wird. Die Berechnung der Zinsen erfolgt proportional dem Kapital und der Zeit. Werden für je 100 ℛℳ Kapital jährlich p ℛℳ Zinsen bezahlt, so sagt man, das Kapital sei zu p % ausgeliehen. p heißt der Zinsfuß oder Prozentsatz. (Zuweilen wird auch ein Prozentsatz für einen Bruchteil eines Jahres vereinbart.) Für das Kapital 1 wird demnach jährlich der Zinsbetrag $\frac{p}{100}$ gezahlt, für das Kapital K der Betrag:

$$z_1 = \frac{K \cdot p}{100}. \tag{1}$$

Man findet also die jährlichen Zinsen, indem man $\frac{1}{100}$ des Kapitals mit dem Prozentsatz multipliziert. So bringen 6282 ℛℳ zu $4\frac{1}{2}$ % jährlich $62{,}82 \cdot 4{,}5 = 282{,}69$ ℛℳ Zinsen.

Die Zinsen z_n in n Jahren sind das $n$fache der jährlichen Zinsen, also ist:

$$z_n = \frac{K \cdot p \cdot n}{100}. \tag{2}$$

So bringen 1850 ℛℳ zu 4 % in 1 Jahr 6 Monaten ($= 1\frac{1}{2}$ Jahr) $18{,}50 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 111$ ℛℳ Zinsen.

In der Zinseszinsrechnung wird statt des Prozentsatzes p manchmal auch der wahre Zinsfuß i gegeben, der angibt, welche Zinsen vom Kapital 1 bezahlt werden. Da das Kapital 100 jährlich die Zinsen p

1) Über einfache Zinsen vgl. Feller-Odermann, Teil I, S. 150 u. f.

bringt, so erhält man für das Kapital 1 die Zinsen $\frac{p}{100}$. Es ist also $i = \frac{p}{100}$. Also bringt das Kapital K jährlich die Zinsen:

$$z_1 = K \cdot i. \tag{1a}$$

Die Zinsen in n Jahren sind dann:

$$z_n = K \cdot i \cdot n. \tag{2a}$$

So sind die Zinsen von 6200 fl. zum wahren Zinsfuß $i = 0{,}04$ (d. h. 4%) in $\frac{3}{4}$ Jahren $6200 \cdot 0{,}04 \cdot \frac{3}{4} = 186$ fl.

Umgekehrt gestatten die Gleichungen (1), (2), (1a), (2a) die Berechnung der Größen K, n, p, i, wenn die übrigen Größen der Gleichungen bekannt sind. Man findet leicht:

$$K = \frac{100\, z_1}{p} = \frac{100\, z_n}{p \cdot n} = \frac{z_1}{i} = \frac{z_n}{i \cdot n}. \tag{3}$$

$$n = \frac{100\, z_n}{K \cdot p} = \frac{z_n}{K \cdot i}. \tag{4}$$

$$p = \frac{100\, z_1}{K} = \frac{100\, z_n}{K \cdot n}. \tag{5}$$

$$i = \frac{z_1}{K} \quad = \frac{z_n}{K \cdot n}. \tag{6}$$

Beispiele:

1. Ein Kapital K, das zu 4% in $\frac{3}{4}$ Jahren 16,20 *RM* Zinsen bringt, hat nach (3) den Wert $K = \frac{100\, z_n}{p \cdot n} = \frac{1620}{4 \cdot \frac{3}{4}} = 540$ *RM*.

2. Ein Kapital von 1680 Fr., das bei $5\frac{1}{2}$% 123,20 Fr. Zinsen bringt, war nach (4) $n = \frac{123{,}20 \cdot 100}{1680 \cdot 5{,}5} = \frac{4}{3}$ Jahre (= 1 Jahr 4 Monate) ausgeliehen.

3. Der Zinsfuß, zu dem 4380 *RM* in 8 Monaten (= $\frac{2}{3}$ Jahr) 102,20 *RM* Zinsen tragen, ist nach (5) $p = \frac{10220}{4380 \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}5$,; oder der wahre Zinsfuß ist nach (6) $i = \frac{102{,}20}{4380 \cdot \frac{2}{3}} = 0{,}035$.

Werden die Zinsen erst am Ende der Leihzeit von n Jahren zugleich mit dem Kapital zurückgezahlt, so beträgt die Rückzahlung:

$$K_e = K + z_n = K + \frac{K p n}{100} = K\left(1 + \frac{pn}{100}\right) \text{ bzw. } K_e = K(1 + i\,n). \tag{7}$$

Die in diesem Abschnitt behandelten Zinsen heißen **einfache Zinsen**. Sie werden i. a. nur für ein Jahr oder Bruchteile eines Jahres berechnet. So hat auch Gleichung (7) nur für diese kurzen Zeitabschnitte Bedeutung. Zeitangaben in Monaten und Tagen sind in Bruchteile eines Jahres umzurechnen, damit die obigen Gleichungen benutzt werden können.

II. Zinseszinsen.

Kommen Schuldner und Gläubiger überein, daß die Zinsen am Ende des Jahres nicht zurückbezahlt, sondern zum Kapital hinzugefügt und im nächsten Jahre mitverzinst werden, so sagt man, das Kapital sei auf Zinseszinsen (Zins auf Zins, verbundener Zins) ausgeliehen. Zwar bestimmt § 248 des Bürgerlichen Gesetzbuches: „Eine im voraus getroffene Vereinbarung, daß fällige Zinsen wieder Zinsen tragen sollen, ist nichtig.“ Es werden jedoch so viele Ausnahmen zugelassen, daß die Berechnung von Zinseszinsen in weitem Umfange doch gestattet ist.

Die Zinseszinsrechnung kann als fortgesetzte Anwendung der einfachen Zinsrechnung aufgefaßt werden, wie das folgende Beispiel zeigt. Wie groß ist ein Kapital von 20000 ℛℳ mit Zinsen und Zinseszinsen zu 5 % nach 3 Jahren?

20000.—	ℛℳ	Anfangskapital.
1000.—	„	Zinsen im 1. Jahr zu 5 %.
21000.—	ℛℳ	Endwert des Kapitals nach 1 Jahr.
1050.—	„	Zinsen im 2. Jahr (5 % von 21000 ℛℳ).
22050.—	ℛℳ	Endwert des Kapitals nach 2 Jahren.
1102.50	„	Zinsen im 3. Jahr (5 % von 22050 ℛℳ).
23152.50	ℛℳ	Endwert des Kapitals nach 3 Jahren.

Die Berechnung von einfachen Zinsen hätte nach Gleichung (7) ergeben $K_e = K\left(1 + \frac{pn}{100}\right) = 20000\left(1 + \frac{5 \cdot 3}{100}\right) = 23000$ ℛℳ. Der Unterschied wird mit jedem folgenden Jahr größer. Da aber die Rechnung für eine größere Zahl von Jahren recht mühselig wird, benutzt man ein anderes Verfahren.

III. Grundgleichung der Zinseszinsrechnung.

Nach (1) haben die Zinsen des Kapitals K_0 nach 1 Jahr bei p % den Wert $\frac{K_0 \cdot p}{100}$, das Kapital mit Zinsen ist also nach 1 Jahr:

$$K_1 = K_0 + \frac{K_0 p}{100} = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0(1 + i), \text{ oder wenn:}$$

(8) $$1 + \frac{p}{100} = 1 + i = q \qquad \text{gesetzt wird:}$$

(9) $$K_1 = K_0 \cdot q.$$

q heißt der Aufzinsungsfaktor (oder Zinsfaktor); ist z. B. $p = 3$, so ist $i = 0{,}03$; $q = 1{,}03$; ist $p = 4\frac{1}{3}$, so ist $i = 0{,}0433\ldots$, $q = 1{,}0433\ldots$

Will man also den Wert eines Kapitals (mit Zinsen) nach Verlauf eines Jahres feststellen, so kann man entweder die jährlichen Zinsen zum Kapital addieren oder man kann das Kapital mit dem Zinsfaktor multiplizieren. Der erste Weg ist bei der einfachen Zinsrechnung üblich, der zweite bei der Zinseszinsrechnung. Zwischen Kapital und Zinsen wird kein Unterschied mehr gemacht, sobald die Zinsen zugefügt sind. Wir sagen, K_0 sei das Anfangskapital, K_1 sei der Wert des Kapitals nach einem Jahr; denn der Schuldner, der am Anfang des Jahres das Kapital K_0 empfangen hat, hat am Ende des Jahres das Kapital $K_1 = K_0 \cdot q$ zurückzuzahlen. Behält der Schuldner das Kapital noch ein weiteres Jahr, so hat es am Anfang des zweiten Jahres den Wert $K_1 = K_0 q$, im Verlauf eines Jahres wird es aber nach unserer Überlegung $q$mal so groß, also ist der Wert am Ende des zweiten Jahres $K_2 = K_1 \cdot q = K_0 q^2$; entsprechend ist der Wert nach 3 Jahren $K_3 = K_2 q = K_0 q^3$ usf. Nach n Jahren hat also das Kapital K_0 den Wert:

$$K_n = K_0 \cdot q^n. \tag{10}$$

K_n heißt der Endwert des Kapitals K_0 nach n Jahren; er wird gefunden durch Multiplikation des Anfangskapitals mit der n^{ten} Potenz des Aufzinsungsfaktors.

Das Beispiel in II. würde nach (10) folgende Lösung erfahren:

$$K_3 = K_0 \cdot q^3 = 20000 \cdot 1{,}05^3 = 20000 \cdot 1{,}157625 = 23152{,}50 \text{ RM.}$$

Aufgabe:

Welchen Wert hat das Kapital von 3646 RM bei 6%iger Verzinsung nach 12 Jahren?

Es ist:

$$\begin{aligned} K_{12} &= 3646 \cdot 1{,}06^{12} \\ \log 1{,}06 &= 0{,}02531 \\ \hline 12 \log 1{,}06 &= 0{,}3037 \\ \log 3646 &= 3{,}5618 \\ \hline \log K_{12} &= 3{,}8655 \\ K_{12} &= 7337. \end{aligned}$$

NB. Die Logarithmen der Zinsfaktoren werden meist in den Tafeln mit einer Stelle mehr angegeben als die übrigen Logarithmen. (Warum?)

IV. Berechnung von Anfangskapital, Zinsfuß und Zeit.

Gleichung (10) enthält vier Größen; sind drei davon bekannt, so kann die vierte gefunden werden.

1. Sind K_n, q und n bekannt, so ergibt sich:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} = K_n \cdot v^n, \tag{11}$$ wenn:

$$\frac{1}{q^n} = v^n; \quad \frac{1}{q} = v \tag{12}$$

gesetzt wird; v ist der reziproke Wert von q und heißt Diskontierungsfaktor (oder Abzinsungsfaktor).

Nach (11) wird also der Anfangswert des Kapitals gefunden, indem man den Endwert mit der n^{ten} Potenz des Diskontierungsfaktors multipliziert oder durch die n^{te} Potenz des Aufzinsungsfaktors dividiert. Bezeichnet man die Berechnung des Endwertes nach n Jahren aus dem Anfangswert als Vorwärtsdatieren, die umgekehrte Berechnung als Rückwärtsdatieren, so läßt sich das Ergebnis von (10) und (11) so aussprechen:

Ein Kapital wird um n Jahre vorwärtsdatiert, indem man es mit der n^{ten} Potenz des Aufzinsungsfaktors multipliziert; es wird um n Jahre rückwärtsdatiert, indem man es mit der n^{ten} Potenz des Diskontierungsfaktors multipliziert oder durch die n^{te} Potenz des Aufzinsungsfaktors dividiert.

Aufgabe:

Welches Kapital wächst bei 5% in 9 Jahren an zu 785 *RM*?

Es ist: $$K_0 = \frac{785}{1{,}05^9},$$

$$\begin{aligned} \log 785 &= 2{,}8949 \\ 9 \cdot \log 1{,}05 &= 0{,}1907 \\ \hline \log K_0 &= 2{,}7042 \\ K_0 &= 506; \text{ das Anfangskapital beträgt } 506\ \mathcal{RM}. \end{aligned}$$

2. Um den Zinsfuß zu bestimmen, berechnet man aus (10) zunächst $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$ und dann aus (8) $p = (q - 1) \cdot 100$, also:

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}; \quad p = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right) \cdot 100. \tag{13}$$

Beispiel: Bei welchem Zinsfuß wachsen 1000 fl. in 22 Jahren an zu 2370 fl.? Es ist:

$$q = \sqrt[22]{\frac{2370}{1000}} = \sqrt[22]{2{,}37}$$

$$\log 2{,}37 = 0{,}3747$$

$$\tfrac{1}{22} \log 2{,}37 = 0{,}0170 = \log q$$

$$q = 1{,}04, \text{ also } p = 100\,(1{,}04 - 1) = 4.$$

Das Kapital war zu 4% ausgeliehen.

3. Um den Wert von n zu finden, wird (10) logarithmiert (vgl. A (18)).

$$\log K_n = \log K_0 + \log q^n = \log K_0 + n \log q, \qquad \text{also:}$$

$$n \cdot \log q = \log K_n - \log K_0 \qquad \text{oder:}$$

$$n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log q}. \tag{14}$$

Beispiel: In wieviel Jahren wachsen 211 $\mathcal{RM}$ bei $5\frac{1}{3}\%$ zu 734,28 $\mathcal{RM}$ an?

$$n = \frac{\log 734{,}28 - \log 211}{\log 1{,}0533\ldots} = \frac{2{,}8659 - 2{,}3243}{0{,}02257} = \frac{0{,}5416}{0{,}02257} = 24.$$

V. Relativer Zinsfuß.

Bei der einfachen Zinsrechnung ist es allgemein üblich, bei 4% Jahreszinsfuß für das Halbjahr 2%, für das Vierteljahr 1%, für den Monat $\frac{1}{3}\%$ usf. zu berechnen, allgemein für $\frac{1}{s}$ Jahr $\frac{p}{s}\%$. $\frac{p}{s}$ heißt der relative Zinsfuß für $\frac{1}{s}$ Jahr. Daß aber 4% Jahreszins nicht mit 2% Halbjahreszins übereinstimmt, erkennt man leicht an folgendem Beispiel: 100 $\mathcal{RM}$ wachsen bei 4% Jahreszins in einem Jahre an zu $K_1 = 104$ $\mathcal{RM}$. Dagegen wachsen 100 $\mathcal{RM}$ bei 2% Halbjahreszins im ersten Halbjahr an zu 102 $\mathcal{RM}$; dazu kommen im zweiten Halbjahr 2% von 102 $\mathcal{RM}$, d. h. 2,04 $\mathcal{RM}$ Zinsen; der Endwert nach einem Jahr ist also 104,04 $\mathcal{RM}$. Ebenso findet man bei vierteljährlicher Verzinsung zu 1% nach dem ersten Vierteljahr den Wert 101 $\mathcal{RM}$, nach dem zweiten $101 + 1{,}01 = 102{,}01$ $\mathcal{RM}$, nach dem dritten 103,0301 $\mathcal{RM}$, nach dem vierten $104{,}060401 \approx 104{,}06$ $\mathcal{RM}$, nämlich $100\,(1 + \frac{1}{100})^4 = 100 \cdot 1{,}01^4$. Bei monatlicher Verzinsung ergibt sich 104,074 $\mathcal{RM}$. Es ist also die Halbjahresverzinsung zu 2% gleichwertig einer Jahresverzinsung zu 4,04%, die Vierteljahresverzinsung zu 1% gleichwertig mit 4,060401% Jahresverzinsung.

Werden allgemein die Zinsen eines Kapitals K_0 jedesmal nach Verlauf von $\frac{1}{s}$ Jahr mit $\frac{p}{s}\%$ (entsprechend $p\%$ im Jahr) zum Kapital geschlagen, so hat das Kapital nach $\frac{1}{s}$ Jahr den Wert $K_0\left(1 + \frac{p}{100\,s}\right)$, nach $\frac{2}{s}$ Jahren $K_0\left(1 + \frac{p}{100\,s}\right)^2$, nach $\frac{3}{s}$ Jahren $K_0\left(1 + \frac{p}{100\,s}\right)^3$, usf.; nach $\frac{s}{s} = 1$ Jahr ist der Wert $K_0\left(1 + \frac{p}{100\,s}\right)^s$; dieser Wert ist, wie auch das Zahlenbeispiel oben zeigt, größer als $K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Der relative Zinsfuß $\frac{p}{s}$ für $\frac{1}{s}$ Jahr ist also für den Gläubiger günstiger als der Zinsfuß p für das Jahr.

Beispiel: Zu welcher Summe wachsen 800 $\mathcal{RM}$ bei der Jahresverzinsung zu 6% und zu welcher bei Vierteljahresverzinsung zu $1\frac{1}{2}\%$ in 10 Jahren an? Erster Fall: $800 \cdot 1{,}06^{10} = 1432{,}68$ $\mathcal{RM}$; zweiter Fall (40 Vierteljahre): $800 \cdot 1{,}015^{40} = 800 \cdot 1{,}814018 = 1451{,}21$ $\mathcal{RM}$.

VI. Konformer (gleichwertiger) Zinsfuß.

Es werde nun die Frage gestellt, welcher Zinsfuß für das Halbjahr, Vierteljahr, ... $\frac{1}{s}$ Jahr zu wählen ist, damit das Kapital nach Verlauf eines Jahres ebensogroß ist wie bei einer jährlichen Verzinsung zu p %. Der so gefundene Zinsfuß heißt der konforme (gleichwertige) Zinsfuß für $\frac{1}{s}$ Jahr; er sei p_1 für $\frac{1}{s}$ Jahr. Das Kapital K_0 wächst nach $\frac{1}{s}$ Jahr an zu $K_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)$, nach $\frac{s}{s}=1$ Jahr zu $K_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^s$; dieser Wert soll nach unserer Annahme mit dem Wert von K_0 nach 1 Jahr bei p % Jahreszins, also mit $K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, übereinstimmen. Es ist also:

$$\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^s = 1+\frac{p}{100} = q, \quad \text{d. h.} \quad 1+\frac{p_1}{100} = \sqrt[s]{q} \qquad \text{oder:}$$

$$p_1 = (\sqrt[s]{q}-1)\cdot 100 = \left(\sqrt[s]{1+\frac{p}{100}}-1\right)\cdot 100. \tag{15}$$

Ist z. B. $p = 4$, $q = 1{,}04$, $s = 2$, so ergibt sich der halbjährliche Zinsfuß $p_1 = (\sqrt{1{,}04}-1)\cdot 100 = 1{,}98$. In der Tat erhält man bei halbjährlicher Verzinsung zu 1,98 % nach einem Jahre das gleiche Endkapital wie bei 4 %iger Verzinsung im Jahr; denn 100 *RM* bringen im ersten Halbjahr zu 1,98 % halbjährlich 1,98 *RM* Zinsen; das Kapital ist also nach $\frac{1}{2}$ Jahr 101,98 *RM*; im zweiten Halbjahr betragen die Zinsen 1,98 % von 101,98 *RM*, d. h. 2,02 *RM*; also ist das Endkapital nach 2 Halbjahren 101,98 *RM* + 2,02 *RM* = 104 *RM*, genau so viel, als wenn das Kapital 1 Jahr zu 4 % ausgeliehen worden wäre.

VII. Graphische Darstellung.

Fig. 4 gibt ein Bild von dem Anwachsen eines Kapitals $K_0 = 1$, $p = 3$ im Verlauf von 100 Jahren. Die Gerade stellt das Anwachsen eines Kapitals bei einfachen Zinsen dar, die Kurve bei Berechnung von Zinseszinsen. (Vergleiche und begründe den Zusammenhang beider Kurven mit Fig. 1 und 2.) Im Anfang weichen die beiden Linien kaum voneinander ab, später aber sehr erheblich. Nach 100 Jahren ist das Kapital bei einfachen Zinsen vervierfacht, bei Zinseszinsen aber auf mehr als den 19fachen Wert angestiegen.

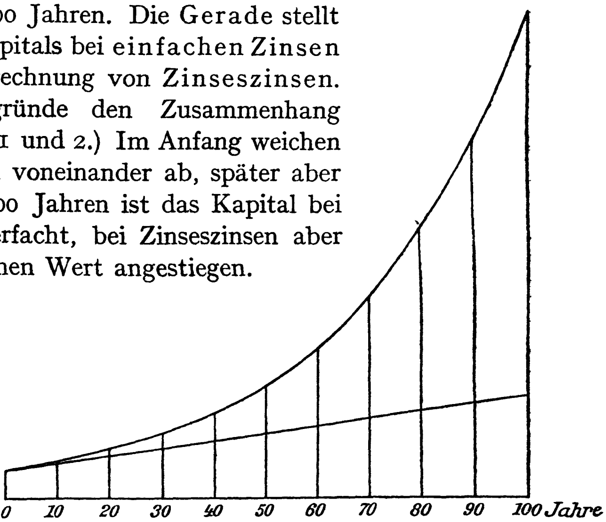


Fig. 4.

VIII. Gebrochene Werte von n.

Eigentlich ist (10) nur für eine ganze Anzahl n von Jahren abgeleitet. Ist n eine gebrochene Zahl, etwa $n = m + v$, wo m eine ganze Zahl, ν ein echter Bruch ist, so ist es meist üblich, bei Berechnung des Endwertes nach n Jahren, den Wert des Kapitals nach m Jahren durch die Zinseszinsformel zu bestimmen, das Anwachsen für den weiteren Bruchteil ν eines Jahres aber nach der einfachen Zinsrechnung.

Es wird also nach (7) und (10):

$$K_n' = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\nu \cdot p}{100}\right). \tag{16}$$

Der Unterschied gegenüber dem durch die Zinseszinsformel (10) gefundenen Wert:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{m+\nu} \tag{17}$$

ist aber nur gering.

Beispiel: Zu welcher Summe wachsen 630 ℛℳ in $3\frac{1}{2}$ Jahren bei 4 % an?

1. $K_n' = 630 \cdot 1{,}04^3 \left(1 + \frac{0{,}5 \cdot 4}{100}\right) = 630 \cdot 1{,}04^3 \cdot 1{,}02 = 722{,}87$ ℛℳ.
2. $K_n = 630 \cdot 1{,}04^{3,5} = 722{,}70$ ℛℳ.

IX. Tabellen für die Zinseszinsrechnung.

In den vorausgehenden Betrachtungen spielen die Potenzen der Zinsfaktoren eine große Rolle. Man hat sie deshalb in großen Tabellenwerken zusammengestellt. Ein Ausschnitt davon befindet sich im Anhang. Tabelle I gibt die Werte von q^n für $p = 5\,\%$ und $p = 3{,}5\,\%$ von $n = 1$ bis $n = 40$. Tabelle II enthält die Werte von $v^n = \frac{1}{q^n}$ für die gleichen Prozentsätze. Die Zahlen der einen Tabelle sind die reziproken Werte von denen der anderen. Das Produkt zweier entsprechender Zahlen $(q^\alpha \cdot v^\alpha)$ ist 1. Die Zahlen sind auf 5 Dezimalen abgerundet. Der Gebrauch der Tafel ist leicht zu verstehen.

Beispiel 1: Zu welcher Summe wächst 1 ℛℳ bei 3,5 % in 12 Jahren an? Der Endwert ist $1{,}035^{12} = 1{,}51107 \approx 1{,}51$ ℛℳ, wie man in der Spalte $1{,}035^n$ in der Zeile 12 abliest.

Beispiel 2: Zu welcher Summe wachsen 2800 ℛℳ bei 5 % in 16 Jahren an? $K_1 = 2800 \cdot 1{,}05^{16}$; nach Tabelle I ist $1{,}05^{16} = 2{,}18287$. (Man schreibt auch häufig $\mathrm{I}^{16}_{5\%} = 2{,}18287$). Also ist $K_{16} = 2800 \cdot 2{,}18287 = 6112{,}04$ ℛℳ.

Soll umgekehrt der Wert eines Kapitals vor n Jahren berechnet werden, so benutzt man Tabelle II. So hatte z. B. 1 ℛℳ vor 10 Jahren bei 3,5 % den Wert $0{,}70892 \approx 0{,}71$ ℛℳ $[\mathrm{II}^{10}_{3,5\%} = 0{,}70892]$. 2800 ℛℳ hatten vor 11 Jahren bei 5 % den Wert $2800 \cdot v^{11} = 2800 \cdot 0{,}58468 = 1637{,}10$ *RM*. Zum gleichen Ergebnis könnte man auch mit Hilfe der Tabelle I kommen; es wäre zu setzen $2800 : 1{,}05^{11} = 2800 : 1{,}71034 = 1637{,}10$ *RM*. Da aber die Multiplikation einfacher ist als die Division, ist es ratsam, Tabelle I für das Vorwärtsdatieren, Tabelle II für das Rückwärtsdatieren zu benutzen.

Auch für Werte $n > 40$ lassen sich beide Tabellen benutzen. Es ist zu beachten, daß $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ ist. So ist der Wert eines Kapitals von 120 *RM* bei 3,5 % nach 50 Jahren $120 \cdot 1{,}035^{50} = 120 \cdot 1{,}035^{40} \cdot 1{,}035^{10} = 120 \cdot 3{,}959\,26 \cdot 1{,}41\,060 = 670{,}19$ *RM*. Ebenso ist das Kapital, das bei 3,5 % in 60 Jahren zu 1200 *RM* anwächst, $1200\, v^{60} = 1200 \cdot v^{40} \cdot v^{20} = 1200 \cdot 0{,}252\,57 \cdot 0{,}502\,57 = 152{,}32$ *RM*.

Schließlich können die Tabellen auch Verwendung finden zur Berechnung von n und p, wenigstens um angenäherte Werte zu erhalten. Es sei z. B. der Zinsfuß gesucht, der bewirkt, daß ein Kapital von 200 *RM* in 10 Jahren zu 282,12 *RM* anwächst. Nach (10) ist $200 \cdot q^{10} = 282{,}12$, also $q^{10} = 1{,}4106$; nach der Tabelle trifft dies zu für 3,5 %. Soll die Zahl der Jahre bestimmt werden, nach deren Verlauf 200 *RM* zu 645 *RM* bei 5 % angewachsen sind, so ist zu setzen $200 \cdot 1{,}05^n = 645$, also $1{,}05^n = 3{,}225$; die Tabelle I zeigt unter 5 % an, daß das Kapital 24 Jahre auszuleihen ist. Dagegen liefert die Frage, nach welcher Zeit sich ein Kapital bei 5 %iger Verzinsung verdoppelt, kein ganz genaues Ergebnis. Man erhält aus $K \cdot 1{,}05^n = 2\,K$ die Bedingung $1{,}05^n = 2$, d. h. n liegt zwischen 14 und 15. Nach 14 Jahren ist das Kapital noch nicht verdoppelt, nach 15 Jahren ist der doppelte Betrag überschritten. [Bestimme die Zeit genau mit Hilfe von (16).]

Soll schließlich die Frage beantwortet werden, zu welchem Zinsfuß ein Kapital sich in 25 Jahren verdreifacht, so folgt aus $K \cdot q^{25} = 3\,K$ oder $q^{25} = 3$ nur die Tatsache, daß der Zinsfuß zwischen 3,5 und 5 liegt. Man erkennt aber leicht, daß durch ausführlichere Tabellenwerke für weitere Prozentsätze die Grenzen für das Ergebnis sich in engere Grenzen einschließen lassen.

X. Aufgaben zur Zinseszinsrechnung mit Hilfe von Tabelle I und II.

Berechne den Wert des Kapitals K a) bei 5 %iger, b) bei 3,5 %iger Verzinsung:

1. 4000 *RM* nach 12 Jahren.
2. 6000 *RM* vor 8 Jahren.
3. 586 *RM* nach 15 Jahren.
4. 384 *RM* vor 32 Jahren.
5. 250 fl. nach 75 Jahren.
6. 186 Fr. nach 100 Jahren.
7. 1000 *RM* vor 50 Jahren.
8. 20000 \$ vor 65 Jahren.
9. 6853 £ vor 71 Jahren.

Bestimme in folgenden Aufgaben die Zeit, wenigstens angenähert, und gib an, ob Tabelle I oder II vorzuziehen ist.

10. 600 ℛℳ wachsen bei 5 % an zu 1412 ℛℳ.

11. 800 Fr. wachsen bei 3,5 % an zu 1295 Fr.

12. 31 ℛℳ wachsen bei 5 % an zu 100 ℛℳ.

13. 4088 ℛℳ wachsen bei 3,5 % an zu 10000 ℛℳ.

14. 500 $ wachsen an zu 800 $ a) bei 5 %, b) bei 3,5 %.

15. Wann werden 12000 fl. zu 18000 fl. angewachsen sein bei 5 %iger Verzinsung?

16. In welcher Zeit wird sich ein Kapital bei 3,5 % a) verdoppeln, b) verdreifachen, c) vervierfachen.

17. Desgl. bei 5 %.

18. Berechne aus den Aufzinsungsfaktoren der Tabelle I die entsprechenden Abzinsungsfaktoren der Tabelle II. Z. B. a) 2,44596; b) 3,07152; c) 5,25335; d) 1,035; e) 1,34010.

19. Berechne den Aufzinsungsfaktor aus dem Abzinsungsfaktor. Z. B. a) 0,40884; b) 0,34423; c) 0,35894; d) 0,95238; e) 0,71068.
Löse die Aufgaben auch mit Hilfe der Logarithmentafel.

XI. Aufgaben zur Zinseszinsrechnung mit Hilfe von Logarithmen.

1. Berechne den Wert eines Kapitals von 1280 ℛℳ bei $3\frac{1}{2}$% Zinseszinsen nach 20 Jahren.

2. Welches Kapital wächst bei 4% Zinseszinsen in 17 Jahren zu 2000 ℛℳ an?

3. Bei wieviel % wächst ein Kapital von 2200 ℛℳ in 12 Jahren zu 3625,23 ℛℳ an?

4. In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 5% Zinseszins?

5. Zu welcher Summe wachsen 875 ℛℳ bei $4\frac{1}{2}$% Zinseszins in 8 Jahren $4\frac{1}{2}$ Monaten an?

6. Desgl. ein Kapital von 5380 ℛℳ zu $3\frac{3}{4}$% in $12\frac{1}{2}$ Jahren?

7. Zu wieviel % wachsen 5200 ℛℳ in 60 Jahren zu 23400 ℛℳ an?

8. Bestimme in folgender Tabelle in jeder Zeile aus drei als bekannt vorausgesetzten Größen jedesmal die vierte. (20 Aufgaben.)

K_0		p	n		K_n	
1000	ℛℳ	4 %	19	Jahre	2106,85	ℛℳ
1250	„	$2\frac{1}{2}$%	32	„	2754,70	„
5896,64	„	$4\frac{1}{2}$%	12	„	10000	„
19955,50	„	6 %	20	„	64000	„
1061,54	„	$2\frac{3}{4}$%	100	„	16000	„

9. Zu welchem Werte wachsen 2000 ℛℳ in 5 Jahren an, wenn a) einfache Zinsen zu 4% berechnet werden, b) Zinseszinsen, die jährlich mit 4% zum Kapital geschlagen werden, c) Zinseszinsen, die vierteljährlich mit 1% dem Kapital zugefügt werden?

10. Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn das Kapital 25 Jahre ausgeliehen ist?

11. Zu wieviel % jährlich ist ein Kapital ausgeliehen, wenn es zur gleichen Höhe anwächst wie ein gleichgroßes, das mit $\frac{1}{4}$% monatlich verzinst wird?

12. Welcher vierteljährliche (halbjährliche) Zinsfuß entspricht einem jährlichen Zinsfuß von 6%?

13. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital mit Zinseszinsen bei a) 3%, b) $3\frac{1}{2}$%, c) 4%, d) $4\frac{1}{2}$%, e) 6%?

14. In welcher Zeit verzehnfacht sich ein Kapital bei 3% [4%]?

15. Eine Schule erhält eine Stiftung von 2000 *RM*, die erst dann verwandt werden darf, wenn sie bei $3\frac{1}{2}$%iger Verzinsung den Wert von 10000 *RM* überschritten hat. Wann ist dies der Fall?

16. Ein Kapital wird erst 12 Jahre zu $3\frac{1}{2}$%, dann noch 8 Jahre zu 4% verzinst. Zu welcher Summe ist es nach dieser Zeit angewachsen?

17. Ein Waldbestand, der auf 400000 cbm veranschlagt ist, vermehrt sich 10 Jahre hindurch um jährlich 3% des Holzbestandes vom vorausgehenden Jahr. Wie groß ist der Bestand nach 10 Jahren?

18. Ein Kapital von 2863 *RM* wird 5 Jahre 4 Monate zu 4,5% ausgeliehen. Zu welcher Summe ist es angewachsen? Welchen Unterschied liefern Gl. (16) und (17)?

19. Desgl. für 1218 *RM*, die zu 3,75% 3 Jahre 8 Monate ausgeliehen werden.

20. Jemand übergibt einer Bank 780 *RM*, die halbjährlich mit $2\frac{1}{4}$% verzinst werden. Um wieviel ist der Betrag nach 15 Jahren größer als wenn die Bank das Geld zu $4\frac{1}{2}$% jährlich verzinsen würde?

21. Welcher gleichwertige Zinsfuß entspricht einem jährlichen Zinsfuß von 5% a) im Halbjahr, b) im Vierteljahr, c) im Monat?

22. Jemand hat den Gewinn aus einer Lotterie zu $4\frac{1}{2}$% auf 10 Jahre angelegt. Nach dieser Zeit konnte er sich für das Kapital samt Zins und Zinseszins ein Haus für 55000 *RM* kaufen. Wie groß war der Gewinn?

23. Ein Vater hat eine Erbschaft von 12600 *RM* gemacht und das Geld zu 5,5% festverzinslich angelegt; nach 3 Jahren hat er noch weitere 2700 *RM* zugefügt, die ihm aber nur zu 5% verzinst werden. Nach weiteren 5 Jahren stirbt der Vater, das Geld wird unter seine vier Kinder gleichmäßig verteilt. Wieviel erhält jedes Kind?

24. Ein Kaufmann mietet ein Geschäftslokal für 3 Jahre und zahlt den Mietpreis von jährlich 1200 *RM* im voraus für die ganze Zeit. Welchem Betrag am Ende der Mietzeit würde dies entsprechen bei 6%?

25. Ein Kapital wird erst 3 Jahre mit 6%, dann weitere 2 Jahre mit 5,5%, schließlich noch 5 Jahre mit 5% verzinst und erreicht so den Wert von 11560 *RM*. Wie groß war das Kapital?

26. Ein Käufer will für ein Grundstück 22000 *RM* bar bezahlen. Ein zweiter Käufer ist bereit, sofort die Hälfte davon zu zahlen und nach 6 Jahren noch 14000 *RM*, ein dritter Käufer will nach 5 Jahren 27000 *RM* zahlen. Welches der drei Angebote ist für den Verkäufer am günstigsten, wenn $4\frac{1}{2}\%$ Zinsen gerechnet werden?

27. Sparkassen verzinsen oft nur volle Markbeträge. Berechne hiernach von Jahr zu Jahr weiterschreitend den Wert einer Einlage von 5 *RM* nach 10 Jahren und vergleiche das Ergebnis mit dem nach der Formel errechneten bei 4%.

28. Führe dasselbe für eine Einlage von 1000 *RM* durch.

29. Was folgt aus Aufgabe 27 und 28?

30. Stelle das Anwachsen eines Kapitals $K_0 = 100$ bei 5%iger Verzinsung für 30 Jahre graphisch dar a) mit einfachen Zinsen, b) mit Zinseszinsen. [Suche einen geeigneten Maßstab. Es genügt die Berechnung von K_5, K_{10}, K_{15}, ... K_{30}.] Entnimm aus der Zeichnung, nach wieviel Jahren sich das Kapital mit einfachen Zinsen und mit Zinseszinsen verdoppelt, bzw. verdreifacht, bzw. vervierfacht. Prüfe die Genauigkeit des zeichnerischen Ergebnisses durch die Rechnung.

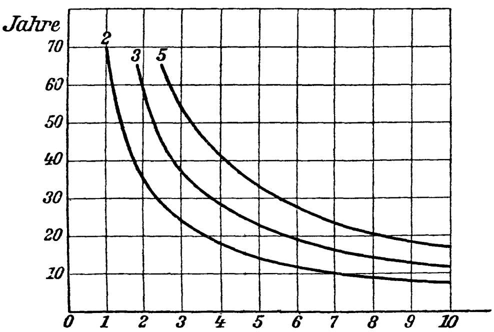


Fig. 5.

31. In Figur 5 stellt Kurve 2 die Zahl der Jahre dar, nach denen sich ein Kapital bei 1% bis 10% verdoppelt. Kurve 3 und 5 lassen entsprechend erkennen, in welcher Zeit sich ein Kapital bei den verschiedenen Prozentsätzen verdreifacht bzw. verfünffacht. Lies an den Kurven eine Reihe von Ergebnissen ab, etwa: a) In wieviel Jahren verdreifacht sich ein Kapital zu 4,5%? b) Zu welchem Zinsfuß erreicht ein Kapital in 30 Jahren den fünffachen Wert? c) Den wievielfachen Wert erreicht ein Kapital bei $5\frac{3}{4}\%$ in 20 Jahren? usf. Mache in allen Fällen die Probe durch Rechnung.

32. Stelle auf Millimeterpapier selbst die Figur 5 her; trage zugleich die Kurve ein für den $1\frac{1}{2}$fachen und für den 4fachen Wert des Kapitals. In welcher einfachen Beziehung stehen Kurve 2 und 4?

33. Stelle eine entsprechende Zeichnung her für das Rückwärtsdatieren eines Kapitals zur Beantwortung der Fragen: Wann hatte ein Kapital bei verschiedenen Prozentsätzen den halben Wert, $\frac{1}{3}$ des Wertes, usf.? Bezeichne die Kurven mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, usf. und werte die Kurven aus, entsprechend Aufg. 31.

C. Rentenrechnung.

I. Vorübung.

Bei der Rentenrechnung handelt es sich in erster Linie um die Zahlung von gleichen Beträgen in gleichen Zeitabständen. Ein Beispiel mag dies erläutern: Jemand hat 2000 $\mathcal{RM}$ in 5 Raten zu je 400 $\mathcal{RM}$ zu zahlen. Die erste Rate ist sofort fällig, jede folgende ein Jahr später, die letzte also nach 4 Jahren. Welche Summe könnte sofort an Stelle der 5 Raten bezahlt werden, wenn 5 % Zinsen berechnet werden?

Man berechnet den Jetztwert jeder Rate und addiert die so gefundenen Beträge. So erhält man nacheinander unter Benutzung von Tabelle II für die

1. Rate	400 $\mathcal{RM}$		$= 400{,}00\ \mathcal{RM}$.	
2. „	$400 \cdot v$	$= 400 \cdot 0{,}95238$	$= 380{,}95$ „	(1 Jahr zurückdatieren).
3. „	$400 \cdot v^2$	$= 400 \cdot 0{,}90703$	$= 362{,}81$ „	(2 Jahre „).
4. „	$400 \cdot v^3$	$= 400 \cdot 0{,}86384$	$= 345{,}54$ „	(3 „ „).
5. „	$400 \cdot v^4$	$= 400 \cdot 0{,}82270$	$= 329{,}08$ „	(4 „ „).

Jetztwert der 5 Raten $= S_1 = 1818{,}38\ \mathcal{RM}$.

Addiert man die nicht ausgerechneten Beträge, so erhält man:

$$S_1 = 400\,(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) = 400\,(1 + 0{,}95238 + 0{,}90703 + 0{,}86384 + 0{,}82270) = 400 \cdot 4{,}54595 = 1818{,}38\ \mathcal{RM}.$$

Schließlich kann man auch den Klammerausdruck $1 + v + v^2 + v^3 + v$ als geometrische Reihe von 5 Gliedern mit dem Anfangsglied 1 und dem Quotienten v auffassen, deren Summe nach (A 26.) den Wert hat:

$$\frac{1 - v^5}{1 - v} = \frac{1 - 0{,}78353}{1 - 0{,}95238} = \frac{0{,}21647}{0{,}04762} = 4{,}5458.$$

Also ist $S_1 = 4{,}5458 \cdot 400 = 1818{,}32\ \mathcal{RM}$.

Die drei Berechnungsarten ergeben nahezu übereinstimmend, daß die 5 Ratenzahlungen von je 400 $\mathcal{RM}$ durch die sofortige einmalige Zahlung $S_1 = 1818{,}38\ \mathcal{RM}$ ersetzt werden können.

Es soll nun untersucht werden, welche einmalige Zahlung an Stelle derselben 5 Raten nach Verlauf von 5 Jahren treten kann. Diese Ersatzsumme S_2 ist sicher größer als S_1, aber auch größer als 2000 $\mathcal{RM}$, da sie erst später gezahlt wird. Mit Hilfe von Tabelle I findet man als Endwert nach 5 Jahren für die

1. Rate $400 \cdot q^5 = 400 \cdot 1{,}27628 = 510{,}51$ ℛℳ (5 Jahre zu verzinsen).
2. „ $400 \cdot q^4 = 400 \cdot 1{,}21551 = 486{,}20$ „ (4 „ „ „).
3. „ $400 \cdot q^3 = 400 \cdot 1{,}15763 = 463{,}05$ „ (3 „ „ „).
4. „ $400 \cdot q^2 = 400 \cdot 1{,}1025 = 441{,}00$ „ (2 „ „ „).
5. „ $400 \cdot q = 400 \cdot 1{,}05 = 420{,}00$ „ (1 „ „ „).

Endwert der 5 Zahlungen $S_2 = 2320{,}76$ ℛℳ.

Addiert man die unausgerechneten Werte $400\, q^5 + 400\, q^4 + \cdots$, so erhält man in umgekehrter Reihenfolge $S_1 = 400\,(q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = 400\,[1{,}05 + 1{,}10250 + 1{,}15763 + 1{,}21551 + 1{,}27628] = 400 \cdot 5{,}80192 = 2320{,}77$ ℛℳ.

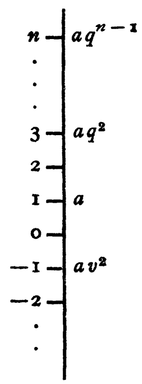
Auch hier kann wieder der Klammerausdruck als geometrische Reihe aufgefaßt werden mit der Summe $q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 1{,}05 \frac{1{,}27628 - 1}{1{,}05 - 1} = 5{,}80188$, also ist $S_2 = 400 \cdot 5{,}80188 = 2320{,}75$ ℛℳ.

Man erhält also bei den drei Berechnungsarten nahezu übereinstimmend als Ersatzwert für die Ratenzahlungen nach 5 Jahren die einmalige Zahlung von 2320,76 ℛℳ.

Das dritte Verfahren hat bei einer großen Zahl von Raten besondere Vorteile; es wird deshalb im folgenden allgemein behandelt.

II. Zeitgerade.

Eine in gleichen Zeitabständen regelmäßig wiederkehrende Zahlung vom gleichen Betrage ϱ heißt eine Rente, die einzelne Zahlung heißt Rate. Werden die Raten stets am Anfang des Zeitabschnittes (Jahres) bezahlt, so heißt die Rente vorschüssig (pränumerando), erfolgt sie am Ende, so heißt sie nachschüssig (postnumerando). Um die an verschiedenen Zeitpunkten erfolgenden Zahlungen zusammenfassen zu können, müssen sie auf den gleichen Zeitpunkt datiert werden. Am anschaulichsten läßt sich diese Rechnung mit Hilfe der Zeitgeraden ausführen.



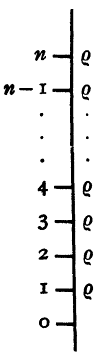
Auf einer senkrechten Geraden wird ein Punkt als Nullpunkt markiert, der die Gegenwart bedeutet. Gleiche nach oben abgetragene Strecken stellen die darauffolgenden Jahre dar; ihre Endpunkte $1, 2, 3, \ldots, n$, die an der linken Seite bezeichnet werden, entsprechen den Endpunkten des ersten, zweiten, …, n^{ten} Jahres. So bedeutet die Strecke 2 3 das dritte Jahr, der Punkt 3 das Ende des dritten oder den Anfang des vierten Jahres. Die i. a. nicht benutzten Punkte -1, $-2, \ldots$ weisen auf die Vergangenheit hin. An der rechten Seite werden die zu den betreffenden Zeitpunkten geleisteten Zahlungen (Kapitalien) angetragen. Jede Summe a kann an einem beliebigen

Zeitpunkt gestrichen werden und dafür an einen um m Jahre späteren Zeitpunkt mit dem Werte aq^m oder an einen um m Jahre früheren Zeitpunkt mit dem Werte $\frac{a}{q^m} = av^m$ eingetragen werden. [Vgl. B. III und IV, Formel (10) und (11).] So sind z. B. die in der Fig. rechts angetragenen Zahlungen völlig gleichwertig; d. h. es ist einerlei, ob ich am Ende des ersten Jahres den Betrag a zahle oder am Ende des n^{ten} Jahres (also $n - 1$ Jahre später) den Betrag aq^{n-1} oder ein Jahr vor der Gegenwart den Betrag $av^2 = \frac{a}{q^2}$, usf.

Erfolgen die Zahlungen und die Aufzinsung halbjährlich, so bedeuten die Punkte 1, 2, 3, ... je das Ende des 1., 2., 3., ... Halbjahres. Entsprechendes gilt für andere Zinstermine.

III. Nachschüssige Rente.

Jemand zahlt n Jahre, am Ende jedes Jahres den Betrag ϱ. Zu welcher Summe R_n ist die Rente am Ende des n^{ten} Jahres angewachsen?



An die Zeitgerade wird in den Punkten $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ je die Summe ϱ angetragen. Alle Zahlungen werden auf den Zeitpunkt n datiert. Die letzte Zahlung steht schon an der richtigen Stelle, die Rate ϱ vom Zeitpunkt $n - 1$ hat am Zeitpunkt n den Wert ϱq, die vom Zeitpunkt $n - 2$ den Wert $\varrho q^2, \ldots$, die Zahlung ϱ am Zeitpunkt 2 hat am Zeitpunkt n den Wert ϱq^{n-2}, die Zahlung am Zeitpunkt 1 den Wert ϱq^{n-1}. An Stelle der n einzelnen Zahlungen von je ϱ kann am Zeitpunkt n demnach die eine Zahlung:

$$\varrho + \varrho q + \varrho q^2 + \cdots + \varrho q^{n-2} + \varrho q^{n-1}$$

treten, die die Summe einer geometrischen Reihe ist mit dem Anfangsglied ϱ und dem Quotienten q. Sie hat also [nach A. (26)] den Wert:

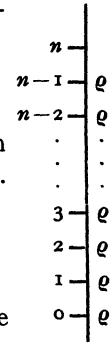
$$R_n = \varrho \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{1}$$

R_n heißt der Endwert der $n$mal nachschüssig gezahlten Rente. Zu beachten ist, daß n die Zahl der Ratenzahlungen bedeutet und daß die Berechnung für den Zeitpunkt der letzten Ratenzahlung erfolgt ist.

IV. Vorschüssige Rente.

Erfolgen die Zahlungen nicht am Ende, sondern am Anfang jedes Jahres, so sind die Raten ϱ an die Zeitpunkte $0, 1, 2, \ldots, n - 2, n - 1$ anzutragen.

Werden wieder alle Zahlungen der Reihe nach auf den Zeitpunkt n datiert, so ergibt sich hier die Summe:



$$R'_n = \varrho q + \varrho q^2 + \varrho q^3 + \cdots + \varrho q^{n-1} + \varrho q^n.$$

Man erhält also die Summe einer geometrischen Reihe von n Gliedern mit dem Quotienten q und dem Anfangsglied ϱq. Also ist:

$$R'_n = \varrho q \frac{q^n - 1}{q - 1} = R_n \cdot q, \tag{2}$$

was schon daraus hätte gefolgert werden können, daß jede Zahlung ϱ ein Jahr länger auf Zinsen steht als bei der nachschüssigen Rente. R'_n heißt der Endwert der n mal vorschüssig gezahlten Rente vom Ratenbetrag ϱ, berechnet auf das Ende des Jahres, zu dessen Anfang die letzte Zahlung erfolgt.

V. Barwert.

Häufig ist es erwünscht, den Wert einer Rente für die Gegenwart zu berechnen, den sogenannten Barwert der Rente. In diesem Falle sind alle Raten auf den Zeitpunkt 0 zu datieren. Man erhält wieder eine geometrische Reihe. Ist aber der Endwert bekannt, so läßt sich der Barwert einfacher dadurch finden, daß man den Endwert um n Jahre zurückdatiert. So ergibt sich der Barwert der nachschüssigen Rente [aus (1) mit Hilfe von B. (11)] zu:

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n} = \varrho \frac{q^n - 1}{(q-1)\, q^n}. \tag{3}$$

Entsprechend wird der Barwert der vorschüssigen Rente:

$$R'_0 = \frac{R'_n}{q^n} = \varrho q \frac{q^n - 1}{(q-1)\, q^n} = \frac{\varrho\,(q^n - 1)}{(q-1)\, q^{n-1}}. \tag{4}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $v = \frac{1}{q}$, $q = \frac{1}{v}$ können die Gleichungen für die Barwerte noch umgeformt werden. Es ist:

$$R_0 = \varrho \frac{q^n - 1}{(q-1)\, q^n} = \varrho \frac{\left(\frac{1}{v^n} - 1\right) v^n}{\left(\frac{1}{v} - 1\right)} = \varrho \frac{1 - v^n}{1 - v} \cdot v,$$

oder, da $\frac{1}{v} - 1 = q - 1 = i$ ist:

$$R_0 = \varrho \frac{1 - v^n}{i}. \tag{3a}$$

Ferner ist: $R_0' = \varrho q \dfrac{q^n - 1}{(q-1)\,q^n} = \varrho \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{v^n} - 1\right) v^n}{v\left(\dfrac{1}{v} - 1\right)} = \varrho\,\dfrac{1 - v^n}{1 - v}$, also:

$$R_0' = \varrho\,\frac{1 - v^n}{1 - v}. \tag{4a}$$

VI. Abkürzende Bezeichnungen.

Da Endwert und Barwert der vorschüssigen und nachschüssigen Rente häufig vorkommen, hat man für diese vier Ausdrücke unter Annahme des Ratenbetrages $\varrho = 1$ besondere Bezeichnungen eingeführt. Es ist nach (1):

$$\mathfrak{s}_{\overline{n}|} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{5}$$

der Endwert der nachschüssigen Rente am Zeitpunkt der letzten Ratenzahlung, wenn sie n mal je mit dem Betrage 1 gezahlt wird.

$$s_{\overline{n}|} = q\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = q \cdot \mathfrak{s}_{\overline{n}|} \tag{6}$$

ist der Endwert derselben vorschüssigen Rente am Ende des Zinstermins (Jahres), an dessen Anfang die letzte Rate gezahlt wurde.

$$a_{\overline{n}|} = \frac{q^n - 1}{(q-1)\,q^n} = \frac{1 - v^n}{i} \qquad \text{(vgl. 3a)} \tag{7}$$

ist der Barwert der nachschüssigen Rente vom Ratenbetrag 1.

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|} = \frac{q^n - 1}{(q-1)\,q^{n-1}} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = a_{\overline{n}|} \cdot q \qquad \text{(vgl. 4 und 4a)} \tag{8}$$

ist der Barwert der vorschüssigen Rente vom Ratenbetrag 1. Die vorschüssige Rente 1, die nur $n - 1$ Zahlungen umfaßt, hat den Endwert $s_{\overline{n-1}|} = q\,\dfrac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$; entsprechend ist $a_{\overline{n-1}|} = \dfrac{q^{n-1} - 1}{(q-1)\,q^{n-1}}$.

Hieraus ergeben sich noch folgende Beziehungen:

$$s_{\overline{n-1}|} + 1 = q\,\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + \frac{q - 1}{q - 1} = \frac{q^n - q}{q - 1} + \frac{q - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \mathfrak{s}_{\overline{n}|}$$

$$a_{\overline{n-1}|} + 1 = \frac{q^{n-1} - 1}{(q-1)\,q^{n-1}} + 1 = \frac{q^{n-1} - 1}{q^n - q^{n-1}} + \frac{q^n - q^{n-1}}{q^n - q^{n-1}} = \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}}$$

$$= \frac{q^n - 1}{(q-1)\,q^{n-1}} = \mathbf{a}_{\overline{n}|}.$$

Die beiden Gleichungen:

$$s_{\overline{n-1}|} + 1 = \mathfrak{s}_{\overline{n}|} \tag{9}$$

und:

$$a_{\overline{n-1}|} + 1 = \mathbf{a}_{\overline{n}|} \tag{10}$$

lassen sich so aussprechen: Vermehrt man den Endwert der vorschüssigen Rente von $n - 1$ Zahlungen vom Ratenbetrag 1 um die Einheit, so hat man den Endwert der nachschüssigen Rente von n Zahlungen vom Ratenbetrag 1. Vermehrt man den Barwert der nachschüssigen Rente von $n - 1$ Zahlungen vom Ratenbetrag 1 um die Einheit, so hat man den Barwert der vorschüssigen Rente von n Zahlungen vom Ratenbetrag 1.

VII. Ewige Rente.

Soll eine Rente vom Ratenbetrag ϱ auf ewige Zeiten bezahlt werden, so handelt es sich um die ewige Rente. Die Frage nach dem Endwert ist dabei sinnlos, wohl aber hat die Frage nach dem Barwert einen Sinn. Hat man z. B. auf ewige Zeiten je 5 $\mathcal{RM}$ am Ende jedes Jahres zu zahlen, so kann man sofort 100 $\mathcal{RM}$ zu 5% verzinslich anlegen, um mit den am Ende jedes Jahres fälligen Zinsen von 5 $\mathcal{RM}$ der Verpflichtung nachzukommen. Mit 100 $\mathcal{RM}$ kann man also beim Zinsfuß 5% die ewige Rente von je 5 $\mathcal{RM}$ ablösen. Überhaupt kann man die ewige nachschüssige Rente vom Ratenbetrage ϱ durch ein Kapital A ersetzen, das jährlich den Betrag ϱ an Zinsen abwirft. Da das Kapital A bei p% jährlich die Zinsen $\frac{A p}{100}$ liefert, so ist $\frac{A p}{100} = \varrho$, also:

$$(11) \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{100}\,\varrho}{\boldsymbol{p}} = \frac{\varrho}{q-1} = \frac{\varrho}{i}$$

zu setzen. Bei der vorschüssig zu zahlenden ewigen Rente ist außer dem Kapital A noch die erste Rate ϱ, die sofort fällig ist, zur Verfügung zu stellen, also insgesamt das Kapital:

$$(12) \qquad \boldsymbol{A'} = A + \varrho = \frac{100\,\varrho}{p} + \varrho = \frac{\varrho}{\boldsymbol{p}}\,(\mathbf{100} + \boldsymbol{p}) = \frac{\varrho \cdot q}{q-1} = \frac{\varrho \cdot q}{i}.$$

So ist der Barwert der ewigen vorschüssigen Rente von je 320 $\mathcal{RM}$ bei 4% Zinsen:

$$A' = \tfrac{320}{4}\,(100 + 4) = 80 \cdot 104 = 8\,320\ \mathcal{RM}.$$

Der Barwert der entsprechenden ewigen nachschüssigen Rente ist 8000 $\mathcal{RM}$. [A und A' hätten auch dadurch gefunden werden können, daß man alle Zahlungen ϱ auf den Nullpunkt datiert hätte und ihre Summe, eine unendliche fallende geometrische Reihe, nach A (27) berechnet hätte. Führe dies aus.]

VIII. Vermehrung oder Verminderung eines Kapitals durch eine Rente.

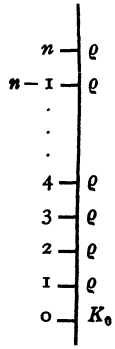
Es sei der Endwert E_1 eines Kapitals K_0 zu bestimmen, wenn am Ende jedes Jahres außer den Zinsen noch je ϱ $\mathcal{RM}$ zugefügt werden.

Die Rente hat am Zeitpunkt n den Wert $\varrho \frac{q^n - 1}{q - 1}$, das Kapital K_0 hat am gleichen Zeitpunkt den Wert $K_0 q^n$. Also ist:

$$E_1 = K_0 q^n + \varrho \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{13}$$

Wird die Rente am Ende des Jahres nicht zugefügt, sondern weggenommen, so ergibt sich der Endwert:

$$E_2 = K_0 \cdot q^n - \varrho \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{14}$$



Ist in Gleichung (14) der Wert von ϱ gleich dem jährlichen Zinsbetrage von K_0, so ändert das Kapital seinen Wert nicht, denn es werden dann jährlich nur die fälligen Zinsen abgehoben. Auch rechnerisch läßt sich dies zeigen; es ist in diesem Falle $\varrho = K_0 \frac{p}{100} = K_0 \; (q - 1)$, also wird:

$$E_2 = K_0 \cdot q^n - K_0 (q - 1) \frac{q^n - 1}{q - 1} = K_0.$$

Ist ϱ k l e i n e r als der j ä h r l i c h e Z i n s b e t r a g von K_0, so wird E_2 mit jedem Jahre g r ö ß e r; ist ϱ g r ö ß e r, so n i m m t E_2 s t e t s a b.

IX. Tilgung (Amortisation) einer Schuld.

Ist in (14) K_0 eine Schuld und ϱ die jährliche Abzahlung einschließlich der Zinsleistung und größer als diese, so wird nach einer bestimmten Anzahl von Jahren die Schuld getilgt sein; es wird $E_2 = 0$. Man bezeichnet dies als A m o r t i s a t i o n (T i l g u n g) der Schuld. Es ist also in diesem Falle:

$$K_0 \cdot q^n = \varrho \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ oder } K_0 = \varrho \frac{q^n - 1}{(q - 1) q^n} = \varrho \, a_{\overline{n}|}. \tag{15}$$

Aus dieser Exponentialgleichung ist der Exponent n zu ermitteln.

Es ist: $K_0 q^n (q - 1) = \varrho \cdot q^n - \varrho$ oder $\varrho = q^n [\varrho - K_0 (q - n)]$,

also: $$q^n = \frac{\varrho}{\varrho - K_0 (q - 1)} \text{ oder [nach A (16)—(18)]:}$$

$$n \log q = \log \varrho - \log [\varrho - K_0 (q - 1)] \qquad \text{oder:}$$

$$n = \frac{\log \varrho - \log [\varrho - K_0 (q - 1)]}{\log q}. \tag{16}$$

Auch (16) läßt wieder erkennen, daß die Aufgabe nur lösbar ist, wenn $\varrho > K_0 (q - 1)$ ist, d. h. w e n n d e r j ä h r l i c h e Z i n s b e t r a g v o n K_0 k l e i n e r i s t a l s d i e j ä h r l i c h e A b z a h l u n g ϱ. n bedeutet die Anzahl der Rückzahlungen. Ergibt sich n als gebrochene Zahl, etwa $n = m + \nu$, wo m eine ganze Zahl, ν ein echter Bruch ist, so bleibt nach der m^{ten} Rückzahlung noch ein Rest, die $(m+1)^{\text{te}}$ Rückzahlung ist aber nicht mehr in voller Höhe zu leisten. Der Rest nach der m^{ten} Rückzahlung ist:

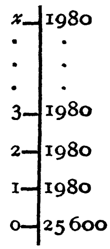
$$d = K_0 q^m - \varrho \frac{q^m - 1}{q - 1}. \tag{17}$$

Er wird entweder der Rate ϱ nach m Jahren noch zugefügt, oder es wird nach $m + 1$ Jahren noch eine Rate $q \cdot d < \varrho$ gezahlt.

X. Beispiel einer Amortisation.

Aufgabe:

Eine Schuld von 25600 *RM* ist durch jährliche nachschüssige Ratenzahlungen von je 1980 *RM* zu tilgen. Nach wieviel Jahreszahlungen ist die Tilgung beendet, und was ist im letzten Jahre noch zu zahlen bei einem Zinsfuß von $4\frac{1}{2}\,\%$?



x sei die Zahl der Ratenzahlungen. Nach x Jahren hat die Rente den Wert $1980 \frac{q^x - 1}{q - 1}$, das Kapital hat an diesem Zeitpunkt den Wert $25600\, q^x$. Also ist:

$$25600\, q^x = 1980 \frac{q^x - 1}{q - 1}$$

oder:

$$25600 \cdot 1{,}045^x = 1980 \frac{1{,}045^x - 1}{0{,}045}$$

oder: $25600 \cdot 1{,}045^x = 44000\,(1{,}045^x - 1) = 44000 \cdot 1{,}045^x - 44000.$

$$44000 = 18400 \cdot 1{,}045^x,$$

also:

$$1{,}045^x = \frac{44000}{18400} = \frac{55}{23}$$

oder:

$$x \cdot \log 1{,}045 = \log 55 - \log 23$$

$$x = \frac{\log 55 - \log 23}{\log 1{,}045} = \frac{0{,}7404 - 0{,}3617}{0{,}01912} = \frac{0{,}3787}{0{,}01912} = 19{,}8.$$

[Der Wert kann auch durch unmittelbares Einsetzen in Gl. 16 gefunden werden.] Nach 19 Zahlungen ist also die Schuld noch nicht getilgt, die 20. Zahlung ist nicht mehr voll zu leisten.

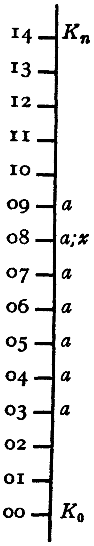
Der Restbetrag nach 19 Jahren beträgt noch:

$$25600 \cdot 1{,}045^{19} - 1980 \cdot \frac{1{,}045^{19} - 1}{0{,}045} = 25600 \cdot 1{,}045^{19} - 44000\,(1{,}045^{19} - 1)$$
$$= 44000 - 18400 \cdot 1{,}045^{19} = 44000 - 42470 = 1530,$$

d. h. die 19. Rate wäre noch um 1530 *RM* zu erhöhen, oder es wäre noch eine 20. Rate nach 20 Jahren zu zahlen im Betrage von $1530 \cdot 1{,}045 = 1599$ *RM*.

XI. Plan für die Lösung von Aufgaben aus der Rentenrechnung.

Alle Aufgaben aus der Zinseszins- und Rentenrechnung lassen sich leicht nach folgendem Plane lösen: 1. Antragen der Kapitalien und Renten an die Zeitgerade, 2. Zusammenfassung aller Renten zu einem Kapital am Zeitpunkt der letzten Zahlung nach (1), 3. Datieren aller Kapitalien auf den gleichen Zeitpunkt nach *B* (10) oder *B* (11), 4. Aufstellen der Gleichung, 5. Auswertung der Unbekannten. Ein Beispiel mag dies erläutern:



Jemand hat im Jahre 1900 ein Kapital $K_0 = 10000$ *M* bei der Bank angelegt; er fügt 1903 und in jedem folgenden Jahre $a = 400$ *M* zu, zum letzten Male 1909. Welches Kapital x hat er 1908 abgehoben, wenn sein Guthaben 1914 noch $K_n = 12000$ *M* betrug? Die Verzinsung erfolgt zu 4%; das Datum der Ein- und Auszahlungen ist in jedem Jahre das gleiche, etwa der 1. April.

1. Die Kapitalien und Renten werden an die Zeitgerade angetragen (vgl. Zeitgerade).

2. Die Rente vom Ratenbetrage a hat am Zeitpunkt 09 den Wert $a\frac{q^7-1}{q-1}$. [Vgl. (1).]

3. Alle Kapitalien werden nach dem Zeitpunkt 14 datiert. K_n behält also seinen Wert. Das Kapital x wird um 6 Jahre vordatiert und erreicht den Wert $x \cdot q^6$. Der Endwert der Rente am Zeitpunkt 09 ist um 5 Jahre vorwärts zu datieren und hat dann den Wert $a\frac{q^7-1}{q-1} \cdot q^5$. Das Kapital K_0 wird entsprechend zu $K_0 \cdot q^{14}$.

4. Aus dem Wortlaut der Aufgabe ergibt sich so die Gleichung:

$$K_n = K_0 \cdot q^{14} + a\frac{q^7-1}{q-1} \cdot q^5 - x \cdot q^6.$$

5. Hieraus ergibt sich für x der Wert:

$$x = K_0 \cdot q^8 + \frac{a}{q}\,\frac{q^7-1}{q-1} - \frac{K_n}{q^6}.$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man auf irgendeinen anderen Zeitpunkt datiert. (Welchen Vorteil hätte das Datieren auf den Zeitpunkt 08?) Die numerische Auswertung liefert:

$$x = 13685{,}70 + 3037{,}81 - 9483{,}78 = 7239{,}73.$$

Die Abhebung im Jahre 1908 betrug also 7239,73 *M*.

XII. Benutzung von Tabellen zur Berechnung von Renten.

In den Vorübungen ist an einem Beispiel gezeigt worden, wie man durch wiederholte Benutzung von Tabelle I und II den Barwert und Endwert einer Rente berechnen kann. Für eine größere Zahl von Raten ist aber das Verfahren recht umständlich. Man hat daher besondere Tabellen für Renten berechnet. Tabelle III stellt die Werte für $s_{\overline{n}|}$ dar [vgl. Gl. (6)], d. h. den Endwert einer vorschüssigen Rente 1. Handelt es sich also um den Endwert der in den Vorübungen behandelten Rente, die vorschüssig 5 Jahre lang am Anfang jedes Jahres mit $\varrho = 400$ *RM* bezahlt wird, berechnet auf das Ende des 5. Jahres, so liest man aus Tabelle III für 5 Raten vom Ratenbetrage 1 den Wert ab $\mathrm{III}^5_{5\%} = 5{,}80191$; also ist der Endwert der gesuchten Rente $400 \cdot 5{,}80191 = 2320{,}76$ *RM*.

Um den Endwert der nachschüssigen Rente zu finden, beachtet man Gl. (9), nach der $\mathfrak{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n-1}|} + 1$ ist. Werden in dem eben behandelten Beispiel die Raten von je 400 *RM* nachschüssig 5 Jahre bezahlt und man will den Endwert nach 5 Jahren finden, so bestimmt man zuerst den Endwert für die Rente 1; er ist $\mathfrak{s}_{\overline{5}|} = s_{\overline{4}|} + 1 = \mathrm{III}^4_{5\%} + 1 = 5{,}52563$. Also ist der Endwert der Rente 400:

$$400 \cdot 5{,}52563 = 2210{,}25 \text{ RM}.$$

[NB. Man könnte auch Gl. (6) benutzen, nach der $s_{\overline{n}|} = q \cdot \mathfrak{s}_{\overline{n}|}$, also $\mathfrak{s}_{\overline{n}|} = v \cdot s_{\overline{n}|}$ ist. Dann würde sich ergeben $\mathfrak{s}_{\overline{5}|} = v \cdot s_{\overline{5}|} = 0{,}95238 \cdot 5{,}80191 = 5{,}52562$ wie oben, doch umständlicher.]

Tabelle IV gibt den Barwert der nachschüssigen Rente vom Ratenbetrage 1; d. h. den Wert von $a_{\overline{n}|}$. Wird also am Ende jedes Jahres, 5 Jahre lang, je der Betrag 1 gezahlt, so ist der sofortige Wert (Barwert) $\mathrm{IV}^5_{5\%} = 4{,}32948$. Hat die Rate den Wert 400 *RM*, so ist der Barwert $400 \cdot 4{,}32948 = 1731{,}79$ *RM*. Um den Barwert $\mathfrak{a}_{\overline{n}|}$ der vorschüssigen Rente vom Betrage 1 zu finden, beachtet man Gl. (10), nach der $\mathfrak{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1$ ist. Es ist also $\mathfrak{a}_{\overline{5}|} = a_{\overline{4}|} + 1$, also $\mathfrak{a}_{\overline{5}|} = 3{,}54595 + 1 = 4{,}54595$; somit ist der Barwert der 5 vorschüssigen Ratenzahlungen von je 400 *RM* $400 \cdot 4{,}54595 = 1818{,}38$ *RM*.

[NB. Auch hier hätte wieder aus $\mathfrak{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot q$ (vgl. (8)] der Wert $\mathfrak{a}_{\overline{5}|}$ aus $a_{\overline{5}|} \cdot q = 4{,}32948 \cdot 1{,}05 = 4{,}54595$ gefunden werden können.]

Umgekehrt kann in jedem der vier Fälle auch leicht der Ratenbetrag gefunden werden. Ist z. B. der Barwert einer nachschüssigen Rente, die 15 Jahre mit 5 % Zinseszins gezahlt wurde, 3113,90 *RM*, so liest man aus Tabelle IV den Barwert der nachschüssigen Rente 1 ab, die 15 Jahre gezahlt wird; sie ist 10,37966. Dieser Barwert ist in dem gegebenen Barwert 300mal enthalten; also war die Rate der gesuchten Rente 300 *RM*.

Auch die Zeit, d. h. die Anzahl der Zahlungen kann, wenigstens angenähert, gefunden werden. Hat z. B. eine vorschüssige Rente von je 50 *RM* Ratenbetrag bei 3,5 % den Endwert 998,55 *RM* erreicht, so hat die Rente 1 den Endwert $\frac{998,55}{50} \doteq 19,971$. In Tabelle III steht dieser Wert unter 3,5 % bei 15. Also war die Rente 15 Jahre gezahlt worden.

Auch für unterjährige Ratenzahlungen können Tabelle III und IV benutzt werden, soweit die entsprechenden Zinssätze vorliegen.

Beispiel: Jemand spart halbjährlich 75 *RM* und legt 12 Jahre lang, am Ende jedes Halbjahres diese Summe zu 3,5 % halbjährlich auf Zinsen. Welche Summe besitzt er nach 12 Jahren?

Es handelt sich um 24 nachschüssige Zahlungen von je 75 *RM* bei 3,5 % Verzinsung (für den Zinsabschnitt von $\frac{1}{2}$ Jahr). Nun ist $s_{\overline{24}|} = s_{\overline{23}|} + 1 = 35,66653 + 1 = 36,66653$, also ist der Endwert der gesuchten Rente $75 \cdot 36,66653 = 2749,99$ *RM*.

XIII. Aufgaben aus der Rentenrechnung mit Benutzung der Tabellen.

Eine Rente wird vorschüssig mit je 850 *RM* 12 Jahre gezahlt. Berechne

1. den Endwert bei 5 %iger Verzinsung,

2. desgl. bei 3,5 %,

3. den Barwert bei 5 %,

4. desgl. bei 3,5 %.

5.—8. Berechne dieselben Werte, wenn die Rente nachschüssig gezahlt wird.

9.—16. Führe die gleichen Rechnungen durch, wenn es sich um eine Rente von je 892,75 *RM* handelt, die 8 Jahre gezahlt wird.

17.—24. Desgl. für eine Rente vom Ratenbetrag 62,50 *RM*, die 32 Jahre bezahlt wird.

25. Jemand zahlt 13 Jahre lang an eine Versicherungsbank halbjährlich vorschüssig je 120 *RM* ein. Die Bank kann das Geld mit 3,5 % für das Halbjahr anlegen. Welchen Wert haben die Zahlungen zusammen am Ende des 13. Jahres?

26. Welchen Wert hätte der Versicherte sofort zahlen müssen, damit die Bank bei gleicher Verzinsung dasselbe Endkapital erhalten hätte? (a) mit Hilfe von Tabelle IV; b) aus dem Ergebnis von 25 mit Tabelle II.)

27. Eine Rente hat den Barwert 13613,63 *RM*. Wie groß war die jährliche nachschüssige Rate bei 5 %, wenn die Rente 39 Jahre läuft?

28. Desgl. bei 3,5 %?

29. Der Endwert einer vorschüssigen Rente, die 25 Jahre bezahlt wird, ist 20156,55 *RM*; wie groß ist die Rate bei 3,5 %?

30. Desgl. bei 5 %?

31.—32. Berechne das Ergebnis von 27. und 28. unter der Voraussetzung, daß die Rente vorschüssig gezahlt wird.

33.—34. Berechne das Ergebnis von 29. und 30. unter der Voraussetzung, daß die Rente nachschüssig gezahlt wird.

35. Jemand kauft ein Haus für 28000 *RM*. Welche nachschüssige Rente könnte statt dessen 8 Jahre bezahlt werden bei 5 % jährlichen Zinsen?

36. Desgl. wenn das Haus 42500 *RM* kostet und die Rente in 10 vorschüssigen Raten bei 5 % bezahlt wird?

37. Was wäre sofort für ein Haus zu bezahlen, wenn es gestattet ist, den Kaufpreis in 12 gleichen nachschüssigen Halbjahrsraten von je 2450 *RM* bei 3,5 % Verzinsung für das Halbjahr zu begleichen?

38. Desgl. in 8 vorschüssigen jährlichen Raten von 5600 *RM* bei 3,5 % im Jahr?

39. Welche sofort beginnende 10mal fällige Rente könnte an Stelle einer einmaligen Zahlung von 7000 *RM* nach 10 Jahren treten bei 5 % Verzinsung?

40. Welche Rente könnte a) vorschüssig, b) nachschüssig in 20 Raten bei 3,5 % jährlicher Verzinsung eine einmalige Zahlung von 25000 *RM* nach 20 Jahren ersetzen?

41. Wie viele jährliche a) vorschüssige, b) nachschüssige Ratenzahlungen sind zu leisten, damit der Endwert der Rente mindestens das 40fache der Rate ist bei 5 % Verzinsung?

42. Desgl. bei 3,5 %?

43. Wieviel halbjährliche Ratenzahlungen sind erforderlich a) vorschüssig, b) nachschüssig, damit der Barwert der Rente den 12fachen Betrag der Rate übertrifft? Es sollen halbjährlich 3,5 % Zinsen berechnet werden.

44. Ein Kapital von 2050 *RM* wird nach 5 Jahren und in jedem folgenden Jahre, im ganzen achtmal um je 250 *RM* vermehrt. Wie groß ist der Wert des Kapitals nach 15 Jahren? (5 %.)

XIV. Aufgaben zur Rentenrechnung mit Logarithmen.

Rechne die Aufgaben des Abschnitts XIII. auch mit Logarithmen.

1. Berechne den Endwert einer nachschüssigen Rente vom Ratenbetrag ϱ nach n Jahren, wenn der Zinsfuß p zugrunde gelegt wird:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\varrho =$	500	268,30	4800	54,56	650	30
$p =$	4,5	3,6	5,5	4	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{3}$
$n =$	17	21	11	17	8	31

2. Berechne bei gleicher Bezeichnung den Endwert der vorschüssigen Rente:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\varrho =$	982	46	2560	158,20	5,60	1,00
$p =$	$5\frac{1}{3}$	6	3,3	4	4,5	5
$n =$	7	12	19	36	60	100

3. Berechne in 1. den Barwert der nachschüssigen Rente.
4. Berechne für die Zahlenangaben in 2. den Barwert der vorschüssigen Rente.
5. In welcher Beziehung müssen die entsprechenden Ergebnisse von 1. und 3. stehen? Ebenso die von 2. und 4.? Benutze diese Beziehung zur Probe.
6. Zu welcher Summe wachsen 12000 *RM* an, wenn 15mal am Ende jedes Jahres außer den Zinsen noch je 550 *RM* zugefügt werden und die Verzinsung zu $3\frac{1}{2}$% erfolgt?
7. Welches Guthaben hat A heute, wenn er nach Wegnahme von je 800 *RM* am Ende jedes Jahres bei 4%iger Verzinsung nach 10 Jahren noch 1000 *RM* übrig hat?
8. Wie lange kann man von 20000 *RM* am Anfang jedes Jahres 1000 *RM* wegnehmen, bis das Kapital bei 4% aufgezehrt ist?
9. Nach wieviel Jahren ist eine Schuld von 18370 *RM* getilgt, wenn jährlich a) 1200 *RM*, b) 800 *RM* bei 5%iger Verzinsung abgezahlt werden?
10. Einer Schule wird ein Legat zu Prämienzwecken vermacht. Es werden jedes Jahr 150 *RM* zu Prämien verwandt. Der Rest der Zinsen wird zum Kapital geschlagen. So wird das Kapital nach 31 Jahren den Wert von 12500 *RM* haben. Wie groß war die Stiftung anfänglich, wenn sie mit 3% verzinst wurde?
11. Nach wieviel Jahren wird das Kapital auf 15000 *RM* angewachsen sein?
12. In folgender Tabelle ist K_0 das Anfangskapital, p der Zinsfuß, ϱ die am Ende des Jahres dem Kapital zugefügte Summe, n die Anzahl der Einzahlungen, K_n der Endwert des Kapitals mit Zuzahlungen nach n Jahren. Berechne nacheinander in jeder Zeile die Werte von K_n, K_0, ϱ, n, wenn die übrigen 4 Größen bekannt sind. [16 Aufgaben.]

K_0	p	ϱ	n	K_n
5260 *RM*	3 %	420 *RM*	12 Jahre	13460 *RM*
4930 „	$4\frac{1}{2}$%	900 „	8 „	15453 „
48200 „	4 %	1456 „	9 „	84012 „
8580 „	$3\frac{1}{2}$%	350 „	20 „	26970 „

13. Welche Werte erhält man in Aufgabe 12 für K_n, wenn die Größen K_0, p, n unverändert bleiben und die Beträge ϱ am Ende jedes Jahres von dem Kapital weggenommen werden?

14. Setze in die Tabelle die neugefundenen Werte für K_n ein und berechne dann in jeder Zeile nacheinander die Werte von K_0, ϱ, n, wenn die vier übrigen Größen bekannt sind. [12 Aufgaben.]

15. Berechne die Werte von K_n in Aufgabe 12, wenn die Beträge ϱ nicht am Ende, sondern am Anfang jedes Jahres zugefügt werden.

16. Versuche in Aufgabe 12 den Wert von p aus den vier übrigen Größen zu berechnen. Welche Schwierigkeit ergibt sich?

17. Jemand hat 18275 *RM* und fügt am Ende jedes halben Jahres noch 570 *RM* zu. Zu welcher Summe wächst das Kapital in $12\frac{1}{2}$ Jahren an bei einer Verzinsung von $2\frac{3}{8}\%$ für das Halbjahr?

18. Wie wird das Ergebnis, wenn der Betrag von 570 *RM* jedesmal weggenommen wird?

19. Vom 1. Januar 1900 ab stand ein Kapital von 28000 *M* zu 4% auf Zinseszinsen. Vom 1. Januar 1909 ab werden jährlich 4000 *M* abgehoben. Wann hatte das Kapital noch den Wert von 22000 *M*?

20. Jemand versichert sein Leben mit 10000 *RM* und zahlt dafür vorschüssig jährlich 300 *RM* Prämie. Nach der wievielten Zahlung haben die Einzahlungen mit $3\frac{1}{2}\%$iger Verzinsung die Versicherungssumme erreicht oder überschritten?

21. A hat ein Kapital von 4550 *RM*, B spart jährlich 600 *RM*. Wann haben die Ersparnisse des B den Wert des Kapitals von A mit Zinseszinsen zu 4% erreicht oder überschritten?

22. Wie groß ist der Barwert einer vorschüssigen Halbjahresrente, die in 16 Raten von je 250 *RM* zahlbar ist? ($p = 2{,}5$.)

23. Desgl. für die nachschüssige Rente.

24. Wie groß sind a) Barwert und b) Endwert einer Rente, die 13 Jahre vierteljährlich vorschüssig mit je 60 *RM* bei einem vierteljährlichen Zinsfuß von $1\frac{1}{4}\%$ bezahlt wird?

25. Jemand legt 10 Jahre lang am Ende jedes Monats 20 *RM* bei einer Sparkasse an, die ihm das Geld monatlich mit 0,3% verzinst. Welche Summe hat er nach 10 Jahren gespart?

26. Berechne den augenblicklichen Wert des Kapitals in Aufgabe 17 und 18.

27. Jemand hat Anspruch auf eine Rente vom jährlichen Ratenbetrag $\varrho = 600$ *RM*, der ihm zwölfmal auszuzahlen ist. Um wieviel könnte die Rate erhöht werden, wenn sie bei 4,5%iger Verzinsung nur achtmal zu zahlen ist?

28. Statt einer Rente von 10 Raten zu 1200 *RM* jährlich wünscht jemand eine solche von je 1000 *RM*. Wievielmal kann diese ausgezahlt werden? ($3\frac{1}{2}\%$.)

29. Das Ergebnis von Aufgabe 28 ist eine gebrochene Zahl; deute das Ergebnis.

30. Eine vorschüssige Rente von je 570 *RM* Ratenbetrag, die 12 mal zahlbar ist, ist in eine nachschüssige Rente von je 650 *RM* umzuwandeln bei 4%.

31. Jemand hat infolge eines Unfalls Anspruch auf eine nachschüssige Halbjahresrente von je 225 *RM*, die 5 Jahre fällig ist. Welche vorschüssige Jahresrente könnte ihm dafür 8 Jahre lang gewährt werden? ($p = 4\%$ für das Jahr, 2% für das Halbjahr.)

32. Jemand will eine vorschüssige Jahresrente, die 16 mal fällig ist, im Betrage von je 810 *RM* ersetzen durch eine nachschüssige Vierteljahresrente von je 280 *RM*. Wie lange kann sie ihm gewährt werden, wenn jährlich der Zinssatz von 4%, vierteljährlich 1% zugrunde gelegt wird? (Vgl. 29.)

33. Durch welche einmalige Zahlung am Zeitpunkte der Fälligkeit der fünften Rate kann eine Rente von je 425 *RM*, die 16 Jahre läuft, abgelöst werden bei 4%iger Verzinsung?

34. Desgl. bei dem Zinsfuß $4\frac{1}{2}$.

35. Mit 35 Dienstjahren scheidet ein Beamter aus dem Dienst. Er lebt noch 12 Jahre und bezieht ein vorschüssig zahlbares Ruhegehalt von jährlich 4800 *RM*. Wieviel hätte er am Ende jedes Jahres während seiner Dienstzeit zu 4% verzinslich anlegen müssen, um während der 12 Jahre durch Verbrauch seiner Ersparnisse das gleiche Einkommen zu haben, das ihm durch sein Ruhegehalt zufließt?

36. Jemand hat 15000 *RM* geerbt und will dafür eine jährliche 10 mal zahlbare Rente von einer Bank erwerben. Wie groß ist jede Rate, wenn die erste Rate nach 10 Jahren ausbezahlt wird? (4%.)

37. Jemand erhält bei der Geburt als Patengeschenk ein Sparbuch über 500 *RM*. Vom 6. Geburtstag ab werden ihm bis zum 15. Geburtstage einschließlich jährlich je a Mark zugeschrieben. Am 18., 19., 20. und 21. Geburtstage entnimmt er dem Sparbuch je 3000 *RM* als Zuschuß zu seinem Studium. Wie groß ist der Betrag a, wenn bei 4%iger Verzinsung das Sparbuch am 25. Geburtstage noch 630 *RM* aufweist?

38. Jemand kauft ein Haus und zahlt bar 20000 *RM*, ferner am Anfang des fünften Jahres noch 8000 *RM*; außerdem zahlt er 10 Jahre am Ende jedes Halbjahres 500 *RM*; welches ist der Barwert des Hauses, wenn halbjährlich 2% Zinsen berechnet werden?

39. Jemand hat einen Wald gekauft; neben dem Kaufpreis hat er nach 5, 10, 15 und 20 Jahren noch je die Summe von 3400 *RM* zu zahlen. Durch welche einmalige sofortige Zahlung könnte er die 4 Teilzahlungen ablösen bei $3\frac{3}{4}$%?

40. Eine Gemeinde verpflichtet sich zum Bau und zur Unterhaltung einer Brücke auf ewige Zeiten jährlich vorschüssig 1200 *RM* zu zahlen. Mit welcher Summe könnte die ewige Rente abgelöst werden bei 4,5%?

41. Auf einem Gute ruht die Verpflichtung auf „ewige Zeiten“ halbjährlich je 250 $\mathcal{RM}$ an eine Anstalt zu bezahlen. Mit welchem einmaligen Betrage könnte die Verpflichtung abgelöst werden, wenn eine Verzinsung von $2\frac{1}{2}\%$ für das Halbjahr angenommen wird und eine Zahlung gerade fällig wird?

42. Mit dem Besitz eines Gutshofes ist die Verpflichtung verbunden, auf ewige Zeiten für laufende Wegreparaturen jährlich 140 $\mathcal{RM}$ und alle 10 Jahre für größere Ausbesserungen 840 $\mathcal{RM}$ (statt 140 $\mathcal{RM}$) an eine Gemeinde zu zahlen. Durch welche Barsumme könnte die Verpflichtung abgelöst werden, wenn 3,5% Zinsen gerechnet werden und eine Zahlung von 140 $\mathcal{RM}$ eben geleistet und die nächste Zahlung von 840 $\mathcal{RM}$ nach 4 Jahren zu leisten ist? [Wir zerlegen die Summe von 840 $\mathcal{RM}$ in 140 + 700 $\mathcal{RM}$. Dann handelt es sich um die Zahlung von je 140 $\mathcal{RM}$, die jedes Jahr fällig ist und außerdem um die Zahlung von je 700 $\mathcal{RM}$, die nach 4, 14, 24, ... Jahren zahlbar ist. Auf die Gegenwart bezogen hat die Gesamtheit der Zahlungen den Wert:

$$\frac{140}{q}+\frac{140}{q^2}+\frac{140}{q^3}+\cdots+\frac{700}{q^4}+\frac{700}{q^{14}}+\frac{700}{q^{24}}+\cdots$$

$$=\frac{140}{q-1}+\frac{700q^6}{q^{10}-1}=4000+2095=6095;$$

d. h. mit 6095 $\mathcal{RM}$ ließe sich die Verpflichtung sofort ablösen.]

43. Wie gestaltet sich das Ergebnis von Aufgabe 40, wenn die ewige Rente von je 1200 $\mathcal{RM}$ nur alle 5 Jahre fällig ist und eine Rate a) soeben, b) vor 3 Jahren bezahlt worden war?

44. Ein Vater hinterläßt seinen 5 Kindern ein Vermögen von 60000 $\mathcal{RM}$. Zwölf Jahre lang wird jedes halbe Jahr vorschüssig ein Betrag von 1800 $\mathcal{RM}$ für die Erziehung der Kinder verbraucht; dann wird der Rest unter die Kinder gleichmäßig verteilt. Wieviel erhält jedes Kind nach 12 Jahren, wenn halbjährlich $2\frac{1}{2}\%$ Zinsen gerechnet werden?

45. Jn einem Lande von 10000000 Einwohnern beträgt der Überschuß der Geburten über die Todesfälle jährlich 2%. Es wandern aber jährlich 50000 Menschen mehr aus als ein. Wie groß ist die Bevölkerung nach 20 Jahren?

46. Ein Erfinder verkauft seine Erfindung an eine Fabrik, die ihm achtmal jährlich vorschüssig 1200 $\mathcal{RM}$ bezahlt. Welcher einmaligen Zahlung bei $4\frac{1}{6}\%$ entspricht dies, wenn die Zahlung a) sofort, b) nach 8 Jahren geleistet wird?

47. Eine „ewige Rente“ vom Ratenbetrag 500 $\mathcal{RM}$ soll in eine solche von 10jähriger Dauer umgewandelt werden. Wie groß ist ihr Ratenbetrag bei $4\frac{1}{2}\%$?

48. Der Besitzer eines Waldes ist verpflichtet, einer Anstalt jährlich auf unbestimmte Dauer Brennholz im Werte von 640 $\mathcal{RM}$ zu liefern. Er entledigt sich dieser Verpflichtung durch eine einmalige Zahlung von 10000 *RM*. a) Wie lange könnte für die Abschlagszahlung das Holz geliefert werden, wenn das Geld zu $3\frac{1}{2}\%$ verzinst wird? b) Welche Abschlagszahlung hätte er bei $3\frac{1}{2}\%$iger Verzinsung zahlen müssen, um die ewige Rente abzulösen? c) Welchem Zinsfuß entspricht es, wenn die „ewige Rente" mit 10000 *RM* abgelöst wird?

49.[1]) Jemand hat 30 Jahre vorschüssig den Betrag ϱ zu zahlen. Zu welchem Termin könnte er auf einmal den Betrag $30\,\varrho$ bei 5% Verzinsung zahlen?

50.[1]) Desgl. für die nachschüssige Rente.

51.[1]) Zu welchem Zeitpunkt könnte jemand, der 1000 *RM* sofort, 500 *RM* nach 4 Jahren und 600 *RM* nach 10 Jahren zu zahlen hat, die Summe von 2100 *RM* auf einmal zahlen? (4,5%.)

52.[1]) Jemand hat als Restkaufgeld für ein Haus nach 1 Jahr 2900 *RM*, nach 6 Jahren 4100 *RM* zu erhalten. Wann kann er bei $4\frac{3}{4}\%$ die Summe von 7000 *RM* auf einmal beanspruchen?

53.[1]) Jemand hat 1500 *RM* sofort, 2000 *RM* nach 3 Jahren und 3000 *RM* zu einem späteren Zeitpunkt zu fordern. Er erhält den ganzen Betrag von 6500 *RM* nach 4 Jahren. Wann wäre die Summe von 3000 *RM* fällig gewesen? (5%.)

54. Ein Kapital von 52600 *RM* wird nach Verlauf von 5 Jahren und dann in jedem folgenden Jahr um je 5260 *RM* vermindert, im ganzen neunmal. Welchen Wert hat das Kapital nach 20 Jahren bei 6%?

55. Ein Kapital, das zu 2,1% im Halbjahr verzinst wird, wird jedes Halbjahr, zum ersten Male nach $3\frac{1}{2}$ Jahren, zum letzten Male nach 8 Jahren um je 180 *RM* vermehrt und hat dann den Wert von 4000 *RM* erreicht. Wie groß war das Kapital?

XV. Beispiel für die Tilgung einer Schuld (Tilgungsplan I).

Eine Stadt hat zur Erweiterung einer Wasserleitung 500000 *RM* geliehen; die Schuld ist mit 4% zu verzinsen und soll in 10 gleichen Raten am Schlusse jedes Jahres zurückgezahlt werden. In (14) ist demnach $K_0 = 500000$, $q = 1{,}04$, $n = 10$ zu setzen; dann ergibt sich $\varrho = 61645{,}48$ *RM*. Es ist also 10 Jahre lang am Ende jedes Jahres diese Summe abzutragen, die zugleich auch die Verzinsung des Kapitals leistet. Am Ende des ersten Jahres sind 20000 *RM* Zinsen fällig, also kann der Rest von 41645,48 *RM* an der Schuld abgetragen werden, die jetzt nur noch 458354,52 *RM* beträgt. Für diese Schuld sind im zweiten Jahre 18334,18 *RM* Zinsen zu bezahlen, also können

---

1) Über Terminrechnung mit einfachen Zinsen vgl. Feller-Odermann, Teil I, S. 212f.

43311,30 *ℛℳ* an der Schuld abgetragen werden, da ja am Ende des zweiten Jahres wieder 61645,48 *ℛℳ* bezahlt werden. Also beträgt die Schuld am Ende des zweiten Jahres und damit am Anfang des dritten Jahres nur noch 415043,22 *ℛℳ*, usf. Die Schuld nimmt also immer mehr ab, der Zinsaufwand wird jedes Jahr kleiner und die Tilgung daher stets stärker. Die Rechnung ist sehr mühselig und hat den Nachteil, daß ein am Anfang gemachter Rechenfehler sich durch die ganze Ausrechnung bemerkbar macht. Man macht deshalb zweckmäßig noch folgende Überlegung. Ist t_1 die Tilgung im ersten Jahre, so ist t_2, die Tilgung im zweiten Jahre, um den Betrag größer, der dadurch gewonnen wird, daß t_1 im zweiten Jahre nicht mehr zu verzinsen ist; es ist also:

$$t_2 = t_1 + t_1(q - 1) = t_1 q \tag{18}$$

und entsprechend: $t_3 = t_2 q = t_1 q^2, \quad t_4 = t_1 q^3, \ldots$

Die Rückzahlungen werden tabellarisch in einem Tilgungsplan zusammengestellt.

Tilgungsplan I.

Jahr	Schuld am Anfang des Jahres	Zinsleistung am Ende des Jahres	Tilgung am Ende des Jahres	Gesamtaufwand am Ende des Jahres
1	500000,00	20000,00	41645,48	61645,48
2	458354,52	18334,18	43311,30	61645,48
3	415043,22	16601,73	45043,75	61645,48
4	369999,47	14799,98	46845,50	61645,48
5	323153,97	12926,16	48719,32	61645,48
6	274434,65	10977,39	50668,09	61645,48
7	223766,56	8950,66	52694,82	61645,48
8	171071,74	6842,87	54802,61	61645,48
9	116269,13	4650,77	56994,71	61645,48
10	59274,42	2370,98	59274,42	61645,40

Infolge der Abrundungen ergibt sich für das letzte Jahr ein um den unbedeutenden Betrag von 0,08 *ℛℳ* geringerer Aufwand.

XVI. Tilgung öffentlicher Anleihen.

In der eben behandelten Aufgabe wird die Stadt vielleicht keinen Geldgeber finden, der die ganze Summe von 500000 *ℛℳ* leiht[1]); je höher die Summe ist, um so weniger ist dies möglich. Deshalb teilt die Stadt die Anleihe in Stücke ein, etwa in 600 Stücke von je

1) In Wirklichkeit handelt es sich bei öffentlichen Anleihen um erheblich größere Beträge und um eine längere Tilgungsdauer (etwa 30—50 Jahre). Hier sind der Übersichtlichkeit halber kleinere Zahlen gewählt.

500 $\mathcal{RM}$ und in 200 Stücke von je 1000 $\mathcal{RM}$. Jedem Anleihestück (Schuldbrief) ist ein Zinsbogen beigegeben, der in Abschnitte geteilt ist. Gegen Rückgabe des Abschnittes werden die jeweils fälligen Zinsen am Ende des Jahres bezahlt. Ferner wird am Ende jedes Jahres eine Zahl der mit Nummern versehenen Stücke durch Auslosung zur Rückzahlung aufgerufen. Da diese aber nur auf abgerundete Summen lauten, läßt sich in diesem Falle nicht jedesmal genau der Betrag von 61645,48 $\mathcal{RM}$ verwirklichen. Der Tilgungsplan kann dann etwa folgende Gestalt haben

Tilgungsplan II.

Jahr	Schuld am Anfang des Jahres	Zinszahlung am Ende des Jahres	Rückkauf von Anleihestücken am Ende des Jahres in $\mathcal{RM}$	Gesamtleistung am Ende des Jahres	Ausgeloste Stücke zu 1000 $\mathcal{RM}$	500 $\mathcal{RM}$
1	500000	20000	41500	61500	17	49
2	458500	18340	43500	61840	17	53
3	415000	16600	45000	61600	18	54
4	370000	14800	47000	61800	19	56
5	323000	12920	48500	61420	19	59
6	274500	10980	50500	61480	20	61
7	224000	8960	52500	61460	21	63
8	171000	6860	55000	61860	22	66
9	116000	4660	57000	61660	23	68
10	59500	2380	59500	61880	24	71
			500000		200	600

XVII. Tilgungsplan bei gegebener Jahresleistung (Annuität).

Häufig soll die Tilgung eines Kapitals K in der Weise erfolgen, daß es mit $p_1\%$ verzinst und mit $p_2\%$ getilgt (amortisiert) wird; damit meint man, es soll die Jahresleistung (Annuität) $(p_1 + p_2)\%$ des Kapitals K betragen. Eine Jahresleistung von $p_1\%$ würde nur die Verzinsung leisten, die Schuld aber unverändert lassen. Je größer p_2 bei gegebenem p_1 ist, desto schneller wird die Schuld getilgt sein.

Beispiel: Ein Kapital von 1000000 $\mathcal{RM}$ ist mit 4% zu verzinsen und mit 3% zu tilgen. Der Tilgungsplan ist aufzustellen.

Die Gesamtjahresleistung beträgt 7% der Schuld, also $\varrho = 70000\,\mathcal{RM}$. Die Anzahl n der Zahlungen ergibt sich aus (14) oder mit Hilfe der Zeitgeraden. Die n Jahresleistungen haben am Zeitpunkt n den Wert $\varrho\,\frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04}$, der Wert des Kapitals am gleichen Zeitpunkt ist $K \cdot 1{,}04^n$, also ist:

$$K \cdot 1{,}04^n = \varrho\,\frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04}$$

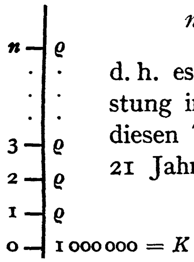
oder:

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}04^n = 70000\,\frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04}$$

oder: $$4 \cdot 1{,}04^n = 7\,(1{,}04^n - 1)$$

oder: $$3 \cdot 1{,}04^n = 7;\quad 1{,}04^n = \tfrac{7}{3}$$

$$n = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}3679767}{0{,}0170333} = 21{,}6\,,$$



d. h. es sind 21 volle Jahresleistungen erforderlich, die Leistung im 22. Jahre beträgt nur einen Teil der Annuität. Um diesen Teil noch zu bestimmen, ist der Schuldenrest nach 21 Jahren zu berechnen. Er ist nach (17):

$$D = 1\,000\,000 \cdot 1{,}04^{21} - 70\,000\,\frac{1{,}04^{21} - 1}{0{,}04}$$

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333;\quad 21 \log 1{,}04 = 0{,}3576993;$$
$$1{,}04^{21} = 2{,}278765,$$

also: $D = 1\,000\,000 \cdot 2{,}278765 - 70\,000 \cdot 1{,}278765 : 0{,}04 = 40926.$

Es bleibt also nach der Zahlung der 21. Jahresleistung noch ein Rest von 40926 *RM*, der i. a. im folgenden Jahre einschließlich 4% Zinsen mit 42563 *RM* gezahlt wird. Der Tilgungsplan hat also folgende Form:

Tilgungsplan III.

Jahr	Schulden am Anfang des Jahres	Zinsen	Tilgung	Rest am Ende des Jahres
1	1 000 000	40 000	30 000	970 000
2	970 000	38 800	31 200	938 800
3	938 800	37 552	32 448	906 352
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
22	40 926	1637	40 926	—

Auch in diesem Falle sind alle Jahresleistungen, von der letzten abgesehen, gleich groß; was bei den späteren Zahlungen an Zinsen erspart wird, wird wieder zu einer erhöhten Tilgung verwandt.

XVIII. Tilgung einer Anleihe mit Aufgeld.

Um einen erhöhten Anreiz zur Zeichnung einer Anleihe zu schaffen, kann man entweder einen höheren Zinsfuß zusichern oder die Rückzahlung mit einem höheren als dem Nennbetrag garantieren. Der Zuschlag, der zu je 100 *RM* Nennwert bei der Rückzahlung zugefügt wird, heißt Aufgeld (Amortisationszuschlag, Agio). Beträgt also das Aufgeld 10%, so wird jedes auf 1000 *RM* lautende Stück mit 1100 *RM* zurückgezahlt. Wird z. B. eine 4%ige Obligation über 1000 *RM* Nennwert nach einem Jahre schon ausgelost, so erhält der Besitzer 1000 *RM* Nennwert + 100 *RM* Aufgeld + 40 *RM* Zinsen = 1140 *RM*, d. h. er hat sein Geld mit 14% verzinst. Wird allerdings die Obligation erst nach 30 Jahren ausgelost, so bedeutet das Aufgeld von 100 *ℛℳ* nur eine unwesentliche Erhöhung des Zinsfußes von 4%. Je nachdem die Auslosung früh oder spät erfolgt, bedeutet das Aufgeld einen größeren oder geringeren Gewinn.

Soll die Anleihe in XV. mit 10% Aufgeld wieder in 10 Jahren getilgt werden, so könnte man ohne weiteres den Tilgungsplan I oder II benutzen. Es wären nur jedem Tilgungsbetrag 10% der getilgten Summe als Aufgeld zuzufügen. Dadurch würde aber die jährliche Gesamtzahlung nicht mehr in jedem Jahre dieselbe [bzw. im Plane II nahezu dieselbe] bleiben, da ja der Tilgungsbetrag am Anfang geringer als später ist, also am Anfang weniger, später mehr Aufgeld hinzukäme. Um gleichgroße jährliche Gesamtleistungen zu erhalten, führt man folgende Überlegung aus: Die Rückzahlung erfolgt so, als ob die Schuld nicht 500000 *ℛℳ*, sondern (einschließlich Aufgeld) 550000 *ℛℳ* wäre. Die Zinsen sind allerdings nur für 500000 *ℛℳ* zu zahlen. Nun ist es aber einerlei, ob man 100 *ℛℳ* mit 4% verzinst oder 110 *ℛℳ* mit $\frac{400}{110}$ %; die jährlichen Zinsen sind in beiden Fällen 4 *ℛℳ*. Allgemein bringen 100 *ℛℳ* zu p% dieselben Zinsen wie $(100 + \alpha)$ *ℛℳ* zu $\frac{100p}{100+\alpha}$ %, nämlich jährlich p *ℛℳ*. Soll also ein Kapital K mit α% Aufgeld bei p%iger Verzinsung getilgt werden, so kann die jährliche Amortisationsquote auch so gefunden werden, daß man das Kapital $K\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)$ mit dem Zinsfuß $\frac{100p}{100+\alpha}$ voraussetzt. In unserem Beispiel handelt es sich also um das Kapital 550000 *ℛℳ* und den Zinsfuß $\frac{400}{100+10} = 3\frac{7}{11}$%. Es wird also $q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}03636\ldots$

Genau wie in den vorhergehenden Aufgaben finden wir also den Jahresbedarf ϱ aus der Gleichung:

$$550000\,q^{10} = \varrho\,\frac{q^{10}-1}{q-1} \text{ oder } \varrho = \frac{550000}{\frac{q^{10}-1}{(q-1)\,q^{10}}} = \frac{550000}{a_{\overline{n}|}}.$$

Die Ausrechnung liefert $\varrho = 66588{,}08$.

Die Jahresleistung ist also nicht einfach um 10% größer als in XV.

XIX. Aufstellung des Tilgungsplans mit Aufgeld.

Da die Schuld von 500000 *ℛℳ* in XVIII. für das erste Jahr einen Zinsenaufwand von 4%, d. h. 20000 *ℛℳ* erfordert, beträgt die Tilgung im ersten Jahr 66588,08 — 20000 = 46588,08 *ℛℳ*. In dieser Summe ist noch das Aufgeld von 10% enthalten, also ist das Aufgeld $\frac{1}{11}$ dieser Summe, die eigentliche Tilgung $\frac{10}{11}$, d. h. 42352,80 *ℛℳ*. Am Ende des ersten Jahres beträgt also die Schuld nur noch 457647,20 *ℛℳ*. Also betragen die Zinsen im zweiten Jahre 18305,89 *ℛℳ*, die Gesamttilgung einschließlich Aufgeld 48282,19; die eigentliche Tilgung beträgt hiervon wieder $\frac{10}{11}$, d. h. 43892,90, das Aufgeld $\frac{1}{11}$, d. h. 4389,29 *RM*. Die Schuld am Ende des zweiten oder am Anfang des dritten Jahres ist daher 413754,30 *RM*, usf. Die Ergebnisse werden zusammengestellt im

Tilgungsplan IV.

Jahr	Schuld am Anfang des Jahres	Zinszahlung	Tilgung einschl. Aufgeld	reine Tilgung	Aufgeld
1	500000,00	20000,00	46588,08	42352,80	4235,28
2	457647,20	18305,89	48282,19	43892,90	4389,29
3	413754,30	16550,17	50037,91	45489,01	4548,90
4	368265,29	14730,61	51857,47	47143,15	4714,32
5	321122,14	12844,89	53743,19	48857,45	4885,74
6	272264,69	10890,59	55697,49	50634,08	5063,41
7	221630,61	8865,22	57722,86	52475,33	5247,53
8	169155,28	6766,21	59821,87	54383,52	5438,35
9	114771,76	4590,87	61997,21	56361,10	5636,11
10	58410,66	2336,43	64251,73	58410,66	5841,07
		Summe	550000,00	500000,00	50000,00

Auch hier ergibt sich durch die A b r u n d u n g e n eine kleine Differenz, die dadurch ausgeglichen wurde, daß die letzte Jahreszahlung um 8 Pf. erhöht wurde. Aus der ersten Tilgungsrate von 46588,08 können die folgenden auch hier wieder leicht gefunden werden durch Multiplikation mit $q, q^2, q^3, \ldots, q^9$. [Nach Gl. (18).]

Ist die Schuld wie in XVI. eingeteilt in 200 Obligationen von je 1000 *RM* und in 600 Obligationen von je 500 *RM*, dann können die jährlichen Tilgungssummen nicht genau gleich sein. Sie sind so abzurunden, daß die jährliche Tilgung o h n e Aufgeld eine durch 500 teilbare Zahl ist. So ergibt sich der

Tilgungsplan V.

Jahr	Schuld am Anfang des Jahres	Jahres-zinsen	Tilgung mit Aufgeld	Tilgung	Aufgeld	Annuität	Ausgeloste Stücke zu 1000 *RM*	500 *RM*
1	500000	20000	46750	42500	4250	66750	17	51
2	457500	18300	48400	44000	4400	66700	17	54
3	413500	16540	50050	45500	4550	66590	18	55
4	368000	14720	51700	47000	4700	66420	19	56
5	321000	12840	53900	49000	4900	66740	20	58
6	272000	10880	55550	50500	5050	66430	20	61
7	221500	8860	57750	52500	5250	66610	21	63
8	169000	6760	59950	54500	5450	66710	22	65
9	114500	4580	61600	56000	5600	66180	23	66
10	58500	2340	64350	58500	5850	66690	23	71
			550000	500000	50000		200	600

Vergleiche den Plan mit Tilgungsplan II und IV.

XX. Aufgaben zur Tilgungsrechnung.

1. Eine Schuld von 3000 ℛℳ ist in 5 Jahren bei 4 % Verzinsung durch gleiche Annuitäten zu tilgen. Wie groß ist die Annuität? Der Tilgungsplan ist aufzustellen.

2. Eine Schuld von 8000 ℛℳ, die zu 5 % verzinst wird, wird mit 20 % getilgt. Wann ist die Schuld getilgt? Wieviel ist im letzten Jahre zu zahlen? Stelle den Tilgungsplan auf.

3. A leiht von B 800 ℛℳ mit der Verpflichtung, in 4 Jahren durch gleiche nachschüssige Raten die Zinszahlung und Rückzahlung der Schuld zu bewerkstelligen. Wie groß war die jährliche Zahlung des A? Stelle den Tilgungsplan auf. (5 %.)

4. Jemand will bei 4,5 % eine Schuld von 16800 ℛℳ durch jährliche Ratenzahlungen von je 3000 ℛℳ tilgen. Wann ist die Schuld amortisiert? Stelle den Tilgungsplan auf?

5. Eine Kirchengemeinde baut ein Gemeindehaus für 120000 ℛℳ. Sie gibt zu diesem Zwecke 5 %ige Schuldverschreibungen aus, und zwar 20 zu 1000 ℛℳ, 100 zu 500 ℛℳ, 500 zu 100 ℛℳ. In 9 Jahren soll die Schuld getilgt werden. Stelle den Tilgungsplan auf.

6. Löse Aufgabe 5, wenn die Schuld 90000 ℛℳ beträgt und die Anleihe eingeteilt ist in 20 Stücke zu 1000 ℛℳ, 80 Stücke zu 500 ℛℳ und 100 Stücke zu 300 ℛℳ.

7. Eine zu $3\frac{3}{4}$ % verzinsbare Schuld von 2500000 ℛℳ ist durch 20 gleiche Jahresraten zu tilgen. Wie groß ist der jährliche Gesamtaufwand? Der Tilgungsplan ist aufzustellen.

8. Eine Stadt nimmt eine Anleihe von 1200000 ℛℳ auf, die mit 4 % verzinst und mit 3 % getilgt werden soll, d. h. am Ende jedes Jahres werden 7 % der ursprünglichen Schuld gezahlt. Wann ist die Schuld getilgt? Es ist ein Tilgungsplan aufzustellen, wenn die Anleihe in 1000 Stücke zu 300 ℛℳ, in 1000 Stücke zu 500 ℛℳ und in 400 Stücke zu 1000 ℛℳ eingeteilt ist.

9. Zum Bau einer Eisenbahn nimmt ein Staat eine 4 %ige Anleihe auf, die er in 20 Jahren tilgt. Wie groß ist die Anleihe, wenn der Staat jährlich 735800 ℛℳ aufzubringen hat?

10. Eine Stadt tilgt mit jährlich 40000 ℛℳ eine Anleihe von 500000 ℛℳ. Wann ist die Schuld zurückbezahlt, wenn die Verzinsung anfangs mit 4 %, nach 10 Jahren aber mit $3\frac{1}{2}$ % erfolgt?

11. Eine Anleihe von S ℛℳ wird mit 5 % verzinst und mit 3 % getilgt. Wann ist die Schuld zurückbezahlt? Wie hängt das Ergebnis von der Höhe der Schuld ab?

12. Eine Anleihe von 300000 ℛℳ wird mit 3 % verzinst und so getilgt, daß sie nach 31 Jahren zurückgezahlt ist. Wieviel % beträgt die Tilgung?

$$[300000 \cdot 1{,}03^{31} = \varrho\, \mathring{s}_{\overline{n}|} = \varrho\, \frac{1{,}03^{31} - 1}{0{,}03}.$$

Daraus folgt $\varrho = 15000$ *RM*; die Zinsen des ersten Jahres betragen 9000 *RM*, also die erste Tilgungsrate 6000 *RM*, d. h. 2% der Schuld.]

13. Zeige, daß das Ergebnis von Aufgabe 12 nicht von der Höhe der Schuld abhängt.

14. Ein industrielles Unternehmen beschließt eine Erweiterung der Fabrikanlagen. Eine Bank ist bereit, das Geld vorzuschießen, wenn es in 35 Halbjahren bei 2%iger Verzinsung für das Halbjahr in gleichen Raten zurückbezahlt wird. Welcher Zinssatz ist für die halbjährliche Tilgung vorgesehen?

15. In der folgenden Tabelle ist p_1 der Prozentsatz für die jährliche Verzinsung, p_2 der für die Tilgung, die Annuität ist also $(p_1 + p_2)\%$. n ist die Zahl der Jahre, nach denen die Schuld getilgt ist. Berechne aus p_1 und p_2 den Wert von n und ebenso aus n und p_1 den Wert von p_2. (18 Aufgaben.)

p_1	3	$3\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	5	4	$2\frac{3}{4}$
p_2	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{4}$	4	5	$2\frac{3}{4}$	4
n	46,90	40,05	39,72	23,98	22,02	17,67	14,21	22,89	19,29

16. Eine Anleihe wird mit 2% verzinst und mit 2% getilgt, eine zweite wird mit $3\frac{1}{2}$% verzinst und mit $1\frac{1}{2}$% getilgt. Welche von beiden ist zuerst zurückgezahlt?

17. Ein städtischer Beamter hat ein Haus in Erbpacht gebaut. Die Stadt hat ihm das Grundstück leihweise für 60 Jahre gegen einen jährlich zahlbaren Mietzins überlassen. Das Haus, das er auf eigne Kosten gebaut hat, bleibt 60 Jahre in seinem Besitz und fällt dann mit Grund und Boden an die Stadt zurück. Nach Abzug der Unkosten, Steuern und des Pachtzinses hat das Haus einen Mietwert von jährlich 1000 *RM*. Welchen Wert hat das Haus am Anfang, nach 10, 20, 30, 40, 50, 60 Jahren, wenn ein Zinsfuß von 4% zugrunde gelegt wird?

18. Nach 20 Jahren nimmt der Beamte in Aufgabe 17 eine Hypothek auf, die zu 4% zu verzinsen und in 25 Jahren zu tilgen ist. Wie groß ist die Tilgungshypothek, wenn sie 60% des augenblicklichen Wertes des Hauses ist, nach unten abgerundet auf volle Tausender, und welche jährliche Gesamtzahlung ist 25 Jahre lang zu leisten? Warum wird wohl reichsgesetzlich verlangt, daß eine solche Hypothek spätestens 10 Jahre vor Ablauf des Erbbaurechtes getilgt ist?

19. Stelle aus den in Aufgabe 17 berechneten Werten den Wert des Hauses für den Zeitraum von 60 Jahren graphisch dar und lies aus der Zeichnung den Wert nach 7, 16, 22, 35, 52, 58 Jahren ab.

20. Die Schuld in Aufgabe 1 sei einschließlich $12\frac{1}{2}$% Aufgeld in 5 gleichen Jahresraten zu tilgen. Stelle den Tilgungsplan auf.

21. Desgl. die Anleihe in Aufg. 7, die in 20 gleichen Raten zu tilgen ist.

XXI. Anleihe-Kurse.

Gibt ein Geldinstitut oder ein Gemeinwesen Schuldscheine aus, so lauten diese auf einen bestimmten Betrag, den Nennwert und auf einen bestimmten jährlichen (oder halbjährlichen) Zinssatz. Manche Wertpapiere (Rentenscheine, Konsols), werden nicht oder nur durch Rückkauf eingelöst; für andere wird der Betrag an einem bestimmten, im voraus festgesetzten Termin zurückerstattet (Schatzscheine); wieder andre stellen eine langfristige Schuld dar, die durch Auslosung im Laufe einer Reihe von Jahren getilgt wird (s. XVI u. f.). Erhöht sich der allgemein übliche Zinsfuß gegenüber dem in dem Anleihepapier versprochenen, so wird dieses weniger wertvoll, da ja der Gläubiger anderweit für sein Geld eine bessere Verzinsung erreichen kann. Verkauft er also das Anleihepapier, so erhält er für je 100 *RM* Nennwert nur eine geringere Summe C, den Kurswert. Dieser steigt natürlich über 100, wenn der übliche Zins fällt und der Schuldbrief daher höhere Zinsen bringt als eine sonstige gesicherte Geldanlage. Lautet das Papier auf die Summe S und ist der Kurs C, so ist der Kaufpreis $\frac{C}{100} \cdot S$. Der Kurs bestimmt sich i. a. so, daß sich beim Einkauf zum Kurswert und bei der vereinbarten Zinszahlung der übliche Zinsfuß ergibt. Kauft man z. B. ein 6%iges Wertpapier zum Kurse von 120, so erzielt man bei 120 *RM* Kapital 6 *RM* Zinsen, d. h. 5%; dieser Zinsfuß heißt der wirkliche Zinsfuß. Wird der zum Kurse C gekaufte Schuldbrief zum Nennwert eingelöst, so wird ein Gewinn oder Verlust erzielt, der in die Verzinsung mit eingerechnet wird. Damit wird der wirkliche Zinsfuß noch beeinflußt durch die Dauer, die das Wertpapier noch läuft; denn es ist nicht gleichgültig, ob die Differenz zwischen Kurswert und Rückzahlungsbetrag sofort oder erst später verwirklicht wird. Erschwert wird die Rechnung, wenn die Schuld durch Auslosung getilgt wird, wenn also nicht im voraus feststeht, wann ein bestimmtes Anleihepapier zur Rückzahlung gelangt. Hier verfährt man nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit so, daß man annimmt, der Inhaber des Schuldbriefes habe die Anleihepapiere der gesamten Schuld in Händen, so daß sich ein Ausgleich zwischen den zuerst und den zuletzt ausgelosten Papieren ergibt. Ferner ist zu beachten, daß die Rückzahlung nicht immer zum Nennwert erfolgt, sondern gelegentlich auch mit einem Abzug oder mit einem Aufgeld. Für Rentenscheine und Konsols besteht zwischen dem Kurs C, dem Zinsfuß p_1, auf den sie lauten und dem wirklichen Zinsfuß p_2 die einfache Gleichung:

$$C \cdot p_2 = 100\, p_1. \tag{19}$$

XXII. Aufgaben zur Kursrechnung.

1. Ein 3%iges Rentenpapier wird zum Kurse $C = 90$ gekauft. Welches ist die wirkliche Verzinsung?

2. Desgl. ein 4,5%iges zum Kurse 90. Desgl. ein 5%iges zum Kurse 110.

3. Zu welchem Kurse kann ein nicht auslosbares 5%iges Wertpapier gekauft werden, wenn der wirkliche Zinsfuß 4% ist?

4. Desgl. ein $4\frac{1}{2}$%iges, wenn der wirkliche Zinsfuß $3\frac{3}{5}$% ist?

5. Ein Wertpapier, das halbjährlich $2\frac{1}{2}$% Zinsen vom Nennwert bringt, ist zum Kurse 96 gekauft und nach 10 Jahren so verkauft worden, daß sich eine halbjährliche Verzinsung von 3% ergab. Welches war der Verkaufskurs?

[Ausgabe des Inhabers: am Zeitpunkt Null 96 *RM*; Einnahme: 20 Zahlungen von je $2\frac{1}{2}$ vom Zeitpunkt 1 bis 20 und C am Zeitpunkte 20, also:

$$96 \cdot 1{,}03^{20} = 2{,}5 \cdot s_{\overline{20}|} + C;]$$

6. Zu welchem Kurs wurde ein 4%iges Wertpapier gekauft, wenn es nach 16 Jahren mit 12,5% Aufgeld ausgelost wurde und der Inhaber eine Verzinsung von $4\frac{1}{2}$% erreicht hatte?

7. Auf welchen Zinsfuß lautet ein Wertpapier, das zum Kurse 102 gekauft und nach 6 Jahren zum Kurse 109,48 verkauft wurde und eine wirkliche Verzinsung von 5% erzielt hatte?

16	4; 112,5
.	.
.	.
.	.
3	4
2	4
1	4
0	C

8. Ein $3\frac{1}{2}$%iges Wertpapier wurde zum Kurse 96 gekauft und nach 8 Jahren bei einer wirklichen Verzinsung von 4% verkauft. Welches war der Verkaufskurs?

9. Ein zu $3\frac{1}{2}$% ausgegebener Schatzschein soll sich dadurch zu 4% verzinsen, daß bei der Rückzahlung nach 25 Jahren ein Aufgeld α gezahlt wird; wie hoch ist dies?

10. Eine zu $3\frac{1}{2}$% verzinsliche Anleihe wird im Laufe von 25 Jahren durch gleiche Jahresleistungen amortisiert und zum Nennwert zurückgezahlt. Welcher Ausgabekurs entspricht dem wirklichen Zinsfuß 4%?

[Wird die Schuld zu 100 angenommen, so ergibt sich die jährliche Gesamtleistung ϱ aus der Gleichung:

$$100 \cdot 1{,}035^{25} = \varrho \frac{1{,}035^{25} - 1}{0{,}035} \text{ zu } \varrho = 100 : a_{\overline{n}|} = 100 : \frac{1{,}035^{25} - 1}{0{,}035 \cdot 1{,}035^{25}}.$$

Der Inhaber zahlt also am Zeitpunkt Null den Kurswert C und erhält vom Zeitpunkt 1 bis 25 je den Betrag ϱ bei 4%iger Verzinsung; also ist:

$$C \cdot 1{,}04^{25} = \varrho \frac{1{,}04^{25} - 1}{0{,}04}; \quad C = \varrho \cdot a'_{\overline{n}|} = \varrho \frac{1{,}04^{25} - 1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{25}};$$

oder wenn der Wert von ϱ eingesetzt wird:

$$C = 100 \cdot \frac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = 100 \cdot \frac{1{,}04^{25} - 1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{25}} : \frac{1{,}035^{25} - 1}{0{,}035 \cdot 1{,}035^{25}}.]$$

11. Zu welchem Kurs hätte die Anleihe von 500000 *RM* in XV. ausgegeben werden müssen, damit sie sich zu 4,5% verzinst hätte?

12. Wie ist der Ausgabekurs einer Anleihe festzusetzen, wenn sie mit p_1% verzinst und in n gleichen Jahresraten zum Nennwert getilgt wird und eine wirkliche Verzinsung von p_2% erreicht werden soll? [Verallgemeinerung von Aufgabe 10.]

$$\text{Es sei } 1 + \frac{p_1}{100} = q_1, \quad 1 + \frac{p_2}{100} = q_2.$$

Die Annuität ist $\varrho = K : a'_{\overline{n}|}$, wenn K die Gesamtschuld ist. Auf den Zeitpunkt n berechnet zahlt der Inhaber $K \cdot \frac{C}{100} \cdot q_2^n$ und erhält $\varrho \cdot \frac{q_2^n - 1}{q_2 - 1}$; es ist also $C = \frac{100\varrho}{K} \cdot a''_{\overline{n}|}$, oder wenn für ϱ der Wert eingesetzt wird:

$$C = 100 \cdot \frac{a''_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} = 100 \cdot \frac{q_2^n - 1}{(q_2 - 1)\, q_2^n} : \frac{q_1^n - 1}{(q_1 - 1)\, q_1^n}.$$

13. Die Anleihe von 500000 *RM* in XVIII., die mit 4% verzinst und in 10 gleichen Jahresraten mit 10% Aufgeld zurückgezahlt werden soll, soll sich zu 4,5% verzinsen; wie groß muß der Ausgabekurs sein?

[Die jährliche Rückzahlung ist in XVIII. zu $\varrho = 66588$ *RM* gefunden. Der Inhaber der ganzen Anleihe zahlt also beim Ausgabekurs C am Zeitpunkt Null den Betrag $5000 \cdot C$ und erhält dafür zehnmal die Rate ϱ bei einer wirklichen Verzinsung von 4,5%.

Also ist: $\quad 5000 \cdot C \cdot 1{,}045^{10} = \varrho \cdot \frac{1{,}045^{10} - 1}{0{,}045}.$

Hieraus folgt: $\quad C = 105{,}38.$]

14. Eine p%ige Anleihe vom Betrage S wird in n Jahren mit α% Aufgeld getilgt. Wie ist der Ausgabekurs zu wählen, damit die Verzinsung zu p_2% erfolgt?

[Die jährliche Tilgungsrate ϱ ergibt sich nach XVIII. aus der Gleichung:

$$S \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \cdot q_1^n = \varrho \frac{q_1^n - 1}{q_1 - 1}, \text{ wenn } p_1 = \frac{100\,p}{100 + \alpha} \text{ und } q_1 = 1 + \frac{p_1}{100}.$$

$$\text{Es ist also } \varrho = K \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) : \frac{q_1^n - 1}{q^{n'}(q_1 - 1)} = K\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) : a'_{\overline{n}|}.$$

Der Inhaber der ganzen Anleihe zahlt am Zeitpunkt Null den Betrag $K \cdot \frac{C}{100}$ und erhält an den Zeitpunkten 1, 2. 3, $\cdots n$ je den Betrag ϱ, also ist $K \cdot \frac{C}{100} \cdot q_2{}^n = \varrho \frac{q_2{}^n - 1}{q_2 - 1}$, wo $q_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$ ist.

Also ist: $C = 100 \cdot \frac{\varrho}{K} \cdot \frac{q_2^n - 1}{(q_2 - 1)\, q_2^n} = 100 \cdot \frac{\varrho}{K} \cdot a''_{\overline{n}|}$.

Wird für ϱ der Wert eingesetzt, so ergibt sich:

$$C = 100 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \frac{a''_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} \cdot]$$

15. Nach dem Aufwertungsgesetz vom 16. Juli 1925 werden Hypotheken mit 25% aufgewertet und vom 1. Januar 1925 ab mit 1,2%, vom 1. Juli 1925 ab mit 2,5%, vom 1. 1. 26 ab mit 3%, vom 1. 1. 28 ab mit 5% verzinst. Die Rückzahlung kann erst am 1. Januar 1932 verlangt werden. A habe nun eine Hypothek auf ein Grundstück von B vor dem Kriege im Betrage von 60000 *M* eintragen lassen. Zu welchem Preis könnte A die Rückzahlung der Hypothek am 1. Januar 1926 annehmen, wenn ihm C eine bis 1932 reichende Verzinsung von 5% halbjährlich zusichert? [Der Zinsfuß von halbjährlich 5% werde als wirklicher Zinsfuß angenommen. Die Zinszahlung erfolgt in jedem Falle halbjährlich.] Die Hypothek hat nach der Aufwertung den Wert 15000 *RM*. A hat von B zu beanspruchen am 1. 7. 26 und jedes folgende Halbjahr (viermal) 225 *RM* Zinsen, am 1. 7. 28 und jedes folgende Halbjahr (achtmal) je 375 *RM* Zinsen, ferner am 1. 1. 32 das Kapital von 15000 *RM*, also insgesamt auf Zeitpunkt 12 [1. 1. 32] bezogen:

$$225 \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} \cdot 1{,}05^8 + 375 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{0{,}05} + 15000.$$

Statt dessen zahlt B am Zeitpunkt Null [1. 1. 26] den Betrag x, also für Zeitpunkt 12 berechnet $x \cdot 1{,}05^{12}$, daher ist:

$$x \cdot 1{,}05^{12} = 225 \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05} 1{,}05^8 + 375 \frac{1{,}05^8 - 1}{0{,}05} + 15000$$

$$x \cdot 1{,}05^{12} = 20014; \qquad x = 11145.$$

A kann also die Rückzahlung mit 11145 *RM* annehmen.

16. Mit welcher Summe wäre die Rückzahlung am 1. Januar 1927 zu leisten, wenn die wirkliche Verzinsung 3% im Halbjahr beträgt?

XXIII. Graphische Darstellungen.

Um sich ein Bild von dem Anwachsen einer Rente zu machen, trägt man auf dem Grundstrahl gleiche Strecken ab und errichtet in den Punkten 0, 1, 2, 3, . . . die dem Ende der einzelnen Jahre entsprechen, Lote, deren Länge die Endwerte der Renten an den betreffenden Zeitpunkten darstellen. [Gl. (1) und (2)]. Führe dies z. B. für $\varrho = 1$, $p = 4$ aus. Ebenso können die Barwerte dargestellt werden. Auch die Gleichungen (13) und (14) können so veranschaulicht werden. Die Endpunkte der Lote liegen auf Exponentialkurven.

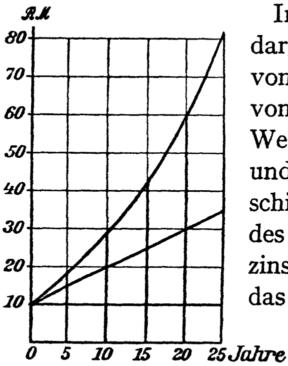


Fig. 6.

In Fig. 6 ist das Anwachsen des Kapitals $K_0 = 10$ dargestellt, das durch die nachschüssige Rente vom Ratenbetrag 1 vermehrt wird. [Gl. 13.] Die vom Zeitpunkt 10 wagerechte Gerade deute den Wert des Kapitals an, das nicht durch die Rente und nicht durch Zinsen vermehrt wird. Die schiefe Gerade gibt zu jedem Zeitpunkt den Wert des Kapitals mit der Rente an, aber ohne Verzinsung. Die Strecken bis zur Kurve bedeuten das Kapital und die Rente nebst 5 % Zinsen und Zinseszinsen.

Fig. 7 gibt ein Bild des Tilgungsplanes I. Die Zahlen am Grundstrahl bezeichnen das Ende der einzelnen Jahre, die Länge des Lotes gibt für jeden Zeitpunkt ein Bild für die Größe der noch zu tilgenden Schuld. Die Endpunkte der Lote liegen auf einer Kurve, die von einer Geraden nicht allzusehr abweicht.

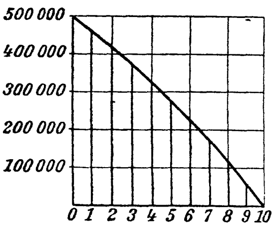


Fig. 7.

In Figur 8 ist die Verteilung der Annuität auf Zinsen und Tilgung für denselben Tilgungsplan veranschaulicht. Die Zahlen auf dem Grundstrahl bedeuten die einzelnen Jahre, die Lote in den Punkten, gerechnet bis zur wagerechten Geraden, bedeuten die Annuität. Die unter der Kurve liegenden ausgezogenen Strecken bedeuten die Zinsen des betreffenden Jahres, die darüberliegenden punktierten Teile bedeuten die Tilgung dieses Jahres. Die Annuität bleibt in allen Jahren gleich; sie verteilt sich aber nicht gleichmäßig auf Zinsen und Tilgung. Die Zinsen nehmen mit der Zeit ab, die Tilgung nimmt zu.

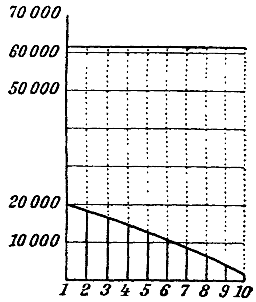


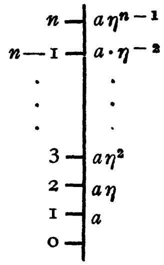
Fig. 8.

Aufgaben:

1. Stelle wie in Fig. 7 und 8 andere Tilgungspläne graphisch dar.
2. Stelle Renten mit veränderlichen Ratenzahlungen graphisch dar. (XXIV. und XXV.)

XXIV. Renten mit Ratenzahlungen, die in geometrischer Reihe anwachsen.

Bei einer nachschüssigen Rente sei die erste Rate a, die zweite $a \cdot \eta$, die dritte $a\eta^2, \ldots,$ die n^{te} $a\eta^{n-1}$. Die Raten wachsen also in geometrischer Reihe mit dem Quotienten η. Auf den Zeitpunkt n datiert haben alle Zahlungen den Wert:



$$G = a \cdot \eta^{n-1} + a\eta^{n-2}q + \cdots + a\eta^2 q^{n-3} + a\eta q^{n-2} + a q^{n-1}.$$

Die rechte Seite stellt eine geometrische Reihe mit n Gliedern und dem Quotienten $\frac{q}{\eta}$ dar; ihre Summe ist:

$$G = a \cdot \eta^{n-1} \frac{\left(\frac{q}{\eta}\right)^n - 1}{\frac{q}{\eta} - 1} = a \cdot \frac{q^n - \eta^n}{q - \eta}. \tag{20}$$

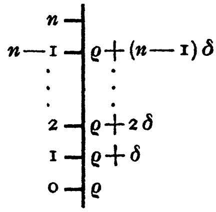
Würde die Rente vorschüssig bezahlt, so wäre jede einzelne Zahlung um ein Jahr länger zu verzinsen, also wäre der Endwert:

$$G' = aq \frac{q^n - \eta^n}{q - \eta}. \tag{21}$$

Ist im besonderen $\eta = q$, so versagen die Gleichungen (20) und (21), weil der Bruch zu $\frac{0}{0}$ wird. Man erhält aber leicht aus dem nicht zusammengefaßten Wert von G die Summe $G = n \cdot a q^{n-1}$ bzw. $G' = n a q^n$.

XXV. Renten mit Ratenzahlungen, die in arithmetischer Reihe steigen oder fallen.

Eine Rente mit n Ratenzahlungen werde vorschüssig bezahlt. Die erste Rate sei ϱ, die zweite $\varrho + \delta$, die dritte $\varrho + 2\delta, \ldots,$ die n^{te} $\varrho + (n-1)\delta$. Auf den Zeitpunkt n datiert haben die Ratenzahlungen zusammen den Wert:



$$\begin{aligned} E_v = {} & [\varrho + (n-1)\delta]\, q + [\varrho + (n-2)\delta]\, q^2 \\ & + \cdots + (\varrho + 2\delta)\, q^{n-2} + (\varrho + \delta)\, q^{n-1} + \varrho q^n \end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{aligned} E_v = {} & [\varrho q + \varrho q^2 + \cdots + \varrho q^{n-1} + \varrho q^n] \\ & + [(n-1)\delta q + (n-2)\delta q^2 + \cdots + 2\delta q^{n-2} + \delta q^{n-1}]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer ist nach (2) $\varrho q \frac{q^n - 1}{q - 1}$; die zweite Klammer enthält eine Reihe von der Form, wie sie in A (30) behandelt wurde, wobei zu beachten ist, daß die vorliegende Reihe nur $n - 1$ Glieder hat (statt n in 30). Es ist also in A (31) an Stelle von n zu setzen $n-1$, an Stelle von a der Wert $\delta \cdot q$; so ergibt sich für den Ausdruck in der zweiten Klammer:

$$\delta q^2 \frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} - \frac{(n-1)\delta q}{q-1}, \qquad \text{also wird:}$$

$$E_v = \varrho q \frac{q^n-1}{q-1} + \delta q^2 \frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} - \frac{(n-1)\delta q}{q-1}. \tag{22}$$

Wäre die Rente nachschüssig bezahlt worden, so wäre jede Rate, also auch die Gesamtsumme ein Jahr weniger verzinst worden, also wäre der Endwert $E_n = E_v : q$ oder:

$$E_n = \varrho \frac{q^n-1}{q-1} + \delta q \frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} - \frac{(n-1)\delta}{q-1}. \tag{23}$$

Aus den Endwerten E_v und E_n ergeben sich die entsprechenden Barwerte durch Division mit q^n.

Unter Benutzung der Abkürzungen (5) und (6) kann geschrieben werden:

$$E_v = \varrho s_{\overline{n}|} + \frac{\delta q}{q-1} \cdot s_{\overline{n-1}|} - \frac{(n-1)\delta q}{q-1} = \varrho s_{\overline{n}|} + \frac{\delta q}{q-1}[s_{\overline{n-1}|} - (n-1)]. \tag{22a}$$

$$E_n = \varrho \cdot \mathfrak{s}_{\overline{n}|} + \frac{\delta q}{q-1}\left[\mathfrak{s}_{\overline{n-1}|} - \frac{(n-1)}{q}\right] = \varrho \mathfrak{s}_{\overline{n}|} + \frac{\delta}{q-1}[s_{\overline{n-1}|} - (n-1)]. \tag{23a}$$

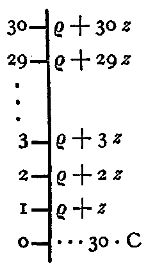
Nehmen die Raten in arithmetischer Reihe ab, so ist für δ der entsprechende negative Wert zu setzen.

XXVI. Die Ablösungsschuld des Deutschen Reiches mit Auslosungsrecht.

Das Deutsche Reich lost von der Ablösungsschuld mit dem Jahre 1926 beginnend am Ende jedes Jahres $\frac{1}{30}$ der Auslosungsscheine aus, so daß die Schuld in 30 Jahren getilgt ist. Die ausgelosten Scheine werden mit dem 5fachen Nennwert nebst $4\frac{1}{2}$% Zinsen für das Jahr vom 1. Januar 1926 bis zum Ende des bei der Ziehung laufenden Kalenderjahres eingelöst. So wird ein Ende 1926 ausgeloster Schein vom Nennwert 100 *RM* zurückgezahlt mit 500 *RM* + 22,50 *RM* Zinsen. Ein Ende 1956 ausgeloster Schein vom Nennwert 100 *RM* wird eingelöst mit 500 *RM* + 22,50 · 30 *RM* Zinsen, also mit 1175 *RM*. [Von der Berechtigung des Reiches, die Auslosungen zu verstärken, möge hier abgesehen werden.]

Der Kurs des Wertpapieres wird also dauernd steigen und kurz vor der letzten Auslosung $C = 1175$ sein. Um den Kurs am 1. Januar 1926 zu finden, nehmen wir an, die gesamte Schuld vom Nennwerte $30\,y$ werde von einem Manne aufgekauft. Dieser erhält dann durch Auslosung jährlich den Gegenwert für den Nennwert y. Die Rechnung hängt nicht ab von der Höhe der Schuld; d. h. wir können weiterhin die Vereinfachung machen, daß die gesamte Schuld nur 30 Schuldscheine von je 100 *RM* Nennwert enthält, von denen in jedem Jahr ein Schein ausgelost wird. Der Besitzer der Schuld hätte dann beim Aufkauf der 30 Scheine zum Kurs C den Betrag $30\,C$ zu leisten und würde dafür erhalten: Ende 1926: $500 + 22{,}5$, Ende 1927: $500 + 22{,}5 \cdot 2$, Ende 1928: $500 + 22{,}5 \cdot 3$, usf., Ende 1956: $500 + 22{,}5 \cdot 30$. Zur Abkürzung setzen wir $22{,}5 = z$ und $500 = \varrho$. (Vgl. Zeitgerade.)

Der wirkliche Zinsfuß sei p und es sei $1 + \frac{p}{100} = q$. Der Besitzer der Schuldscheine hat also den Betrag 30 C bezahlt oder auf den Zeitpunkt n berechnet $30\,C \cdot q^n$. Er erhält dafür die an die Zeitgerade angeschriebenen Beträge, die auf den Zeitpunkt n datiert den Wert haben:



$$(\varrho + 30\,z) + (\varrho + 29\,z)q + \cdots + (\varrho + 3\,z)q^{27} + (\varrho + 2\,z)q^{28} + (\varrho + z)\,q^{29}$$

oder anders geordnet:

$$[\varrho + \varrho q + \varrho q^2 + \cdots + \varrho q^{29}] + [30z + 29z \cdot q + \cdots + 2zq^{28} + z \cdot q^{29}].$$

Der Wert der ersten Klammer ist nach (1) $\varrho\frac{q^{30} - 1}{q - 1}$; die Summe in der zweiten Klammer kann aus der Summenformel der zusammengesetzten Reihe [vgl. A (30) und (31)] abgelesen werden für $n = 30$; sie ist:

$$zq\frac{q^{30} - 1}{(q - 1)^2} - \frac{30\,z}{q - 1};$$

also ist: $$30\,C q^{30} = \varrho\frac{q^{30} - 1}{q - 1} + zq\frac{q^{30} - 1}{(q - 1)^2} - \frac{30\,z}{q - 1}$$

oder: $$C = \frac{\varrho}{30}\frac{q^{30} - 1}{q^{30}(q - 1)} + \frac{zq}{30\,(q - 1)} \cdot \frac{q^{30} - 1}{q^{30}(q - 1)} - \frac{z}{q^{30}(q - 1)}$$

oder: $$C = \frac{\varrho}{30} \cdot a_{\overline{30}|} + \frac{zq}{30\,(q - 1)} \cdot a_{\overline{30}|} - \frac{z}{q - 1} \cdot v^{30}$$ oder:

$$C = \left(\frac{\varrho}{30} + \frac{zq}{30\,(q - 1)}\right) a_{\overline{30}|} - \frac{z}{q - 1} \cdot v^{30}. \tag{24}$$ [1]

Ist z. B. der wirkliche Zinsfuß 5%, so liest man aus Tafel IV den Wert $a_{\overline{30}|} = 15{,}37247$ und aus Tafel II $v^{30} = 0{,}23138$ ab, ferner ist $\varrho = 500$, $z = 22{,}5$ zu setzen. So ergibt sich $C = 394{,}18$; d. h. bei einem wirklichen Zinsfuß zu 5% hat die Ablösungsschuld mit Aus-

1) Neuerdings wird das Papier mit dem Kurs für den Auslosungswert $\varrho = 500$ gehandelt, also ist statt des berechneten Wertes C der Wert $\frac{C}{5}$ zu setzen.

losungsscheinen am 1. Januar 1926 den Kurs 394,18. Je höher der Zinsfuß ist, desto niedriger ist der Kurs.

Soll der Kurs nach der m^{ten} Auslosung bestimmt werden, z. B. nach der zwölften Auslosung, so ist an der Zeitgeraden am Zeitpunkt m (12) der Betrag $(30 - m)\,C$ (bzw. $18\,C$) anzutragen; es fallen außerdem die Raten:

$$(\varrho + z),\ (\varrho + 2z), \ldots (\varrho + mz) \quad [\text{bzw. } (\varrho + z),\ (\varrho + 2z) \ldots (\varrho + 18z)]$$

weg.

XXVII. Aufgaben über Renten mit veränderlichen Ratenzahlungen.

1. Jemand hat als Versicherungsprämie jährlich im voraus 562 *RM* zu zahlen. Die Prämie ermäßigt sich bei der zweiten Zahlung um 10 *RM*, bei der dritten um 20 *RM*, usf. Wie groß ist die 14. Prämie? Welche Summe hat die Versicherungsbank nach 14 Jahren im ganzen erhalten? (4,5 %.)

2. Welche einmalige Versicherungsprämie hätte in voriger Aufgabe der Versicherte sofort bezahlen müssen, damit die Versicherungsbank den gleichen Betrag empfangen hätte?

3. Für Pacht eines Gutes hat ein Pächter im ersten Jahre nachschüssig 5000 *RM* zu zahlen, in jedem folgenden Jahre 100 *RM* mehr als im vorausgehenden. Was hat der Pächter nach Ablauf der 10jährigen Pachtzeit im ganzen bezahlt, und welche einmalige Pachtsumme hätte er statt dessen am Anfang der Pachtzeit zahlen können? (4 %.)

4. Rechne Aufgabe 3 für den Fall, daß die erste Rate 2800 *RM*, der jährliche Zuschlag 120 *RM* und die Pachtdauer 6 Jahre beträgt bei einem Zinsfuß von 3,5 %.

5. Ein Unternehmer hat im ersten Jahr 12600 *RM* Überschuß, in jedem folgenden 10 % mehr als im vorhergehenden. Wie groß ist der Überschuß des 8. Jahres, und wie groß ist das gesamte Guthaben nach 8 Jahren, wenn alle Überschüsse je am Ende des Jahres zu $4\frac{1}{4}$ % verzinslich angelegt wurden?

6. Rechne Aufgabe 5, wenn der Überschuß in jedem folgenden Jahr a) um 15 % größer, b) 1,2 mal, c) 1,5 mal so groß ist als im vorausgehenden.

7. Desgl., wenn der Überschuß in jedem folgenden Jahr a) 0,9; b) 0,8; c) 0,5; d) 0,1 mal so groß ist als im vorausgehenden.

8. Desgl., wenn der Überschuß in jedem folgenden Jahr um $4\frac{1}{2}$ % größer ist als im vorausgehenden.

9. Berechne den Kurs der Ablösungsschuld des Deutschen Reiches am 1. Januar 1926 bei einer wirklichen Verzinsung von a) 3 %, b) 3,5 %, c) 4 %, d) 4,5 %, e) 5 %, f) 5,5 %, g) 6 %.

10. Berechne den Kurs der Ablösungsschuld unmittelbar vor der 10. Auslosung für die Zinssätze in 9.

11. Desgl. unmittelbar nach der 10. Auslosung.

12. Desgl. unmittelbar vor und nach der 20. Auslosung.

13. Stelle das Ergebnis der Aufgaben 9—12 graphisch dar. [Auf dem Grundstrahl die Jahre, auf den entsprechenden Loten den Kurs zu dem betreffenden Zinsfuß unmittelbar vor (nach) der betreffenden Auslosung.]

D. Kombinatorik.

I. Einführung in die Kombinatorik.

Zum leichteren Verständnis der nachfolgenden Begriffe soll eine Aufgabe vorausgeschickt werden. Es seien die Ziffern 1, 2, 3, 4 gegeben; aus ihnen sollen Zahlen gebildet werden. Dabei kann entweder verlangt werden, daß jede Zahl alle Ziffern enthält, aber in jeder beliebigen Reihenfolge, oder es wird verlangt, daß jede Zahl nur einen Teil der vier Ziffern enthält. Jm ersten Falle erhält man folgende 24 Zahlen: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321. Diese 24 Zusammenstellungen der Ziffern heißen Permutationen. Soll eine Zahl nicht alle Ziffern enthalten, sondern nur einen Teil davon, etwa jedesmal nur 3, so ergeben sich folgende 24 Möglichkeiten: 123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432. Diese 24 Zusammenstellungen der Ziffern heißen Variationen der vier Ziffern zur dritten Klasse. Wird in diesem Falle noch die Einschränkung gemacht, daß alle Zahlen, die aus denselben Ziffern gebildet sind, nur einmal zu zählen sind, so gelten z. B. die sechs Zahlen 123, 132, 213, 231, 312, 321 nur als eine einzige. Die Reihenfolge der Ziffern ist also dabei gleichgültig. Es bleiben von den 24 nur die vier folgenden übrig: 123, 124, 134, 234. Diese Zusammenstellungen heißen Kombinationen der vier Ziffern 1, 2, 3, 4 zur dritten Klasse.

Die Aufgabe kann in der verschiedensten Weise auf andre Dinge bezogen werden. Statt der vier Ziffern können etwa vier Farben gewählt werden. (1 = rot, 2 = gelb, 3 = grün, 4 = blau.) Mit diesen vier Farben können dann (etwa durch farbige Glühlampen oder Fahnen) Zeichen gegeben werden. Im ersten Falle würde jedes der 24 möglichen Zeichen durch sämtliche Farben, aber in verschiedener Reihenfolge gegeben; im zweiten Falle würde jedes Zeichen nur drei Farben enthalten und diese wieder in jeder möglichen Reihenfolge; im letzten Falle würde es sich um die vier Zeichen handeln, die durch die Farben gebildet sind, deren Reihenfolge keinen Einfluß auf die Bedeutung der Zeichen hat.

Allgemein nennt man die Dinge, die in verschiedener Art zusammengestellt werden, die Elemente. Jede Zusammenstellung heißt Komplexion. Enthalten die Komplexionen alle n gegebenen Elemente, aber immer in andrer Reihenfolge, so heißen sie Permutationen. Komplexionen, die nur k der n gegebenen Elemente enthalten, heißen Variationen, wenn die Reihenfolge der Elemente von Bedeutung ist, dagegen Kombinationen, wenn die Reihenfolge der Elemente gleichgültig ist. Die gegebenen Elemente bezeichnet man meist mit $a, b, c, \ldots$ oder $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder $1, 2, 3, \ldots$

II. Permutationen.

In I. sind die 24 Permutationen der vier Elemente 1, 2, 3, 4 aufgezählt. Es werde nun die allgemeine Aufgabe gestellt, die Anzahl P_n aller möglichen Permutationen von n gegebenen Elementen zu bestimmen. Bei einem Element a ist offenbar $P_1 = 1$. Für zwei Elemente a, b gibt es zwei Permutationen, da b sowohl hinter a als auch vor a treten kann; es ist also $P_2 = 1 \cdot 2$. Sind drei Elemente a, b, c gegeben, so kann bei jeder der P_2 Permutationen der Elemente a, b das Element c sowohl an den Schluß, in die Mitte und an den Anfang gesetzt werden. Aus ab läßt sich so abc, acb, cab bilden, aus ba entsprechend bac, bca, cba. Es ist also $P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Allgemein ist $P_n = n \cdot P_{n-1}$; denn hat man alle Permutationen der $n-1$ Elemente aufgestellt, so erhält man die für n Elemente, wenn man das n^{te} Element in jeder Permutation der $n-1$ Elemente entweder an letzter Stelle, oder an vorletzter Stelle, usf., oder an erster Stelle einfügt; d. h. aus jeder Permutation der $n-1$ Elemente werden n Permutationen der n Elemente. Es ist also $P_n = n \cdot P_{n-1}$. Da nun $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ ist, so wird $P_4 = 4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, usf., allgemein ist:

$$(1) \qquad \boldsymbol{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Auf der rechten Seite von (1) steht das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n; es wird bezeichnet mit $n!$ (gelesen „n Fakultät"). Die Werte für $n!$ wachsen mit steigendem Wert von n sehr rasch an. Es ist z. B. $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$; $8! = 40320$; $9! = 362880$; $10! = 3628800$; usf.

Aus den 10 Ziffern 0 bis 9 lassen sich also $10! = 3628800$ Zahlen bilden, die alle 10 Ziffern enthalten, aber jede nur einmal.

III. Variationen ohne Wiederholung.

Wenn von den n gegebenen Elementen in jeder Komplexion je k unter sich verschiedene Elemente zusammengestellt werden und jede andre Anordnung der k Elemente eine neue Komplexion bedeutet, so spricht man von Variationen der n Elemente zur k^{ten} Klasse ohne Wiederholung. Unter I. wurden die 24 Variationen der vier Elemente 1, 2, 3, 4 zur dritten Klasse ohne Wiederholung angeschrieben. Allgemein bezeichnet man ihre Anzahl mit $V_n^{(k)}$. Nun ist offenbar $V_n^{(1)} = n$; denn jedes der n Elemente $a, b, c, \ldots$ kann nur auf eine Art eine Variation zur ersten Klasse bilden. Die Variationen zur zweiten Klasse entstehen aus denen zur ersten dadurch, daß hinter jedes der n Elemente jedes der $(n - 1)$ übrigen Elemente tritt; so entstehen aus a die Variationen $ab, ac, ad, \ldots$, aus b die Variationen $ba, bc, bd, \ldots$ usw. Man erkennt sofort, daß auf diese Weise in der Tat alle Variationen zur zweiten Klasse entstehen und daß keine von ihnen doppelt auftritt. Es ist also $V_n^{(2)} = n(n-1)$. Wenn hinter jede Variation zur zweiten Klasse der Reihe nach jedes der $(n-2)$ nicht darin enthaltenen Elemente tritt, so ergeben sich die Variationen zur dritten Klasse. Auch hier sind wieder alle Komplexionen verschieden; denn alle etwa mit bd gebildeten Variationen $bda, bdc, bde, \ldots$ sind unter sich verschieden und verschieden von allen mit einer andern Variation zur zweiten Klasse, etwa mit ab, beginnenden. Auch sieht man leicht, daß in der Tat alle Komplexionen auf diese Art erhalten werden. Es ist also $V_n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$. Setzt man die Überlegung in gleicher Weise fort, so findet man:

$$V_n^{(k)} = (n-k+1)\, V_n^{(k-1)}, \qquad \text{also:}$$

$$V_n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Der Ausdruck ist das Produkt aller ganzen Zahlen von $(n-k+1)$ bis n.

IV. Kombinationen ohne Wiederholung.

Unter den Kombinationen von n Elementen zur k^{ten} Klasse ohne Wiederholung versteht man alle Komplexionen von je k der gegebenen Elemente, wobei kein Element mehrfach vorkommen darf und die Reihenfolge der Elemente gleichgültig ist. Unterscheiden sich zwei Komplexionen also nur durch die Reihenfolge der Elemente, so gelten sie als dieselbe Komplexion. Unter I. sind die vier Kombinationen der vier Elemente 1, 2, 3, 4 zur dritten Klasse ohne Wiederholung angegeben. Die Anzahl aller Kombinationen von n Elementen zur k^{ten} Klasse ohne Wiederholung wird mit $C_n^{(k)}$ bezeichnet. Aus den Kombinationen der n Elemente zur k^{ten} Klasse ohne Wiederholung findet man die entsprechenden Variationen, wenn man jede Kombination in jeder beliebigen Reihenfolge schreibt, d. h. von jeder Kombination zur k^{ten} Klasse alle $k!$ Permutationen bildet. Es ist also $V_n^{(k)} = C_n^{(k)} \cdot k!$ oder:

$$(3) \qquad C_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \cdot V_n^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \binom{n}{k}.$$

Das Zeichen $\binom{n}{k}$ bedeutet also einen Bruch, dessen Zähler und Nenner je k Faktoren haben, wobei der erste Faktor im Zähler n ist und jeder folgende um 1 kleiner und der Nenner als Faktoren alle ganzen Zahlen von 1 bis k hat.

Beispiel: Wieviel Zeichen lassen sich mit fünf verschiedenfarbigen Glühlampen geben [rot (r), gelb (g), blau (b), violett (v), weiß (w)], wenn zu jedem Zeichen drei der fünf Glühlampen benutzt werden und die Reihenfolge der Glühlampen ohne Einfluß ist? Antwort: $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$. Es sind folgende Zeichen: *rgb, rgv, rgw, rbv, rbw, rvw, gbv, gbw, gvw, bvw.*

V. Aufgaben zur Kombinatorik.

1. In wieviel Punkten schneiden sich 8 Gerade, wenn nie mehr als zwei Gerade durch denselben Punkt gehen und nie zwei Gerade parallel sind?
2. Wieviel Verbindungsgeraden lassen sich durch 12 Punkte legen, wenn niemals mehr als zwei in einer Geraden liegen?
3. Wieviel Diagonalen hat ein 15-eck?
4. Wieviel Diagonalen hat ein n-eck?
5. Wieviel Dreiecke werden durch 7 regellos verteilte Punkte bestimmt?
6. Auf wieviel Weisen kann der Skat (2 Karten) aus einem Spiel von 32 Karten gebildet werden?
7. Auf wieviel Arten kann im Skatspiel ein Spieler verschiedene (10) Karten bekommen?
8. Wieviel verschiedene Würfe lassen sich mit 3 Würfeln machen, so daß alle Würfel verschiedene Augenzahlen aufweisen?
9. Wie ändert sich das Ergebnis der vorigen Aufgabe, wenn die drei Würfel, etwa durch Farben unterschieden werden?
10. Auf wieviel Arten können von 30 Losen drei Gewinne gezogen werden?
11. Wie lautet das Ergebnis in Aufgabe 10, wenn auch die Reihenfolge, in der die Lose gezogen werden, berücksichtigt wird?
12. In wieviel verschiedenen Reihenfolgen können 8 Personen auf einer Bank Platz nehmen?

13. Von 10 Schülern sollen 2 auf der vorderen Bank sitzen; auf wieviel Arten kann die Auswahl getroffen werden, wenn a) es gleichgültig ist, wer von beiden rechts oder links sitzt, b) es nicht gleichgültig ist?

14. Berechne die Werte von:

$$\alpha)\ 12!\quad \beta)\ \binom{5}{3},\quad \gamma)\ \binom{20}{4},\quad \delta)\ \binom{20}{16},\quad \varepsilon)\ \frac{10!}{3!\,4!}.$$

15. Zeige an Zahlenbeispielen, daß:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ ist, z. B. } \binom{8}{3} = \binom{8}{5} \text{ oder } \binom{11}{4} = \binom{11}{7} \text{ usw.}$$

16. Wieviel Zahlen lassen sich a) aus den Ziffern 1, 5, 7, b) 2, 4, 6, 8, 0 bilden, so daß jede Ziffer in jeder Zahl einmal vorkommt?

17. Wieviel Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 bilden, wenn jede Zahl a) zwei, b) drei dieser (verschiedenen) Ziffern enthält?

18. Wie gestaltet sich das Ergebnis von 17, wenn von allen Zahlen mit denselben Ziffern jedesmal nur die kleinste genommen wird?

19. Auf wieviel Arten lassen sich 12 Karten unter drei Personen verteilen, daß jede 4 Karten erhält?

20. Auf wieviel Arten lassen sich die 32 Karten des Skatspieles verteilen? (Drei Personen erhalten je 10 Karten, 2 Karten liegen im Skat.)

21. Bei welchen Aufgaben kann man ohne die Formeln der Kombinatorik durch einfache Überlegung leicht zum Ziele kommen?

E. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

I. Begriff der Wahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat ihren Anfang genommen von der mathematischen Behandlung der Glücksspiele, doch findet sie heute auch vielfach Anwendung auf die Statistik, das Versicherungswesen und die Physik. Wenn man einen Würfel wirft, so läßt sich nicht sagen, welche Fläche nach oben kommt; für jede der sechs Flächen besteht die gleiche Möglichkeit. Ebenso kann in einem gut gemischten Spiele Karten jede der 32 Karten zufällig oben liegen oder bei wahllosem Ziehen herausgezogen werden. Wenn m Fälle möglich und gleichberechtigt und nur g davon für das Eintreffen eines Ereignisses günstig sind, so heißt der Bruch:

(1) $$w = \frac{g}{m} \text{ (wo } g < m \text{ ist)}$$

die mathematische Wahrscheinliclikeit für das Eintreffen des Ereignisses. Die Wahrscheinlichkeit, eine 4 zu würfeln, ist demnach $w = \frac{1}{6}$, weil 6 gleichberechtigte Fälle möglich sind, aber nur einer günstig, nämlich der, daß die 4 oben liegt. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Kartenspiel von 32 Karten das Kreuzas zu ziehen, $w = \frac{1}{32}$. Enthält eine Urne 10 rote, 6 weiße und 4 grüne Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote zu ziehen, $w_r = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, eine weiße zu ziehen, $w_w = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, eine grüne zu ziehen, $w_g = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Kugeln gut gemischt sind und das Ziehen wahllos geschieht, weil nur dann alle Fälle gleichberechtigt sind.

II. Grenzwerte von w.

In (1) wurde vorausgesetzt, daß w ein echter Bruch, also $g < m$ ist. Wird $g = m$, also $w = 1$, so handelt es sich nicht mehr um ein unbestimmtes Ereignis, weil ja alle Fälle günstig sind. Ähnliches gilt für $g = 0$, also $w = 0$; hier liegt überhaupt kein günstiger Fall vor. $w = 1$ bedeutet also, daß das Ereignis sicher eintreten muß, $w = 0$ sagt aus, daß es sicherlich nicht eintritt. Sind z. B. in einer Urne nur n rote Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, $\frac{n}{n} = 1$, die eine weiße zu ziehen, $\frac{0}{n} = 0$, d. h. wenn ich aus der Urne eine Kugel ziehe, so ist sie sicher rot und sicher nicht weiß.

III. Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Wenn unter m möglichen Fällen g günstige und u ungünstige sind, wo $g + u = m$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $w = \frac{g}{m}$, für das Nichteintreten, die sogenannte entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, $w_e = \frac{u}{m}$. Nun ist aber:

$$w + w_e = \frac{g}{m} + \frac{u}{m} = \frac{g+u}{m} = 1 \qquad \text{oder:}$$

$$w_e = 1 - w, \tag{2}$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ergänzen sich zur Einheit.

IV. Historisches Beisp:el für fehlerhafte Auszählung der Fälle.

Die Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung bieten i. a. eine doppelte Schwierigkeit: Einmal gilt es, zu untersuchen, ob alle in Frage kommenden Fälle gleichberechtigt sind, dann kommt es darauf an, diese oft große Zahl von Fällen auszuzählen. Für letzteres leistet die Kombinatorik wertvolle Dienste. Am häufigsten führt die erste Schwierigkeit zu Fehlern. Ist z. B. der Würfel nicht exakt in Material und Form, oder werden aus dem Kartenspiel gezogene Karten oder Kugeln aus der Urne nach dem erstmaligen Ziehen nicht wieder richtig eingemischt, so sind gewisse Ereignisse bevorzugt.

Ein Freund Galileis machte folgenden Trugschluß: Er behauptete, wenn man mit drei Würfeln würfele, so sei die Zahl der günstigen Fälle für die Augensumme 9 die gleiche wie für die Summe 10. Bedeutet das Symbol 524, daß von den drei Würfeln einer die Augenzahl 5, einer 2 und einer 4 zeigt, so sind nach seiner Ansicht für die Augensumme 9 folgende sechs Fälle günstig 126, 135, 144, 225, 234, 333, entsprechend für die Augensumme 10 die sechs Fälle 136, 145, 226, 235, 244, 334. In Wirklichkeit sind aber die Fälle 333 und 234 nicht gleichberechtigt; denn die Augenzahl 333 kann nur auf eine einzige Art zustande kommen, nämlich wenn alle drei Würfel die 3 zeigen. Dagegen kann der Wurf 234 auf sechs verschiedene Arten entstehen; sind die drei Würfel numeriert oder durch ihre Größe oder Farbe unterschieden, so erscheint dieser Wurf entweder als 234 oder 243 oder 324 oder 342 oder 423 oder 432, wobei sich die erste Ziffer auf den ersten, die zweite auf den zweiten, die dritte auf den dritten Würfel bezieht. Entsprechend sind die Würfe 126, 135, ... sechsfach zu zählen, die Würfe 144, 255, 226, ... dreifach. Es ergeben sich also für die Augensumme 9 im ganzen $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ günstige Fälle, für die Augensumme 10 entsprechend $6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$ günstige Fälle. Die Gesamtzahl der möglichen Fälle ist 216; denn zu jedem der 6 Würfe des ersten Würfels können 6 Würfe des zweiten hinzutreten und mit jedem der so erhaltenen 36 Augenpaare der beiden ersten Würfel kann jeder der 6 Würfe des dritten Würfels zusammentreffen, so daß die Gesamtzahl der Möglichkeiten 216 ist. Die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln die Augenzahl 9 zu werfen, ist $w_9 = \frac{25}{216}$; die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 10 ist $w_{10} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$, also größer als w_9. Entsprechend findet man die Wahrscheinlichkeit w_3 für die Augensumme 3, w_4 für die Augensumme 4, usf. Es ist:

$$w_3 = \frac{1}{216}, \quad w_4 = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}, \quad w_5 = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}, \quad w_6 = \frac{10}{216} = \frac{5}{108},$$

$$w_7 = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}, \quad w_8 = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}, \quad w_9 = \frac{25}{216}, \quad w_{10} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8},$$

$$w_{11} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}, \quad w_{12} = \frac{25}{216}, \quad w_{13} = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}, \quad w_{14} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72},$$

$$w_{15} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}, \quad w_{16} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}, \quad w_{17} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}, \quad w_{18} = \frac{1}{216}.$$

[Weise dies nach!]

Die Gleichungen $w_3 = w_{18}$; $w_4 = w_{17}$; ... werden sofort verständlich, wenn man beachtet, daß beim Umlegen eines Würfels die zu 7 ergänzende Augenzahl nach oben kommt, beim Umlegen aller 3 Würfel also die zu 21 ergänzende Augensumme.

Ein weiteres Beispiel, das wegen der anfänglich falschen Lösung eine geschichtliche Bedeutung erlangt hat, siehe unter X.

V. Vollständige oder totale Wahrscheinlichkeit.

Der Eintritt eines Ereignisses E möge erfüllt sein, wenn eines der Ereignisse E_1, E_2, E_3, ..., die alle voneinander unabhängig sind, eintritt. Im ganzen mögen m Fälle möglich sein, darunter g_1 für das Ereignis E_1 günstige, g_2 für das Ereignis E_2, usf., wo $g_1 + g_2 + g_3 + \cdots = g \leqq m$ ist. Dann ist für den Eintritt des Ereignisses E_1 die Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{g_1}{m}$, für das Ereignis E_2 entsprechend $w_2 = \frac{g_2}{m}$, usf. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E ist:

$$w_t = \frac{g_1 + g_2 + \cdots}{m} = \frac{g}{m},$$

da alle $g_1 + g_2 + \cdots = g$ Fälle für den Eintritt von E günstig sind. Es ist also:

$$w_t = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots \tag{3}$$

Wir nennen w_t die totale oder vollständige Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit des „Entweder — oder“.

Beispiel 1: In einer Urne sind 3 weiße, 5 rote und 4 grüne Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine herausgezogene Kugel rot oder grün ist? Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ist $w_r = \frac{5}{12}$, eine grüne zu ziehen, $w_g = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote oder grüne Kugel zu ziehen, $w_t = w_r + w_g = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$. Bestätige das Ergebnis durch unmittelbares Abzählen der möglichen und günstigen Fälle.

Beispiel 2: Eine Urne enthält 8 rote und 14 grüne Holzkugeln und 9 rote und 5 grüne Eisenkugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, entweder eine rote oder eine Holzkugel zu ziehen? [$w = \frac{31}{36}$.] Warum ist folgende Überlegung falsch?

$$w_r = \frac{17}{36}; \; w_h = \frac{22}{36}; \; w = w_r + w_h = \frac{39}{36}.$$

VI. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Ein Ereignis E gelte als verwirklicht, wenn sowohl das Ereignis E_1, als auch E_2, als auch E_3, usf. eintritt. Für das Ereignis E_1 mögen m_1 mögliche und g_1 günstige Fälle bestehen, für das Ereignis E_2

entsprechend m_2 bzw. g_2 Fälle, usf. Dann sind die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse E_1, E_2, E_3, ... entsprechend:

$$w_1 = \frac{g_1}{m_1}, \quad w_2 = \frac{g_2}{m_2}, \quad w_3 = \frac{g_3}{m_3}, \ldots$$

Für das Ereignis E ergeben sich $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots$ mögliche Fälle und $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \ldots$ günstige Fälle, da jeder mögliche Fall von E_1 mit jedem möglichen Fall von E_2, usf. zusammentreffen kann und ebenso jeder günstige Fall von E_1 mit jedem günstigen Fall von E_2, usf. Also ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E:

$$w_z = \frac{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdots}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3} = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} \cdot \frac{g_3}{m_3} \cdots \qquad \text{oder:}$$

(4) $$w_z = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse. w_z heißt die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit oder die Wahrscheinlichkeit des „Sowohl-als-auch".

Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis E_1 von der Wahrscheinlichkeit w_1 unter den gleichen Bedingungen n mal nacheinander eintritt:

(5) $$w = w_1 \cdot w_1 \cdot w_1 \ldots = w_1^n.$$

Beispiel 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel von 32 Karten erst ein As, und wenn dies zurückgelegt ist, ein Karo zu ziehen? [$w_1 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; $w_2 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $w_z = w_1 \cdot w_2 = \frac{1}{32}$.]

Beispiel 2: Wie groß ist in Beispiel 1 des vorausgehenden Abschnittes V die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote Kugel zu ziehen und wenn diese zurückgelegt ist, eine grüne Kugel zu ziehen? [$w_r = \frac{5}{12}$; $w_g = \frac{1}{3}$; $w = \frac{5}{36}$.]

VII. Beispiel der zwei Urnen.

Eine Urne enthält a weiße und b schwarze Kugeln, eine zweite Urne enthält a' weiße und b' schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bei beliebigem Zugreifen aus einer der beiden Urnen eine weiße Kugel zieht?

Die Wahrscheinlichkeit, die erste Urne zu wählen, ist $\frac{1}{2}$, die, aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{a}{a+b}$; also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die erste Urne gewählt wird und aus ihr eine weiße Kugel gezogen wird, $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a+b}$ (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit). Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die zweite Urne gewählt wird, und daß aus ihr eine weiße Kugel gezogen wird, $\frac{1}{2} \cdot \frac{a'}{a'+b'}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß entweder aus der ersten oder aus der zweiten Urne eine weiße Kugel gezogen wird, ist daher:

$$w_1 = \frac{1}{2}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{a'}{a'+b'}$$

(vollständige Wahrscheinlichkeit).

Wären alle Kugeln in eine Urne gelegt worden, so hätte diese $a + b + a' + b'$ Kugeln enthalten, von denen $a + a'$ weiß waren. Die Wahrscheinlichkeit, aus dieser Urne eine weiße Kugel zu ziehen, ist demnach:

$$w_2 = \frac{a+a'}{a+a'+b+b'}.$$

w_1 und w_2 sind im allgemeinen verschieden.

Beispiel 1: In der ersten Urne sind 5 weiße und 3 schwarze Kugeln, in der zweiten sind 4 weiße und 8 schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist $w_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5+3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4+8}$ $= \frac{5}{16} + \frac{1}{6} = \frac{23}{48}$. Liegen alle Kugeln in einer Urne, so wird die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel $w_2 = \frac{9}{20}$. Es ist also w_1 von w_2 verschieden.

Beispiel 2: Die erste Urne enthält 5 weiße und 3 schwarze, die zweite 10 weiße und 6 schwarze Kugeln. Hier wird $w_1 = \frac{5}{8}$. Werden alle 24 Kugeln in einer Urne vereinigt, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen $w_2 = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$; also ist hier $w_1 = w_2$.

VIII. Relative Wahrscheinlichkeit.

Eine Urne enthalte unter 37 Kugeln 10 blaue, 8 rote, 12 grüne, 7 violette. Die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, ist $w_b = \frac{10}{37}$, entsprechend ist für die anderen Farben $w_r = \frac{8}{37}$, $w_g = \frac{12}{37}$, $w_v = \frac{7}{37}$. Wird nun eine Kugel gezogen, und es ist bekannt, daß sie entweder blau oder rot ist (d. h., daß sie nicht grün und nicht violett ist), so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie rot ist, $W_b = \frac{8}{18}$, daß sie blau ist, $W_b = \frac{10}{18}$. Man drückt dies auch so aus: Die Wahrscheinlichkeit, daß eine gezogene Kugel eher rot als blau ist, ist $W_r = \frac{8}{18}$, daß sie eher blau als rot ist, ist $W_b = \frac{10}{18}$. Man bezeichnet W_b und W_r als relative Wahrscheinlichkeiten; ihre Summe ist 1, ebenso wie die Summe der erstgenannten, der absoluten Wahrscheinlichkeiten $w_b + w_r + w_g + w_v = 1$ ist. Nun ist:

$$W_b = \frac{w_b}{w_b + w_r}, \quad W_r = \frac{w_r}{w_b + w_r},$$

wie sich leicht bestätigen läßt. Man findet also die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in bezug auf ein anderes, indem man die absolute Wahrscheinlichkeit des ersteren durch die Summe der beiden absoluten Wahrscheinlichkeiten dividiert. Dabei versteht man allgemein unter der relativen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in bezug auf ein anderes die Wahrscheinlichkeit, die man erhält, wenn man unter allen möglichen Fällen nur diejenigen berücksichtigt, die für das Eintreffen eines der beiden Ereignisse günstig sind. Alle übrigen Fälle werden vernachlässigt.

Wie die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in bezug auf mehrere andere aufzufassen ist, ist leicht einzusehen.

Beispiel 1: Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln eher 8 als 9 zu werfen, ist $W = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36} + \frac{4}{36}} = \frac{5}{9}$, weil $w_8 = \frac{5}{36}$, $w_9 = \frac{4}{36}$ ist.

Beispiel 2: Ist in dem obenerwähnten Beispiel bekannt, daß die gezogene Kugel nicht grün ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie eher blau als rot oder violett ist, $W = \frac{10}{37} : \left[\frac{10}{37} + \frac{8}{37} + \frac{7}{37}\right] = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

IX. Lottospiel.

In Genua wurden vor ca. 200 Jahren unter 100 Senatoren jährlich 5 durch das Los für die höchsten Ehrenstellen ausgewählt. Auf die Namen der fünf ausgewählten Senatoren wurden Wetten abgeschlossen. Hieraus entstand in verschiedenen Ländern das Lottospiel, bei dem unter 90 Nummern 5 gezogen wurden. Das Erraten einer Nummer hieß ein Auszug, das zweier Nummern eine Ambe; entsprechend war eine Terne, Quaterne, Quine das Erraten von 3, 4, 5 Nummern. Der Auszug hieß bestimmt, wenn noch angegeben wurde, an welcher der fünf Stellen die Nummer gezogen wurde. Die Wahrscheinlichkeit für einen unbestimmten Auszug ist $w_1 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, da 90 Nummern gezogen werden können, aber nur 5 einen Gewinn bringen. Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Auszug ist $w_1 = \frac{1}{90}$; denn hierbei kommt nur ein günstiger Fall in Frage. Denn wettet jemand z. B., daß an dritter Stelle die Nummer 51 gezogen wird, so kann an dritter Stelle jede der 90 Nummern gezogen werden, günstig aber ist nur der eine Fall, daß dies die Zahl 51 ist. Handelt es sich um das Erraten einer Ambe, so sind $\binom{90}{2}$ Zusammenstellungen von je zwei Nummern möglich, günstig aber sind nur $\binom{5}{2}$ von diesen; es ist also:

$$w_2 = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{90}{2}} = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

Entsprechend erhält man die Wahrscheinlichkeit für eine Terne:

$$w_3 = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748},$$

für eine Quaterne: $w_4 = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{90}{4}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511038}$,

für eine Quine: $w_5 = \frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43949268}$.

Diese Ergebnisse kann man auch auf andrem Wege finden. Soll z. B. die Wahrscheinlichkeit für eine Terne gefunden werden, so wird zuerst die Wahrscheinlichkeit für das Erraten einer Nummer mit $w' = \frac{5}{90}$ bestimmt; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zweite Nummer richtig geraten wird, ist $w'' = \frac{4}{89}$, da noch 4 günstige Fälle und 89 mögliche Fälle vorliegen; entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für das Erraten der dritten Nummer $w''' = \frac{3}{88}$. Also ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle 3 Nummern gezogen werden:

$$w_3 = w' \cdot w'' \cdot w''' = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88} = \frac{1}{11748}.$$

Ähnlich ist die Betrachtung für die Ambe, die Quaterne und die Quine.

X. Werfen einer Münze.

Die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze Kopf zu werfen, ist $\frac{1}{2}$, die, Schrift zu werfen, ist ebenfalls $\frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, dreimal nacheinander Kopf zu werfen, ist $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, die Wahrscheinlichkeit, erst Schrift, dann Kopf, dann wieder Schrift zu werfen, ist ebenfalls $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit). Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei zweimaligem Werfen der Münze mindestens einmal Schrift erscheint, hat ein historisches Interesse (vgl. IV). d'Alembert gibt folgende Lösung: Entweder fällt beim ersten Wurf Schrift, dann ist die Forderung erfüllt; oder es fällt erst Kopf dann Schrift oder erst Kopf dann Kopf. Das sind drei Fälle, von denen die beiden ersten günstig sind, also ist $w = \frac{2}{3}$. Bezeichnet man die Tatsache, daß erst Schrift, dann Kopf geworfen wird, durch das Symbol *SK*, so sind in Wirklichkeit folgende vier Fälle möglich, *SS, SK, KS, KK*. Von diesen vier Fällen sind die drei ersten günstig, also ist $w = \frac{3}{4}$. d'Alembert hat die beiden ersten Fälle in einen zusammengezogen und unberechtigterweise diese drei Fälle als gleichberechtigt betrachtet. Die Aufgabe kann auch anders gelöst werden. Die Bedingung ist erfüllt, wenn nicht beidemale Kopf geworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit, beidemale Kopf zu werfen, ist $w' = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $w = 1 - w' = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Oder man bestimmt die totale Wahrscheinlichkeit dafür, daß entweder beim ersten Wurf Schrift fällt ($w_1 = \frac{1}{2}$, der zweite Wurf ist dabei gleichgültig) oder daß beim ersten Wurf Kopf und beim zweiten Schrift fällt ($w_2 = \frac{1}{4}$), also $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei drei Würfen mindestens einmal Kopf erscheint, ist $w = \frac{7}{8}$; denn sie ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit davon, daß alle drei Würfe Schrift ergeben, die $w_1 = \frac{1}{8}$ ist. Auch das einfache Abzählen der möglichen und günstigen Fälle liefert dieses Ergebnis. Möglich sind die 8 Fälle *SSS*, *SSK*, *SKS*, *KSS*, *SKK*, *KSK*, *KKS*, *KKK*, von denen die 7 letzten günstig sind.

XI. Aufgaben mit zwei Würfeln.

Mit 2 Würfeln können 36 verschiedene Würfe geworfen werden. Das Symbol 35 möge bedeuten, daß mit dem ersten Würfel 3, mit dem zweiten 5 geworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch (zwei gleiche Augenzahlen) zu werfen, ist $w = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; denn günstig sind nur die sechs Fälle 11, 22, 33, 44, 55, 66. Die Wahrscheinlichkeit, eine Sequenz zu werfen (d. h. zwei aufeinanderfolgende Augenzahlen), ist $w = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$; denn günstig sind die 10 Fälle 12, 23, 34, 45, 56, 21, 32, 43, 54, 65. Es ist also wahrscheinlicher eine Sequenz als einen Pasch zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit, erst einen Pasch, dann eine Sequenz zu werfen, ist $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{108}$ (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit). Die Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $w_9 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. [Günstig sind die Würfe 36, 45, 54, 63.] Die Wahrscheinlichkeit, 10 zu werfen, ist $w_{10} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit, nicht 10 zu werfen, ist die entgegengesetzte der vorigen, also $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Wurfe nicht 9 und beim zweiten nicht 10 zu werfen, ist $w = \frac{8}{9} \cdot \frac{11}{12} = \frac{22}{27}$.

XII. Lösung einiger Aufgaben.

1. Eine Urne enthält a weiße und b rote Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Herausnehmen von c Kugeln alle weiß sind. Es ist sofort klar, daß c kleiner oder höchstens gleich a sein muß. Möglich sind $\binom{a+b}{c}$ Fälle, nämlich so viele, als man die $(a+b)$ Kugeln zu je c kombinieren kann. Günstig sind $\binom{a}{c}$ Fälle, nämlich alle Kombinationen von a weißen Kugeln zur Klasse c. Also ist $w = \binom{a}{c} : \binom{a+b}{c}$.

Beispiel: Enthält die Urne 6 weiße und 4 rote Kugeln und werden 3 Kugeln gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle drei Kugeln weiß sind, $w = \binom{6}{3} : \binom{10}{3} = \frac{1}{6}$.

2. Jemand hat aus einer Lotterie von 100 Losen mit 5 Treffern 20 Lose genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er mit 3 Losen (nicht mehr und nicht weniger) gewinnt?

Die 5 Treffer können sich auf $\binom{100}{5}$ Arten auf die 100 Lose verteilen, also ist die Zahl der möglichen Fälle $\binom{100}{5}$. Günstig für den Inhaber der 20 Lose sind alle die Fälle, in denen sich drei Gewinne auf seine zwanzig Lose, zwei weitere auf die übrigen 80 Lose verteilen, also ist die Zahl der günstigen Fälle $\binom{20}{3} \cdot \binom{80}{2}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß er mit drei Losen gewinnt $\binom{20}{3} \cdot \binom{80}{2} : \binom{100}{5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 10}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{7505}{156849}$.

3. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln bei drei aufeinanderfolgenden Würfen wenigstens einmal Pasch zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf Pasch zu werfen, ist $\frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit, keinen Pasch zu werfen, ist $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, nämlich die entgegengesetzte der vorhergehenden. Die Wahrscheinlichkeit, bei drei aufeinanderfolgenden Würfen keinen Pasch zu werfen, ist $(\frac{5}{6})^3$. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit hiervon ist die, daß bei den drei Würfen nicht jedesmal der Pasch verfehlt wird, d. h. daß mindestens einmal Pasch erscheint, also ist $w = 1 - (\frac{5}{6})^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$. Die Aufgabe ist ein Sonderfall der folgenden.

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von drei Ereignissen, für deren Eintritt die Wahrscheinlichkeiten w_1, bzw. w_2, bzw. w_3 bestehen, wenigstens eines eintritt?

Für das Nichteintreten des ersten Ereignisses besteht die Wahrscheinlichkeit $1 - w_1$ (entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit). Entsprechendes gilt für die beiden anderen Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keines der drei Ereignisse eintritt, ist daher $(1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3)$ (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit). Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit hiervon ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nicht zugleich alle drei Ereignisse ausbleiben, d. h. daß mindestens eines eintritt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also:

$$w = 1 - (1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3).$$

Die Erweiterung der Betrachtung auf vier oder mehr Ereignisse macht keine Schwierigkeit. Beispiel: Jemand will aus einem Kartenspiel von 32 Karten beim ersten Zug ein As, beim zweiten eine rote Karte, beim dritten ein Kreuz ziehen. Die gezogene Karte wird jedesmal wieder eingemischt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens ein Zug gelingt. Es ist $w_1 = \frac{1}{8}$, $w_2 = \frac{1}{2}$, $w_3 = \frac{1}{4}$, also $w = 1 - (1 - \frac{1}{8})(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{21}{64} = \frac{43}{64}$.

XIII. Aufgaben mit dem Kartenspiel von 32 Karten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

1. aus einem Spiel Karten ein As, und wenn dies wieder eingemischt ist, ein Bild zu ziehen?

2. bei einem Zug ein As oder ein Bild zu ziehen?
3. beim ersten Zug eine rote und nach Einmischen dieser Karte beim zweiten Zug eme schwarze Karte zu ziehen?
4. dasselbe, wenn die erste Karte nicht wieder eingemischt wird?
5. beim ersten Zuge eine rote Karte zu ziehen und beim zweiten Zuge nach Zurücklegen der ersten Karte wieder eine rote?
6. dasselbe, nur soll die erste Karte nicht zurückgelegt werden?
7. daß von zwei gleichzeitig gezogenen Karten eine rot und eine schwarz ist?
8. daß zwei gleichzeitig gezogene Karten beide rot sind?
9. daß in dem Skat zwei Asse liegen?
10. daß in dem Skat die zwei höchsten Wenzel liegen?
11. daß bei drei aufeinanderfolgenden Zügen (ohne Zurücklegen der gezogenen Karten) drei Wenzel gezogen werden?
12. daß bei drei aufeinanderfolgenden Zügen jedesmal eine rote Karte gezogen wird, a) wenn die gezogene Karte jedesmal zurückbehalten wird, b) wenn sie wieder eingemischt wird?
13. daß bei zwei aufeinanderfolgenden Zügen wenigstens einmal eine rote Karte gezogen wird, wenn die gezogene Karte wieder eingemischt wird?
14. daß bei vier aufeinanderfolgenden Zügen wenigstens einmal eine rote Karte gezogen wird, wenn die gezogene Karte jedesmal wieder eingemischt wird?
15. daß bei drei aufeinanderfolgenden Zügen wenigstens einmal ein Wenzel gezogen wird, wenn die gezogenen Karten wieder eingemischt werden?

XIV. Vermischte Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln a) 8 zu werfen, b) 3 oder 5 zu werfen, c) erst 9, dann 10 zu werfen, d) erst 4, dann 5, dann 6 zu werfen?
2. Aus einer Urne mit 5 roten, 9 gelben, 6 blauen Kugeln werden wahllos 3 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a) drei verschiedenfarbige, b) 2 gelbe, eine blaue, c) drei gleichfarbige Kugeln zu ziehen?
3. Eine Urne enthält 5 rote und 11 grüne Kugeln, eine zweite 7 rote und 5 grüne Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen?
4. Wie ändert sich das Ergebnis von 3., wenn alle Kugeln in eine Urne gelegt werden?
5. Ein Verein gibt 60 Lose aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Mitglied, mit 2 Losen zu gewinnen, wenn es 10 Lose hat und die Zahl der Treffer 6 ist?

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Mitglied mit einem einzigen Los gewinnt?

7. daß es mit keinem Los gewinnt?

8. Jemand zieht aus einer Urne mit 8 roten, 5 gelben und 7 blauen Kugeln wahllos drei Kugeln heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) daß alle drei rot sind, b) alle drei gelb?

9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln zuerst 5, dann 7, dann 17 zu werfen?

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln zuerst weniger als 6, dann mehr als 14 zu werfen?

11. Jemand will mit 3 Würfeln jedesmal 7 Augen werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) jeder Wurf gelingt, b) nur der erste Wurf, c) keiner der drei Würfe, d) wenigstens einer?

12. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln a) entweder 6 oder 16 zu werfen, b) erst 6, dann 16 zu werfen?

13. Eine Urne enthält 5 blaue, 7 grüne Kugeln, eine zweite 12 blaue und 8 grüne Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) aus der ersten eine blaue und aus der zweiten eine grüne zu ziehen, b) aus der ersten zwei grüne und aus der zweiten zwei blaue, c) aus der ersten eine blaue und eine grüne, und aus der zweiten drei grüne, d) bei wahllosem Zugreifen aus einer der beiden Urnen eine blaue Kugel zu ziehen?

14. In einer Urne sind 12 rote, 8 gelbe und 6 grüne Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eher eine rote als eine gelbe zu ziehen?

15. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei zwei Würfen mit zwei Würfeln wenigstens einmal der Pasch „Doppel-Sechs" (6, 6) fällt?

16. Aus einer Lotterie von 50 Losen, von denen 4 als Gewinne gezogen werden, besitzt jemand 3 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) mit allen 3 Losen zu gewinnen, b) überhaupt zu gewinnen?

17. Von einer Schafherde von 66 Stück gehören A 5 Schafe. Bei einem Transport gehen 3 Schafe ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) eines, b) zwei, c) alle drei, d) keines davon dem A gehört?

18. Von 4 Ereignissen weiß man, daß sie mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1 = \frac{1}{5}$, $w_2 = \frac{4}{15}$, $w_3 = \frac{1}{6}$, $w_4 = \frac{11}{30}$ eintreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) eher das zweite als das dritte eintritt, b) eher das dritte als eins der beiden ersten?

19. Jemand wirft 8mal eine Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) daß jedesmal Schrift fällt, b) daß abwechselnd Schrift (S) und Kopf (K) fällt in der Form $SKSKSKSK$, c) daß die Reihenfolge $SSKSKKSS$ fällt?

XV. Gesetz der großen Zahlen.

Wenn man mit einem Würfel würfelt, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine 4 zu werfen, $w = \frac{1}{6}$. Danach wäre zu erwarten, daß bei sechs Würfen einmal die 4 fällt; der Versuch zeigt aber, daß dies durchaus nicht immer zutrifft; manchmal wird unter 6 Würfen die 4 überhaupt nicht geworfen, manchmal fällt sie sogar mehrmals. Macht man aber nicht 6 Würfe, sondern mehrere Hundert oder Tausend, so ergibt sich, daß in großer Annäherung in $\frac{1}{6}$ der Würfe der Wurf 4 fällt. Langjährige Beobachtungen der Lebensversicherungsgesellschaften haben ergeben, daß etwa die Hälfte aller versicherten 30jährigen Personen das 65. Lebensjahr erreicht. Hieraus kann nicht geschlossen werden, daß von zwei 30jährigen Personen gerade eine das 65. Lebensjahr erreicht. Wohl aber zeigt die Erfahrung, daß immer wieder von einer großen Zahl 30jähriger Personen ungefähr die Hälfte 65 Jahre alt wird. Die Erfahrung lehrt, daß bei zahlreichen Versuchen die Ereignisse nahezu im Verhältnis ihrer mathematischen Wahrscheinlichkeiten eintreten. Dieses Gesetz, das von Jakob Bernoulli (1680) in mathematische Form gebracht und bewiesen wurde, heißt das Gesetz der großen Zahlen. Auf ihm beruht die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Probleme der Wissenschaft und des täglichen Lebens.

XVI. Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori.

In den anfangs behandelten Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung war aus theoretischen Bedingungen heraus die Zahl der möglichen und die Zahl der günstigen Fälle und damit die mathematische Wahrscheinlichkeit bestimmt worden, d. h. es handelte sich um Wahrscheinlichkeit a priori. Stellt man aber aus der Erfahrung heraus die Wahrscheinlichkeit fest als das Verhältnis der Zahl der günstigen Fälle zu der Zahl der möglichen Fälle, so spricht man von Wahrscheinlichkeit a posteriori. Hierbei ist das Gesetz der großen Zahlen zu beachten. Zieht man aus einer Urne mit rund 30 Kugeln bei 300 Zügen, wobei die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt und gut gemischt wird, 51 mal eine rote Kugel, 102 mal eine grüne und 147 mal eine gelbe Kugel, so schließt man, daß in der Urne rote, grüne und gelbe Kugeln vorhanden sind und daß sie etwa im Verhältnis 51 : 102 : 147 oder ungefähr im Verhältnis 1 : 2 : 3 gemischt sind. [Es wäre allerdings verkehrt, schon aus einer kleinen Zahl von etwa 10 Zügen einen Schluß auf die Verteilung zu ziehen.] Wir nehmen dabei ohne weiteres an, daß bei weiteren Zügen, das Verhältnis der drei Farben etwa dasselbe bleibt. Auf diesen Überlegungen beruht die Statistik, die ebenfalls aus bestimmten zahlenmäßig festgelegten Beobachtungen bekannter Ereignisse und Zustände Schlüsse auf unbekannte Ereignisse zieht.

XVII. Wetten.

Schließen zwei Personen auf das Eintreffen eines Ereignisses eine Wette ab, so sind die Einsätze bei gerechter Verteilung nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung so festzustellen, daß jeder Spieler bei vielfacher Wiederholung der Wette nach dem Gesetz der großen Zahlen etwa ebensoviel gewinnt wie verliert. Wetten z. B. A und B auf das Fallen der 4 beim Würfel, so daß A gewinnt, wenn die 4 fällt, B, wenn die 4 nicht fällt, und setzt A 1 *RM*, so hat B 5 *RM* zu setzen. Bei 1800 Würfen würde dann etwa 300 mal die 4 fallen, A würde also etwa 300 mal 5 *RM* gewinnen und 1500 mal 1 *RM* verlieren, also ebensoviel gewinnen als verlieren. Die gerechte Verteilung der Einsätze ist stets dann erreicht, wenn sich die Einsätze (e) der beiden Wettenden verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten (w) dafür, daß sie gewinnen. Es muß also sein:

$$e_1 : e_2 = w_1 : w_2, \quad \text{oder:}$$

$$e_1 w_2 = e_2 w_1. \tag{6}$$

Das Produkt $e_2 w_1$ heißt die mathematische Erwartung des ersten Spielers; sie ist also das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit dafür, daß er gewinnt, und aus dem in Aussicht stehenden Gewinn. Die mathematische Erwartung muß für beide Spieler gleich sein. Beim Lottospiel müßte bei der Wette auf einen unbestimmten Auszug mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{18}$ [vgl. IX] einer Reichsmark Einsatz ein Gewinn von 18 *RM* oder (nach Abzug des Einsatzes von 1 *RM*) ein Reingewinn von 17 *RM* entsprechen. Die Banken und Staaten, die diese Wetten abschlossen, zahlten allerdings nur 15 *RM* aus (statt 18 *RM*). Ebenso wurden auch in den übrigen Fällen nur geringere Gewinne gezahlt, als sie nach der Wahrscheinlichkeitslehre zu erwarten waren, z. B. bei der Ambe meist 270 *RM* (statt 400,50 *RM*), bei der Terne 5300 bis 5500 *RM* (statt 11748 *RM*), bei der Quaterne 60000 bis 70000 *RM* (statt 511038 *RM*), bei der Quine, sofern sie überhaupt zugelassen wurde, 1000000 *RM* (statt 43949268 *RM*). Es ist klar, daß die Staaten bzw. Banken bei diesen Wetten große Gewinne erzielten.

Hat ein Unternehmer A auf ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit w einen Gewinn G ausgesetzt, so wird der Spieler B bei gerechtem Spiel einen Einsatz e zu leisten haben, der der mathematischen Erwartung $w \cdot G$ gleichkommt. Es ist also:

$$e = G \cdot w. \tag{7}$$

Beispiel: Der Unternehmer A zahlt jedesmal 72 *RM*, wenn der Spieler B mit 2 Würfeln 11 wirft. Die Wahrscheinlichkeit, 11 zu werfen, ist $\frac{1}{18}$, also ist die mathematische Erwartung des B und damit auch sein Einsatz $72 \cdot \frac{1}{18} = 4$ *RM*. Bei einem einzigen Spiel ist für B nur sein Einsatz sicher. Bei einer großen Zahl von Spielen wird voraussichtlich ein Ausgleich dahin eintreten, daß etwa unter 18 Spielen eines günstig für B ist. Er zahlt für 18 Spiele $18 \cdot 4 = 72$ *RM* ein und erhält einen Gewinn von 72 *RM*. Da aber der Unternehmer A einen Gewinn erzielen will, so wird er bei einem Einsatz von 4 *RM* einen kleineren Preis als 72 *RM* aussetzen.

XVIII. Aufgaben zu XV—XVII.

1. Beim Würfeln mit 2 Würfeln zahlt B an C jedesmal 5 *Rpf*, wenn ein Pasch fällt. Was hat dagegen C an B zu zahlen, wenn eine Sequenz fällt?

2. Wie müssen sich beim Werfen von 2 Würfeln die Einsätze des B und C verhalten, wenn B gewinnt, sooft ein Pasch oder eine Sequenz fällt, während C in allen anderen Fällen gewinnt?

3. In einer Urne sind 3 weiße, 8 grüne, 9 blaue Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man beim Ziehen von 5 Kugeln eine weiße, eine grüne und drei blaue Kugeln zieht?
A setzt auf das Eintreffen dieses Ereignisses 2,10 *RM*. Was hat B dagegen zu setzen?

4. A wettet mit B, daß er mit 3 Würfeln 9 Augen wirft und setzt 5 *Rpf*. B soll gewinnen, wenn die Augenzahl 7 fällt. Was hat B zu setzen, wenn das Spiel bei jeder anderen Augenzahl unentschieden bleibt?

5. Ein Unternehmer setzt einen Preis von 8 *RM*, wenn jemand aus einem Spiel von 32 Karten den höchsten Wenzel zieht. Wie groß muß der Einsatz sein?

6. Eine Lotterie von 1000 Losen hat 2 Gewinne von je 100 *RM* und 6 Gewinne von je 50 *RM*. Wie teuer darf ein Los sein?

7. Bei einer Lotterie hat man 1500 Lose zu je 1 *RM* ausgegeben und verspricht 10 Gewinne. Die sechs kleinsten Gewinne sind gleichgroß; die drei nächsten Gewinne sind je doppelt so groß, der höchste Gewinn ist dreimal so groß als der kleinste. Wie groß sind die einzelnen Gewinne?

8. Ein Verein veranstaltet eine Lotterie von 900 Losen zu je 2 *RM* mit 6 Gewinnen. Wie groß ist jeder Gewinn, wenn 20% der Einnahme von dem Verein zur Deckung der Unkosten und als Überschuß zurückbehalten werden?

9. Ein Unternehmer läßt aus einer Urne mit 7 weißen und 9 roten Kugeln drei Kugeln ziehen. Wer drei weiße Kugeln zieht, erhält den Gewinn von 4 *RM*. Wie groß ist der Einsatz zu wählen?

10. Ein Unternehmer zahlt jedem, der mit 3 Würfeln eine der Augenzahlen 3, 4, 17, 18 wirft einen Preis. Wie hoch ist dieser zu bemessen, wenn er im voraus 20 % von dem errechneten Preis für sich zurückbehält und der Einsatz 0,50 ℛℳ beträgt?

11. Versuche das Gesetz der großen Zahlen durch einfache oft wiederholte Versuche zu bestätigen. [Würfel, Karten, Werfen einer Münze.]

12. Ein Buch mit 1000 Seiten wird aufgeschlagen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der aufgeschlagenen Seitenzahl a) die Einerstelle eine 3 ist, b) eine 3 oder eine 5, c) daß die Zehnerstelle eine 4 ist, d) daß die Hunderterstelle eine 2 ist, e) daß die erste Ziffer der Zahl eine 1 ist?

13. Untersuche die gleichen Fragen, wenn die Zahl der Seiten des Buches 998, 425, 212, 150, 76, 16, 8 ist?

14. Suche in der Logarithmentafel oder in einer Tabelle am Schluß des Buches festzustellen, ob die Endziffern 0, 1, 2, ... 9 je mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 auftreten? Wie groß ist die Abweichung?

15. Jemand zieht aus einer Urne, von der er weiß, daß sie 27 Kugeln enthält, 1000mal eine Kugel und findet 185mal eine rote, 375mal eine blaue und 450mal eine grüne Kugel. Wieviel rote, blaue und grüne Kugeln sind wahrscheinlich in der Urne?

F. Versicherungsrechnung.

I. Arten der Versicherung.

Wer sich versichert, sucht durch eine einmalige oder wiederholte Geldleistung für einen mit einer Unsicherheit behafteten späteren Geldbedarf Vorsorge zu treffen. Meist unterscheidet man Sach- und Personenversicherungen. Zu ersteren gehören die Feuer-, die Hagel-, die Wasserschaden-, die Haftpflichtversicherung u. a. m., zu letzteren z. B. die Kranken-, die Invaliden-, die Unfall-, die Leibrenten- und die Lebensversicherung. Zuweilen teilt man die Versicherungen auch ein in solche, die einmal in Kraft treten können, aber nicht müssen (Feuerversicherung, Krankenversicherung, ...), und in solche, die sicher einmal in Kraft treten müssen (Versicherung auf den Todesfall).

II. Grundlagen der Versicherung.

Bei der mathematischen Behandlung der Aufgaben aus dem Versicherungswesen geht man von dem Gedanken aus, daß sich annähernd ein Gleichgewicht aus den Leistungen der Versicherungsgesellschaft und aus ihren Einnahmen von den Versicherten ergeben soll. Das ist natürlich bei der Ungewißheit der Ereignisse, die in Frage kommen, nie genau möglich und nur bei einer großen Anzahl von Versicherten nach dem Gesetz der großen Zahlen einigermaßen erreichbar. Dabei ist es unvermeidlich und liegt in der Natur der Sache begründet, daß dem einzelnen Versicherten viel mehr oder viel weniger ausgezahlt wird, als er eingezahlt hat. Der Schaden des einzelnen wird eben von der Gesamtheit der Versicherten getragen. Um über die beiderseitigen Leistungen im voraus einen Überblick zu gewinnen, ist i. a. eine Statistik der Schadensfälle erforderlich. Hat z. B. eine Feuerversicherung durch langjährige Erfahrung gefunden, daß jährlich etwa $\frac{1}{2}$‰ der bei ihr versicherten Werte durch Brand zerstört werden, so kann sie voraussichtlich ihren Verpflichtungen dauernd nachkommen, wenn sie jährlich von jedem Versicherten eine Prämie von $\frac{1}{2}$‰ des versicherten Wertes erhebt. Zu dieser sogenannten Nettoprämie tritt dann noch ein Zuschlag zur Deckung der Unkosten und zur Ansammlung eines Fonds für außerordentliche Fälle; die so errechnete Prämie heißt die Bruttoprämie. Je weiter die Versicherungsgesellschaft ihren Kreis räumlich zieht, je mehr Versicherte sie hat, um so mehr werden sich die Schäden in den einzelnen Jahren und den einzelnen Gegenden nach dem Gesetz der großen Zahlen ausgleichen. Ähnliches gilt für andre Versicherungsarten.

III. Sterbetafeln.

Für Versicherungen, die sich auf das menschliche Leben beziehen, ist es wichtig, zu wissen, wie lange der Versicherte voraussichtlich noch leben wird. Für den einzelnen ist hier eine Aussage unmöglich, für eine große Zahl Gleichaltriger dagegen ist aus der Erfahrung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit a posteriori eine ungefähre Aussage wohl gerechtfertigt. Für genauere Untersuchungen ist zu beachten, daß Klima, Rasse, Geschlecht, Beruf, Lebensweise, Zeitverhältnisse u. a. m. einen wesentlichen Einfluß auf die Sterblichkeit haben. Die Ergebnisse der Erfahrung werden in Sterbetafeln zusammengestellt. Dabei geht man von der Annahme aus, man habe über das Leben einer großen Zahl von Menschen bis zum Tode genau Statistik geführt, so daß die Zahl der von ihnen Lebenden bei der Geburt, nach 1 Jahr, nach 2 Jahren, usf. bekannt sei. Diese Statistik, die auf etwa ein Jahrhundert durchzuführen wäre, begegnet aber unüberwindlichen Schwierigkeiten. Auch ein zweiter Weg, bei einer stationären Bevölkerung die Zahl der Lebenden in jedem Lebensalter abzuzählen, hat große Mängel; denn es wird nicht häufig ein Land geben, das auf Jahrzehnte hinaus eine stationäre Bevölkerung aufweist; zudem treten durch Zu- und Abwanderung dauernd Störungen ein. Man hat deshalb die modernen Sterblichkeitstafeln auf anderem Wege gefunden, in erster Linie durch Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit (vgl. IV), wie sie sich aus den Erfahrungen der Versicherungsgesellschaften bei den bei ihnen versicherten Personen ergeben haben. Die am meisten gebrauchte ist die aus den Beobachtungen der 23 deutschen Lebensversicherungsgesellschaften abgeleitete (vgl. Anhang Tafel II). Die erste Spalte ist mit x bezeichnet; sie gibt das Lebensalter an und beginnt mit $x = 20$, da Lebensversicherungen vor dem 20. Lebensjahr kaum abgeschlossen werden. Als x-jähriger gilt der, der zwischen $x - \frac{1}{2}$ und $x + \frac{1}{2}$ Jahre alt ist. Die zweite Spalte, die mit l_x bezeichnet ist, gibt an, wie viele von 100000 Menschen, die 20 Jahre alt sind, in jedem der folgenden Jahre noch leben; so bedeutet $l_{30} = 91578$, daß von 100000 20jährigen 91578 das 30. Lebensjahr erreichen. Aus der Spalte l_x läßt sich leicht die Zahl d_x der in jedem Jahre Gestorbenen ablesen. Es ist:

$$d_x = l_x - l_{x+1}, \tag{1}$$

d. h. die Zahl der im Lebensalter x Verstorbenen wird gefunden, wenn man die Zahl derer, die das x^{te} Jahr erlebt haben, vermindert um die Zahl derer, die auch noch das $(x+1)^{\text{te}}$ Jahr erlebt haben. Die Sterbetafel geht nur bis zum Alter 90. Genau genommen wäre sie fortzusetzen, bis alle Versicherten gestorben sind. Da aber nur wenige Versicherte ein wesentlich höheres Alter erreichen, so wird die Tafel selten über das 90. Lebensjahr fortgesetzt. Das höchste in der Sterbetafel enthaltene Lebensjahr wird mit ω bezeichnet, die Zahl der am Anfang dieses Jahres Lebenden ist dann l_ω, die der in diesem Jahre Sterbenden ist $d_\omega = l_\omega$, da ja angenommen wird, daß niemand das folgende Jahr erlebt.

IV. Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit.

Von den l_x Personen des Alters x erleben l_{x+1} Personen das Alter $(x+1)$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß der x-jährige das folgende Lebensjahr erlebt:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \tag{2}$$

Dieser Bruch heißt die Lebenswahrscheinlichkeit des x jährigen. Entsprechend heißt der Bruch:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}, \tag{3}$$

die Sterbenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen; sie ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der $x$jährige im kommenden Jahre stirbt. Es ist nun $p_x + q_x = \frac{l_{x+1} + d_x}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} = 1$ oder $q_x = 1 - p_x$, d. h. q_x ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit zu p_x. Die Wahrscheinlichkeit, daß der $x$jährige das Alter $x + n$ erlebt, ist ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er im Alter $x+n$ stirbt, ist ${}_nq_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$. Ist ${}_np_x = \frac{1}{2}$, so heißt n die fernere wahrscheinliche Lebensdauer des x-jährigen. Aus der Sterbetafel lesen wir z. B. ab ${}_{26}p_{41} = \frac{l_{67}}{l_{41}} = \frac{40887}{81903} \approx \frac{1}{2}$. Die fernere wahrscheinliche Lebensdauer des 41jährigen beträgt also 26 Jahre, d. h. von einer großen Zahl 41jähriger erlebt voraussichtlich die Hälfte das 67. Lebensjahr.

V. Arten der Versicherung auf das Leben einer Person.

Die Versicherungen können in verschiedener Form abgeschlossen werden:

1. Es kann bestimmt werden, daß die Versicherungsgesellschaft eine einmalige bestimmte Summe auszahlt,

a) wenn der Versicherte ein bestimmtes Lebensalter erreicht, [Erlebensfallversicherung];

b) wenn der Versicherte stirbt [Todesfallversicherung];

c) wenn der Versicherte stirbt, spätestens aber mit Erreichung eines bestimmten Lebensalters [gemischte Versicherung];

d) wenn der Versicherte stirbt, aber mit der Einschränkung, daß die Versicherung nur fällig wird,

α) wenn der Tod innerhalb der nächsten n Jahre eintritt [kurze oder abgekürzte Versicherung],

β) wenn der Tod erst nach Verlauf von n Jahren eintritt [Versicherung mit Karenzzeit];

e) nach n Jahren, unabhängig davon, ob der Versicherte noch lebt oder nicht [Versicherung mit bestimmter Verfallzeit].

2. Der Versicherungsvertrag kann aber auch so lauten, daß alljährlich, entweder am Anfang jedes Jahres (pränumerando) oder am Ende jedes Jahres (postnumerando) an den Versicherten eine bestimmte Summe ausgezahlt wird, so lange er lebt. In diesem Falle spricht man von einer Leibrente. Auch hier können verschiedene Abänderungen eintreten. Die Rente kann fällig sein

a) lebenslänglich [lebenslängliche Rente];

b) n Jahre lang, längstens aber bis zum Tode des Versicherten [kurze oder aufhörende Rente];

c) erst nach m Jahren beginnnend, dann aber bis zum Tode des Versicherten laufend [aufgeschobene Rente];

d) erst nach m Jahren beginnend, dann n Jahr laufend, aber höchstens bis zum Tode des Versicherten [kurze aufgeschobene Rente].

Es kann ferner bestimmt werden, daß die Rente nicht in jährlichen, sondern in kürzeren, etwa halbjährlichen Terminen zur Auszahlung kommt.

Für die Leistung des Versicherten bestehen zwei Möglichkeiten. Entweder er zahlt einen einmaligen Einsatz bei Beginn der Versicherung oder er zahlt einen bestimmten jährlichen Beitrag. Die Zahlung des Versicherten heißt Prämie, der einmalige Einsatz heißt gelegentlich auch die Mise. Die Prämien können auch in unterjährigen Raten bezahlt werden, auch kann durch Vertrag die Beitragszahlung zeitlich begrenzt werden oder lebenslänglich erfolgen.

VI. Mathematische Behandlung der Versicherungsaufgaben.

Bei allen Aufgaben wird die Fiktion gemacht, daß nicht ein einzelner die Versicherung abschließt, sondern alle l_x Personen der Sterbetafel vom Alter x. Die Gesamtleistung der Versicherungsgesellschaft wird der Gesamtleistung der l_x Versicherten gleichgesetzt. Da die Einzelleistungen zu verschiedenen Zeiten erfolgen, sind sie vor dem Vergleich auf denselben Zeitpunkt zu datieren. Welcher Zeitpunkt dabei gewählt wird, ist theoretisch gleichgültig; am praktischsten wird der Zeitpunkt Null gewählt, d. h. der Geburtstag der l_x Personen. Auch hier verwenden wir praktisch wieder die Zeitgerade [vgl. C. 11]. Links werden die Werte von x, d. h. das Alter der Versicherten, angetragen, rechts jedesmal die Leistung der Versicherten und der Versicherungsgesellschaft an den betreffenden Zeitpunkt, evtl. zur besseren Übersicht beide durch einen senkrechten Strich getrennt. Nachdem die Zahlungen an die Zeitgerade angetragen sind, werden sie auf den Zeitpunkt Null datiert; dann wird die Gleichung aufgestellt. Bei den folgenden Betrachtungen wird stets der Zinsfuß $p = 3\frac{1}{2}$ zugrunde gelegt; es ist also $q = 1{,}035$ und $v = \frac{1}{q} = \frac{1}{1{,}035}$. Auch die von einem Zinsfuß abhängigen Zahlen der Sterbetafel sind für den gleichen Zinsfuß berechnet.

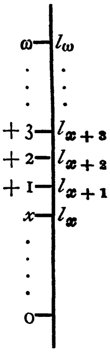
VII. Vorübungen.

1. Sämtliche l_x Personen vom Alter x zahlen je 1 *RM* ein. Welchen Wert hat die Gesamtleistung am Zeitpunkt der Geburt? Am Zeitpunkt x beträgt die Gesamtleistung $l_x \cdot 1$ *RM*, also x Jahre vorher [vgl. B (11)] $\frac{l_x}{q^x} = l_x \cdot v^x$ *RM*. Man setzt zur Abkürzung:

$$l_x v^x = D_x \tag{4}$$

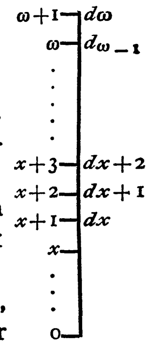
und nennt D_x die diskontierte Zahl der Lebenden vom Alter x; für jedes Alter ist der Wert von D_x in der Sterbetafel in Spalte 4 angegeben.

2. Die l_x Personen vom Alter x zahlen vorschüssig lebenslang, sofort beginnend, jährlich je den Betrag 1. Welchen Wert hat die Gesamtheit der Zahlungen am Zeitpunkt ihrer Geburt? Am Zeitpunkt x wird von den l_x Personen der Betrag l_x gezahlt, am Zeitpunkt $x+1$ leben nur noch l_{x+1} Personen, die die Zahlung l_{x+1} leisten, usf. bis zum Zeitpunkt ω, an dem die noch lebenden l_ω Personen den Betrag l_ω zahlen. Werden alle Zahlungen auf den Zeitpunkt Null datiert, so ergibt sich hier die Summe $l_x v^x + l_{x+1} v^{x+1} + l_{x+2} v^{x+2} + \cdots + l_\omega v^\omega = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega$. Man setzt nun zur Abkürzung:



$$(5)\quad \boldsymbol{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega = \sum_x^\omega D_x}^{1)} \boldsymbol{= N_x}.$$

3. Welches ist die Leistung der Versicherungsgesellschaft, wenn sie an die Hinterbliebenen aller d_x im Alter x verstorbenen Personen den Betrag 1 auszahlt, berechnet auf den Zeitpunkt der Geburt der l_x Personen? Die Todesfälle erfolgen i. a. ziemlich gleichmäßig auf das Jahr verteilt. Zuweilen nimmt man an, daß sie in der Mitte des Jahres gleichzeitig erfolgen. Meist aber wird die Rechnung so durchgeführt, als ob die Todesfälle erst am Ende des Jahres erfolgten und erst dann die Auszahlung der Versicherungsbeträge stattfinde. Dem schließen wir uns auch hier an. Demnach hat in unserem Falle die Versicherungsgesellschaft am Zeitpunkt $x+1$ den Betrag d_x auszuzahlen, der am Zeitpunkt Null den Wert $d_x \cdot v^{x+1}$ hat. Zur Abkürzung wird gesetzt:



$$(6)\qquad \boldsymbol{d_x \cdot v^{x+1} = C_x}.$$

C_x heißt die diskontierte Zahl der Toten des Alters x. Die Werte für C_x sind in der Sterbetafel in Spalte 6 vermerkt.

4. Wie lautet das Ergebnis von 3, wenn jedesmal beim Tode bis zum Absterben aller l_x Personen der Betrag 1 ausgezahlt wird? —

Nach 3 ist am Zeitpunkt $x+1$ der Betrag d_x zu zahlen, am Zeitpunkt $x+2$ ist für die im vergangenen Jahr verstorbenen d_{x+1} Personen der Betrag d_{x+1} zu leisten, usf., am Zeitpunkt $\omega+1$ ist für die im vergangenen Jahr verstorbenen d_ω

---

1) $\sum_x^\omega D_x$ lies: Summe aller D_x von x bis ω. Σ (lies „Sigma“) ist das griechische S.

Personen der Betrag d_ω zu zahlen. Für den Zeitpunkt 0 berechnet ergibt sich die Summe:

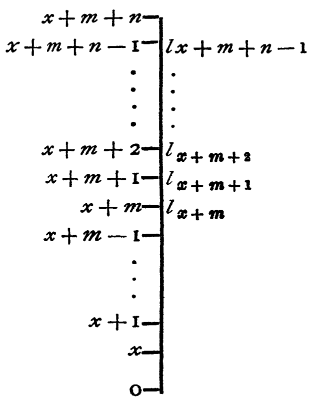
$$d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + d_{x+2} v^{x+3} + \cdots + d_\omega v^{\omega+1}$$
$$= C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_\omega.$$

Man setzt nun zur Abkürzung:

$$(7) \qquad C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_\omega = \sum_x^\omega C_x = M_x$$

(vgl. Spalte 7 der Sterbetafel).

5. An sämtliche l_x Personen des Alters x wird lebenslänglich pränumerando die Leibrente 1 ausgezahlt. Welchen Wert haben die Auszahlungen am Zeitpunkt der Geburt der l_x Personen?



Die Aufgabe stimmt mit 2. überein, nur daß in diesem Falle die Versicherten den Betrag erhalten, dort aber zahlten. Die Summe ist also N_x.

6. Wie groß ist der Barwert am Zeitpunkt Null, wenn die Leibrente 1 nach m Jahren beginnt und dann n Jahre an alle in diesem Zeitraum noch lebenden Versicherten bezahlt wird?

An nebenstehender Zahlengeraden sind die Zahlungen eingetragen. Sie erfolgen vom Zeitpunkt $x + m$ bis $x + m + n - 1$ [n Zahlungen; abzählen!]. Auf den Zeitpunkt Null datiert haben sie den Gesamtwert:

$$l_{x+m} v^{x+m} + l_{x+m+1} v^{x+m+1} + \cdots + l_{x+m+n-1} v^{x+m+n-1} = D_{x+m}$$
$$+ D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \cdots + D_{x+m+n-1} = N_{x+m} - N_{x+m+n}.$$

Von der letzten Umformung überzeugt man sich leicht, wenn man die Werte für N_{x+m} und N_{x+m+n} anschreibt.

Die hier angestellten Übungen hatten hauptsächlich den Zweck, den Leser in den bei Versicherungsaufgaben eingeschlagenen Gedankengang einzuführen und ihn mit den abkürzenden Zeichen D, C, N, M (den Kommutationszeichen oder Grundzahlen) vertraut zu machen. Anderseits aber lassen sich alle Versicherungsaufgaben mit Hilfe dieser Übungsaufgaben leicht lösen. Der Leser möge in allen Fällen versuchen, beide Wege zu gehen, d. h. einmal mit Hilfe der Übungen und andererseits durch Anschreiben aller Zahlungen an die Zahlengerade.

VIII. Aufgaben zur Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit und zu den Vorübungen.

1. Wie groß ist die Lebenswahrscheinlichkeit des 20-, 30-, 65-, 80-, 88-jährigen?

2. Desgl. die Sterbenswahrscheinlichkeit?

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der 25jährige a) das 50. Lebensjahr erreicht, b) im 50. Lebensjahr stirbt?

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) der 42jährige, b) der 32jährige, c) der 22jährige α) im 60. Lebensjahre stirbt, β) das 60. Jahr überlebt, γ) vor dem 60. Jahre stirbt?

5. Wie viele der $l_{20} = 100\,000$ 20jährigen der Sterbetafel erreichen voraussichtlich das 60. Lebensjahr?

6. Wieviele von 2000 Menschen im Alter von 36 Jahren erreichen voraussichtlich das 72. Lebensjahr? Warum hat die Aufgabe keinen Sinn, wenn es sich nur um 6 Menschen von 36 Jahren handelt?

7. Aus der Sterbetafel ist die fernere wahrscheinliche Lebensdauer des a) 54, b) 32, c) 72, d) 24jährigen abzulesen (auf Ganze abrunden!).

8. Berechne in der Sterbetafel aus der Spalte der l_x die Werte der d_x, z. B. d_{35}, d_{48}, d_{72}, d_{81}.

9. Berechne die Zahl der diskontierten Lebenden des Alters 40 und vergleiche das Ergebnis mit dem Tafelwert von D_{40}, ebenso die Zahl der diskontierten Toten des Alters 40 aus d_{40} und vergleiche das Ergebnis mit dem Tafelwert von C_{40}.

10. Führe die Rechnungen der Aufgabe 9 auch aus für die Lebensalter a) 27, b) 33, c) 52, d) 84. [Beachte, daß die Tafelwerte auf ganze Zahlen abgerundet sind.]

11. Bestimme aus den Tafelwerten der D_x die Werte von N_{90}, N_{89}, N_{88}, ..., ebenso aus der Spalte der C_x die Werte M_{90}, M_{89}, M_{88}, ... (Die Abrundung auf ganze Zahlen bedingt einige Abweichungen.)

12. Jeder der $l_{25} = 95\,590$ Personen der Sterbetafel zahlt bis zum Tode jährlich vorschüssig 200 $\mathcal{RM}$ ein. Welchen Wert haben die Einzahlungen zusammen, berechnet auf das Geburtsdatum?

13. Welchen Wert, berechnet auf das Geburtsdatum, hat die Schuld der Versicherungsgesellschaft, wenn sie verpflichtet ist, an die Hinterbliebenen aller $l_{34} = 88\,280$ Personen im Todesfall die Summe von je 1000 $\mathcal{RM}$ auszuzahlen?

14. Welchen Wert hat die Schuld in 13., wenn die Versicherungssumme nur zur Auszahlung gelangt, falls der Versicherte nicht vor Ablauf von 10 Jahren stirbt?

15. Alle l_{45} Personen des Alters 45 haben eine jährliche lebenslängliche Leibrente von je 375 $\mathcal{RM}$ zu beziehen. Welchen Wert stellt diese Summe dar am Zeitpunkt Null?

16. Eine Versicherungsbank hat die Verpflichtung an alle 45jährigen beim Tode bzw. im Erlebensfall am 60. Geburtstage den Betrag von je 500 *RM* auszuzahlen. Welche Summe, bezogen auf das Geburtsdatum, hat die Bank bereitzustellen?

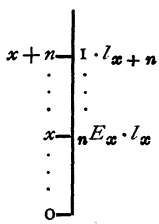
17. Ein Mann hat das Alter m, die Frau das Alter n. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren a) der Mann noch lebt, b) die Frau noch lebt, c) der Mann tot ist, d) die Frau tot ist, e) beide noch leben, f) beide tot sind, g) der Mann noch lebt, aber die Frau tot ist, h) der Mann tot ist, die Frau aber noch lebt, i) wenigstens eines von beiden noch lebt, k) wenigstens eines von beiden tot ist?

18. Löse die Fragen der vorstehenden Aufgabe für a) $m = 35$, $n = 30$, $p = 30$; b) $m = 48$, $n = 36$, $p = 12$; c) $m = 40$, $n = 36$, $p = 40$.

19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von einem Ehepaar von 52 bzw. 50 Jahren nach 20 Jahren entweder beide tot sind oder beide leben?

IX. Versicherung auf den Erlebens- oder Todesfall.

1. Welche einmalige Zahlung ${}_nE_x$ hat ein $x$jähriger sofort zu leisten, wenn er nach n Jahren im Erlebensfall den Betrag 1 erhalten soll?



[Erlebensfallversicherung]. Wir machen auch hier wieder, wie in allen folgenden Fällen, die Annahme, daß nicht nur der eine Versicherte, sondern alle l_x Personen der Sterbetafel vom Alter x die Versicherung abschließen. Diese zahlen also am Zeitpunkt x die Summe $l_x \cdot {}_nE_x$ ein, die am Zeitpunkt Null den Wert $l_x \cdot {}_nE_x \cdot v^x = D_x \cdot {}_nE_x$ hat. Die Versicherungsgesellschaft zahlt dafür am Zeitpunkt $x + n$ an jeden der l_{x+n} noch Lebenden den Betrag 1, also insgesamt l_{x+n}, auf den Zeitpunkt Null berechnet also den Betrag $l_{x+n} \cdot v^{x+n} = D_{x+n}$; es ist also $D_x \cdot {}_nE_x = D_{x+n}$ oder:

$$(8) \qquad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Soll jeder Versicherte den Betrag S erhalten (statt 1), so ist die Einzahlung:

$$S \cdot {}_nE_x = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

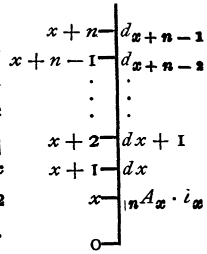
2. Welche einmalige Einzahlung A_x hat ein $x$jähriger zu leisten, wenn bei seinem Tode die Summe 1 ausgezahlt werden soll? [Todesfallversicherung.]

Nach Vorüb. VII 1 und 4 ist der Barwert der Einzahlungen $A_x \cdot D_x$, der Barwert der Auszahlungen der Versicherungsgesellschaft M_x, also ist $A_x \cdot D_x = M_x$ oder:

$$(9) \qquad A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Dieser Wert ist mit S zu multiplizieren, wenn die Versicherungssumme nicht 1, sondern S ist.

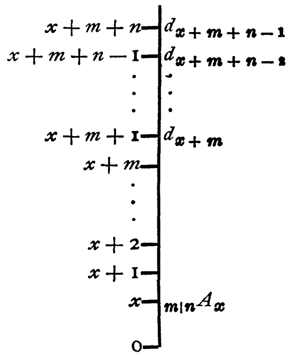
3. Welche einmalige Einzahlung ${}_{|n}A_x$ hat ein x-jähriger zu leisten, wenn im Falle seines Todes die Summe 1 an seine Hinterbliebenen gezahlt werden soll, sofern der Tod im Laufe der nächsten n Jahre eintritt? [Kurze Versicherung auf den Todesfall.]



Der Barwert der Einzahlungen beträgt ${}_{|n}A_x l_x v^x = {}_{|n}A_x D_x$, der der Auszahlungen $d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + \cdots + d_{x+n-1} v^{x+n} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1} = M_x - M_{x+n}$, also ist:

$$(10) \qquad {}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

4. Welche einmalige Einzahlung ${}_{m|n}A_x$ hat ein $x$jähriger zu leisten, wenn an seine Hinterbliebenen der Betrag 1 ausgezahlt wird, falls der Tod erst nach Verlauf von m Jahren, aber im Laufe der darauffolgenden n Jahre eintritt? [Kurze Todesfallversicherung mit Karenzzeit].



Die l_x Personen zahlen am Zeitpunkt x den Betrag ${}_{m|n}A_x \cdot l_x$ ein, der am Zeitpunkt Null den Wert ${}_{m|n}A_x \cdot l_x \cdot v^x = {}_{m|n}A_x \cdot D_x$ hat. Die Versicherungsgesellschaft zahlt aus: am Zeitpunkt $x+m+1$ den Betrag d_{x+m}, am Zeitpunkt $x+m+2$ den Betrag d_{x+m+1} usf. Die letzte Auszahlung am Zeitpunkt $x+m+n$ hat den Wert $d_{x+m+n-1}$. Auf den Zeitpunkt Null bezogen haben alle Auszahlungen den Gesamtwert:

$$d_{x+m} \cdot v^{x+m+1} + d_{x+m+1} v^{x+m+2} + \cdots + d_{x+m+n-1} v^{x+m+n} = C_{x+m} + C_{x+m+1} + C_{x+m+2} + \cdots + C_{x+m+n-1} = M_{x+m} - M_{x+m+n},$$

also ist:

$$(11) \qquad {}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}.$$

5. Welche einmalige Nettoprämie ${}_{m|}A_x$ hat ein Versicherter zu leisten, wenn an seine Hinterbliebenen im Falle seines Todes der Betrag 1 ausgezahlt wird, falls der Tod erst nach Verlauf von m Jahren eintritt? [Todesfall-Versicherung mit m jähriger Karenzzeit.]

Gegenüber dem vorhergehenden Fall tritt eine Änderung nur insoweit ein, als die Zahlungen der Gesellschaft nicht mit dem $(m+n)^{\text{ten}}$ Jahre aufhören. Diese haben also hier den Barwert $C_{x+m} + C_{x+m+1} + \cdots + C_\omega = M_{x+m}$, also ist:

$$(12) \qquad {}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}.$$

6. Welche einmalige Zahlung $A_{x\overline{n}|}$ hat ein $x$jähriger zu leisten, wenn der Betrag 1 an seine Erben ausbezahlt wird, falls er im Laufe der ersten n Jahre stirbt, an ihn selber aber, wenn er das Alter $x+n$ erreicht? [Gemischte Versicherung oder Versicherung mit abgekürzter Versicherungsdauer.]

$x+n+1$	—
$x+n$	d_{x+n-1}; l_{x+n}
$x+n-1$	d_{x+n-2}
$\vdots$	$\vdots$
$x+2$	d_{x+1}
$x+1$	d_x
x	$A_{x\overline{n}|}\cdot l_x$
0	

Die l_x Versicherten zahlen am Zeitpunkt x zusammen $A_{x\overline{n}|}\cdot l_x$, die am Zeitpunkt Null den Wert haben $A_{x\overline{n}|}l_x v^x = A_{x\overline{n}|}\cdot D_x$. Die Versicherungsgesellschaft zahlt am Zeitpunkt $x+1$ für jeden im Alter x Verstorbenen den Betrag 1, also insgesamt den Betrag d_x, am Zeitpunkt $x+2$ den Betrag d_{x+1} usf., zuletzt am Zeitpunkt $x+n$ den Betrag d_{x+n-1}; ferner zahlt sie am Zeitpunkt $x+n$ an die l_{x+n} Überlebenden den Betrag l_{x+n}. Die Gesamtzahlung hat also am Zeitpunkt Null den Wert:

$$d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + \cdots + d_{x+n-1} v^{x+n} + l_{x+n} v^{x+n}$$
$$= C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} + D_{x+n} = M_x - M_{x+n} + D_{x+n},$$

also ist:

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{13}$$

Vergleiche das Ergebnis mit dem von 1 und 3. Begründe die Richtigkeit der Gleichung $A_{x\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x$.

X. Aufgaben zu den Versicherungen auf den Erlebens- oder Todesfall bei einmaliger Prämie.

1. Ein 36jähriger versichert sein Leben mit $S = 10000$ *RM* auf den Todesfall; welche einmalige Prämie hat er zu zahlen?
2. Ein 31jähriger gewinnt in der Lotterie 2000 *RM* und geht damit eine Versicherung ein, nach der ihm mit dem 60. Lebensjahr eine bestimmte Summe ausgezahlt wird, falls er das 60. Lebensjahr erlebt. Wie groß ist diese Summe?
3. Wie ändert sich das Ergebnis von 2., wenn er die 2000 *RM* zu 4% verzinslich anlegt?
4. Zu wieviel % hat sich die Summe von 2000 *RM* in 2. verzinst, wenn er das 60. Lebensjahr erlebt?
5. Mit 28 Jahren schließt jemand gegen Einzahlung von 3000 *RM* eine Todesfallversicherung ab. Nach 3 Jahren beabsichtigt er weitere 1000 *RM* und mit dem 36. Lebensjahre noch 2000 *RM* einzuzahlen. Welche Summe kann im Falle seines Todes ausgezahlt werden?

6. Ein 40jähriger versichert sich so, daß an seine Hinterbliebenen der Betrag von 20000 $\mathcal{RM}$ ausgezahlt wird, falls er im kommenden Jahre stirbt. Welche Prämie ist zu zahlen, wenn diese verfallen ist, falls er nach Ablauf des Jahres noch lebt?

7. Auf welche Summe könnte sich der 50jährige versichern, wenn er bei einjähriger Versicherungsdauer (siehe 6.) eine Prämie von 170 $\mathcal{RM}$ zahlte?

8. Ein 30jähriger hat ein Kapital von 5200 $\mathcal{RM}$ zur Verfügung, das er für eine gemischte Versicherung anlegt, so daß im Falle seines Todes, spätestens im 65. Lebensjahr das Versicherungskapital ausgezahlt wird. Wie groß ist dieses?

9. Jemand schließt im Alter von 30 Jahren eine Erlebensfallversicherung auf das 60. Lebensjahr im Betrage von 8000 $\mathcal{RM}$ ab. Wie groß ist die einmalige Prämie?

10. Ein 28jähriger schließt eine Todesfallversicherung über 12000 $\mathcal{RM}$ ab, für den Fall, daß er zwischen dem 40. und 50. Lebensjahr stirbt. Welche einmalige Prämie hat er zu zahlen?

11. Ein Beamter von 30 Jahren, der erst nach 10 Jahren pensionsberechtigt ist, zahlt aus seinem Vermögen an eine Versicherungsbank 1000 $\mathcal{RM}$ ein, damit diese an seine Hinterbliebenen eine bestimmte Summe auszahlt, falls er vor Ablauf von 10 Jahren stirbt. Wie groß ist die Versicherungssumme?

12. Jemand zahlt 37jährig an eine Versicherungsbank 2300 $\mathcal{RM}$. Welche Summe kann bei seinem Tode ausgezahlt werden? Welche Summe kann ausgezahlt werden, wenn diese nur fällig wird, falls der Tod nach dem 50. Lebensjahr eintritt?

13. Ein Kaufmann hat mit einer Firma einen Vertrag auf 8 Jahre abgeschlossen; darin ist bestimmt, daß der Kaufmann, der 33 Jahre alt ist, für die Dauer des Vertrages mit 20000 $\mathcal{RM}$ gegen Todesfall versichert ist. Welche einmalige Einzahlung hat die Firma für den Versicherten zu leisten?

14. Welche einmalige Prämie hat ein 52jähriger zu zahlen, wenn er eine gemischte Versicherung eingeht, so daß bei seinem Tode, spätestens mit 65 Jahren eine Summe von 25000 $\mathcal{RM}$ fällig wird?

15. Desgl. für einen 34jährigen mit dem Endalter 60.

XI. Leibrenten.

1. Welche einmalige Zahlung a_x hat ein $x$jähriger sofort zu leisten, um eine lebenslängliche vorschüssige Leibrente im Betrage 1 zu erwerben? [Lebenslängliche vorschüssige Leibrente.]

Die Einzahlungen der l_x Personen haben auf den Zeitpunkt Null bezogen den Wert $a_x \cdot l_x \cdot v^x = a_x D_x$, die Auszahlungen der Versicherungsgesellschaft $l_x \cdot v^x + l_{x+1} v^{x+1} + \cdots + l_\omega \cdot v^\omega = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_\omega = N_x$, also ist:

$$\mathrm{a}_x = \frac{N_x}{D_x}. \tag{14}$$

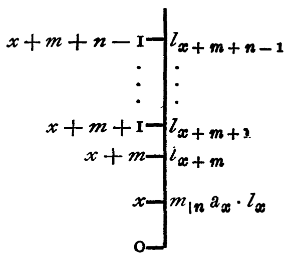
2. Wird die Leibrente **nachschüssig** bezahlt, so fällt die Zahlung 1 am Zeitpunkt x weg, also ist die Leistung a_x des Versicherten am Zeitpunkt x:

$$a_x = \mathrm{a}_x - 1. \tag{15}$$

Es läßt sich auch folgender Schluß ziehen: In 1. ist die erste Auszahlung wegzulassen, so daß die Gesamtauszahlungen auf den Zeitpunkt Null bezogen den Wert haben $D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega = N_{x+1}$, also ist:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{15a}$$

3. Welche Einzahlung ${}_{m|n}\mathrm{a}_x$ hat ein $x$jähriger zu leisten, damit ihm eine Leibrente vom Jahresbetrag 1 gegeben werden kann, die nach m Jahren beginnt und dann $n$mal ausgezahlt wird, höchstens aber bis zu seinem Tode? [Aufgeschobene kurze Leibrente.]



Am Zeitpunkt Null haben die Einzahlungen den Wert: ${}_{m|n}\mathrm{a}_x l_x \cdot v^x = {}_{m|n}\mathrm{a}_x \cdot D_x$,

die Auszahlungen:

$$l_{x+m} \cdot v^{x+m} + l_{x+m+1} v^{x+m+1} + \cdots + l_{x+m+n-1} v^{+m+n-1} = D_{x+m} + D_{x+m+1} + \cdots + D_{x+m+n-1} = N_{x+m} - N_{x+m+n},$$

also ist:

$${}_{m|n}\mathrm{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}. \tag{16}$$

4. Als Spezialfälle hierzu können noch folgende beiden Ergebnisse abgelesen werden.

Die Leibrente vom Jahresbetrage 1, die sofort beginnt und n Jahre läuft, aber höchstens bis zum Tode, hat am Zeitpunkt x den Wert:

$${}_{|n}\mathrm{a}_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \quad \text{[Kurze Leibrente.]} \tag{17}$$

Die Leibrente, die nach m Jahren beginnt und bis zum Tode des Versicherten läuft, hat den Wert:

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}. \quad \text{[Aufgeschobene Leibrente.]} \tag{18}$$

Was ergibt sich, wenn hierin $m = 1$ gesetzt wird?

XII. Jährliche Prämien.

Häufig ist der Versicherte nicht in der Lage, die einmalige hohe Prämie (Mise) zu bezahlen und zieht es deshalb vor, entweder lebenslang oder eine bestimmte Zeitlang eine jährliche gleichbleibende Prämie zu zahlen.

1. Die jährliche vorschüssige lebenslang gezahlte Prämie P möge die einmalige Zahlung A am Zeitpunkt x ersetzen. Zahlen die l_x Personen am Zeitpunkt x je den Betrag A, so ergibt dies auf den Zeitpunkt Null bezogen die Summe $A\, l_x v^x = AD_x$. Die Prämien von je P, die von den jeweils Lebenden alljährlich gezahlt werden, haben am Zeitpunkt Null den Wert:

$$P l_x v^x + P l_{x+1} v^{x+1} + \cdots + P l_\omega v^\omega$$
$$= P(D_x + D_{x+1} + \cdots + D_\omega) = P \cdot N_x,$$

also ist $A D_x = P \cdot N_x$ oder:

$$P = A\frac{D_x}{N_x} \tag{19}$$

oder nach (14), wo a_x den Barwert einer vorschüssigen Leibrente bedeutet, die im Ratenbetrage 1 lebenslänglich bezahlt wird,

$$P = \frac{A}{\mathrm{a}_x}. \tag{20}$$

Diese Gleichung kann auch durch folgende Überlegung gefunden werden. Nach (14) ist a_x der Barwert am Zeitpunkt x für eine lebenslängliche Zahlung vom Ratenbetrag 1, also $\mathrm{a}_x\, P$ der Barwert, wenn die Rate P ist, also ist $A = \mathrm{a}_x \cdot P$.

2. Soll die einmalige Zahlung A durch die t Jahre, aber höchstens bis zum Tode fällige jährliche Prämie $_tP$ ersetzt werden, so ist der Wert der einmaligen Einzahlung aller l_x Personen $Al_x v^x = AD_x$ am Zeitpunkt Null; der Wert aller jährlichen Prämienzahlungen der jeweils Lebenden ist am gleichen Zeitpunkt:

$${}_tP[l_x v^x + l_{x+1} v^{x+1} + \cdots + l_{x+t-1} v^{x+t-1}]$$
$$= {}_tP(D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+t-1}) = {}_tP(N_x - N_{x+t});$$

also ist:

$${}_tP = A\frac{D_x}{N_x - N_{x+t}}, \tag{21}$$

oder nach (17):

$${}_tP = \frac{A}{{}_{|t}a_x}. \tag{22}$$

3. In allen Fällen kann ohne Formeln durch Anschreiben an die Zeitgerade und Datieren auf den Zeitpunkt Null die Jahresprämie gefunden werden.

Beispiel: Jemand ist geboren am 2. August 1902; am 1. April 1925 schließt er eine Versicherung ab, nach der im Falle seines Todes an seine Erben $S = 12000$ ℛℳ ausgezahlt werden, bzw. an ihn selbst, wenn er noch weitere 37 Jahre lebt. Welche jährliche Prämie hat er zu zahlen?

60		$d_{59} \cdot S;\ l_{60} \cdot S$
59	$P \cdot l_{59}$	$d_{58} \cdot S$
⋮	⋮	⋮
25	$P \cdot l_{25}$	$d_{24} \cdot S$
24	$P \cdot l_{24}$	$d_{23} \cdot S$
23	$P \cdot l_{23}$	
0		

Der Mann ist 23 Jahre alt. Die Auszahlung erfolgt beim Tode, spätestens mit seinem 60. Lebensjahr. Die Jahresprämie sei P. An die Zeitgerade sind die von den l_{23} Personen der Sterbetafel eingezahlten Beträge eingetragen, ebenso die von der Versicherungsgesellschaft geleisteten Auszahlungen. Auf den Zeitpunkt Null bezogen betragen die Einzahlungen:

$$P\,(l_{23}\,v^{23} + l_{24}\,v^{24} + l_{25}\,v^{25} + \cdots l_{59}\,v^{59}) = P\,(N_{23} - N_{60}).$$

Die Auszahlungen der Gesellschaft:

$$S\,(d_{23}\,v^{24} + d_{24}\,v^{25} + \cdots + d_{58}\,v^{59} + d_{59}\,v^{60} + l_{60}\,v^{60})$$
$$= S\,(M_{23} - M_{60} + D_{60}).$$

Also ist $P\,(N_{23} - N_{60}) = S\,(M_{23} - M_{60} + D_{60})$ oder:

$$P = S\,\frac{M_{23} - M_{60} + D_{60}}{N_{23} - N_{60}} = 244.$$

Die jährliche Prämie beträgt also 244 ℛℳ.

XIII. Aufgaben über jährliche Prämien und Leibrenten.

1. Ein 36jähriger versichert sein Leben mit $S = 10000$ ℛℳ. Welche jährliche Prämie hat er zu zahlen?
2. Ein Beamter wird mit 25 Jahren angestellt; da er erst nach 10 Jahren pensionsberechtigt ist, versichert er sein Leben für diese Zeit mit 8000 ℛℳ. Welche jährliche Prämie hat er zu zahlen?
3. Ein 40jähriger verpflichtet sich, 15 Jahre, doch höchstens bis zu seinem Tode, vorschüssig eine jährliche Prämie von 250 ℛℳ zu zahlen. Welche Summe kann bei seinem Tode ausgezahlt werden?
4. Eine alleinstehende Witwe von 52 Jahren zahlt ihr Vermögen von 30000 ℛℳ bei einer Versicherungsgesellschaft ein, um dafür eine lebenslängliche, jährlich pränumerando zu zahlende Leibrente zu erhalten. Wie groß ist diese?
5. Wie groß ist die Rente, wenn sie postnumerando gezahlt wird?
6. Welche Zinsen würde die Witwe jährlich erhalten, wenn sie das Geld zu $3\frac{1}{2}\,\%$ ($4\frac{1}{2}\,\%$) anlegen würde?
7. Ein Arzt zahlt vom 40. Lebensjahr 10 Jahre lang jährlich 1000 ℛℳ, um sich vom 60. Jahre an eine lebenslängliche Leibrente zu sichern. Wie groß ist diese?

8. Ein 32jähriger versichert sein Leben so, daß an seine Angehörigen $S = 10000$ *RM* ausgezahlt werden, wenn der Tod erst nach dem 40. Lebensjahr eintritt. Welche jährliche Prämie hat er zu zahlen?

9. Jemand zahlt 40jährig 4800 *RM* bei einer Versicherungsbank ein, um im Falle des Erlebens vom 50. Jahre ab 10 Jahre lang eine Leibrente zu beziehen. Wie groß ist ihr jährlicher Betrag?

10. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn in 9. der Betrag bei einer Bank eingezahlt und vom 50. Jahre ab in 10 gleichen Raten zurückbezahlt wird ($p = 3\frac{1}{2}$), unabhängig davon, ob der Versicherte noch lebt oder tot ist?

11. Ein 26jähriger Kaufmann will sich mit 40 Jahren selbständig machen. Er zahlt jährlich vorschüssig 600 *RM* an eine Versicherungsbank. Welche Summe zahlt ihm diese mit dem 40. Jahre aus, wenn die Einzahlungen beim früheren Tode aufhören, aber die geleisteten Zahlungen ebenfalls verfallen sind?

12. Was würde in 11. eine Bank auszahlen (a) $p = 3{,}5\,\%$, b) $p = 4{,}5\,\%$), wenn der Tod auf Einzahlungen und Auszahlung ohne Einfluß ist?

13. Ein 38jähriger hat für eine Versicherung lebenslang jährlich 150 *RM* Prämie pränumerando zu zahlen. Welche einmalige sofortige Zahlung kann an deren Stelle treten?

14. Ein 29jähriger zahlt für eine Versicherung 2000 *RM*. Welche jährliche Prämie hätte an ihre Stelle treten können, wenn die Prämie bis zum 39. Jahre (einschließlich), höchstens aber bis zum Tode zahlbar ist?

15. Welche Todesfallversicherung kann ein 42jähriger durch eine jährliche Prämie von je 220 *RM* erwerben?

16. Welche Jahresprämie ist für eine gemischte Versicherung mit dem Endalter 55 zu zahlen, wenn der Versicherte 28 Jahre alt ist und die Versicherungssumme 30000 *RM* beträgt?

XIV. Deckungskapital oder Prämienreserve.

Versichern alle l_x Personen der Sterbetafel ihr Leben auf den Todesfall gegen eine einmalige oder jährlich in gleicher Höhe wiederkehrende Prämie, so wird bei rechnungsmäßigem Verlauf beim Tode des letzten Versicherten die Versicherungsgesellschaft weder Gewinn noch Verlust erlitten haben; Ausgaben und Einnahmen heben sich auf. Dagegen wird dieser Ausgleich nicht in jedem einzelnen Versicherungsjahr erreicht. Bei der Versicherung gegen eine einmalige Prämie kommen später keine Einnahmen mehr, wohl aber dauernd Auszahlungen. Aber auch bei jährlicher Zahlung gleichbleibender Prämien sind anfangs die Einnahmen größer als die Ausgaben, da die Sterblichkeit in den ersten Jahren (wenn man vom Kindesalter absieht) geringer ist als im höheren Alter. Die Versicherungsgesellschaft erzielt also in den ersten Jahren **Überschüsse** die allerdings nicht einen Gewinn darstellen, sondern eine **Rücklage** für die später die Einnahmen übersteigenden Ausgaben. Diese Rücklage heißt die **Prämienreserve** oder das **Deckungskapital**. Da aber die Gesamteinnahmen und -ausgaben sich schließlich ausgleichen, so muß dem Überschuß der Einnahmen über die Ausgaben in den ersten m Jahren ein gleichgroßer Überschuß der Ausgaben über die Einnahmen in den folgenden Jahren entsprechen, wenn beide Summen auf den gleichen Zeitpunkt $x + m$ berechnet werden. Die erste Art der Berechnung heißt **retrospektiv**, die zweite **prospektiv**.

Ist die einmalige Einzahlung für die Versicherung auf den Todesfall mit der Summe 1 nach (9) $A_x = \frac{M_x}{D_x}$, so ist die Prämienreserve nach m Jahren:

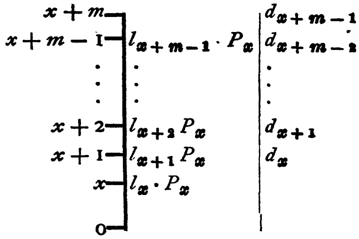
23 $$_mV_x = A_{x+m} = \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}},$$

denn diese Summe müßte der Versicherte nach m Jahren einzahlen, wenn er sich jetzt neu versichern wollte. Sie würde es der Gesellschaft ermöglichen, ohne Gewinn und Verlust bei rechnungsmäßigem Absterben der Versicherten zu arbeiten. Besteht also die alte Versicherung weiter, so muß sie für jede der noch lebenden l_{x+m} Personen diesen Betrag in Reserve haben und weiterhin entsprechend verzinsen. Da die **Prämienreserve** gleichsam ein **Guthaben des Versicherten** ist, so kann dieser auf sie ein Darlehen bei der Gesellschaft aufnehmen oder sie (mit einem entsprechenden Abzug) zurückerhalten, wenn das Versicherungsverhältnis aufgelöst wird. Bei Versicherungen auf den **Erlebensfall** findet allerdings in diesem Falle **keine Rückzahlung** statt (warum?).

Etwas schwieriger ist die Berechnung bei **jährlicher** Prämienzahlung. Versichern sich die l_x Personen der Sterbetafel auf den Todesfall mit der Summe 1, so ist die jährliche Prämie nach (9) und (19) $P_x = \frac{M_x}{N_x}$. Nach Verlauf von m Jahren ist der Überschuß der Einnahmen über die Ausgaben für alle l_x Personen berechnet und auf den Nullpunkt bezogen:

$$P_x[l_x v^x + l_{x+1}v^{x+1} + \cdots + l_{x+m-1}v^{x+m-1}] - [d_x v^{x+1} + d_{x+1}v^{x+2} + \cdots + d_{x+m-1}v^{x+m}] = P_x[N_x - N_{x+m}] - [M_x - M_{x+m}].$$

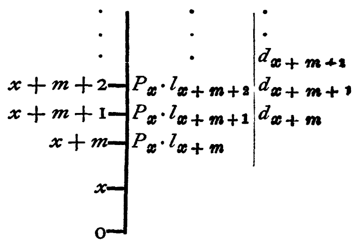
Soll der Wert auf den Zeitpunkt $x+m$ bezogen werden und für jeden einzelnen der noch lebenden l_{x+m} Versicherten berechnet werden, so ist mit $l_{x+m} \cdot v^{x+m} = D_{x+m}$ zu dividieren, so daß sich für jeden Versicherten nach m jährigem Bestand der Versicherung das Deckungskapital:



$$(24) \qquad {}_mV_x = \frac{P_x(N_x - N_{x+m}) - (M_x - M_{x+m})}{D_{x+m}}$$

$$= \frac{1}{D_{x+m}}\left[M_{x+m} - \frac{M_x}{N_x} \cdot N_{x+m}\right]$$

ergibt, wobei in der letzten Form für P_x der Wert eingesetzt ist. Hier ist das Deckungskapital retrospektiv berechnet worden, die prospektive Berechnung, die das gleiche Ergebnis liefert, gestaltet sich folgendermaßen: Die zukünftigen Einnahmen der Versicherungsgesellschaft sind für alle Versicherten berechnet und auf den Nullpunkt bezogen:



$$P_x[l_{x+m}v^{x+m} + l_{x+m+1}v^{x+m+1} + \cdots + l_\omega v^\omega],$$

die Ausgaben entsprechend:

$$[d_{x+m}v^{x+m+1} + d_{x+m+1}v^{x+m+2} + \cdots + d_\omega v^{\omega+1}].$$

Werden wieder die abkürzenden Bezeichnungen eingeführt und der Überschuß für einen der l_{x+m} Lebenden am Zeitpunkt $x+m$ berechnet, so ergibt sich:

$$(24a) \qquad {}_mV_x = \frac{1}{D_{x+m}}[M_{x+m} - P_x \cdot N_{x+m}]$$

$$= \frac{1}{D_{x+m}}\left[M_{x+m} - \frac{M_x}{N_x} \cdot N_{x+m}\right],$$

d. h. der gleiche Wert wie oben. I. a. ist die prospektive Rechnung vorzuziehen.

Auf andere Darstellungsformen der Prämienreserve und auf ihre Berechnung bei anderen Versicherungsarten, die ganz ähnlich erfolgt, soll hier nicht eingegangen werden.

XV. Bruttoprämie. Gewinn.

Der Übersicht halber wurde bei allen Aufgaben nur eine Sterbetafel benutzt. In der Praxis hat man für Todesfallversicherungen andre Tafeln als für Leibrentenversicherung. Denn es hat sich gezeigt, daß Leute, die eine Leibrentenversicherung eingehen i. a. nicht nur mit einer höheren Lebensdauer rechnen als die, die eine Todesfallversicherung abschließen, sondern daß sie auch im Durchschnitt länger leben. Gelegentlich werden auch noch andere Sonderarten von Sterbetafeln gebraucht.

Die oben durchgeführten Aufgaben aus der Versicherungsmathematik wurden durchgeführt nach dem Grundsatz: Gesamtleistung der Versicherten = Gesamtleistung der Versicherungsgesellschaft. Die so berechneten Nettoprämien reichen aus, wenn so viele Versicherte da sind, daß das Gesetz der großen Zahlen gilt, wenn die benutzte Sterbetafel den Verhältnissen entspricht, wenn die Gesellschaft ihr Geld zu dem angenommenen Zinssatz verzinsen kann und wenn sie keine Unkosten hat. Die ersten Bedingungen sind i. a. erfüllt, nicht aber die letzte. Da die Gesellschaft für Verwaltung, Werbung u. a. m. erhebliche Unkosten hat, erhebt sie einen Zuschlag, der mit der Nettoprämie zusammen die ausreichende Prämie ergibt. Da die Gesellschaft ferner einen Gewinn erzielen und für „Mißjahre" einen Reservefonds schaffen will, erhebt sie einen weiteren Zuschlag und kommt so zur Bruttoprämie, die in den Veröffentlichungen der Gesellschaft an Stelle der oben errechneten Nettoprämie steht. Die Berechnung der Bruttoprämie aus der Nettoprämie erfolgt für die einzelnen Versicherungsarten und bei den verschiedenen Versicherungsgesellschaften nach verschiedenen Methoden. Die Ergebnisse der oben durchgeführten Aufgaben liefern also ein für den Versicherten zu günstiges Ergebnis. Auch die Berechnung des Deckungskapitals erfährt auf Grund der ausreichenden Prämie eine Abänderung.

So kommt es, daß die Versicherungsgesellschaft, von Ausnahmen abgesehen, am Schlusse des Geschäftsjahres einen Überschuß erzielt, zumal sie meist ihr Geld zu einem höheren als dem angenommenen Zinsfuß anlegen kann und die Sterblichkeit (infolge der strengen ärztlichen Untersuchung) meist günstiger verläuft, als dies nach der Sterbetafel zu erwarten wäre. Ein Teil des Reingewinns dient zur Stärkung des Reservefonds für unvorhergesehene Fälle (Krieg, Seuchen), einen kleinen Teil erhalten die Beamten, der größte Teil wird bei Aktiengesellschaften nach Maßgabe der eingelegten Kapitalien an die Aktionäre verteilt (z.T. auch an die Versicherten), bei Gesellschaften auf Gegenseitigkeit kommt er den Versicherten selbst zugute. Meist findet allerdings keine Barauszahlung statt, sondern die folgenden Prämien der Versicherten werden etwa entsprechend der angesammelten Prämienreserve oder der eingezahlten Prämien ermäßigt, oder das versicherte Kapital wird erhöht.

Die **Versicherung** hat mit der **Lotterie** manches Gemeinsame, vor allem das Moment der **Ungewißheit**, das auch in der ähnlichen mathematischen Behandlung zum Ausdruck kommt. Aber während die Lotterie manche schlimme Begleiterscheinungen aufweist, die Spielleidenschaft steigert und die Arbeitslust mindert, hat das Versicherungswesen einen großen **volkswirtschaftlichen** Nutzen. Viel Not und Elend kann durch eine Versicherung mit verhältnismäßig geringen Opfern verhindert oder doch stark gemildert werden. Es ist deshalb nicht zu verwundern, daß das Versicherungswesen einen ungeahnten Aufschwung genommen hat und auf immer weitere Gebiete ausgedehnt wird.

XVI. Vermischte Aufgaben aus der Versicherungsrechnung.

1. Wie groß ist das Deckungskapital in X 1, wenn der Versicherte 50 Jahre alt ist?

2. Desgl. in XIII 1. Wie erklärt sich der Unterschied in beiden Fällen?

3. Wie groß ist das Deckungskapital in Aufgabe XII 3, wenn der Versicherte 50 Jahre alt ist?

4. Jemand erwirbt 27 Jahre alt mit 1000 ℛℳ einmaliger Prämie eine gemischte Todesfallversicherung mit dem Endalter 65. Wie groß ist die Versicherungssumme?

5. Wie groß ist das Deckungskapital in 4. mit Erreichung des 55. Lebensjahres a) prospektiv, b) retrospektiv?

6. Berechne in 4. und 5. die Versicherungssumme, die durch Einzahlung des Deckungskapitals mit dem 55. Lebensjahr erworben werden kann, wenn wieder das Endalter der gemischten Versicherung das 65. Jahr ist. Was zeigt das Ergebnis, und wie ist es zu erklären?

7. Welche Abfindung wird dem Versicherten in Aufgabe 4 gegeben, wenn er mit 55 Jahren von der Versicherung zurücktritt und ihm 65 % des Deckungskapitals zustehen?

8. Ein 26jähriger schließt eine Lebensversicherung auf $S = 12000$ ℛℳ für den Todesfall ab. Wie groß ist die jährliche Nettoprämie und wie groß die Prämienreserve mit Erreichung des 40. Lebensjahres?

9. Da der Versicherte in Aufgabe 8 mit 40 Jahren die Prämie nicht mehr zahlen kann, bietet ihm die Versicherungsgesellschaft an, ihm entweder die Prämienreserve mit 30 % Abzug auszuzahlen oder die Versicherung als prämienfreie Versicherung weiterlaufen zu lassen. In diesem Falle soll die Prämienreserve ohne Abzug als einmalige Prämie gelten. Wie groß wäre im ersten Falle die Auszahlung und im zweiten Falle die neue Versicherungssumme?

10. Ein 33jähriger versichert sein Leben durch eine einmalige Einzahlung von 5000 ℛℳ auf den Todesfall. Wie groß ist die Versicherungssumme und wie groß die Prämienreserve beim 52. Lebensjahr?

11. Eine Witwe erhält mit 48 Jahren bei dem Tode ihres Mannes von einer Versicherungsgesellschaft 20000 *RM*. Einen Teil dieser Summe benutzt sie, um eine nachschüssige lebenslängliche Rente von jährlich 1000 *RM* zu erwerben. Wieviel behält sie übrig, wenn die einmalige Nettoprämie einen Aufschlag von 10 % erfährt?

12. Berechne in X 1, 6, 9, 10, 13, 14, 15; XII 3; XIII 1, 2, 8, 16 aus der Nettoprämie die Bruttoprämie, wenn diese durch einen Zuschlag von a) 5 %, b) 7,5 %, c) 8 %, d) 10 %, e) 12 %, f) 15 %, g) 20 % erhalten wird.

13. In X 2 sei der Gewinn von 2000 *RM* die Bruttoprämie, die 12 % höher sei als die Nettoprämie; wie groß ist dann die Nettoprämie und die Versicherungssumme?

14. Führe die entsprechende Rechnung durch für X 5, 7, 11, 12, XII 3, 4, 7, 9, wenn die Bruttoprämie um a) 5 %, b) 9 %, c) $12\frac{1}{2}$ %, d) 20 % größer ist als die Nettoprämie.

15. Alle 48 jährigen der Sterbetafel verpflichten sich, soweit sie noch leben, vom 52. Jahre ab 10 Jahre lang vorschüssig je den Betrag von 420 *RM* zu zahlen. Wie groß ist diese Summe, bezogen auf das Geburtsjahr?

16. Jemand schließt im Alter 26 eine Versicherung auf den Todesfall ab. Er zahlt 20 mal, höchstens bis zum Tode, je 185 *RM*. Wie hoch ist die Versicherungssumme?

17. Ein Rechtsanwalt ist geboren am 17. Mai 1899 und schließt am 1. Januar 1927 eine Leibrentenversicherung ab. Er zahlt sofort und jedes folgende Jahr bis einschließlich 1. Januar 1940 eine Prämie und erhält dafür lebenslänglich vom 1. Januar 1950 ab je 1000 *RM*. Wie groß ist die Bruttoprämie, wenn sie 10 % größer als die Nettoprämie ist?

18. Welche einmalige Bruttoprämie hätte der Rechtsanwalt in 17. zahlen müssen, wenn sie 8 % höher ist als die Nettoprämie?

19. Eine alleinstehende Frau von 55 Jahren zahlt an eine Versicherungsbank einen Teil ihres Vermögens, um eine sofort beginnende lebenslängliche Leibrente von je 1500 *RM* zu erwerben. Wie groß ist die Nettoprämie? Wie groß ist die Bruttoprämie bei einem Aufschlag von $12\frac{1}{2}$ %?

20. Ein 25 jähriger schließt eine Erlebensfallversicherung auf das 55. Lebensjahr ab. Wie groß ist bei einer Versicherungssumme von 15000 *RM* a) die einmalige Nettoprämie, b) die Bruttoprämie bei 10 % Aufschlag?

21. Welche Einzahlung hätte er bei einer Bank machen müssen, wenn diese an ihn (oder im Falle seines Todes an seine Erben) nach 30 Jahren die gleiche Summe ausgezahlt hätte, a) bei 3,5 %, b) bei 5 %?

22. Zu wieviel % hat sich die Einlage in 20. verzinst, wenn der Versicherte das 55. Lebensjahr erlebt bei Zugrundelegung a) der Nettoprämie, b) der Bruttoprämie?

23. Ein 45jähriger Vater schließt für seine zwei Töchter von 5 und 8 Jahren eine Aussteuerversicherung ab. Er zahlt jährlich, 12 Jahre lang, höchstens aber bis zu seinem Tode, 500 *ℛℳ* ein. Beide Töchter erhalten bei der Volljährigkeit die gleiche Summe. Wie groß war diese? Die Auszahlung erfolgt zu den bestimmten Terminen auch dann, wenn die Töchter gestorben sein sollten.

24. Was hätte eine Bank bei der Volljährigkeit der Töchter ausgezahlt, wenn der Vater dieselben Einzahlungen 12 Jahre lang gemacht hätte und die Bank ebenfalls 3,5 % Zinsen berechnet hätte?

25. Ein Vater schließt mit 33 Jahren eine Versicherung ab, daß an seinen 5jährigen Sohn nach 13 Jahren und in jedem der drei folgenden Jahre für sein Studium je 1000 *ℛℳ* ausgezahlt werden. Die Auszahlung erfolgt auf jeden Fall, auch bei dem früheren Tode des Kindes. Die Zahlungen des Vaters erfolgen 10mal, doch hört im Falle des Todes die Prämienzahlung auf. Wie hoch ist die Prämie?

26. Wieviel mußte der Vater in 25. jährlich sofort beginnend 10mal an eine Bank einzahlen, um seinem Sohne die gleiche Rente zu sichern?

27. Verschaffe dir den Tarif einer Lebensversicherungsgesellschaft und vergleiche an mehreren Stellen die angegebene Bruttoprämie mit der selbst errechneten Nettoprämie.

XVII. Graphische Darstellungen aus der Versicherungsrechnung.

Um ein Schaubild für die Absterbeordnung zu erhalten, kann man entweder die Lebenden der Sterbetafel (l_x) oder die Toten jedes Jahres (d_x) graphisch darstellen. Auf der Grundachse werden in gleichen Abständen die einzelnen Jahre durch die entsprechenden Zahlen bezeichnet. Bei jedem Jahre wird die Zahl der l_x bzw. der d_x als Ordinate nach oben abgetragen. Die Endpunkte der Lote werden durch eine Kurve verbunden. Die Kurve der l_x (ausgezogen) beginnt bei 100000 und sinkt mit höherem Alter; die Kurve der d_x (punktiert) fällt erst wenig, steigt dann und fällt dann wieder (vom 71. Jahre ab). Der Maßstab ist nicht gleich für beide Kurven; die Zahlen links beziehen sich auf die Kurve der l_x, die rechts auf die der d_x. (Fig. 9.)

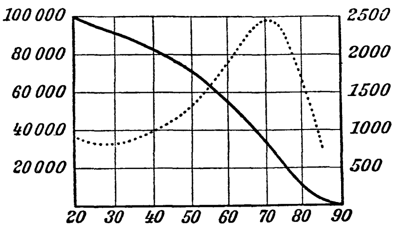


Fig. 9.

Ebenso lassen sich die Sterbenswahrscheinlichkeiten darstellen [vgl. Gl. (3)]. Die geringste Sterbenswahrscheinlichkeit von 0,0085 liegt beim Alter 27; von da ab steigt sie erst langsam, dann stärker an. (Fig. 10.)

In Fig. 11 ist die Jahresprämie dargestellt, die der 20jährige für 1000 RM Versicherungssumme bei der gemischten Versicherung für die Endalter 40, 45, 50, ... 70 zu zahlen hat.

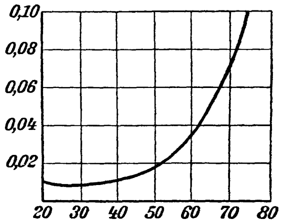


Fig. 10.

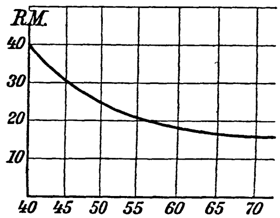


Fig. 11.

In Figur 12 sind auf der Grundachse wieder die Lebensalter markiert. Als Ordinate ist das Lebensalter eingetragen, bei dem von den l_x Personen der Tafel noch die Hälfte lebt. Die Kurve läßt erkennen, welches Lebensalter der $x$jährige mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erreicht; sie stellt also die „voraussichtliche Lebenszeit" für jedes Alter dar. So zeigt z. B. die Kurve, daß der 50jährige mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das 69. Lebensjahr erreicht; von allen Lebenden, die 50 Jahre alt sind, wird voraussichtlich die Hälfte 69 Jahre alt werden.

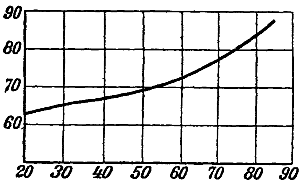


Fig. 12.

Aufgaben.

1. Zeichne Schaubilder für die übrigen Werte der Sterbetafel (D_x, C_x, N_x, M_x). Der Maßstab ist entsprechend der höchsten vorkommenden Zahl zu wählen.
2. Arbeite für eine Sterbekasse, die 500 RM Sterbegeld zahlt, den Tarif aus, indem du für die Eintrittsalter 20, 30, 40, ..., 60 die jährliche Nettoprämie nach Gl. (9) bestimmst. Stelle die Werte graphisch dar und lies an der erhaltenen Kurve die Zwischenwerte ab. Prüfe die Genauigkeit der Zeichnung, indem du die aus dem Schaubild entnommenen Werte für die Alter 25, 35, .. mit den errechneten Werten vergleichst. Trage auch die Kurve für die Bruttoprämien ein, wenn diese 25 % größer als die Nettoprämien sind?
3. Berechne die einmalige Prämie für die gemischte Versicherung auf 1000 RM bei einem Eintrittsalter von 20 Jahren und dem Endalter 40, 45, 50, ..., 70. Stelle die erhaltene Tabelle graphisch dar. (Ergänzung zu Fig. 11.)

4. Die in Tabellen zusammengestellten Tarife von Lebensversicherungsgesellschaften sind für verschiedene Versicherungsarten graphisch darzustellen.
5. Trage in das gleiche Koordinatensystem die Tarife für die jährlichen Bruttoprämien von zwei verschiedenen Gesellschaften ein (eine rot, eine grün) und untersuche, welche die billigste ist.
6. Berechne in Aufgabe 3 für jedes Alter die Prämienreserve und zeichne das Schaubild.
7. Ergänze Fig. 11 durch Einzeichnen der Prämienreserve bei jedem Alter. [Jährliche Prämienzahlung!]
8. Stelle für jedes Alter die fernere wahrscheinliche Lebensdauer graphisch dar.
9. Fertige ein Schaubild, aus dem abgelesen werden kann, wie groß für jedes Alter (von 20 bis 70) die Wahrscheinlichkeit ist, noch 20 Jahre zu leben.

Betriebswirtschaftslehre in Verbindung mit Recht und Technik des Handels. Eine Einführung von Handelsschuldirektor Dr. P. Eckardt. Mit einem Geleitwort von Prof. K. von der Aa. 1. Band. Mit 52 Abb. Geb. RM 3.80. 2. Band. [U. d. Pr. 1927.]

Das Werk will kaufmännisches Denken bilden helfen, Erkenntnis der betriebswirtschaftlichen und betriebstechnischen Zusammenhänge vermitteln und in das Recht des Handels einführen. Es ist praktisch und wissenschaftlich im Inhalt — einfach in der Darstellung, in deren Mittelpunkt die Unternehmung steht. Zahlreiche Beispiele aus dem Leben veranschaulichen die schwierigeren Fragen.

Betriebswirtschaftslehre. Grundzüge des Rechnungswesens und des Aufbaues schaffenswirtschaftl. Betriebe. Von Prof. Dr. E. Gelomacher. 2. Aufl. (Aus: Teubners Handb d. Staats- u. Wirtschaftskunde. II. Abt. 2. Bd. 4. Heft.) Kart. RM 2.—

Die Betriebswirtschaftslehre erfaßt die schaffenswirtschaftlichen Betriebe in ihrem Wesen und in ihren Lebensbedingungen. Sie will dem berufstätigen Wirtschafter einen haltbaren gedanklichen Unterbau für sein tägliches Wirken vermitteln. Unter diesem Gesichtspunkte werden das Rechnungswesen und die Organisation der schaffenswirtschaftlichen Betriebe behandelt. Das Rechnungswesen wird dargestellt in seinen allgemeinen Grundzügen und nach den Einzelgebieten: Kostenrechnung, Erfolgsrechnung und Sonderrechnungen. Die Ausführungen über Organisation werden durch graphische Organisationspläne veranschaulicht.

Kaufmännische Buchhaltung und Bilanz. Von Dr. rer. pol. P. Gerstner. 4. Aufl. Bd. I: Allgem. Buchhaltungs- und Bilanzlehre. Mit 1 schematischen Darstellung. Bd. II: Buchhalterische Organisation. (Selbstkostenkontrollbuchführung.) Mit 2 schemat. Darstellungen u. 1 Tafel. (ANuG Bd. 506 u. 507.) Geb. je RM 2.—

Eine das gesamte Gebiet des Buchhaltungswesens umfassende, Theorie und Technik in gleicher Weise berücksichtigende Darstellung, die sowohl zum buchhalterischen Denken anregt, als das Verständnis wirtschaftlichen Geschehens ermöglicht.

Buchhaltungs-Übungen für Fortgeschrittene zum Gebrauch an Handelshochschulen und verwandten Anstalten. Von Geh Hofrat Studiendirektor Prof. Dr. A. Adler. 4. Aufl., bearbeitet von Prof. Dr. E. Pape. Kart. RM 3.20

Die Neuauflage hat verschiedentliche Verbesserungen und Erweiterungen erfahren. Kurse, Zins- und Steuersätze sind nach dem gegenwärtigen Stande eingesetzt. Teil I ist ein schematisches Beispiel eines Abschlusses, mit Berücksichtigung der Geldwertänderung, beigefügt. Die Ausgabe von Teilschuldverschreibungen ist ausführlicher behandelt, die Kapitalherabsetzung gemäß der Goldbilanzverordnung berücksichtigt. Die Verbuchung öffentlicher Abgaben ist in einem Anhang behandelt.

Handelswörterbuch. Von Justizrat Dr. M. Strauß und Handelsschuldirektor Dr. V. Sittel. Zugleich fünfsprachiges Wörterbuch zusammengestellt von V. Armhaus. (Teubners kleine Fachwörterbücher Bd. 9.) Geb. RM 4.60

Wörterbuch der Warenkunde. Von Prof. Dr. M. Pietsch. (Teubners kleine Fachwörterbücher Bd. 3.) Geb. RM 4.60

Grundriß der Wirtschaftsgeographie. Von Prof. K. von der Aa. 8. Aufl. Mit 82 Skizzen. Kart. RM 2.—

Auch in der Neubearbeitung stellt der Verfasser Deutschland in den Mittelpunkt der Darstellung, dessen natürliche Wirtschaftsgebiete, verkehrsgeographischen Verhältnisse und wirtschaftlichen Grundlagen unter eingehender Berücksichtigung der Wirkungen des Weltkrieges ausführlich behandelt werden.

Allgemeine Wirtschafts- u. Verkehrsgeographie. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Sapper. M. 70 kartogr. u. stat.-graph. Darstellungen. Geb. RM 12.—

„Nicht lehrhaft trocken, sondern in lebenswarmer Gestaltung wird den Einwirkungen der Natur auf die menschliche Wirtschaft, den vielfachen Beziehungen zwischen Mensch und Wirtschaft nachgegangen, eine Übersicht der Gütererzeugung geboten, der Umfang jener Fragen abgeleuchtet, die sich unter geographischen Gesichtspunkten für Handel und Verkehr ergeben. Ein Anhang bringt in alphabetischer Reihung eine Aufzählung der wirtschaftlichen Einheiten der Erde mit zahlreichen wirtschaftsstatistischen Daten. Alles in allem: ein vorzüglich entworfenes, auch sachlich einwandfreies Werk, das in gleicher Weise Wissenschaft und Praxis zu befruchten vermag."
(Welt des Kaufmanns.)

Grundzüge der Länderkunde. Von Prof. Dr. A. Hettner. Bd. I: Europa. 4., verb. Aufl. Mit 4 farb. Tafeln, 269 Kärtchen und Fig. im Text. Geb RM 14.—. Bd. II: Die außereuropäischen Erdteile. 3, verb. Aufl. Mit 197 Kärtchen u. Diagrammen im Text. Geh. RM 14.—, geb. RM 16.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Sterbetafel M. u. W. I der 23 deutschen Gesellschaften ($3\frac{1}{2}\,\%$).

x	l_x	d_x	$D_x = l_x \cdot v^x$	$N_x = \sum_x^{\omega} D_x$	$C_x = d_x v^{x+1}$	$M_x = \sum_x^{\omega} C_x$
20	100000	919	50257	1031125	446	15386
21	99081	908	48109	980868	426	14940
22	98173	887	46057	932759	402	14514
23	97286	861	44097	886702	377	14112
24	96425	835	42229	842605	353	13735
25	95590	816	40449	800376	334	13382
26	94774	804	38747	759927	318	13048
27	93970	797	37119	721180	304	12731
28	93173	795	35560	684061	293	12426
29	92378	800	34062	648501	285	12133
30	91578	808	32626	614439	278	11848
31	90770	818	31246	581813	272	11570
32	89952	831	29917	550567	267	11298
33	89121	841	28637	520650	261	11031
34	88280	856	27408	492013	257	10770
35	87424	873	26224	464605	253	10513
36	86551	889	25084	438381	249	10260
37	85662	906	23987	413297	245	10011
38	84756	928	22931	389310	243	9766
39	83828	950	21913	366379	240	9523
40	82878	975	20933	344466	238	9284
41	81903	1006	19987	323533	237	9046
42	80897	1035	19072	303546	236	8808
43	79862	1063	18192	284474	234	8573
44	78799	1092	17344	266282	232	8339
45	77707	1117	16523	248938	230	8106
46	76590	1140	15736	232415	226	7877
47	75450	1169	14978	216679	224	7651
48	74281	1204	14247	201701	223	7426
49	73077	1246	13542	187454	223	7203
50	71831	1303	12861	173912	225	6980
51	70528	1362	12201	161051	228	6755
52	69166	1425	11561	148850	230	6527
53	67741	1490	10940	137289	232	6297
54	66251	1556	10337	126349	235	6065
55	64695	1621	9753	116012	236	5830
56	63074	1691	9187	106259	238	5594
57	61383	1759	8639	97072	239	5356
58	59624	1832	8107	88433	241	5117
59	57792	1900	7593	80326	241	4876
60	55892	1976	7094	72734	242	4635
61	53916	2038	6612	65639	241	4392
62	51878	2097	6147	59027	240	4151
63	49781	2149	5699	52880	238	3911
64	47632	2197	5269	47181	235	3673
65	45435	2246	4856	41912	232	3438

x	l_x	d_x	$D_x = l_x \cdot v^x$	$N_x = \sum\limits_x^\omega D_x$	$C_x = d_x v^{x+1}$	$M_x = \sum\limits_x^\omega C_x$
66	43189	2302	4460	37056	230	3207
67	40887	2355	4079	32596	227	2977
68	38532	2399	3714	28517	223	2750
69	36133	2432	3365	24803	219	2526
70	33701	2452	3033	21438	213	2308
71	31249	2455	2717	18405	206	2094
72	28794	2436	2419	15688	198	1888
73	26358	2406	2139	13270	189	1690
74	23952	2360	1878	11131	179	1502
75	21592	2299	1636	9252	168	1323
76	19293	2210	1412	7616	156	1155
77	17083	2103	1208	6204	144	998
78	14980	1982	1024	4996	131	855
79	12998	1848	858	3973	118	724
80	11150	1730	711	3114	107	606
81	9420	1599	581	2403	95	499
82	7821	1443	466	1823	83	404
83	6378	1264	367	1357	70	321
84	5114	1080	284	990	58	251
85	4034	896	217	705	47	193
86	3138	715	163	489	36	146
87	2423	566	122	326	27	110
88	1857	442	90	205	21	83
89	1415	344	66	115	16	62
90	1071	1071	48	48	47	47

Tabelle I—IV siehe umstehend.

	Tabelle I (Zinsfaktoren) q^n		Tabelle II (Diskontierungsfaktoren) $v^n = \frac{1}{q^n}$		Tabelle III (Endwert der vorschüssigen Rente 1) $s_{\overline{n}|} = q\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$		Tabelle IV (Barwert der nachschüssigen Rente 1) $a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{q^n - 1}{(q-1)\,q^n}$	
	$1{,}035^n$ 3.5%	$1{,}05^n$ 5%	$\frac{1}{1{,}035^n}$ 3.5%	$\frac{1}{1{,}05^n}$ 5%	3.5%	5%	3.5%	5%
1	1,035	1,05	0,96618	0,95238	1,035	1,05	0,96618	0,95238
2	1,07123	1,1025	0,93351	0,90703	2,10623	2,1525	1,89969	1,85941
3	1,10872	1,15763	0,90194	0,86384	3,21494	3,31013	2,80164	2,72325
4	1,14752	1,21551	0,87144	0,82270	4,36247	4,52563	3,67308	3,54595
5	1,18769	1,27628	0,84197	0,78353	5,55015	5,80191	4,51505	4,32948
6	1,22926	1,34010	0,81350	0,74622	6,77941	7,14201	5,32855	5,07569
7	1,27228	1,40710	0,78599	0,71068	8,05169	8,54911	6,11454	5,78637
8	1,31681	1,47746	0,75941	0,67684	9,36850	10,02656	6,87396	6,46321
9	1,36290	1,55133	0,73373	0,64461	10,73139	11,57789	7,60769	7,10782
10	1,41060	1,62889	0,70892	0,61391	12,14199	13,20679	8,31661	7,72173
11	1,45997	1,71034	0,68495	0,58468	13,60196	14,91713	9,00155	8,30641
12	1,51107	1,79586	0,66178	0,55684	15,11303	16,71298	9,66333	8,86325
13	1,56396	1,88565	0,63940	0,53032	16,67699	18,59863	10,30274	9,39357
14	1,61870	1,97993	0,61778	0,50507	18,29568	20,57856	10,92052	9,89864
15	1,67535	2,07893	0,59689	0,48102	19,97103	22,65749	11,51741	10,37966
16	1,73399	2,18287	0,57671	0,45811	21,70502	24,84037	12,09412	10,83777
17	1,79468	2,29202	0,55720	0,43630	23,49969	27,13238	12,65132	11,27407
18	1,85749	2,40662	0,53836	0,41552	25,35718	29,53900	13,18968	11,68959
19	1,92250	2,52695	0,52016	0,39573	27,27968	32,06595	13,70984	12,08532
20	1,98979	2,65330	0,50257	0,37689	29,26947	34,71925	14,21240	12,46221
21	2,05943	2,78596	0,48557	0,35894	31,32890	37,50521	14,69797	12,82115
22	2,13151	2,92526	0,46915	0,34185	33,46041	40,43048	15,16712	13,16300
23	2,20611	3,07152	0,45329	0,32557	35,66653	43,50200	15,62041	13,48857
24	2,28333	3,22510	0,43796	0,31007	37,94986	46,72710	16,05837	13,79864
25	2,36324	3,38635	0,42315	0,29530	40,31310	50,11345	16,48151	14,09394
26	2,44596	3,55567	0,40884	0,28124	42,75906	53,66913	16,89035	14,37519
27	2,53157	3,73346	0,39501	0,26785	45,29063	57,40258	17,28536	14,64303
28	2,62017	3,92013	0,38165	0,25509	47,91080	61,32271	17,66702	14,89813
29	2,71188	4,11614	0,36875	0,24295	50,62268	65,43885	18,03577	15,14107
30	2,80679	4,32194	0,35628	0,23138	53,42947	69,76079	18,39205	15,37245
31	2,90503	4,53804	0,34423	0,22036	56,33450	74,29883	18,73628	15,59281
32	3,00671	4,76494	0,33259	0,20987	59,34121	79,06377	19,06887	15,80268
33	3,11194	5,00319	0,32134	0,19987	62,45315	84,06696	19,39021	16,00255
34	3,22086	5,25335	0,31048	0,19035	65,67401	89,32031	19,70068	16,19290
35	3,33359	5,51602	0,29998	0,18129	69,00760	94,83632	20,00066	16,37419
36	3,45027	5,79182	0,28983	0,17266	72,45787	100,62814	20,29049	16,54685
37	3,57103	6,08141	0,28003	0,16444	76,02885	106,70955	20,57053	16,71129
38	3,69601	6,38548	0,27056	0,15661	79,72491	113,09502	20,84109	16,86789
39	3,82537	6,70475	0,26141	0,14915	83,55028	119,79977	21,10250	17,01704
40	3,95926	7,03999	0,25257	0,14205	87,50954	126,83976	21,35507	17,15909