

Bryan - Bader

Stabilität der Flugzeuge

Die
Stabilität der Flugzeuge

Einführung in die dynamische Stabilität
der Flugzeuge

Von

G. H. Bryan, Sc. D., F. R. S.

Prof. für reine und angewandte Mathematik an der Universität zu North Wales

Aus dem Englischen übertragen

von

Dipl.-Ing. H. G. Bader

Assistent an der Technischen Hochschule zu Dresden

Mit 40 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1914

ISBN 978-3-662-23960-5 ISBN 978-3-662-26072-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-26072-2

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1914

Vorwort des Verfassers.

Bis heute hat man dem Problem der Stabilität beim Fliegen nicht die gebührende Aufmerksamkeit zugewendet. Vom Standpunkt des Fliegers aus kann man sich freilich nicht darüber wundern. Denn so lange Erfolg oder Mißerfolg von dem Namen der Städte abhängen, wo Start und Landung zu erfolgen hat — und diese Behauptung ist nicht übertrieben — so lange hat es keinen Sinn für ihn, Monate eifriger Arbeit langwierigen Stabilitätsuntersuchungen zu widmen. Wenn ein Preis für einen Flug von Folkestone nach Flushing geboten wird, ist es zwecklos, von Harwich nach Hook zu fliegen, wenn sich dabei das Flugzeug auch viel stabiler erweisen sollte als jenes, das schließlich den Preis davonträgt.

Es steht zu hoffen, daß die folgende Arbeit Anlaß geben wird, das Stabilitätsproblem beim Fluge mit mehr Eifer und Geduld als bisher zu behandeln. Die allgemeinen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen sind in der Einleitung enthalten, die daher mit Vorteil vor Behandlung besonderer Fälle zu lesen ist. Die allgemeinen Schlußfolgerungen zeigen, daß inhärente Stabilität möglich ist, sowohl Längs- wie Seiten-Stabilität; daß man sich ihrer versichern kann durch geeignet angeordnete Hilfs-Flächen, die am Flugzeug starr befestigt sind; doch wird der Erfolg nur durch äußerste Sorgfalt der Berechnung gewährleistet. Dabei müssen verschiedene Umstände, so die Neigung der Flugbahn und andere, Berücksichtigung finden, wenn anders das Resultat nicht in Frage gestellt werden soll.

In den Berichten über Unfälle, wie sie alle paar Tage in den Zeitungen erscheinen, offenbart sich ein Bestreben, die Gefahren mangelhafter oder gar mangelnder Stabilität geringfügig erscheinen zu lassen und andere Umstände für das Ereignis verantwortlich zu machen. Indes kommt man bei folgerichtiger Betrachtung der mitgeteilten Tatsachen fast unfehlbar zu dem Schluß, daß viel Verlust an Leben und Gut durch systematisches Studium der Stabilität vermieden werden könnte. Hierzu versucht dies Buch Anleitung zu geben.

Dem Mathematiker, der imstande ist, eigener Forschungsarbeit Zeit zuzuwenden, eröffnet sich ein weites unerforschtes Gebiet, das in diesen Zeilen mehrfach, aber nur ganz flüchtig, berührt werden konnte. Diesem Gebiet eignet eine frische Anschaulichkeit, wie sie

schwerlich in Untersuchungen über integrable, aber noch nicht integrierte Differentialgleichungen, über hohe Primzahlen oder über noch unbekannte Eigenschaften des Dreiecks und des Kreises gefunden wird. Jedenfalls wird ein Mathematiker, der diesen Gegenstand ergreift, kaum auf solche Schwierigkeiten stoßen, wie sie die Vorarbeiten zu diesem Buch zu überwinden hatten.

Der Studierende, der zum Zweck wissenschaftlicher Selbsterziehung eine Arbeit vorzunehmen wünscht, findet Überfluß an Problemen. „Die Stabilität der Flugzeuge“ scheint mir ein fruchtbarer Zweig angewandter Mathematik, wie sie jetzt an unsern Hochschulen gelehrt wird.

In jüngster Zeit hat man sehr viel über die sogenannte „automatische Stabilität“, die durch Kreisel, Pendel und andere bewegte Vorrichtungen angestrebt wird, gelesen. [Lit. 1.] Ich nehme bestimmt an, daß der Erfolg in Zukunft auf Seiten der „inhärent“, nicht der „automatisch“ stabilen Flugzeuge sein wird. Nicht nur wird bei automatischer Stabilisierung die Zahl der bewegten Teile erhöht, die bei inhärenter Stabilität lediglich der Steuerung dienen und die doch ganz allgemein leicht Störungen ausgesetzt sind; es wächst auch die Zahl der Freiheitsgrade des Apparats und damit die Zahl der Stabilitätsbedingungen, die doch wahrlich schon groß genug ist.

Die Neuheit des Gegenstandes bedeutete die größte Schwierigkeit bei der Abfassung dieses Buches; weiterhin aber auch die Tatsache, daß mit dem Vorrücken in dies noch unerforschte Gebiet sich immer weitere eröffnen. In einem Buch, das die Auslese bestehender Literatur zu einigen unternimmt, würde die Trennung und Ordnung des Stoffes nicht so viel Mühe gemacht haben wie hier. Untersuchungen, deren Ergebnisse nur theoretisches Interesse besaßen, blieben möglichst ganz weg; dies Bestreben minderte die Schwierigkeit der Stoffwahl nur um ein Geringes. Zum Beispiel stand die Transformation des Abschnitts 30, die natürlich den besonderen Fall einer allgemeineren darstellt, schon im Verzeichnis des Ausgeschlossenen, als ihre Anwendbarkeit auf den Pendelversuch ihre Wiedereinfügung veranlaßte.

Ich muß mich noch der angenehmen Aufgabe entledigen, meiner Verpflichtung gegenüber Mr. E. H. Harper für seine wertvollen Hilfen Ausdruck zu geben, die er mir bei diesen Untersuchungen geleistet hat, und Priorität für manches Resultat für ihn zu beanspruchen. Mr. Harper lenkte zuerst meine Aufmerksamkeit

auf den bedeutenden Einfluß, den die Flugbahnneigung auf die Stabilität ausübt, und die Untersuchungen über Seitenstabilität des Antoinette-Typs und einiger anderer Formen stammen ausschließlich von ihm. Alle Formeln in diesem Buch wurden in unabhängiger Arbeit von Mr. Harper und mir errechnet und sind, wie ich hoffe, fehlerfrei. Außerdem haben die Herren Harper, A. Ferguson und Robert Jones die Druckbogen durchgesehen und verbessert. Man kann ja nicht vorsichtig genug bei diesen Rechnungen verfahren, wo die Verwechslung eines einzigen Vorzeichens Stabilität in ihr Gegenteil verkehren kann. Daher erscheint es erwünscht, daß der Leser, wenn irgend möglich, die Formeln nochmals durchsieht, trotz der schon aufgewandten Vorsicht.

„Last but not least“ habe ich Prof. R. A. Gregory für gütigen Rat und Beistand bei der Vorbereitung des Textes zu danken, wie auch für sein Anerbieten, der Reihe wissenschaftlicher Monographien, die er herausgibt, einen Band über Stabilitätsuntersuchungen einzufügen. Verschiedene Umstände machen es wahrscheinlich, daß ein Buch dieser Art sich besser für die Veröffentlichung einer Untersuchung eignet als die „Mitteilungen“ (proceedings) oder „Verhandlungen“ (transactions) einer wissenschaftlichen Gesellschaft. So würde ich die Stabilitätstheorie nicht so eingehend entwickelt haben als es nun geschehen ist, wenn nicht Prof. Gregory mich seinerzeit dazu aufgefordert hätte.

G. H. Bryan.

Vorwort des Übersetzers.

Der erste Versuch, das Problem der Stabilität mathematisch zu behandeln, wurde vor einem Dezennium unternommen. Im Juni 1903 veröffentlichten Bryan und Williams in den Mitteilungen der Royal Society zu London eine Theorie der unendlich kleinen Schwingungen für Flugzeuge. Das geschichtliche Verdienst um die Entwicklung der Flugtechnik zur Wissenschaft, das in jener ersten Abhandlung erkannt werden muß, legt ohne weiteres der vorliegenden neuen Arbeit Bryans die Bedeutung bei, die imstande ist, eine Übersetzung zu rechtfertigen.

Die Übertragung erhebt Anspruch, sinngemäß zu sein; im Sinne des Verfassers und im Sinne deutscher Leser. Der größere Abstand

vom Werk gestattete dem Übersetzer die algebraischen Symbole noch mehr zu vereinheitlichen, so daß fast ausnahmslos jeder Buchstabe nur eine Bedeutung hat. In der Tafel der Symbole sind zudem die Dimensionen beigefügt, da diese häufig einen Anhalt zur Beurteilung der Richtigkeit von Gleichungen geben. Außerdem wurde, um die Koeffizienten des Luftwiderstandes unabhängig vom Maßsystem zu halten, die Luftdichte $\gamma : g$ eingeführt.

Das „homogene“ Maßsystem, das in der Übersetzung beibehalten wurde, bezeichnet mit „Trägheitsmoment“ das Produkt von Gewicht und Quadrat des Trägheitsradius. Es bedeutet dies die letzte Folge des technischen Systems, insofern auch für Momente eine den Kräften

$$\text{Kraft} = \text{Gewicht} \cdot \frac{\text{Beschleunigung}}{\text{Erdbeschleunigung}}$$

analoge Beziehung gilt:

$$\text{Kräftepaar} = \text{„Trägheitsmoment“} \cdot \frac{\text{Winkelbeschleunigung}}{\text{Erdbeschleunigung}} .$$

Auf die Abweichung der Definition von der üblichen weisen Anführungsstriche hin.

Das Interesse deutscher Leser erforderte weiterhin, statt einer ähnlichen Arbeit von Sir George Greenhill die Abhandlungen Kuttas zu nennen; ferner wurden dem Literaturnachweis (Verweise darauf mit Lit. . . .) die Nummern 1, 4, 5 und 14 zugefügt. Für die Figuren 9—16, 18 und 19 waren die des Originals vorbildlich; die übrigen wurden umgezeichnet, in der Absicht, sie wirklichen Verhältnissen ein wenig näher zu bringen. Für die Abbildungen bin ich Herrn Professor Dr.-Ing. Bendemann zu Dank verpflichtet. Die Bilder zu seinem Vortrag „Der jetzige Stand der Flugmaschinen-Konstruktionen“, der im Jahrbuch 1913/14 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Flugtechnik erscheinen wird, standen mir zur Auswahl zur Verfügung.

Alle diese Maßnahmen, die der Übersetzer einer strengeren Auffassung seiner Aufgabe angemessen erachtete, betreffen ausschließlich die Form und berühren in keiner Weise Anspruch und Verantwortung des Verfassers.

Dresden, Oktober 1913.

H. G. Bader.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Einführung und Übersicht	1
II. Elementare Beziehungen	14
Die allgemeinen Bewegungsgleichungen	14
Stetige Bewegung und kleine Schwingungen	18
Trennung der Schwingungen in zwei Gruppen	19
Symmetrische Schwingungen	20
Kriterium der Längsstabilität	23
Unsymmetrische Schwingungen	23
Bedingung der Seitenstabilität	25
Betrachtung über die Widerstandsableitungen	26
Stabilität der Luftschiffe	28
III. Betrachtungen über die Widerstandsableitungen für Längs- schwingungen	29
Ebene Flügel	29
Betrachtung über die Drehungs-Ableitungen	33
Versuche am rotierenden Arm	34
Schwingungsmethode	35
Koordinaten-Transformation	36
Gewölbte Flügel	37
Schmale Flügel unter kleinen Winkeln	38
Unabhängigkeit der Flügelwirkung von ihrer Höhenlage	40
IV. Graphische Statik des Längsgleichgewichts	42
Einfach tragendes System	42
Doppelt tragendes System	45
V. Längsstabilität des einfach tragenden Systems	55
Einfachster Fall	55
Einfach tragendes Flugzeug in horizontalem Flug bei horizontaler Schubrichtung durch den Schwerpunkt	55
Trennung der langen und kurzen Schwingungen	58
Kurze Schwingungen	59
Lange Schwingungen	62
Einfluß der Richtung des Schubs	65
Einfluß des Stirnwiderstandes und einer Veränderlichkeit des Schubs	67
Einfluß der Neigung der Flugbahn	65
VI. Längsstabilität des zweifach tragenden Systems. Ausdehnung der Rechnung auf andere Systeme als die „schmalen Flügel unter kleinem Winkel“	70

	Seite
Satz von gleichwertigen Systemen	70
Unveränderliche gleichwertiger Systeme	73
Der Schub geht nicht durch den Schwerpunkt	75
Breite Flügel	78
Einfluß der Druckpunktverschiebung	78
Einfluß der Reibung	84
Abweichungen vom Satz von der Unabhängigkeit der Höhe und vom Sinusgesetz des Widerstands	84
Wesentlicher Einfluß einer Wölbung der Tragflügel	85
Einfluß der Strömungsablenkung	86
Drei-Flächensystem	87
Einfluß der Drehungsableitungen breiter Flügel	90
VII. Unsymmetrische oder Seitenstabilität	91
Ebene Flächen und vertikale Flossen	91
Ebene Flügel	93
Einzelne Kielflosse	95
Mehrere Kielflossen	96
Allgemeiner Charakter der Schwingungen	99
Näherungslösungen der Gleichung vierten Grades. — Widerstand gegen Schlingern	99
Mehrere horizontale Flächen	107
„Schädliche“ Widerstände	107
Drehmoment der Schrauben	107
Reibung und Flügelwölbung	109
Einfluß des Seitenverhältnisses und der endlichen Breite der Tragflächen	111
VIII. Seitenstabilität. — Aufgebogene Flügel	112
Vergleich aufgebogener Flügel mit Kielflossen	112
Einzelner Tragflügel mit Klappen	114
Theorie des Antoinette-Typs	117
Grad der Stabilität	122
IX. Rückblick und Ausblick	123
X. Vergleich mit andern Theorien	126
Bryan-Williams. — Hauptmann-Ferber. — Lan- chester. — Brillouin. — Reißner. — Crocco. — Soreau. — Lecornu.	
XI. Probleme	130
Beispiele	131
Anhang	132
Kreiselwirkung der Schraube. — Automatische Stabili- sierung. — Kritische Flugrichtungen.	
Definitionen	135
Symbole	136
Literaturnachweis	139

I. Einführung und Übersicht.

1. Die Entwicklung der Flugtechnik bringt eine Menge anregender Probleme mit sich, Probleme der theoretischen, ebenso wie der experimentellen Mechanik.

Eines dieser Probleme ist die Untersuchung über die Drücke, die eine geometrisch bestimmt gestaltete Fläche bei ihrer Bewegung durch eine Flüssigkeit erfährt. Dies Problem lenkte die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich, lange bevor es für die Luftschiffahrt hervorragende praktische Bedeutung gewann. Der erste Versuch einer Lösung geht auf Newton zurück, der annahm, der Druck könne gemessen werden durch die Bewegungsgröße, welche die Fläche den Luftteilchen erteilt, mit welchen sie in der Zeiteinheit in Berührung kommt. Diese Annahme führte zu dem sog. Sinus-Quadrat-Gesetz; dies besagt, daß der Druck auf die Fläche proportional dem Quadrat der Normalkomponente (normal zur Fläche) ihrer Relativgeschwindigkeit gegenüber der Flüssigkeit ist. Nach der kinetischen Gastheorie trifft Newtons Annahme zu für den Fall eines verdünnten Gases, in dem die mittlere Weglänge der Moleküle groß im Verhältnis zur Breite der Fläche ist. Einen zweiten Lösungsversuch bedeutet die Theorie der un stetigen Flüssigkeitsbewegung von Helmholtz und Kirchhoff, deren weitgehende Anwendbarkeit auf Probleme der Flugtechnik neuerdings Kutta erwiesen hat. (Lit. 2 und 3).

Abweichungen der Ergebnisse einer Theorie von der Beobachtung gehen notwendig aus den vereinfachenden Annahmen analytischer Methoden hervor. Die Mängel von Newtons Gesetz sind so bedeutend, daß seine Anwendung ohne Berücksichtigung der durch die Bewegung der Fläche eingeleiteten Strömungsvorgänge ausgeschlossen ist.

Dennoch begegnet man gerade in jüngster Zeit Versuchen, Formeln zu ermitteln, auf Grundlagen, die von Newtons Annahme wenig abweichen; derartigen Angaben ist mit großer Vorsicht zu begegnen. Sie sind wie empirische Formeln zu behandeln, die mit neuen Erfahrungen fallen oder sich festigen.

Die Theorie der unsteady Strömung ist durch mathematische Schwierigkeiten auf die Betrachtung einer vollkommen unverdichtbaren Flüssigkeit beschränkt. Hier rührt also die Unzulänglichkeit der Theorie her von den Eigenschaften der Luft, bezw. überhaupt der wirklichen Flüssigkeit, die von den vorausgesetzten abweichen. Außerdem gelten die Lösungen fast durchweg für zweidimensionale Strömungen, so daß die Voraussetzungen hinreichend nur für Platten mit großem Seitenverhältnis (Breite zu Tiefe) zutreffen, da das angenommene Strömungsbild in der Nähe der Enden keinesfalls eintritt.

Bevor es der Theorie nicht gelingt, den wirklichen Verhältnissen in höherem Maße gerecht zu werden, muß man sich also an Versuchsergebnisse halten, wie sie neuerdings unter anderen Eiffel und Föppl veröffentlicht haben. (Lit. 4 und 5.)

2. Bei dem Problem der Flugzeug-Stabilität, wie es uns vorliegt, handelt es sich um Bewegungen und Bewegungsänderungen des Flugzeugs, die durch Luftdruck und andre Kräfte nach Störung des stetigen Flugs hervorgerufen werden. Dies Problem gehört, im Gegensatz zum vorhergehenden, ins Gebiet der reinen Mechanik. Die Gleichungen, die zur Lösung führen, beruhen auf den Grundgesetzen der Dynamik starrer Körper. Annahmen sind lediglich für den Luftdruck auf Flügel und Flossen des Flugzeugs zu machen. Die Unzulänglichkeit der hierzu benötigten Daten ist einzige Ursache der Unstimmigkeit zwischen Rechnung und Erfahrung.

Das vorliegende Problem hat bis jetzt nicht das Interesse erfahren, das ihm zukommt. Zunächst schreckt die Kompliziertheit der Formeln des dynamischen Ansatzes. Und schließlich hatten ja Apparate Erfolg, deren Stabilität in keiner Weise berücksichtigt war. Als die Brüder Wright ihre ersten Flüge machten, ging die Tendenz bei der Konstruktion lediglich auf größte Motorkraft, kleinstes Gewicht und geringen Stirnwiderstand; Gesichtspunkte, von denen aus jede Hilfsfläche als schädlich galt. Was dabei an Stabilität verloren ging, mußte durch Geschicklichkeit und Übung des Führers wett gemacht werden. Dem Schlingern und Gieren begegnete die Flächenverwindung. Seit der Zeit galt alle Aufmerksamkeit der Konstrukteure der Umgehung der Wright-Patente und ging so der Aufgabe einer inhärenten Seitenstabilisierung verloren.

Die Arbeit von Bryan und Williams (Lit. 6) ist meines Erachtens der erste Versuch, die mathematische Behandlung der

Frage aufzunehmen. Dabei ging die Absicht mehr dahin, anzuregen, als die Lösung bis zu einem gewissen Abschluß zu bringen. Bald danach wurden Arbeiten des jüngst verstorbenen Kapitäns Ferber veröffentlicht, in denen er selbständig das Problem aufgenommen und mit der Theorie der unendlich kleinen Schwingungen Seiten- und Längsstabilität erörtert hatte. Leider ist jedoch dieser erste Versuch einer Theorie der Seitenstabilität in mehrfacher Hinsicht mangelhaft. Für Flugzeuge von beträchtlicher Spannweite, die doch allein in Frage kommen, sind die Fehler der Ergebnisse vermutlich von Betracht.

Bei Lanchester (Lit. 7 II) werden beide Probleme, Seiten- und Längsstabilität, von außerordentlichem Gesichtspunkt behandelt, so daß der Ansatz gegenüber den Gleichungen der Dynamik an Umfang zurücksteht.

Von neueren Arbeiten sind die von Prof. Marcel Brillouin und Dr. H. Reißner zu nennen, der Seiten-Steuerung und Stabilität gemeinsam betrachtet. Weiterhin bringt das „Government Blue Book“ (Cd. 5282) Auszüge aus Aufsätzen des Leutnants Crocco über Steuerung und Stabilität der Luftschiffe, und einer Abhandlung von M. Soreau über gleiche Probleme der Flugzeuge, unter besonderer Berücksichtigung der Längsstabilität. Diese Arbeiten konnten nur flüchtig berücksichtigt werden, da sie erst nach Vollendung der Untersuchungen in meine Hände gelangten.

3. Im folgenden werden zunächst die 6 Bewegungsgleichungen (entsprechend den 6 Freiheitsgraden: Bewegung in Richtung von und Drehung um 3 Achsen) angeschrieben und dann auf unendlich kleine Schwingungen angewandt.

Es bestand zunächst die Absicht, physikalische Maßeinheiten zur Vereinfachung der Gleichungen einzuführen. Dem Konstrukteur ist jedoch das technische Maßsystem geläufiger, an dessen Grundformel

$$\text{Kraft in kg} = \text{Gewicht in kg} \cdot \frac{\text{Beschleunigung in m/sec}^2}{9,81 \text{ m/sec}^2}$$

hier kurz erinnert werden möge.

Besitzt das Flugzeug eine Symmetrieebene, die bei stetiger Bewegung vertikal ist, so zerfallen die Bewegungsgleichungen in 2 Gruppen zu je 3. Eine weitere Trennung von vornherein ist nicht möglich.

Die erste Gruppe umfaßt Bewegungen in einer Vertikalebene: Stoßen, Wogen und Stampfen (d. h. Geschwindigkeits- und Höhen-

schwankungen und Schwingungen um eine Achse \perp zur Symmetrieebene). Sie betreffen die Longitudinalstabilität und werden am besten unter dem Begriff „symmetrische“ Schwingungen zusammengefaßt, da sie von jedem korrespondierenden Element der beiden symmetrischen Hälften in gleicher Weise durchgemacht werden.

Die zweite Gruppe bestimmt Rücken, Schlingern und Gieren (d. h. Seitenverschiebung, Schwingung um die Längs- und die Vertikalachse). Von der Art dieser Bewegungen hängt die Seitenstabilität ab. Es ist bisweilen angestrebt worden, diese 3 Bewegungen zu trennen; Schlingern und Gieren einzeln zu betrachten; ein Fehler, den Lanchester durch Gebrauch des Ausdrucks „rotative stability“ meidet. Es kann jedoch nicht eindringlich genug darauf hingewiesen werden, daß nicht allein die beiden Drehungsschwingungen untereinander, sondern auch die Seitenschwingungen des Schwerpunkts mit jenen verkoppelt sind. Nur durch Quer-Translation kann die Schwere Einfluß auf die Lage des Flugzeugs gewinnen; nur hierdurch kann eine Seitenneigung des Apparats wieder aufgehoben werden. Andern Falles besteht die Möglichkeit seitlichen Gleitens mit gleichförmiger Beschleunigung. Letztgenannter Tendenz wird bei den meisten Konstruktionen durch Flügelverwindung entgegengewirkt; jedoch ist daraus, daß diese Anordnung sich zweckmäßig gezeigt hat, noch nicht zu folgern, daß sie die einzig mögliche oder gar die beste sei.

Für die zweite Art der Stabilität ist das Attribut „unsymmetrisch“ zur Kennzeichnung wohl am geeignetsten. Bisweilen mag jedoch der bequemerem Herkömmlichkeit halber von „Seitenstabilität“ gesprochen werden, wenngleich der Ausdruck von anderen oft in einem engeren Sinn als zulässig gebraucht worden ist.

4. Die Wirkung des Luftwiderstands wird in jeder Gleichungsgruppe durch 9 Koeffizienten dargestellt (im ganzen also 18), die als „Widerstands-Ableitungen“ bezeichnet werden können. Nach Eliminationen erscheinen Schwingungsdauer und Dekrement (bzw. Inkrement für Instabilität) der „symmetrischen“ Schwingungen bestimmt durch eine Gleichung vierten Grades für λ , wobei die Amplituden proportional $e^{\lambda t}$ angenommen sind. Diese Gleichung schließt die „symmetrischen“ „Widerstands-Ableitungen“ ein. Nach Routh ist das Gleichgewicht stabil, wenn die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung und eine bestimmte Diskriminante positiv sind. Gleiches wie von den symmetrischen gilt von den unsymmetrischen

Schwingungen, deren biquadratische Gleichung die neun „unsymmetrischen“ „Widerstands-Ableitungen“ umfaßt und das gleiche Stabilitäts-Kriterium liefert.

Absolute Lage des Schwerpunkts und Azimut der Symmetrieebene gehen nicht in die Gleichung ein, obwohl ihre Änderungen dies tun. Denn offenbar ist für das Gleichgewicht des Flugzeugs, wie bei einem Schiff, Stand und Fahrtrichtung ohne Belang.

Die Widerstands-Ableitungen sind der Geschwindigkeit des Apparats bei stetiger Bewegung proportional.

Der Arbeitsgang, der vor uns liegt, zerfällt nach dem Vorausgehenden in 4 Teile: 1. Bestimmung der Widerstandsableitungen auf Grund geeigneter Formeln und Daten für den Luftwiderstand. 2. Auswertung und Vereinfachung der fünf Koeffizienten der biquadratischen Gleichung und ihrer Diskriminante. 3. Analyse des Schwingungscharakters. 4. Diskussion des Einflusses verschiedener konstruktiver Maßnahmen auf die Stabilität.

Das Hauptaugenmerk ist zunächst zu richten auf eine Entwirrung des Chaos algebraischer Symbole, das sich eingangs der Untersuchung zeigt. Am besten geschieht dies durch allmählichen Aufbau auf vereinfachenden Voraussetzungen, die jedoch in hervorragendem Maße Veränderungen zugunsten einer Annäherung an wirkliche Verhältnisse zulassen. Dennoch galt meine Arbeit wesentlich der mathematischen Behandlung des Problems. Denn man kann höchstens schwanken, diese aufzunehmen oder ganz abzulehnen; ein Mittelweg muß zu falschen Schlußfolgerungen führen. Doch legt es die komplizierte Gestalt der Formeln, zu denen man selbst in den einfachsten Fällen gelangt, nahe, daß ohne mathematische Theorie dem Problem nicht beizukommen ist. Ferner haben sich die Konstrukteure so einseitig praktischen Fragen zugewandt, daß zum notwendigen Vergleich zwischen Theorie und Praxis, auf der andern Seite nicht genug Gewicht auf mathematische Klärung einschlägiger Aufgaben gelegt werden konnte. Schließlich steht zu hoffen, daß der vorliegende Stoff auf Einführung als Lehrgegenstand an unsern Hochschulen nicht mehr lange zu warten haben wird, als Zweig angewandter Mathematik und der Mechanik der Flüssigkeiten (Hydrodynamik) und starren Körper.

5. Für die symmetrische Stabilität kommen in erster Linie Daten über Größe und Richtung des Luftwiderstands und über die Lage des Druckmittelpunkts für Flügel bei stetiger geradliniger

Bewegung in Betracht. Der Einfluß einer der Translation überlagerten Rotation des Stampfens ist noch unerforscht. Man hat ihn in allen bisherigen Stabilitätstheorien vernachlässigt, und seine experimentelle Erforschung steht noch nicht in Aussicht.¹⁾ Er kommt in den Gleichungen zur Geltung in Form zweier Koeffizienten, die im folgenden mit Drehungs-Ableitungen bezeichnet sind.

Die Untersuchung dieser Erscheinung ist, ganz abgesehen vom mathematischen Interesse, von hervorragender Bedeutung für den Flieger, den eine Drehung seines Apparats, zumal beim Landen, in eine heikle Lage bringen kann. Die experimentelle Erforschung mag sich darauf beschränken, zwei Punkte auf der Bezugsgeraden des Flügelquerschnitts (meist die Sehne) anzugeben, deren einer als Drehpunkt unveränderten Druck, der andere unveränderte Druckpunktlage ermitteln läßt. Es werden später noch zwei Methoden für die Untersuchung zum Vorschlag gebracht.

Für den Augenblick ist die Schwierigkeit umgangen durch die Anwendung von Flügeln geringer Tiefe, für welche die Änderungen von Widerstandsgröße, Richtung und Lage bei einer Drehung vernachlässigt werden können. Stabilität wird erreicht durch Hilfsflächen, z. B. einen Schwanz. Hierfür wird die Lagenänderung des Druckpunkts verhältnismäßig klein sein. Diese Vereinfachung führt zur „Theorie des schmalen Flügels unter kleinem Winkel“. Von da aus wird am besten das systematische Studium seinen Ausgang nehmen, ähnlich wie die Hydrodynamik von der vollkommenen Flüssigkeit, die Brechnungstheorie der geometrischen Optik von dem Strahlenbüschel mit kleinem Einfallswinkel oder die kosmische Dynamik von der elliptischen Planetenbewegung. Demgemäß werden also die Drehungsableitungen und die Änderungen der Druckpunktlage vernachlässigt, und der Druck proportional dem Sinus des Anstellwinkels gesetzt oder was dasselbe bedeutet, dem Produkt aus der relativen Geschwindigkeit und ihrer Normalkomponente. Eine abschließende Überlegung („Satz der Unabhängigkeit von der Höhe“) zeigt, daß die Stabilität nur in sehr geringem Maße (natürlich immer unter bestimmten Voraussetzungen) von der höheren oder tieferen Lage der Flügel abhängig ist. Die Wahl zwischen Ein- und Doppeldecker betrifft danach nicht die Stabilität.

¹⁾ Bryan beschränkt sich mit dieser Behauptung auf das „Government Laboratory“. Dem Übersetzer ist aber überhaupt keine dahinzielende Versuchsanordnung bekannt.

6. Der Abschnitt über „graphische Statik des Längsgleichgewichts“ nimmt eine Sonderstellung ein. Eine Klärung der Beziehungen zwischen Gleichgewicht und Veränderung in Antrieb und Anstellwinkel, durch geometrische Veranschaulichung wird hoffentlich dadurch erreicht. Hier bietet sich ausgezeichnete Unterrichtsstoff für die Hochschulen.

7. Den einfachsten Fall für die Behandlung der Längs-Stabilität bietet ein Tragdeck mit neutraler (nicht tragender) Schwanzflosse in horizontaler Bewegung unter unveränderlichem, horizontalem Schub, dessen Richtung durch den Schwerpunkt geht.

Das Stabilitätskriterium hierfür steht in Einklang mit dem von Lanchester. Durch Einführung der Gleichgewichts-Bedingungen kann dies Kriterium auf verschiedene Form gebracht werden, worunter eine sich unabhängig von der Geschwindigkeit zeigt. Durch Vereinfachungen gelingt es, die Wurzelpaare der Gleichung vierten Grades zu trennen, kurze und lange Schwingungen zu unterscheiden und zu charakterisieren. Lanchesters Vorgehen führt nur zu den langen Schwingungen, die jedoch fast ausschließlich für die Stabilität von Bedeutung sind.

Die Stabilität ist in hohem Maße abhängig von der Neigung der Flugbahn gegen den Horizont. Diese bedeutsame Gesetzmäßigkeit ist eine Entdeckung von Mr. E. H. Harper; sie gilt für „symmetrische“ und „unsymmetrische“ Stabilität. Beim Gleitflug hat dasselbe Flugzeug höhere Stabilität als bei horizontalem Antrieb; und vollends beim Steigen geht die Stabilität beträchtlich zurück; ja sie verschwindet, wenn der Tangens des Anstiegswinkels den doppelten Wert des Tangens für den Anstellwinkel noch nicht erreicht hat.

Im allgemeinen wächst die Längsstabilität mit dem Stirnwiderstand, und wenn der Schraubenschub eine Funktion der Geschwindigkeit ist, die mit einem Anwachsen derselben abnimmt. Beide Einflüsse pflegt man zu charakterisieren durch zahlenmäßige Angabe einer hypothetischen Vergrößerung des natürlichen Gleitwinkels. Damit wird ein Steigen ohne Verlust der Stabilität unter größerem Winkel möglich.

Unter einem „doppelt tragenden System“ wird im folgenden Tandemanordnung von zwei Flügeln oder ein Flügel mit tragendem (statt wie vorhin mit neutralem) Schwanz verstanden. Für die Stabilitätsuntersuchung von Mehrdeckern werden „Flächen über-

einander“ durch eine von gleichem Inhalt ersetzt.¹⁾ Es wird gezeigt, daß, unbeschadet der Richtigkeit der Rechnung nach dem „Prinzip der gleichwertigen Systeme“, es gelingt, ein „doppelt tragendes System“ durch einen Flügel mit neutralem Schwanz zu ersetzen, wobei beide Systeme gleiche Stabilitäts- und Gleichgewichtsbedingungen, ja sogar gleichen gesamten Flächeninhalt haben.

Ohne diese Vereinfachung bringt die Stabilitätsrechnung des doppelt tragenden Systems außerordentlich schwerfällige Formeln mit sich. — Für den angehenden Mathematiker liefern die Verhältnisse der gleichwertigen Systeme und ihrer Unveränderlichen interessante Anwendungen der Determinanten.

Vom konstruktiven Standpunkt hat der neutrale Schwanz dem tragenden gegenüber den Nachteil, daß er in größerem Abstände vom Flügel angebracht werden muß. Auf der anderen Seite hat vermutlich das Flugzeug mit neutralem Schwanz die größere Tragfähigkeit, weil in Wirklichkeit der Druck auf die Schwanzfläche vom Strömungsbild um das Tragdeck abhängt. In den folgenden Abschnitten haben andere Umstände Beurteilung gefunden: Schubrichtung, die nicht durch den Schwerpunkt geht, Druckpunktsverschiebung bei Änderung des Anstellwinkels, Flügelwölbung, Zähigkeits- und Reibungswiderstand, Flächenrauigkeit, Abweichung vom Sinusgesetz des Widerstands, Einfluß des Tragflügels auf die Schwanzflosse und die Drehungs-Ableitungen.

Dies alles eingehend zu besprechen, war nicht Raum genug; bisweilen konnte daher nur die Methode angegeben werden.

In Anbetracht der Erörterungen, die der Gegenstand schon erfahren hat, möchte ich kurz die Wirkung der Druckpunktsverschiebung besprechen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: Wenn die Stabilität durch eine Schwanzflosse (die dem Tragdeck nicht parallel zu sein braucht) gesichert wird, so ist die Druckpunktsverschiebung nur durch eine kleine Korrektur zu berücksichtigen. Die Stabilität eines einzelnen Flügels ist jedoch davon vollständig abhängig.

Werden Stabilitäts- und Gleichgewichtsbedingungen in Beziehung gesetzt, so erweist sich die Stabilität des Flugzeugs mit

¹⁾ Eiffel zeigt a. a. O. (Lit. 4), daß diese Substitution nicht ganz richtig ist, daß vielmehr infolge der gegenseitigen Beeinflussung übereinander befindlicher Tragdecks mit einem „Flächenverlust“ gerechnet werden muß. Der Übersetzer.

Schwanz unabhängig von der Geschwindigkeit; die des schwanzlosen Flügels sinkt mit steigender Geschwindigkeit. Die Anordnung eines Schwanzes wird somit als wirksamstes Mittel zur Sicherung inhärenter Längsstabilität bestätigt.

Wie schon oben angedeutet wurde, kann die Vereinigung von Stabilitäts- und Gleichgewichtsbedingungen verschiedene Form annehmen, so daß zwei Kriterien von recht ungleichem Aussehen gleiche Bedeutung besitzen können.

Es wird weiterhin dargetan, daß ein Dreiflächen-System, z. B. ein Tragdeck mit flacher Schwanz- und Kopfflosse, unter Umständen, besonders beim Steigen, höhere Stabilität zeigt, als ein Zweiflächen-System.

Somit erscheint die mathematische Theorie keineswegs auf die einfachsten Formen des Flugzeugs beschränkt, vielmehr kann sie auf jede mögliche konstruktive Anordnung angewendet werden, sobald verlässliche Daten zur Hand sind. Ohne Ausnahme gestattet sie zu beurteilen, ob eine Maßnahme zur Erhöhung der Stabilität beiträgt oder nicht. Eingangs der Untersuchung ergibt sich, daß eine gewisse Determinante verschwindet, und die zunächst sehr verwickelte Rechnung gestaltet sich dadurch wesentlich einfacher. Bei der Erörterung des Dreiflächen-Systems wird nachgewiesen, daß die Determinante nicht mehr verschwindet und damit die Stabilität wächst.

8. Die „unsymmetrische“ Stabilität bietet schwierige Probleme in allerhand interessanten Formen. Die Kräftepaare, die hier bei Drehungen auftreten, hängen von der Breite der Flügel, nicht von ihrer Tiefe ab. Sie sind im Gegensatz zu vorhin nicht vernachlässigbar, sondern von beträchtlicher Bedeutung. Um hinreichend genaue Ausdrücke dafür zu erhalten, ist eine Annahme über die Druckverteilung zu treffen, die noch zur Definition des einfachsten Falles: „schmale Flügel unter kleinem Winkel“ gehört. Die Störung des Gleichgewichts rührt von den hinlänglich bekannten Kippmomenten her und wird durch Flächenverwindung oder Hilfsflügel (Klappen) aufgehoben. Die Wirkung der Flügel, der Kiel-flossen, der Hilfsflügel oder Klappen und schließlich einer \vee -förmigen Anordnung der beiden Tragdeckhälften werden wir im Verlauf der Untersuchung getrennt betrachten. Ein einfaches Tragdeck (ohne Flossen und Klappen) ist seitlich unstabil. Eine wagerechte

Schwanzflosse, wie sie der Längsstabilisierung dient, spielt für die Seitenstabilität keine Rolle; sie sei denn von beträchtlicher Breite.

Wird nur eine Kielflosse angeordnet, so sind zwei der Stabilitätsbedingungen nur sehr schwer zu befriedigen. Befindet sie sich vor und in fast gleicher Höhe mit dem Schwerpunkt, so ist eine Bedingung erfüllt und die andere nicht; umgekehrt, wenn sie sich in derselben Höhe hinter dem Schwerpunkt befindet. Die Stabilisierung gelingt durch Anordnung der Flosse ein wenig vor und weit über dem Schwerpunkt; aber schon eine geringe Bewegungsänderung ist fähig, die Stabilität aufzuheben, so daß die angegebene Maßnahme anfechtbar erscheint. Jedenfalls erhellt aus der Erörterung, daß die meisten ausgeführten Flugzeuge nicht seitenstabil sind.

Doch ist die Aufgabe leicht durch Anordnung zweier Flossen zu lösen. Hier ist der Unterschied zu besprechen, der zwischen der Wirkung mehrerer Flossen und ihres Ersatzes durch eine Fläche von gleichem Inhalt im resultierenden Druckpunkt besteht; dabei wird die Veränderung des Trägheitsmoments berücksichtigt. Der horizontale Abstand zweier Flossen ist von höherem Einfluß als der vertikale.

Vermutlich ist es am vorteilhaftesten, zwei Flossen, eine vor, die andere hinter, beide aber ein wenig über dem Schwerpunkt anzubringen, derart, daß der resultierende Druckpunkt gerade oder wenigstens nahezu über den Schwerpunkt zu liegen kommt. Hierdurch wird eine hervorragende Stabilität erreicht, die sogar von der Bahneigung fast unabhängig ist. Die Stabilisierung fordert, eine gewisse Höhe bei der Anordnung der Flossen nicht zu überschreiten.

Befinden sich die Flossen in dem Niveau des Schwerpunkts, so muß ihr resultierender Druckpunkt vor diesem liegen; doch nur um ein geringes, indeß der Abstand beider Flossen tunlichst groß zu wählen ist. In dieser Form wird das Flugzeug beim Anstieg in horizontalem Flug und bei mäßigem Abstieg stabil sein; es verliert jedoch die Stabilität und kommt in Gefahr zu kippen, beim Gleitflug unter doppeltem, natürlichem Gleitwinkel oder gar noch steilerem Abstieg.

Ein dritter Typ, den gleich dem obengenannten zuerst Mr. Harper untersucht hat, hat eine senkrechte Schwanzflosse und eine Kielflosse direkt über dem Schwerpunkt. Der Abstand des Schwanzes darf dann nicht zu klein sein. Es zeigt sich Abnahme der Stabili-

tät beim Anstieg, so daß hierbei wiederum ein bestimmter Winkel nicht überschritten werden darf. Weiterhin werden die „unsymmetrischen“ Schwingungen charakterisiert und der Einfluß von Stirnwiderstand, Doppelschrauben-Antrieb, Reibung und Flügelwölbung besprochen.

Dann werden Hilfsflügel, Klappen oder drehbare Flügelenden der Betrachtung unterzogen, und schließlich \vee -förmig aufgebogene Flügel: Antoinette-Typ. Man neigt dazu, ein Klappenpaar mit einer Kielflosse für gleichwertig zu halten; das ist jedoch nur unter bestimmten Bedingungen zulässig, z. B. wenn die Klappen in der Flugrichtung liegen oder in gleicher Tiefe mit dem Schwerpunkt. Die zwei folgenden Betrachtungen hat Mr. Harper beige-steuert. Die eine betrifft ein Flugzeug mit Klappen, die andere den Antoinette-Typ mit seinem \vee -förmig angeordneten Tragdeck und einer senkrechten Schwanzflosse. Es ergab sich Stabilität auf zwei Arten. Läßt man den Schwanz außer Acht, so genügt es, den Winkelscheitel des Flügels über den Schwerpunkt zu legen (ohne dabei ein bestimmtes Maß zu überschreiten). Geschieht dies nicht, so hat man dem Schwanz eine gewisse kleinste Länge zu geben. Auf die eine Art nimmt die Stabilität beim Abstieg, auf die andere beim Anstieg ab, so daß durch geeignete Kombination beider Maßnahmen die Stabilität unabhängig von der Bahnneigung gemacht werden kann.

9. Die Schlußbetrachtung gibt keine Übersicht des Werks, da diese schon jetzt vorweggenommen ist, sondern beschäftigt sich mit der Frage vom Vor- oder Nachteil inhärenter Stabilität, deren Behandlung ja am Tage ist.

Indessen stehen aber immer noch Beiträge aus, die die Lösung des Problems zu einer endgültigen gestalten könnten. Stoff für diesbezügliche Untersuchungen wird im letzten Kapitel geboten. Während auf der einen Seite Versuche erforderlich sind, erhellt andererseits, daß noch viel rein mathematische Arbeit zu leisten ist, lediglich in dem Sinne, die Schlußfolgerungen der Rechnung unter bestimmten Voraussetzungen zu ziehen. Noch immer ist ja der Glaube verbreitet, die Methoden exakter Wissenschaft seien für den vorliegenden Gegenstand unzulänglich wegen der Unsicherheit der notwendigen Grundannahmen. Jedoch hat wohl diese allgemeine Unsicherheit ihren Grund eher darin, daß die Mathematiker diesem Problem noch nicht so viel Interesse, wie anderen ähnlicher Art, entgegengebracht haben.

10. Im vorletzten Kapitel werden einschlägige Untersuchungen anderer Autoren mitgeteilt und besprochen. In einigen Fällen haben zu weitgehende Voraussetzungen zu falschen Schlussfolgerungen Anlaß gegeben. So begegnet man mehrfach der Anschauung, seitliche und Richtungsstabilität gesondert behandeln zu können. In dieser Beziehung bedeutet Lanchesters Werk eine bemerkenswerte Ausnahme, wengleich das Problem von einer ganz anderen Seite angepackt und der Gebrauch der Bewegungsgleichungen vermieden ist.

11. Die bedeutende Klärung, die das Problem der Stabilität in diesem Buch durch die mathematische Behandlung erfährt, könnte schwerlich bei der Mannigfaltigkeit der Erscheinungen durch noch so zahlreiche Erfahrungen erreicht werden. In gleicher Weise wie etwa ein Versuch, die Planetenbewegungen ohne die Grundgleichungen der Dynamik und das Gravitationsgesetz zu erklären, auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten stoßen würde. Aus einfachen Überlegungen den Einfluß der Bahnneigung auf die Stabilität abzuleiten, dürfte nicht leicht sein. Immerhin wurde ein Versuch dazu gemacht.

Die Menge an Problemen, die hier noch der Lösung harren, und die damit verbundenen Schwierigkeiten müssen die Eindringlichkeit entschuldigen, mit der ich diesen Gegenstand immer wieder zu Studien- und Lehrzwecken empfehle.

Als Zweig höherer angewandter Mathematik ist die Lehre von den Bewegungen der Flugzeuge hinlänglich vernachlässigt worden.

Vage Behauptungen beherrschen immer noch die Ansichten über Stabilität. Das Problem erfordert dringend systematisches Studium und eine Entwicklung parallel den Richtlinien anderer Zweige der Mechanik und mathematischen Physik. Nur durch Mitarbeit der Hochschullehrer können die unerfreulichen Verhältnisse gebessert werden. Auch für pädagogische Zwecke eignet sich der Stoff ausgezeichnet; er bietet Anwendung von Determinanten, von Näherungsverfahren, Bestimmung gleichwertiger Systeme. Schließlich werden, Schritt für Schritt, Verbesserungen eingeführt, bei denen man sich nicht aus praktischen Überlegungen beschränken zu lassen braucht; ja die vielleicht einen Genauigkeitsgrad zu erreichen gestatten, der über den konstruktiv erforderlichen hinausgeht.

Zum Vergleich mit dem vorliegenden Stoff als Studienobjekt möge einer herangezogen werden, der sich großer Beliebtheit erfreut:

die Hydrodynamik. Ihre Theorie ist unabhängig von Laboratoriums-Untersuchungen zu hoher Vollkommenheit gelangt. Wenn auch viele ihrer Probleme sich auf Bewegungen in einer unbegrenzten idealen Flüssigkeit beziehen und ohne jegliche praktische Bedeutung sind, so hat doch nie jemand ihren erzieherischen Wert, den die erforderliche Übung mit sich bringt, selbst für angehende Ingenieure in Frage gestellt.

Wen der Ehrgeiz treibt, ein Jahr oder gar noch längere Zeit dem systematischen Studium der Hydrodynamik zu widmen, wird wenig Aussicht haben, auf ein Problem zu stoßen, selbst wenn er auf seine praktische Bedeutung keinen Wert legt, das nicht schon einmal erörtert worden wäre, so daß er sich ihm, in der Hoffnung, eine bemerkenswerte Lösung zu finden, nähern dürfte. Das vorliegende Buch hingegen bietet eine Menge Aufgaben, bei denen nicht die Unmöglichkeit, sondern höchstens Umfang und Eintönigkeit der Lösung zu fürchten sind. Es ist daher dringend zu wünschen, daß die Zahl derer, die sich mit dem Problem beschäftigen, bald nicht mehr an den Fingern abzuzählen sei.

12. Man wird vielleicht Beispiele vermissen. Durch Anwendung der Formeln und Methoden auf ausgeführte Flugzeuge, deren Dimensionen ja aus Veröffentlichungen in Zeitschriften und Handbüchern entnommen werden können, ließen sich eine Unzahl bilden. Es wäre sicher von manchem Leser begrüßt worden, wenn hier einige durchgerechnet worden wären. Die Rechnung ist indessen so einfach und schon mit geringen Kenntnissen durchzuführen, daß man sich nicht auf die Bestimmung des Stabilitätskriteriums zu beschränken braucht. Vielmehr sind die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung und weiterhin ihre Wurzeln leicht zu ermitteln. So kann Dauer und Dekrement jeder Schwingung berechnet werden. Also selbst wenn der Konstrukteur gezwungen ist, die eine oder andre Stabilitätsbedingung außer Acht zu lassen, so wird er sich von dem Einfluß dieser Maßnahme zahlenmäßig Rechenschaft geben können. — Jeder neue Apparat bietet ein neues Beispiel; so würde irgend eines aus diesen Tagen bald sein Interesse verlieren. Für Längsstabilität hat seiner Zeit Mr. Williams in unsrer gemeinsamen (oben angeführten) Arbeit aus dem Jahre 1903 einige Fälle durchgerechnet.

II. Elementare Beziehungen.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen.

13. Bei der Untersuchung der Bewegungen des Flugzeugs gehen wir von den Grundgleichungen der Dynamik starrer Körper aus.

Mit dem Ursprung im Schwerpunkt bringen wir ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Flugzeug in starre Verbindung (siehe Fig. 1 und die Anmerkung 1 des Übersetzers); ein

¹⁾ Da von der Wahl des Koordinatensystems in hohem Maße Anschaulichkeit und Einfachheit der Bewegungsgleichungen abhängt, erscheint es dem Übersetzer nicht überflüssig, die getroffene Wahl zu begründen. Die einzige Voraussetzung, die keine Beschränkung der allgemeinen Gültigkeit der Theorie zur Folge hat, ist die Annahme, daß das Flugzeug eine Symmetrieebene besitze. Daß diese mit der x -, y -Ebene des im Flugzeug festen Koordinatensystems x, y, z zusammen zu fallen und die x -Achse in der Flugrichtung zu liegen habe, darüber besteht wohl kein Zweifel. Die y -Achse wurde nach unten, statt wie in der analytischen Geometrie der Ebene nach oben gerichtet, damit die Komponenten des Luftwiderstandes — Stirnwiderstand X und Auftrieb Y — mit gleichem — als verzögernde Kräfte also negativem — Vorzeichen in die Gleichungen eingehen. Die Beschleunigung der Schwere wirkt somit in positiver Richtung. Für die Wahl der Richtung der z -Achse nach links (Backbord) war es in erster Linie entscheidend, daß dadurch ein rechtshändiges Koordinatensystem entstand, das jetzt fast allgemein bevorzugt wird. Daß Winkel φ, ψ, ϑ mit positiver Tangente $\frac{dz_I}{dy_I}, \frac{dx_I}{dz_I}, \frac{dy_I}{dx_I}$ positiv seien (dabei ist das Koordinatensystem x_I, y_I, z_I zum Unterschied mit dem im Flugzeug festen Koordinatensystem x, y, z nur sich selbst parallel zu verschieben), ist Voraussetzung der analytischen Geometrie. Daraus folgt bei Gebrauch eines rechtshändigen Koordinatensystems, daß Winkel, Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen entgegen dem Uhrzeigersinn positiv zu zählen sind. Gleichgültig ob Linkssystem oder Rechtssystem gewählt und damit der Uhrzeigersinn als positiv oder negativ bezeichnet wird, immer sind Drehmomente positiv, deren Buchstabenfolge mit der gebräuchlichen Formel „Kraft \times Hebelarm“ nicht alphabetisch (also im Produkt „Hebelarm \times Kraft“ alphabetisch) ist; also positiv (Winkel vergrößernd) $X.z, Y.x, Z.y$; negativ: $X.y, Y.z, Z.x$.

Die Symmetrie hat zur Folge, daß die Zentrifugalmomente, deren Ordinatenprodukte z enthalten, verschwinden und somit ist die z -Achse

zweites Koordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt ist nur bei horizontalem stetigem Flug mit dem ersten in Deckung und bleibt seiner ersten Lage im Raum immer parallel. Das erste System wird mit x, y, z , das zweite mit x_I, y_I, z_I bezeichnet.

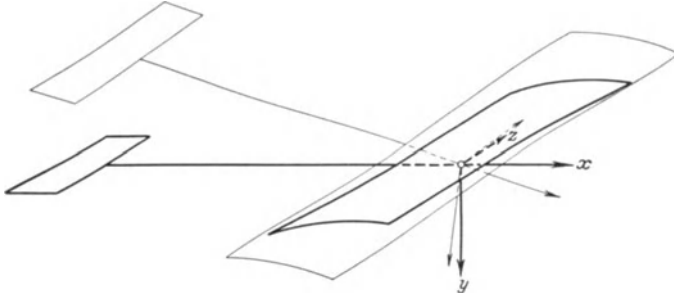


Fig. 1.

Nach Drehungen des starren Körpers um die Winkel ψ, ϑ, φ ¹⁾ und um die Achse y_I, z_I, x_I sind die neuen Ordinaten x_I, y_I, z_I eines Punktes mit den Ordinaten x, y, z bestimmt durch das folgende Schema: (1)

freie oder Hauptträgheitsachse; gelingt es auch noch, das dritte „Zentrifugalmoment“ $W = \int dG \cdot x \cdot y$ zu Null zu machen, so sind auch x und y freie Achsen und die Gleichungen für die unsymmetrischen Schwingungen vereinfachen sich in hervorragendem Maße. Es erscheint jedoch nicht von Vorteil, die x und y durch Drehung um z , mit den freien Achsen zur Deckung zu bringen, da dies erneute Projektionen von Geschwindigkeit und Kräften verursacht.

¹⁾ Die genannten Winkel sind nicht mit den gewöhnlich in gleicher Weise bezeichneten „Eulerschen Winkeln“ zu verwechseln. Denn diese entsprechen Drehungen zuerst um die z -Achse, dann um die x -Achse und schließlich um die so erhaltene neue z -Achse. Verfasser hat diesen Gebrauch verlassen, da sich kleine Drehungen um y nicht durch kleine Werte der „Eulerschen Winkel“ darstellen lassen; [für die Reihenfolge der Drehungen (zuerst um die y_I , dann um die z_I , schließlich um die x_I -Achse) war es offenbar maßgebend, daß die Ordinaten der zuerst benutzten Drehachse sich besonders einfach transformieren lassen. In diesem Fall war es von Bedeutung, für die Komponenten des Gewichts zu einfachen Ausdrücken zu gelangen. Der Übersetzer].

	x	y	z
x_I	$\cos \psi \cdot \cos \vartheta$	$\sin \varphi \cdot \sin \psi$ $-\cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \vartheta$	$\cos \varphi \cdot \sin \psi$ $+\sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \vartheta$
y_I	$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta \cdot \cos \varphi$	$-\cos \vartheta \cdot \sin \varphi$
z_I	$-\sin \psi \cdot \cos \vartheta$	$\sin \varphi \cdot \cos \psi$ $+\cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \sin \vartheta$	$\cos \varphi \cdot \cos \psi$ $-\sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \sin \vartheta$

Ändert sich der Kurs nicht, so wird mit $\psi = 0$ ($\cos \psi = 1$, $\sin \psi = 0$) die Transformation viel einfacher: (2)

	x	y	z
x_I	$\cos \vartheta$	$-\sin \vartheta \cdot \cos \varphi$	$\sin \vartheta \cdot \sin \varphi$
y_I	$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta \cdot \cos \varphi$	$-\cos \vartheta \cdot \sin \varphi$
z_I	0	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß die Winkelgeschwindigkeiten $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$ des Körpers um die x_I , y_I , z_I -Achsen zu den Winkelgeschwindigkeiten um die am Flugzeug

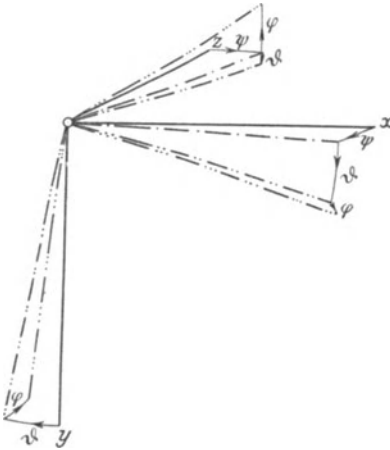


Fig. 2.

festen Achsen p , q , r in den gleichen Beziehungen stehen, wie Ordinaten x_I , y_I , z_I zu entsprechenden Ordinaten x , y , z .

14. Bezeichnen l , m , n für den Augenblick das statische Moment der Bewegungsgröße (diese definiert als das skalare Produkt von Gewicht und Geschwindigkeit) des Punkthaufens in bezug auf die drei im Flugzeug festen Achsen, so lassen sich die Bewegungsgleichungen mit

den weiteren Symbolen, deren Bedeutung auf den letzten Seiten angegeben ist, schreiben, wie folgt:

$$G \cdot \left(\frac{du}{g \cdot dt} + \frac{q \cdot w}{g} - \frac{r \cdot v}{g} \right) = \text{Summe der Kräfte in Richtung der } x\text{-Achse} \quad (3)$$

entsprechend für y und z .

Für die Berechnung der Drehungen müssen zunächst die Ausdrücke für l, m, n angegeben werden, die wegen des Verschwindens der beiden Zentrifugalmomente ungleich in der Form sind.

$$\begin{aligned} l &= I \cdot \dot{p} - W \cdot q \\ m &= J \cdot \dot{q} - W \cdot \dot{p} \\ n &= K \cdot r \end{aligned} \quad (4)$$

Nun ist:

$$\frac{dl}{g \cdot dt} + \frac{q \cdot n}{g} - \frac{r \cdot m}{g} = \text{Drehmoment um die } x\text{-Achse} \quad (5)$$

entsprechend für y und z .

15. Unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens der vom Luftwiderstand herrührenden Kräfte von der absoluten Größe XYZ und Drehmomente LMN , die einer eingeleiteten Drehung entgegenwirken, mit den Komponenten des Flugzeuggewichtes, die nach der oben gegebenen Transformation berechenbar sind, und mit der Voraussetzung, daß der Schraubenschub S in der Richtung x am Hebelarm $y = s$ wirke, können die Bewegungsgleichungen unter Elimination von l, m, n geschrieben werden:

$$\begin{aligned} G \left(\frac{du}{g \cdot dt} + \frac{q \cdot w}{g} - \frac{r \cdot v}{g} \right) &= G \cdot \sin \vartheta - X + S \\ G \left(\frac{dv}{g \cdot dt} + \frac{r \cdot n}{g} - \frac{\dot{p} \cdot w}{g} \right) &= G \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi - Y \\ G \left(\frac{dw}{g \cdot dt} + \frac{\dot{p} \cdot v}{g} - \frac{q \cdot u}{g} \right) &= -G \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - Z \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I \frac{d\dot{p}}{g \cdot dt} - W \cdot \frac{dq}{g \cdot dt} + (K - J) \frac{q \cdot r}{g} + W \cdot \frac{r \cdot \dot{p}}{g} &= -L \\ J \frac{dq}{g \cdot dt} - W \cdot \frac{d\dot{p}}{g \cdot dt} + (I - K) \frac{r \cdot \dot{p}}{g} - W \cdot \frac{q \cdot r}{g} &= -M \\ K \frac{dr}{g \cdot dt} + (J - I) \frac{\dot{p} \cdot q}{g} - W \cdot \frac{(\dot{p}^2 - q^2)}{g} &= -N - S \cdot s \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei ist, wie ersichtlich, die Kreiselwirkung der Trieb-
schraube und die Reaktion des Antriebsmoments nicht berücksichtigt;
Wirkungen von Bedeutung, die in späteren Untersuchungen zu er-
örtern wären, die sich jedoch durch Anordnung zweier gegenläufiger
Schrauben aufheben lassen.

Stetige Bewegung und kleine Schwingungen.

16. Das Flugzeug gleite mit gleichförmiger Geschwindigkeit u_0 unter dem unveränderlichen Winkel \mathcal{J}_0 mit konstantem Schub S_0 . Besteht Gleichgewicht, so sind u, v, w, p, q, r gleich Null, und die Bedingungen des Gleichgewichts lauten:

$$\begin{aligned}
 0 &= G \cdot \sin \mathcal{J}_0 - X_0 + S_0 \\
 0 &= G \cdot \cos \mathcal{J}_0 - Y_0 \\
 0 &= \quad \quad \quad - Z_0 \\
 0 &= \quad \quad \quad - L_0 \\
 0 &= \quad \quad \quad - M_0 \\
 0 &= \quad \quad \quad - N_0 - S_0 \cdot s
 \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Gleichungen werden im IV. Kapitel durch graphische Methoden veranschaulicht.

Schließt der Schub mit der x -Achse den Winkel σ ein, so wird S_0 in der ersten Gleichung mit $\cos \sigma$ reduziert und auf die rechte Seite der zweiten Gleichung tritt ein Glied $+ S_0 \cdot \sin \sigma$ hinzu.

Beginnt nun infolge irgend einer Störung das Flugzeug kleine Schwingungen zu vollführen, so wird die vordem stetige Geschwindigkeit u_0 um kleine Beträge u ab- und zunehmen nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit in der Zeit und ebenso werden v, w, p, q, r und damit $\varphi, \psi, \mathcal{J}$ periodischen Änderungen unterliegen. Nach der Theorie der unendlich kleinen Schwingungen sind Produkte und Quadrate der kleinen Änderungen u, v, w, p, q, r von höherer Ordnung klein und somit zu vernachlässigen.

Die Größen X, Y, Z, L, M, N sind Funktionen von $u_0 + u, v, w, p, q, r$ und können für kleine Schwingungen als lineare Funktionen ihrer Unveränderlichen und der Ableitungen (Differentialquotienten) nach diesen geschrieben werden:

$$X = X_0 + u \cdot X_u + v \cdot X_v + w \cdot X_w + p \cdot X_p + q \cdot X_q + r \cdot X_r \tag{9}$$

Diese allgemein gebräuchliche Annahme bedeutet eine Einschränkung, deren Erörterung jedoch zu weit führen würde.

Periodische Störungen durch Böen und Wirbel könnten durch Einführung weiterer Variablen als Funktion der Zeit in die Bewegungsgleichungen zur Berechnung erzwungener Schwingungen Anlaß geben. Hier sollen jedoch nur die freien Schwingungen in unbewegter Luft betrachtet werden.

Trennung der Schwingungen in zwei Gruppen.

17. Da die 6 Veränderlichen $XYZLMN$ nach jeder der 6 Geschwindigkeiten $u v w p q r$ (zum Zwecke einer ersten Annäherung durch eine lineare Funktion) zu differenzieren (abzuleiten) sind, gäbe es 36 Ableitungen. Wegen der Symmetrie des Flugzeugs zur x - y -Ebene läßt sich diese Zahl jedoch auf die Hälfte vermindern; denn XYN sind offenbar unabhängig von w, p, q ; und ZLM von u, v, r . Andernfalls hätte ein kleines Rücken w von rechts nach links, wenn X_w z. B. positiv wäre, ein Anwachsen $w \cdot X_w$ des Stirnwiderstandes, eine Bewegung von links nach rechts jedoch ein Abnehmen $-w \cdot X_w$ zur Folge. Oder wenn Z_r von Null verschieden wäre, würde bei einer Drehung um die z -Achse ein seitlicher Luftwiderstand $r \cdot Z_r$ wachgerufen, der bei einer Umkehrung des Drehsinns natürlich sein Vorzeichen änderte. Es möge dem Leser anheim gestellt werden, sich die Richtigkeit der Behauptung noch für andere Fälle zu veranschaulichen.

Schließlich können für kleine Winkel die Sinus diesem selbst, die Cosinus der Einheit gleich gesetzt werden. Wenn der veränderliche Betrag von \mathcal{J} mit ε bezeichnet wird, ist daher:

$$\sin \mathcal{J} = \sin \mathcal{J}_0 + \varepsilon \cdot \cos \mathcal{J}_0, \quad \cos \mathcal{J} = \cos \mathcal{J}_0 - \varepsilon \cdot \sin \mathcal{J}_0.$$

Wenn wir dann noch den variablen Betrag des Schraubenschubs S mit δS benennen, während Lage und Richtung unverändert bleiben, nehmen die Gleichungen (2) bis (7) die Form an:

$$\begin{aligned} G \cdot \frac{du}{g \cdot dt} &= G \cdot (\sin \mathcal{J}_0 + \varepsilon \cdot \cos \mathcal{J}_0) + S_0 + \delta S \\ &\quad - X_0 - u X_u - v X_v - r X_r \\ G \cdot \left(\frac{dv}{g \cdot dt} + \frac{r \cdot u_0}{g} \right) &= G \cdot (\cos \mathcal{J}_0 - \varepsilon \cdot \sin \mathcal{J}_0) \\ &\quad - Y_0 - u Y_u - v Y_v - r Y_r \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} G \cdot \left(\frac{dw}{g \cdot dt} - \frac{q \cdot u_0}{g} \right) &= -G \cdot \varphi \cdot \cos \mathcal{J}_0 \\ &\quad - Z_0 - w Z_w - p Z_p - q Z_q \\ I \cdot \frac{dp}{g \cdot dt} - W \frac{dq}{g \cdot dt} &= -L_0 - w \cdot L_w - p \cdot L_p - q \cdot L_q \\ J \cdot \frac{dq}{g \cdot dt} - W \frac{dp}{g \cdot dt} &= -M_0 - w \cdot M_w - p \cdot M_p - q \cdot M_q \\ K \cdot \frac{dr}{g \cdot dt} &= -(S_0 + \delta S) \cdot s \\ &\quad - N_0 - u \cdot N_u - v \cdot N_v - r N_r \end{aligned} \quad (11)$$

Setzen wir die Gleichgewichtsbedingungen ein und beachten das Vorkommen der Variablen u , v , r und auf der anderen Seite von w , p , q , so ergeben sich von selbst zwei Gruppen:

$$\begin{aligned} G \cdot \frac{du}{g \cdot dt} &= G \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta_o + \delta S - u \cdot X_u - v \cdot X_v - r \cdot X_r \\ G \cdot \left(\frac{dv}{g \cdot dt} - \frac{r \cdot u_o}{g} \right) &= -G \cdot \varepsilon \cdot \sin \vartheta_o - u \cdot Y_u - v \cdot Y_v - r \cdot Y_r \quad (12) \\ K \cdot \frac{dr}{g \cdot dt} &= -s \cdot \delta S - u \cdot N_u - v \cdot N_v - r \cdot N_r \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} G \cdot \left(\frac{dw}{g \cdot dt} - \frac{q \cdot u_o}{g} \right) &= -G \cdot \varphi \cdot \cos \vartheta_o - w \cdot Z_w - p \cdot Z_p - q \cdot Z_q \\ I \cdot \frac{dp}{g \cdot dt} - W \cdot \frac{dq}{g \cdot dt} &= -w \cdot L_w - p \cdot L_p - q \cdot L_q \quad (13) \\ J \cdot \frac{dq}{g \cdot dt} - W \cdot \frac{dp}{g \cdot dt} &= -w \cdot M_w - p \cdot M_p - q \cdot M_q \end{aligned}$$

Die erste Gruppe umfaßt die symmetrischen oder Längsschwingungen: Stoßen u , Wogen v und Stampfen r . Die zweite Gruppe läßt die Gesetze der Quer- oder Seitenschwingungen ermitteln, die den übrigen Freiheitsgraden entsprechen: Rücken w , Schlingern p und Gieren q . Da keines der gebräuchlichen Beiworte die Untrennbarkeit dieser drei Bewegungen eindeutig wiedergibt, und, wie gesagt, dieser Umstand unbedingt zu beachten ist, kam schon oben die Bezeichnung „unsymmetrische“ Schwingungen zum Vorschlag. Wenn dennoch das Wort Seitenschwingungen im folgenden der Kürze halber bisweilen gebraucht wird, so ist es nur in diesem umfassenden Sinne zu verstehen.

Symmetrische Schwingungen.

Kriterium der Längsstabilität.

18. Zwecks Untersuchung der symmetrischen Schwingungen setzen wir u , v , r und ε proportional $e^{\lambda t}$; dann wird:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = \lambda v, \quad \frac{dr}{dt} = \lambda r, \quad r = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \lambda \varepsilon. \quad (14)$$

Die letzte Gleichung besagt $r = \lambda \cdot \varepsilon$; der folgende Ansatz gestaltet sich jedoch einheitlicher, wenn wir für ε r/λ setzen. Damit kommen die Gleichungen (12) auf die Form:

$$\begin{aligned}
 \left(G \cdot \frac{\lambda}{g} + X_u\right) \cdot u + X_v \cdot v + \left(-\frac{G}{\lambda} \cdot \cos \vartheta_0 + X_r\right) \cdot r &= \delta S \\
 Y_u \cdot u + \left(G \cdot \frac{\lambda}{g} + Y_v\right) \cdot v + \left(\frac{G}{\lambda} \cdot \sin \vartheta_0 + G \cdot \frac{u_0}{g} + Y_r\right) \cdot r &= 0 \quad (15) \\
 N_u \cdot u + N_v \cdot v + \left(K \cdot \frac{\lambda}{g} + N_r\right) \cdot r &= -s \cdot \delta S
 \end{aligned}$$

Wenn wir zunächst den Schub S als unabhängig von der Marschgeschwindigkeit voraussetzen, so haben wir den einfachsten Fall vor uns; später wird auch noch dieser Einfluß zu erörtern sein.

Mit δS werden die rechten Seiten der Gleichungen zu Null und die Koexistenzbedingung der 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten und ohne absolutes Glied (gleichwertig 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten) ist das Verschwinden der Determinante ihrer Koeffizienten:

$$\left. \begin{array}{cccc}
 G \cdot \frac{\lambda}{g} + X_u, & X_v, & -\frac{G}{\lambda} \cdot \cos \vartheta_0 & + X_r \\
 Y_u, & G \cdot \frac{\lambda}{g} + Y_v, & \frac{G}{\lambda} \cdot \sin \vartheta_0 + G \cdot \frac{u_0}{g} + Y_r & \\
 N_u, & N_v, & K \cdot \frac{\lambda}{g} & + N_r
 \end{array} \right\} = 0 \quad (16)$$

Wenn wir noch eine Zeile oder Kolonne (am besten die letzte Kolonne) mit λ multiplizieren und die Determinante entwickeln, ergibt sich eine Gleichung vierten Grades für λ :

$$A \cdot \lambda^4 + B \cdot \lambda^3 + C \cdot \lambda^2 + D \cdot \lambda + E = 0 \quad (17)$$

worin:

$$\left. \begin{aligned}
 A &= K \cdot G^2 \\
 B : g &= K \cdot G \cdot (X_u + Y_v) + G^2 \cdot N_r \\
 C : g^2 &= K \cdot (X_u \cdot Y_v - X_v \cdot Y_u) + G \cdot [(Y_v \cdot N_r - Y_r \cdot N_v) \\
 &\quad + (X_u \cdot N_r - X_r \cdot N_u)] - G^2 \cdot \frac{u_0}{g} \cdot N_r \\
 D : g^3 &= X_u \cdot (Y_v \cdot N_r - Y_r \cdot N_v) + X_v \cdot (Y_r \cdot N_u - Y_u \cdot N_r) \\
 &\quad + X_r \cdot (Y_u \cdot N_v - Y_v \cdot N_u) + G \cdot \frac{u_0}{g} \cdot (X_v \cdot N_u \\
 &\quad - X_u \cdot N_v) + \frac{G^2}{g} \cdot (N_u \cdot \cos \vartheta_0 - N_v \cdot \sin \vartheta_0) \\
 E : g^4 &= \frac{G}{g} \cdot [-\cos \vartheta_0 \cdot (Y_u \cdot N_r - Y_v \cdot N_u) - \sin \vartheta_0 \\
 &\quad \cdot (X_u \cdot N_v - X_v \cdot N_u)]
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Nennen wir die Determinante:

$$\left. \begin{array}{ccc} X_u & X_v & X_r \\ Y_u & Y_v & Y_r \\ N_u & N_v & N_r \end{array} \right\} = \Delta$$

und die Unterdeterminante von $X_u u_X, Y_r r_Y$ usw. und geben ihnen das entsprechende Vorzeichen derart, daß

$$X_u \cdot u_X + X_v \cdot v_X + X_r \cdot r_X = \Delta_0,$$

so vereinfacht sich (18) zu:

$$\begin{aligned} A &= K \cdot G^2, \\ B : g &= K \cdot G (X_u + Y_v) + G^2 \cdot N_r, \\ C : g^2 &= K \cdot r_N + G (u_X + v_Y) - G^2 \cdot \frac{u_0}{g} \cdot N_v, \\ D : g^3 &= \Delta + G \cdot \frac{u_0}{g} \cdot r_Y + \frac{G^2}{g} (N_u \cdot \cos \mathcal{J}_0 - N_v \cdot \sin \mathcal{J}_0), \\ E : g^4 &= -\frac{G}{g} (r_X \cdot \cos \mathcal{J}_0 - r_Y \sin \mathcal{J}_0). \end{aligned} \quad (18a)$$

19. Bedingung der Stabilität ist es, daß alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung für λ im reellen Teil negatives Vorzeichen haben, was ohne weiteres aus der Annahme der Proportionalität von u, v, r mit $e^{\lambda t}$ folgt. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Wurzeln, so erscheinen u, v, r in der Form

$$l_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + l_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + l_3 \cdot e^{\lambda_3 t} + l_4 \cdot e^{\lambda_4 t}.$$

Dabei sind die Konstanten l_1, l_2, l_3, l_4 durch Anfangsbedingungen bestimmt.

Wäre eine Wurzel reell und positiv, so würde $e^{\lambda t}$ mit der Zeit wachsen, die Störung sich also vergrößern und den Flug instabil gestalten.

Umgekehrt nimmt für reelles negatives λ die Störung aperiodisch ab.

Existiert jedoch ein Paar komplexer Wurzeln:

$$\lambda_1 = \mu + \nu \cdot i, \quad \lambda_2 = \mu - \nu \cdot i,$$

so handelt es sich um eine periodische Bewegung, deren Amplitude zu- oder abnimmt, je nachdem μ positiv oder negativ ist. Die Konstanten l sind dann ebenfalls komplex; setzen wir $l_1 = \frac{m + n \cdot i}{2}$, $l_2 = \frac{m - n \cdot i}{2}$, so ist

$$\begin{aligned}
 l_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + l_2 \cdot e^{\lambda_2 t} &= l_1 \cdot e^{(\mu + \nu \cdot i) \cdot t} + l_2 \cdot e^{(\mu - \nu \cdot i) \cdot t}, \\
 &= e^{\mu t} \cdot (l_1 \cdot e^{\nu \cdot i t} + l_2 \cdot e^{-\nu \cdot i t}), \\
 &= e^{\mu t} \cdot \left[m \cdot \frac{e^{\nu i t} + e^{-\nu \cdot i t}}{2} + n \cdot i \cdot \frac{e^{\nu \cdot i t} - e^{-\nu \cdot i t}}{2} \right], \\
 &= e^{\mu t} \cdot (m \cdot \cos \nu \cdot t - n \cdot \sin \nu \cdot t).
 \end{aligned}$$

Die Bedingung, daß der reelle Teil der Wurzeln der biquadratischen Gleichung negativ ist und damit Stabilität anzeigt, hat Routh bestimmt. (Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Übersetzt von Schepp. Teubner 1898. II. Band. Seite 223.) Es wird gefordert, daß $A B C D E$ und die Determinante Q von gleichem Vorzeichen sind, wobei Q definiert ist durch:

$$Q = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{ccc} 2A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & 2E \end{array} \right\} = B C D - E B^2 - A D^2. \quad (19)$$

Der Beweis möge a. a. O. nachgesehen werden; eine teilweise Prüfung gelingt uns jedoch schon hier, wenn wir den Fall betrachten, wo der reelle Teil eines Wurzelpaares gerade verschwindet. Mit $\lambda_1 = +\nu \cdot i$, $\lambda_2 = -\nu \cdot i$ wird $\lambda^2 = -\nu^2$ und durch Trennung der imaginären und reellen Teile der Gleichung (17) gibt diese zwei Gleichungen:

$$A \cdot \lambda^4 + C \cdot \lambda^2 + E = 0 \quad \text{und} \quad B \cdot \lambda^3 + D \cdot \lambda = 0.$$

Die letzte liefert $\lambda^2 = -\frac{D}{B}$ und durch Einsetzen in die erste:

$$A \cdot \frac{D^2}{B^2} - C \cdot \frac{D}{B} + E = 0$$

oder: $B C D - E \cdot B^2 - A D^2 = 0$.

Womit ja eben durch $Q = 0$ der äußerste Fall charakterisiert ist, da positives A auch positives Q erfordert. Das Stabilitätskriterium darf somit auf die Form gebracht werden:

$$C - E \cdot \frac{B}{D} - A \cdot \frac{D}{B} > 0. \quad (19a)$$

Wie ersichtlich, muß für positive Werte $A B D E$ auch C positiv sein.

Unsymmetrische Schwingungen.

Bedingung der Seitenstabilität.

20. Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ergibt sich nach Gleichung (1) aus p , q , r wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= p \cdot \cos \psi \cdot \cos \mathcal{J} + q \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi - q \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \mathcal{J} \\ &\quad + r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi + r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Für kleine Winkel φ und ψ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = p \cdot \cos \mathcal{J} + q \cdot \varphi \cdot \psi - q \cdot \sin \mathcal{J} + r \cdot \psi + r \cdot \varphi \cdot \sin \mathcal{J}.$$

Unter Vernachlässigung der Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, mit $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \varepsilon$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = p \cdot \cos \mathcal{J}_0 - q \cdot \sin \mathcal{J}_0.^1)$$

Wir setzen wieder w, p, q und φ proportional e^{it} und erhalten φ als Funktion von p und q aus:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda \cdot \varphi = p \cdot \cos \mathcal{J}_0 - q \cdot \sin \mathcal{J}_0. \quad (20)$$

Die Gleichung (13) liefert

$$\begin{aligned} &\left(G \cdot \frac{\lambda}{g} + Z_w \right) w + \left(\frac{G}{\lambda} \cdot \cos \mathcal{J}_0^2 + Z_p \right) p \\ &\quad + \left(-G \cdot \frac{u_0}{g} - \frac{G}{\lambda} \cdot \sin \mathcal{J}_0 \cdot \cos \mathcal{J}_0 + Z_q \right) \cdot q = 0 \\ L_w \cdot w + &\left(I \cdot \frac{\lambda}{g} + L_p \right) p + \left(-W \cdot \frac{\lambda}{g} + L_q \right) q = 0 \\ M_w \cdot w + &\left(-W \cdot \frac{\lambda}{g} + M_p \right) \cdot p + \left(J \cdot \frac{\lambda}{g} + M_q \right) q = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Koexistenzbedingung ist ausgesprochen durch:

$$\begin{vmatrix} G \cdot \frac{\lambda}{g} + Z_w, & G \cdot \lambda \cdot \cos \mathcal{J}_0^2 + Z_p, & -G \cdot \frac{u_0}{g} - \frac{G}{\lambda} \cdot \sin \mathcal{J}_0 \cdot \cos \mathcal{J}_0 + Z_q \\ + L_w, & I \cdot \frac{\lambda}{g} + L_p, & -W \cdot \frac{\lambda}{g} + L_q \\ + M_w, & -W \cdot \frac{\lambda}{g} + M_p, & J \cdot \frac{\lambda}{g} + M_q \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Nach Multiplikation (am besten der ersten Zeile) mit λ ergibt sich abermals eine Gleichung vierten Grades in λ , deren Koeffizienten zum Unterschied von denen der Längsschwingungen durch den Index s (Seitenstabilität) bezeichnet werden.

¹⁾ Verfasser ist an dieser Stelle ein Fehler untergelaufen, der vom Übersetzer durchgehends verbessert wurde.

$$\begin{aligned}
 A_s &= G (IJ - W^2) \\
 B_s : g &= Z_w (I \cdot J - W^2) + G [I \cdot M_q + J L_q + W(L_q + M_p)] \\
 C_s : g^2 &= Z_w [I M_q + J \cdot L_p + W(L_q + M_p)] + G (L_p \cdot M_q - L_q \cdot M_p) \\
 &\quad - Z_p (W \cdot M_w + J L_w) - \left(Z_q - G \cdot \frac{u_0}{g} \right) (W \cdot L_w + I \cdot M_w) \\
 D_s : g^3 &= Z_w (L_p \cdot M_q - L_q \cdot M_p) + Z_p (L_q \cdot M_w - M_q \cdot L_w) \quad (23) \\
 &\quad + \left(Z_q - G \cdot \frac{u_0}{g} \right) (L_w \cdot M_p - L_p \cdot M_w) \\
 &\quad + \frac{G}{g} \cdot [(W \cdot L_w + I \cdot M_w) \sin \vartheta_0 \cdot \cos \vartheta_0 - (J \cdot L_w + W \cdot M_w) \\
 &\quad \quad \quad \cos \vartheta_0^2] \\
 E_s : g^4 &= \frac{G}{g} [(L_q \cdot M_w + M_q \cdot L_w) \cos^2 \vartheta_0 - (L_w \cdot M_p - M_w \cdot L_p) \\
 &\quad \quad \quad \sin \vartheta_0 \cdot \cos \vartheta_0].
 \end{aligned}$$

Bezeichnen wie früher in der Determinante:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} Z_w & Z_p & Z_q \\ L_w & L_p & L_q \\ M_w & M_p & M_q \end{vmatrix}$$

w_z, p_L u. s. f. die Unterdeterminanten von L_w, Z_p , so erhalten wir für die Koeffizienten die einfacheren Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned}
 A_s &= G \cdot (I \cdot J - W^2) \\
 B_s : g &= Z_w \cdot (I \cdot J - W^2) + G \cdot [I \cdot M_q + J \cdot L_p + W \cdot (L_q \\
 &\quad + M_p)] \\
 C_s : g^2 &= I \cdot p_L + J \cdot q_M - W \cdot (q_L + p_M) + G \cdot w_z + G \cdot \frac{u_0}{g} \\
 &\quad \cdot (I \cdot M_w + W \cdot L_w) \\
 D_s : g^3 &= \Delta_s - G \cdot \frac{u_0}{g} \cdot q_z + \frac{G}{g} \cdot \cos \vartheta_0 [I \cdot \sin \vartheta_0 - W \cdot \\
 &\quad \cos \vartheta_0] M_w + (W \sin \vartheta_0 - J \cos \vartheta_0) L_w \\
 E_s : g^4 &= \frac{G}{g} \cos \vartheta_0 (p_z \cdot \cos \vartheta_0 - q_z \cdot \sin \vartheta_0).
 \end{aligned} \right\} (23a)$$

Bedeutet wie vorher

$$Q_s = B_s \cdot C_s \cdot D_s - A_s \cdot D_s^2 - E_s \cdot B_s^2, \quad (24)$$

so ist es Bedingung der Seitenstabilität, daß

$$A_s B_s C_s D_s E_s \text{ und } Q_s$$

positives Vorzeichen führen, da A_s nach Lehre der elementaren Dynamik notwendig positiv ist.

Betrachtung über die Widerstandsableitungen.

21. Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß bei Kenntnis der 18 Koeffizienten $X_u \dots N_r$ und der dynamischen Konstanten des Flugzeugs: Gewicht, Hauptträgheitsmomente und Lage der Hauptträgheitsachsen, die Stabilität beurteilt werden kann. Ferner zeigt die numerische Lösung der biquadratischen Gleichung den Charakter der durch eine kleine Störung eingeleiteten Bewegungen; ob sie periodisch oder aperiodisch, zu- oder abnehmend verlaufen.

Setzen wir den Widerstand proportional dem Quadrat der Relativgeschwindigkeit gegenüber der Luft — eine Annahme, die die Erfahrung für normale Verhältnisse bewahrt hat¹⁾ — so sind die 6 Kräfte und Kräftepaare XYZ und LMN quadratische Funktionen von $u_0 + u, v, w, p, q, r$ und die Ableitungen $X_u \dots N_r$ sind proportional u_0 , da in erster Annäherung Quadrate und Produkte von u, v, w, p, q, r vernachlässigt werden sollen. Die Quotienten $X_u/u_0 \dots N_r/u_0$ sind für ein gegebenes Flugzeug auf gegebener stetiger Bahn Konstante. Sie sind abhängig von Form, Abmessung und Anordnung der Flügel und der Gesamtheit der konstruktiven Einzelheiten, die natürlich auch Luftwiderstand hervorrufen, und sind daher Funktion des Anstellwinkels. Wären diese Funktionen alle bekannt, so würde das Stabilitätsproblem auf arithmetische Rechnung zurückgeführt. Diese gestaltet sich jedoch, selbst wenn die nötigen Daten zur Hand wären, außerordentlich umfangreich, und um auf einfachere Form selbst für nur angenäherte Lösungen zu kommen, wäre der Rechnungsgang noch algebraisch zu behandeln.

Zunächst können wir nun, da bei gradliniger Bewegung in der Richtung der x -Achse X, Y, N mit $(u_0 + u)^2$ wachsen, schreiben:

$$X_u = \frac{2 X_0}{u_0}, \quad Y_u = \frac{2 Y_0}{u_0}, \quad N_u = \frac{2 N_0}{u_0}. \quad (25)$$

X_0, Y_0, N_0 entsprechen den Gleichgewichtsbedingungen

$$X_0 = G \cdot \sin \vartheta_0 + S_0 \quad Y_0 = G \cdot \cos \vartheta_0 \quad N_0 = -S_0 \cdot s.$$

Für den besonderen Fall, daß die Schubrichtung durch den Schwerpunkt geht, wird mit N_0 auch $N_u = 0$.

Da die Ableitungen proportional u_0 sind, finden wir folgende Abhängigkeit der Koeffizienten der biquadratischen Gleichungen

¹⁾ Abgesehen von sehr kleinen Geschwindigkeiten, ist dem Übersetzer nur noch die Ausnahme bekannt, die Eiffel a. a. O., S. 177 anführt.

von u_0 in durchaus gleicher Weise für die Seiten- wie für die Längsstabilität:

- A unabhängig von u_0
 B proportional u_0
 C „ u_0^2
 D ist von der Form $a \cdot u_0^3 + b u_0$
 E proportional u_0^2 .

Wir können auch die Gleichung vierten Grades für λ mit $(g \cdot u_0)^4$ dividieren:

$$A \left(\frac{\lambda}{g \cdot u_0} \right)^4 + \frac{B}{g \cdot u_0} \cdot \left(\frac{\lambda}{g \cdot u_0} \right)^3 + \frac{C}{g^2 \cdot u_0^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{g \cdot u_0} \right)^2 + \frac{D}{g^3 \cdot u_0^3} \cdot \left(\frac{\lambda}{g \cdot u_0} \right) + \frac{E}{g^4 \cdot u_0^4} = 0,$$

dann zeigen die Koeffizienten der neuen Gleichung für $\frac{\lambda}{g \cdot u_0}$:

$$A, \frac{B}{g \cdot u_0}, \frac{C}{g^2 \cdot u_0^2} \text{ als unveränderlich,}$$

$$\frac{D}{g^3 \cdot u_0^3} \text{ in der Form } a + b \cdot u_0^{-2}$$

und $\frac{E}{g^4 \cdot u_0^4}$ proportional u_0^{-2} .

Die Diskriminante

$$\frac{Q}{u_0^6} = \frac{B C D - A D^2 - E B^2}{u_0^6}$$

zeigt die Form

$$a + b \cdot u_0^{-2} + c \cdot u_0^{-4},$$

wobei a, b, c Konstante sind. Die Stabilitätsbedingung liefert somit einen Grenzwert für die Geschwindigkeitshöhe.

Es ist von Vorteil, sich jetzt daran zu erinnern, daß die Erfüllung der Bedingung der Stabilität ohne die des Gleichgewichts keinen Sinn hat und daß somit ihre Kombination statthaft und geeignet ist, die verwickelten Stabilitätskriterien auf einfachere Form zu bringen. Wir unterscheiden daher zwischen den zuerst entwickelten „primitiven“ Stabilitätsbedingungen und den auf diese Weise „modifizierten“. Wenn sich herausstellt, daß ein Flugzeug nur nach Überschreiten einer gewissen Geschwindigkeit stabil wird, so muß auf der andern Seite in Betracht gestellt werden, daß damit sich die Gleichgewichtsbedingungen ändern. Es gelingt unter

anderem, die Stabilitätsbedingung so zu modifizieren, daß die Geschwindigkeit aus den Gleichungen verschwindet.

Bisweilen ist es dann wieder vorteilhaft, Stabilität und Gleichgewicht getrennt zu betrachten.

So kann Seitenstabilität bestehen, auch wenn das Längsgleichgewicht gestört ist. Freilich sind in diesem Fall die Widerstandsableitungen Funktion der Zeit, so daß sich der Charakter der unendlich kleinen Schwingungen der Untersuchung schwer eröffnet. Wenn nur die Stabilitätsbedingung für stetige Bewegung erfüllt ist, bietet die Rechnung für jede Art der Bewegung eine gewisse Gewähr für Sicherheit.

Stabilität der Luftschiffe.

22. Wünscht man den vorstehenden Rechnungsgang auf Luftschiffe anzuwenden, so sind einige Veränderungen vorzunehmen.

Zunächst ist die Trägheit der verdrängten Luft zu berücksichtigen. Im Fall der Bewegung einer Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit ist diese Gesetzmäßigkeit bekannt: es ist zur Masse der Kugel die halbe Masse der verdrängten Flüssigkeit hinzuzufügen. Das Gleichgewicht der Luftschiffe fordert gleiches Gewicht des verdrängenden Körpers und der verdrängten Luft; daher denn eine beträchtliche Zusatzmasse in die Rechnung einzuführen ist. Selbstverständlich ist das Gewicht des Traggases für die Beschleunigungsvorgänge auch nicht außer Acht zu lassen. Für ein Ellipsoid in unverdichtbarer Flüssigkeit gibt die Hydrodynamik Gleichungen für die lebendige Energie. Diese erscheinen als zwei homogene quadratische Funktionen, in denen wegen der Symmetrie des Luftschiffs zur vertikalen Mittelebene $u_0 + u, v, r$ einerseits und w, p, q andererseits getrennt erscheinen. Daraus lassen sich die Bewegungsgleichungen ableiten.

Weiterhin hat die Gravitation einen durchaus andern Einfluß. Im Gleichgewichtszustand liegen Schwerpunkt und Auftriebsmittelpunkt auf derselben Vertikalen. Ist c der Abstand der beiden Punkte und wird das Luftschiff um die z -Achse um den Winkel \mathcal{J} und dann um die x -Achse um φ gedreht, so entstehen Drehmomente

$$\begin{aligned} & -c \cdot G \cdot \cos \mathcal{J} \cdot \sin \varphi \quad \text{um die } x\text{-Achse} && \text{und} \\ & -c \cdot G \cdot \sin \mathcal{J} \quad \text{um die } z\text{-Achse.} \end{aligned}$$

Also an Stelle der Komponenten in Richtung der Achsen wie beim Flugzeug, liefert die Schwere nach Drehungen gegen die Lage

der stetigen Bewegung beim Luftschiff Kräftepaare, womit der Schwingungscharakter sich wesentlich ändert.

Das Haupthindernis für eine genugtuende Behandlung des Problems liegt jedoch in der Schwierigkeit, zutreffende Annahmen über den Luftwiderstand zu machen. Wir können natürlich wie beim Flugzeug in erster Annäherung setzen:

$$-X_o - u X_u - v X_v - r X_r,$$

wo X_o mit u_o^2 , X_u , X_v , X_r mit u_o proportional sind. Aber sich hiermit und mit dem Zusatz einer Masse, zur Berücksichtigung der Beschleunigung der verdrängten Luft, zu begnügen, erscheint wenig gerechtfertigt, solange nicht die Erfahrung dem Ansatz Bestätigung hat zu Teil werden lassen.

III. Betrachtungen über die Widerstandsableitungen für Längsschwingungen.

Ebene Flügel.

23. Es ist nun zu zeigen, wie die neun Widerstandsableitungen (X, Y, N) u, v, r aus der bekannten Abhängigkeit des Luftwiderstandes und der Druckpunktlage von Anstellwinkel α und Winkelgeschwindigkeit r berechnet werden können. Wir legen zunächst die Annahme zugrunde, daß die Resultierende des Luftwiderstandes zur Fläche senkrecht steht; daß also der Einfluß der Oberflächenreibung (Lit. 7; I S. 41), der später noch zu berücksichtigen sein wird, vernachlässigt werden kann.

Der zur x - y -Ebene senkrechte Flügel vom Inhalt F_i schließe mit x den Anstellwinkel α ein. Der Flächenmittelpunkt habe die Koordinaten x und y und sei Ursprung für die Funktion:

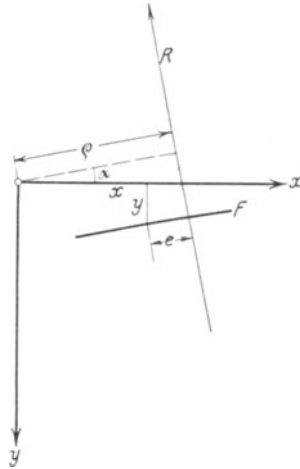


Fig. 3.

$$e = a \cdot \varphi(\alpha). \quad (26)$$

30 Betrachtungen über die Widerstandsableitungen für Längsschwingungen.

Das ist die Lage des Druckmittelpunktes in Abhängigkeit vom Anstellwinkel. Bezeichnet R die Resultierende des Luftwiderstandes, so ist:

$$R = \gamma/g \cdot F_i \cdot u_0^2 \cdot f(\alpha)^1$$

und

$$X = R \cdot \sin \alpha \quad Y = R \cdot \cos \alpha \quad N = R \cdot \varrho. \quad (27)$$

$f(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$ sind Funktionen, die das Experiment zu liefern hat.

Weiterhin ist:

$$\varrho = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + e. \quad (28)$$

Wird die stetige Bewegung gestört, so sind $u_0 + u - y \cdot r$ und $v + x \cdot r$ die Komponenten der Geschwindigkeit für den Flügel; hinzu tritt noch eine Drehung um die Mittellinie mit der Winkelgeschwindigkeit r .

Vernachlässigen wir in der Gleichung für die resultierende Geschwindigkeit:

$$\sqrt{(u_0 + u - y \cdot r)^2 + (v + x \cdot r)^2}$$

den zweiten Ausdruck unter der Wurzel, so ist die Translationsgeschwindigkeit $u_0 + u - y \cdot r$ und ihre Richtung ändert sich um:

$$\text{arc tg} \cdot \frac{v + x \cdot r}{u_0 + u - y \cdot r},$$

worin wieder $u - y \cdot r$ gegenüber u_0 ohne Bedeutung sind.

Sind nun $f'(\alpha)$ und $\varrho'(\alpha)$ die ersten Ableitungen der Funktionen $f(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$ nach ihrer Unabhängigen, so ist das totale Differential von R :

$$dR = 2 \cdot c \cdot (u - y \cdot r) \cdot f(\alpha) + c \cdot (v + x \cdot r) \cdot f'(\alpha), \quad (29)$$

worin

$$c = \frac{\gamma}{g} \cdot F_i \cdot u_0$$

Ferner ist

$$d\varrho = a \cdot \frac{v + x \cdot r}{u_0} \cdot \varrho'(\alpha).$$

24. Der Flügel besitzt jedoch eine Winkelgeschwindigkeit r um seine Mittellinie und diese wird daher den Luftwiderstand nach

¹⁾ γ = spezifisches Gewicht der Luft; siehe Hütte, 21. Auflage, S. 416 u. 418. Eiffel setzt $\gamma/g = 1/8$.

Größe und Lage beeinflussen. Hierzu wird angenommen, daß $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ nicht nur Funktionen von α , sondern auch von r sind.

Offenbar spielt aber nur das Verhältnis $r:u_o$ eine Rolle, da Änderungen beider Geschwindigkeiten im selben Verhältnis das Strömungsbild nicht ändern können. Daher sind $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ Funktionen von α und $r:u_o$ und ihre sog. Drehungsableitungen sind definiert durch:

$$f_r(\alpha) = u_o \cdot \frac{d}{dr} f(\alpha), \quad \varphi_r(\alpha) = u_o \cdot \frac{d}{dr} \varphi(\alpha). \quad (30)$$

Diese Substitution hat die volle Gültigkeit des Gesetzes für den Widerstand zur Voraussetzung, nach dem dieser mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst.

25. Nach alledem sind die Ableitungen von:

$X_o = c \cdot u_o \cdot \sin \alpha \cdot f(\alpha)$, $Y_o = c \cdot u_o \cdot \cos \alpha \cdot f(\alpha)$, $N_o = c \cdot u_o \cdot \varrho \cdot f(\alpha)$,
bestimmt zu:

$$\left. \begin{array}{l} X_n : c = 2 \cdot \sin \alpha \cdot f(\alpha) \quad X_v : c = \sin \alpha \cdot f'(\alpha) \\ X_r : c = \sin \alpha [x \cdot f'(\alpha) - 2y \cdot f(\alpha) + f_r(\alpha)] \\ Y_n : c = 2 \cdot \cos \alpha \cdot f(\alpha) \quad Y_v : c = \cos \alpha \cdot f'(\alpha) \\ Y_r : c = \cos \alpha [x \cdot f'(\alpha) - 2y \cdot f(\alpha) + f_r(\alpha)] \\ N_n : c = 2 \cdot \varrho \cdot f(\alpha) \quad N_v : c = \varrho \cdot f'(\alpha) + a \cdot \varphi'(\alpha) \cdot f(\alpha) \\ N_r : c = \varrho \cdot [x \cdot f'(\alpha) - 2y \cdot f(\alpha) + f_r(\alpha) \\ \quad + f(\alpha) [x \cdot a \cdot \varphi'(\alpha) + a \cdot \varphi_r(\alpha)]] \end{array} \right\} \quad (31)$$

Für zwei oder mehr Flügel, deren Strömungsbilder sich nicht gegenseitig beeinflussen, erhält man die resultierenden Ableitungen durch Addition der einzelnen. Störung der Strömung durch eine vor- oder überlagerte Fläche wird vor Abschluß der Behandlung der Längsstabilität kurz erörtert werden, wiewohl endgültiges darüber nicht ausgesagt werden kann, solange nicht umfangreiche Untersuchungen vorliegen.

26. Von hervorragender Bedeutung für die einfache Gestaltung der Stabilitätsrechnungen sind die folgenden Ergebnisse, die leider erst zur Kenntnis des Verfassers gelangten, als schon langwierige algebraische Arbeit geleistet war, die freilich auch die erste Gewähr für ihre Richtigkeit lieferte.

1. Für einzelne oder mehrere „parallele“, „ebene“ Flügel werden die Unterdeterminanten u_N , v_N , r_N der letzten Zeile und damit Δ zu Null.

2. Wenn wir für den Fall von zwei ebenen Flügeln die Tangenten der Druckpunktskurven $\varphi'(\alpha)$ und $\varphi_r(\alpha)$ für vernachlässigbar klein halten, so verschwindet die Determinante der resultierenden Ableitungen ebenfalls. Denn die Determinante

$$\begin{array}{ccc} X_{u_1} + X_{u_2} & X_{v_1} + X_{v_2} & X_{r_1} + X_{r_2} \\ Y_{u_1} + Y_{u_2} & Y_{v_1} + Y_{v_2} & Y_{r_1} + Y_{r_2} \\ N_{u_1} + N_{u_2} & N_{v_1} + N_{v_2} & N_{r_1} + N_{r_2} \end{array}$$

läßt sich schreiben als Summe von acht Determinanten, in denen außer:

$$\left| \begin{array}{ccc} X_{u_1} & X_{v_1} & X_{r_1} \\ Y_{u_1} & Y_{v_1} & Y_{r_1} \\ N_{u_1} & N_{v_1} & N_{r_1} \end{array} \right| \text{ und } \left| \begin{array}{ccc} X_{u_2} & X_{v_2} & X_{r_2} \\ Y_{u_2} & Y_{v_2} & Y_{r_2} \\ N_{u_2} & N_{v_2} & N_{r_2} \end{array} \right|$$

jeweils 2 Kolonnen der einen dieser Determinanten mit der entsprechenden dritten der andern erscheinen. Nun sind unter der Voraussetzung $\varphi'(\alpha) = 0$ und $\varphi_r(\alpha) = 0$ in den beiden angeschriebenen Determinanten je zwei Kolonnen einander proportional; damit werden auch noch die übrigen sechs Determinanten in der Summe der acht zu Null¹⁾ und damit die Determinante der resultierenden Ableitungen.

3. Werden hingegen $\varphi'(\alpha)$ und $\varphi_r(\alpha)$ nicht vernachlässigt, so kommen in der Determinante nur Glieder heraus, die $\varphi'(\alpha_1)$, $\varphi'(\alpha_2)$, $\varphi_r(\alpha_1)$, $\varphi_r(\alpha_2)$ im Produkt mit den Unterdeterminanten v_N und r_N enthalten; wie leicht ersichtlich, ist

$$r_N = 2 \cdot c_1 \cdot c_2 [f(\alpha_1)f'(\alpha_2) - f(\alpha_2) \cdot f'(\alpha_1)] \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (32)$$

So kann jetzt schon, da v_N auf ähnliche einfache Form gebracht werden kann, ebenfalls mit dem Faktor $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$, ohne weiteren Untersuchungen vorzugreifen, festgestellt werden, daß \mathcal{L} entgegen dem Verdacht, rechnerisch große Anforderungen zu stellen, entweder verschwindet oder doch leicht ermittelt werden kann; für die meisten Fälle wird \mathcal{L} vernachlässigt werden können. Eine Ausnahme werden wir später zu behandeln haben, wenn zur Erhöhung der Stabilität 3 Flügel angeordnet werden, mit der ausgesprochenen Absicht, den Wert von \mathcal{L} über Null hinaufzutreiben.

¹⁾ Hütte, 21. Auflage. S. 50; 6.

4. Für den einzelnen ebenen Flügel wird

$$\begin{aligned} E : g^4 &= - \frac{G}{g} [r_x \cdot \cos \vartheta_o - r_y \cdot \sin \vartheta_o] \cdot \cos \vartheta_o, \\ &= - 2 \frac{G}{g} \cdot c^2 \cdot \cos \vartheta_o \cdot \cos (\alpha - \vartheta_o) \cdot a \cdot \varphi'(\alpha) \cdot [f(\alpha)]^2, \quad (33) \end{aligned}$$

und aus der Forderung, E müsse positiv sein, erhellt, daß der einzelne ebene Flügel nur dann stabil ist, wenn $\varphi'(\alpha)$ negativ ist; also der Druckpunkt mit abnehmendem Anstellwinkel vorrückt; eine Forderung, die in der Tat erfüllt ist. Damit diese Wirkung sich durchsetzt, darf jedoch ein gewisses Seitenverhältnis nicht überschritten werden; andererseits gewinnen $f_r(\alpha)$ und $\varphi_r(\alpha)$ Einfluß auf die ändern Koeffizienten der Stabilitätsbedingung, wenn das Seitenverhältnis (Breite zu Tiefe) klein wird.

Betrachtung über die Drehungs-Ableitungen.

27. Im Vorstehenden wurden zwei Ableitungen $f_r(\alpha)$ und $\varphi_r(\alpha)$ eingeführt, der Art, daß $f_r(\alpha) \frac{r}{u_o}$ und $\varphi_r(\alpha) \frac{r}{u_o}$ die Änderungen von $f(\alpha)$ bzw. $\varphi(\alpha)$ angeben, wenn der Flügel eine kleine Winkelgeschwindigkeit r um die Parallele zur z -Achse durch den Punkt x, y besitzt. Versuche, die die Abhängigkeit des Luftwiderstandes und der Druckpunktlage von r/u_o bestimmten, wären von Bedeutung, besonders wenn tiefe Flügel Verwendung finden. In Unkenntnis dieser Funktionen sind bis jetzt die Ableitungen immer vernachlässigt worden; so auch in unsrer Arbeit vom Jahre 1903. Eine derselben kann eliminiert werden, durch Wahl einer neuen Achsenlage in der Fläche, gegenüber der in der Mitte, in der Weise, daß für den neuen Drehpunkt x', y' die Ableitung $f_r(\alpha) = 0$ wird, also die Resultierende ihre Größe nicht ändert. Die neuen Koordinaten sind bestimmt aus der Gleichung der Schnittgeraden des Flügels mit der x - y -Ebene und aus

$$x \cdot f'(\alpha) - 2y \cdot f(\alpha) + f_r(\alpha) = x' \cdot f'(\alpha) - 2y' \cdot f(\alpha). \quad (34)$$

Bedeutet in Fig. 4 AB den Flügel, C seinen Mittelpunkt, dann wird die Winkelgeschwindigkeit r um C zur Folge haben, daß der Druck auf der Hälfte AC steigt, und auf der Hälfte BC fällt. Da aber, wie aus der Lage des Druckpunkts erhellt, der Druck auf AC größer als auf BC ist, wird der resultierende Druck steigen. Abnahme in gleichem Maße auf BC' wie Zunahme

auf AC' ist nur zu erwarten für einen Punkt C' in der Nähe des Druckpunkts.

Eine ähnliche qualitative Betrachtung können wir auch für $\varphi_r(\alpha)$ anstellen. Eine positive Winkelgeschwindigkeit um einen Punkt auf AB in der Nähe von B vergrößert den mittleren Anstellwinkel und hat somit eine Rückwanderung des Druckpunkts zur Folge. Umgekehrt für einen Punkt in der Nähe von A . Drehung um C liefert Zuwachs vorn, Abnahme hinten, so daß der Druckpunkt

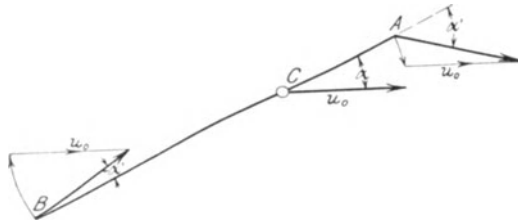


Fig. 4.

noch weiter vorrückt. Der Drehpunkt, für den $\varphi_r(\alpha)$ zu Null wird, liegt also zwischen C und B , soweit die Analogie mit bekannten Erscheinungen einen Schluß zuläßt, und fällt aller Wahrscheinlichkeit nach nicht mit C' zusammen. Auch hier sind Versuche, für die im folgenden zwei Wege angegeben werden, dringend vonnöten.

Versuche am rotierenden Arm.

28. An einem um eine vertikale Achse drehbaren Arm befestigt man mit der Breitenerstreckung vertikal den Flügel im Mittelpunkt C seiner Bezugsgeraden (Sehne für gewölbte Flächen). Dieser hat den Abstand l von der Drehachse, und der Flügel schließe, während seine Unterseite nach außen weist, mit der Tangente den Winkel α ein. Für den zugehörigen zweiten Versuch dreht man den Flügel um C im Drehsinn des Apparats um den Winkel $(180^\circ - 2\alpha^\circ)$. Der Unterschied der Werte von $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ mit $\frac{l}{2}$ multipliziert, ist $f_r(\alpha)$ bzw. $\varphi_r(\alpha)$. Es ist von Vorteil, soweit die Fehlerquellen der Messung gestatten, l so groß als möglich zu machen, damit die mittlere Tangente im Bereich von $\frac{r}{u_0} = -\frac{1}{l}$ bis $\frac{r}{u_0} = +\frac{1}{l}$, die die Versuche liefern, dem Wert der Ableitung für $\frac{r}{u_0} = 0$ möglichst nahe kommen.

Schwingungsmethode.

29. Nach Angabe des Blue Book for 1909—1910 sind Versuche im Kanal, in dem die Geschwindigkeitsverteilung eine hinlänglich gleichförmige ist, verlässlicher als die eben beschriebene Methode.

Zwecks Ermittlung der Drehungsableitungen bringt man die Fläche bzw. das Modell in starre Verbindung mit einem Pendel und beobachtet die Schwingungen. Der Eigenwiderstand des Pendels wird eliminiert, indem man demselben die Form einer Scheibe gibt, die teilweise hohl ist und deren Achse mit der Schwingungsachse

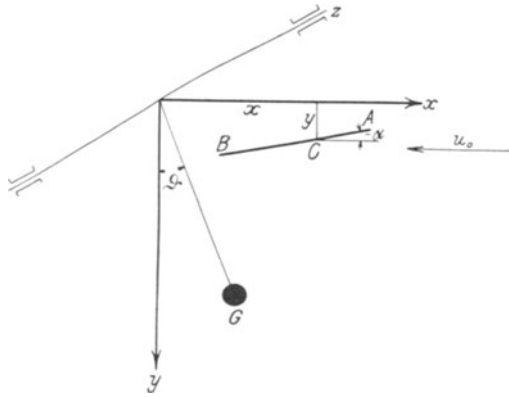


Fig. 5.

der Fläche zusammenfällt. Dann entsteht lediglich infolge des Tangentialwiderstandes ein Kräftepaar, das die Drehungen der Scheibe proportional dem Quadrat ihrer Winkelgeschwindigkeit zu dämpfen sucht; das jedoch infolge seiner geringen Größenordnung vernachlässigt werden darf.

Es möge AB die Fläche, O die Drehachse, G den gemeinsamen Schwerpunkt des ganzen schwingenden Systems bedeuten; ϑ den Winkel zwischen OG und der Vertikalen, α den Anstellwinkel der Fläche gegen die als horizontal angenommene Windrichtung, so daß $\vartheta - \alpha$ demnach unveränderlich ist. Ist N das Moment des Luftwiderstandes in bezug auf die Achse O , so haben wir nach (25) für die Gleichgewichtslage:

$$N_o = c \cdot u_o \cdot f(\alpha) \cdot [x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + a \cdot \varphi(\alpha)]$$

dies Moment wird kompensiert durch das des Gewichts:

$$N_o = G \cdot \overline{OG} \cdot \sin \vartheta_o.$$

Ihre Änderungen nach eingeleiteter Störung bestimmen den Charakter der Schwingung.

Ist ε die Auslenkung aus der Nulllage im Bogenmaß, θ das Trägheitsmoment des Systems für Achse O , so verläuft die Schwingung nach:

$$\frac{\theta}{g} \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -d(G \cdot \overline{OG} \cdot \sin \vartheta) + dN.$$

Mit $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$ wird:

$$d(G \cdot \overline{OG} \cdot \sin \vartheta) = \varepsilon \cdot G \cdot \overline{OG} \cdot \cos \vartheta_0$$

$$\text{und mit } \frac{d\varepsilon}{dt} = -r:$$

$$dN = \varepsilon \cdot \frac{dN}{d\alpha} - \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot N_r.$$

Danach:

$$\frac{\theta}{g} \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + N_r \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \left[G \cdot \overline{OG} \cdot \cos \vartheta_0 - \frac{dN}{d\alpha} \right] = 0; \quad (35)$$

der Dämpfungsfaktor ist also $g \cdot N_r / 2 \theta$, und wenn wir noch die Schwingungsdauer gleich $2\pi/\nu$ setzen, ergibt sich ν aus:

$$\nu^2 = \frac{g}{\theta} \left(G \cdot \overline{OG} \cdot \cos \vartheta_0 - \frac{dN}{d\alpha} \right) - \frac{N_r^2 \cdot g^2}{(2\theta)^2}. \quad (36)$$

Sollte der Bewegungsvorgang zunächst nicht periodisch sein, infolge außerordentlich starker Dämpfung, so gelingt es durch Vergrößerung des Hebelarms \overline{OG} , ihn dahin zu bringen.

Der Wert $\frac{dN}{d\alpha}$ wird durch unmittelbare Differentiation von N nach α gewonnen.

N_r wird nun bestimmt durch Beobachtung des Dekrements; ist es für zwei verschiedene Drehachsen bei gleichem Anstellwinkel α beobachtet, so ist nach Gleichung (31) $f_r(\alpha)$ und $\varphi_r(\alpha)$ zu ermitteln.

Man geht in dieser Richtung vorteilhaft noch weiter und errechnet nach Bestimmung der Werte von N_r für etliche Lagen der Drehachse die anderen Widerstandsableitungen, gemäß den im folgenden gegebenen Gleichungen. Das Verfahren ist von Vorzug für ganze Flugzeugmodelle, deren Widerstände durch Addition ihrer Elemente zu gewinnen, eine derbe Näherung bedeutet.

Koordinaten-Transformation.

30. Die Bestimmung von N_r für verschiedene Lagen x, y der Drehachse gestattet die Werte der anderen Ableitungen zu ermitteln.

Bezeichnet Index ' die Geschwindigkeiten und Ableitungen für die neue Lage x, y , so bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} u' &= u - y \cdot r & v' &= v + x \cdot r & r' &= r \\ X' &= X & Y' &= Y & N' &= N + y \cdot X - x \cdot Y. \end{aligned}$$

Die Transformation führt zu Ausdrücken:

1. für $(X, Y)_{o, u, v}$ der Art $X'_{u'} = X_u$,
2. für $(X, Y)_r$ der Art $X'_{r'} = X_r + y \cdot X_u - x \cdot X_v$,
3. für $N_{u, v}$ der Art $N'_{u'} = N_u + y \cdot X_u - x \cdot Y_u$,
4. für $N'_{r'}$ auf $N'_{r'}$ = $\left(\frac{d}{dr} + y \cdot \frac{d}{du} - x \cdot \frac{d}{dv} \right) \cdot (N + y \cdot X - x \cdot Y)$
 $= N_r - x \cdot (N_v + Y_r) + y \cdot (N_u + X_r)$
 $+ x^2 \cdot Y_v - x \cdot y \cdot (X_v + Y_u) + y^2 \cdot X_u. \quad (37)$

Da X_u, Y_u, N_u aus $2 X_o/u_o$ u.s.f. bekannt sind, liefern vier Gleichungen $N'_{r'}$ die Werte Y_v, X_v, N_r und $N_v + Y_r$. Zur Trennung der beiden Unbekannten N_v und Y_r ist eine weitere Gleichung vonnöten; gilt $\Delta = 0$, ist diese von Vorteil.

31. Eine Drehung der Achsen x und y in der Symmetrieebene um Winkel χ ist ein besonderer Fall der Transformation in Abschnitt 14 und hat natürlich auf N und r keinen Einfluß. Hin- gegen werden:

$$\begin{aligned} u &= u' \cdot \cos \chi - v' \cdot \sin \chi & v &= u' \cdot \sin \chi + v' \cdot \cos \chi \\ X' &= X \cdot \cos \chi + Y \cdot \sin \chi & Y' &= -X \cdot \sin \chi + Y \cdot \cos \chi \\ \frac{d}{du'} &= \cos \chi \cdot \frac{d}{du} + \sin \chi \cdot \frac{d}{dv} & \frac{d}{dv'} &= -\sin \chi \cdot \frac{d}{du} + \cos \chi \cdot \frac{d}{dv}. \quad (38) \end{aligned}$$

Somit:

$$X'_{u'} = \frac{d}{du'} \cdot X' = X_u \cdot \cos^2 \chi + (X_v + Y_u) \cdot \sin \chi \cdot \cos \chi + Y_v \cdot \sin^2 \chi.$$

Gewölbte Flügel.

32. Der Hauptunterschied zwischen ebenen und gewölbten Flügeln ist der, daß die Neigung α' der Luftwiderstandsresultierenden gegen die y -Achse bei ebenen die gleiche, bei gewölbten eine andere ist, als die Neigung α der Bezugsgeraden (Sehne) gegen die x -Achse. Für beliebige Querschnitte (Kreisabschnitt, Sichel, veränderliche Krümmung) sind Erfahrungsdaten nötig; ist der Flügel jedoch nach einem unveränderlichen Radius c gekrümmt, so läßt sich, da die Resultierenden immer durch den Krümmungsmittelpunkt gehen muß, eine Beziehung zwischen Lage und Richtung der Resultierenden R aufstellen.

Rückt der Druckpunkt um $de = a \cdot \varphi'(\alpha) \cdot d\alpha$ vor, so ändert sich die Richtung um $d\alpha' = -de/c$ oder

$$d\alpha' = d\alpha \cdot \frac{a}{c} \cdot [-\varphi'(\alpha)]. \quad (39)$$

Wesentlich ändert sich die Horizontal-Komponente X :

$$dX = R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha. \quad (40)$$

Es erhellt, daß Flügelwölbung in erster Linie durch Zusätze für X_v und X_r berücksichtigt werden muß. Die Änderung dieser Ausdrücke ist in hohem Maße abhängig vom Verhältnis a/c , also dem entsprechenden Zentriwinkel oder Wölbungspfeil, nicht so sehr von der wirklichen Tiefe des Flügels, so daß selbst für schmale Flügel mit großem Pfeil ihr Einfluß beträchtlich wird. In Abschnitt 69 wird näher darauf eingegangen.

Auch hier spielen wieder die Drehungs-Ableitungen mit, die natürlich Änderungen von α' bewirken; indeß diese noch nicht ermittelt sind, ist die Stabilitätstheorie ebener Flügel auf die gewölbten auszudehnen, wobei man freilich Abweichungen zwischen Rechnung und Erfahrung in Kauf zu nehmen hat.

Schmale Flügel unter kleinen Winkeln.

33. Da die Form unserer Gleichungen uns jederzeit gestattet, vom einfachen zum verwickelten Fall vorzugehen, wollen wir bei Betrachtung der Flügelkombinationen mit der einfachsten beginnen: Schmale Flügel unter kleinen Winkeln.

Dabei besagt „schmal“ lediglich, daß die Länge des Flugzeugs groß sein soll im Verhältnis zur Flügeltiefe. Für eine kleine Winkelgeschwindigkeit r sei die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Vorder- und Hinterkante eines Flügels klein gegenüber derjenigen zwischen den beiden Flügeln, so daß also die Drehungsableitungen außer Acht gelassen werden dürfen. Ferner sollen die Druckpunktlagenänderungen $a \cdot \varphi'(\alpha)$ in Rücksicht auf die geringe Größe von a vernachlässigt werden.

Wir legen den Drehpunkt C des Abschnitts 27 in den Druckpunkt für stetigen Flug, dessen Koordinaten ξ und η sind. Wir haben also nach jenen Erörterungen zu erwarten, daß $f_r(\alpha)$ sehr nahezu, $\varphi_r(\alpha)$ hingegen nur in erster Annäherung verschwindet.

Für $f(\alpha)$ hypostasieren wir $\kappa \cdot \sin \alpha$. κ ist hierin Funktion des Seitenverhältnisses. Für gewölbte Flächen auch des Wölbungs-

pfeils, wobei dann freilich auch der Ursprung verschoben erscheint, derart, daß $f(\alpha) = z \cdot \sin(\alpha + \alpha')$; abgesehen von den Richtungsänderungen der Resultierenden. Es wird auf die einschlägige Literatur verwiesen. (Lit.: 4, S. 45 ff. 5, S. 9 und 43. 7, I. Band, S. 159 und 189.)

Da α klein ist, kann ohne weiteres für

$$f(\alpha) = z \cdot \sin \alpha \qquad f(\alpha) = z \cdot \alpha$$

und für $f'(\alpha) = z \cdot \cos \alpha \qquad f'(\alpha) = z$
gesetzt werden.

Aus der Formel für den Schraubenschub

$$S = \Sigma c \cdot z \cdot u_o \cdot \sin^2 \alpha$$

geht jedoch hervor, daß selbst $\sin^2 \alpha$ nur gegen Größen höherer Ordnung vernachlässigt werden darf; in bedeutenderem Maße gilt dies von $\sin \alpha$. Mit $\varrho' = \xi \cdot \cos \alpha - \eta \cdot \sin \alpha$ schreiben sich die Formeln, wenn wir noch $\xi \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \eta \cdot \sin \alpha$ mit ϱ'' bezeichnen:

$$\left. \begin{array}{ll} X_o = u_o \cdot \Sigma c \cdot z \cdot \sin^2 \alpha & X_u = 2 \Sigma c \cdot z \cdot \sin^2 \alpha \\ X_v = \Sigma c \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha & X_r = \Sigma c \cdot z \cdot \varrho'' \cdot \sin \alpha \\ Y_o = u_o \cdot \Sigma c \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha & Y_u = 2 \Sigma c \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ Y_v = \Sigma c \cdot z \cdot \cos^2 \alpha & Y_r = \Sigma c \cdot z \cdot \varrho'' \cdot \cos \alpha \\ N_o = u_o \cdot \Sigma c \cdot z \cdot \varrho' \cdot \sin \alpha & N_u = 2 \Sigma c \cdot z \cdot \varrho' \cdot \sin \alpha \\ N_v = \Sigma c \cdot z \cdot \varrho' \cdot \cos \alpha & N_r = \Sigma c \cdot z \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \end{array} \right\} (41)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$S = u_o \cdot \Sigma c \cdot z \cdot \sin^2 \alpha = \gamma/g \cdot u_o^2 \cdot \Sigma F \cdot z \cdot \sin^2 \alpha$$

$$G = u_o \cdot \Sigma c \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \gamma/g \cdot u_o^2 \cdot \Sigma F \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (42)$$

$$S \cdot s = -u_o \cdot \Sigma c \cdot z \cdot \varrho \cdot \sin \alpha = \gamma/g \cdot u_o^2 \cdot \Sigma F \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \varrho$$

34. Durch eine einfache Substitution

$$c' = c \cdot \cos^2 \alpha \qquad \text{und} \qquad \mu = \text{tg } \alpha$$

lassen sich die Gleichungen auf die Form bringen:

$$\begin{array}{lll} X_o = u_o \Sigma c' \cdot z \cdot \mu^2 & X_u = 2 \Sigma c' \cdot z \cdot \mu^2 & X_v = \Sigma c' \cdot z \cdot \mu \\ & X_r = \Sigma c' \cdot z \cdot \mu (\xi - 2 \eta \cdot \mu) & \\ Y_o = u_o \Sigma c' \cdot z \cdot \mu & Y_u = 2 \Sigma c' \cdot z \cdot \mu & Y_v = \Sigma c' \cdot z \\ & Y_r = \Sigma c' \cdot z \cdot (\xi - \eta \cdot \mu) & \end{array}$$

$$N_o = u_o \Sigma c' \cdot z \cdot \mu (\xi - \eta \cdot \mu) \qquad N_u = 2 \Sigma c' \cdot z \cdot \mu (\xi - \eta \cdot \mu)$$

$$N_v = \Sigma c' \cdot z (\xi - \eta \cdot \mu) \qquad N_r = \Sigma c' \cdot z (\xi - \eta \cdot \mu) (\xi - 2 \eta \cdot \mu)$$

und

$$S = u_o \Sigma c' \cdot z \cdot \mu^2 \quad G = u_o \Sigma c' \cdot z \cdot \mu \quad S \cdot s = u_o \Sigma c' \cdot z \cdot \mu (\xi - \eta \cdot \mu)$$

Unabhängigkeit der Flügelwirkung von ihrer Höhenlage.

35. Da in den Ausdrücken $(x - y\mu)$ und $(x - 2y\mu)$ das an sich bei „langen“ Flugzeugen schon unbedeutende y noch mit der Tangente des Anstellwinkels reduziert erscheint, ist eine nur sehr geringe Beeinflussung der Stabilität durch vertikale Lagenänderungen der Flügel gegenüber dem Schwerpunkt zu erwarten.

Werden die Flügel senkrecht zu sich selbst verschoben, so ändert sich q überhaupt nicht, hingegen reduziert sich q' mit $y \cdot \sin \alpha$; eine Änderung, die für das Gleichgewicht keine, für die Stabilität eine geringe Rolle spielt. Richtung und Lage der Resultierenden bleiben dieselben; ebenso die Normalkomponente der Umfangsgeschwindigkeit bei einer Drehung um z , nur ihre tangential Komponente variiert, ist aber gegenüber der normalen von geringfügigem Einfluß, ja verschwindet für $y = -x \cdot \operatorname{tg} \alpha$; eine Beziehung, der sich die praktische Ausführung oft nähert.

Diese weitgehende Unabhängigkeit der stabilisierenden Wirkung der Flügel von ihrer Höhenlage (Ordinate y) erscheint im Vergleich mit dem Pendel und dem Luftballon merkwürdig. Freilich gilt der Schluß ja auch nur unter Vernachlässigung des Reibungs- und Stirnwiderstands. (Lit. 5, S. 43.) Der Aufhängepunkt des Pendels hält jederzeit Gewicht und Fliehkraft im Gleichgewicht und Bewegung resultiert lediglich aus dem Moment des Gewichts, das an dem horizontalen Abstand von Schwerpunkt und Aufhängepunkt als Hebelarm wirkend zu denken ist. Ebenso entsteht beim Luftballon oder Luftschiff nach Verlassen der Gleichgewichtslage ein Moment durch den Auftrieb, proportional dem horizontalen Abstand des Auftriebsmittelpunktes vom Schwerpunkt. Andererseits entsteht jedoch beim Fallschirm unter Vernachlässigung des Tangentialwiderstandes kein solches Moment. Luftwiderstand und Gewicht gehen in jeder beliebigen Lage immer durch einen Punkt, den Schwerpunkt. Somit liefern die beiden Kräfte nur eine Resultierende, die eine seitliche Translation zur Folge hat, aber kein unmittelbar rückdrehendes Moment. Wenden wir uns nun wieder dem Flugzeug zu.

Fig. 6 zeigt ein System mit zwei schmalen ebenen Flügeln. Die Resultierenden R_1 und R_2 liefern R , die gleich groß und entgegengesetzt gerichtet der Resultierenden aus Gewicht G und Schraubenschub S sein muß. Eine Drehung des Flugzeugs um

seinen Schwerpunkt wird nun zwar an Lage und Richtung von R_1 und R_2 relativ zum Flugzeug unter unsern vereinfachenden Voraussetzungen nichts ändern, so daß R immer noch durch M geht; aber wenn nicht R_1 und R_2 im gleichen Verhältnis wachsen oder abnehmen, wird die Richtung von R eine andere, und somit entsteht, ähnlich dem Kräfteplan des Pendels oder Luftschiffs, ein Moment.

Eine Verschiebung der Flügel senkrecht zu ihrer Ebene ist jedoch ersichtlich ohne Einfluß auf das Gleichgewicht, da wir von einer Verknüpfung der Strömungen um beide Flügel absehen, die natürlich bei einer gegenseitigen Annäherung eine innigere würde. Die Differenz der Tangentialgeschwindigkeit bei einer Drehung wird selbst bei Berücksichtigung der Oberflächenreibung und des Stirnwiderstandes ohne Bedeutung sein.

Die Berücksichtigung dieser Komponenten im Kräfteplan zeigt die Wirkung auf die Stabilität durch Heben und Senken der Flügel. Sie ist wohl imstande, dieselbe erheblich zu beeinflussen, wenn diese Lagenänderung bedeutend ist. Andererseits sind Erfolge mit Flugzeugen zu verzeichnen, bei denen die Flügel unterhalb des Schwerpunkts lagen. Zudem beschränkt sich die Betrachtung auf die Anwendung ebener Flügel.

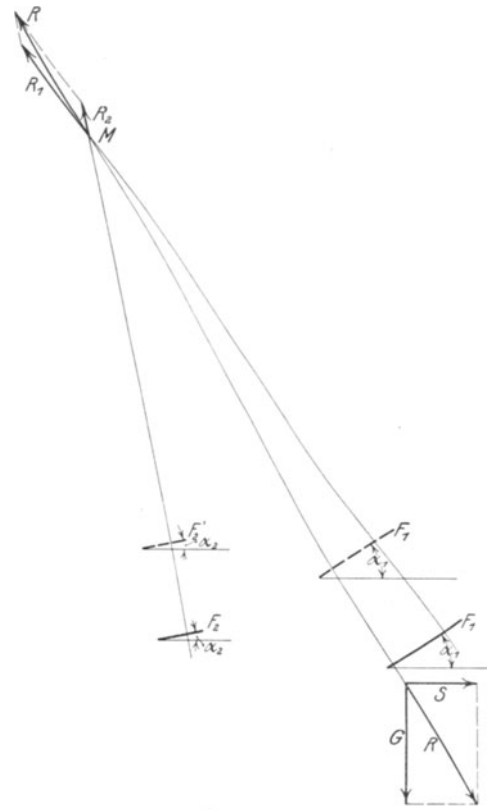


Fig. 6

Ein bedeutendes Ergebnis ist die Unterschiedslosigkeit von Eindecker und Zweidecker vor dem Kriterium der Stabilität. Dies ist wesentlich bestimmt nur durch den horizontalen, nicht den vertikalen Abstand der Flächen. Die Bezeichnung Eindecker und Zweidecker ist für unsere Zwecke unzureichend. Wir müssen unterscheiden zwischen dem „einfach“ tragenden Flugzeug, bei dem das Gewicht nur durch einen Flügel oder doch nur durch übereinander angeordnete Flügel getragen wird und die anderen Flächen im Gleichgewichtszustand nicht belastet sind, also lediglich der Steuerung dienen; und dem „zwei- oder mehrfach“ tragenden Flugzeug, bei dem zwei oder mehrere Flügel, die hintereinander liegen, tragen.

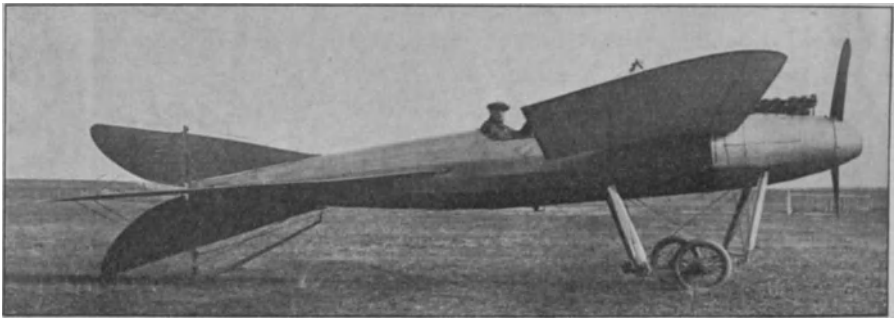


Fig. 7. Einfach tragendes System (Eindecker). Torpedo. System Court.

IV. Graphische Statik des Längsgleichgewichts.

Einfach tragendes System.

36. Bevor wir die Stabilität genauerer Betrachtung unterwerfen, ist es von Bedeutung, die Probleme des Längsgleichgewichts eingehend zu behandeln, besonders in Hinsicht der Höhensteuerung. Hierzu sind graphische Methoden von Vorteil.

Wir setzen voraus, daß das Flugzeug längsstabil ist, so daß es bald die Gleichgewichtsstellung einnimmt, die den veränderten Bedingungen entspricht.

Auch wenn keine Stabilität besteht und nur durch geschickte Manöver die neue Lage eingehalten werden kann, so kann ein Steuerungseingriff dennoch auf seinen Einfluß hin untersucht werden,

wenn auch der unmittelbare Erfolg dem gewünschten zuwider laufen mag.

Fall 1. Einfach tragendes System mit neutralem Schwanz oder Höhensteuer. — Das Beiwort „neutral“ möge einen Flügel bezeichnen, an dem keine Luftwiderstandskräfte senkrecht zur Richtung des relativen Windes angreifen.

In diesem einfachsten Fall haben drei Kräfte im Gleichgewicht zu stehen:

1. Gewicht G , vertikal durch den Schwerpunkt,
2. Resultierende des Luftwiderstands R senkrecht zum Flügel,
3. Schraubenschub S .

Bedingung des Gleichgewichts ist, daß alle Kräfte durch einen Punkt gehen und sich zu einem Dreieck zusammenschließen lassen.

Schub S gehe zunächst auch durch den Schwerpunkt; so muß R ebenfalls nach Richtung und Lage hindurchführen. Der Winkel $(\alpha + \sigma)$ zwischen Schub und Flügel ist unveränderlich; somit Winkel $[90 - (\alpha + \sigma)]$ zwischen R und S graphisch Peripheriewinkel über Sehne G (Fig. 8).

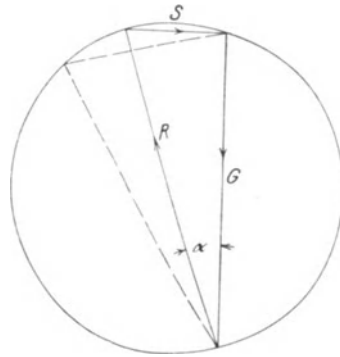


Fig. 8.

Ist Schub S horizontal, so läuft die so formulierte Gleichgewichtsbedingung darauf hinaus, daß $S = \operatorname{tg}(\alpha + \sigma) G$, da ja Stirn und Reibungswiderstand außer Acht gelassen wurden.

Die Lage des Flugzeugs gegen den Horizont ist somit ohne weiteres bestimmt durch die Größe des Schubs. Wächst S , so stellt sich der Flügel steiler und der Apparat steigt. Die Flugrichtung ist parallel dem (ebenen) Schwanz oder Steuer; wird dieses verstellt, so ändert sie sich entsprechend. Denn da wir die Druckpunktlagenänderung außer Acht lassen, liefert die Resultierende auch in der neuen Lage kein Moment; und der Schwanz darf folglich keine Kraft senkrecht zur Strömung erfahren, damit auch hier kein Moment entsteht.

Die Fahrtgeschwindigkeit ergibt sich aus der Gleichung für die Resultierende und deren Größe:

$$R = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot u_0^2 \cdot f(\alpha).$$

Für Gleichgewicht gilt somit:

Die Steigung des Flugzeugs gegen den Horizont hängt ausschließlich von der Größe des Schubs ab. Aufstieg erfordert natürlich Wachsen, Abstieg Abnehmen desselben.

Die Flugrichtung ist parallel dem (ebenen) Schwanz; eine Verstellung desselben hat eine entsprechende Lagenänderung des Flugzeugs zur Folge.

Die Größe der Geschwindigkeit hängt gemäß dem Widerstandsgesetz von beiden Größen σ und α ab.

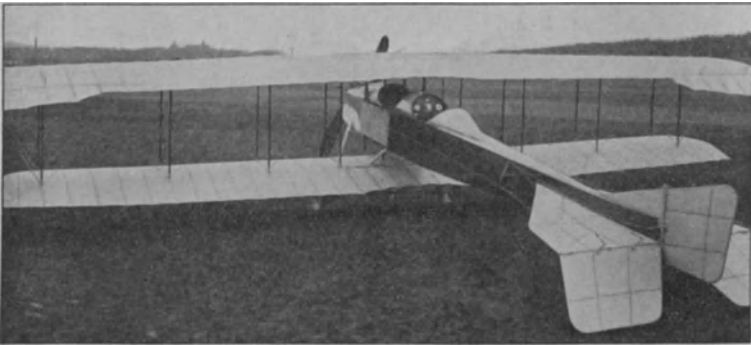


Fig. 9. Einfach tragendes System (Doppeldecker). Gothaer Waggonfabrik.

37. Geht der Schub nicht durch den Schwerpunkt, so schneiden sich S und R in einem Punkt, der relativ zum Flugzeug festliegt; aber nur in dem einen Fall, wo er vertikal über oder unter dem Schwerpunkt liegt, ist das Steuer wirklich neutral; sonst hat es einen Normaldruck aufzunehmen, der dem Moment der Kräfte am tragenden Flügel begegnet.

Wird der Motor gestoppt, so geht der Apparat in Gleitflug über, und R muß, damit das Steuer gemäß unserer Annahme neutral ist, durch den Schwerpunkt gehen. Läuft der Motor wieder an, so kann weiterhin das Steuer nicht mehr unbelastet bleiben, es sei denn, daß der Schub eben auch in Richtung auf den Schwerpunkt zu wirkt.

Darf man aus konstruktiven Gründen Schwanz- oder Kopfsteuer nur wenig beanspruchen, so muß die Schubrichtung so nah als möglich am Schwerpunkt vorbeigeführt werden. Anders ist das Flugzeug als zweifach tragendes zu betrachten, bei dem nur ausnahmsweise das Steuer belastet ist. Auch ist für den Gleitflug dann eine Entlastung des Steuer anzustreben.

Verlassen wir die Annahme, daß es sich um „schmale“ Flügel handle, bei denen die Druckpunktlagenänderung vernachlässigt werden darf, so entstehen bei Änderungen des Anstellwinkels Momente, die ebenfalls das Steuer belasten. Soll dieses neutral bleiben, so ist im Kreisdiagramm (Fig. 8) der Schub in der Weise zu verändern, daß er mit der ersten Lage den Winkel des An- bzw. Abstiegs einschließt. Für unveränderlichen Anstellwinkel wird also bei festgelegtem Steuer durch Änderung der Motorleistung die Höhenavigation bewirkt.

Bei ebenen Flügeln bewegt sich mit Abnahme des Anstellwinkels der Druckpunkt nach vorn. Zum Ausgleich hat dann das Steuer Auftrieb aufzunehmen, falls es hinten liegt. Umgekehrt für Zunahme des Anstellwinkels.

Doppelt tragendes System.

38. In dem allgemeinen Fall, wo das Steuer nicht neutral ist, also auch trägt, sind vier Kräfte ins Gleichgewicht zu bringen: Gewicht G , Schub S und die beiden Resultierenden R_1 und R_2 .

Zunächst möge S mit G sich im Schwerpunkt treffen. Der Schnittpunkt von R_1 und R_2 , die nach Richtung und Lage im Apparat fest sind, sei M . Dann muß die Resultierende R aus R_1 und R_2 auch durch den Schwerpunkt gehen und der Resultierenden aus S und G entgegengesetzt gerichtet und gleich sein. R kann auch gedacht werden als Druck auf eine ebene Fläche, senkrecht zur Verbindungslinie von M und Schwerpunkt C mit dem Druckpunkt auf CM . Dann läßt sich wiederum ein Kreisdiagramm zeichnen, für das ohne weiteres die obigen Überlegungen gelten. Für Flug ohne Motor muß CM vertikal sein.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Neigung des Flugzeuges zum Horizont ganz abhängt von der Größe des Schubes. Die Aussage läßt sich auch dahin festlegen, daß in Hinsicht des Gleichgewichtes ein Motorflugzeug sich ebenso verhält wie ein Gleiter,

wenn nur an Stelle des Gewichtes allein die Resultierende aus Schub und Gewicht in Betracht gezogen wird.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit dient die folgende Überlegung. G und S mögen nach Größe und Richtung R bestimmen; daraus ergeben sich R_1 und R_2 , die durch die Gleichung

$$R_1 \cdot \sin CMA = R_2 \cdot \sin CMB$$

verbunden sind und liefern mit:

$$R_1 = \frac{\gamma}{g} \cdot F_1 \cdot u_0^2 \cdot f(\alpha_1) \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{\gamma}{g} \cdot F_2 \cdot u_0^2 \cdot f(\alpha_2),$$

weil $f(\alpha)$ lineare Funktion von α ist, das Verhältnis $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, da $(\alpha_1 - \alpha_2)$ als Winkel AMB bekannt ist, ergibt sich damit α_1 und α_2 ; und u_0 kann aus einer der vorstehenden Gleichungen gewonnen werden.

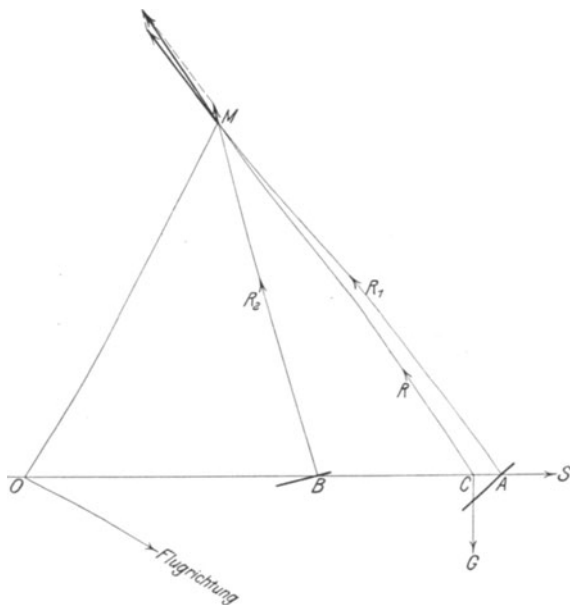


Fig. 10.

39. Kann einer der beiden Flügel zu Zwecken der Steuerung verstellt werden, so daß er gegen die Linie der Druckpunkte A und B , auf der auch C liegen möge, die Neigung ändert, so ist es vorteilhaft, auf die Konstruktion von Fig. 10 zurückzugreifen, um

sich den Einfluß der Steuerung zu veranschaulichen. Das Perpendikel auf die Flugrichtung von M aus treffe AB in O . Dann sind mit $\alpha_1 = AMO$ und $\alpha_2 = BMO$ für $f(\alpha) = \kappa \cdot \sin \alpha$

$$\kappa_1 \cdot F_1 \cdot \sin AMO \cdot \sin AMC = \kappa_2 \cdot F_2 \cdot \sin BMO \cdot \sin BMC. \quad (43)$$

Weiter bestehen die Beziehungen:

$$\sin AMO = \frac{AO}{MO} \cdot \sin OAM; \quad \sin AMC = \frac{AC}{CM} \cdot \sin CAM.$$

$$\sin BMO = \frac{BO}{MO} \cdot \sin OBM; \quad \sin BMC = \frac{BC}{CM} \cdot \sin CBM.$$

Somit:

$$\kappa_1 \cdot F_1 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{AC} \cdot \sin^2 OAM = \kappa_2 \cdot F_2 \cdot \overline{BO} \cdot \overline{BC} \cdot \sin^2 OBM. \quad (44)$$



Fig. 11. Zweifach tragendes System. Euler.

Nennen wir noch i_1, i_2 die Winkel zwischen \overline{AB} und F_1 bzw. F_2 , so ist:

$$\kappa_1 \cdot F_1 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{AC} \cdot \cos^2 i_1 = \kappa_2 \cdot F_2 \cdot \overline{BO} \cdot \overline{BC} \cdot \cos^2 i_2 \quad (45)$$

und
$$\overline{AO} : \overline{BO} = \frac{\kappa_2 \cdot F_2}{\kappa_1 \cdot F_1} \cdot (\overline{BC} : \overline{AC}) \cdot \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i_1}.$$

Dies Verhältnis bestimmt die Lage von O und damit den neuen Flugwinkel:

$$\overline{AO} : \overline{BO} = (\overline{AB} : \overline{BO}) + 1.$$

In erster Annäherung kann $\cos^2 i_2 : \cos^2 i_1$ der Einheit gleichgesetzt werden:

$$\overline{AB} : \overline{BO} = \frac{\kappa_2 \cdot F_2}{\kappa_1 \cdot F_1} \cdot (\overline{BC} : \overline{AC}) - 1. \quad (46)$$

40. Mit stärkerem Anstellen der Vorderfläche wächst i_1 und M wandert entlang MB nach M' (Fig. 12). Die Flugrichtung ändert sich um Winkel MOM' . Um den gleichen Betrag wächst Anstellwinkel $\alpha_2 = OM'B$, während α_1 als $OM'A$ erkannt wird. Die Resultierende R , die nach wie vor durch C zu gehen hat, ändert die Richtung von MC nach $M'C$. Um die Neigung des Flugzeuges gegen den Horizont zu bestimmen, ist noch nötig, von C aus das Kräftedreieck zu konstruieren. CD möge den unveränderlichen Schub darstellen; dann ist um D mit G im Kräftemaßstab ein Kreis zu schlagen, dessen Schnittpunkt mit CM bzw. CM' die dritte Ecke des Kräfteplanes liefert. AB liegt unter Winkel CDE bzw. CDE' gegen die Vertikale. AB hat sich also im Sinne der Uhr um Winkel EDE' im Raum gedreht und da die Flugrichtung sich im selben Sinne um MOM' gegen AB gedreht hat, ist der endgültige Erfolg des vorausgesetzten Manövers die Flugrichtung gegen den Horizont um Winkel $MOM' + EDE'$ herabzudrücken.

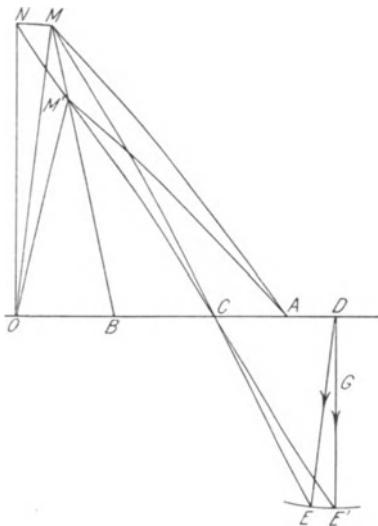


Fig. 12.

Folge. Fuhr das Flugzeug anfangs horizontal, so ist OM parallel DE und die Dreiecke COM , CON sind ähnlich CDE bzw. CDE' , wenn N als Schnittpunkt des Kreises mit Radius OM um Mittelpunkt O und der Geraden CM' bestimmt wurde. Die Fahrtrichtung schließt dann Winkel $NO M'$ mit dem Horizont ein.

41. Wird der hintere Flügel eines doppelt tragenden Systems um Winkel MBM' aufgedreht, so ist die Änderung der relativen Flugrichtung MOM' (Fig. 13). Die Anstellwinkel ändern sich von OMA , OMB zu $OM'A$ bzw. $OM'B$. $OM'A$ ist ersichtlich kleiner als OMA ; α_1 hat also abgenommen. Aber auch α_2 ist trotz des entgegengesetzten Steuerungseingriffs kleiner geworden.

Steileres Anstellen einer vorgelagerten Fläche hat Abstieg, geringeres Aufstieg zur Folge.

Steileres Anstellen einer vorgelagerten Fläche hat Abstieg, geringeres Aufstieg zur Folge.

Vom geometrischen Gesichtspunkt ist von Interesse, daß, wenn Winkel OMB gleich $OM'B$ wäre, die Punkte M, M', O, B auf einem Kreis lägen und die Peripheriewinkel $MM'B$ und MOB auch gleich groß sein müßten. Indessen unterscheidet sich in allen praktischen Fällen der sehr kleine Winkel $MM'B = \alpha_1 - \alpha_2$ sehr von der Neigung MOB der Geraden AB gegen die Normale zur relativen Flugrichtung.

Die Richtung von R ändert sich relativ zum Apparat um MCM' und AB wird somit im Sinn der Uhr um EDE' gegen die Vertikale gedreht. Die relative Flugrichtung hatte sich im entgegengesetzten Sinn gegen AB geändert um MOM' , so daß schließlich die absolute Flugrichtung im Sinn der Uhr um $EDE' - MOM'$ geändert erscheint. Da MOM' größer als EDE' ist, hat sich die Flugrichtung gehoben.

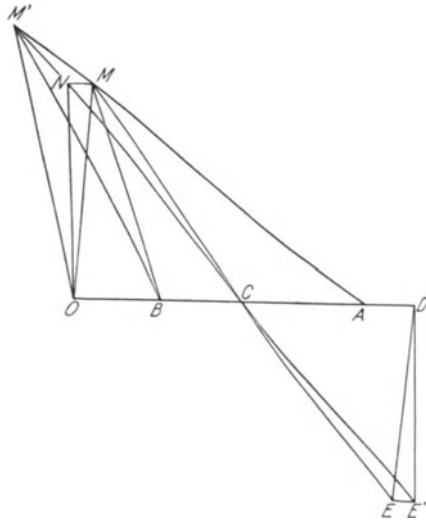


Fig. 13.

Für den besondern Fall eines eingangs horizontalen Flugs erscheint der Anstiegswinkel nunmehr als NOM' , wobei N wieder auf CM' mit Radius OM um O bestimmt wird.

Steileres Anstellen eines hintengelagerten Flügels im doppelt tragenden System hat Anstieg, geringeres Abstieg zur Folge.

42. **Nachtrag.** — Vorstehende graphische Verfahren sind vermutlich für alle praktischen Fälle genau genug. Läßt man jedoch die Veränderlichkeit des Bruches $\cos^2 i_2 : \cos^2 i_1$ nicht außer Acht, so kann durch diese Berücksichtigung der Lagenänderung von O auf AB die Genauigkeit gesteigert werden.

Mit i_1 nimmt $AB : BO$ zu und O rückt an A heran; $O'M'$ schneidet OM in einem Punkt über AB . Das Perpendikel auf die nun relative Flugrichtung wird $M'O'$ gegenüber MO und die

werden (Fig. 16). Der neue hypothetische Schwerpunkt C'' als Schnitt von MC' mit AB liegt näher an B , und da sich $BO : AO$ wie $AC : BC$ verhält, rückt O noch von B weg nach O' . Dies drückt die Flugrichtung um OMO' gegenüber dem Apparat herab, und da sich dieser um EDE' gegen den Horizont auf-

gerichtet hat, sinkt die Bahn um $OMO' - EDE'$ oder steigt um $EDE' - OMO'$, je nachdem der eine von beiden Einflüssen überwiegt. Hierüber kann man sich durch Differentiation der

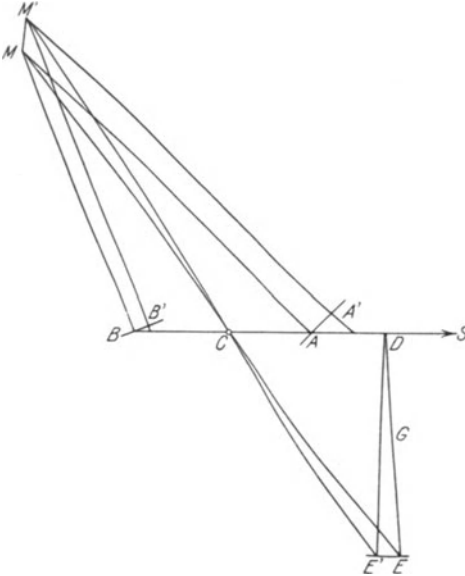


Fig. 15.

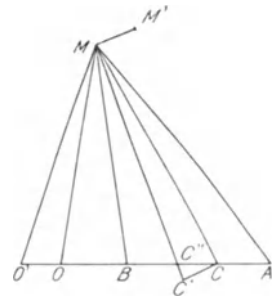


Fig. 16.

Gleichung (45) Rechenschaft geben für den Fall, daß CC' klein ist:

$$\frac{\overline{OO'}}{\overline{AO} \cdot \overline{BO}} = \frac{\overline{CC''}}{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}.$$

Danach ist nach anfangs horizontalem Flug das Flugzeug im Anstieg, wenn CC'' größer als OO' ist und umgekehrt. Es ist hier jedoch kaum der Platz, noch mehr auf Einzelheiten einzugehen.

45. Brillouins metazentrische Kurven. — (Lit. 8.) Eine vollkommenerere Methode zur Lösung der gestellten Aufgabe hat Prof. Marcel Brillouin entwickelt. Solange die Lagenänderung der Luftkräfte nicht in Rechnung gezogen wird, bedeutet Punkt M das Metazentrum des Flugzeugs, da durch ihn als Schnittpunkt der beiden Flächennormalen die Resultierende R immer

gehen muß. Bestimmt man jedoch M unter Berücksichtigung der Druckpunktlage für verschiedene Anstellwinkel, so hüllen die Geraden CM eine Enveloppe ein, die man als metazentrische Kurve bezeichnet. Es muß wohl beachtet werden, daß diese Kurve nicht der Ort von M ist; die Richtung von R hängt von dem Flächeninhalt der Flügel ab und ist unabhängig von der Tangentenrichtung an die Kurve der Lage des Metazentrums.

Brillouin hat Kurven für verschiedene Flügelanordnungen entworfen unter Benutzung der Formeln Rayleighs für Druckpunktlage und Größe der Windkraft; neuerdings hat Wieselsberger (Lit. 14) unter Benutzung zuverlässiger Daten metazentrische Kurven gezeichnet und Betrachtungen in bezug auf Beurteilung der statischen Stabilität nach ihrer Form und Lage unterworfen.

Die metazentrischen Kurven sind sternförmig; mit acht Spitzen, die den besonderen Stellungen einer der beiden Flächen senkrecht

zu oder in der Windrichtung entsprechen. Der Schnittpunkt der Normalen der Flügel in deren geometrischem Mittelpunkt ist Symmetriezentrum der Kurve.

Ist die metazentrische Kurve bekannt und geht die Schubrichtung durch den Schwerpunkt, so wird die Lage des Flugzeugs gegen die Vertikale mittels einer Tangente an die Kurve durch C im anschließenden Kräfte Dreieck ermittelt.

46. Führt die Schubrichtung nicht durch den Schwerpunkt, so muß R

durch den Schnittpunkt Z von S und der Vertikalen durch C gehen.

Ziehe ich in Fig. 17 eine Parallele zu S , so schneidet sie die Richtung von R in L und die Ähnlichkeit des Dreiecks CLZ mit dem Kräfteplan besagt:

$$S : G = \overline{CL} : \overline{CZ}.$$

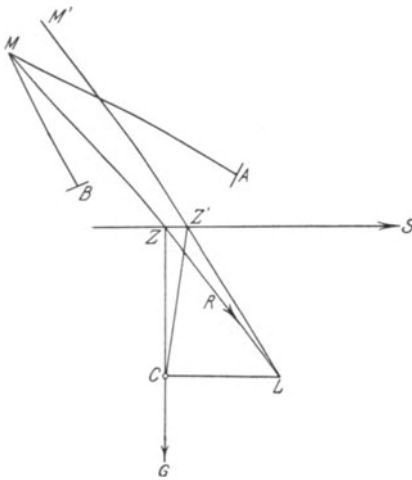


Fig. 17.

Läuft die Schubrichtung nahezu horizontal, so haben kleine Drehungen des Flugzeugs auf die Länge von CZ nur verschwindenden Einfluß. Somit dreht sich jetzt R um L , wie früher um C . Verschiebt sich M nach M' unter Einfluß eines Steuerungsgriffs, so wirkt die resultierende Windkraft nun in Richtung LM' und schneidet die Schubrichtung in Z' , so daß also ZCZ' die Lagenänderung des Apparats gegen den Horizont bedeutet.

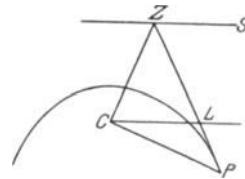


Fig. 18.

Im allgemeinen Fall, wo die Schubrichtung beliebig gegen den Horizont verläuft, geschieht die Drehung von ZL als Abwälzung von einem Kegelschnitt mit numerischer Exzentrizität $S : G$ (Fig. 18). C ist Brennpunkt und die Gerade S Leitlinie. Der Punkt P wird erhalten als Schnitt der Senkrechten zu CZ in C und der Tangente; um P dreht sich R bei einer kleinen Drehung einer der beiden Flächen.

Da S und G bekannt sind, genügt es, durch M eine Tangente an den Kegelschnitt zu ziehen, die die Schubrichtung in Z schneidet; so gibt CZ die Richtung der vertikalen.

Die relative Flugrichtung wird wie vorher ermittelt; es tritt lediglich P an Stelle von C in der Gleichung für O .

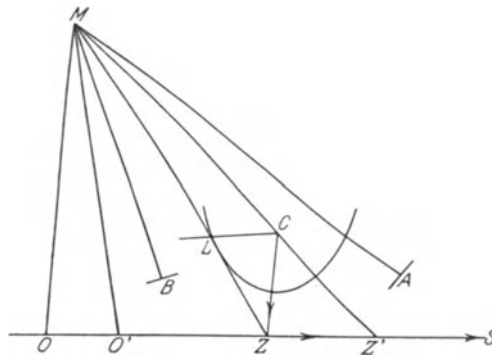


Fig. 19.

Da das Verhältnis $S : W$ kleiner als eins ist (gewöhnlich $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{7}$), ist der Kegelschnitt eine Ellipse und es können von M aus zwei Tangenten gezogen werden. Für die zweite Tangente ergibt jedoch die Konstruktion des Kräfteplans, daß das Flugzeug auf dem Rücken liegt.

47. Wird der Motor gestoppt, so muß MC mit der Vertikalen zusammenfallen. Geht der Schub durch den Schwerpunkt, so kann der Einfluß dieser Änderung gegenüber unsern letzten Voraussetzungen ($CL > 0$, Fig. 17) nach Fig. 19 beurteilt werden.

Zunächst muß die Resultierende der Windkräfte statt durch L wieder durch C gehen und somit dreht sich der Apparat im Raum im Urzeigersinn um Winkel ZCZ' , da die Richtung der Vertikalen sich relativ von CZ nach CZ' ändert; doch da sich R von MZ nach MZ' bewegt, rückt O nach O' , woraus eine Drehung der absoluten Flugrichtung im Sinne der Uhr um $ZCZ' - OMO'$ resultiert.

Verschwindet der Schub nicht ganz, sondern wird nur reduziert, so wird MZ Tangente an eine neue Ellipse mit entsprechend kleinerer Exzentrizität. Dabei ändern sich die vorbesagten Gleichgewichtsbedingungen in gleicher Weise, aber in geringerem Maße. Mit wachsendem Schub liegen die Verhältnisse natürlich umgekehrt und der Apparat wird steigen.

Gelänge es, ZGZ' und OMO' auf gleiche Größe zu bringen, so wäre die Größe des Schubs ohne Einfluß auf die Fahrtrichtung, so daß die Maschinen abgestellt werden könnten, ohne die bisherige Bahn zu verlassen. So vorteilhaft eine derartige Maßnahme wäre, ist sie schwerlich je durchführbar, worauf schon Brillouin hingewiesen hat.

Denn MC ist groß im Verhältnis zu den Abmessungen des Apparats, woraus folgt, daß ZCZ' immer viel größer als ZMZ' sein wird, falls nicht der Abstand CZ' des Schwerpunkts von der Schubrichtung so gesteigert würde, wie es aus anderen Gründen keineswegs zulässig ist. Freilich liegt noch der Weg offen, OMO' groß gegenüber ZMZ' zu machen; er läuft aber darauf hinaus (selbst wenn ihn die analytische Geometrie gangbar erscheinen ließe), daß eine geringe Schwerpunktsverschiebung eine bedeutende Änderung der Bahnrichtung zur Folge hätte; eine Maßnahme, die schweren Bedenken begegnet.

Dem Leser wird es leicht fallen, für den Fall, daß die Schubrichtung unter dem Schwerpunkt liegt, eine Figur in Analogie von 17 und 18 zu zeichnen. In diesem Fall hat Verschwinden oder auch nur Nachlassen des Schubs Drehungen der Linien CZ und MO in entgegengesetztem Sinn zur Folge, so daß die Flugrichtung gegen den Horizont um $ZCZ' + OMO'$ herabgedrückt wird. Gleichzeitig haben aber die Anstellwinkel um OMO' zugenommen, so daß der Abstieg wegen der geringeren Geschwindigkeit weniger gefährlich erscheint. Umgekehrt bewirkt eine Zunahme der Schubkraft natürlich Steigen.

V. Längsstabilität des einfach tragenden Systems.

Einfachster Fall.

Einfach tragendes Flugzeug in horizontalem Flug bei horizontaler Schubrichtung durch den Schwerpunkt.

48. Um wenigstens eingangs umständlichen Formeln aus dem Wege zu gehen, betrachten wir zunächst ein Flugzeug der Art:

Zwei Flügel (deren jeder durch übereinander gelagerte Doppel-flügel ersetzt werden darf) F_1 und F_2 , von denen der vordere F_1 , der das ganze Gewicht des Flugzeugs aufzunehmen hat, unter dem Winkel α angestellt ist, indes F_2 , das nur als Stabilisierungs- oder Steuerfläche dient, in der Flugrichtung liegt. Abstand der beiden Druckpunkte l .

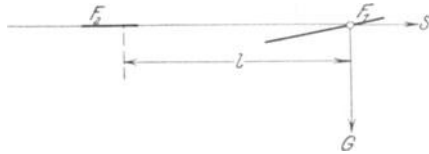


Fig. 20.

Die Schubrichtung geht durch den Schwerpunkt (weiterhin immer definiert mit „Zentraler Schub“) und in der Flugrichtung, die horizontal sein möge. Die Re-

aktion der Windkräfte muß folglich durch den Schwerpunkt gerichtet sein. Dieser liegt also entweder im Druckpunkt von F_1 selbst oder auf der Normalen zu F_1 in dessen Druckpunkt. Im ersten Fall haben wir für F_1 ϱ' und ϱ'' genau gleich Null; ebenso im zweiten ϱ' , während ϱ'' eine sehr kleine endliche Größe ist. Für F_2 ist $\varrho' = \varrho'' = -l$.

Das Gleichgewicht bestimmt:

$$S = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa_1 \cdot F_1 \cdot u_o^2 \cdot \sin^2 \alpha \quad G = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa_1 \cdot F_1 \cdot u_o^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Vernachlässigen wir eine mögliche Verschiedenheit des Seitenverhältnisses, setzen also $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, so werden die neuen Widerstandsableitungen:

$$\left. \begin{aligned} X_u &= 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot u_o \cdot \sin^2 \alpha; \\ X_v &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot u_o \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad X_r = 0 \\ Y_u &= 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot u_o \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \\ Y_v &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot (F_1 \cdot \cos^2 \alpha + F_2); \quad Y_r = -\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_2 \cdot u_o \cdot l \\ N_u &= 0; \quad N_v = -\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot F_2 \cdot l; \quad N_r = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_2 \cdot u_o \cdot l^2 \end{aligned} \right\} (47)$$

Danach erhalten wir für:

$$\left. \begin{aligned} A &= K \cdot G^2 \\ B &= \gamma \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot G \cdot [K \cdot F_1 (1 + \sin^2 \alpha) + F_2 (K + G \cdot l^2)] \\ C &= \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot u_0^2 [(2K + G \cdot l^2) \sin^2 \alpha + G \cdot l^2] \\ &\quad + G^2 \cdot \gamma \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot F_2 \cdot l \\ D &= \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot u_0^3 \cdot G \cdot 2l \cdot \sin^2 \alpha \\ E &= \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot u_0^2 \cdot g \cdot G \cdot 2l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} (48)$$

Erinnern wir uns jetzt der Gleichgewichtsbedingung:¹⁾

$$\gamma \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot u_0^2 = G \cdot g : (\sin \alpha \cdot \cos \alpha),$$

so können wir mit Einführung des Trägheitsradius k :

$$K = G \cdot k^2 \quad (49)$$

und des Flächenverhältnisses:

$$\tau = F_2 : F_1 \quad (50)$$

durch Kürzen die fünf Koeffizienten auf die einfache Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} A &= u_0^2 \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{k^2}{\tau} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ B &= u_0 \cdot \left[l^2 + k^2 \cdot \left(1 + \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\tau} \right) \right] \\ C &= g \cdot \left[\operatorname{tg} \alpha \cdot (2k^2 + 2l^2) + \frac{l^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right] + u_0^2 \cdot l \\ D &= u_0 \cdot g \cdot 2l \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ E &= g^2 \cdot 2l \end{aligned} \right\} (51)$$

Die Forderung: D und E wie A positiv, führt auf positives l ; danach muß die Hilfsfläche hinter der Tragfläche liegen, nicht davor; als Schwanz, nicht als Kopfflosse.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß für die kleinen Werte α , die ausschließlich in Frage kommen, in der Stabilitätsbedingung:

$$BCD - EB^2 - AD^2 > 0$$

AD^2 von höherer Ordnung klein ist, gegenüber den anderen Produkten; denn AD^2 enthält $\operatorname{tg} \alpha$ bzw. $\sin \alpha$ in der dritten Potenz,

¹⁾ Diese Umformung (50), (51), (53) wurde vom Übersetzer vorgenommen, da die Erfüllung der Stabilitätsbedingungen, ohne die des Gleichgewichts, keinen Sinn hat, zumal letztere schon in Abschnitt 17 eingeführt wurden.

während BCD nur durch D im wesentlichen mit der ersten Potenz von $\operatorname{tg} \alpha$ reduziert wird.

Es erscheint daher statthaft, die Stabilitätsbedingung dahin zu vereinfachen, daß

$$CD > EB \quad (52)$$

sein soll.

Mit der folgerichtigen weiteren Vernachlässigung von $\sin^2 \alpha$ bzw. $\sim 2 \sin^2 \alpha$ gegenüber der Einheit, wird:

$$B = u_0 \cdot \left[l^2 + k^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) \right] \quad (53)$$

$$C = g \cdot \frac{l^2}{\operatorname{tg} \alpha} + u_0^2 \cdot l.$$

Und die Stabilitätsbedingung:

$$u_0 \cdot g \cdot 2l \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(g \cdot \frac{l^2}{\operatorname{tg} \alpha} + u_0^2 \cdot l \right) > g^2 \cdot 2l \cdot u_0 \cdot \left[l^2 + k^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) \right]$$

gewinnt die Form:

$$g \cdot l^2 + u_0^2 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha > g \cdot l^2 + g \cdot k^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau} \right)$$

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{F_1 + F_2}{F_2} \cdot \frac{k^2}{l \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (54)$$

Dieselbe Forderung stellt Lanchester nach Anwendung grundsätzlich verschiedener Rechenverfahren. Da Gebrauch von den Gleichgewichtsbedingungen gemacht wurde, haben wir sie als modifiziert zu betrachten.

Eine andere Modifikation gewinnen wir mit Einführung des Gewichts

$$l > \gamma \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot \frac{k^2}{G} \cdot \left(1 + \frac{F_1}{F_2} \right). \quad (54a)$$

Diese Form ist wahrscheinlich der ersten überlegen, da sie außer den Koeffizienten κ nur Größen enthält, die von den Abmessungen und dem Gewicht des Flugzeugs abhängen.

Ändert man Schub, Geschwindigkeit und Anstellwinkel unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen, so wird dadurch die Stabilität in keiner Weise betroffen.

49.¹⁾

Man könnte versucht sein, mit Hilfe der Koeffizienten (51) in die genaue Stabilitätsbedingung (19) einzugehen.²⁾ Die damit er-

¹⁾ Vom Übersetzer.

²⁾ Bryan tut es in diesem Abschnitt.

strebte Genauigkeit entspricht jedoch keineswegs der erreichbaren. Denn die Vernachlässigung von $\sin^2 \alpha$ gegenüber 1 bringt einen Fehler von $3 \div 2\%$ mit sich, da $\sin \alpha$ etwa $\frac{1}{6} \div \frac{1}{7}$; mit mindestens gleicher Unsicherheit sind jedoch die Koeffizienten κ nach den besten derzeitigen Messungen behaftet. Die Abweichungen des atmosphärischen Zustandes (γ) vom normalen sind noch viel beträchtlicher und die Bestimmung des Trägheitsmoments erfolgt bestenfalls mit einem so geringfügigen Fehler, wie er unseren Vernachlässigungen entspricht.

Trennung der langen und kurzen Schwingungen.

50. Aus den Koeffizientengleichungen (51) ist ohne weiteres ersichtlich, daß für große Werte λ , also kurze Schwingungen, die beiden letzten Glieder der biquadratischen Gleichung:

$$A \cdot \lambda^4 + B \cdot \lambda^3 + C \cdot \lambda^2 + D \cdot \lambda + E = 0$$

für eine Näherungslösung außer Acht bleiben dürfen. Dann ergibt sich λ aus der quadratischen Gleichung:

$$A \cdot \lambda^2 + B \cdot \lambda + C = 0. \quad (55)$$

Andererseits können für kleine Werte λ die Glieder $A \lambda^4$, $B \lambda^3$ und $D \cdot \lambda$ in rohester Näherung gegenüber $C \cdot \lambda^2$ und E vernachlässigt werden, so daß

$$\lambda = \pm i \cdot \sqrt{\frac{E}{C}}.$$

Genauer ist die Lösung, wenn wir nur $A \cdot \lambda^4$ vernachlässigen und in $B \lambda^3$ die erste Näherung substituieren:

$$C \cdot \lambda^2 + \left[D - B \cdot \frac{E}{C} \right] \cdot \lambda + E = 0. \quad (56)$$

Damit wird der reelle Teil dieses Wurzelpaars:

$$\frac{EB - C \cdot D}{2 C^2}. \quad (57)$$

Kleinen Werten λ entsprechen also langsame oder lange Schwingungen, deren Dauer durch:

$$2 \pi \sqrt{\frac{C}{E}} \quad (58)$$

gegeben ist, und deren Dämpfungsfaktor:

$$\frac{CD - EB}{2 C^2}$$

positiv ist, sobald der Stabilitätsbedingung (52) genügt wird.

Um die Art der Bewegungen zu beurteilen, müssen wir zu den Bewegungsgleichungen zurückkehren.¹⁾

$$\begin{aligned} & \left(2 F_1 \cdot \sin^2 \alpha + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right) \cdot u + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot v - \frac{G \cdot g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot \lambda} \cdot r = 0 \\ & 2 F_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot u + \left(F_1 \cdot \cos^2 \alpha + F_2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right) v + \left(-F_2 \cdot l + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \right) \cdot r = 0 \\ & 0 \cdot u + (-F_2 \cdot l) \cdot v + \left(F_2 \cdot l^2 + \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right) \cdot r = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Kurze Schwingungen.

51. Vernachlässigen wir die Glieder mit $\sin \alpha$, so gestalten sich die Gleichungen (59) wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{g} \cdot u - r = 0 \\ & \left(F_1 + F_2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right) v + \left(-F_2 \cdot l + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \right) \cdot r = 0 \\ & -F_2 \cdot l \cdot v + \left(F_2 \cdot l^2 + \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right) \cdot r = 0. \end{aligned} \right\} (60)$$

Durch Elimination der Veränderlichen v und r gewinnen wir

$$\begin{aligned} & k^2 \cdot \frac{G^2 \cdot \lambda^2}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} [k^2 (F_1 + F_2) + l^2 \cdot F_2] \\ & + F_1 \cdot F_2 \cdot l^2 + F_2 \cdot l \cdot \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist identisch mit $A \cdot \lambda^2 + B \cdot \lambda + C = 0$; daraus ist ersichtlich, daß wir mit den eben gemachten Vernachlässigungen auf die kurzen Schwingungen geführt werden.

Das Verhältnis $v : r$ wird durch eine der beiden letzten Gleichungen gegeben:

$$\frac{v}{r} = l + \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot F_2 \cdot l}$$

¹⁾ Es dient zur hervorragenden Veranschaulichung des Einflusses der einzelnen Faktoren, an dieser Stelle abermals die Gleichgewichtsbedingungen einzuführen, da sich die Gleichungen dann außerordentlich vereinfachen. Der Übersetzer fühlte sich jedoch nicht berechtigt, eine so weitgehende Änderung der Vorlage vorzunehmen.

oder, noch besser vielleicht:

$$\frac{v - l \cdot r}{r} = \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot \alpha \cdot u_0 \cdot F_2 \cdot l}, \quad (61)$$

$v - l \cdot r$ ist ersichtlich die Geschwindigkeit des Schwanzes normal zur Flugrichtung. Die Gleichung gilt für die Momente; denn sie ist identisch mit:

$$\frac{G \cdot k^2}{g} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F_2 \cdot u_0 \cdot (v - l \cdot r) \cdot l, \quad (62)$$

u im Verhältnis zu r ist bestimmt aus:

$$\lambda^2 \cdot u/g - r = 0. \quad (63)$$

Die Vereinfachung, die zu dieser Form geführt hat, beruht auf der Annahme, daß der Einfluß des Luftwiderstands (Rücktriebs) für die Bewegungsänderungen in der Flugrichtung vernachlässigt wurde:

$$G \cdot \frac{du}{dt} = G \cdot \sin \mathcal{J}, \text{ worin } \frac{d\mathcal{J}}{dt} = r. \quad (64)$$

Da jedoch u nicht mitbestimmend wirkte auf die quadratische Gleichung für λ , erhellt, daß die kurzen Schwingungen unabhängig vom Stoßen lediglich in Wogen und Stampfen in Erscheinung treten.



Fig. 21. Längsstabilisierung durch Kopfflosse.
Reißner.

Weiterhin beobachten wir, daß λ nur in der Form λ/u_0 erscheint, also λ/u_0 nicht von der Geschwindigkeit u_0 abhängt.¹⁾ Die Schwingungszeiten sind danach proportional u_0 . Nehmen wir statt der Zeit den Weg als Unabhängige, so ist ersichtlich die Flugbahn

im Raum unabhängig von der normalen Geschwindigkeit, so daß, wenn auch diese geändert wird, das Flugzeug doch noch die gleiche Zahl Schwingungen ausführt und diese Schwingungen dasselbe Dekrement aufweisen, nach gleichen Wegen.

¹⁾ Soweit nicht G schon implizit u_0 enthält. (Der Übersetzer.)

Stabilität fordert, so sahen wir, daß alle Koeffizienten $A \dots E$ positiv seien und damit

$$k^2 \cdot (F_1 + F_2) + l^2 F_2 > 0, \tag{65}$$

$$F_1 F_2 \cdot l^2 + F_2 \cdot l \cdot \frac{G}{\gamma \cdot x} > 0. \tag{66}$$

Der erste Ausdruck ist ohne weiteres positiv, der zweite nur dann, wenn l positiv oder, falls negativ, der Zahl nach größer als $G : [\gamma \cdot x \cdot F_1]$ ist.

Im ersten Fall ist die Hilfsfläche hinter der Tragfläche. Für ein doppelt tragendes System ist die entsprechende Bedingung, daß die vordere Fläche einen größeren Anstellwinkel hat als die hintere, worauf wir noch zurückkommen werden.

Die zweite Möglichkeit ist von Interesse bei Flugzeugen mit Kopfflosse (Wright). Wird also eine Stabilisierungsfläche hinter oder weit genug vor der Tragfläche angeordnet, so gelingt es, die Stabilität bei kurzen Schwingungen zu wahren.

Dabei sind die Bewegungen entweder Schwingungen oder bei sehr starker Dämpfung aperiodisch, je nachdem die Wurzeln für λ/u_0 komplex oder reell sind oder anders $B^2 - 4 AC$ negativ

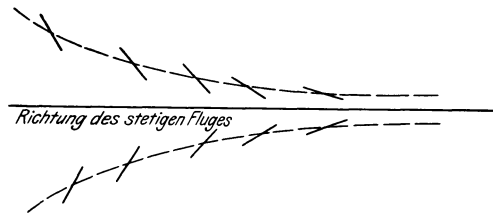


Fig. 22.

oder positiv ist; eine Bestimmung, die gestaltet werden kann in der Art:

$$[k^2 \cdot (F_1 + F_2) + l^2 \cdot F_2]^2 + 4 k^4 \cdot F_1 \cdot F_2 - 4 k^2 \cdot F_2 \cdot l \cdot \frac{G}{\gamma \cdot x} < \text{oder} > 0. \tag{67}$$

Woraus folgt, daß für negative Werte l ohne weiteres und für positive Werte l , die unterhalb einer bestimmten Grenze liegen, die Bewegung aperiodisch verläuft.

Nehmen wir den Fall, daß λ reell und negativ und l positiv ist, so zeigt Gleichung (61), daß $v - lr$ und r entgegengesetztes Vorzeichen haben, somit die Winkelgeschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung verläuft, wie die Bewegung des Schwanzes. Die Bewegung des Schwanzes ist dargestellt in Fig. 22, nach Auslenkungen einmal unter, dann über die Flugrichtung. Andere Fälle können entsprechend erörtert werden.

Lange Schwingungen.

52. Die zweite Lösung der Gleichung vierten Grades fanden wir als:

$$\lambda = -\frac{CD - EB}{2C^2} \pm i\sqrt{\frac{E}{C}}. \quad (68)$$

Der reelle Teil (Dämpfung) ist von zweiter Ordnung in α , der imaginäre von erster.

Um eine Anschauung vom Charakter der Schwingungen zu gewinnen, wollen wir den reellen Teil vernachlässigen; also annehmen, daß es sich um eine einfache harmonische Schwingung handelt.

Mit F_1' für $F_1 \cdot \cos^2 \alpha$ und $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ werden die Gleichungen (59):

$$\begin{aligned} \left(2F_1' \cdot \mu^2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}\right) \cdot u + F_1' \cdot \mu \cdot v - \frac{G \cdot g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot r &= 0. \\ 2F_1' \cdot \mu \cdot u + \left(F_1' + F_2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}\right) \cdot v + \left(-F_2 \cdot l + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa}\right) \cdot r &= 0. \\ -F_2 \cdot l \cdot v + \left(F_2 \cdot l^2 + \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}\right) \cdot r &= 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Für kleine Werte μ besteht die einzige Möglichkeit, andere Charaktere für die langen als für die kurzen Schwingungen zu erhalten, darin, anzunehmen, daß u groß, also $u \cdot \mu$ vergleichbar mit v und r ist. Ja, darüber hinaus; wie vordem die Ausdrücke mit λ in der zweiten und dritten Bewegungsgleichung mit den anderen von gleicher Größenordnung waren, folgt nun für die langen Schwingungen, daß wir sie außer Acht lassen dürfen.

Daraus ergibt sich,

$$v - lr = 0. \quad (70)$$

Der Schwanz verläßt also die normale Flugbahn nicht. Oder allgemeiner zeigt:

$$v - lr = \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot F_2 \cdot u_0 \cdot l} \cdot r,$$

daß die Vertikalgeschwindigkeit in jedem Fall gering ist.

Wir können weiter F_1' und F_2 eliminieren, indem wir die erste Gleichung mit $-1/\mu$, die zweite mit 1, die dritte mit $1/l$ multiplizieren und addieren. Dann erhalten wir

$$-\frac{\lambda}{\mu} \cdot u + \lambda \cdot v + \left(\frac{g}{\lambda \mu} + u_0 + \frac{k^2 \cdot \lambda}{l}\right) \cdot r = 0. \quad (71)$$

Da F_1 und F_2 nicht vorkommen, spielen die Widerstände offenbar nicht herein und die Gleichung stellt die Momente in bezug auf das Metazentrum dar. Mit der Annahme, daß u groß und λ klein ist, gelangen wir wieder zu: $u \lambda^2 = g \cdot r$. (71a)

Andrerseits führen die zweite und dritte Gleichung unter Elimination von F_2 auf:

$$2 F_1' \cdot \mu \cdot u + F_1' \cdot v + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot r = 0, \quad (72)$$

oder mit $v = l \cdot r$:

$$2 F_1' \cdot \mu \cdot u + \left(F_1' \cdot l + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \right) \cdot r = 0. \quad (73)$$

Aus (73) und (71a):

$$\lambda^2 = - \frac{2 \mu \cdot g}{l + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot F_1'}}. \quad (74)$$

Zur selben Form gelangen wir mit der Näherung

$$\lambda^2 = - \frac{E}{C}$$

unter Vernachlässigung der Ausdrücke mit μ^2 .

53. Um die Flugbahn des Schwerpunkts aufzeichnen zu können, setzen wir die Koordinaten desselben zur Zeit t gleich ξ und η , wobei wie immer die x -Achse in der Richtung des stetigen Fluges liegt. Dann ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} + u_0 &= (u_0 + u) \cos \vartheta - v \cdot \sin \vartheta, \\ &= u_0 + u \text{ in erster Näherung,} \\ \frac{d\eta}{dt} &= (u_0 + u) \cdot \sin \vartheta - v \cdot \cos \vartheta, \\ &= u_0 \cdot \vartheta + v \text{ in erster Näherung,} \end{aligned} \quad (75)$$

und da ξ , η , ϑ mit $e^{\lambda t}$ variieren:

$$\lambda \cdot \xi = u \quad \text{oder} \quad \xi = \frac{u}{\lambda}$$

$$\lambda \cdot \eta = u_0 \cdot \vartheta + v = u_0 \cdot \frac{r}{\lambda} + v \quad \text{oder} \quad \eta = u_0 \cdot \frac{r}{\lambda^2} + \frac{v}{\lambda}$$

Mit den Näherungen $r = \lambda^2 \cdot u/g$, $v = l \cdot r$:

$$\eta = \frac{\xi}{g} \cdot (u_0 \cdot \lambda + l \cdot \lambda^2)$$

oder mit $\lambda' \cdot i = \lambda$, wobei λ' reell:

$$\eta = \frac{\xi}{g} \cdot (u_0 \cdot \lambda' \cdot i - l \lambda'^2). \quad (76)$$

Setzt man $\xi = H \cdot (\cos \lambda' \cdot t + i \cdot \sin \lambda' \cdot t) + u_0 \cdot t$, dann liefert die Trennung der reellen und imaginären Teile

$$\begin{aligned} \xi &= H \cdot \cos \lambda' \cdot t + u_0 \cdot t \\ \eta &= -\frac{H}{g} \cdot (u_0 \cdot \lambda' \cdot \sin \lambda' \cdot t + l \cdot \lambda'^2 \cdot \cos \lambda' \cdot t). \end{aligned} \quad (77)$$

Es sind zur Veranschaulichung der Flugbahn also lediglich zwei Kurven zu addieren mit der Abszisse $\xi = u_0 \cdot t + H \cdot \cos \lambda' \cdot t$. Die Ordinaten sind dann einmal:

$$\eta = -\frac{H \cdot u_0 \cdot \lambda'}{g} \cdot \sin \lambda' \cdot t, \quad (78)$$

das andere Mal:

$$\eta = -\frac{H \cdot l \cdot \lambda'^2}{g} \cdot \cos \lambda' \cdot t. \quad (79)$$

Die erste Kurve (Fig. 23 die obere) ist gekennzeichnet durch steilen „Berg“ und flaches „Tal“; die zweite durch steilen „Abstieg“ und flachen „Anstieg“.

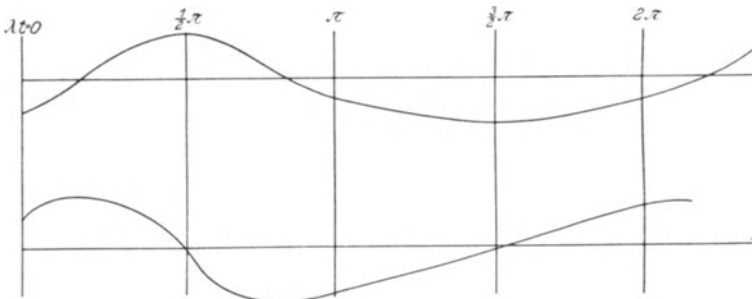


Fig. 23.

Die resultierende Bahn wird jedem bekannt sein, der einmal Modelle im Flug beobachtet hat.

Im Rückblick auf die Vereinfachung: $\lambda^2 \cdot u/g = r$ und die Beibehaltung von λ'^2 im Ausdruck für η , dürfen wir hervorheben, daß die Vernachlässigungen lediglich Glieder betreffen, die von höherer als zweiter Ordnung klein sind.

Der Weg des Druckzentrums für den Schwanz ist näherungsweise die obere Kurve der Fig. 19, da in der Bewegungsgleichung:

$$\lambda \cdot \eta = u_0 \cdot \vartheta + (v - l r)$$

$(v - l r)$ sehr klein ist.

Einfluss der Richtung des Schubs.

54. Fällt die Richtung des Schubs nicht in die des Fluges, so bleiben die primitiven Stabilitätsbedingungen natürlich davon unberührt; da jedoch die zweite Gleichgewichtsbedingung in

$$G + S \cdot \sin \sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa_1 \cdot F_1 \cdot u_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (80)$$

übergeht, ändern sich die angenäherten Stabilitätsbedingungen (54)

in:

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{1}{\mu} \cdot \left[\frac{F_1' + F_2}{F_2} \cdot \frac{k^2}{l} - \frac{S \cdot \sin \sigma}{G} \cdot l \right] \quad (81)$$

und (54 a) in:

$$l > \frac{\gamma \cdot \kappa \cdot F_1'}{G + S \cdot \sin \sigma} \cdot \left[\frac{F_1' + F_2}{F_2} \cdot k^2 - \frac{S \cdot \sin \sigma}{G} \cdot l^2 \right]. \quad (81a)$$

Nach (81a) nimmt die Stabilität ab, wenn der Propellerschub das Flugzeug zu heben sucht, und umgekehrt zu, wenn der Schub eine Komponente im Sinne der Schwere liefert.

Einfluß der Neigung der Flugbahn.

55. Daß die Stabilität und zwar Längs- wie Seitenstabilität in hohem Maße von der Flugbahnneigung gegen den Horizont abhängt, wurde zuerst von Mr. E. H. Harper nachgewiesen, dem ich die folgenden Untersuchungen zum besten Teil verdanke. Voraussetzung derselben ist wieder „zentraler“ Schub in der Flugrichtung, „neutraler“ Schwanz, Vernachlässigung der Druckpunktslagenänderung.

Von den fünf Koeffizienten $A \dots E$ ändern sich nur die beiden letzten:

$$\left. \begin{aligned} D : (g \cdot u_0)^3 &= \frac{2G}{g^3} \cdot \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin^2 \alpha \\ &+ \frac{G^2}{g^2 \cdot u_0^2} \cdot \gamma \cdot \kappa \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta \\ E : (g \cdot u_0)^4 &= \frac{2G}{g^3 \cdot u_0^2} \cdot \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ &\quad \cdot \cos \vartheta + \sin^2 \alpha \cdot \sin \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Mit der Gleichgewichtsbedingung:

$$G \cdot \cos \vartheta = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot u_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (83)$$

gelangen wir zu:

$$\begin{aligned}
 D : (g \cdot u_0)^3 &= \frac{G}{g^3} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot (2 \cdot \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \vartheta) \\
 &= \frac{G}{g^3} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha (2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \vartheta) \\
 E : (g \cdot u_0)^4 &= \frac{2G}{g^3 \cdot u_0^2} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \cos (\vartheta - \alpha). \quad (84)
 \end{aligned}$$

Der Koeffizient D verschwindet also, sobald das Flugzeug unter steilerem Winkel als:

$$\vartheta = \arccos (-2 \operatorname{tg} \alpha)$$

ansteigt. Dann wird $Q = -EB^2$, also der Flug ausgesprochen unstabil. Damit ist unter sonst gleichen Umständen eine Grenze für die Vertikalgeschwindigkeit gegeben.

E verschwindet erst, wenn $\vartheta - \alpha = 90^\circ$ wird; ein Fall, der der Beurteilung auf Grund der Theorie der kleinen Schwingungen nicht mehr unterliegt.

Auf der anderen Seite ist jedoch ein positiver Winkel ϑ der Stabilität förderlich, so daß ein Flugzeug, das bei horizontalem Flug sich längsstabil zeigt, im Gleitflug noch größere Sicherheit aufweisen wird. Umgekehrt folgt daraus freilich auch, daß Gleitflüge von Modellen nichts Endgültiges aussagen über die Stabilität danach konstruierter Motor-Flugzeuge (Drachen).

56. Es bedeutet einen sehr geringfügigen Fehler, wenn wir statt Gleichung (84) wieder (48e) setzen, also statt $\cos (\vartheta - \alpha) \sim \cos \alpha$. Dann betrifft der Einfluß der Flugrichtung ausschließlich D und die Stabilitätsbedingung $CD - EB > 0$ läuft hinaus auf:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{G}{g} + \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot F_1' \cdot l \right] \cdot F_2 \cdot u_0^2 \cdot l \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \vartheta) - [(F_1' + F_1) \cdot K \\
 + G \cdot l^2 \cdot F_2] > 0. \quad (85)
 \end{aligned}$$

Unter Heranziehung der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{(F_1' + F_2) \cdot k^2 - F_2 \cdot l^2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta / 2 \operatorname{tg} \alpha}{F_2 \cdot l (\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta)}. \quad (86)$$

In dieser Form gestattet die Bedingung einen Vergleich mit der von Lanchester, für verschiedene Neigung der Flugrichtung. Unsere Formel wird für den besonderen Fall des Gleitflugs ($\vartheta = \alpha$):

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{2}{3} \cdot \frac{(F_1' + F_2) \cdot k^2 - \frac{1}{2} F_2 l^2}{F_2 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha}. \quad (87)$$

Die kleinste zulässige Geschwindigkeitshöhe ($u_o^2 : 2g$) ist hierfür kleiner als $\frac{2}{3}$ derjenigen, die Lancheater fordert.

Andererseits, wenn die Maschine mit $\vartheta = -\alpha$ ansteigt, bekommen wir:

$$\frac{u_o^2}{g} > 2 \cdot \frac{(F_1' + F_2) \cdot k^2 + \frac{1}{2} F_2 \cdot l^2}{F_2 \cdot l \cdot \text{tg } \alpha}. \quad (88)$$

Die Geschwindigkeitshöhe muß doppelt so groß sein, als sie die Erhaltung der Stabilität bei horizontalem Flug erfordert.

Da A , B und C sich unabhängig von dem Betrage der Neigung ϑ zeigten und E in erster Näherung gleichfalls, erweisen sich auf Grund unserer vereinfachenden Voraussetzungen die kurzen Schwingungen und die Dauer der langen von ϑ unbeeinflußt, während die Dämpfung der letzteren mit ϑ stark variiert.

Einfluß des Stirnwiderstandes und einer Veränderlichkeit des Schubs.

57. Unter Stirnwiderstand wollen wir alle Widerstände verstehen, die im vorstehenden keine Berücksichtigung fanden; also Widerstand des Rumpfes, des Motors, des Führers, Reibungs- und Zähigkeitswiderstand der Flächen usf.

Die allgemein gebräuchliche Annahme, daß auch dieser Widerstand mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachse, führt dazu zu X_o , Y_o und N_o Beträge proportional u_o^2 und zu ihren Ableitungen X_u . . . N_r Beträge proportional u_o hinzuzufügen. Bezeichnen wir diese neuen Größen mit X_o' . . . N_r' , so muß danach abermals die Beziehung gelten:

$$X_u' = 2 X_o' / u_o, \quad Y_u' = 2 Y_o' / u_o, \quad N_u' = 2 N_o' / u_o.$$

Y_o' bedeutet also einen zusätzlichen Auftrieb, der nicht von dem der Flächen herrührt und ebenso N_o' ein Kräftepaar. Indessen werden für gewöhnlich diese beiden Beträge wohl vernachlässigt werden dürfen, wohingegen der zusätzliche Rücktrieb X_o' von Betracht und in Rechnung zu setzen ist. Der folgende Ansatz zeigt die Unerheblichkeit der Vernachlässigung.

Zunächst kann man leicht nachweisen (vgl. Lit. 7; I, § 164), daß für ein Flugzeug von gegebenem Gewicht der Schub am kleinsten wird, wenn der aerodynamische und der Stirnwiderstand gleichgroß sind, und daß die benötigte Leistung ein Minimum beträgt, wenn

der Stirnwiderstand gleich einem Drittel des aerodynamischen ist. Auf alle Fälle ist X_o' vergleichbar mit

$$X_o = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot u_o^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

und nicht groß im Verhältnis dazu. Nur wenn es sich um Flüge mit Geschwindigkeiten, die von der wirtschaftlichsten weit abweichen, handelt, müßte eine nochmalige Nachprüfung der Stabilitätsbedingungen stattfinden. Hiervon abgesehen, wird X_o' nicht groß im Verhältnis zu X_o und X_u' nicht groß im Verhältnis zu X_u sein. X_u wird klein von der Ordnung α^2 sein.

Von den übrigen Koeffizienten $(X'Y'N')_{uvr}$ wird keiner, soweit sie nicht überhaupt verschwinden, groß im Verhältnis zu X_u und damit ebenfalls von der Größenordnung α^2 sein.

Mit der Vernachlässigung der Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, gegenüber den von niedriger Ordnung kleinen, gelangen wir zu den neuen Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} A &= G^2 \cdot K, \\ B : (g \cdot u_o) &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot G \cdot [(F_1 + F_2) \cdot K + G \cdot l^2 \cdot F_2], \\ C : (g \cdot u_o)^2 &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot G \cdot F_2 \cdot l \cdot \left[\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot l + \frac{G}{g} \right], \text{ wie in (53)}, \\ D : (g \cdot u_o)^3 &= \frac{X_u'}{g^2 \cdot u_o} \cdot (\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot \cos^2 \alpha \cdot F_2 \cdot l^2 + G \cdot \gamma \cdot \kappa \cdot F_2 \cdot l) \\ &\quad + \frac{2G}{g^3} \cdot \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin^2 \alpha + \frac{G^2}{g^2 \cdot u_o^2} \cdot \gamma \cdot \kappa \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin \vartheta, \\ E : (g \cdot u_o)^4 &= \frac{2G}{u_o^2 \cdot g^3} \cdot \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_2 \cdot l \cdot \left[F_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \left(F_1 \cdot \sin^2 \alpha + \frac{X_u' \cdot g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_o} \right) \cdot \sin \vartheta \right]. \end{aligned} \right\} (89)$$

Die Bedeutung des Stirnwiderstandes läßt sich schon hiernach ermesen.

Mit dem Symbol ν für das Verhältnis $X_o' : X_o$ und den Gleichgewichtsbedingungen vereinfacht sich D zu:

$$D : (g \cdot u_o)^3 = \frac{G}{g^3} \cdot \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left[2(1 + \nu) \operatorname{tg} \alpha \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \vartheta + \frac{2\nu \cdot l \cdot g}{u_o^2} \cdot \cos \vartheta \right], \quad (90)$$

während E sich in erster Näherung dem Einfluß des Stirnwiderstandes entzieht.

Damit bleibt dieser in seiner Einwirkung auf D beschränkt, erzeugt hierdurch aber eine erhebliche Steigerung der Dämpfung für die langen Schwingungen. Dies Ergebnis, welches unangreifbar den eben vollzogenen Rechnungen entspringt, ist durchaus in Übereinstimmung mit Erwägungen, die man an die Betrachtung der langen und kurzen Schwingungen (Abschnitte 50—53) anschließen kann.

Der Stirnwiderstand ermöglicht somit steileren Anstieg. Sein stätigender Einfluß wird erst bei einem Winkel ϑ' zunichte, der aus

$$2\nu \cdot \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \vartheta' + 2\nu \cdot l \cdot g \cdot \cos \vartheta' / u_0^2 = 0$$

errechnet werden kann. Mit

$$\begin{aligned} \cos \vartheta' = 1 \text{ und } h = \frac{u_0^2}{2g} : \quad \operatorname{tg} \vartheta' &= -2\nu \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{l \cdot g}{u_0^2} \right) \\ &= -\nu (2 \operatorname{tg} \alpha + l/h). \end{aligned} \quad (91)$$

Steigt das Flugzeug unter diesem Winkel an, so besitzt es gleiche Stabilität, wie ohne Stirnwiderstand bei horizontalem Flug. Ihr Verlust tritt erst bei $\vartheta = \arctg(-2 \operatorname{tg} \alpha) + \vartheta'$ ein.

Im vorstehenden wurde Unveränderlichkeit des Schraubenschubs vorausgesetzt. Tatsächlich wächst derselbe jedoch mit abnehmender Marschgeschwindigkeit, gleichgültig, ob man unveränderliche Leistung oder unveränderliche Drehzahl des Motors annimmt. Diese Änderung kann durch Addition eines weiteren Betrags zu X_n berücksichtigt werden und zeigt somit gleiche Einwirkung auf die Stabilität. Sie wird am besten eingeführt durch eine Vergrößerung von ν .

Geht der Schub nicht durch den Schwerpunkt, so tritt danach in die dritte der Bewegungsgleichungen noch ein Glied mit der Variablen u . Dies kompliziert die Elimination sehr, sodaß der Fall ganz allgemein nur schwer diskutiert werden kann.

58. Mr. E. H. Harper hat mit Einführung der Kräfte X_o , X_o' und S die Stabilitätsbedingung (52) für verschiedene Flugbahnneigung auf die Form gebracht:

$$\begin{aligned} 2 X_o' + \frac{u_0^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{g \cdot l \cdot \cos \vartheta} \cdot \left[5 X_o' + X_o - S - \frac{2k^2}{l^2} \cdot \frac{F_1 \cdot \cos^2 \alpha + F_2}{F_2} \cdot X_o \right] \\ + \frac{u_0^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{g^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2 \vartheta} \cdot [3 X_o' + 3 X_o - S] > 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Das Gewicht ist eliminiert auf Grund der Gleichgewichtsbedingung:

$$G \cdot \sin \vartheta = X_o + X_o' - S. \quad (93)$$

Für den horizontalen Flug ohne Stirnwiderstand führt (92) auf (54) zurück.

Dabei wurde die Änderung des Schubs mit der Marschgeschwindigkeit nicht berücksichtigt; doch ist leicht ersichtlich, in welcher Weise dies geschehen könnte.

VI. Längsstabilität des zweifach tragenden Systems. Ausdehnung der Rechnung auf andere Systeme als die „schmalen Flügel unter kleinem Winkel“.

Satz von den gleichwertigen Systemen.

59. Bisher wurden nur Fälle in Erwägung gezogen, bei denen das ganze Gewicht des Flugzeugs durch den (bezw. die) vorderen Flügel getragen wurde, während der Schwanz vollkommen unbelastet blieb.

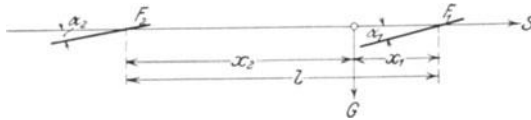


Fig. 24.

Wir wollen nun ermitteln, in welcher Weise die so erhaltenen Ergebnisse auf ein Paar hintereinander liegender Flügel ausgedehnt werden können. Vorausgesetzt wird, daß die Druckpunkte der Flächen so nahe der x -Achse liegen, daß der „Satz der Unabhängigkeit von der Höhe“ Anwendung finden darf; dieser Satz erlaubt auch die Flügel in verschiedener Höhe über dem Schwerpunkt anzubringen, so daß der Einfluß der Strömungsablenkung durch den vorderen Flügel sich mindert.

Es sind wieder F_1, F_2 die Flächen; α_1, α_2 die Anstellwinkel; x_1, x_2 die Druckpunktabzissen. Ebenso gelten:

$$F_1' = \cos^2 \alpha_1 \cdot F_1 \quad F_2' = \cos^2 \alpha_2 \cdot F_2 \quad \mu_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \mu_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Die Widerstandsableitungen sind:

$$X_o = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o^2 \cdot \Sigma F' \cdot \mu^2 \quad X_u = 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot \mu^2$$

$$X_v = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot \mu$$

$$\begin{aligned}
Y_o &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o^2 \cdot \Sigma F' \cdot \mu & Y_u &= 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot \mu \\
Y_v &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \\
N_o &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o^2 \cdot \Sigma F' \cdot \mu \cdot x & N_u &= 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot \mu \cdot x \\
N_v &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot x \\
X_r &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot \mu \cdot x \\
Y_r &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot x \\
N_r &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot \Sigma F' \cdot x^2
\end{aligned} \tag{94}$$

Es sind danach sechs Summen zu bilden:

$$\Sigma F', \quad \Sigma F' \cdot \mu, \quad \Sigma F' \cdot \mu^2, \quad \Sigma F' x, \quad \Sigma F' x^2, \quad \Sigma F' \mu x.$$

deren Beträge abhängen von den 6 Größen

$$F_1', \quad F_2', \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad x_1, \quad x_2.$$

Die 6 Summen sind jedoch nicht vollkommen unabhängig, da sie die Beziehung

$$\frac{\Delta_o}{2 \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right)^3} \begin{vmatrix} \Sigma F' \mu^2, & \Sigma F' \mu, & \Sigma F' \mu x \\ \Sigma F' \mu, & \Sigma F', & \Sigma F' x \\ \Sigma F' \mu x, & \Sigma F' x, & \Sigma F' x^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{95}$$

erfüllen müssen, die in Abschnitt 26 aufgestellt wurde.

Daraus folgt, daß, wenn in zwei Systemen 5 von diesen 6 Summen gleich sind, die übrigen Summen ebenfalls gleiche Werte haben und daß somit Gleichgewichts- und Stabilitäts-Bedingungen der beiden Systeme dieselben sind. Derartige Systeme bezeichnen wir als gleichwertig.

Ein doppelt tragendes System kann somit für die Stabilitätsuntersuchung einem Tragflügel mit neutralem Schwanz gleichgesetzt werden.

Für diesen ist $\mu_2 = 0$ und daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen der beiden Systeme:

Summe	doppelt tragendes System		(96)	
$\Sigma F'$	$F_1 \cdot \cos^2 \alpha_1$	$+ F_2 \cdot \cos^2 \alpha_2$		
$\Sigma F' \mu$	$F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1$	$+ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_2$		
$\Sigma F' \mu^2$	$F_1 \cdot \sin^2 \alpha_1$	$+ F_2 \cdot \sin^2 \alpha_2$		
$\Sigma F' x$	$F_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 \cdot x_1$	$+ F_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot x_2$		
$\Sigma F' x^2$	$F_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 \cdot x_1^2$	$+ F_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot x_2^2$		
$\Sigma F' \mu x$	$F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot x_1$	$+ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot x_2$		
Summe	gleichwertiges System		(96)	
$\Sigma F'$	$F_1 \cdot \cos^2 \alpha$	$+ F_2$		dasselbe mit zentralem Schub $F_1 \cdot \cos^2 \alpha + F_2$
$\Sigma F' \mu$	$F_1 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$			$F_1 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$
$\Sigma F' \mu^2$	$F_1 \cdot \sin^2 \alpha$			$F_1 \cdot \sin^2 \alpha$
$\Sigma F' x$	$F_1 \cdot \cos^2 \alpha \cdot x_1$	$+ F_2 \cdot x_2$		$F_2 \cdot l$
$\Sigma F' x^2$	$F_1 \cdot \cos^2 \alpha \cdot x_1^2$	$+ F_2 \cdot x_2^2$		$F_2 \cdot l^2$
$\Sigma F' \mu x$	$F_1 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot x_1$			0

In der letzten Spalte ist noch der einfachste Fall des gleichwertigen Systems mit neutralem Schwanz und zentralem Schub gegeben. Dann wird, wie ersichtlich, $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ und das Moment der Luftkräfte verschwindet.

Aus der Addition der ersten und dritten Zeile in den einzelnen Kolonnen ergibt sich, daß die gesamte Fläche der Flügel $F_1 + F_2$ in gleichwertigen Systemen dieselbe ist.

Der Satz von den gleichwertigen Systemen kann also dahin ausgesprochen werden:

Jedem doppelt tragenden System zweier schmaler Flügel entspricht ein einfach tragendes, von gleichem gesamten Flächeninhalt der Flügel, mit gleichen Gleichgewichts- und Stabilitätsbedingungen.

Man vereinfacht sich die Rechnungen daher außerordentlich, wenn man für das doppelt tragende System sein gleichwertiges, einfach tragendes in die Gleichungen einführt.

Beispiel:

$$\alpha_1 = 20^\circ; \quad \alpha_2 = 10^\circ; \quad F_1 = 20; \quad F_2 = 10; \quad x_1 - x_2 = l = 10.$$

Die Momentengleichung:

$$F_1 \cdot \alpha_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot \alpha_2 \cdot x_2 = 0$$

liefert

$$4 x_1 + x_2 = 0,$$

somit im ursprünglichen System

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -8,$$

und im gleichwertigen

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -l.$$

Mit $\sin \alpha = \alpha$; $\cos \alpha = 1$ gestalten sich die übrigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot \alpha^2 &= 20 \cdot 20^2 + 10 \cdot 10^2 = 9000, \\ F_1 \cdot \alpha &= 20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 500, \\ F_1 + F_2 &= 20 + 10 = 30, \\ -F_2 \cdot l &= 20 \cdot 2 - 10 \cdot 8 = -40, \\ F_2 \cdot l^2 &= 20 \cdot 2^2 + 10 \cdot 8^2 = 720. \end{aligned}$$

Durch Division der zweiten in die erste Gleichung erhalten wir $\alpha = 18^\circ$, der vierten in die fünfte $l = 18$. $F_1 \cdot \alpha : \alpha$ liefert $F_1 = 27,8$; $-F_2 \cdot l : -l = F_2 = 2,22$.

Danach hat also der Tragflügel im gleichwertigen System einen Flächeninhalt von 27,8, der Schwanz von 2,22 Flächeneinheiten; der Anstellwinkel des Tragflügels ist 18° und die Länge des Schwanzes 18 Längeneinheiten.

Unveränderliche gleichwertiger Systeme.

60. Die Ableitung der Stabilitätsbedingungen eines doppelt tragenden Systems von denen des einfach tragenden gestaltet sich sehr verwickelt (wie das bei Mr. Harpers und meinen früheren Lösungen der Fall war), wenn man nicht Ausdrücke wie:

$$-\Sigma F' x / \Sigma F'; \quad -\Sigma F' \mu \cdot x / \Sigma F' \mu; \quad \Sigma F' x^2 / \Sigma F'$$

als weitere Unveränderliche einführt. Die erste bedeutet den Schwerpunktsabstand der beiden Flächen vom wirklichen Schwerpunkt; die zweite den Abstand des resultierenden Druckpunkts vom wirklichen Schwerpunkt; die dritte das Quadrat des Trägheitsradius der beiden Flächen für den Ursprung.

Weiter sind die Unterdeterminanten in (95) Unveränderliche.

$$\begin{aligned} \text{Von } \Sigma F' &: F_1' F_2' (\mu_1 x_2 - \mu_2 \cdot x_1)^2, \\ \Sigma F' \mu &: F_1' F_2' (x_1 - x_2) \cdot (\mu_1 x_2 - \mu_2 \cdot x_1), \\ \Sigma F' \mu^2 &: F_1' F_2' (x_1 - x_2)^2, \\ \Sigma F' x &: -F_1' F_2' (\mu_1 - \mu_2) \cdot (\mu_1 x_2 - \mu_2 \cdot x_1), \\ \Sigma F' x^2 &: F_1' F_2' (\mu_1 - \mu_2)^2, \\ \Sigma F' \mu x &: -F_1' F_2' (\mu_1 - \mu_2) \cdot (x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{97}$$

Und damit wird ersichtlich, daß die Verhältnisse

$$(\mu_1 - \mu_2) : (x_1 - x_2) : (\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1)$$

ebenfalls unveränderlich sind. Es ist $x_1 - x_2 = l$; mit dem Schränkungswinkel $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ wird:

$$F_1' \cdot F_2' (\mu_1 - \mu_2)^2 = F_1 \cdot F_2 \cdot \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) = F_1 \cdot F_2 \cdot \sin^2 \delta.$$

δ ist ein kleiner Winkel, so daß wieder gesetzt werden darf:
 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$.

61. Um nun die oben ermittelten Stabilitätsbedingungen des einfach tragenden Systems dem zweifach tragenden gerecht zu machen, haben wir die „Unveränderlichen“ einzuführen.

Es war für horizontalen Flug und horizontalen zentralen Schub:

$$\frac{u_0^2}{g} > k^2 \frac{l}{\mu} \cdot \frac{F_1' + F_2'}{F_2 \cdot l^2}.$$

Im gleichwertigen System ist $(x_1 - x_2) : (\mu_1 - \mu_2) = \frac{l}{\delta} = \frac{l}{\mu}$ und $F_2 \cdot l^2 / (F_1' + F_2)$ entspricht $\Sigma F' x^2 / \Sigma F'$.

Die Stabilitätsbedingung kommt danach auf die Form:

$$\frac{u_0^2}{g} > k^2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{F_1' + F_2'}{F_1' \cdot x_1^2 + F_2' \cdot x_2^2} \quad (98)$$

oder die andere Gestalt:

$$\frac{G}{\gamma \cdot x} > k^2 \cdot F_1' \cdot F_2 \cdot l^2 \cdot \frac{F_1' + F_2}{F_2 \cdot l \cdot F_2 \cdot l^2}$$

wird mit den Unveränderlichen:

$$\begin{aligned} F_1' F_2 l^2 &= F_1' F_2' (x_1 - x_2)^2 \\ F_1' + F_2 &= F_1' + F_2' \\ F_2 l &= - \Sigma F' \cdot x \\ F_2 l^2 &= \Sigma F' \cdot x^2 \end{aligned}$$

aus:
$$\frac{G}{\gamma \cdot x} > k^2 \cdot \frac{(F' \mu)^2 (F_1' + F_2)}{F_1' \cdot \mu^2 \cdot F_2 \cdot l}$$

zu:
$$\frac{G}{\gamma \cdot x} > k^2 \cdot \frac{(\Sigma F' \cdot \mu)^2 \cdot \Sigma F'}{\Sigma F' \cdot \mu^2 \cdot (-\Sigma F' x)} \quad (99)$$

Es darf an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß die Unveränderliche δ/l für den vorderen Flügel einen größeren Anstellwinkel erheischt als für den hinteren. — Man kann leicht viel Zeit verlieren über der Bemühung, die Stabilitätsbedingung übersichtlich zu gestalten, wenn man sich nicht die eben dargelegten Gesetzmäßigkeiten der Unveränderlichen gegenwärtig hält.

Der Schub geht nicht durch den Schwerpunkt.

62. In diesem Fall darf die Resultierende der Luftkräfte nicht durch den Schwerpunkt gehen.

Bedeutet s den Abstand des Schubs vom Ursprung, so sind die neuen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot \Sigma F' \mu^2 &= G \cdot \sin \vartheta + S \cdot \cos \sigma \\ \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot \Sigma F' \mu &= G \cdot \cos \vartheta + S \cdot \sin \sigma \\ \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot \Sigma F' \cdot \mu \cdot x &= -S \cdot s. \end{aligned} \quad (100)$$

Gewöhnliche Werte ϑ und σ sind klein; somit ist s klein im Vergleich mit G und $s \cdot \sin \sigma$ kann gegenüber $G \cdot \cos \vartheta$ vernachlässigt werden; $\cos \sigma$ setzen wir der Einheit gleich. Diese Vereinfachungen laufen auf $\sigma = 0$ hinaus; im übrigen wird auf Abschnitt 54 verwiesen.

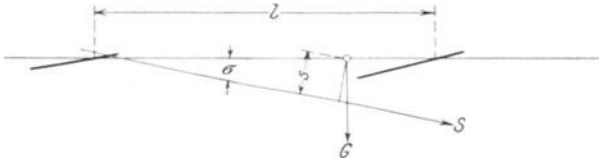


Fig. 25.

Die dritte Gleichung zeigt, daß die beiden Gleichungen $x_1 = 0$ und $\mu_2 = 0$ nicht mehr erfüllt werden können, sondern nur eine derselben.

Welche zu wählen sei, ist abzuwägen. Mit $\mu_2 = 0$ gestaltet sich die dritte Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot F_1 \cdot x_1 \cdot \mu_1 = -S \cdot s.$$

Mit $x_1 = 0$:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot F_2 \cdot x_2 \cdot \mu_2 = -S \cdot s. \quad (101)$$

Wiewohl die erste Annahme zu einfacheren Beziehungen führt, geben wir der zweiten den Vorzug. Denn Änderungen von S , ja sogar Erlöschen des Schubs nach Abstellen des Motors können leicht durch Steuerung von Seiten des Führers (Veränderung von μ_2) pariert werden, derart, daß wieder Gleichgewicht herrscht. Ände-

rungen des Schubs bei stets neutralem Schwanz hätten zwecks Erhaltung des Gleichgewichts dagegen Schwerpunktsverschiebungen innerhalb des Flugzeugs zur Folge; ein Verfahren, das nicht nur ungebräuchlich, sondern auch auf die Größe des Trägheitsmoments von Einfluß ist.

Mit $x_1 = 0$ und $x_2 = -l$ wird nun die Determinantengleichung für λ :

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot \Sigma(F' \cdot \mu^2) + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}, & \Sigma(F' \cdot \mu), & -F_2' \cdot \mu_2 \cdot l - \frac{G \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ 2 \cdot \Sigma(F' \cdot \mu), & \Sigma(F') + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}, & -F_2' \cdot l + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} + \frac{G \cdot \sin \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ -2 \cdot F_2' \cdot \mu_2 \cdot l, & -F_2' \cdot l, & +F_2' \cdot l^2 + \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \end{vmatrix} = 0. \quad (102)$$

So gelangen wir zu den Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} A: G^3 &= k^2 \\ B \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right): G^3 &= k^2 \cdot (F_1' + F_2') + F_2' \cdot l^2 + 2k^2 \cdot \Sigma(F' \cdot \mu^2) \\ C \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^2: G^3 &= F_1' \cdot F_2' \cdot l^2 + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_2' \cdot l \\ &+ 2k^2 \cdot F_1' \cdot F_2' \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2 + 2F_1' \cdot F_2' \cdot \mu_1^2 \cdot l^2 \\ D \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^3: G^3 &= \frac{2G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_1' \cdot F_2' \cdot (\mu_1 - \mu_2) \cdot \mu_1 \cdot l \\ &+ \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^2 \cdot g \cdot F_2' \cdot l \cdot (2\mu_2 \cdot \cos \vartheta + \sin \vartheta) \\ E \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^4: G^3 &= \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^2 \cdot 2g \cdot F_1' \cdot F_2' \cdot l \cdot (\mu_1 - \mu_2) \\ &\cdot (\cos \vartheta + \mu_1 \cdot \sin \vartheta) \end{aligned} \right\} (103)$$

Mit Vernachlässigung der von höherer Ordnung kleinen (unterstrichenen) Glieder (μ^2 gegenüber 1), und mit Hilfe der Gleichung (100):

$$G \cdot \cos \vartheta = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot \Sigma(F' \cdot \mu)$$

erhalten wir:

$$E \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^4: G^3 = \frac{2G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \cdot F_1' \cdot F_2' \cdot l (\mu_1 - \mu_2) \Sigma(F' \cdot \mu)$$

$$\begin{aligned}
 D \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \right)^3 : G^3 &= \frac{2G}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \cdot F_2' \cdot l [F_1' \cdot \mu_1^2 - F_1' \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 - \Sigma(F_1' \mu) \\
 &\quad \cdot (\mu_2 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta)] \\
 &= \frac{2G}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \cdot F_2' \cdot l [\Sigma(F_1' \cdot \mu) \cdot (\mu_1 - \mu_2 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta) \\
 &\quad - \Sigma(F_1') \cdot \mu_1 \cdot \mu_2].
 \end{aligned}$$

Ersichtlich ist $\Sigma(F' \cdot \mu)$ nicht nur Faktor von E , sondern bis auf das letzte Glied, das für $\mu_2 = 0$ ($s = 0$) verschwindet, auch von D .

Die Stabilitätsbedingung $CD - EB > 0$ lautet jetzt so:

$$\begin{aligned}
 \frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot F_2' \cdot l - k^2 \cdot F_1' \cdot \Sigma(F_1') + (F_1' \cdot F_2' \cdot l^2 + \frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot F_2' \cdot l) \\
 \left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2 \delta} - \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\delta} \cdot \frac{\Sigma(F_1')}{\Sigma(F_1' \cdot \mu)} \right) > 0. \quad (104)
 \end{aligned}$$

Man beachte wiederum das Vorkommen der Unveränderlichen.

63. Mr. Harper ist zu der gleichen Bedingung gekommen, indem er von $\mu_2 = 0$, also $x_1 \geq 0$ ausging:

$$\begin{aligned}
 \frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot \Sigma(F_1' \cdot \mu^2) - F_1' \cdot F_2' \cdot (x_1 - x_2) \cdot \Sigma(F_1') \cdot (k^2 + x_1 \cdot x_2) \\
 + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2 \mu_1} \cdot \Sigma(F_1' \cdot x) \cdot \left[\frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot \Sigma(F_1' \cdot x) - F_1' \cdot F_2' \cdot (x_1 - x_2)^2 \right] > 0. \quad (105)
 \end{aligned}$$

Außer diesen wurden viele Formeln ausgearbeitet, deren Bedeutung jedoch nicht hinreichte, ihre Veröffentlichung zu rechtfertigen.

Da S klein gegenüber G ist, war schon zu erwarten, daß die Änderung der Bedingung gegenüber zentralem Schub geringfügig wäre, zumal unter gewöhnlichen Verhältnissen s viel kleiner ist als l .

Aus unserem Ergebnis scheint hervorzugehen, daß, wenn der Schub unterhalb des Schwerpunkts angreift ($s > 0$), die Stabilität sinkt; dieser Schluß ist jedoch nicht unmittelbar statthaft, da jede Änderung von s auch Gleichgewichtsänderungen zur Folge hat, so daß noch andere Größen der Stabilitätsbedingung variieren.

Mit der Annahme, daß das Gleichgewicht durch Schwerpunktsverschiebung hergestellt wird, ergibt sich für den Fall horizontalen Fluges wachsende Stabilität mit Senken der Schraubenachse und umgekehrt, wenn

$$2k^2 > \left[\frac{\Sigma(F_1' \cdot x^2)}{\Sigma(F_1' \cdot x)} \right]^2 \quad \text{ist.} \quad (106)$$

Gilt jedoch (106) nicht, so verlieren die Verhältnisse an Übersichtlichkeit; die Stabilität nimmt mit Heben der Schraubenchse dann nur zu, falls sie schon beträchtlich ist, andernfalls wird sie geringer.

Öfter als die eben betrachtete wird bei Flugzeugen die Anordnung verwirklicht, daß die Druckpunkte auf gleicher Höhe mit dem Schub und über dem Schwerpunkt liegen. Rücktrieb (X_0) und Schub (S) stehen dann ohne weiteres im Gleichgewicht; dieses wird auch durch Geschwindigkeitsschwankungen in der Flugrichtung nicht gestört. Hingegen treten bei Änderungen des wirksamen Anstellwinkels, die durch Wogen und Stampfen hervorgerufen werden, Momente auf. Dann gilt also der „Satz von der Unabhängigkeit der Höhe“ nicht mehr und die Abweichungen müssen durch Korrekturen Berücksichtigung finden.

Breite Flügel.

Einfluß der Druckpunktverschiebung.

64. Wir wollen nun in Betracht ziehen, daß die Druckpunktlage nicht unveränderlich, sondern eine Funktion des Anstellwinkels α ist, so daß also mit Zunahme dieses Winkels um $d\alpha$ eine Verschiebung der Resultierenden des Luftwiderstands um $e' = a \cdot \varphi'(\alpha) \cdot d\alpha$ stattfindet. Für ebene Flügel ist e' negativ. Der Abstand e des Druckpunkts vom Flächenmittelpunkt (Fig. 4) ist nach Ioessel und Avanzini:

$$e = 0,6 \cdot a (1 - \sin \alpha). \quad (107)$$

Der Abstand des Auftriebs Y_0 vom Schwerpunkt ändert sich danach mit

$$e' \cdot \cos \alpha. \quad (108)$$

Die Drehungsableitungen $f_r(\alpha)$ und $\varphi_r(\alpha)$ bleiben noch außer Acht; ferner sei der Schub zentral mit $\sigma = 0$. Der Einfluß der Variabilität von e macht sich geltend in:

$$N_v = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot \Sigma F' \cdot (x - e' \cdot \mu) \quad (109)$$

und
$$N_r = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot \Sigma F' \cdot (x - e' \cdot \mu) \cdot x. \quad (110)$$

Im einfach tragenden System wird durch $x_1 = 0$ und $\mu_2 = 0$ auch $\Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x = 0$, das heißt, daß das Zusatzglied zu N_r verschwindet. Im doppelt tragenden System ist dies nicht notwendig

der Fall. Daher gibt es im allgemeinen für dieses kein gleichwertiges mit neutralem Schwanz, weder rechnerisch noch praktisch. Falls jedoch e' für Vorder- und Hinterflügel gleiche Größe hat, wird mit Erfüllung der Momentengleichung für das Gleichgewicht das Zusatzglied für N_r auch verschwinden:

$$\Sigma F'. e'. \mu . x = e' . \Sigma F' . \mu . x = 0. \quad (111)$$

Wir können die Rechnungen jedoch immer noch einfach gestalten durch Einführung eines gleichwertigen Systems, wenn wir nur in der zweiten Kolonne der letzten Zeile der Determinante $F' e' \mu$ für $\Sigma F' e' \mu$ setzen und in der letzten Kolonne der dritten Zeile ein Glied $-\Sigma F' e . \mu . x$ zufügen.

[Ich habe die Lösung auch ohne gleichwertiges System errechnet; der angegebene Weg ist jedoch einfacher und übersichtlicher.]

Die Gleichung für λ ist nun:

$$\left| \begin{array}{ccc} 2F_1' \cdot \mu^2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0}, & F_1' \mu, & -\frac{G \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot x \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ 2F_1' \cdot \mu, & F_1' + F_2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0}, & -F_2 \cdot l + \frac{G}{\gamma \cdot x} + \frac{G \cdot \sin \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot x \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ 0, & -F_2 l - F_1' \cdot e' \cdot \mu, & F_2 \cdot l^2 - \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x + \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \end{array} \right| = 0. \quad (112)$$

Unter Vernachlässigung von Ausdrücken der Größenordnung μ^2 in den ersten drei Koeffizienten und mit Hilfe der Stabilitätsbedingung

$$G \cdot \cos \vartheta = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0^2 \cdot F_1' \cdot \mu$$

kommen wir auf:

$$A: G^3 = k^2$$

$$B \left(\frac{G}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \right): G^3 = k^2 (F_1' + F_2) + F_2 \cdot l^2 - \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x \quad (113)$$

$$C \left(\frac{G}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \right)^2: G^3 = \frac{F_1' F_2 \cdot l^2 - F_1' \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x - F_2 (F_1' \cdot e' \cdot \mu \cdot l + \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x) + \frac{G}{\gamma \cdot x} (F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu)}{}$$

$$D \left(\frac{G}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \right)^3: G^3 = \frac{-2 F_1' F_2 \cdot \mu_2 (F_1' \cdot e' \cdot \mu \cdot l + \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x) + \frac{G}{\gamma \cdot x} (F_2 l + F_1' \cdot e' \cdot \mu) F_1' \cdot \mu (2\mu + \operatorname{tg} \vartheta)}{}$$

$$E \left(\frac{G}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \right)^4: G^3 = \frac{2G}{\gamma \cdot x} (F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu) F_1'^2 \cdot \mu^2 (1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \vartheta).$$

In $CD - EB > 0$ heben sich die einfach unterstrichenen Glieder der Koeffizienten gegeneinander auf, und in E können wir $\mu \cdot \text{tg } \vartheta$ gegenüber der Einheit vernachlässigen.

Für horizontalen Flug gelangen wir dann zu der Forderung

$$-k^2 F_1' (F_1' + F_2) + \frac{G}{\gamma \cdot x} (F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu) - 2 F_2 (F_1' \cdot e' \cdot \mu \cdot l + \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x) - \frac{\gamma \cdot x}{G} \cdot \frac{[F_1' \cdot F_2 (l^2 - e' \cdot \mu \cdot l) - (F_1' + F_2) \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x]}{F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu} \cdot F_2 (F_1' \cdot e' \cdot \mu \cdot l + \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x) > 0. \quad (114)$$

65. Für zweifache tragende Systeme kann die Ungleichung (114) leicht in korrekte Form gebracht werden mit Zuziehung der Unveränderlichen.

$F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu$ ist einfach $\Sigma F' (e' \mu - x)$; zum Zweck der Umgestaltung von $F' \cdot e' \cdot \mu \cdot l + \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x$ beachten wir, daß der stark unterstrichene Ausdruck in D sich herleiten läßt aus der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 F_1' \cdot \mu^2, & F_1' \cdot \mu, & 0, \\ 2 F_1' \cdot \mu, & F_1' + F_2, & -F_2 \cdot l, \\ 0, & -F_1' \cdot e' \cdot \mu, & -\Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x, \end{vmatrix}$$

die nun übergeht in:

$$\begin{vmatrix} 2 \Sigma F' \cdot \mu^2, & \Sigma F' \cdot \mu, & \Sigma F' \cdot \mu \cdot x, \\ 2 \Sigma F' \cdot \mu, & \Sigma F', & \Sigma F' \cdot x, \\ 0, & -\Sigma F' \cdot e' \cdot \mu, & -\Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x. \end{vmatrix}$$

Wäre das Glied der ersten Kolonne, letzte Zeile $-2 \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu^2$ anstatt Null, so würde die Determinante verschwinden; so aber ist:

$$-F_1' \cdot F_2' \cdot \mu^2 \cdot (F_1' \cdot e' \cdot \mu \cdot l + \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x) = \begin{vmatrix} 2 \Sigma F' \cdot \mu^2, & \Sigma F' \cdot \mu, & \Sigma F' \cdot \mu \cdot x, \\ 2 \Sigma F' \cdot \mu, & \Sigma F', & \Sigma F' \cdot x, \\ 2 \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu^2, & 0, & 0. \end{vmatrix}$$

und damit $= 2 \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu^2 \cdot \Sigma F' \cdot \mu \cdot \Sigma F' \cdot x$ für $\Sigma F' \cdot \mu \cdot x = 0$, oder allgemein:

$$\begin{aligned} &= 2 \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu^2 \cdot F_1' \cdot F_2' \cdot (\mu_1 - \mu_2) \cdot (x_2 - x_1), \\ &= -2 \Sigma F' \cdot e' \cdot \mu^2 \cdot F_1' \cdot F_2' \cdot \delta \cdot l. \end{aligned} \quad (115)$$

Es ist die Mühe nicht wert, alle Rechnungen hier wiederzugeben, die wir in früheren Untersuchungen ausgeführt haben, da in allen Fällen von Betracht weitgehende Vereinfachungen sich er-

geben. Für ein System mit 2 Flügeln wird $e' \cdot \mu$ klein gegenüber l sein, und e' braucht nur in erster Potenz beibehalten zu werden. Nur wenn es sich um einen einzelnen Flügel ohne Schwanz handelt, ist das nicht mehr zulässig; dann werden die Gleichungen aber schon an sich sehr schlicht. Wir betrachten nur die folgenden Fälle:

66. Fall I. — Einfach tragendes System mit neutralem Schwanz. —

Es ist $\Sigma F' \cdot e' \cdot \mu \cdot x = 0$ und für horizontalen Flug führt (114) auf

$$\frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot (F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu) - k^2 \cdot F_1' \cdot (F_1' + F_2) - 2 F_1' \cdot F_2 \cdot e' \cdot \mu \cdot l - \frac{\gamma \cdot x}{g} \cdot F_1'^2 \cdot F_2 \cdot e' \cdot \mu \cdot l^2 > 0. \quad (116)$$

Werden höhere Potenzen von $e' \mu$ beibehalten, so wird die Ungleichung nur wenig verwickelter.

Für eine Flugrichtung \mathcal{G} geht die Bedingung über in:

$$\frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot (F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu) \cdot \left(1 + \frac{\text{tg } \mathcal{G}}{2 \text{tg } \alpha}\right) - k^2 \cdot F_1' \cdot (F_1' + F_2) + F_1' \cdot F_2 \cdot l^2 \cdot \frac{\text{tg } \mathcal{G}}{2 \text{tg } \alpha} - F_1' \cdot F_2 \cdot e' \cdot \mu \cdot l \cdot \left(2 + \frac{\text{tg } \mathcal{G}}{2 \text{tg } \alpha} + \gamma \cdot x \cdot F_1' \cdot l\right) > 0. \quad (117)$$

Mit $G \cdot \cos \mathcal{G} = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0^2 \cdot F_1' \cdot \mu$ erhalten wir eine Gleichung für $\frac{u_0^2}{g}$:

$$\frac{u_0^2}{g \cdot \cos \mathcal{G}} \cdot \mu \cdot (F_2 \cdot l + F_1' \cdot e' \cdot \mu) \cdot \left(1 + \frac{\text{tg } \mathcal{G}}{2 \text{tg } \alpha}\right) - k^2 \cdot (F_1' + F_2) + F_2 \cdot l^2 \cdot \frac{\text{tg } \mathcal{G}}{2 \text{tg } \alpha} - F_2 \cdot e' \cdot \mu \cdot l \cdot \left(2 + \frac{\text{tg } \mathcal{G}}{2 \text{tg } \alpha} + \frac{g \cdot \cos \mathcal{G} \cdot l}{u_0^2}\right) > 0. \quad (118)$$

67. Fall II. — Einzelne Fläche ohne Schwanz oder Kopfflosse. — Fall II kann aus Fall I mit $F_2 = 0$ und $l = 0$ hergeleitet werden. Aber da nun die Stabilität lediglich Funktion der Druckpunktverschiebung ist, bringt es Vorteil, eigens hierfür die Koeffizienten von neuem zu bilden und dann in die vollkommene Stabilitätsbedingung $Q > 0$ eintreten zu lassen, anstatt in die angenäherte:

Bryan-Bader, Stabilität.

$$\left. \begin{aligned} A: G^3 &= k^2, \\ B \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right): G^3 &= F' \cdot k^2 (1 + 2 \mu^2), \\ C \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^2: G^3 &= \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F' \cdot e' \cdot \mu, \\ D \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^3: G^3 &= \frac{2G}{\gamma \cdot \kappa} F'^2 \cdot e' \cdot \mu^3 \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2\mu} \right), \\ E \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^4: G^3 &= \frac{2G^2 \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot \cos \vartheta \cdot F'^2 \cdot e' \cdot \mu^2 (1 + \mu \operatorname{tg} \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

woraus mit Einführung von:

$$\frac{BC - AD}{G^6} \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^3 = \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F'^2 \cdot e' \cdot \mu \cdot k^2 (1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \vartheta),$$

in: $Q = D(BC - AD) - EB^2 > 0,$

folgt, daß:

$$\frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot e' \cdot \mu (1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \vartheta) \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2\mu} \right) - k^2 F' (1 + 2 \mu^2)^2 (1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \vartheta) > 0$$

$$\text{oder: } \frac{u_0^2}{g} > \frac{k^2 (1 + 2 \mu^2)^2 \cdot \cos \vartheta \cdot (1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \vartheta)}{\mu^2 (1 - \mu \operatorname{tg} \vartheta) \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2\mu} \right)} \quad (120)$$

sein muß.

(121) können wir mit $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ schreiben:

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{k^2 \cdot \cos \vartheta (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \vartheta)}{e' \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \vartheta) \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta)}.$$

Für horizontalen Flug ergibt sich danach die Bedingung:

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{k^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{e' \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (121)$$

Mit geringem Fehler also:

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{k^2}{e' \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

in anderer Form:

$$\frac{G}{\gamma \cdot \kappa} > \frac{k^2 \cdot F}{e' \cdot \sin \alpha}.$$

Für Gleitflug $\vartheta = \alpha$ wird gefordert, daß

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 \cdot \cos \alpha}{e' \cdot \sin^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} \quad (122)$$

sei, oder annäherungsweise:

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2}{e' \cdot \sin^2 \alpha}.$$

So wird wiederum für Gleitflug nur $\frac{2}{3}$ der Geschwindigkeitshöhe als für horizontalen Flug benötigt (Abschnitt 55 und 56); das Flugzeug geht der Stabilität verlustig, wenn es steiler als mit $\mathcal{J} = \arctan(-2 \tan \alpha)$ aufsteigt.

68. Aus der Bedingung (121) für $\mathcal{J} = 0$ ergibt sich, daß, wenn G und F als unveränderlich angenommen werden, $\sin \alpha$ einen bestimmten Wert nicht unterschreiten und damit u_0 nicht über eine gewisse Grenze wachsen darf, andernfalls wird das Flugzeug instabil.

Dagegen gab die Stabilitätsbedingung (54 a) einen Grenzwert für das Gewicht des Systems zweier schmaler Flügel, der unabhängig von den Anstellwinkeln bestimmt war lediglich durch Abstand und Flächeninhalt der beiden Flügel und die Schwerpunktslage. Jene Bedingung galt also nicht unmittelbar der Geschwindigkeit.

Es ist daher keineswegs erstrebenswert, die Stabilität eines Flugzeugs von der Druckpunktswanderung allein abhängig zu machen. Vorzuziehen ist, die Konstruktion auf die Theorie der schmalen Flächen zu gründen und den dort gestellten Bedingungen Genüge zu tun. Der Erfolg der Druckpunktswanderungen ist sicher Steigerung der Stabilität in bestimmten Fällen,¹⁾ aber dieser Vorteil schwindet mit wachsender Geschwindigkeit, wie Gleichung (118) zeigt.

Außerdem geben die Drehungsableitungen, die in der Größenordnung von $\varphi'(\alpha)$ sein werden, Anlaß, die Stabilität durch Trennung der Flügel und Änderung der Anstellwinkel konstruktiv zu erzwingen, da sie gegenüber den dann auftretenden stätigenden Momenten außer Acht bleiben dürfen.

Es ist noch hervorzuheben, daß unsere Ergebnisse keine bestimmte Funktion $\varphi(\alpha)$ zur Voraussetzung haben; nur über das Vorzeichen mußten wir uns entscheiden, um die einzelne Fläche überhaupt stabilisieren zu können.

$f(\alpha)$ war dagegen gleich $\kappa \cdot \sin \alpha$, eine Gesetzmäßigkeit, die oberhalb gewisser Werte α nicht mehr zutrifft.

¹⁾ Diese Fälle sind beschränkt auf ebenen Flächen; tatsächlich verursachen die Druckpunktverschiebungen gewölbter Flächen für kleine Winkel starke Verluste an Stabilität. Eine einzelne gewölbte Fläche ist gänzlich instabil. (Der Übersetzer.)

Einfluß der Reibung.

Abweichungen vom Satz von der Unabhängigkeit der Höhe und vom Sinus-Gesetz des Widerstands.

69. Infolge der Reibung schließt die Resultierende des Luftwiderstands mit der Normalen zum (ebenen) Flügel einen kleinen Winkel ε ein; dieser Winkel ist natürlich gleich dem Unterschied von Anstellwinkel und Winkel zwischen der Resultierenden und y -Achse. Ist ε veränderlich, so kann die Korrektur nach Abschnitt 70 vorgenommen werden. Wir wollen jetzt $F' = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha'$ und $\mu' = \operatorname{tg} \alpha'$ setzen, wobei $\alpha' = \alpha + \varepsilon$.

Ist die Höhenlage der Flügel über dem Schwerpunkt bedeutend, so kommen weiter $x' = x - y \cdot \mu'$ und $x'' = x - 2 \mu \cdot y$ statt x in Rechnung.

x' ist dann die Abszisse des Schnittpunktes der Resultierenden mit der x -Achse; wir schreiben $2 \mu - \mu' = \mu''$, also $x'' = x' - y \cdot \mu''$ und erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} 2 \Sigma F' \cdot \mu \cdot \mu' + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0}, \quad \Sigma F' \cdot \mu, \quad \Sigma F' \cdot \mu \cdot (x' - y \cdot \mu'') - \frac{G \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot x \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ 2 \Sigma F' \cdot \mu', \quad \Sigma F' + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0}, \quad \Sigma F' \cdot (x' - y \cdot \mu'') + \frac{G}{\gamma \cdot x} + \frac{G \cdot \sin \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot x \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ 2 \Sigma F' \cdot \mu' \cdot x', \quad \Sigma F' \cdot x', \quad \Sigma F' \cdot x' \cdot (x' - y \cdot \mu'') + \frac{G \cdot k^2 \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0} \end{array} \right| = 0. \quad (123)$$

Liegen beide Flügel gleichhoch ($-y_1 = -y_2$) über dem Schwerpunkte, so kann wieder Ersatz durch ein gleichwertiges System mit neutralem Schwanz erfolgen, dessen Schwerpunkt ebenso tief unter den Flächen liegt. Man kann so Überblick gewinnen über den Einfluß der vertikalen Schwerpunktslage auf die Längsstabilität.

Die Bildung der Koeffizienten $A \dots E$ aus der eben gegebenen Determinante bietet selbst im allgemeinsten Falle keine Schwierigkeit; es war jedoch kaum wünschenswert, sie hier wiederzugeben.

70. Mit Beibehaltung der Beziehung

$$R = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0^3 \cdot F \sin \alpha$$

wird offenbar κ bei Abweichungen von:

$$f(\alpha) = \kappa \cdot \sin \alpha$$

selbst zur Funktion von α . Nach Versuchen ist:

$$\kappa_{\alpha=0} = 0 = 2 \cdot \kappa_{\alpha=90^\circ}.$$

In diesem Falle werden die Widerstandsableitungen nur von R und $dR/d\alpha$ betroffen, wobei:

$$dR/d\alpha = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot u_0^2 \cdot (\kappa \cdot \cos \alpha + d\kappa/d\alpha \cdot \sin \alpha). \quad (124)$$

Geben wir κ in unseren Gleichungen den Wert für den gewählten Anstellwinkel, so bleibt ihre Geltung unbeschränkt, unter der Voraussetzung, daß $d\kappa/d\alpha \cdot \sin \alpha$ gegenüber $\kappa \cdot \cos \alpha$ vernachlässigt werden darf. Wenn anders, sind weitere Korrekturen anzubringen. Für das einfach tragende System ändern sich dann nur X_v und Y_v , wo F_1 zu ersetzen wäre durch:

$$F_1' \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\kappa} \cdot \frac{d\kappa}{d\alpha}\right).$$

Wesentlicher Einfluß einer Wölbung der Tragflügel.

71. Abschnitt 32 läßt folgern, daß der Einfluß einer Wölbung des Flügels durch die Richtungsänderung der Resultierenden wesentlich X_v gilt, das um ein Glied:

$$-\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F_1 \cdot u_0 \cdot a/c \cdot \varphi'(\alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha'$$

abnimmt.

Haben die anderen Ableitungen die Werte wie in Abschnitt 48, so bleiben A , B und E ganz ungeändert, zu C tritt nur eine von zweiter Ordnung kleine Größe, während:

$$D : (g \cdot u_0)^3 = \frac{2G}{g^3} \cdot \gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha' \\ + \frac{2\gamma^3}{g^3} \cdot \kappa^3 \cdot F_1^2 \cdot F_2 \cdot l^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha' \cdot \frac{a}{c} \cdot \varphi'(\alpha). \quad (125)$$

Wenn, wie erfahrungsgemäß bei ebenen Flügeln, der Druckpunkt mit zunehmendem Anstellwinkel nach hinten rückt, ist $\varphi'(\alpha)$ negativ und die Wölbung bewirkt mit der Verkleinerung von D Sinken der Stabilität. Wandert für sehr kleine wachsende Anstellwinkel der Druckpunkt jedoch nach vorn, so hebt Flügelwölbung die Stabilität. Jedenfalls liegt die Entscheidung im Glied $-X_u \cdot Y_v \cdot N_r$ von D (wenn $N_u = 0$ ist).

Der Unterschied des Widerstands einer gewölbten gegenüber einer ebenen Tragfläche wird berücksichtigt, indem wir F_1 als die Fläche des gleichwertigen ebenen Flügels betrachten.

Einfluß der Strömungsablenkung.

72. Schließlich werden die Koeffizienten noch dadurch beeinflusst, daß die vordere Fläche die einfallende Luft ablenkt und so den wirksamen Anstellwinkel der hinteren herabsetzt.

Wir haben somit wieder zwischen zwei Winkeln zu unterscheiden, dem wirksamen und dem scheinbaren Anstellwinkel α'_2 und α_2 .

Lanchester berücksichtigt sogar die Tatsache, daß Wogen des Vorderflügels veränderliche Strömungsrichtung zur Folge hat. Für ein einfach tragendes System hätten wir danach so zu schließen: Besitzt der Tragflügel eine Abwärtsbewegung v , so teilt sie sich der von ihm abströmenden Luft mit, so daß diese überall hinter der Vorderfläche eine positive zusätzliche Vertikalgeschwindigkeit proportional v besitzt.

Beträgt sie für den Schwanz $(1 - \epsilon)v$, so ist das wirksame Wogen des Schwanzes ϵv , das scheinbare v . Daher sind Glieder in X_v , Y_v , N_v , die von der Schwanzfläche herrühren, mit ϵ zu multiplizieren.

Die Verbesserung ist leicht nachzutragen. Im einfachsten Fall lautet die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} 2F_1' \cdot \mu^2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0}, & F_1 \cdot \mu, & -\frac{G \cdot g \cdot \cos \vartheta}{\gamma \cdot x \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ 2F_1' \cdot \mu, & F_1' + F_2 \cdot \epsilon + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot x \cdot u_0}, & -F_2 \cdot l + \frac{G}{\gamma \cdot x} + \frac{G \cdot g \cdot \sin \vartheta}{\gamma \cdot x \cdot u_0 \cdot \lambda} \\ 0, & -F_2 \cdot l, & F_2 \cdot \frac{l^2}{\epsilon} + \frac{G \cdot \lambda \cdot k^2}{\gamma \cdot x \cdot u_0 \cdot \epsilon} \end{vmatrix} = 0. \quad (126)$$

An Stelle von F_2 ist $F_2 \cdot \epsilon$, von l ist l/ϵ , von k^2 ist $k^2 \cdot \epsilon$ getreten und die Stabilitätsbedingung für horizontalen Flug ist so aus der früheren leicht abzuleiten:

$$\frac{u_0^2}{g} > \frac{k^2}{\mu \cdot l} \cdot \frac{F_1' \cdot \epsilon + F_2}{F_2}. \quad (127)$$

Sie stimmt mit der von Lanchester überein. Dabei ist Voraussetzung, dass der Schwanz nicht in der Flug-, sondern in der

Strömungsrichtung liegt. Daher treten in die erste Zeile der Determinante neue Glieder:

$$2 F_1' \cdot \mu^2 + \frac{G \cdot \lambda}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}, F_1' \cdot \mu + F_2 \cdot \varepsilon \sin(\alpha_2 - \alpha_2'),$$

$$- \frac{G \cdot g \cdot \cos \vartheta}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot \lambda} - F_2 \cdot l \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_2');$$

$\cos(\alpha_2 - \alpha_2')$ wurde der Einheit gleichgesetzt.

Diese weitere Verbesserung fügt nur $C \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}\right)^2 : G^3$ den sehr geringfügigen Ausdruck zu:

$$- 2 k^2 \cdot F_1' \cdot \mu \cdot F_2 \cdot \varepsilon \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_2').$$

Die erörterte Ablenkung äußert sich nun freilich nicht, wie es den Gleichungen entspricht, augenblicklich auf den Schwanz, sondern erst nach Durchfliegen einer kleinen Strecke. Aber je höher die Geschwindigkeit ist, um so besser trifft die Annahme einer momentanen Wirkung zu; es entspricht nicht dem Stande unserer Kenntnis der Strömungsvorgänge, näher hierauf einzugehen.

Drei-Flächensystem.

73. Der Verlust an Stabilität mit abnehmendem Winkel ϑ offenbarte sich in gleichsinnigen Änderungen des Koeffizienten D . Nun enthält D die Determinante der Widerstandsableitungen \mathcal{A} , von der in Abschnitt 26 II bewiesen wurde, daß sie für ein Zwei-Flächensystem verschwinde. Treten jedoch statt zwei Flügeln (oder übereinander liegender Flügelpaare) drei in Rechnung, so wird \mathcal{A} von Null verschwinden, und man hat es in der Hand, ihren Wert möglichst hoch zu treiben.



Fig. 26.

Konstruktionen von Drei-Flächensystemen sind in den Doppeldeckern von Farman und Kurtiß verwirklicht, die mit Schwanz und mit Kopfflosse versehen sind. (Fig. 26.)

Es sind wieder F_1, F_2, F_3 die Flächen, x_1, x_2, x_3 die Abszissen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Anstellwinkel der Flügel. Mit den eingeführten Bezeichnungen $F' = F \cdot \cos^2 \alpha$ und $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ wird

$$\mathcal{A} \cdot \left(\frac{g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0}\right)^3 = 2 \begin{vmatrix} \Sigma F' \mu^2 & \Sigma F' \cdot \mu & \Sigma F' \cdot \mu \cdot x \\ \Sigma F' \cdot \mu & \Sigma F' & \Sigma F' \cdot x \\ \Sigma F' \cdot \mu \cdot x & \Sigma F' x & \Sigma F' \cdot x^2 \end{vmatrix}$$

Nach den Regeln für Multiplikation zweier Determinanten ist dies gleich:

$$2 \begin{vmatrix} F_1' \cdot \mu_1 & F_2' \mu_2 & F_3' \mu_3 \\ F_1' & F_2' & F_3' \\ F_1' \cdot x_1 & F_2' x_2 & F_3' x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$2 F_1' F_2' F_3' \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}^2 = 2 F_1' F_2' F_3' [(\mu_1 - \mu_3)(x_2 - x_3) - (\mu_2 - \mu_3)(x_1 - x_3)]^2 \quad (128)$$

Δ wird also, wenn nicht Null, auf jeden Fall positiv, und damit ist die höhere Stabilität des Drei-Flächensystems erwiesen.

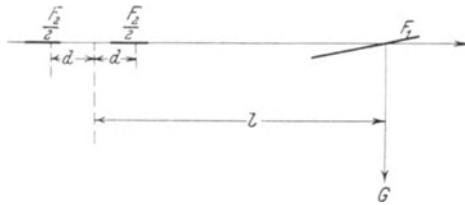


Fig. 27.

Um die Wirkung auf die anderen Koeffizienten darzutun, ist es zweckdienlich, wieder ein gleichwertiges System einzuführen; hierfür taugt ein einfach tragendes System mit neutralem Schwanz mit gleichen Summen:

$$\Sigma F' \mu^2, \Sigma F' \mu, \Sigma F', \Sigma F' \mu x, \Sigma F' x$$

wie das Drei-Flächensystem; indessen ist, weil $\Delta > 0$, $\Sigma F' x^2$ nicht mehr gleich, $F_2 \cdot l^2$.

Wir werden den neuen Verhältnissen jedoch gerecht, wenn wir die neutrale Schwanzfläche F_2 im Abstand l in zwei gleiche Teile zerlegen und diese auf der x -Achse um $\pm d$ verschieben, so daß ihr Mittelpunkt also wiederum vom Ursprung um l entfernt ist. Die Daten des gleichwertigen Systems sind:

Flächen	F_1	$F_2/2$	$F_2/2$
Anstellwinkel . . .	α_1	0	0
Abszissen	0	$-l + d$	$-l - d$

Damit wird $\Sigma F' x^2 = F_2 (l^2 + d^2)$ und wir bekommen für die Unveränderlichen folgende Werte:

Drei-Flächensystem: $\Sigma F \cdot \sin^2 \alpha$ $\Sigma F \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\Sigma F \cdot \cos^2 \alpha$ ΣF $\Sigma F \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot x (= 0)$ $\Sigma F \cdot \cos^2 \alpha \cdot x$ $\Sigma F \cdot \cos^2 \alpha \cdot x^2$		Gleichwertiges System: $F_1 \cdot \sin^2 \alpha$ $F_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $F_1 \cdot \cos^2 \alpha + F_2$ $F_1 + F_2$ 0 $-F_2 \cdot l$ $+F_2 \cdot (l^2 + d^2)$	}	(129)
---	--	---	---	-------

Das gleichwertige System liefert nun:

$$\Delta \cdot \left(\frac{G}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0} \right)^3 = 2 F_1 \cdot F_2^2 \cdot d^2 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (130)$$

Da wir schon fanden, daß Δ positiv sein müsse, ist d reell und damit die Möglichkeit eines gleichwertigen Systems bewiesen.

74. Wir setzen jetzt die Unveränderlichen des gleichwertigen Systems in die Koeffizienten ein. Wir berücksichtigen dabei die Flugrichtung ϑ , nicht jedoch die Existenz eines Stirnwiderstands. Der Schub sei zentral und unveränderlich.

$A = K \cdot G^2,$ $B : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0) = K \cdot G \cdot (F_1' + F_2) + G^2 \cdot F_2 (l^2 + d^2),$ $C : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^2 = G \cdot F_1' \cdot F_2 \cdot (l^2 + d^2) + \frac{G^2}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_2 \cdot l,$ $D : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^3 = 2 F_1' \cdot F_2^2 \cdot d^2 \cdot \mu^2 + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_1' \cdot F_2 \cdot l \cdot \mu$ $\quad \cdot (2 \mu + \operatorname{tg} \vartheta),$ $E : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^4 = \frac{2 G \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot F_1' \cdot F_2 \cdot l \cdot \mu \cdot (\cos \vartheta + \mu \cdot \sin \vartheta)$ $\quad = \frac{2}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_1'^2 \cdot F_2 \cdot l \cdot \mu^2 (1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \vartheta)$ $\quad = \frac{2}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_1'^2 \cdot F_2 \cdot \mu^2 \cdot l$		}	(131)
---	--	---	-------

in erster Näherung.

Für $\vartheta = 0$ finden wir, daß die Stabilitätsbedingung

$$CD - EB > 0$$

sich nur um das Produkt von C mit dem ersten Glied von D ändert, das von Δ stammt:

$$\frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_2 \cdot l - k^2 (F_1' + F_2) F_1' + \left[\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{2 \mu} + \frac{\gamma \cdot \kappa}{G} \cdot \frac{F_2 \cdot d^2}{l} \right] \cdot \left[\frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot F_2 \cdot l + F_1' \cdot F_2 (l^2 + d^2) \right] > 0. \quad (132)$$

Die Stabilität des Flugzeugs mit geteiltem, neutralem Schwanz ist die gleiche bei einem Anstieg mit:

$$\begin{aligned} -\vartheta &= \text{arc tg} \left(\frac{2\gamma \cdot \kappa}{G \cdot l} \cdot F_2 \cdot d^2 \cdot \mu \right) \\ &= \text{arc tg} \left(\frac{2g}{u_0^2} \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{d^2}{l} \cdot \cos \vartheta \right) \end{aligned} \quad (133)$$

als mit ungeteiltem, neutralem Schwanz bei horizontalem Flug.

Die Koeffizienten B und C wachsen mit $(l^2 + d^2)$ statt nur mit l^2 . D ist um das Glied \mathcal{L} größer geworden; seine Abnahme mit ϑ ist unverändert. Alles in allem ist die Stabilitätsbedingung in höherem Maße erfüllt durch die Vergrößerung der linken Seite



Fig. 28. Mehrfach tragendes System. Aviatik.

um das Produkt von \mathcal{L} mit dem höheren Wert von C . Die größte zulässige Steilheit des Anstiegs (ϑ_{min}) ergibt sich aus der angenäherten Beziehung (18 a).

$$\mathcal{L} - \frac{G^2}{g} \cdot N_v \cdot \sin \vartheta = 0.$$

Einfluß der Drehungsableitungen breiter Flügel.

75. Die Umformungen und Methoden der letzten Abschnitte gestatten uns nunmehr auch den Einfluß der Drehungsableitungen $f_r(\alpha)$ und $\varphi_r(\alpha)$ abzuschätzen.

Wir waren schon in Abschnitt 27 zu dem Schluß gelangt, daß Drehungen um den Druckpunkt auf die Größe des Widerstandes kaum einwirken, wohl aber auf die Lage der Resultierenden, in

dem Sinne, daß sie die Drehung verzögert. Dadurch tritt eine Vergrößerung von N_r ein, wie in 74, so daß $F_2 \cdot l^2$ auf $F_2 \cdot (l^2 + d^2)$ zunimmt, wobei diesmal d durch $\varphi_r(\alpha)$ bestimmt wird. Die Stabilität nimmt also zu, wie auch aus oberflächlichen Betrachtungen zu folgern war.

Zöge Drehung eine Minderung von N nach sich, so nähme die Stabilität ab. Diese Annahme erscheint jedoch viel weniger berechtigt als die vorige, wenngleich sie nicht ohne weiteres von der Hand gewiesen werden darf. Danach müßte ein Flügel, der um seine Achse drehbar gelagert ist, im Windkanal ohne Unterlaß rotieren. Endgültigen Aufschluß geben jedoch erst Versuche (nach Abschnitt 28 und 29).

VII. Unsymmetrische oder Seitenstabilität.

Ebene Flächen und vertikale Flossen.

76. Wir definierten oben „schmale Flügel“ als solche, deren Drehung auf die Druckverteilung ohne merklichen Einfluß wäre, d. h. die Geschwindigkeitsunterschiede einzelner Erzeugender bei einer Winkelgeschwindigkeit r wurden der Berücksichtigung nicht wert erachtet. Wir haben zu dieser Definition jetzt, da es sich um seitliche Schwingungen handelt, nachzutragen, daß wir Druckänderungen des einfallenden Windes infolge Drehungen des Flugzeuges p und q nur so in Rechnung ziehen wollen, als sei der Druck auf das einzelne Flächenelement von den benachbarten ganz unbeeinflusst und lediglich bestimmt durch dessen Relativgeschwindigkeit gegenüber der Luft. Wir halten auch ferner an dem Gesetz des Luftwiderstandes fest, nach dem dieser proportional dem Produkt aus der resultierenden Geschwindigkeit und ihrer zum Flächenelement senkrechten Komponente variiert.

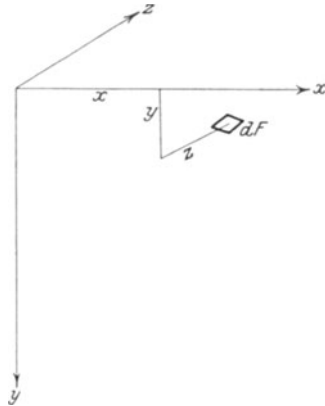


Fig. 29.

Diese Annahmen sind ohne Zweifel nicht ganz zutreffend, besonders für die von der x - bzw. y -Achse weit entfernten Flächenelementen; es wäre jedoch keineswegs von Vorteil, durch entsprechende Korrekturen an Genauigkeit gewinnen zu wollen, was an Übersichtlichkeit verloren geht.

Es bezeichnen xyz die Koordinaten eines Flächenelementes dF , lmn die Kosinus der Winkel, die die Normale zu dF mit den drei Achsen einschließt.

Mit Vernachlässigung der von höherer Ordnung kleinen Größen ist die Größe der Relativgeschwindigkeit:

$$u_0 + u - y \cdot r + z \cdot q,$$

und ihre Normalkomponente:

$$l \cdot (u_0 + u - y \cdot r + z \cdot q) + m \cdot (v - z \cdot p + x \cdot r) \\ + n \cdot (w - x \cdot q + y \cdot p).$$

Der Druck ist dann:

$$dR/dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot [l \cdot u_0^2 + 2l \cdot u_0 \cdot (u - y \cdot r + z \cdot q) \\ + m \cdot u_0 \cdot (v - z \cdot p + x \cdot r) + n \cdot u_0 \cdot (w - x \cdot q + y \cdot p)]. \quad (134)$$

Die Kräfte und Kräftepaare ergeben sich aus den Integrationen:

$$X = \int l \cdot dR, \quad Y = \int m \cdot dR, \quad Z = \int n \cdot dR, \quad L = \int (ny - mz) \cdot dR, \\ M = \int (lz - nx) \cdot dR, \quad N = \int (mx - ly) \cdot dR. \quad (135)$$

Ist das Flugzeug zur x - y -Ebene symmetrisch, so werden Integrale, die z oder n in ungerader Potenz enthalten, nachdem dR aus Gleichung (134) eingeführt ist, zu Null. Es war das ja schon Voraussetzung dafür, daß symmetrische und unsymmetrische Schwingungen nicht gekoppelt seien, d. h. für das Verschwinden der Widerstandsableitungen:

$$(X, Y, N)_{w, p, q} \text{ und } (Z, L, M)_{u, v, r}.$$

Wir erhalten:

$$X = \frac{u_0^2}{g} \cdot \gamma \left[\left(1 + 2 \frac{u}{u_0}\right) \cdot \int \kappa \cdot l^2 \cdot dF + \frac{v}{u_0} \cdot \int \kappa \cdot l \cdot m \cdot dF \right. \\ \left. + \frac{r}{u_0} \cdot \int \kappa \cdot l \cdot (mx - 2ly) \cdot dF \right] \\ Y = \frac{u_0^2}{g} \cdot \gamma \left[\left(1 + 2 \frac{u}{u_0}\right) \cdot \int \kappa \cdot l \cdot m \cdot dF + \frac{v}{u_0} \cdot \int \kappa \cdot m^2 \cdot dF \right. \\ \left. + \frac{r}{u_0} \cdot \int \kappa \cdot m \cdot (mx - 2ly) \cdot dF \right]$$

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{u_0^2}{g} \cdot \gamma \left[\left(1 + 2 \frac{u}{u_0} \right) \cdot \int x \cdot l \cdot (mx - l \cdot y) \cdot dF + \frac{v}{u_0} \cdot \int x \cdot m \right. \\
 &\quad \left. \cdot (mx - ly) \cdot dF + \frac{r}{u_0} \int x \cdot (mx - ly) \cdot (mx - 2ly) \cdot dF \right] \\
 Z &= \frac{u_0^2}{g} \cdot \gamma \left[\frac{w}{u_0} \cdot \int x \cdot n^2 \cdot dF + \frac{p}{u_0} \cdot \int x \cdot n \cdot (ny - mz) \cdot dF \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q}{u_0} \cdot \int x \cdot n \cdot (2lz - nx) \cdot dF \right] \\
 L &= \frac{u_0^2}{g} \cdot \gamma \left[\frac{w}{u_0} \cdot \int x \cdot n \cdot (ny - mz) \cdot dF + \frac{p}{u_0} \cdot \int x \cdot (ny - mz)^2 \right. \\
 &\quad \left. \cdot dF + \frac{q}{u_0} \cdot \int x \cdot (ny - mz) \cdot (2lz - nx) \cdot dF \right] \\
 M &= \frac{u_0^2}{g} \cdot \gamma \left[\frac{w}{u_0} \cdot \int x \cdot n \cdot (lz - nx) \cdot dF + \frac{p}{u_0} \cdot \int x \cdot (ny - mz) \right. \\
 &\quad \left. \cdot (lz - nx) \cdot dF + \frac{q}{u_0} \cdot \int x \cdot (lz - nx) \cdot (2lz - nx) \cdot dF \right]. \quad (136)
 \end{aligned}$$

X, Y, N beziehen sich auf die Längsstabilität.

Werden die symmetrischen Hälften einer Tragfläche um ihren Schnitt mit der Symmetrieebene um Winkel β aufgedreht (aufgebogene Flügel), so sind die Richtungskosinus ihrer Normalen:

$$l = \sin \alpha, \quad m = \cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad u = \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Kapitel V und VI ließen diesen Fall (Antoinette-Typ) außer Acht ($\beta = 0$). Doch werden die dort erlangten Ergebnisse in erster Näherung auch dafür zutreffen; sicher ist eine weitgehende Erörterung des Einflusses von β auf die symmetrischen Schwingungen hier nicht am Platze. Für die Seitenstabilität ist eine Anordnung der Art jedoch von Bedeutung, und wir werden darauf zurückkommen.

Zunächst betrachten wir den einfachsten Fall.

Ebene Flügel.

77. Die Flügel-Ebene steht in ihrer ganzen Ausdehnung zur x - y -Ebene senkrecht; daher:

$$l = \sin \alpha, \quad m = \cos \alpha, \quad n = 0.$$

Es verschwinden danach:

$$Z_w, \quad Z_p, \quad Z_q, \quad L_w, \quad M_w.$$

Ist V das Trägheitsmoment des Tragflügels in bezug auf seinen Schnitt mit der Symmetrieebene

$$V = \int z^2 \cdot dF,$$

$$\text{so werden } \left. \begin{aligned} L_p &= + \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot V \cdot \cos^2 \alpha, \\ M_p &= - \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\ L_q &= - 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\ M_q &= + 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot V \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned} \right\} (137)$$

Setzen wir in Gleichungen (23a) ein, so werden D und E zu Null, ebenso C . Dies gewinnt jedoch positiven Wert für zwei Flächen F_1, F_2 , mit Trägheitsmomenten V_1, V_2 und Anstellwinkeln α_1, α_2 :

$$\frac{C}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_o^2} = 2 G \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (138)$$

unter der besonderen Voraussetzung, daß die Anstellwinkel verschieden, also die Flügel einander nicht parallel sind und beträchtlich klaffern: V_1 und $V_2 > 0$.

Jedes Falls verschwinden zwei, wenn nicht drei Wurzeln der biquadratischen Gleichung. Mit der Stabilität ist es also schlecht bestellt; in welcher Weise ist aus den Bewegungsgleichungen ersichtlich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{G}{g} \left(\frac{dw}{dt} - u_o \cdot q \right) &= - G \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta, \\ \frac{I}{g} \cdot \frac{dp}{dt} - \frac{W}{g} \cdot \frac{dq}{dt} &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot V \cdot (-p \cdot \cos^2 \alpha + 2q \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha), \\ \frac{J}{g} \cdot \frac{dq}{dt} - \frac{W}{g} \cdot \frac{dp}{dt} &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \cdot V \cdot (+p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2q \cdot \sin^2 \alpha). \end{aligned} \right\} (139)$$

Die Drehmomente haben also kein Bestreben, die Fläche wieder aufzurichten, nachdem sie sich seitlich geneigt hat ($\varphi \geq 0$); denn die Schwere spielt in die beiden letzten Gleichungen nicht hinein. Somit besteht keine Ursache für den Flügel, einer bestimmten Lage gegenüber der Vertikalen zuzustreben. Dagegen können wir der ersten Gleichung entnehmen, daß er mit zunehmender Geschwindigkeit seitwärts abrutscht, da R und G eine Komponente senkrecht zur Vertikalebene liefern.

Es ist in diesem Fall Sache des Führers, durch Flächenverwindung den eingeleiteten Bewegungen entgegen zu wirken, wenn nicht eben Kielflossen vorgesehen sind.

Daß auch die dritte Wurzel der Gleichung vierten Grades zu Null wird, erkennen wir, wenn wir die zweite Bewegungsgleichung

mit $\sin \alpha$, die dritte mit $\cos \alpha$ multiplizieren und addieren. Dann muß auch, wie die rechte, die linke Seite der Gleichung verschwinden, was nur möglich ist durch $\lambda = 0$. So besteht denn auch kein Drehmoment, das Anlaß gäbe, nach Verlassen des Kurses (Y') denselben wieder aufzusuchen.

Das Ergebnis ist:

1. Die Seitenstabilität eines ebenen schmalen Flügels hängt von dem Trägheitsmoment seiner Fläche in bezug auf die Symmetrieebene ab. Seine Lage (x_I, y_I) gegenüber der Bahn stetigen Flugs ist gleichgültig.

2. Eine flache (horizontale) Schwanz- oder Kopfflosse von nicht ungewöhnlicher Breite, wie sie der Längsstabilisierung dient, ist ohne Bedeutung für die Seitenstabilisierung.

3. Das in 1. erwähnte Trägheitsmoment kann als Produkt der Fläche mit dem Quadrat einer Länge gedacht werden: $V = F \cdot \zeta^2$. Diese Strecke ζ , die für verschiedene Flügelformen verschieden ist, bezeichnet Lanchester als „aerodynamischen“ bzw. „aerodromischen“ Radius (II. § 102), je nachdem, ob er auf die x - oder die y -Achse als Drehachse bezogen wird.

Einzelne Kielflosse.

78. Wird eine einzelne Kielflosse von der Fläche O und mit dem Druckpunkt (für Anstellwinkel 0^0) in x, y, z , parallel der Symmetrieebene angeordnet, so bekommen wir folgende Werte für die Widerstandsableitungen.

$$\left. \begin{aligned} Z_w &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0, & Z_p &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot y, \\ L_w &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot y, & L_p &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot y^2, \\ M_w &= -\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot x, & M_p &= -\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot x \cdot y, \\ & & Z_q &= -\frac{\gamma}{q} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot x, \\ & & L_q &= -\frac{\gamma}{q} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot x \cdot y, \\ & & M_q &= -\frac{\gamma}{q} \cdot \kappa' \cdot O \cdot u_0 \cdot x^2. \end{aligned} \right\} (140)$$

Für eine Anzahl Flossen ist den Produkten der rechten Seite nur das Summenzeichen voranzustellen. Die Ableitungen sind den entsprechenden des Tragflügels zuzufügen.

Ein Tragflügel mit einer Kielflosse besitzt Koeffizientenwerte:

$$\left. \begin{aligned} D: (u_0 \cdot g)^3 &= \frac{\gamma^2}{g^3} \cdot \kappa \cdot \kappa' \cdot V \cdot O \cdot G (y \cdot \sin \alpha - x \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha \\ &- \frac{G}{u_0^2 \cdot g^2} \cdot \gamma \cdot \kappa' \cdot O [(J \cdot y - W \cdot x) \cdot \cos \vartheta + (I \cdot x - W \cdot y) \cdot \sin \vartheta] \\ E: (u_0 \cdot g)^4 &= \frac{G}{g^3 \cdot u_0^2} \cdot \gamma^2 \cdot \kappa \cdot \kappa' \cdot O \cdot V (2 \sin \alpha \cdot \cos \vartheta - \cos \alpha \\ &\quad \cdot \sin \vartheta) \cdot (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Das Zentrifugalmoment des Flugzeuges W möge, was meist zutrifft, so klein sein, daß es vernachlässigt werden darf, dann wird für horizontalen Flug der Einfluß der Flosse auf D merkbar nur durch das Glied mit $J \cdot y$. Um positives E zu erhalten, ist $x \cdot \cos \alpha > y \cdot \sin \alpha$ zu machen. Der Druckpunkt der Flosse muß danach unbedingt vor dem Schwerpunkt ($x > 0$) liegen, wenn unter diesem, sogar vor der Ursprungs-Normalen zum Tragflügel. Mit Erfüllung dieser Forderung wird aber wieder das erste Glied von D negativ und, um D positiv zu halten, muß man y einen bedeutenden negativen Wert geben. Wir, Mr. Harper und ich, fanden, daß zu diesem Zwecke die Flosse viel höher liegen müßte, als konstruktiv zulässig ist; außerdem wächst die erforderliche Höhe mit der Geschwindigkeit (u_0).

Ist F beträchtlich und positiv, so hebt sich dadurch der Wert von D ; aber es wäre durchaus verfehlt, in diesem Sinne den Entwurf des Flugzeugs beeinflussen zu lassen.

Gebräuchliche Flugzeug-Typen weisen sehr geringe Höhen ($y \sim 0$) der Flosse auf. Die Stabilität wird also entweder durch $D < 0$ oder durch $E < 0$ in Frage gestellt, je nachdem $x >$ oder $< y \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ist, d. h. die Flosse vor oder hinter dem Schwerpunkt liegt. Sind die übrigen Abmessungen eines Flugzeugs gegeben, so kann man wohl nach Urteil der Schwingungs- und Bewegungsgleichungen von beiden das geringere Übel wählen. Das Problem verliert jedoch ganz seine Bedeutung, sobald die Theorie zweier Flossen erörtert sein wird.

Mehrere Kielflossen.

79. Die Widerstandsableitungen einer Einzelflosse enthielten deren Druckpunktsordinate z nicht. Zwei Flossen mit gleichen

$$\begin{aligned}
 A &= G \cdot (I \cdot J - W^2) \\
 B &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0) = O \cdot (I \cdot J - W^2) + G \cdot [I \cdot (2V' \cdot \mu^2 + O \cdot x^2 + T_2) \\
 &\quad - W \cdot (3V' \cdot \mu + 2O \cdot xy + 2P) + J \cdot (V' + O \cdot y^2 + T_1)] \\
 C &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^2 = O \cdot [I \cdot (2V' \cdot \mu^2 + T_2) - W \cdot (3V' \cdot \mu + 2P) \\
 &\quad + J \cdot (V' + T_1)] + G \cdot V' \cdot [2(O \cdot y^2 + T_1) \mu^2 \\
 &\quad - 3(O \cdot xy + P) \cdot \mu + (O \cdot x^2 + T_2)] \\
 &\quad + G \cdot O \cdot (T_1 \cdot x^2 - 2P \cdot xy + T_2 \cdot y^2) + G \cdot (T_1 \cdot T_2 - P^2) \\
 &\quad - \frac{G \cdot O}{\gamma \cdot \kappa} \cdot (I \cdot x - W \cdot y) \\
 D &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^3 = O \cdot V' \cdot [2T_1 \cdot \mu^2 - 3P \cdot \mu + T_2] + O \cdot (T_1 \cdot T_2 - P^2) \\
 &\quad - \frac{G \cdot O}{\gamma \cdot \kappa} \cdot [(T_1 + V') \cdot x - (P + V' \cdot \mu) \cdot y] \\
 &\quad - O \cdot \frac{G \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot (J \cdot y - W \cdot x) \\
 &\quad - O \cdot \frac{G \cdot \sin \vartheta \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot (I \cdot \kappa - W \cdot y) \\
 E &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^4 = \frac{G \cdot O \cdot V' \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot (x - y \cdot \mu) \cdot (2\mu \cdot \cos \vartheta - \sin \vartheta) \\
 &\quad + \frac{G \cdot O \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot [\cos \vartheta (P \cdot x - T_2 \cdot y) - \sin \vartheta (T_1 \cdot x - P \cdot y)]
 \end{aligned} \tag{144}$$

Mit einigen Vernachlässigungen gelingt es, übersichtlichere Ausdrücke zu erhalten. Der Anstellwinkel des Tragflügels und die Fläche der Flossen sei klein, so daß sie nur im Produkt mit normal bedeutenden Größen eine Rolle spielen. Dann sind auch die Momente T_1 , T_2 , P klein gegenüber V . Die x -Achse sei Hauptträgheitsachse ($W=0$). Der Flug erfolge (nahezu) horizontal.

Hiernach erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 A &= G \cdot I \cdot J, \\
 B &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0) = G \cdot J \cdot V', \\
 C &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^2 = O \cdot V' \cdot J - \frac{O \cdot G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot I \cdot x + O \cdot (I \cdot T_2 + J \cdot T_1) \\
 &\quad + G \cdot V' \cdot (O \cdot x^2 + T_2), \\
 D &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^3 = O \cdot T_2 \cdot V' - \frac{G \cdot O}{\gamma \cdot \kappa} \cdot V' \cdot x - \frac{O \cdot G \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot J \cdot y, \\
 E &: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^4 = \frac{O \cdot G \cdot V' \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot x (2\mu - \operatorname{tg} \vartheta) \cdot \cos \vartheta \\
 &\quad - \frac{G \cdot O \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot (T_2 \cdot y - P \cdot x).
 \end{aligned} \tag{145}$$

80. Daraus ergeben sich die Folgerungen:

1. Das Eigenträgheitsmoment der Flossen T_1 kommt lediglich in C in einem Glied von der Ordnung O^2 vor, obwohl die Ordinate y einen beträchtlichen Einfluß übt. Es bietet also keinen Vorteil, zwei Flossen auf verschiedener Höhe anzuordnen.

2. Die Differenz $T_1 \cdot T_2 - P^2$ ist für zwei Flossen gleich Null und positiv für eine größere Zahl. Da der Ausdruck vernachlässigbar erschien, ist die Verwendung von mehr als zwei Flossen nicht mit Vorteil verbunden.

Allgemeiner Charakter der Schwingungen.

Näherungslösungen der Gleichung vierten Grades. Widerstand gegen Schlingern.

81. Die Schlüsse, die wir in betreff der kurzen und langen Längsschwingungen oben gezogen haben, sind für die Seitenschwingungen nicht mehr zulässig. Die Näherungslösungen der Gleichung vierten Grades müssen auf andere Weise gewonnen werden.

Zunächst bleiben, wenn Flossen fehlen, allein die beiden ersten Koeffizienten A und B endlich und positiv. Wir erhalten nur einen Wert für λ :

$$\frac{\lambda_1}{\gamma \cdot x \cdot u_0} = - \frac{V'}{I}; \quad (146)$$

er ist negativ und reell, bedeutet also eine aperiodische Dämpfung. Sie betrifft Drehungen p um die x -Achse, wie aus der einfachen dynamischen Beziehung

$$I \cdot \frac{dp}{g \cdot dt} = - \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \cdot V' \cdot p$$

hervorgeht.

Dies Moment wirkt jedoch lediglich einer bestehenden Bewegung entgegen; es hat nicht das Bestreben, eine seitliche Neigung des Apparates rückgängig zu machen.

Selbst wenn W von Null verschieden und α nicht klein ist, bleibt λ_1 negativ. Denn $IJ - W^2$ ist immer positiv und mit $I = \int dG \cdot (y^2 + z^2)$ u. s. f. finden wir nach den Regeln der Dynamik starrer Körper (mit O , T_1 , T_2 und $P = 0$):

$$B : (\gamma \cdot x \cdot u_0) = G \cdot V [\int dG \cdot x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \cdot (x \cdot \cos \alpha - 2 y \sin \alpha) + 3 \int dG \cdot z^2]. \quad (147)$$

Der Ausdruck kann nur negativ werden, wenn die Gewichte des Flugzeuges vorzüglich zwischen den Ebenen $x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha = 0$

und $x \cdot \cos \alpha - 2y \cdot \sin \alpha = 0$ liegen. Eine Gewichtsverteilung, die außerordentliches Verhalten gegenüber Störungen p zur Folge hätte, aber schwerlich je verwirklicht wird.

Wird nun eine kleine Flosse angebracht, so gewinnen auch die übrigen Wurzeln $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ kleine Werte; klein im Vergleich mit λ_1 . Dann wird also $A \lambda^4$ gegenüber $B \lambda^3$ außer Betracht fallen und es bleibt nur mehr die Gleichung dritten Grades:

$$B \lambda^3 + C \lambda^2 + D \lambda + E = 0 \quad (148)$$

zu lösen, wobei die Stabilitätsbedingung wieder auf $CD > EB$ hinausläuft.

In Fällen, wo die vollständige Stabilitätsbedingung zu verwickelt wird, wollen wir diese benutzen.

82. Unter bestimmten Voraussetzungen können wir noch andere einfache Näherungen anwenden.

Wenn wir uns vergegenwärtigen, daß $C : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^2$ und $D : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^3$ erste Potenzen von O, E hingegen zweite bzw. O im Produkt mit μ enthält, so dürfen wir erwarten, daß C und D gegenüber A und B von erster, E sogar von zweiter Ordnung klein ist. Dadurch wird einer Näherung

$$\lambda_4 = -\frac{E}{D}$$

geringe Größe erster Ordnung gegenüber λ_1 zugesprochen und Wurzeln λ_2, λ_3 aus:

$$B \cdot \lambda^2 + D = 0$$

solche von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Mit diesen sehr rohen Werten kommen wir auf bessere durch Substitutionen:

$$A \cdot \lambda^4 = -A \cdot \frac{D}{B} \cdot \lambda^2 \text{ und } E = -E \cdot \frac{B}{D} \cdot \lambda^2,$$

die endlich zu einer quadratischen Gleichung führen:

$$B \cdot \lambda^2 + \left(C - \frac{AD}{B} - \frac{EB}{D} \right) \cdot \lambda + D = 0. \quad (149)$$

Es geht daraus hervor, daß die Dämpfung der Schwingungen, die durch λ_2 und λ_3 bestimmt sind, mit

$$\frac{BCD - AD^2 - EB^2}{B^2 \cdot D} \quad (150)$$

erfolgt, wodurch die unmittelbare Beziehung zur Diskriminante Q

erhellt wird. Die Näherungen sind falsch und alle Wurzeln von gleicher Größenordnung, wenn ED von ähnlicher Größe wie $(D/B)^{\frac{1}{2}}$ ist, was nur eintritt, wenn $O \alpha^2$ vergleichbar wird. Gelten sie jedoch, so bedeutet λ_1 eine stark, λ_4 eine schwach gedämpfte, aperiodische Bewegung, und λ_2, λ_3 eine Schwingung von mittlerer Dauer, deren Dämpfungsfaktor dem von λ_4 verglichen werden kann.

83. Das Vorkommen der Ausdrücke, in denen sich der Einfluß der Schwere kund tut, ist zu beachten. Sie sind in E und D gekennzeichnet durch die Faktoren $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$. In den vereinfachten Koeffizientengleichungen haben sie durchgehends das Quadrat der Geschwindigkeit im Nenner. Sie allein drängen zu einer Rückkehr in eine bestimmte Lage gegenüber der Vertikalen. Sie außer Acht zu lassen, heißt auf inhärente Stabilisierung verzichten. Ihre Reduktion mit u_0^{-2} rührt daher, daß, während der Druck auf eine bewegte Fläche mit u_0^2 wächst, die Einwirkung der Gravitation (Erdbeschleunigung) sich nicht ändert und somit an Bedeutung verliert.

Fall I. Zwei Kielflossen in gleicher Höhe über dem Schwerpunkt.

84. Wir sahen bereits bei der Besprechung der einzelnen Kielflossen, daß $(x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha)$ in E positiv und in D negativ eintritt. Wir beseitigen diese Schwierigkeit, indem wir den resultierenden Druckpunkt auf die Ursprungsnormale des Tragflügels legen, womit $x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha = 0$ wird.

Für kleine Winkel α ist dann angenähert $x = 0$ oder mit Worten: der resultierende Druckpunkt liegt über dem Schwerpunkt; eine Anordnung, die Lanchester für die Stabilisierung empfiehlt.

Mit der Annahme, daß die Flossen gleich hoch liegen, verschwinden T_1 und P . Sind O_1 und O_2 ihre Flächen, x_1 und x_2 die Abszissen ihrer Druckpunkte, so ist:

$$T_2 = \frac{O_1 \cdot O_2}{O_1 + O_2} \cdot (x_1 - x_2)^2, \quad (151)$$

worin der letzte Faktor das Quadrat ihres Abstandes bedeutet.

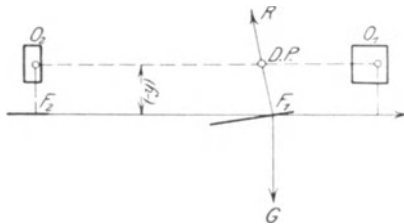


Fig. 30.

Soll E positiv werden, wie die Stabilität fordert, so müssen sich die Flossen über dem Schwerpunkt befinden ($y < O$).

Als Gleichung für D erhalten wir:

$$D: (\gamma \cdot x \cdot u_0)^3 = O \cdot T_2 \cdot V' - \frac{O \cdot G \cdot g}{\gamma^2 \cdot x^2 \cdot u_0^2} \cdot [(J \cdot y - Wx) \cdot \cos \mathcal{J} - (I \cdot x - Wy) \cdot \sin \mathcal{J}]. \quad (152)$$

Da x klein gegenüber y , wird D selbst für beträchtliche Werte von W positiv. Auch C unterwirft sich den Forderungen der Stabilität.

85. Die endgültige Bedingung $Q > O$ wird zu unübersichtlich, um Einsichten daraus zu entnehmen. Ich habe nach reichlicher Arbeit gefunden, daß, wenn μ klein ist, Q positiv wird für Werte:

$$(-y) < \frac{\gamma^2 \cdot x^2 \cdot u_0^2 \cdot V'^2}{G \cdot I \cdot g}. \quad (153)$$

Diese Bedingung ist demnach hinreichend. Man kann sich davon überzeugen, wenn man diese Substitution zunächst in $CD - EB$ und dann in

$$Q = (CD - EB) \cdot B - AD^2$$

einführt. Doch ist diese Arbeit ziemlich langwierig.

Behalten wir in (153) höhere Potenzen von μ bei:

$$(-y) < \frac{\gamma^2 \cdot x^2 \cdot u_0^2 \cdot V'^2}{G \cdot I \cdot g} \cdot \frac{1}{(1 + \mu^2)^2},$$

so bleiben in Q negative Größen stehen, wenn sie auch gegenüber den positiven bei gebräuchlichen Konstruktionen kaum mitsprechen; doch zeigt ihre Anwesenheit, daß für bestimmte Fälle außer (153) noch eine weitere Bedingung zu erfüllen ist. Die Frage ist vielleicht wert, sie später einmal wieder aufzugreifen.

Die vorläufige Stabilitätsbedingung kommt auf einfache Form, wenn wir uns der Gleichgewichtsbedingung:

$$G = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot F \cdot u_0^2 \cdot \sin \alpha$$

und der Definitionen:

$$I = G \cdot i^2, \quad V = F \cdot \zeta^2, \quad h = \frac{u_0^2}{2g}$$

erinnern.

$$(-y) \cdot 2h \cdot \sin^2 \alpha < \frac{\zeta^4}{i^2}.$$

Doch braucht man nicht einmal dieser Ungleichung Genüge zu tun, wenn die gesamte Flossenfläche O klein gegenüber der Fläche des Tragflügels F ist. Denn Glieder in Q von erster Ordnung in O und T_2 sind in der Tat immer überwiegend positiv.

Man sieht, daß diese Flossenanordnung innerhalb weiter Grenzen stätigend wirkt. Sogar die Änderungen der Flugrichtung gegen den Horizont (ϑ) sind von verschwindendem Einfluß, da beträchtliche Ausdrücke in D und E nur $\cos \vartheta$, nicht $\sin \vartheta$ als Faktor aufweisen. Ja, ein Flugzeug der Art würde sogar, falls es vollständig (um 180°) heringeworfen würde, so daß die Oberseite nach unten wiese, diese Lage, weil sie nicht stabil ist, wieder verlassen und sich aufrichten.

Fall II. Zwei Kielflossen in gleicher Höhe mit dem Schwerpunkt.

86. Mit $y = 0$ und $T_1 = P = 0$ führt die Stabilitätsbedingung $E > 0$, falls $\vartheta = 0$, auf $x \cdot \cos \alpha > 0$. Mit Worten, der resultierende Druckpunkt muß vor dem Schwerpunkt liegen.

Um positives D zu bekommen, müssen wir

$$T_2 > \frac{G \cdot x}{\gamma \cdot z} \quad (154)$$

machen.

E geht durch Null, wenn $\vartheta > \arctg . (2 \cdot \tg \alpha)$ wird. Dieser gefährliche Grenzwert wird also nicht einmal bei natürlichem Gleitflug erreicht. Denn dann ist $\vartheta = \alpha$ und gleichförmiger Abstieg unter steilerem Winkel ist nur denkbar bei sehr großem Stirnwiderstand oder Umkehrung der Drehrichtung der Schrauben.

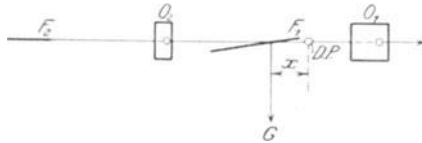


Fig. 31.

Immerhin ist die Möglichkeit einer steileren Flugrichtung nicht ausgeschlossen; sei es infolge bedeutenden Geschwindigkeitsverlustes (durch eine Boe), sei es durch ein „Luftloch“. In solchen Fällen geht das Flugzeug bei Überschreiten von $\vartheta \sim 2\alpha$ seiner Seiten bzw. Richtungsstabilität verlustig und besitzt Neigung, sich auf die Seite zu legen, gleichgültig, in welchem Maße es längsstabil sein mag. Denn die Eigenschaft der Symmetrie ließ beide Arten der Stabilität voneinander unabhängig erscheinen.

Erkenntnis der Gefahr und ihrer Ursache wird jedoch den Führer in den Stand setzen, der Lage Herr zu werden, wenn auch

die Störung durch Aussetzen des Motors oder Bruch von Verbindungen infolge ungewöhnlicher Beanspruchung oder eine seitliche Boe hervorgerufen war.

87. Mit den Näherungswerten des Abschnitt 79 finden wir:

$$\left(C - \frac{AD}{B}\right) : (\gamma \cdot x \cdot u_0)^2 = O \cdot V \cdot J + G \cdot V \cdot (Ox^2 + T_2). \quad (155)$$

Die Stabilitätsbedingung $Q > 0$ lautet dann:

$$T_2 > \frac{G \cdot x}{\gamma \cdot x} \left[1 + \frac{G \cdot J \cdot \cos \vartheta (2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \vartheta) \cdot g}{\gamma \cdot x \cdot u_0^2 [O \cdot J + G (O \cdot x^2 + T_2)]} \right]. \quad (156)$$

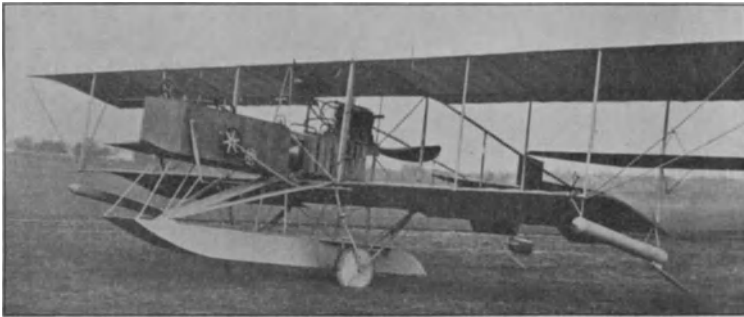


Fig. 32. Seitenstabilisierung durch eine Flosse vor — Führersitz — und eine hinter dem Schwerpunkt. — Flugzeugbau Friedrichshafen. (Kober.)

Wir gewinnen an Überblick, wenn wir der Bedingung eine strengere Form geben, deren Erfüllung hinreichend, aber nicht nötig ist, indem wir den Nenner im zweiten Klammerausdruck verkleinern um $G \cdot (O \cdot x^2 + T_2)$:

$$T_2 > \frac{G \cdot x}{\gamma \cdot x} \cdot \left[1 + \frac{G \cdot \cos \vartheta \cdot g}{u_0^2 O \cdot \gamma \cdot x} (2\mu - \operatorname{tg} \vartheta) \right],$$

die wir mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen überführen können

in:

$$T_2 > \frac{G \cdot x}{\gamma \cdot x} \cdot \left[1 + \frac{F \cdot \mu}{O} (2\mu - \operatorname{tg} \vartheta) \right].$$

Nach den Definitionen:

$$T_2 = O \cdot \xi^2 \quad \text{und} \quad J = G \cdot j^2$$

lautet (156)

$$O \cdot \xi^2 > \frac{G \cdot x}{\gamma \cdot x} \cdot \left[1 + \frac{F \cdot \mu}{O} (2\mu - \operatorname{tg} \vartheta) \frac{j^2}{j^2 + x^2 + \xi^2} \right] \quad \text{sein.}$$

Jedes Falls führt geeignete Dimensionierung (großer Abstand der beiden Flossen, kleine Abszisse (x) des resultierenden Druckpunkts) zur Stabilität. Dabei darf x auch wieder nicht zu klein sein, da sonst E verschwindet.

Der Flug wird um so weniger stetig, je steiler der Abstieg erfolgt; denn wie vorhin nimmt E ab mit wachsendem ϑ und ist ohne weiteres negativ, wenn $\text{tg } \vartheta = 2 \text{ tg } \alpha$.

Die Existenz zweier Grenzen für x ergibt sich notwendig daraus, daß E mit negativem Vorzeichen in Q erscheint. Es ist gerade in diesem Fall von besonderem Interesse, für ein Flugzeug von gegebenen Abmessungen die biquadratische Gleichung aufzustellen und zu lösen.

Fall III. Eine Kielflosse über, eine hinter dem Schwerpunkt.

88. Die Behandlung dieses Falles rührt von Mr. Harper her. Für die vordere Flosse O_1 verschwindet also die Abszisse,

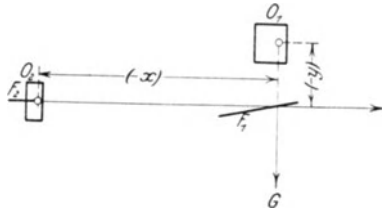


Fig. 33.

für die hintere O_2 die Ordinate. x und y bezeichnen vom vorstehenden abweichende, aber (auch ohne Index) eindeutige Werte:

$$\left. \begin{aligned}
 Z_w : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= O_1 + O_2 & Z_p : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= O_1 \cdot y \\
 Z_q : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= -O_2 \cdot x \\
 L_w : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= O_1 \cdot y & L_p : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= V' + O_1 \cdot y^2 \\
 L_q : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= -2 V' \cdot \mu \\
 M_w : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= -O_2 \cdot x & M_p : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= -V' \cdot \mu \\
 M_q : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_0 \right) &= 2 V' \cdot \mu^2 + O_2 \cdot x^2
 \end{aligned} \right\} (157)$$

Die Koeffizienten werden näherungsweise:

$$A = G (I \cdot J - W^2)$$

$$B : (\gamma \cdot x \cdot u_0) = G \cdot J \cdot V' + G \cdot (J \cdot y^2 \cdot O_1 + I \cdot x^2 \cdot O_2) \\ + (O_1 + O_2) \cdot (I \cdot J - W^2)$$

$$C : (\gamma \cdot x \cdot u_0)^2 = J \cdot V' (O_1 + O_2) + G \cdot V' \cdot x^2 \cdot O_2 \\ + O_1 \cdot O_2 \cdot (I \cdot x^2 - 2W \cdot x \cdot y + T \cdot y^2 + G^2 \cdot x^2 \cdot y^2) \\ - \frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot (I \cdot x \cdot O_2 - W \cdot y \cdot O_1)$$

$$D : (\gamma \cdot x \cdot u_0)^3 = V' \cdot O_1 \cdot O_2 \cdot x^2 - \frac{G}{\gamma \cdot x} \cdot (V' + O_1 \cdot y^2) \cdot x \cdot O_2 \\ + \frac{G \cdot g \cdot \cos \vartheta}{\gamma^2 \cdot x^2 \cdot u_0^2} \cdot (W \cdot x \cdot O_2 - J \cdot y \cdot O_1) \\ + \frac{G \cdot g \cdot \sin \vartheta}{\gamma^2 \cdot x^2 \cdot u_0^2} \cdot (W \cdot y \cdot O_1 - I \cdot x \cdot O_2)$$

$$E : (\gamma \cdot x \cdot u_0)^4 = \frac{G \cdot V' \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma^2 \cdot x^2 \cdot u_0^2} \cdot (2\mu - \operatorname{tg} \vartheta) \cdot (x \cdot O_2 - y \cdot O_1 \cdot \mu) \\ - \frac{G \cdot g}{\gamma^2 \cdot x^2 \cdot u_0^2} \cdot (x \cdot \cos \vartheta + y \cdot \sin \vartheta) \cdot x \cdot y \cdot O_1 \cdot O_2. \quad (158)$$

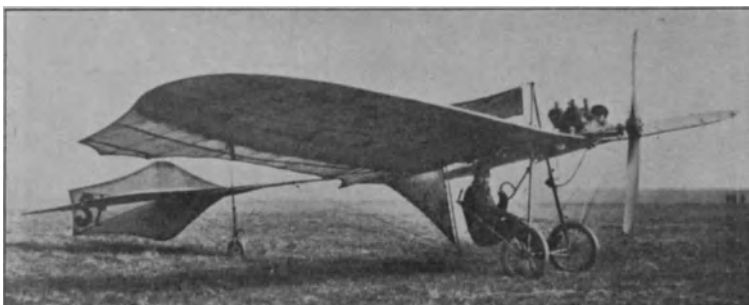


Fig. 34. Seitenstabilisierung durch eine Flosse über und eine hinter dem Schwerpunkt. (Grade.)

Mit verschwindendem Zentrifugalmoment W werden alle Koeffizienten außer E ohne weiteres positiv, wenn x und y negativ sind; also muß die eine Flosse über, die andere hinter dem Schwerpunkt liegen. Mit $\vartheta = 0$ wird $E > 0$ für

$$x \cdot y \cdot O_1 > 2V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad (159)$$

eine Bedingung, die gleichbedeutend ist mit:

$$x \cdot L_w + L_q > 0.$$

Daraus ergibt sich für den Abstand der hinteren Flosse eine untere Grenze.

Das Glied mit $\sin \mathcal{J}$ in E ist positiv; danach wächst die Stabilität mit \mathcal{J} , andererseits nimmt sie bei zu steilem Anstieg wieder ab.

89. In Betracht der Bedingung $CD - EB > 0$, ist für $\mathcal{J} = 0$ und kleine Flossen in EB allein das Produkt der unterstrichenen Ausdrücke positiv und maßgebend. Es wird jedoch durch das entsprechende Produkt in CD aufgehoben und damit erscheint der Forderung $CD - EB > 0$ ohne Einschränkung genügt.

Mr. Harper weist noch darauf hin, daß $x \cdot L_w + L_q > 0$ das Auftreten eines Moments durch den Luftwiderstand verlangt, das bei einer Kursänderung bestrebt ist, das Flugzeug nach der Außenseite der Bahn zu neigen.

Mehrere horizontale Flächen.

90. Mehrere Flächen mit Eigen-Trägheitsmomenten $V_1, V_2 \dots$ und Anstellwinkeln $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ können für Rechnungen der Seitenstabilisierung ersetzt werden durch ein Substitution.

Wir bilden die Summe der Vektoren $(V_1, 2\alpha_1), (V_2, 2\alpha_2) \dots$, und erhalten $(V, 2\alpha)$. Dann bestehen analytische Beziehungen der Art:

$$V_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + V_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 = V \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} (V_1 + V_2 - V)$$

$$V_1 \cdot \sin^2 \alpha_1 + V_2 \cdot \sin^2 \alpha_2 = V \cdot \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (V_1 + V_2 - V)$$

$$V_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 + V_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 = V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (160)$$

Für L_q und M_p vertritt $V\alpha$ die Flächen $E_1, F_2 \dots$ vollkommen. L_p und M_q wachsen um den gleichen Betrag, als wenn T_1 und T_2 um $\frac{1}{2} (V_1 + V_2 - V)$ zugenommen hätten.

Der Einfluß geht dahin, im allgemeinen die Stabilität zu erhöhen (besonders für Fall I und II). Da $\alpha_1 - \alpha_2$ klein ist, wird es $V_1 + V_2 - V$ von noch höherer Ordnung sein; und der Zuwachs an Stabilität ist wesentlich T_2 zuzuschreiben, während T_1 von untergeordnetem Einfluß bleibt.

„Schädliche“ Widerstände.

Drehmoment der Schrauben.

91. Wie in Abschnitt 57 können wir Einflüsse durch Stirnwiderstand der Verspannungen und Versteifungen, ferner durch

Tangentialwiderstände der Tragflügel usf. berücksichtigen, indem wir die Widerstandsableitungen um Beträge (Z' , L' , M') w , p , q erhöhen.

Die meisten dieser Größen werden gewöhnlich durchaus unbeträchtlich sein; es gilt hier nur ihren Einfluß oberflächlich abzuschätzen. Einzig Versuche mit Modellen können darüber endgültiges aussagen. Das Zusatzmoment M_q' wird nicht außer Acht bleiben dürfen, da das zur Stützung des Schwanzes benötigte Fachwerk, wegen der großen Geschwindigkeiten bei einer schnellen Kursänderung (q) große Widerstände an langem Hebelarm hervortreten läßt. M_q wäre in (143) dem Ausdruck mit T_2 hinzuzufügen; wirkt danach als Vergrößerung von T_2 , wie wir schon sahen, stetigend.

Besitzt das Flugzeug (wie die Wright-Doppeldecker) zwei Schrauben, so hat bei einer horizontalen Richtungsänderung die äußere eine größere, die innere eine kleinere „Marschgeschwindigkeit“ als bei gleichförmigem Flug. Die Folge ist ein Abnehmen der äußeren, eine Zunahme der inneren Schubkomponente; also ein weiteres Moment entgegen der eingeleiteten Bewegung ($M_q' > 0$).

Aus einfachen Überlegungen geht hervor, daß, wenn die Geschwindigkeit (u_0) der Bedingung größter Leistungsfähigkeit des Flugzeugs (Abschnitt 57) einigermaßen entspricht (so daß also der Stirnwiderstand von ähnlicher Größe wie der aerodynamische „Rücktrieb“ ist), M_q' und noch vielmehr L_p' kleiner als $2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V \cdot \sin^2 \alpha$ sind. Danach ist L_p' gegenüber $\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V \cdot \cos^2 \alpha$ zu vernachlässigen. Denn der Drehungswiderstand durch die konstruktiven Einzelheiten gegen p ist ohne Belang gegenüber der bedeutenden Dämpfung durch die Tragflächen; er gäbe sich kund in einem sehr geringen Zuwachs des an sich schon kleinen Trägheitsmoments T_1 der Flossen. Die Momente M_p' und L_q' werden neben M_q' und L_p' vollends unbeträchtlich. Schlimmstenfalls sind sie von der Größenordnung $2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$ und somit klein gegenüber den Wirkungen der Tragflächen $\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Sind sie einander gleich, so haben sie gleichen Einfluß wie eine Änderung des Zentrifugalmoments P der Flossen. Falls es sich wirklich nötig erweisen sollte, sind sie leicht einzuführen.

Die seitlichen Widerstände der wirklichen Flugzeuge

$$Z_w, Z_p, Z_q, L_w, M_w$$

sind nicht so ohne weiteres zu erledigen. Tiefe Schwerpunktslage wird Z_p' und L_w' , langer Schwanz Z_q' und M_w' vergrößern. Diese Zusatzkräfte und Momente treten in kleinen Gliedern der Determinantengleichung für λ auf, und sind Ausdrücken zugeordnet, die von den Flossen herrühren, also gewöhnlich nicht sehr groß sind. Ist, wie fast immer, $Z_p' = L_w'$ und $Z_q' = M_w'$, so darf für die Rechnung ihr Einfluß zusätzlichen Kielflossen zugeschrieben werden. Z_p' und L_w' haben dann gleichen Erfolg im Produkt $O \cdot x$, wie ein Flächenzuwachs der Flossen oder ein Vorrücken des Druckpunkts auf denselben. Diese Auslegung vermittelt vielleicht bessere Erkenntnis als rein rechnerisches Vorgehen. Bei diesem würde es sich empfehlen, die Zusätze $Z_w' \dots M_q'$ nur in erster Potenz in die biquadratische Gleichung und ihre Koeffizienten aufzunehmen.

Sind die Beziehungen $Z_p' = L_w'$ und $Z_q' = M_w'$ ausnahmsweise nicht erfüllt, so lassen sich Z_w', L_w', M_w' durch Steigerung der Werte von $O, O \cdot y$ und $-O \cdot x$ in der ersten Zeile der Determinante berücksichtigen. Von Bedeutung wird für die Koeffizienten jedoch lediglich der Zuwachs von $-O \cdot x$ in D .

Abgesehen von der Kreiselwirkung, hat das Drehmoment der Schraube Einfluß auf das Gleichgewicht und damit auch auf die Stabilität. Dieses Moment, welches vom Motor aus auf das Flugzeug übertragen wird, ist der Drehrichtung der Schraube entgegen gerichtet und nimmt daher ab, wenn eine Drehung des Flugzeugs in diesem Sinne einsetzt. Es ändert sich dann L_p . Die Einwirkung auf die Stabilität ist jedoch sehr geringfügig.

Reibung und Flügelwölbung.

92. Wir greifen zurück auf die Korrekturen in Abschnitt 69, die die Reibung für die Längsstabilität notwendig machte. Die Resultierende des Luftwiderstandes steht dann nicht mehr normal zur Fläche, und dies macht sich geltend im Wert für:

$$V' = V \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha'$$

und damit auch in:

$$\left. \begin{aligned} L_p &= \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V' & L_q &= -2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V' \cdot \mu \\ M_p &= -\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V' \cdot \mu' & M_q &= 2 \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0 \cdot V' \cdot \mu \cdot \mu' \end{aligned} \right\} (161)$$

Um den Einfluß der Wölbung der Tragfläche zu beurteilen, haben wir uns der Definition der „schmalen“ Flügel zu erinnern. Danach ist es statthaft, bei Winkelgeschwindigkeiten \dot{p} um die Längsachse die Druckpunktverschiebung des einzelnen Flügелеlements seinem Abstand von der Symmetrieebene proportional zu setzen. $d\alpha = -\frac{z \cdot \dot{p}}{u}$.

Die Wanderung $a \cdot \varphi'(\alpha) \cdot d\alpha$ der Widerstandsresultierenden bringt bei einer mit Krümmungsradius c gewölbten Fläche eine Richtungsänderung $d\alpha' = -\frac{a \cdot \varphi'(\alpha) \cdot d\alpha}{c}$ mit sich. (162)

Der zusätzliche Rücktrieb, den jedes Flügелеlement dF erfährt, beträgt $dR \cdot \cos \alpha' \cdot d\alpha'$ und wirkt am Hebelarm z . So tritt also zu M_p ein Glied:

$$\int \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_o \cdot \frac{a}{c} \cdot \varphi'(\alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha' \cdot z^2 \cdot dF.$$

Für einen rechteckigen Flügel von unveränderlicher Krümmung wird:

$$M_p = -\frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_o \cdot V' \cdot \left(\mu' - \mu \cdot \varphi'(\alpha) \cdot \frac{a}{c} \right) \quad (163)$$

und:

$$L_p = \frac{\gamma}{g} \cdot x \cdot u_o \cdot V' \cdot \left(1 + \mu \cdot \mu' \cdot \varphi'(\alpha) \cdot \frac{a}{c} \right). \quad (164)$$

Der letzte Klammerausdruck zeigt, daß ein Nachtrag für L_p nicht gemacht zu werden braucht. Er kann unmittelbar der Einheit gleich gesetzt werden. Dem gegenüber fällt die Änderung von M_p ins Gewicht. Sie war ermittelt unter der Annahme, daß $\frac{a}{c} \cdot \varphi'(\alpha)$ unveränderlich über die ganze Breite des Flügels hin sei und daher vor das Integral treten dürfe. Die Korrektur ist also noch zutreffend für einen Flügel beliebigen Formats, wenn nur der Querschnitt mit konstantem Zentriwinkel ($\sim \frac{a}{c}$) durchgeführt ist. Ich darf noch einmal daran erinnern, daß nach unserer Festsetzung $\varphi'(\alpha)$ negativ ist, wenn mit wachsendem Anstellwinkel der Druckpunkt zurück wandert.

Unter der Bedingung, daß das Zentrifugalmoment W verschwindet, werden die Koeffizienten B garnicht und C in durchaus geringfügigem Maße von dem Einfluß der Wölbung berührt. Dieser ist jedoch für D und das Glied mit $\sin \vartheta$ in E bedeutend. Das Glied mit $\cos \vartheta$ in E bleibt, wie es war.

Einfluß des Seitenverhältnisses und der endlichen Breite der Tragflächen.

93. Wir setzen voraus, daß der Koeffizient α für alle Flossen und Flügel derselbe sei. In der Tat ist nun aber α Funktion des Seitenverhältnisses, so gut wie der Wölbung. Die Einführung dieser neuen Variablen wäre aber den mathematischen Entwicklungen nur hinderlich gewesen; nichts steht jedoch im Wege, jede Fläche entsprechend ihrem Format auf einen unveränderlichen Koeffizienten zu reduzieren und diese „reduzierten“ Flächen in die Formeln einzusetzen.

Für die Seitenstabilität spielt die endliche Breite der Tragflächen noch eine Rolle, insofern sich an deren äußeren Enden nicht das vorausgesetzte zweidimensionale Strömungsbild verwirklicht, sondern ein Abströmen über die Kanten statthat. Das gibt zu einer Prüfung des Wertes V Anlaß in betreff seiner Veränderlichkeit mit dem Format der Flügel. Lanchester hat eine Verbesserung in der Richtung ohne weiteres vorgenommen, indem er zwei verschiedene Werte für den Flächenträgheitsradius ζ gibt: den „aerodynamischen“ und „aerodromischen“ Radius. (Abschnitt 77.) Der eine ist in L_p und M_p , der andere in L_q und M_q einzuführen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werte von V' mit V_1' und V_2' in den Gleichungen der Koeffizienten, wie sie näherungsweise in Abschnitt 79 gegeben wurden, so tritt durchweg V_1' an Stelle von V' bis auf den Teil mit $\cos \vartheta$ in E , wo V' durch V_2' zu ersetzen wäre. Dort müßte es statt:

$$V' \cdot (2\mu \cdot \cos \vartheta - \sin \vartheta)$$

heißen

$$V_2' \cdot 2\mu \cdot \cos \vartheta - V_1' \cdot \sin \vartheta.$$

In erster Näherung bringt die Verschiedenheit der beiden Radien dem Grenzwert des Abstiegs winkels einen Zuwachs, denn dieser wird:

$$\vartheta \sim 2\mu \cdot \frac{V_2'}{V_1'} \quad \text{statt} \quad \vartheta \sim 2\mu. \quad (165)$$

Gleichheit der beiden Radien macht diesen Einfluß zunichte; dann ist nur noch ihr Unterschied gegenüber ζ zu berücksichtigen.

Die Strömungen um zwei hintereinander liegende Flossen sind verknüpft. Leicht könnte dies rechnerisch in den Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden. Die Verknüpfung ist weniger innig und tritt daher kaum in Rechnung, wenn sich die Flossen auf verschiedener Höhe befinden.

VIII. Seitenstabilität. — Aufgebogene Flügel.

Vergleich aufgebogener Flügel mit Kielflossen.

94. Manche Flugzeugtypen weisen an den Enden oder gleich von der Mitte her aufgebogene Flügel auf. Es ist die Frage zu beantworten, inwieweit eine derartige Maßnahme in ihrer stabilisierenden Wirkung der Anordnung von Kielflossen vergleichbar ist.

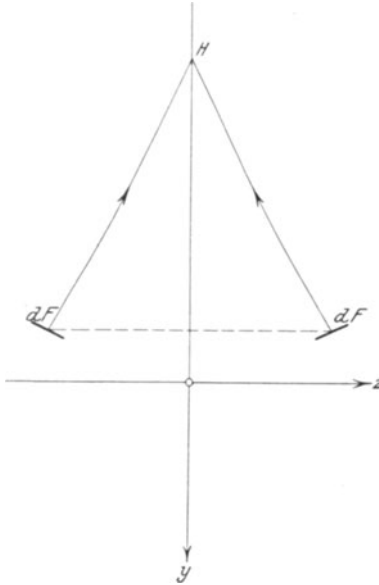


Fig. 35.

Die Widerstandsresultierenden zweier symmetrisch liegender Flächenelemente schneiden sich in einem Punkt H über dem Schwerpunkt. Sie sind daher einer Kraft in der Symmetrieebene durch H identisch. Ihre Komponenten normal zur x - y -Ebene sind Drücken auf eine Vertikal-Flosse mit dem Druckpunkt in H vergleichbar. Da die Geschwindigkeiten für die Flächenelemente und H jedoch bei ungleichförmiger Bewegung verschieden sind, ist hierfür

die Beziehung nicht mehr durchaus gültig.

Sind ξ und η die Ordinaten von H , so ist die Gleichung der Normalen des Flächenelements dF :

$$\frac{x - \xi}{l} = \frac{y - \eta}{m} = \frac{z - 0}{n}. \quad (166)$$

Danach: $lz - nx = -n\xi, ny - mz = n \cdot \eta,$

oder: $2lz - nx = -2n\xi + nx = -n\xi + lz.$

Wir erhalten als neue Widerstandsableitungen:

$$\left. \begin{aligned}
 Z_w : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= \int n^2 \cdot dF, & Z_p : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= \int n^2 \eta \cdot dF, \\
 Z_q : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= - \int n^2 \cdot (2\xi - x) \cdot dF \\
 L_w : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= \int n^2 \cdot \eta \cdot dF, & L_p : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= \int n^2 \cdot \eta^2 \cdot dF \\
 L_q : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= - \int n^2 \cdot \eta \cdot (2\xi - x) \cdot dF \\
 M_w : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= - \int n^2 \cdot \xi \cdot dF, & M_p : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= \\
 - \int n^2 \xi \cdot \eta \cdot dF, & M_q : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) &= + \int n^2 \cdot \xi \cdot (2\xi - x) \cdot dF
 \end{aligned} \right\} (167)$$

In den ersten zwei Kolonnen ist ein Element dF gleichwertig einem $dF \cdot n^2$ in der Symmetrieebene. In der dritten Kolonne kommt jedoch an Stelle von ξ der Faktor $(2\xi - x)$ vor und Gleichwertigkeit gilt nur im Fall $\xi = x$. Diese forderte daher $l = 0$, d. h. die dF müßten parallel der x -Achse liegen. Das bedeutet aber vollständigen Verlust des Auftriebs bei stetigem Flug. Vollkommene Gleichwertigkeit in betreff der Seitenstabilität verspricht ein Ersatz der Aufbiegung des Tragflügels durch an deren Enden unter β aufgedrehte, der x -Achse parallele Flächen, welche wir schlechtweg als Klappen bezeichnen wollen, auch wenn sie nicht gerade in der Flugrichtung liegen. Für diese ist $l = 0$, $m = \cos \beta$, $n = \sin \beta$, ihr Flächeninhalt möge je $\frac{O}{2}$, also zusammen O betragen. Ihre Wirkung ist die einer Flosse vom Inhalt $O \cdot \sin^2 \beta$ in einer Höhe $z \cdot \cot \beta$, wenn $\pm z$ die Ordinaten z ihrer Druckpunkte sind.

Zwei Tragflügel mit Klappen hintereinander sind danach solchen ohne Klappen mit zwei Kielflossen über dem Schwerpunkt gleichwertig, eine Anordnung, die nach der Untersuchung des Abschnitts 84 als weitgehend stabil bezeichnet werden durfte. Die Anwendung von Klappen bietet jedoch Vorteile, die an anderer Stelle zu erörtern wären.

95. Geben wir den Klappen beliebigen Anstellwinkel, so gilt:

$$l = \sin \alpha, \quad m = \cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad n = \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad (168)$$

Mit $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ und $dF' = dF \cdot \cos^2 \alpha$
 ferner: $ny - mz = \cos \alpha (y \cdot \sin \beta - z \cdot \cos \beta)$
 $lz - nx = \cos \alpha (\mu z - x \cdot \sin \beta)$
 $2lz - nx = \cos \alpha (2\mu z - x \cdot \sin \beta)$

Schließlich werden, wenn für $z \cdot \cos \beta - y \cdot \sin \beta = \chi$ tritt, die Ableitungen in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
 Z_w &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = \int \sin^2 \beta \cdot dF' \\
 Z_p &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = - \int \sin \beta \chi \cdot dF' \\
 Z_q &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = \int \sin \beta (2 \mu z - x \cdot \sin \beta) \cdot dF' \\
 L_w &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = - \int \sin \beta \cdot \chi \cdot dF', \quad L_p : \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = \int \chi^2 \cdot dF' \\
 L_q &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = - \int \chi \cdot (2 \mu z - x \cdot \sin \beta) \cdot dF' \\
 M_w &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = \int \sin \beta \cdot (\mu \cdot z - x \cdot \sin \beta) \cdot dF' \\
 M_p &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot n_o \right) = - \int \chi \cdot (\mu \cdot z - x \cdot \sin \beta) \cdot dF' \\
 M_q &: \left(\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_o \right) = \int (2 \mu \cdot z - x \cdot \sin \beta) \cdot (\mu \cdot z - x \cdot \sin \beta) \cdot dF' \quad (169)
 \end{aligned}$$

Zu sehr viel einfacheren Ausdrücken gelangen wir, wenn $x \cdot \sin \beta$ gegenüber $\text{tg } \alpha \cdot z$ außer acht fällt. Dies trifft zu für ein einfach tragendes System mit aufgebogenem Tragflügel oder für zwei schwach aufgebogene Tragflügel von beträchtlicher Breite bei geringem horizontalem Abstand unter großem Anstellwinkel ($\alpha > \beta$).

Einzelner Tragflügel mit Klappen.

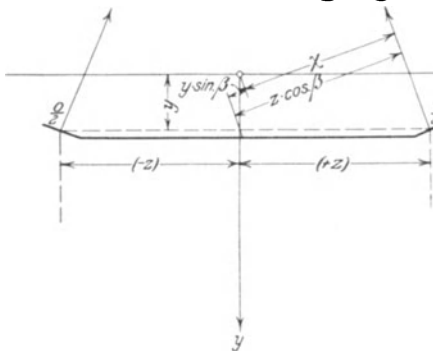


Fig. 36.

96. Mr. Harper verdanke ich die folgende Untersuchung eines einzelnen ebenen Flügels mit Klappen, deren Anstellwinkel α' von Null verschieden ist und deren Mittelpunkte der Lage nach durch die Ordinaten $y, \pm z$ in der Ebene $x = 0$ bestimmt sind; dann ist die Strecke χ

die Entfernung der Druckpunktsnormalen der Klappen vom Schwer-

punkt.¹⁾ Der Winkel β darf ersichtlich nicht zu klein sein, damit die erwünschte Wirkung eintritt.

Wir bedienen uns wieder der Symbole $O \cdot \cos^2 \alpha' = O'$ und $\mu' = \text{tg } \alpha'$ und verweisen betreffs der Verschiedenheit der α -Werte für O und F , die von Bedeutung sein kann, auf Abschnitt 93. Man hat danach in (169) nur $\mu' \cdot O'$ für $\mu \cdot \int dF'$ und $x = 0$ einzuführen und den Werten (136) für die Tragfläche zuzuzählen, um λ zu ermitteln:

$$\left[\begin{array}{l} G \cdot \lambda' \quad \frac{G \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot \frac{1}{\lambda'} \quad - \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} - \frac{G \cdot \sin \vartheta \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot \frac{1}{\lambda'} \\ + O' \cdot \sin^2 \beta, \quad - O' \cdot \chi \cdot \sin \beta, \quad + 2 O' \cdot \mu' \cdot z \cdot \sin \beta, \\ - O' \cdot \chi \cdot \sin \beta, \quad I \cdot \lambda' + V' + O' \cdot \chi^2, \quad - W \cdot \lambda' - 2 V' \cdot \mu - 2 O' \cdot \mu' \cdot z \cdot \chi, \\ O' \cdot \mu' \cdot z \cdot \sin \beta, \quad - W \cdot \lambda' - V' \cdot \mu - O' \cdot \mu' \cdot z \cdot \chi, \quad J \cdot \lambda' + 2 \cdot V' \cdot \mu^2 + 2 O' \cdot \mu'^2 \cdot z^2, \end{array} \right] = 0. \quad (170)$$

worin $\lambda' = \lambda : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)$.

Es ergeben sich die Koeffizienten:

$$\left. \begin{array}{l} A = G \cdot (I \cdot J - W^2) \\ B : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0) = O' \cdot \sin^2 \beta (I \cdot J - W^2) + G [2I(V' \cdot \mu^2 + O' \cdot z^2 \cdot \mu^2) - 3W(V' \cdot \mu + O' \cdot z \cdot \chi \cdot \mu') + J(V' + T' \cdot \chi^2)] \\ C : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^2 = O' \cdot V' \cdot \sin^2 \beta (2I \cdot \mu^2 - 3W\mu + J) \\ \quad + 2G \cdot V' \cdot O' (\mu \cdot \chi - \mu' z)^2 + \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot O' \sin \beta (I \cdot \mu' \cdot z - W \cdot \chi) \\ D : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^3 = - \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot O' \cdot V' \cdot \sin \beta (\mu \cdot \chi - \mu' \cdot z) \\ \quad + \frac{G \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot T' \sin \beta [(I \cdot \mu' \cdot z - W \cdot \chi) \cdot \sin \vartheta - (W \cdot \mu' \cdot z - J \cdot \chi) \cos \vartheta] \\ E : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^4 = \frac{G \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot O' \cdot V' \cdot \sin \beta (\mu \cdot \chi - \mu' \cdot z) \\ \quad (2 \mu \cdot \cos \vartheta - \sin \vartheta). \end{array} \right\} \quad (171)$$

Um E positiv zu halten, muß einerseits χ positiv und größer als $z \cdot \frac{\mu'}{\mu}$ sein, d. h. die Resultierenden der beiden Klappen müssen sich über dem Schwerpunkt schneiden, nicht unterhalb; andererseits darf wieder der Abstieg nicht steiler als unter $\vartheta = \text{arc tg } (2 \text{ tg } \alpha)$ erfolgen.

¹⁾ Genau nur für Anstellwinkel $\alpha' = 0$. (Der Übersetzer.)

Wird der ersten Bedingung zu weitgehend Genüge getan, so wird leicht D negativ. Für $\mathcal{J} = 0$, $W = 0$ ist auch dieser Gefahr vorgebeugt, wenn

$$\frac{J \cdot g}{V' \cdot \gamma \cdot \kappa \cdot u_0^2} \cdot \chi > \mu \cdot \chi - \mu' \cdot z \quad (172)$$

oder:

$$z \cdot \operatorname{tg} \alpha' > \chi \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{J \cdot g}{V' \cdot \gamma \cdot \kappa \cdot u_0^2} \right). \quad (173)$$

Für beliebige positive Werte χ und positive Anstellwinkel ($\alpha' \geq 0$) der Klappen, die doch wohl ausschließlich in Frage kommen, ist die Bedingung also erfüllt, falls

$$J > \frac{\gamma}{g} \cdot u_0^2 \cdot V \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad \text{ist.} \quad (174)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$G = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 (F \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + O \cdot \sin \alpha' \cdot \cos \alpha' \cdot \cos \beta) \quad (175)$$

läßt sich hierfür eine bessere Form gewinnen, wenn wir das zweite Glied der Klammer gegenüber dem ersten vernachlässigen:

$$\frac{J}{G} > \frac{V}{F} \quad \text{oder} \quad j^2 > \zeta^2. \quad (176)$$

Dies gilt selbst für den Fall, daß O/F vergleichbar mit der Einheit wird, wenn nur α' klein gegenüber α ist.

Wird Ungleichung (176) nicht befriedigt, so ist Stabilisierung noch dadurch möglich, daß man den Klappen negativen Anstellwinkel ($\alpha < 0$) gibt.

E und D werden positiv, wenn

$$1 > \frac{z \cdot \operatorname{tg} \alpha'}{\chi \cdot \operatorname{tg} \alpha} > 1 - \frac{j^2}{\zeta^2}. \quad (177)$$

Falls die Klappen auf gleicher Höhe mit dem Schwerpunkt ($y = 0$) liegen, ist $\chi : z = \cos \beta$ und (177) fordert, daß

$$\alpha' < \cos \beta \cdot \alpha \quad \text{sei.}$$

Ist das Zentrifugalmoment W negativ, so wächst mit C und D auch die Stabilität.

97. Die vollständige Stabilitätsbedingung

$$Q > 0$$

zu entwickeln, würde zu weit führen. Es ist jedoch von Interesse, die angenäherte

$$CD > EB$$

zu erörtern. Wir nehmen an, daß W und \mathcal{J} verschwinden und O sowie μ klein sind. Dann ist es μ' nach (172) in noch höherem Maße. Damit nähert sich:

$$\frac{C}{B} : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0) \sim \frac{O' \cdot \sin^2 \beta}{G}$$

und führt zur Bedingung $\left(\frac{C}{B} > \frac{E}{D}\right)$:

$$\frac{2\mu \cdot G}{O' \cdot \sin^2 \beta} < \frac{J \cdot \chi}{V' \cdot (\mu \cdot \chi - \mu' \cdot z)} - \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2,$$

oder:
$$\mu \cdot \chi - \mu' \cdot z < \frac{J \cdot \chi}{V' \cdot \left(\frac{2\mu \cdot G}{O' \cdot \sin^2 \beta} + \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2\right)},$$

was schließlich auch geschrieben werden kann:

$$\chi \cdot \operatorname{tg} \alpha - z \cdot \operatorname{tg} \alpha' < \frac{J \cdot \chi}{V \cdot G \cdot \left(\frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{O \cdot \cos^2 \alpha' \cdot \sin^2 \beta} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{F}\right)}. \quad (178)$$

Es ist wohl zu beachten, daß der eben besprochene Typ keine Schwanzflosse besitzt. Den Einfluß einer solchen kann man natürlich auch verfolgen; aber es war in diesem einfachsten Fall nicht ratsam, sie einzubeziehen, zumal der nächste Abschnitt zu ähnlichen Entwicklungen führt. Die Möglichkeit, durch negativen Anstellwinkel der Klappen zu stabilisieren, ist von Interesse im Hinblick auf Veröffentlichungen über den Dunne-Zweidecker.

Theorie des Antoinette-Typ.

98. Die Behandlung dieses Gegenstandes erfolgte durch Mr. E. H. Harper. Es soll unter dem Antoinette-Typ ein einfachtragendes System mit aufgebogenem Tragflügel und einer vertikalen Schwanzflosse verstanden werden. Bei derartiger Anordnung ergibt sich die Notwendigkeit, den Schwerpunkt unter den Winkelscheitel des Tragflügels zu legen. Die Schwanzflosse möge jedoch auf gleicher Höhe mit dem Schwerpunkt liegen. Den Einfluß einer horizontalen Schwanzflosse, der wesentlich der Längsstabilität gilt, blieb außer Acht.

Bedeutet P (in Fig. 37) einen Punkt des Flügels mit dem Koordinaten x, y, z , so sei ρ der Abstand der Flügelnormalen in P vom Winkelscheitel und $\rho + \varepsilon$ von der x -Achse. Dann ist

$$\rho = z : \cos \beta \quad \text{und} \quad \rho + \varepsilon = z \cdot \cos \beta - y \cdot \sin \beta,$$

die Druckpunktsordinaten der Flosse sind x, o, o ; x ist negativ, wenn die Flosse hinter dem Tragflügel liegt.

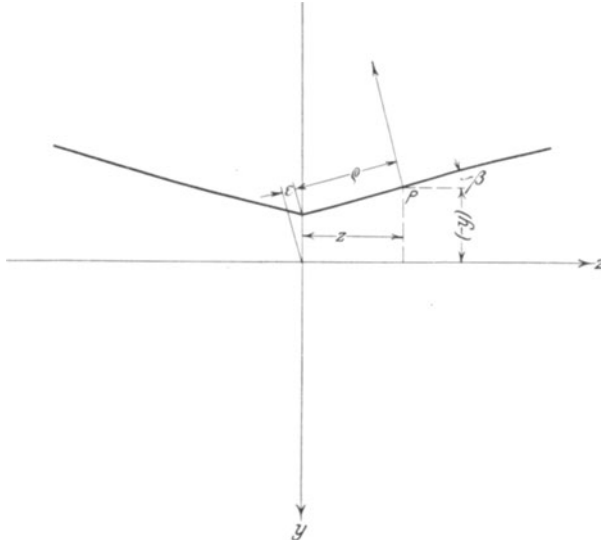


Fig. 37.

Die Gleichung für $\lambda' = \lambda : (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)$ läßt sich herleiten aus der Determinante:

$$\begin{vmatrix}
 G \cdot \lambda' + O & \frac{G \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot \frac{1}{\lambda'} & -\frac{G}{\gamma \cdot \kappa} - \frac{G \cdot \sin \vartheta \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot \frac{1}{\lambda'} \\
 + \int \sin^2 \beta \cdot dF', & -\int (\varrho + \varepsilon) \cdot \sin \beta \cdot dF', & + 2 \int \mu \cdot \varrho \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot dF' - x \cdot O, \\
 -\int (\varrho + \varepsilon) \cdot \sin \beta \cdot dF', & -I \cdot \lambda' & -W \cdot \lambda' \\
 & + \int (\varrho + \varepsilon)^2 \cdot dF', & -2 \int \mu \cdot \varrho (\varrho + \varepsilon) \cdot \cos \beta \cdot dF', \\
 \int \mu \cdot \varrho \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot dF' - W \cdot \lambda' & & -J \cdot \lambda' + x^2 \cdot O \\
 -x \cdot O, & -\int \mu \cdot \varrho (\varrho + \varepsilon) \cdot \cos \beta \cdot dF', & + 2 \int \mu^2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot dF', \\
 & & = 0. \quad (179)
 \end{vmatrix}$$

Gemäß den Annahmen bei Definition der „schmalen“ Flügel (Abschnitt 76) sind die Werte der Integrale zutreffend, selbst wenn α und β beliebige, aber bekannte Funktionen im Raum sind (Vogelflügel). Für ein allgemeines Urteil eignen sich jedoch nur die einfachsten Voraussetzungen, nach denen α , β und ε unveränderlich sind.

Wir schreiben dann:

$$\int (\varrho + \varepsilon)^2 \cdot dF' = F' [(\varrho_0 + \varepsilon)^2 + \sigma^2].$$

Darin bedeutet ersichtlich $(\varrho_0 + \varepsilon)$ den Abstand der Resultierenden einer Flügelhälfte von der x -Achse und σ den Trägheitsradius der Flügelhälfte um ihre Mittellinie parallel der x - y -Ebene. Dann ist u. a.:

$$\int \varrho^2 \cdot dF' \cdot \int \cdot dF' - (\int \varrho \cdot dF')^2 = F'^2 \cdot \sigma^2.$$

Alle anderen Unterdeterminanten vereinfachen sich in ähnlicher Weise. Lediglich mit dieser Substitution bekommen wir die Koeffizienten in der Form:

$$A = G (I \cdot J - W^2).$$

$$B: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0) = G \cdot [2I \cdot \mu^2 \int \varrho^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot dF' - 3W \cdot \mu \int \varrho (\varrho + \varepsilon) \cos \beta \cdot dF' + J \int (\varrho + \varepsilon)^2 \cdot dF'] + (I \cdot J - W^2) \cdot F' \cdot \sin^2 \beta + O [(I \cdot J - W^2) + G \cdot I \cdot x^2].$$

$$C: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^2 = F'^2 \cdot \sigma^2 [(2I \cdot \mu^2 \cdot \cos^2 \beta - 3O \cdot \mu \cdot \cos \beta + J) \cdot \sin^2 \beta + 2G \cdot \varepsilon^2 \cdot \mu^2 \cdot \cos^2 \beta] + \frac{G \cdot \sin \beta}{\gamma \cdot \kappa} \cdot [I \cdot \mu \cdot \cos \beta \int \varrho \cdot dF' - W \int (\varrho + \varepsilon) \cdot dF'] + O [G \cdot x^2 \int (\varrho + \varepsilon)^2 \cdot dF' + I \int (2\varrho^2 \cdot \mu^2 \cdot \cos^2 \beta + 3\mu \cdot \varrho \cdot x \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + x^2 \cdot \sin^2 \beta) \cdot dF' - W \int (3\mu \cdot \varrho \cdot \cos \beta + 2x \cdot \sin \beta) \cdot (\varrho + \varepsilon) \cdot dF' + J \int (\varrho + \varepsilon)^2 \cdot dF' - \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot I \cdot x].$$

$$D: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^3 = -\frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot F'^2 \cdot \sigma^2 + \frac{G \cdot \sin \beta \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot [(I \cdot \sin \vartheta - W \cdot \cos \vartheta) \cdot \mu \cdot \cos \beta \int \varrho \cdot dF' + (J \cdot \cos \vartheta - W \cdot \sin \vartheta) \int (\varrho + \varepsilon) \cdot dF'] + O [(2\varepsilon^2 \cdot \mu^2 \cdot \cos^2 \beta - 3x \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + x^2 \cdot \sin^2 \beta) \cdot F'^2 \cdot \sigma^2 - \frac{G}{\gamma \cdot \kappa} \cdot x \int (\varrho + \varepsilon)^2 \cdot dF' + \frac{G \cdot x \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot (W \cdot \cos \vartheta - I \cdot \sin \vartheta)].$$

$$E: (\gamma \cdot \kappa \cdot u_0)^4 = \frac{G \cdot \varepsilon \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot (2\mu \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \beta - \sin \vartheta) \cdot F'^2 \cdot \sigma^2 \cdot \mu \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + \frac{G \cdot O \cdot g}{\gamma^2 \cdot \kappa^2 \cdot u_0^2} \cdot [x^2 \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \beta \int (\varrho + \varepsilon) \cdot dF' + 2x \cdot \mu \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \beta \int \varrho \cdot (\varrho + \varepsilon) \cdot dF' - x \cdot \sin \vartheta \int (\varrho + \varepsilon)^2 \cdot dF']. \quad (180)$$

99. Fall I. — Keine Kielflosse: $O = 0$.

In A , B und E sind alle Glieder positiv bis auf einige, die W in erster Potenz enthalten. Unter diesen sind die doppelt unterstrichenen auch noch von untergeordneter Bedeutung. Jedenfalls ist Verschwinden oder gar ein negativer Wert von W vorteilhaft, auch in Hinsicht der Koeffizienten C und D .

Wir setzen $W = 0$. E ist größer als Null, wenn für $\vartheta = 0$ $\varepsilon \cdot \sin \beta > 0$. $D > 0$ fordert $\sin \beta > 0$, also muß auch ε positiv sein; in Worten: die Flügel müssen herauf-, nicht heruntergebogen werden. Ihr Scheitel muß über dem Schwerpunkt, nicht darunter, liegen. Aus der Gleichung für E entnehmen wir, daß

$$\operatorname{tg} \vartheta < 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta$$

sein muß, aus der für D :

$$\frac{J \cdot \cos \vartheta + I \cdot \mu \cdot \cos \beta \cdot \sin \vartheta}{\frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2} \cdot \rho_0 + \varepsilon \cdot \left[\frac{J \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0^2} - F \cdot \sigma^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \right] > 0. \quad (181)$$

$$\text{Ist } \frac{J \cdot \cos \vartheta \cdot g}{\gamma \cdot \kappa \cdot u_0^2} > F \cdot \sigma^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta, \quad (182)$$



Fig. 38. Antoinette-Typ. Tiefe Schwerpunktslage.
Flugzeugbau Friedrichshafen. (Kober.)

so ist in (181) der Faktor von ε positiv und $D > 0$ ist mit beliebigen positiven Werten von ε genügt.

(182) kann auch, wenn wir uns der Gleichgewichtsbestimmung

$$G = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot u_0^2 \cdot F \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \text{ entsinnen, heißen:}$$

$$J > G \cdot \sigma^2.$$

Haben die Flügelhälften rechtwinkliches Format und klaffern je b Längeneinheiten (also ganze Breite des Flugzeugs $2b$), so ist

$$\sigma^2 = \frac{b^2}{12} \text{ und damit } J > G \cdot \frac{b^2}{12}.$$

$D > 0$ vermittelt, für den Fall, daß diese Bedingung nicht erfüllt wird, einen oberen Grenzwert für ε .

Die strenge Form der Stabilitätsbedingung $Q > 0$, für die $CD > EB$ zu setzen meist statthaft sein wird, gibt eine weitere Grenze für ε . Es ist klar, daß, wenn E verschwindet (wie für $\varepsilon = 0$), $(CD - EB)$ positiv, und wenn $D = 0$ wird, negativ ist.

Während also, um E einen positiven Wert zu geben, es sich nötig erwies, den Schwerpunkt unter den Flügelscheitel zu legen, kann eine unmäßig tiefe Lage desselben der Ungleichung $Q > 0$ widersprechen. Eingetretene Gleichgewichtsstörungen würden dann nicht gedämpft, sondern vergrößert.

Das Ergebnis steht in Einklang mit Erfahrungen, die nach Angabe von aeronautischen Zeitschriften und Büchern vorliegen;



Fig. 39. Antoinette-Typ. Schwerpunkt im Winkelscheitel, Kielflosse.
Deutsche Flugzeugwerke.

freilich werden meist diese Erscheinungen infolge Unkenntnis ihrer Gesetzmäßigkeit anderen Ursachen zugeschrieben, nicht der seitlichen Instabilität.

100. Fall II. Der Schwerpunkt liege auf dem Winkelscheitel des Tragflügels ($\varepsilon = 0$), die Kielflosse hinten ($x < 0$).

Dann sind alle Glieder, mit Ausnahme weniger, die W enthalten, in A, B, C, D positiv. Auch E wird positiv für $\vartheta = 0$, wenn

$$(-x) > \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \int \varrho (\varrho + \varepsilon) \cdot dF'}{\operatorname{tg} \beta \int (\varrho + \varepsilon) \cdot dF'}. \quad (183)$$

Für rechteckigen Tragflügel und Flugzeugbreite $2b$ heißt dies, daß $(-x) > \frac{4b}{3} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ sein soll. Die Kielflosse muß demnach mindestens $\frac{4}{3} \cdot b$, also zwei Drittel der Breite hinter dem Schwerpunkt liegen, da α und β von ähnlicher Größe sein werden.

In diesem Fall ist es auch nicht schwer, der letzten Stabilitätsbedingung $Q > 0$ zu genügen. Denn aus (180) entnehmen wir, daß für kleine Werte O und β , $B : (\gamma \cdot x \cdot u_0)$ auf den einfach unterstrichenen Ausdruck zurückgeführt werden darf, und daß der positive (einfach unterstrichene) Teil von E im Produkt mit jenem durch Glieder im Produkt CD (einfach unterstrichen) aufgehoben wird. Der Rest von $CD - EB$ ist wesentlich positiv, zum mindesten mit dem angenäherten Wert von B .

101. Wir sahen, daß es vorteilhaft ist, den Winkelscheitel über den Schwerpunkt zu legen. Dieser Bedingung $E > 0$ widersprechen in gewissem Umfang $D > 0$ und $Q > 0$. Letztere sind leichter zu befriedigen durch Anwendung einer Kieflösse, für die durch $E > 0$ wieder ein geringster Abstand vom Schwerpunkt vorgeschrieben ist. Die Vereinigung der beiden konstruktiven Maßnahmen verspricht günstige Stabilität.

Von Bedeutung ist noch der Fall, wo dem aufgebogenen Tragflügel zwei Kieflössen beigeordnet werden, derart, daß ihr resultierender Druckpunkt über dem Schwerpunkt und dieser im Winkelscheitel des Tragflügels liegt. Dann ist $D > 0$ und $E > 0$ verbürgt.

Grad der Stabilität.

Soweit ε in Frage kommt, wirkt Absteigen, soweit O , Ansteigen auf E nachteilig. Geeignete Wahl beider Größen kann zum Ausgleich führen, so daß E unabhängig von der Flugrichtung ϑ wird.

E enthält im Produkt mit $\sin \vartheta$ (die Änderungen von $\cos \vartheta$ sind geringfügig) den Klammerausdruck:

$$-\varepsilon F^2 \cdot \sigma^2 \cdot \mu \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta - O \cdot x f (q + \varepsilon)^2 \cdot d F' \quad (184)$$

und dieser wird zu Null, wenn:

$$O \cdot (-x) = \varepsilon \cdot F \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \frac{\sigma^2}{(q_0 + \varepsilon)^2 + \sigma^2} \quad (185)$$

Für rechtwinklige Tragflügel und kleines ε :

$$O \cdot (-x) = \frac{1}{4} \cdot \varepsilon \cdot F \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta.$$

Wenn auch der Faktor von $\sin \vartheta$ nicht ganz verschwindet, so wird doch durch Innehaltung dieses Gesichtspunktes es gelingen, die Grenzen für ϑ , die durch die Stabilität bestimmt sind, zu erweitern.

IX.

102. Nach alledem darf es als erwiesen gelten, daß ein Flugzeug konstruiert werden kann, das gleichermaßen Längs- wie Seitenstabilität besitzt. Zunächst nur bei horizontalem Fluge, dann aber auch bei An- und Abstieg innerhalb gewisser Grenzen des Winkels ϑ . Diese Grenzen dürfen noch überschritten werden unter bestimmten Voraussetzungen, die zum Teil in die Hand des Konstrukteurs gegeben sind. Für den Gleitflug gelingt es sogar, durch bestimmte Maßnahmen, sie ganz zu beseitigen.

Ein Flugzeug, das unter diesen Gesichtspunkten gebaut wird, weist selbst gegenüber den erfolgreichsten Typen der Gegenwart Abweichungen auf; es läßt sich aber auch nicht leugnen, daß dort Instabilität beobachtet wird. Immerhin besteht Meinungsverschiedenheit über Vorteil und Nachteil inhärenter Stabilität; wir können uns mit unserem Urteil auf die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen berufen.

Hilfsflächen für die Längsstabilisierung zu fordern, stößt schwerlich auf Widerstand. Denn die Anwendung eines Schwanzes bei fast allen neueren Typen zeigt die Erkenntnis seiner Unentbehrlichkeit. Ja einige derselben sind mit Schwanz und Kopfflosse versehen; es wurde aus den Gleichungen ersichtlich, daß hiermit die Längsstabilität gesteigert wird, was für den Anstieg von besonderem Vorteil ist. Der ursprüngliche Wright-Zweidecker besaß nur eine Kopfflosse. Diese muß dann steiler angestellt werden als die Tragfläche, wodurch der Schwerpunkt nach vorn rückt. Freilich wächst dann der aerodynamische Rücktrieb. Seitdem erschienen nur Flugzeuge mit Schwanzflosse auf dem Markt.

Über die Seitenstabilität werden stark abweichende Ansichten laut. Einige Stimmen von Gewicht raten von der Verwendung aufgebogener Flügel ab und wollen vertikale Flächen nur in dem Umfang zulassen, als dies für die Seitensteuerung unbedingt erforderlich ist; mit andern Worten heißt das auf inhärente Seitenstabilität überhaupt verzichten. Unter anderem führt man an, daß Flossen oder aufgebogene Flügel sehr unsicher in der Wirkung seien; daß durch sie Schwingungen hervorgerufen werden können; daß sie bei einer seitlichen Boe bedenkliche Neigungen herbeiführen.

Tatsächlich ist das Problem der Seitenstabilität außerordentlich schwer zu überblicken; besonders wenn die Tragflügel aufgebogen

sind. Aber Versuche, die nicht unter Gesichtspunkten, wie sie die Theorie liefert, durchgeführt werden, können nur unsichere Ergebnisse zeitigen, denn die Stabilität fordert für bestimmte Werte Grenzen. Wird eine Flosse vor dem Schwerpunkt angeordnet, so wird eine Bedingung erfüllt, eine weitere nicht und umgekehrt.

Treten andererseits Schwingungen auf, so ist das Flugzeug als instabil zu bezeichnen. Wir können mit unseren Bemühungen um Stabilität diese in anderer Form wieder verlieren. Den Nachweis hierfür hat der Antoinette-Typ erbracht.

Man hat festgestellt, daß der Schwerpunkt unter dem Winkelscheitel des Tragflügels liegen muß, daß aber bei einer allzu tiefen Lage Schwingungen einsetzen. Diese Tatsachen stehen in Einklang mit den Rechnungen von Mr. Harper, die Grenzwerte für die Tiefenlage festlegten, die mit gleichzeitiger Erfüllung aller Stabilitätsbedingungen eben noch verträglich waren.

103. Die Art, wie ein Flugzeug auf Böen reagiert, hängt wesentlich von seiner inhärenten Stabilität ab.

Ein plötzlicher Windstoß von sehr kurzer Dauer bringt das Flugzeug aus seiner Gleichgewichtslage und es ist zu fordern, daß es schnell diese wieder aufsucht, d. h. daß es stabil sei. Andernfalls vergrößert sich der Ausschlag oder es setzt eine Schwingung mit wachsender Amplitude ein.

Eine bleibende Windgeschwindigkeitsänderung bringt eine Änderung des Gleichgewichts mit sich; der Erfolg ist derselbe, als hätte sich aus irgend einem Grunde die gleichförmige Fluggeschwindigkeit u_0 um einen Betrag u geändert.

Regelmäßige Windstöße geben Anlaß zu erzwungenen Schwingungen, die zu untersuchen für den Mathematiker von Interesse ist. Wir haben lediglich die freien Schwingungen betrachtet. Fallen beide der Dauer nach zusammen, so tritt Resonanz ein, die sehr gefährlich sein kann. Sind jedoch die Eigenschwingungen gedämpft, so können auch die erzwungenen nicht ins Ungemessene wachsen, woraus sich abermals der Vorteil inhärenter Stabilisierung ergibt.

104. Wir haben ausschließlich „unendlich“ kleine Schwingungen betrachtet, d. h. die Störungen u , v und r dürfen bestimmte Grenzen nicht überschreiten, ohne daß die dargelegten Beziehungen sich ändern.

Untersuchungen über gröbere Störungen, wie sie das Flugzeug durch die innere Unruhe des Windes tatsächlich erfährt, wären

sehr erwünscht. Ebenso über die Festigkeitsbeanspruchungen im Fachwerk der Flugzeuge. Andere Anregungen in dieser Richtung gebe ich in Kapitel XI.

Am schlimmsten ist es, wenn das Flugzeug seine Steuerbarkeit verliert, sei es auch nur auf Augenblicke. Aus diesem Grunde sind Drehungen überhaupt möglichst hintanzuhalten. Es ist leicht, dieser Forderung gleichzeitig mit denen der Stabilität gerecht zu werden. Ein seitlicher Windstoß (etwa) dreht ein Flugzeug, das mit nur einer Kielflosse versehen ist, in seine Richtung, wenn diese Flosse vor dem Schwerpunkt, sich entgegen, wenn sie dahinter liegt. Sind jedoch zwei Flossen vorhanden, deren resultierender Druckpunkt im Schwerpunkt liegt, so hat der Stoß nur eine Verschiebung (Rücken), aber keine Drehung zur Folge.

Liegen die Flossen über dem Schwerpunkt, so sucht ein seitlicher Wind das Flugzeug auf die Seite zu legen; dem setzt sich aber ein bedeutender Drehungswiderstand (proportional V^2) entgegen. Jedenfalls ist deshalb eine nicht zu bedeutende Erhöhung der Flossen geboten, wie dies auch die Stabilitätsbedingungen zeigen.

Andererseits hatten wir stabile Verhältnisse erhalten, indem wir den resultierenden Druckpunkt ein wenig vor dem Schwerpunkt anordnen. Hierfür lieferte eine weitere Stabilitätsbedingung eine Grenze. Es ist also auch ein derartiges Flugzeug gegen allzu bedeutende Richtungsänderungen durch seitliche Windstöße geschützt.

Die horizontalen Flossen für Längsstabilisierung erfordern schon ein Fachwerk, mit dem dann auch leicht die Kielflossen zwecks Seitenstabilisierung in Verbindung gebracht werden können. Der Curtiß-Zweidecker weist bereits vorn eine dreieckige Kielflosse und hinten ein Seitensteuer auf.

Zwei Flossen über dem Schwerpunkt brachte schon 1894 Lanchester mit Erfolg an seinen Modellen an.

Langleys „Aerodrom“ bestand aus zwei aufgebogenen Tragflügeln hintereinander und einer vertikalen Schwanzflosse. Vermutlich ist ein solcher Typ unserem mit zwei hohen Kielflossen in bezug auf die Seitenstabilität ähnlich. Jedenfalls erwies er sich in dieser Hinsicht als vorzüglich. Indessen verdiente er wohl eingehende Beachtung und es tat uns leid, daß diese ihm im Rahmen des vorliegenden Buches nicht zuteil werden konnte.

X. Vergleich mit anderen Theorien.

105. Es unterlagen lediglich die Teile der nachfolgend angegebenen Arbeiten der Beurteilung, die unmittelbar den gleichen Gegenstand behandelten wie dies Buch.

Bryan-Williams. (1903, Lit. 6.)

Die Widerstandsableitungen waren hier im Verhältnis zur Masse des Äroplans gegeben. In C fehlt versehentlich ein Glied, was in der gegenwärtigen Schreibweise $N_r(X_u + X_v)$ hieß.

Hauptmann Ferber. (1905, Lit. 10.)

106. Hauptmann Ferber nimmt zunächst an, daß die Flügel eines Flugzeugs durch drei „fiktive“ Ebenen unter rechten Winkeln ersetzt werden dürfen. Das ist in bestimmten Fällen richtig, aber nicht in dem Umfang, wie er in der Anmerkung andeutet, daß eine Fläche ohne beträchtlichen Fehler durch ihre Projektionen vertreten werden könne. Denn wenn der Wind immer der Erde parallel wirkt, so resultiert dann senkrecht dazu keine Kraft, wie sie doch tatsächlich an dem Tragflügel auftritt.

Ferbers Hypothese kann jedoch in einem anderen Sinne zu Recht bestehen. Wir setzen voraus, daß die Drucke auf die einzelnen Flächenelemente sich nicht beeinflussen, also für alle Einfallwinkel dem Sinus-Gesetz entsprechen. Dann können für reine Translationen, mit Hilfe ähnlicher Transformationen, wie sie in der Festigkeitslehre oder der Dynamik gebräuchlich sind, drei Flächen in drei bestimmten zueinander senkrechten Ebenen so gewählt werden, daß ihr Luftwiderstand nach Größe und Richtung der gleiche ist, wie im gegebenen System. Die Lage der Ersatzflächen in ihren Ebenen ist durch die Gleichheit der Momente bedingt; die Lage der Ebenen selbst durch die Windrichtungen, die kein Moment des Luftwiderstandes um diese Richtung zur Folge haben. Für Systeme mit einer Symmetrieebene (Gegenteil: die Luftschrauben) ist dies ohne weiteres immer möglich.

Werden Drehungen einbezogen, so ist der Ersatz nicht mehr gleichwertig, wie wir schon daraus ersahen, daß durch eine Kieflosse keine Seitenstabilität erreicht wurde, wohl aber durch zwei. So gelangt Ferber dahin, Größen von außerordentlicher Bedeutung für die Seitenstabilität (die Momente des Drehungswiderstands V') ausser Acht zu lassen. Er erhält so eine kubische, an Stelle einer

biquadratischen Gleichung, oder wie er es nennt, eine Gleichung fünften Grades mit zwei verschwindenden Wurzeln ($\lambda = 0$). Die fünfte Potenz erscheint, weil er den Azimut als weitere Veränderliche einführt, während dieser doch ganz ohne Einfluß auf die Stabilität ist. Daß auch die vierte Wurzel entfällt, deutet auf einen Fehler. Und in der Tat ist die Vernachlässigung des Drehungswiderstands für die gebräuchlichen Flugzeug-Typen von beträchtlicher Breite nicht statthaft.

Die Verwendung der Eulerschen Winkel ist, wie ich schon andeutete (Anmerkung 2 des Abschnittes 13) unvorteilhaft; wirklich versagen denn auch die Gleichungen von Ferber, sobald ϑ verschwindet, also für horizontalen Flug.

Lanchester. (1908, Lit. 7.)

107. Alle unsre Folgerungen von Bedeutung stehen in Übereinstimmung mit denen von Lanchester. Die Unterschiede betreffen lediglich den Gang und die Art der Rechnung.

Lanchesters Bedingung der Längs-Stabilität beruht wesentlich auf der Annahme „schmaler Flügel unter kleinen Winkeln“ und ist der unsrigen gleich im einfachsten Fall für horizontalen Flug. Immerhin darf man sich nicht verhehlen, daß sein Ansatz der erwünschten Strenge ermangelt. Er setzt voraus, daß wir es mit einfachen harmonischen Schwingungen zu tun haben, und nimmt daher Mittelwerte, wo allein die Differentialgleichung zureicht. Die Arbeit beginnt mit der Berechnung der Flugbahn (phugoid) eines „idealen“ Flügels, der sich der Bewegungsrichtung von selbst tangential anschmiegt. Rücktrieb und Trägheitsmoment werden dann erst durch Korrekturen berücksichtigt. Gleichzeitig damit zieht er die Wirkung eines Schwanzes in Rechnung. Daß Lanchesters Vorgehen zu richtigen Ergebnissen führte, machte unsre Erörterung der langen Schwingungen (Abschnitt 52 und 53) wahrscheinlich.

Wir mußten auch Näherungen verwenden, um die beiden Schwingungsarten zu scheiden. Die erste betraf die Dauer, und die Flugbahn wies dann denselben Charakter auf wie die „Phugoide“ Lanchesters. Um die Dämpfung zu bestimmen, bedurften wir einer zweiten Näherung, die aber nicht mehr das Trägheitsmoment unbeachtet lassen durfte. Der Dämpfungsfaktor ergab sich als klein gegenüber der Frequenz und rechtfertigte somit die Annahme von Lanchester. Auf der anderen Seite fielen in deren Folge die

kurzen Schwingungen ganz außer Betracht. Daß die Bedingung der Längsstabilität dennoch zureicht, entspricht der Tatsache, daß die langen Schwingungen ihre Erfüllung ebenso fordern wie die kurzen.

Für die Seiten- und Richtungsstabilität stellt Lanchester nicht die drei Bewegungsgleichungen auf. Aber er weist mit Nachdruck darauf hin, daß die drei Arten der Bewegung nicht für sich, sondern nur im Zusammenhang betrachtet werden dürfen. Er betont die Notwendigkeit von Kielflossen bzw. der Aufbiegung der Tragflügel. Mit der „Flossenzerlegung“ kommt er zu gleichen Schlüssen, wie wir mit der Achsenverschiebung in den resultierenden Druckpunkt der Flossen. Auch er weist auf die grundsätzlich verschiedene Wirkung einer einzelnen Kielflosse und eines Flossenpaares hin. Die Einführung des „aerodramischen“ und „aerodynamischen“ Radius in Ausdrücke, wo wir V zu setzen hatten, wurde schon erwähnt (Abschnitt 77 und 93). Lanchester beschränkt seine Rechnungen auf den horizontalen Flug. Es wird aber ein Versuch beschrieben, bei dem an bestimmten Punkten der Flugbahn das Modell sich plötzlich auf die Seite zu legen begann. Offenbar überschritt die Flugrichtung (ϑ) gegen die Vertikale an diesen Punkten infolge der Längsschwingungen den mit der Seitenstabilität verträglichen Grenzwert.

Ob die Bezeichnung Lanchesters: „Drehungsstabilität“ oder unsere: „Unsymmetrische Stabilität“ zu wählen sei, ist Sache der Terminologie.

Brillouin. (1909, Lit. 8.)

108. Prof. Marcel Brillouin nimmt die Frage des Gleichgewichts und der Stabilität an einer anderen Stelle auf. Seine Untersuchungen betreffen die „statische“ Stabilität. Er betrachtet mit Hilfe metazentrischer Kurven die Bedingungen, unter denen ein Flugzeug seine Gleichgewichtslage wieder aufsucht. Er geht dann zum Problem der Steuerung über, wodurch er das von uns umgrenzte Gebiet verläßt.

Reißner. (1910, Lit. 9.)

109. Die erste der beiden sehr interessanten Abhandlungen Dr. H. Reißners behandelt die Seitensteuerung der Flugzeuge auf sicherer, einwandfreier Grundlage. Die zweite macht darauf aufmerksam, daß die vorher vorgeschlagenen Seiten-Stabilitäts-Be-

dingungen nicht hinreichen, sondern noch eine weitere erfüllt werden muß.

Crocco. (1907, Lit. 11.)

110. Leutnant Croccos erster Aufsatz befaßte sich mit Luftschiffen, nicht mit Flugzeugen. Für die Längsstabilität erhält er eine kubische statt einer biquadratischen Gleichung auf Grund der Annahme, daß „die horizontale Geschwindigkeit innerhalb der betrachteten Zeit unveränderlich sei“. So kommt nur Drehung und Höhengschwankung in Frage. Lanchesters und unsere Untersuchungen zeigen aber, daß die Geschwindigkeitsschwankungen in der Flugrichtung eine bedeutende Rolle spielen; ja, daß die Stabilität in höherem Maße von den langen als von den kurzen Schwingungen abhängt, derart, daß die Erfüllung der Stabilitätsbedingung für jene im allgemeinen auch für diese gilt. Jedenfalls ist die Voraussetzung für Flugzeuge nicht zulässig, für Luftschiffe sehr fragwürdig. Für die Richtungsstabilität erhält Crocco ebenfalls eine Gleichung dritten Grades, die auf Flugzeuge sicher auch nicht zutrifft. In einer weiteren Arbeit wird darauf hingewiesen, daß die Stabilität eines Flugzeugs dadurch bedingt ist, daß der horizontale Hilfsflügel hinten liegt und weniger stark als der Tragflügel angestellt wird.

Soreau. (1908, Lit. 12.)

111. Soreau gelangt für die Längsstabilität zu einer Gleichung vierten Grades und leitet daraus Stabilitätsbedingungen ab, die den unseren entsprechen. In betreff der Seitenstabilität verfällt er aber wieder in den Fehler, die Verkoppelung von Rollen, Gieren und Rücken außer Acht zu lassen; so bezeichnet er mit Seitenstabilität ihren engsten Begriff und gelangt zu Ergebnissen, die mit den hier gegebenen völlig im Widerspruch stehen, ja schon der Richtung zuwiderlaufen, in der Lanchester in diesem Falle vorgeht. Soreau verwirft die Verwendung von Kielflossen und aufgebogenen Tragflügeln, im besonderen erhöhte Flossen. Daraus folgt der Verlust inhärenter, und die Notwendigkeit automatischer Stabilität.

Lecornu. (1909, Lit. 13.)

112. Das „Government Blue Book 1909—1910“ berichtet über eine Arbeit Lecornus über graphische Statik der Kräfte am Flugzeug. Das Sinusgesetz des Widerstandes wird dabei als gültig angenommen.

XI. Probleme.

113. Die folgenden Probleme liegen teils jenseits der Aufgabe dieses Buches, teils konnten sie darin nicht die gebührende Behandlung erfahren. Einige sind ziemlich einfach und können einem Studierenden von angemessener Fähigkeit zur Übung oder Untersuchung dienen. Andere bedürfen zu ihrer Lösung eines reichlicheren Aufwandes mathematischer oder experimenteller Mittel.

1. Eine rein mathematische Aufgabe bedeutet die Bestimmung der Größe und Lage gleichwertiger Flächen in drei zueinander senkrechten Ebenen für ein ganz beliebiges symmetrisches Flügel-system. (Siehe Abschnitt 106.)

2. Steuerung eines Flugzeuges im horizontalen Kreis. Die Arbeit von Dr. Ing. H. Reißner kann hierzu Anleitung geben. (Abschnitt 109.)

3. Stabilität der Luftschiffe. In Verbindung hiermit Erörterung von Formeln, die am besten Trägheits- und Stirnwiderstand gleichzeitig berücksichtigen; unter Beobachtung der Tatsache, daß die Hydrodynamik mit einer unverdichtbaren, reibungsfreien Flüssigkeit rechnet. Es müssen die sechs Bewegungsgleichungen aufgestellt werden und auf ihre gegenseitige Abhängigkeit geprüft werden.

4. Bestimmung der Bewegungen eines Flugzeuges nach Störung durch einen Windstoß von vorn (bezw. hinten), von unten (bezw. oben) oder von der Seite.

5. Berechnung der Materialbeanspruchungen in einem derartigen Fall.

6. Experimentelle Untersuchung der Drehungen breiter Flügel. Aufstellung von Formeln.

7. Versuche über die Strömungsablenkung durch eine vorgelagerte Fläche bezw. durch die Luftschraube.

8. Einfluß einer niedrigen Schwerpunktslage auf die Längsstabilität. (Siehe Abschnitt 69.)

9. Versuche über den Einfluß der Flugrichtung (ϑ) gegen den Horizont auf die Stabilität.

10. Eingehende Prüfung des Einflusses des Zentrifugalmomentes W auf die Seitenstabilität. Wir haben zwecks Vereinfachung meist angenommen, daß W verschwinde; also die x -Achse Hauptträgheitsachse sei. Man kann mit Hilfe der vollständig ge-

gebenen Gleichungen die Bedeutung eines beträchtlichen W abwerten.

11. Seitenstabilität eines Systems von zwei aufgebogenen Tragflügeln (Langleys Aerodrome). Die Rechnung wird ziemlich umständlich.

12. Ausführliche Beschreibung der Art der unsymmetrischen Schwingungen und Bewegungen.

13. Untersuchung erzwungener Schwingungen infolge periodischer Windstöße, mit besonderer Berücksichtigung der Resonanz und der Dämpfung.

14. Die Möglichkeit einer schraubenförmigen stetigen Bewegung eines symmetrischen Flugzeugs ist zu erörtern, besonders für den Fall seitlicher Instabilität.

15. Eingehende Besprechung des Einflusses der Wölbung auf Längs- und Seitenstabilität.

16. Vollständige mathematische Untersuchung der Stabilität und der Schwingungen eines Drachens. Erörterung darüber, inwieweit die Widerstandsableitungen und die Stabilität eines Flugzeugs durch Versuche mit einem Modell als Drachen beurteilt werden dürfen.

17. Bestimmung der Drehungsableitungen von Modellen durch Versuch und Vergleich mit der Rechnung. Methoden siehe Abschnitt 28 und 29. Beobachtung derselben Modelle im freien Flug und Vergleich ihres Verhaltens mit den Ergebnissen der Rechnung.

18. Photographische Bestimmung der Flugbahn von Modellen mit Gummizugantrieb oder im Gleitflug unter besonderer Berücksichtigung der seitlichen Schwingungen.

19. Graphische Statik des Längsgleichgewichts dreier oder mehrerer Flügel mit verschiedenen Abszissen. Einfluß veränderter Schränkung.

20. Schließlich ist die Diskussion der Bewegungsgleichungen in ihrer allgemeinsten Form und die Bestimmung der Fälle, in denen sie genaue Integrationen zulassen, wahrscheinlich ein mathematisches Problem, das die Aufmerksamkeit der Mathematiker für das nächste halbe Jahrhundert zu fesseln imstande sein wird, wie seinerzeit das Problem der drei Körper.

Beispiele.

114. Einzelheiten und Abmessungen der neueren Flugzeuge kann man leicht in Zeitschriften und Jahrbüchern finden. So erhält

man Überfluß an Beispielen, um den Rechnungen dieses Buchs im Einzelfall nachzugehen: Näherungslösungen der Gleichungen vierten Grades. Dauer und Dekrement der Schwingungen.

Anhang.

Kreiselwirkung der Schraube.

115. Die Kreiselwirkung infolge des Dralls der Schraube beeinflusst nicht nur, wie bekannt ist, die Steuerung, sondern bringt auch noch Drehungen um die y - und z -Achse zueinander in Beziehung, so daß für eine genaue Untersuchung alle sechs Gleichungen als simultan zu betrachten sind.

Von Vorteil ist es zweifellos, die Kreiselwirkung durch Verwendung zweier gegenläufiger Schrauben aufzuheben oder, wie eine französische Erfindung besagt, durch Zahnräder den Drehsinn des Motors für die Schraube umzukehren. Geeignete Dimensionierung sorgt dann für die Beseitigung der Störung.

Anderenfalls schreibt man zur angenäherten Ermittlung des Einflusses zunächst die Bewegungsgleichungen in ihrer gewöhnlichen Form getrennt an, und berechnet die Seitenschwingungen, welche die Kreiselwirkung bei den bekannten Längsschwingungen hervorruft und umgekehrt. Stimmen diese „erzwungenen“ Schwingungen der Dauer nach mit den „freien“ überein, so tritt Resonanz in Erscheinung, die wegen der Unannehmlichkeiten für den Flieger vermieden werden muß.

Automatische Stabilisierung.

116. Automatische Stabilisierung streben Versuche an, mit Kreiseln oder anderen mechanischen Vorrichtungen unmittelbar auf das Gleichgewicht des Flugzeugs einzuwirken, demgegenüber gilt es auf den Satz hinzuweisen:

Ein Flugzeug mit ebenen Flügeln ohne Kielflossen und ohne Aufbiegung kann man durch Kreisel oder Pendel allein nicht seitenstabil machen.

Dies gilt sogar, wenn man sich des Kreisels zur Flächenverwindung oder Klappenverstellung bedient.

Beweis. — Damit die Symmetrieebene des Flugzeugs sich nach Störungen wieder vertikal zu stellen sucht, muß der Kreisel gegen Schwankungen des Apparats gegenüber der Richtung der Schwere empfindlich sein.

Nun möge etwa eine seitliche Drehung aus der horizontalen Gleichgewichtslage stattgehabt haben. Dann setzt wegen des vorausgesetzten Mangels jeglichen Tangentialwiderstandes ($Z_w = 0$) ein seitliches Abrutschen mit der Beschleunigung $g \cdot \sin \varphi$ ein. Dann vermag der Kreisel höchstens eine Schwankung in der Größe der Gravitationsbeschleunigung von g nach $g \cdot \cos \varphi$ anzuzeigen, da dies nun ihre Komponente parallel der Symmetrieebene des Flugzeugs ist; dieses in seine alte Lage zurückzubringen, zeigt der Kreisel kein Bestreben.

Es gilt vor allem also die Beschleunigung $g \cdot \sin \varphi$ herabzusetzen oder auch nur sie auf irgend eine Weise zur Kenntnis zu bringen. Dies kann allein dadurch geschehen, daß man das Flugzeug selbst oder den Kreisel mit Flossen, Klappen oder anderen Hilfsflächen in Verbindung bringt. Der Kreisel muß dann empfindlich gegen Geschwindigkeitsschwankungen sein. Wenn man diese aber zuläßt, so ist es wohl günstiger, auf den Kreisel überhaupt zu verzichten und starren Flossen die Stabilisierung ganz zu überlassen.

Hingegen kann man wohl Hilfsflächen vorsehen, die geeignet sind, die seitliche Instabilität zu vergrößern, und dann Kreisel so anordnen, daß sie diese Instabilität in Stabilität verkehren, wie es z. B. bei der Einschienenbahn geschieht (Brennen). Diese Art der Stabilisierung hat jedoch nur Aussicht auf Erfolg, wenn das Flugzeug an sich schon ausgesprochen stabil oder instabil ist; wenn anders, spricht der Kreisel auch auf Störungen nicht an und die Verwendung von Hilfsflächen wird unumgänglich.

Kritische Flugrichtungen.

117. Bei der Erörterung des Einflusses der Flugrichtung bekamen wir für diese zwei Grenzwerte, für die Längsstabilität $\vartheta = \arctg (2 \cdot \operatorname{tg} \alpha)$ und für die Seitenstabilität $\vartheta = \arctg (+2 \cdot \operatorname{tg} \alpha)$. Man kann sich diese Gesetzmäßigkeit durch die folgende Überlegung veranschaulichen.

Betrachten wir einen ebenen Flügel, so ist der Druck nach dem Widerstandsgesetz: $R = \frac{\gamma}{g} \cdot \kappa \cdot F \cdot u_0^2 \cdot \sin \alpha$ unveränderlich für $u_0^2 \cdot \sin \alpha = \text{konst.}$ Zeichnen wir in Polarkoordinaten diese Kurve, so ändert sich der Druck nicht für Geschwindigkeitsänderungen, die dieser Funktion entsprechen, also in Richtung der Tangente verlaufen. Ändert sich die Geschwindigkeit in dieser

Richtung stark, so nimmt der Druck ab, falls die Tangente innerhalb der Kurve verläuft und umgekehrt. Die Tangente schließt mit dem Radiusvektor u_0 den Winkel $\arctg(2 \operatorname{tg} \alpha) \sim 2\alpha$ ein.

Ist der Flügel ein Drachen in horizontalem Wind mit Anstellwinkel α und wird er durch eine Schnur gehalten, deren Neigung gegen die Vertikale kleiner ist als $\sim 2\alpha$, so hat eine geringe Geschwindigkeitszunahme senkrecht zur Schnur wachsenden, eine Abnahme sinkenden Druck zur Folge. Das bedeutet Instabilität. Um diese zu beseitigen, ist also der Schnur eine stärkere Neigung gegen die Vertikale zu geben als 2α . Zu vervollständigen wäre diese Überlegung durch Diskussion der Bewegungsgleichungen.

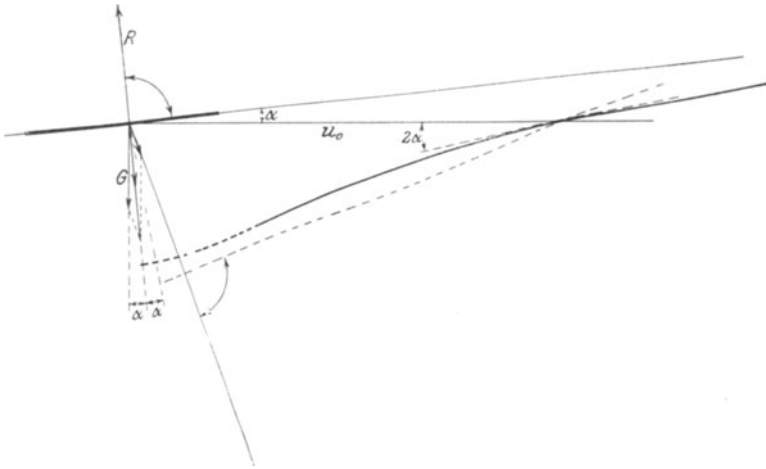


Fig. 40.

Ähnlich ließe sich nach den Annahmen des Abschnitt 76 zeigen, daß, wenn ein Flügel eine kleine Drehung in einer Ebene, die unter $\arctg(2 \operatorname{tg} \alpha)$ gegen die Flugrichtung liegt, erfährt, keine Drehmomente entstehen. Somit entspricht die Grenzsetzung $\operatorname{tg} \vartheta = 2 \operatorname{tg} \alpha$ für die Seitenstabilität der Tatsache, daß für einen unter diesem Winkel gleitenden Flügel eine Drehung um eine vertikale Achse keine Momente wachruft. Das ist auch aus den Koeffizientengleichungen (23) des Abschnitt 20 ersichtlich. Die Gleichung $E = 0$ lautet in Determinantenform:

$$\left. \begin{array}{ccc} 0 & \cos \mathcal{J} & -\sin \mathcal{J} \\ L_w & L_p & L_q \\ M_w & M_p & M_q \end{array} \right\} = 0,$$

d. h. die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p \cdot \cos \mathcal{J} - q \cdot \sin \mathcal{J} &= 0, \\ w \cdot L_w + p \cdot L_p + q \cdot L_q &= 0, \\ w \cdot M_w + p \cdot M_p + q \cdot M_q &= 0 \end{aligned}$$

müssen verträglich sein; mit anderen Worten: diejenige Bewegungsform w, p, q , bei der keine Momente auftreten ($L = 0; M = 0$), ist eine Drehung um eine vertikale Achse $p/q = \operatorname{tg} \mathcal{J}$.

Der Grenzwert $\mathcal{J} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-2 \operatorname{tg} \alpha)$ für Längsstabilität, der aus der Koeffizientengleichung für D folgt, ist schwieriger zu deuten. Kehren wir zu den Gleichungen (18 a) zurück, so wird die Bedingung $G \cdot \sin \mathcal{J} + u_0 \cdot X_u = 0$ oder $G \cdot \sin \mathcal{J} + 2 X_0 = 0$. Für Stabilität muß also der Widerstand durch die Wirkung der Schwere in der Flugrichtung kleiner sein, als der doppelte Luftwiderstand. Stirnwiderstand vergrößert diesen, gestattet somit steileren Anstieg.

Definitionen.

Anstellwinkel heißt der Winkel zwischen Flügel-Ebene (bezw. Sehnenebene gewölbter Flügel) und Richtung des gleichförmigen Flugs.

„Aufbiegung“ besitzt ein Tragflügel, der von vorn V-förmig gesehen wird.

Die Bewegungen eines Flugzeugs nach einer Störung bezeichnet man wie folgt (s. Fig. 1):

	Bewegungen in Richtung der:	Drehungen um die:
x -Achse	Stoßen u	Schlingern p
y -Achse	Wogen v	Gieren q
z -Achse	Rücken w	Stampfen r

„Einfach tragend“ ist ein Flügelsystem, bei dem das ganze Gewicht von einem Flügel aufgenommen wird; doppelt oder mehrfach tragend eines, bei dem es sich auf zwei oder mehr Tragflügel verteilt.

Flieger ist der Insasse bzw. Führer eines Flugzeugs; wie Fahrer, der eines Fahrzeugs.

Flossen sind mit dem Flugzeug in starre Verbindung gebrachte Flächen (eben oder gewölbt), die der Stabilisierung dienen. Der engere Begriff: vertikal oder horizontal, ergibt sich aus dem Zusammenhang; gewöhnlich bezeichnet Schwanz- oder Kopfflosse eine horizontale Hilfsfläche, Kielflosse eine vertikale.

Flügel sind große horizontale, ebene oder gewölbte Flächen, die zum Tragen dienen.

Klappen sind an den Enden der Flügel drehbar oder fest angebracht. Ihr Anstellwinkel kann verschieden von dem des Flügels sein. Sie stehen zur Symmetrieebene nicht senkrecht.

„Kleine Winkel“ α , sind solche, für die das Sinusgesetz des Luftwiderstandes zutrifft.

„Neutral“ ist ein Schwanz, der bei gleichförmigem Flug keinen Auftrieb besitzt; also in der Flugrichtung liegt.

„Schmale Flügel“ sind von so geringer Tiefe, daß Unterschiede der Umfangsgeschwindigkeit beim Stampfen vernachlässigt werden dürfen.

Stabilität.

Automatische Stabilität strebt man mit beweglichen mechanischen Vorrichtungen (Kreiseln, Pendeln) an.

Inhärente Stabilität kann man durch geeignete Anordnung unbeweglicher Flächen (Flossen) erreichen.

Symmetrische oder Längsstabilität betrifft Bewegungen, bei denen die Symmetrieebene des Flugzeugs ihre Lage im Raum nicht ändert.

Unsymmetrische Stabilität faßt Seiten- und Richtungsstabilität unter einen Begriff zusammen. Lanchester nennt sie Rotationsstabilität. Wir gebrauchten vielfach die Bezeichnung Seitenstabilität im umfassenden Sinne: w , p und q .

Symbole.

A	ω	} Koeffizienten der Gleichung vierten Grades für λ . ω ist eine beliebige physikalische Dimension. (Abschnitt 20 für Seitenstabilität Index s.)
B	$\omega \cdot \text{sec}^{-1}$	
C	$\omega \cdot \text{sec}^{-2}$	
D	$\omega \cdot \text{sec}^{-3}$	
E	$\omega \cdot \text{sec}^{-4}$	
F	m^2	Flächeninhalt der Flügel.
G	kg	Gewicht des Flugzeugs.
H	m	Amplitude der Abszissenschwankungen der Flugbahn.

I	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	} „Trägheitsmomente“ des Flugzeuges um die	} $\begin{matrix} x- \\ y- \\ z- \end{matrix}$	} Achse.
J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$			
K	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	} Drehmomente der Luftkräfte um die	} $\begin{matrix} x- \\ y- \\ z- \end{matrix}$	} Achse.
L	$\text{kg} \cdot \text{m}$			
M	$\text{kg} \cdot \text{m}$			
N	$\text{kg} \cdot \text{m}$			
O	m^2	Flächeninhalt der Flossen.		
P	m^4	Zentrifugalmoment der Flossen.		
Q	$\omega^3 \cdot \text{sec}^{-6}$	Determinante der Gleichung vierten Grades.		
R	kg	Resultierende des Luftwiderstands.		
S	kg	Schub der Luftschaube.		
T	m^4	Trägheitsmoment der Flossen.		
V	m^4	Trägheitsmoment des Flügels.		
W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Zentrifugalmoment des symmetrischen Flugzeuges.		
X	kg	} Kräfte des Luftwiderstandes entgegen der	} $\begin{matrix} x- \\ y- \\ z- \end{matrix}$	} Achsenrichtung.
Y	kg			
Z	kg			
a	m	} Halbe $\begin{matrix} \text{Tiefe} \\ \text{Breite} \end{matrix}$ des Flügels.		
b	m			
c	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}$	Produkt $\gamma/g \cdot u_0 \cdot F$.		
c	m	Radius der Flügelwölbung.		
d	m	Halber Abstand zweier Schwanzflossen.		
d	—	Differential.		
e	m	Druckpunktsentfernung vom Flächenmittelpunkt.		
e	—	Natürliche Zahl: 2,7182.		
f	—	Funktion.		
g	$\text{m} \cdot \text{sec}^{-2}$	Erdbeschleunigung: 9,81 m/sec^2 .		
h	m	Geschwindigkeitshöhe: $u_0^2 : 2g$.		
i	m	} Trägheitsradius des Flugzeuges für die	} $\begin{matrix} x- \\ y- \\ z- \end{matrix}$	} Achse.
j	m			
k	m			
l	m	Abstand zweier Flügel. $x_1 - x_2$; Schwanzlänge.		
l	—	} Richtungskosinus der Resultierenden mit der	} $\begin{matrix} x- \\ y- \\ z- \end{matrix}$	} Achse.
m	—			
n	—			

\dot{p}	sec^{-1}	} Winkelgeschwindigkeiten um die $\left\{ \begin{array}{l} x- \\ y- \\ z- \end{array} \right\}$ Achse.
\dot{q}	sec^{-1}	
\dot{r}	sec^{-1}	
s	m	Abstand des Schubs vom Schwerpunkt.
t	sec	Zeit.
u	m. sec^{-1}	} Geschwindigkeiten in Richtung $\left\{ \begin{array}{l} x- \\ y- \\ z- \end{array} \right\}$ Achse. der
v	m. sec^{-1}	
w	m. sec^{-1}	
x	m	} Ordinaten im System des Flugzeugs.
y	m	
z	m	
α	—	Anstellwinkel.
β	—	Neigung aufgebogener Flügel.
γ	kg. m^{-3}	Spezifisches Gewicht der Luft.
δ	—	Differenz der Anstellwinkel $\alpha_1 - \alpha_2$.
ε	—	Änderungen der Flugrichtung $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$.
ε	—	Korrektur von verschiedener, jeweils ersichtlicher Bedeutung.
ζ	m	„Aerodynamischer“ bzw. „Aerodromischer“ Radius.
ϑ	—	Flugrichtung gegen den Horizont.
η	m	Ordinate der Flugbahn bei Längsschwingungen.
κ	—	Tangente der Funktion $f(\alpha) = \kappa \cdot \sin \alpha$.
λ	sec^{-1}	Wurzel der Gleichung vierten Grades.
μ	sec^{-1}	deren reeller Teil; bzw. $\mu = \text{tg } \alpha$.
ν	sec^{-1}	deren imaginärer Teil. $i = \sqrt{-1}$.
ξ	m	Abszisse der Flugbahn bei Längsschwingungen.
π	—	Kreiskonstante.
ρ	m	Hebelarm der Resultierenden R für den Schwerpunkt.
σ	—	Neigung des Schubs gegen die x -Achse.
τ	—	Flächenverhältnis $F_2 : F_1$.
φ	—	Seitliche Neigung des Flugzeugs.
χ	m	Entfernung der Druckpunktsnormalen der Klappen vom Schwerpunkt.
ψ	—	Kursrichtung.

$\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ Winkelgeschwindigkeiten um die Achsen z_I, x_I, y_I des stetig fortschreitenden Koordinatensystems. ξ hat in Abschnitt 87, ρ und σ in 98 ff., l, m, n in den Abschnitten 14 und 19 abweichende Bedeutung.

Literaturnachweis.

1. Drexler, Franz, Zur Frage der automatischen Flugmaschinensteuerung, Motorwagen 1912.
2. Kutta, W. M., Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung (Sitz.-Ber. der Kgl. Bayr. Akademie der Wissensch., mathem.-physikal. Klasse 1910).
3. Kutta, W. M., Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen (Sitz.-Ber. der Kgl. Bayr. Akademie d. Wissensch., mathem.-physikal. Klasse 1911).
4. Eiffel, G., Der Luftwiderstand und der Flug. (Übersetzt von Dr. Fritz Huth, Berlin 1912.)
5. Föppl, O., Windkräfte an ebenen und gewölbten Platten. Dissertation Aachen, Berlin 1911.
6. Bryan, G. H. and Williams, W. E., The Longitudinalstability of Aerial Gliders. Proceedings of the Royal Society of London. June 1903.
7. Lanchester, F. W., Aerodynamik, ein Gesamtwerk über das Fliegen. Übersetzt von C. und A. Runge. I. Band, Berlin 1909. II. Band, Berlin 1911.
8. Brillouin, M., Stabilité des Aeroplanes, surface métacentrique. Revue de Mécanique 1909.
9. Reißner, H., Die Seitensteuerung der Flugmaschinen. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1910.
10. Ferber, Revue d'Artillerie 67. I, II. Oktober und November 1905.
11. Crocco, Bolletino della Societa aeronautica italiana. April 1907, Juni 1907. Government Blue Book 1909/10, S. 41, 161.
12. Soreau, État actuel et l'Avenir de l'Aviation. (Memoires de la Societé des Ingenieurs civiles de France, 1908, II. Blue Book 1909/10, S. 54. 154.)
13. Lecornu, Sur la statique graphique de l'aeroplane. (Comptes rendus, 22. Februar 1909.)
14. Wieselsberger, K., Über die statische Längsstabilität der Drachenflugzeuge. Dissertation München. Berlin 1913.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Leitfaden der Flugtechnik.

Für Ingenieure, Techniker und Studierende.

Von

Professor Siegmund Huppert,

Ingenieur, Direktor des Kyffhäuser-Technikums Frankenhausen a. Kyffh.

Mit 235 Abbildungen.

In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.

Dieses Buch bringt alles Wissenswerte aus dem Gebiete der Flugtechnik in einer für technische Kreise nutzbringenden Bearbeitung. Wohl ist die deutsche Literatur reich an beschreibenden Werken über Flugtechnik, doch fehlte es noch an einem umfassenden, den Techniker und Ingenieur, den Konstrukteur befriedigenden Leitfaden der Flugtechnik. Dieser neue Leitfaden soll nun zugleich dem Lehrer der technischen Lehranstalten einen Behelf bieten und dem Studierenden Gelegenheit geben, sich in die einzelnen Gebiete zu vertiefen. Vor allem auch dem in der Praxis stehenden Ingenieur, der sich über das von seinem Spezialfach abseits liegende Gebiet Kenntnisse erwerben will, wird das Buch von Nutzen sein.

Die

Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes

und ihre Anwendung in der Flugtechnik.

Von

Dr. Oscar Martiensen, Kiel.

Mit 75 Textfiguren.

Preis M. 5,40; in Leinwand gebunden M. 6,—.

Beitrag zur Berechnung der Luftschrauben

unter Zugrundelegung der Rateauschen Theorie.

Von

Dipl.-Ing. Claude Dornier,

Ingenieur der Luftschiffbau Zeppelin G. m. b. H. Friedrichshafen.

Mit 66 Textfiguren.

Preis M. 5,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Luftfahrt und Wissenschaft.

In freier Folge herausgegeben

von

Joseph Sticker.

Schriftleitung und Verwaltung der Stiftungen:

Professor **A. Berson**, Dipl.-Ing. **C. Eberhardt**,
Gerichtsassessor **J. Sticker**, Professor Dr. **R. Süring**,
Wirkl. Geh. Oberbaurat Dr. **H. Zimmermann**.

Bisher erschienen:

1. Heft: **Luftfahrrecht.** Von Dr. jur. **Josef Kohler**, Geh. Justizrat, ordentlicher Professor der Rechte an der Universität Berlin. Preis M. 1,20.
2. Heft: **Experimentelle Untersuchungen aus dem Grenzgebiet zwischen drahtloser Telegraphie und Luftelektrizität.** Von Dr. **M. Dieckmann**, Privatdozent für reine und angewandte Physik an der Kgl. Technischen Hochschule München. 1. Teil: Die Empfangsstörung. Mit 56 Textfiguren. Preis M. 3,—.
3. Heft: **Zur Physiologie und Hygiene der Luftfahrt.** Von Dr. med. **N. Zuntz**, Geh. Regierungsrat, Professor der Physiologie an der Landwirtschaftl. Hochschule Berlin. Mit 11 Textfiguren. Preis M. 2,—.
4. Heft: **Stoffdehnung und Formänderung der Hülle von Prall-Luftschiffen.** Untersuchungen im Luftschiffbau der Siemens-Schuckert-Werke. Von Dr.-Ing. **Rudolf Haas** und Dipl.-Schiffbauingenieur **Alexander Dietzius**, Privatdozent für Luftschiffbau an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. Mit 138 Textfiguren. Preis M. 6,—.
5. Heft: **Die Erforschung des tropischen Luftozeans in Niederländisch-Ost-Indien.** Von Dr. **W. van Bemmelen**, Direktor des Königlichen Magnetischen und Meteorologischen Observatoriums in Batavia. Mit 13 Textfiguren. Preis M. 2,40.
6. Heft: **Versuche an Doppeldeckern zur Bestimmung ihrer Eigengeschwindigkeit und Flugwinkel.** Von Dr.-Ing. **Wilhelm Hoff**, Leiter der Flugzeugabteilung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V. in Berlin-Adlershof. Mit 32 Textfiguren. Preis M. 4,—.
7. Heft: **Tafeln zur astronomischen Ortsbestimmung.** Von Dr. **Arnold Kohlschütter**, Astronom am Mount Wilson Solar Observatory, Pasadena, Cal. Mit einer Sternkarte. In Leinwand gebunden Preis M. 8,—.

Demnächst erscheinen:

Experimentelle Untersuchungen aus dem Grenzgebiet zwischen drahtloser Telegraphie und Luftelektrizität. Von Dr. **M. Dieckmann**, Privatdozent für reine und angewandte Physik an der Königl. Technischen Hochschule München. 2. Teil: Die Reichweitenänderung.

Synthetische Untersuchung von Luftschraubentypen. Untersuchungen der Königl. Italienischen Militäranstalt für aeronautische Forschungen und Bauten, Rom. Von Kapitän **Giulio Constanzi**.

Die Stabilität der Flugmaschine. Von Dr.-Ing. **H. Reissner**, Professor an der Königl. Technischen Hochschule Charlottenburg.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Denkschrift der I. Internationalen Luftschiffahrt-Ausstellung (ILA) zu Frankfurt a. M. 1909.

Offizieller Bericht, herausgegeben von Prof. Dr. **Bernhard Lepsius**, Vorsitzender des Wiss.-Techn. Ausschusses und Prof. Dr. **Richard Wachsmuth**, Vorsitzender der Wissenschaftlichen Kommission. In zwei Bänden.

Band I: **Wissenschaftliche Vorträge.** Mit 247 Textfiguren und 5 Bildnissen. Preis M. 6,—, in Leinwand geb. M. 8,—.

Band II: **Ergebnisse der Ausstellung.** Mit 216 Textfiguren. Preis M. 8,—, in Leinwand gebunden M. 10,—.

Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Flugtechnik. Erster Band. 1912/13. 2 Lieferungen. Preis je M. 5,—.

Jahrbuch der Luft-Fahrzeug-Gesellschaft (früher Motorluftschiff-Studiengesellschaft). Sechster Band. 1912/13. Mit 91 Textfiguren und 1 Tafel. In Leinwand gebunden Preis ca. M. 6,—.

Gleichgang und Massenkräfte der Fahr- und Flugzeugmaschinen.

Eine Untersuchung über Zylinderzahl und Zylinderanordnung. Von Dr.-Ing. **Otto Kölsch**, Assistent für Maschinenbau an der Technischen Hochschule zu München. Mit 66 Textfiguren.

Preis M. 5,—.

Technische Hydrodynamik. Von Dr. **Franz Prášil**, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Mit 81 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 9,—.

Technische Schwingungslehre.

Einführung in die Untersuchung der für den Ingenieur wichtigsten periodischen Vorgänge aus der Mechanik starrer, elastischer, flüssiger und gasförmiger Körper sowie aus der Elektrizitätslehre. Von Dr. **Wilhelm Hort**, Dipl.-Ing. Mit 87 Textfiguren. Preis M. 5,60; in Leinwand gebunden M. 6,40.

Elastizität und Festigkeit.

Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Von Prof. Dr.-Ing. **C. v. Bach**, Stuttgart. Sechste vermehrte Auflage. Mit Textabbildungen und 20 Lichtdrucktafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Diplom-Ingenieur, vorm. Professor für Ingenieur-Mechanik und Material-Prüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: **Niedere Algebra und Analysis. — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung. — Kegelschnitte.** Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben.

In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Professor Ferdinand Wittenbauer, Graz.

- I. **Allgemeiner Teil.** 773 Aufgaben nebst Lösungen. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 572 Textfiguren.
Preis M. 5,—; in Leinwand gebunden M. 5,80.
- II. Teil. **Festigkeitslehre.** 591 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 490 Textfiguren. Preis M. 6,—; in Leinwand gebunden M. 6,80.
- III. Teil. **Flüssigkeiten und Gase.** 504 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 347 Textfiguren.
Preis M. 6,—; in Leinwand gebunden M. 6,80.

Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau. Herausgegeben von Ingenieur C. Volk, Berlin.

- Erstes Heft: **Die Zylinder ortsfester Dampfmaschinen.** Von Oberingenieur H. Frey, Berlin. Mit 109 Textfiguren.
Steif broschiert Preis M. 2,40.
- Zweites Heft: **Kolben.** I. Dampfmaschinen- und Gebläsekolben. Von Ingenieur C. Volk, Berlin. II. Gasmaschinen- und Pumpenkolben. Von A. Eckardt, Betriebsingenieur der Gasmotorenfabrik Deutz. Mit 247 Textfiguren. Steif broschiert Preis M. 4,—.
- Drittes Heft: **Zahnräder.** I. Teil. Stirn- und Kegelräder mit geraden Zähnen. Von Dr. A. Schiebel, o. ö. Professor d. k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag. Mit 110 Textfiguren.
Steif broschiert Preis M. 3,—.
- Viertes Heft: **Die Kugellager und ihre Verwendung im Maschinenbau.** Von Werner Ahrens, Winterthur. Mit 148 Textfiguren.
Steif broschiert Preis M. 4,40.
- Fünftes Heft: **Zahnräder.** II. Teil. Räder mit schrägen Zähnen. Von Dr. A. Schiebel, o. ö. Professor der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag. Mit 116 Textfiguren.
Steif broschiert Preis M. 4,—.

Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungskraftmaschinen und Kraftgasanlagen. Von Hugo Güldner, Maschinenbaudirektor, Vorstand der Güldner-Motoren-Gesellschaft in Aschaffenburg. Dritte, neubearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage. Mit 1285 Textfiguren, 35 Konstruktionstafeln und 200 Zahlentafeln.
In Leinwand gebunden Preis ca. M. 32,—.

Das Maschinen-Zeichnen. Begründung und Veranschaulichung der sachlich notwendigen zeichnerischen Darstellungen und ihres Zusammenhanges mit der praktischen Ausführung. Von A. Riedler, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 436 Textfiguren. In Leinwand geb. Preis M. 10,—.

Hilfsbuch für den Maschinenbau. Für Maschinentechniker sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Von Fr. Freytag, Professor, Lehrer an den technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. Vierte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 1108 Textfiguren, 10 Tafeln und einer Beilage für Österreich.
In Leinwand geb. Preis M. 10,—; in Ganzleder geb. Preis M. 12,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.